

## Conclusiones

## CONCLUSIONES:

Se investigan, en este trabajo de Tesis, cuales son los efectos del ruido en sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf en el régimen de ciclo límite y en la vecindad del punto de bifurcación. Se investigan también modelos sencillos de procesos estocásticos definidos en un anillo.

Se determina el espectro o densidad de potencia espectral de tales sistemas en presencia de ruido blanco y ruido de color.

Los sistemas dinámicos estudiados son procesos estocásticos definidos en espacios compactos. Para su investigación es suficiente utilizar una formulación perturbativa a partir de las representaciones por integral funcional. De esta forma es posible calcular densidades de probabilidad de transición, funciones de correlación y momentos para procesos estocásticos definidos en un anillo. La extensión al toro resulta inmediata y puede ser de utilidad en el estudio de osciladores acoplados autoexcitados con ruido o cualquier sistema dinámico que presente múltiples bifurcaciones de Hopf. La generalización a otras variedades compactas que puedan ser expresadas como el cociente de espacios abiertos por algún grupo de transformaciones, es un punto abierto a futuras investigaciones. La comprensión de estos problemas no es solo de interés en la investigación de los Procesos Estocásticos sino también en Mecánica Cuántica.

Se presenta el formalismo que permite obtener las representaciones por integral funcional para el caso que el proceso estocástico este definido en un anillo. En el caso de

sistemas que presentan una bifurcación de Hopf la dinámica puede ser descripta en un espacio semiabierto, el cilindro, para el cual se pueden aplicar las técnicas de integral funcional desarrolladas.

El esquema perturbativo queda establecido a partir de definir una funcional generatriz de funciones periódicas. Está es coincidente con la dada para la recta, pero la prescripción para efectuar los cálculos de promedios de las variables estocásticas es diferente.

Para realizar cálculos perturbativos en el régimen estacionario ha sido necesario establecer una funcional generatriz libre o no oscilatoria, que contiene términos no oscilantes. Un aspecto de interés, lo constituye la condición sobre la fuente de la variable dinámica que esta definida en la funcional generatriz, que permite caracterizar el régimen estacionario e independizarnos de las condiciones iniciales. La condición de régimen estacionario, es decir que la integral - sobre el lapso en el cual esta definido el proceso - de la fuente sea nula, implica una única elección para la misma, esto es, que sea combinación lineal de distribuciones delta de Dirac con coeficientes enteros tal que la suma sea nula. Esta condición es el punto de partida para efectuar los cálculos perturbativos que combinan esta prescripción con la de las técnicas usuales en integral funcional. En un espacio abierto, como la recta real, no es necesaria tal condición.

Se determinan las contribuciones espectrales para procesos estocásticos con ruido blanco. En este caso no es posible

referirnos a las mismas como resonancias, como se muestra en el Cap.VI para un oscilador autoexcitado con ruido las contribuciones espectrales estocásticas son despreciables frente a las deterministas en la región del espacio de parámetros donde estas se vuelven importantes. Las contribuciones espectrales deterministas y estocásticas entran en competición en una región del espacio de parámetros que carece de interés ya que las contribuciones son de pequeña intensidad. Luego en un sistema dinámico con ruido blanco que presenta bifurcaciones de Hopf, las únicas contribuciones espectrales resonantes son las de origen determinista.

Se demuestra que para sistemas dinámicos con bifurcaciones de Hopf que contengan fluctuaciones con tiempo de correlación no nulo, tal como el caso de ruido coloreado que satisface un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, el espectro contendrá contribuciones espectrales relevantes a las cuales nos referimos como resonantes. En el caso de que el ruido sea aditivo (multiplicativo) la contribución perturbativa al espectro es de frecuencia igual al doble (triple) de la fundamental o de oscilación de ciclo límite. La dinámica de los sistemas estudiados queda esencialmente descrita por las variables lentas o críticas, en el caso que el tiempo de correlación del ruido sea mucho mayor que el tiempo de relajación de las variables rápidas o no críticas y siempre es posible realizar una eliminación adiabática de estas últimas [Le85]. Luego es posible describir el sistema únicamente por la ecuación de la forma normal estocástica para los modos críticos con ruido de color.

La resonancia estocástica se verificará solo en el caso que el tiempo de correlación de los ruidos sea mucho mayor que el período de oscilación de los modos críticos. El fenómeno se acentúa cuando más coloreado se vuelve el ruido. El sistema responde ante el ruido de color como si estuviera excitado por un forzado periódico de amplitud constante y frecuencia próxima a la de oscilación de ciclo límite. Este último caso ha sido investigado recientemente [FH83, MW89, GM89] y se lo reporta como resonancia estocástica. Sin embargo, el origen del fenómeno es diferente, fluctuaciones irregulares o ruido de color en nuestro caso y regulares en los trabajos citados.

Experiencias numéricas permiten corroborar los resultados teóricos alcanzados, tanto para el caso de ruido blanco como de color. Estas permiten ir mucho más allá de la teoría, que como se ha señalado es a partir de técnicas perturbativas.

El fenómeno de resonancia estocástica para los sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf es una consecuencia directa del hecho que la forma normal estocástica contiene términos resonantes que no pueden ser eliminados en un cambio no lineal de variables. En otras palabras, es una consecuencia de la ruptura de la simetría que introduce el ruido y que se manifiesta en la no invariancia de la forma normal estocástica frente a transformaciones de fase.

Los sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf han concitado la atención de los investigadores en esta década. Osciladores autoexcitados y el fenómeno de variabilidad climática presentan estas características. Recientemente [Co90], el estudio

del fenómeno de oscilación de algunas estrellas pulsantes, ha despertado interés en la Astrofísica. La inclusión del ruido en el modelado debe ser tomada en cuenta y evaluar los efectos a los que da lugar es de gran importancia para dar una descripción completa del fenómeno.

*Lucy*

