UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

Estudio de los Efectos del Ruido en Sistemas Dinámicos No Lineales

TESIS

Rubén C. Buceta

1990

A mi esposa Norma y
a mi hija Sofía

Introducción

Agradecimientos

Indice

I N D I C E

INTRODUCCION:

Los sistemas dinámicos que presentan inestabilidades han sido objeto de investigaciones exhautivas en la última década. Sin embargo, a nuestro criterio, los efectos que introducen las fluctuaciones o excitaciones irregulares en tales sistemas, es un campo abierto de estudio e investigación.

Es bien conocido que sistemas dinámicos no lineales con comportamiento periódico suelen funcionar en la vecindad de un punto de bifurcación, esto es una inestabilidad. Tal es la caracteristica de sistemas que presentan bifurcaciones de Hopf, cuyos atractores o soluciones estables consisten de puntos fijos o sumideros) y soluciones periódicas (o ciclos limites).

En este trabajo de tesis se aborda el estudio de sistemas dinámicos con ruido que presentan bifurcaciones de Hopf.

En la mayoria de las situaciones experimentales es de interes el conocimiento de las correlaciones de las variables dinámicas o bien su densidad de potencia espectral o espectro, ya que los mismos dan información directa sobre la dinámica del sistema estudiado.

Los sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf funcionando en el regimén de ciclo limite y en la vecindad del punto de bifurcación, presentan un espectro que ademas de contener una contribución principal a la frecuencia, presenta armónicos que estan caracterizados por las caracteristicas no lineales del sistema. Estas, estarán determinadas por el/los parametros de bifurcación y su intensidad y se las denomina usualmente resonancias.

Una descripción mas realista debe incorporar excitaciones irregulares del sistema. Las mismas son consecuencia de la inestabilidad de los parámetros, ruido externo, interno o térmico. Cabe preguntarse si las mismas incorporan información nueva en el conocimiento del sistema, esto es, si se modifica el espectro por ejemplo. Si la respuesta es positiva, es de interes establecer los nuevos efectos a los que dan lugar excitaciones o fluctuaciones.

En el Cap.I., se establecen conceptos generales sobre sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf y se enuncia el problema investigado. Se trata de establecer la importancia que significa el conocimiento de estos sistemas en la naturaleza. Osciladores autoexitados investigados en la Ingenieria, los fenómenos de variabilidad climática de interés actual en la Geofísica y Metereología y las oscilaciones de estellas pulsantes en la Astrofísica, son algunos de los sistemas que presentan bifurcaciones de Hopf. Aqui se introduce un modelo sencillo de variabilidad climática que modela las fluctuaciones climáticas cuaternarias. Finalmente se establece la importancia del estudio de los efectos que introducen las fluctuaciones en tales sistemas.

Para dar una respuesta a las cuestiones que se plantean ha sido necesario dar una formulación adecuada al esquema perturbativo en Integral Funcional para procesos estocásticos. Se ha elegido una técnica perturbativa por proveer información suficiente para describir estos sistemas en la vecindad del punto de bifurcación y se ha necesitado dar una formulación adecuada que tenga en cuenta la topología del sistema a investigar.

En Cap.II. se presenta el formalismo en integral funcional para procesos estocásticos definidos en el toro, con dos puntos de pártida bien diferenciados: 1) a partir de la Ecuación de Fokker-Planck que describe la dinámica de la densidad de probabilidad condicional de las variables, y 2) a partir de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas que modelan la dinámica de las variables. Tales presentaciones dan cuenta de la topología y, como se verá, no son coincidentes con las dadas para espacios abiertos. Se establece como deben realizarse los promedios estocásticos a partir una la Funcional Generatriz de los mismos, y el cálculo de la densidad de probabilidad condicional.

En Cap.III. se estudian los procesos estócasticos con ruido blanco. Se introduce un ejemplo perturbativo sencillo, el proceso de Wiener en el anillo; y a continuación otro, que si es perturbativo, conducente a describir las nuevas contribuciones espectrales estocásticas. El eje central del capítulo lo constituye el estudio de la Forma Normal de una bifurcación de Hopf en presencia de ruido blanco en sus formas aditivas y multiplicativas. Se obtienen en ambos casos las contribuciones espectrales ármonicas principales, a los ordenes mas bajos, en teoría perturbativa.

En el Cap.III. se analiza los casos enunciados en presencia de ruido de color que satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck. El esquema perturbativo aunque coincidente con el dado en el Cap.II. requiere un tratamiento especial, y dos enfoques se dan en tal sentido.

En Cap.V. se la formulación matemática que justifica el esquema perturbativo utilizado. Se analiza la forma general y convergencia de la serie perturbativa y se establecen los parámetros de expansión a partir de argumentos dimensionales. Se muestra que la contribucion al espectro es tambien una serie perturbativa cuyo parámetro de expansión es el mismo de la serie determinada para la función de correlación.

En Cap.VI. se investigan osciladores autoexitados en presencia de ruido que presentan una bifurcación de Hopf. Se realiza un analisis teórico conducente a evaluar las diferentes contribuciones espectrales, las de origen determinista connsecuencia de las no linealidades del sistema y las estocásticas introducidas por el ruido. Este capítulo, de aplicación, reune resultados conocidos en la teoría de sistemas dinámicos, con los obtenidos a lo largo de este trabajo; y tiene la finalidad de ilustrar el fenómeno estudiado.

En las Conclusiones se discuten los resultados teóricos alcanzados en este trabajo y se comparan cualitativamente con los de las experiencias numéricas.

AGRADECIMIENTOS:

La Tesis aqui presentada ha sido posible gracias a la dedicación del Dr. Enrique Tirapegui quien me ha introducido en el estudio e investigación de la Integral Funcional y los Procesos Estocásticos y con quien he establecido la colaboración que me ha permitido realizar este trabajo.

A la Academia de Ciencias de Chile, la Academia de Ciencias del Tercer Mundo (TWAS) y al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile la financiación gracias a la cual he podido viajar en numerosas oportunidades a Chile y que permitió concretar gran parte de este trabajo.

A la Comisión de Investigaciones Cientificas de la Provincia de Buenos Aires que me ha permitido, por medio de las Becas de Estudio y de Perfeccionamiento que me ha otorgado, realizar este trabajo de Tesis.

A los miembros del Laboratorio de Física Teórica del Departamento de Física, Dres. H. Fanchiotti, L. N. Epele y C. García Canal, que me brindaron un lugar de trabajo en su grupo y con los cuales di mis primeros pasos en la investigación.

Al Dr. Marc E. Brachet de Ecolê Normale Superierê (Paris) por haberme facilitado los programas para realizar las simulaciones numéricas que permitieron verificar los resultados teóricos alcanzados.

A mis amigos y compañeros de oficina de trabajo el estímulo brindado en los dias grises y de desaliento.

Quiero agradecer finalmente a mi familia, mi esposa Norma y mi hija Sofía, quienes soportaron con gran entereza y paciencia los largos períodos de ausencia del hogar y que sin su comprensión y aliento este trabajo no hubiera sido posible.

Capítulo I

Conceptos Generales sobre Sistemas Dinámicos con Ruido que presentan bifurcaciones

CAPITULO I

I.1. SISTEMAS DINAMICOS QUE PRESENTAN BIFURCACIONES:

Una poderosa herramienta en el estudio de sistemas dinámicos no lineales que presentan inestabilidades lo proporciona la teoría de bifurcaciones, la cual describe como las soluciones de ecuaciones diferenciales pueden ramificarse cuando uno o mas parámetros del sistema son variados. Las bifurcaciones son clasificadas en términos de su codimensión, es decir el número de parámetros independientes que se necesitan variar para obtener las distintas soluciones. En la vecindad de un punto fijo estable, el sistema queda caracterizado por una variedad central cuya dimensión es igual al número de autovalores complejos conjugados de la parte lineal del sistema, cuya parte real puede ser variada caracterizando la bifurcación. Cuando estos autovalores se vuelven imaginarios el subespacio propio determina el o los modos críticos del sistema, y la dinámica sobre la variedad central puede ser reducida a una ecuación diferencial para el o ellos en la vecindad del punto de bifurcación.

Uno de los resultados mas importantes en la teoría de sistemas dinámicos no lineales es el Teorema de la Variedad Central [Ke67] que nos dice que es posible efectuar un cambio no lineal de variables en la vecindad del punto de bifurcación, de forma tal que las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema pueden ser transformadas en ecuaciones diferenciales para los modos críticos. Existen diferentes técnicas [CS83, GH83, CE84], conocidas como de las Formas Normales, para obtener el cambio no lineal de variables y las ecuaciones diferenciales para las variables críticas son conocidas como Forma Normal (FN) de la singularidad.

Los sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf presentan dos tipos de atractores o soluciones estables: 1) puntos fijos o sumideros y 2) soluciones periódicas (curvas cerradas simples) o ciclos limites.

Para ilustrar la formación de un ciclo límite consideremos el sistema dinámico descripto (en coordenadas polares) por: $\dot{r} = \mu r - r^3$ y $\dot{\theta} = \omega_o > 0$. Para $\mu<0$, el lado derecho de la primera ecuación es siempre negativo y el movimiento son espirales que caen en el sumidero $r=0$. Para $\mu>0$ es positivo en la vecindad de $r=0$ y el punto fijo deja de ser atractor; para $r<\mu$ ($r>\mu$) se tiene un incremento (disminución) de r con el tiempo. Asi el sistema evoluciona al ciclo límite $r(t)=\mu$, $\theta(t)=\omega_o t+\theta_o$. El pasaje de un punto fijo a un ciclo límite cuando μ pasa por cero, que caracteriza a esta bifurcación de Hopf, es ilustrada en la Fig.(I.1).

Los sistemas que presentan una bifurcación de Hopf quedan caracterizados por un parámetro de bifurcación μ, que es la parte real del par de autovalores complejos conjugados de la parte lineal del sistema de ecuaciones diferenciales que los modelan.

La dinámica de todo sistema que presenta una bifurcación de Hopf queda modelada alternativamente por la Forma Normal de la Bifurcacion de Hopf (FNBH). Su descripción en la vecindad del punto de bifurcación es cualitativamente el mismo, a un lado se tiene como atractor un punto fijo y al otro un ciclo límite circular, volviendose inestable el punto fijo. El cambio no lineal de variables es una expansión polinómica de las variables críticas, cuyo orden es μ, y da cuenta de las resonancias contenidas en el sistema dinámico. La composición espectral de las resonancias es consecuencia directa del comportamiento no lineal del sistema dinámico, es decir la forma funcional de la parte no lineal de la ecuación diferencial que lo modela. La FNBH no contiene resonancia alguna si el cambio no lineal de variables es efectuado adecuadamente. La metodología de Formas Normales propuesta por Coulet et al. [CE84, CE85] permite en una manera directa y sencilla efectuar dichos cálculos.

Cuando se incorporan excitaciones irregulares al sistema, debido a la inestabilidad de sus parámetros, ruido externo, interno o térmico la descripción anterior resulta incompleta.

Se muestra en este trabajo que el hecho de considerar al sistema afectado por ruido, da lugar a la aparición de nuevas resonancias o términos espectrales, que llamaremos estocásticas por su origen, mientras que las que son propias del sistema en ausencia de excitaciones las llamaremos deterministas. Este fenómeno conjeturado por Coullet et al., tiene su origen en el acoplamiento del ruido al forzado externo determinista, caracterizado por la frecuencia de oscilación o modos críticos del sistema dinámico. El ruido en cualquiera de sus formas contiene alguna porción del espectro, el blanco todo el espectro frecuencial.

En la naturaleza existen dos casos de particular interes:

ruido aditivo y multiplicativo lineal. El ruido aditivo tiene en cuenta los efectos del reservorio del que no da cuenta una descripción determinista y el ruido multiplicativo lineal tiene su origen en la fluctuación de los parámetros lineales del sistema.

Cuando se desea realizar la descripción de un sistema que presenta inestabilidades en presencia de ruido, la inclusión del mismo en la dinámica se debe realizar cuidadosamente. Todo tipo de transformación no lineal debe efectuarse sobre la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) que lo modela, obteniendose en este caso la ecuación diferencial de la forma normal estocástica llamada simplemente Forma Normal Estocástica (FNE) de la singularidad [ET87a, ET87b, EJ87].

La inclusión de ruido aditivo o multiplicativo trae como consecuencia la aparición de términos "resonantes" en la FNE, a diferencia de lo que ocurre en la descripción determinista. Son estos términos los que dan origen a nuevos términos espectrales o resonancias, que son armónicos de la frecuencia fundamental del sistema. El estudio de estas contribuciones es esencial ya que pueden entrar en competencia con las deterministas. La intensidad de las contribuciones dadas por los armónicos estocásticos en el espectro estara caracterizada no solo por la intensidad de la fuente de ruido, sino tambien por su tiempo de correlación, los parámetros que gobiernan la bifurcación y su frecuencia propia.

Se analiza en este trabajo los casos de ruido blanco y coloreado, ambos con valor medio nulo y función de correlación no nula. El ruido blanco, cuya correlacion es una distribucion delta con "tiempo de correlación cero", tiene por espectro o potencia espectral a todo el espacio de frecuencias; en cambio el ruido coloreado contendrá solo una porción del mismo, tal es el caso que consideraremos aqui: ruido de color que satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck y cuyo ancho espectral es proporcional al inverso del tiempo de correlación del ruido.

Existen gran variedad de sistemas físicos, químicos, biológicos y de la ingenieria que presentan inestabilidades tales como una bifurcación de Hopf. Aqui nos ocuparemos en particular del estudio de osciladores autoexitados, que aparecen en circuitos y dispositivos electricos [St63, FH83, TD89, GV88] y de modelos sencillos de variabilidad climatica, de utilidad para la descripción de fenómenos paleoclimáticos [Sa82, SS82, Su81, NN81, Ha76].

Los sistemas dinámicos que presentan una bifurcación de Hopf en presencia de ruido pueden ser modelados por N ecuaciones diferenciales, de primer orden en el tiempo, que describen la dinámica de las variables lentas del sistema. Los términos de ruido estocástico tienen en cuenta las excitaciones irregulares y asumen la existencia implícita de variables rápidas. En estas condiciones en la vecindad del punto de bifurcación, no será posible despreciar los efectos no lineales del sistema. Por otro lado existiran N-2 modos estables, es decir autovalores reales negativos.

La EDE que modela a un sistema que presenta una bifurcación de Hopf es

$$\dot{u} = L_{(\lambda)} u + N_{(\lambda)}(u) + F_{(\lambda)}(u;t) \quad , \qquad (I.1)$$

donde $\mathbf{u}\equiv(u_1,\ldots,u_N)$ es un vector N-dimensional de las variables dinámicas, $L_{(\lambda)}$ es una matriz que depende de los parámetros $(\lambda)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, al igual que la función $\mathbf{N}_{(\lambda)}(\mathbf{u})$ no lineal en $\mathbf{u}$ y la función $F_{(\lambda)}(u;t)$ que tiene en cuenta las fluctuaciones en el sistema. Es este el caso en que la solución estacionaria $\mathbf{u=0}$ pierde su estabilidad, es decir los parametros (λ) toman valores $(\bar{\lambda})$ para el cual 2 autovalores tienen parte real cero, mientras los restantes N-2 tienen autovalores γ_α $(\alpha=1,\ldots,N-2)$ reales negativos. Los autovalores imaginarios determinan los modos inestables o criticos y los restantes los llamados estables. Este es el caso general de un sistema dinámico cuya inestabilidad es una bifurcacion de Hopf. De acuerdo al Teorema de la Variedad Central sabemos que es posible efectuar un cambio de variables

$$\mathbf{u} \longrightarrow (\mathbf{A},\mathbf{B}) \quad , \qquad (I.2)$$

donde $\mathbf{A}=(A_1,A_2)$ y $\mathbf{B}=(b_1,\ldots,b_{N-2})$, de forma tal que a partir de la Ec.(I.1), en el caso $\mathbf{F\equiv 0}$, puede obtenerse una ecuación cerrada para los dos modos criticos, conocida como FN, de la forma

$$\dot{A}_i = J_{ij}\, A_j + f_{1,i}(A) \qquad (I.3)$$

válida para tiempos $t \gg (\min_\alpha \gamma_\alpha)^{-1}$ y donde J_{ij} es la matriz diagonal con autovalores criticos. La ecuación para los modos estables es

$$\dot{B}_\alpha = B_\alpha \left(\gamma_\alpha + f_{i,\alpha}(A) \right) \quad , \qquad (I.4)$$

A continación consideremos un modelo 2-dimensional que describe un proceso climático que presenta una bifurcación de

Hopf. En este tipo de modelos solo modos críticos estan presentes, pero los mismos son suficientes para caracterizar el fenómeno que es motivo de estudio. Se establece explicitamente el cambio no lineal de variables, asi como la EDE obtenida o Forma Normal Estocástica (FNE) de la singularidad.

I.2. CARACTERIZACION DE UN SISTEMA DINAMICO QUE PRESENTA UNA BIFURCACION DE HOPF:

Consideremos el sistema dinámico, introducido por Saltzmann et al. [Sa82, SS82b] gobernado por 2 variables de un estado climático:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \phi_1\theta - \phi_2\eta + \mathcal{R}_\eta(\eta,\theta;t) \\ \dot{\theta} &= -\psi_1\eta + \psi_2\theta - \psi_3\eta^2\theta + \mathcal{R}_\theta(\eta,\theta;t) \end{aligned} \quad , \qquad (I.5)$$

donde η es el seno de la latitud de avance de los hielos marinos y θ es la temperatura promedio de un oceano. ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2 y ψ_3 son constantes positivas tratadas como parámetros y $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_\theta$ representan fuerzas estocásticas multiplicativas o aditivas.

A pesar de ser un modelo sencillo el sistema sirve como prototipo de todos los modelos climáticos de dos variables que admiten comportamiento de ciclo límite como posible interpretación de los cambios climáticos. Más aun, tales sistemas se caracterizan por presentar una bifurcación de Hopf, y su dinámica en gran cantidad de casos queda restringida a la vecindad del punto de bifurcación. En [Sa82] se han realizado simulaciones numéricas mostrandose que las oscilaciones de ciclo límite de períodos grandes, que describen los ciclos glaciarios cuaternarios, presentan esta característica.

La introdución del ruido en el modelado del sistema dinámico debe realizarse con precaución, de forma tal que describa los fenomenos observados. Asi informacion adicional, sobre el sistema dinámico, puede ser recogida tal como intensidad de las fluctuaciones y la región del espacio de parámetros en la cual el sistema "funciona". Las simulaciones numéricas directas, si bien proporcionan información valiosa, pueden enmascarar la naturaleza del sistema confundiendo efectos deterministas con los estocásticos. Una forma de trabajo, que "separa" tales efectos en una manera clara es el tratamiento de estos sistemas a partir de la teoria de formas normales. Los calculos no seran dados aqui, aunque el lector interesado puede remitirse al Cap.V, donde se trata osciladores autoexitados que presentan una bifurcación de Hopf.

En el modelo presentado, un analisis dimensional muestra que si[1] $[\eta] = 1$ y $[\theta] = T$, entonces $[\phi_2] = [\psi_2] = [\psi_3] = t^{-1}$, $[\phi_1] = (Tt)^{-1}$ y $[\psi_1] = Tt^{-1}$. La Ec.(I.5) puede ser llevada a la forma mas sencilla

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x - y + \mathcal{R}_y(x,y;t) \\ \dot{x} &= -ay + bx - y^2x + \mathcal{R}_x(x,y;t) \end{aligned} , \qquad (I.6)$$

donde las nuevas variables, parámetros y constantes son

[1] [x] indica la dimension de x es, T es en este caso temperatura y t el tiempo.

adimensionales y se relacionan con las de Ec.(I.5) a través de $t=\lambda_0 t$, $\theta=\lambda_1 x$, $\eta=\lambda_2 y$, $a=\psi_1/\phi_1$, $b=\psi_2/\phi_2$ con $\lambda_0=\phi_2^{-1}$, $\lambda_1=\phi_2^{3/2}\phi_1^{-1}\psi_3^{-1/2}$ y $\lambda_3=\phi_2^{1/2}\psi_3^{-1/2}$. En la Ec.(I.6): $(^{\cdot})=d/dt$, $\mathcal{R}_x$ y $\mathcal{R}_y$ son los términos de ruido convenientemente escaleados con los de Ec.(I.5).

Diagonalizando la parte lineal de la Ec.(I.6) se obtienen autovalores $\mu\pm i\Omega$, con $\mu=(b-1)/2$ y $\Omega^2=((a-b)-\mu^2)$ y $a>b$. En $\mu=0$ $(b=1)$ el sistema presenta un punto de bifurcación y los autovalores se vuelven imaginarios $\pm i\omega$, $\omega=a-b$; para $b<1$ el sistema tiene una solución estable de punto fijo mientras que para $b>1$ una estable de ciclo límite volviendose inestable el punto fijo. Una base de vectores propios que diagonaliza la parte lineal es la dada por $\varkappa_1=\delta e_1+e_2$, $\varkappa_2=\varkappa_1^*$ con (e_1,e_2) la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\delta=(1+i\omega)^{-1}$. En la vecindad del punto de bifurcación $\mu=0$ es posible realizar un cambio no lineal de variables para hallar la FNE correspondiente a Ec.(I.5).

El cambio no lineal de variables es:

$$u = z\varkappa_1 + z^*\varkappa_2 + U^{[2]}(z,z^*) + U^{[3]}(z,z^*) + \cdots \quad , \qquad (I.7)$$

donde $u=xe_1+ye_2$, $z\in\mathbb{C}$, y los vectores de cambio no lineal de variables estan dados por

$$U^{[2]}(z,z^*) = 0$$

$$U^{[3]}(z,z^*) = (\gamma/2i\omega)\,(-2\delta^2 z^3 + (\delta^2+2|\delta|^2)|z|^2 z^* + (\delta^{2*}/2)z^{3*})\ \varkappa_1 + \text{c.c.}$$

$$U^{[4]}(z,z^*) = 0$$

$$(I.8)$$

c.c. denota complejo conjugado y $\gamma=\delta^*(\delta^*-\delta)^{-1}$. Luego de pasar a la base canónica el cambio no lineal de variables es explicitamente:

$$x = a_1 z + a_2 z^2 z^* + a_3 z^3 + c.c. \qquad ,$$
$$y = b_1 z + b_2 z^2 z^* + b_2 z^3 + c.c. \qquad (I.9)$$

siendo a_i y b_i (i=1,2,3) funciones de ω definidas por

$$a_1 = \frac{(1-i\omega)}{(1+\omega^2)} \quad , \quad a_2 = -\frac{3\,(1-i\omega)^2}{8\,(1+\omega^2)^2\omega^2} \quad , \quad a_3 = -\frac{(1+i\omega)}{2\,(1+\omega^2)^2\omega^2}$$

$$b_1 = 1 \quad , \quad b_2 = -\frac{i(5\omega^2+1)\omega - (7\omega^2+3)}{8\,\omega^2(1+\omega^2)^2} \quad , \quad b_3 = -\frac{1}{2\,(1+\omega^2)^2\omega^2} \quad .$$

(I.10)

La FN determinista en la vecindad del punto de bifurcación es

$$\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (\alpha+i\beta)|z|^2 z + \cdots \qquad , \qquad (I.11)$$

y su ecuación compleja conjugada. Siendo $\alpha(\beta)$ la Re($\mathcal{I}m$) de $\gamma(\delta^2+2|\delta|^2)$ y por lo tanto funciones de ω expresadas como:

$$\alpha = \frac{1/2}{1+\omega^2} \qquad \beta = \frac{-3/2}{\omega(1+\omega^2)} \quad . \qquad (I.12)$$

Considerando solo un término de ruido en la Ec.(I.6) impondremos que $\mathcal{R}_y$=0 el otro término puede ser aditivo o multiplicativo. Si $\mathcal{R}_x(x,y;t)=\varepsilon^{1/2}h(x,y)\zeta(t)$, donde ε es la intensidad del ruido y $\zeta(t)$ es ruido Gaussiano, con media nula y autocorrelacion no nula. Tomando por ejemplo h(x,y)=1 para el caso aditivo y $h(x,y)=x$ para el caso multiplicativo lineal, en la base canónica el término estocástico es $\varepsilon^{1/2}h(x,y)\,\zeta(t)\,e_2$ y realizando el cambio de base $e_2=\delta\varkappa_1+\varkappa_2$, la forma normal estocástica de la bifurcación de Hopf será

$$\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (\alpha+i\beta)|z|^2 z + \varepsilon^{1/2}G(z,z^*)\,\zeta(t) \qquad , \qquad (I.13)$$

y su compleja conjugada. Siendo la función que caracteriza al ruido aditivo (A) o multiplicativo lineal (M):

$$G(z,z\ ) = \begin{cases} 1 & (A) \\ z+z^* & (M) \end{cases} \qquad , \qquad (I.14)$$

La Ec.(I.13) con $\varepsilon=0$ (caso determinista) y $\alpha>0$ admite una solución estable de ciclo límite de frecuencia ω y radio $\lambda=(\mu/\alpha)^{1/2}$. De aquí es facil ver que si z es de orden λ, en efecto la expresión (I.7) es una serie, cuyo parametro de expansión es λ, que queda definida sin ambiguedad. Es esta serie, o su expresión alternativa (I.9), la que da la información sobre la composición espectral. Aparecen términos lineales, cúbicos, de grado 5, etc. que dan origen a términos de frecuencia ω, 3ω, 5ω, etc. respectivamente. Esta discusión se retomara al analizar el espectro en la Sec.I.4.

I.3. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO ADITIVO Y MULTIPLICATIVO:

La Forma Normal Estocástica de una Bifurcación de Hopf (FNEBH) puede ser genericamente escrita

$$\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (\alpha+i\beta)|z|^2 z + \varepsilon^{1/2}(\gamma+i\delta)\ g(z,z^*)\ F(t) \quad , \qquad \text{(I.15)}$$

y su ecuación compleja conjugada, donde $z \in \mathbb{C}$. $F(t)$ es ruido aleatorio con valor medio nulo y autocorrelación no nula normalizada a 1, ε es la intensidad de la fuente de ruido F, y g es una función definida segun el proceso sea de ruido aditivo (A) o multiplicativo (M):

$$g(z,z^*) = \begin{cases} 1 & \text{(A)} \\ (\xi+i\zeta)z + (\xi-i\zeta)z^* & \text{(M)} \end{cases} \quad . \qquad \text{(I.16)}$$

Todas las constantes son reales, en particular $\alpha>0$. Si $\mu>0$ el sistema contiene oscilaciones de ciclo límite.

Notemos que a diferencia del caso determinista ($\varepsilon=0$) la Ec.(I.15), con $g(z,z^*)$ definido por (I.16), no es invariante frente a transformaciones de fase, es decir $z \longrightarrow e^{i\varphi}z$. Este es el origén de la aparición de nuevos términos espectrales, como se verá en este trabajo, en todo sistema que presente una bifurcación de Hopf que se encuentra en el regimén de ciclo límite. El caso $g(z,z^*)=z$ es claramente invariante, pero este no caracteriza un sistema que presente una bifurcación de Hopf y no aparecen términos de esta forma acompañando al término de ruido en la Ec.(I.15).

La FNEBH puede ser escrita en una forma mas concisa realizando un escaleado de las variables y constantes en los casos (I.16). Para el caso (M) hacemos la sustitución

$$
\begin{aligned}
z &= \alpha^{-1/2}\frac{\xi-i\zeta}{|\xi+i\zeta|} Z \\
\beta &= \alpha B \qquad\qquad , \\
\varepsilon &= E^{1/2}\{|\gamma+i\delta|\,|\xi+i\zeta|\}^{-1}
\end{aligned}
\tag{I.17}
$$

y la ecuación escaleada es

$$
\dot{Z} = (\mu+i\omega)Z - (1+iB)|Z|^2Z + E^{1/2}e^{i\Delta}\,(Z+Z^*)\,F(t) \quad , \tag{I.18}
$$

con $\Delta = \arg[(\gamma+i\delta)(\xi+i\zeta)]$, mientras que para el caso (A) realizamos la sustitución

$$
\begin{aligned}
z &= \alpha^{-1/2}\,e^{i\Sigma}\,Z \\
\beta &= \alpha\,B \qquad\qquad , \\
\varepsilon &= E^{1/2}|\gamma+i\delta|^{-1}\alpha^{-1/2} \\
\Sigma &= \arg\,(\gamma+i\delta)
\end{aligned}
\tag{I.19}
$$

obteniendose la ecuación escaleada

$$
\dot{Z} = (\mu+i\omega)Z - (1+iB)|Z|^2Z + E^{1/2}\,F(t)\ . \tag{I.20}
$$

Las Ecs. (I.18) y (I.20) pueden ser escritas genericamente

$$
\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (1+i\beta)|z|^2z + \varepsilon^{1/2}e^{i\Delta}\,G(z,z^*)\,F(t) \quad , \tag{I.21}
$$

siendo

$$Q(z,z^{*}) = \begin{cases} 1 & ,\Lambda=0 \quad (A) \\ z + z^{*} & \quad (M) \end{cases} \qquad (I.22)$$

Con la finalidad de trabajar en un sistema coordenado más conveniente a los efectos de los cálculos en integral funcional siguiendo la idea utilizada por Spina et al. [SV87], introducimos el cambio no lineal de coordenadas

$$z = \sqrt{\mu}\ e^{u+i\theta} \quad , \qquad (I.23)$$

en lugar del cambio de coordenadas polares usual. Este ansatz tiene varias ventajas, la variable $u \in \mathbb{R}$ y las técnicas de integral funcional en este espacio estan bien establecidas, por otro lado es posible realizar un desarrollo perturbativo alrededor de la solución estable determinista u=0 que corresponde al regimén de ciclo límite con radio $\sqrt{\mu}$. La variable angular θ requiere ser definida correctamente, para evitar multivaluaciones que indeterminan el tratamiento en integral funcional. Si $\theta \in \mathbb{S}^1$, es decir el intervalo $[0,2\pi]$ con los extremos del intervalo identificados uno con el otro[2], la transformación (I.23) es un mapeo $\mathbb{C}\to\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$, una banda cilíndrica. Esta elección no es caprichosa, ya que $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ es el espacio cociente de $\mathbb{R}^2$ por las tranformaciones enteras modulo 2π: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}$. Sin embargo, la resolución de nuestros problemas no se reduce a su estudio en $\mathbb{R}^2$, es necesario dar una formulación en integral funcional que

---

[2] $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1 \}$

contemple la topología del problema bajo consideración.

La EDE correspondiente a la FNEBH (I.21), en el espacio (u,θ) será

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega - \mu\beta\, e^{2u} + \upsilon^{1/2}\, g_1(u,\theta)\, F(t) \\ \dot{u} &= \mu\,(1-e^{2u}) + \upsilon^{1/2}\, g_2(u,\theta)\, F(t)\end{aligned} \quad , \qquad (I.24)$$

siendo para el caso (A)

$$\begin{aligned}g_1(u,\theta) &= -\, e^{-u}\, \mathrm{sen}\theta \\ g_2(u,\theta) &= e^{u}\, \cos\theta \\ \upsilon &= \varepsilon/\mu\end{aligned} \quad , \qquad (I.25)$$

y para el caso (M)

$$\begin{aligned}g_1(u,\theta) &= \mathrm{sen}\Delta - \mathrm{sen}(2\theta-\Delta) \\ g_2(u,\theta) &= \cos\Delta + \cos(2\theta-\Delta) \\ \upsilon &= \varepsilon\end{aligned} \quad , \qquad (I.26)$$

A los efectos de obtener las nuevas contribuciones espectrales, es factible linealizar las Ecs. (I.26) alrededor de u=0, la solución estable determinista (ε=0), ya que términos de orden superior introducen correcciones a esta que es la contribución dominante y por ser (u) la variable que da cuenta de apartamientos perpendiculares al ciclo límite. Nuestro interés esta en la información contenida en la fase θ, y sera en esta variable donde se efectua el cálculo perturbativo para obtener las nuevas contribuciones espectrales de origen estocástico. Es entonces suficiente linealizar alrrededor de $u=0$ reteniendo términos lineales en el vector de arrastre e independientes en la matriz de difusión. Realizando la sustitución

$$\theta = \varphi + \Omega t - \Delta/2 \qquad , \tag{I.27}$$

con $\Omega = \omega - \beta\mu$ las ecuaciones (I.24) se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -2\beta\mu\ u + \upsilon^{1/2}\ g_1(\varphi+\Omega t)\ F(t) \\ \dot{u} &= -2\mu\ u + \upsilon^{1/2}\ g_2(\varphi+\Omega t)\ F(t) \end{aligned} \qquad , \tag{I.28}$$

siendo para el caso (A)

$$g_1(\psi) = -\mathrm{sen}\psi \qquad , \qquad g_2(\psi) = \cos\psi \qquad , \tag{I.29}$$

y para el caso (M)

$$g_1(\psi) = a-\mathrm{sen}2\psi \qquad , \qquad g_2(\psi) = b+\cos2\psi \qquad , \tag{I.30}$$

con $a^2+b^2=1$ y $a=\mathrm{sen}\Delta$.

El hecho de que $g(z,z^*)$ este dado por Ec.(I.16), o bien por la (I.22), no es invariante frente a tranformaciones de fase y en consecuencia tampoco lo sea la FNEBII, se manifiesta en la EC.(I.28) en que las funciones $g_i(\psi)$ no son invariantes frente a traslaciones de la fase ψ, es decir frente a transformaciones $g_i(\psi)\longrightarrow g_i(\psi+\alpha)$, $(\alpha\in\mathbb{R}/\alpha\neq 2\pi)$. La invariancia se da solo en el caso $g_i\equiv 1$, que no describe a la FNEBII. Por esta razón sera de utilidad estudiar en el formalismo de integral funcional EDE 1-dimensionales de la forma:

$$\dot{\varphi} = \varepsilon^{1/2} g(\varphi+\omega t)\ F(t) \quad , \tag{I.31}$$

para entender el mecánismo por el cual aparecen nuevos términos en el espectro. Aqui $g(\psi)$ es una función 2π-periodica. Esta ecuación puede ser interpretada como una EDE que describe una bifurcación de Hopf alrrededor de la solución estable u=0 en la Ec.(I.28).

I.4. EL ESPECTRO DE UN SISTEMA DINAMICO QUE PRESENTA UNA BIFURCACION DE HOPF:

En la mayoría de las situaciones reales es de interés conocer las funciones de correlación de las variables dinámicas que describen a los sistemas bajo estudio. Alternativamente es de utilidad su densidad de potencia espectral o espectro que es simplemente la transformada de Fourier coseno de la función de correlación, ya que esta puede ser obtenida en registros experimentales.

Para hacer un analisis detallado nos remitimos al caso estudiado en la Sección I.2., para el cual las funciones de correlación del proceso (x,y) a tiempos t y t', es decir la autocorrelaciones de (x) e (y) y la correlación cruzada de (x) con (y), que se denotan por

$$\begin{gathered} \langle x(t)\ x(t') \rangle \\ \langle y(t)\ y(t') \rangle \\ \langle x(t)\ y(t') \rangle \end{gathered} \tag{I.32}$$

pueden ser determinadas por el cambio no lineal de variables (I.9), si es de interés el estudio del sistema en la vecindad del punto de bifurcación. Consideremos aqui la autocorrelación de (x), por ser esta una variable relevante en el sistema geofísico considerado. Recordemos que a menos de un factor introducido en el escaleado, (x) describe a la temperatura en el modelo de variabilidad climática considerado. La autocorrelación de (x) será una serie formal cuyo parámetro de expansión es el cuadrado del radio del ciclo límite r, o en términos del parámetro de bifurcación μ es μ/α. La autocorrelación de (x) es

$$\begin{aligned}
&\langle x(t)\ x(t')\rangle = \\
&= 2\,Re\ \{\ |a_1|^2\langle z(t)\ z^*(t')\rangle + |a_2|^2\langle z(t)|z(t)|^2 z^*(t')|z(t')|^2\rangle + \\
&\quad + |a_3|^2\langle z^3(t)\ z^{3*}(t')\rangle + (a_1\ a_2^*\ \langle z(t)|z(t)|^2 z^*(t')\rangle + \\
&\quad + a_1\ a_3^*\ \langle z(t)\ z^{3*}(t')\rangle + a_2\ a_3^*\ \langle z(t)|z(t)|^2 z^{3*}(t')\rangle + c.c.) + \\
&\quad + a_1^2\ \langle z(t)\ z(t')\rangle + a_2^2\ \langle z(t)|z(t)|^2 z(t')|z(t')|^2\rangle + \\
&\quad + a_3^2\ \langle z^3(t)\ z^3(t')\rangle + a_1\ a_3\ (\langle z^3(t)\ z(t')\rangle + \langle z^3(t')\ z(t)\rangle) + \\
&\quad + a_1\ a_2\ (\langle z(t)|z(t)|^2 z(t')\rangle + \langle z(t)\ z(t')|z(t')|^2\rangle) + \\
&\quad + a_2\ a_3\ (\langle z(t)|z(t)|^2 z^3(t')\rangle + \langle z^3(t)\ z(t')|z(t')|^2\rangle\ )\ \}\ .
\end{aligned} \tag{I.33}$$

De aqui se desprende que determinando las funciones de autocorrelación y correlación cruzadas del proseso (z,z^*) al orden μ/α

$$\langle z(t)\ z(t')\rangle \quad ,$$
$$\langle z(t)\ z^*(t')\rangle \quad , \tag{I.34}$$

sus correcciones al orden $(\mu/\alpha)^2$ dadas por los momentos

$$\langle z(t)\ z^3(t')\rangle \quad ,$$
$$\langle z(t)\ z^{3*}(t')\rangle \quad ,$$
$$\langle z(t)\ z(t')|z(t')|^2\rangle \quad , \tag{I.35}$$
$$\langle z(t)\ z^*(t')|z(t')|^2\rangle \quad ,$$

y al orden $(\mu/\alpha)^3$ por

$$\langle z^3(t)\ z^3(t')\rangle \quad ,$$
$$\langle z^3(t)\ z^{3*}(t')\rangle \quad ,$$
$$\langle z^3(t)\ z(t')|z(t')|^2\rangle \quad ,$$
$$\langle z^3(t)\ z^*(t')|z(t')|^2\rangle \quad , \tag{I.36}$$
$$\langle z(t)|z(t)|^2 z(t')|z(t')|^2\rangle \quad ,$$
$$\langle z(t)|z(t)|^2 z^*(t')|z(t')|^2\rangle \quad ,$$

y sus complejos conjugados.

Para una descripsión determinista del espectro es necesario introducir el concepto de función de autocorrelación de la variable q(t) al tiempo t y a un tiempo posterior $t+\tau$. En el presente caso no tendremos un proceso aleatorio y deberá estar dada a traves del promedio temporal definido por

$$\langle q(t)\ q(t+\tau)\rangle = \underset{T\to+\infty}{Lim}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt'\ q(t')\ q(t'+\tau)\quad . \tag{I.37}$$

Si consideramos la solución estable determinista de (I.21) alrrededor de u=0 dada por

$$z = \sqrt{\mu}\ e^{i(\omega t+\varphi_o)}\quad , \tag{I.38}$$

donde φ_o es la condición inicial para la fase, podemos determinar el espectro del sistema descripto por la variable (x).
Es necesario definir el promedio de la autocorrelación sobre la fase inicial como

$$|\langle\cdot\ \cdot\ \cdot\rangle| = \int_{o}^{2\pi} d\varphi_o\ \langle\cdot\ \cdot\ \cdot\rangle\ \mathcal{P}_{st}(\varphi_o)\quad , \tag{I.39}$$

siendo en este caso $\mathcal{P}_{st}(\varphi_o) = 1/2\pi$.

Las unicas contribuciones no nulas a la autocorrelación de (x) en (I.33) estarán dadas por

$$\begin{aligned}&\langle z(t)\ z^*(t+\tau)\rangle = (\mu/\alpha)\ e^{i\omega\tau}\\ &\langle z^3(t)\ z^{3*}(t+\tau)\rangle = (\mu/\alpha)^3 e^{i3\omega\tau}\qquad ,\\ &\langle z(t)|z(t)|^2 z^*(t+\tau)|z(t+\tau)|^2\rangle = (\mu/\alpha)^3 e^{i\omega\tau}\end{aligned} \tag{I.40}$$

Se desprende que x(t) tiene contribuciones espectrales principales de frecuencia ω al orden 1 en μ, 3ω al orden 3 en μ, etc.

En una descripsión estocástica, los resultados al orden cero en una teoría perturbativa no deben diferir cualitativamente de los dados aquí. Este es uno de los puntos que se responderan a lo largo de este trabajo.

Aqui resulta de interés preguntarse si las funciones de correlación del proceso (z,z^*) dadas en (I.34) y que son de orden 1 en μ no dan contribuciones de frecuencia 3ω que sean relevantes frente a las deterministas. Esta cuestión se respondera en el presente trabajo utilizando el esquema perturbativo en Integral Funcional que presentaremos en el próximo Capitulo.

Capítulo II

La Integral Funcional para Procesos Estocásticos definidos en un anillo

C A P I T U L O II

II.1. INTRODUCCION:

Se presenta el formalismo que permite obtener las Representaciones por Integral Funcional (RIF), para densidades de probabilidad de transición, promedios de funciones de las variables periódicas y funcionales generatrices, en el caso que el proceso estocástico este definido en el toro. En la forma normal de una bifurcación de Hopf con ruido las variables criticas (z,z^*) definen un proceso estocástico en el plano complejo, en cambio en coordenadas polares (ρ,θ) el espacio de configuración es el cilindro $\mathbb{R}^+\times\mathbb{S}^1$. Aqui $\mathbb{S}^1=\mathbb{R}_{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}$ índica reales módulo 2π y tiene la topología del anillo, es decir los dos extremos del intervalo $[0,2\pi]$ se identifican el uno con el otro. En este caso $\mathbb{R}$ es su espacio de recubrimiento, ya que $\mathbb{S}^1$ es el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}$ de los reales por el grupo de traslaciones enteras módulo 2π. Un proceso estocástico definido en el toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ admite como espacio de recubrimiento a $\mathbb{R}^2$.

Esto motiva a desarrollar un formalismo para obtener RIF que tenga en cuenta la topología del espacio donde esta definido el proceso estocástico. El toro d-dimensional $\mathbb{T}^d=\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1$ (d veces) se trata de una variedad compacta y no de un espacio abierto tipo $\mathbb{R}^d$. Todas las funciones de las variables definidas en el toro, y que caracterizan el proceso estocástico, deben ser periódicas, en el caso de $\mathbb{S}^1$ deben ser 2π periódicas.

El formalismo de integral funcional a desarrollar es aplicable tambien al caso en el cual el proceso estocástico este definido en un espacio abierto tipo $\mathbb{R}^d$, pero existan condiciones periódicas de contorno.

Las RIF son halladas en primer lugar Secc.(II.2) a partir del formalismo de operadores de la Mecánica Cuántica, siguiendo las alternativas del cálculo usual de la Integral de Camino de Feymann [Fe48] definida en $\mathbb{R}$, aunque el punto de partida es basicamente el mismo se introducen nuevas alternativas en los cálculos que tienen en cuenta la topología. Se obtienen las RIF para la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT) asi como la Funcional Generatriz (FG) de momentos y funciones de correlación de funciones 2π periódicas. Estos resultados son obtenidos en la Secc.(II.3) a partir de la Ecuación Diferencial Estocastica (EDE) que caracteriza al proceso estocástico en estudio. En ambos casos se estudia el caso unidimensional $\mathbb{S}^1$, siendo la extensión a un número mayor de dimensiones inmediata sin presentar dificultades adicionales.

II.2. DERIVACION DE LAS REPRESENTACIONES DE INTEGRAL FUNCIONAL A PARTIR DE LA ECUACION DE FOKKER-PLANCK

II.2.A. Formalismo:

Sea $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)$ la solución o propagador de la ecuación de diferencial de primer orden (en el tiempo t) de:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}(\underset{\sim}{\theta},\partial,t) \right] \Phi(\underset{\sim}{\theta},t) = 0 \qquad . \tag{II.1}$$

Las condiciones de contorno periódicas deben ser especificadas en el espacio $\underset{\sim}{\theta}$, mientras que la condición inicial debe tener en cuenta la periodicidad de la variable. El operador $\mathcal{L}$ no debe ser necesariamente hermítico y puede depender explicitamente del tiempo. Los casos de interés físico aquí son los que contienen el operador $\partial=\partial/\partial t$ hasta orden 2. Puede ser escrito en forma general como:

$$\mathcal{L}(\underset{\sim}{\theta},\partial,t) = 1/2\ c\ \partial_\mu \partial_\nu Q^{\mu\nu}(\underset{\sim}{\theta},t) + \partial_\mu A^\mu(\underset{\sim}{\theta},t) + 1/c\ V(\underset{\sim}{\theta},t)\ , \tag{II.2}$$

donde los índices griegos van desde 1 hasta d, la dimensión del espacio $\underset{\sim}{\theta}$. c es un número complejo, con parte real positiva. Si c=i la ecuación (II.1) es una ecuación de Schrödinger, si c=1 es una ecuación tipo difusión o de Fokker-Planck (EFP).

En el caso que (II.1) sea una ecuación de Schrödinger se tiene que $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o) = \langle\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o\rangle$, es la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT) de que el sistema pase del estado $|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o\rangle$ al tiempo t_o al estado $|\underset{\sim}{\theta},t\rangle$ al tiempo t. En el caso que represente una ecuación de Fokker-Planck, $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)$ tiene la interpretación de una DPT o condicional de que el sistema este en $\underset{\sim}{\theta}$ al tiempo t si estaba en $\underset{\sim}{\theta}_o$ al tiempo t_o ($t<t_o$), $Q^{\mu\nu}$ es conocida como matriz de difusión y A^μ como vector de arrastre.

La propiedad de $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)$, que permite obtener su representación por integral funcional es la ley de semigrupo:

$$P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o) = \int d\underset{\sim}{\theta}'\ P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}',t')\ P(\underset{\sim}{\theta}',t'|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)\ , \tag{II.3}$$

con $d\underset{\sim}{\theta} = d\theta_1 ... d\theta_d$ e integrando sobre todo el espacio $\underset{\sim}{\theta}$.

En dinámica de Fokker-Planck (II.3) se llama Ecuación de Chapman-Kolmogorov y expresa la propiedad de Markov del proceso estocástico $\underset{\sim}{\theta}$.

Consideremos el caso unidimensional de aqui en adelante, suprimiendo los subíndices griegos en la notación. Una RIF de la DPT se obtiene de la siguiente forma: se divide el intervalo de tiempo $[t_0, t]$ en N+1 intervalos de longitud $\varepsilon=(t-t_0)/(N+1)$, indicando los tiempos intermedios por $t_j = t_0 + j\varepsilon$ $(j=0,...,N+1)$ y tomando $t_{N+1} = t$. Iterando (I.4) obtenemos (con $q_{N+1} = q$):

$$P(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0) = \int \prod_{i=1}^{N} d\theta_i \prod_{j=1}^{N+1} P(\theta_j,t_j\,|\,\theta_{j-1},t_{j-1}) \ . \tag{II.4}$$

Es de interés expresar (II.4) en el límite $N \longrightarrow \infty$, así $\varepsilon = t_j - t_{j-1}$ se vuelve arbitrariamente pequeño y $P(\theta_j,t_j\,|\,\theta_{j-1},t_{j-1})$ se llama en Mecánica Cuántica propagador a tiempos cortos. Se demuestra [LR82] que si el límite existe cada propagador a tiempos cortos contribuye a $P(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0)$ con términos a orden ε solamente. Esta manera de hallar la RIF ha sido analizada profusamente en la bibliografía a partir de los trabajos de Feymann [Fe48, FH65]. Nos ocuparemos aqui del caso en el cual el proceso estocástico este definido en $\mathbb{S}^1$ para obtener la RIF. Las mismas pueden ser halladas por diferentes procedimientos que describiremos a continuación, y la extensión a $\mathbb{R}^d$ resulta inmediata en todos los casos. Se presenta un enfoque a partir del formalismo de operadores de la Mecánica Cuántica, en forma análoga a el cálculo usual de la integral de camino de Feymann definida en la linea, aunque el punto de partida es el mismo se introducen nuevas alternativas en el mismo. Estos resultados pueden ser tambien obtenidos a partir de la EDE, teniendo en cuenta la topología en la cual está definido el proceso estocástico.

La condición de periodicidad para el operador $\mathcal{L}$ debe ser exigida:

$$\mathcal{L}(\theta,\partial,t) = \mathcal{L}(\theta+2\pi,\partial,t) \qquad , \qquad \text{(II.5)}$$

de esta forma $Q(\theta,t)$, $A(\theta,t)$, $V(\theta,t)$ deben ser periódicos.

Consideremos el caso de la EFP (II.1) con $c=1$ y $V(\theta,t)=0$, para obtener una RIF para la DPT $P(\theta,t|\theta_o,t_o)$. La condición inicial [Gr83] estará dada por

$$\begin{aligned} P(\theta,t_o|\theta_o,t_o) &= \delta^{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}(\theta-\theta_o) \qquad . \qquad \text{(II.6)} \\ &= \sum_{\mathbb{Z}} \delta(\theta-\theta_o-2n\pi) \qquad . \end{aligned}$$

Introduciendo operadores $\hat{\theta}$ y $\hat{n}$ con reglas de conmutación

$$[\hat{\theta}\ ,\ \hat{n}] = i \qquad , \qquad \text{(II.7)}$$

y con representación

$$\hat{\theta} \longrightarrow \theta \quad , \quad \hat{n} \longrightarrow -i\ \partial/\partial\theta \qquad , \qquad \text{(II.8)}$$

y definiendo estados $|\theta\rangle$ y $|n\rangle$ de forma que

$$\hat{\theta}\ |\theta\rangle = \theta\ |\theta\rangle \quad , \quad \hat{n}\ |n\rangle = n\ |n\rangle \quad , \tag{II.9}$$

con normalización

$$\langle\theta'|\theta\rangle = \delta(\theta-\theta') \quad , \quad \langle\theta|n\rangle = (2\pi)^{-1/2} e^{in\theta} \quad . \tag{II.10}$$

Las relaciones de completitud para los estados base estan dadas por:

$$\sum_{\mathbb{Z}} |n\rangle\langle n| = \hat{1} \quad , \tag{II.11.a}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \ \ |\theta\rangle\langle\theta| = 1 \quad . \tag{II.11.b}$$

Aplicando el bra $\langle\theta'|$ y el ket $|\theta\rangle$ a (II.11.a) y el bra $\langle n'|$ y el ket $|n\rangle$ a (II.11.b) se obtienen las relaciones de completitud y de normalización respectivamente:

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}} \exp(in(\theta-\theta')) = 2\pi\ \delta(\theta-\theta') \quad , \tag{II.12.a}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta\ \exp(i(n-n')\theta) = 2\pi\ \delta_{nn'} \quad . \tag{II.12.b}$$

Podemos identificar el operador $\mathscr{L}$ de (II.1) con un operador llamado "Hamiltoniano":

$$\mathscr{H}(\hat{\theta},\hat{n};t) = i\ \mathscr{L}(\hat{\theta},i\hat{n};t) \quad . \tag{II.13}$$

A travez de la regla de correspondencia (II.8) tenemos:

$$\mathcal{H}(\hat{\theta},\hat{n};t) = i\ [\,-1/2\ \hat{n}^2\hat{G}(\hat{\theta})\ -i\ \hat{n}\ \hat{A}(\hat{\theta})\ ]\quad . \tag{II.14}$$

De esta forma, utilizando la representación de Heisemberg ya que:

$$P(\theta,t\,|\,\theta',t') = \langle\theta,t\,|\,\theta_o,t_o\rangle\quad , \tag{II.15}$$

los operadores dependientes del tiempo son definidos como:

$$\hat{n}(t) = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)\ \hat{n}\ \hat{\mathcal{U}}(t)\quad , \tag{II.16.a}$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)\ \hat{\theta}\ \hat{\mathcal{U}}(t)\quad , \tag{II.16.b}$$

y los vectores de estado bra y ket como:

$$\langle\theta,t\,| = \langle\theta\,|\ \hat{\mathcal{U}}(t)\ ,\ |\,\theta,t\rangle = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)\ |\,\theta\rangle\ , \tag{II.17}$$

siendo $\hat{\mathcal{U}}(t) \equiv \hat{\mathcal{U}}(t,0)$; asi tenemos que:

$$P(\theta,t\,|\,\theta',t') = \langle\theta\,|\,\hat{\mathcal{U}}(t,t_o)\,|\,\theta_o\rangle\quad , \tag{II.18}$$

donde $\hat{\mathcal{U}}(t,t')$ satisface:

$$\left[\ i\ \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(\hat{\theta},\hat{n},t)\ \right]\ \hat{\mathcal{U}}(t,t_o) = 0\quad , \tag{II.19}$$

con condición inicial:

$$\hat{\mathcal{U}}(t_o,t_o) = \hat{1} \quad . \tag{II.20}$$

El uso repetido de la propiedad de semigrupo del operador evolución $\hat{\mathcal{U}}(t_1,t_2) = \hat{\mathcal{U}}(t_1,t') \, \hat{\mathcal{U}}(t',t_2)$ con $t_1<t'<t_2$ y la relación de completitud para el estado $|\theta\rangle$ dada por (II.11.b) permite obtener (II.3), que en términos del operador evolución a tiempos cortos $\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})$, con $t_j-t_{j-1}= \varepsilon j$, queda expresada como:

$$P(\theta,t\,|\theta_o,t_o) = \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{N} d\theta_i \prod_{j=1}^{N+1} \langle\theta_j|\; \hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1}) \;|\theta_{j-1}\rangle \; . \tag{II.21}$$

El procedimiento usual es aproximar $\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})$ a orden ε, ya que son solo términos de este orden los que contribuyen en la integral funcional cuando $N \longrightarrow +\infty$ y $\varepsilon \longrightarrow 0$, con $t-t_o$ finito. Así:

$$\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1}) = \hat{1} - i\varepsilon \; \mathcal{H}(\hat{\theta},\hat{n};\bar{t}_j) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad , \tag{II.22}$$

con $t_{j-1} < \bar{t}_j < t_j$.

Introduciendo en el propagador a tiempos cortos $\langle\theta_j|\; \hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1}) \;|\theta_{j-1}\rangle$ la relación de completitud $\sum_{n_j\in\mathbb{Z}} \;|n_j\rangle\langle n_j| = \hat{1}$, se obtiene utilizando (II.10):

$$\langle\theta_j|\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})|\theta_{j-1}\rangle = (2\pi)^{-1/2}\sum_{n_j\in\mathbb{Z}} (1-i\varepsilon h(n_j,\theta_{j-1}))\ \exp(in_j\Delta\theta_j)$$

$$\simeq (2\pi)^{-1/2}\sum_{n_j\in\mathbb{Z}} \exp\ (in_j\Delta\theta_j - i\varepsilon\ h(n_j,\theta_{j-1}))\quad ,$$

(II.23)

con $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$,siendo:

$$h(n_j,\theta_{j-1}) = -(i/2)\ n_j^2\ G(\theta_{j-1}) + n_j\ A(\theta_{j-1})\ . \tag{II.24}$$

El operador Hamiltoniano (II.14) esta dado en orden anti-estandard o normal, es decir, todos los operadores $\hat{n}$ estan a la izquierda de los operadores $\hat{\theta}$. Esto da lugar a la RIF en la discretización de pre-punto, es decir, el Hamiltoniano (II.24) es evaluado en $\theta_{j-1} = \theta(t_{j-1})$, suele denotarse por $\gamma(0)$. Prescripciones de discretización diferentes pueden ser obtenidas, estas se derivan de todas las formas posibles de ordenar los factores no-conmutantes en el operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$. La técnica para obtenerlas es desarollada en [La82][1] . A efectos de este cálculo se utilizo la discretización $\gamma(0)$, aunque cualquier otra podria haberse elegido.

Reemplazando (II.23) en (II.21) se obtiene la siguiente expresión para la DPT (con $\theta = \theta_{N+1}$):

---

[1] Pag.15

$$P(\theta,t|\theta_o,t_o) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{n_{N+1} \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_N}{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi}$$

$$\times \exp\left\{ \sum_{j=1}^{N+1} [\, i n_j (\Delta\theta_j - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2 \; n_j^2 \; G(\theta_{j-1})] \right\}$$

(II.25)

Esta RIF para la DPT no es la adecuada a efectos prácticos, ya que las integrales van de 0 a 2π y tenemos una suma múltiple de caminos. La expresión obtenida es análoga a la RIF en $\mathbb{R}$, el rol de los momentos conjugados de la coordenada es desempeñado por enteros n_i, $i = 1,...,N+1$. La existencia de las variables enteras es natural y consecuencia de la periodicidad. Aqui la integral funcional queda restringida a S^1. Si al comenzar los cálculos se hubiese tomado $V(\theta) \neq 0$ y 2π periódico, se agrega en la suma del exponencial de (II.25) el término $-\varepsilon V(\theta_{j-1})$ y la inclusión de este término no agregara dificultades en los cálculos.

El caso $A(\theta) = G(\theta) = V(\theta) = 0$, conocido como caso de partícula libre no masiva en Mecánica Cuántica, ha sido analizado extensamente por medio de expansión en autofunciones [Ma80, MT78], a partir de teoría de grupos [Do71, Do74, Sh68, Sh81], etc. En Ref. [We79] una de las conclusiones es que no es posible encontrar una expresion cerrada para las sumas Gaussianas (II.25) como en el caso de las integrales Gaussianas de los momentos conjugados de las coordenadas definidas en $\mathbb{R}$, salvo en el caso de partícula libre sin masa. Aqui se da una forma alternativa de efectuar los cálculos.

II.2.B. La Densidad de Probabilidad de Transición en $\mathbb{S}^1$:

En esta Subsección se muestra que como el rango de integración para θ puede ser extendido del intervalo $[0,2\pi]$ a $\mathbb{R}$. La técnica consiste en utilizar una identidad, generalización de la conocida fórmula de Poisson [Be61], aplicable al propagador a tiempos cortos (II.23):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n_j} \exp\{in_j(\Delta\theta_j - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2\; n_j^2\; \mathbf{G}(\theta_{j-1})\} =$$

$$= (2\pi\varepsilon \mathbf{G}(\theta_{j-1}))^{-1/2} \sum_{n_j} \exp\left\{- \frac{[\Delta\theta_j - 2n_j\pi - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})]^2}{2\;\varepsilon\; \mathbf{G}(\theta_{j-1})}\right\} \quad , \tag{II.26}$$

que se halla demostrada en el Apendice. La expresión (II.25) para la DPT sera, a menos de una fase $2n_j n_{j-1}\pi$ en (II.26),

$$P(\theta,t|\theta_0,t_0) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to +\infty}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{n_{N+1}\in\mathbb{Z}} (2\pi\varepsilon \mathbf{G}(\theta_0))^{-1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_N}{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi}$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} (2\pi\varepsilon \mathbf{G}(\theta_{j-1}))^{-1/2} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N+1} \frac{[\Delta\theta_j - 2n_j\pi - + 2n_{j-1}\pi - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})]^2}{2\;\varepsilon\; \mathbf{G}(\theta_{j-1})}\right\} \tag{II.27}$$

Haciendo la sustitución $q_j = \theta_j + 2n_j\pi$ ($\forall$ j: j=0,...,N+1), por periodicidad $\mathbf{A}(q_j)=\mathbf{A}(\theta_j)$ y $\mathbf{G}(q_j)=\mathbf{G}(\theta_j)$ es posible llevar el intervalo de integración de $[0,2\pi]$ a $[2n_j\pi\ ,\ 2(n_j+1)\pi]$ de la siguiente manera

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} (\circ)\ d\theta \ = \int_{-\infty}^{+\infty} (\circ)\ dq \quad .$$

Luego

$$P(\theta,t\,|\theta_o,t_o) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to +\infty}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi\varepsilon G(\theta_o))^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i (2\pi\varepsilon G(\theta_{i-1}))^{-1/2}$$

$$\times \quad \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N+1} \frac{[\,\Delta\theta_j - \varepsilon A(\theta_{j-1})]^2}{2\ \varepsilon\ G(\theta_{j-1})}\right\}\Bigg|_{q_{N+1}=\theta+2\pi,\,q_o=\theta_o},$$

(II.28)

De esta forma se ha pasado de tener una RIF en $\mathbb{S}^1$ a otra definida en $\mathbb{R}$, sin embargo la Ec.(II.28) guarda memoria de la topología en la suma sobre n y en que θ y θ_o esten definidos en $\mathbb{S}^1$. Esta expresión resulta de utilidad a los fines prácticos, puesto que si es conocida la expresion para la DPT en $\mathbb{R}$, es posible determinarla en el presente caso. Una notación abreviada para la Ec.(II.28) es

$$P(\theta,t\,|\theta_o,t_o) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}q \quad \exp\left\{-\ 1/2 \int_{t_o}^{t} d\tau\ L^{\gamma(o)}\ (\dot{q}(\tau),q(\tau))\right\}$$

$$\times \quad \delta(q_o-\theta_o)\ \delta(q-\theta+2n\pi) \qquad ,$$

(II.29.a)

$$L(\dot{q},q) = G(q)^{-1} \left[\dot{q} - A(q) \right]^2 \quad , \tag{II.29.b}$$

siendo la medida de integración definida por

$$Dq \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} (2\pi\varepsilon G(\theta_0))^{-1/2} \prod_{i=1}^{N} dq_i (2\pi\varepsilon G(\theta_{i-1}))^{-1/2}, \tag{II.30}$$

y $\gamma(0)$ nos indica que las funciones de q deben ser evaluadas en el pre-punto.

II.2.C. Representación por Integral Funcional de Promedios Estocásticos:

Es de interés derivar una expresión en integral funcional para promedios estocásticos de funciones 2π periódicas de la variable θ a tiempos comprendidos en $[t_0,t]$ a partir de

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_0^{2\pi} \prod_{i=0}^{N+1} d\theta_j \quad F\{\theta_j\} \quad W_{N+2}(\theta_{N+1},t_{N+1};...;\theta_0,t_0) \ , \tag{II.31}$$

con $\{\theta(t_j)\}=(\theta(t_1),...,\theta(t_{N+1}))$, $t_0 < \cdots < t_k < \cdots < t_{N+1}$, siendo $W_{N+2}(\theta_{N+1},t_{N+1};...;\theta_0,t_0)$ la Densidad de Probabilidad Conjunta (DPC) del proceso θ. Si el proceso es de Markov, la DPC es expresable en terminos de la DPT:

$$W_{N+2}(\theta_{N+1},t_{N+1};...;\theta_0,t_0) = \prod_{j=1}^{N+1} P(\theta,t|\theta_0,t_0) \quad W(\theta_0,t_0) \quad . \tag{II.32}$$

De esta forma (II.31) puede ser expresado alternativamente en el formalismo de operadores, con condición inicial $W(\theta,t_0)=\delta(\theta-\theta_0)$ queda:

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_0^{2\pi} d\theta \quad \langle \theta\, t|\hat{F}\{\hat{\theta}_j\}|\theta_0 t_0\rangle \quad . \tag{II.33}$$

Si F es periódica para todo θ_j , es posible definir una función $\mathcal{R}:\mathbb{S}^1\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $F\{\theta_j\}=F\{R(\theta_j)\}$. Realizando los cálculos ya descriptos para la DPT tenemos que:

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\rightarrow 0\\ N\rightarrow+\infty}} (2\pi\varepsilon G(\theta_0))^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i\, (2\pi\varepsilon G(\theta_{i-1}))^{-1/2}$$

$$\times \quad F\{R(\theta_j)\} \quad \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N+1} \frac{[\,\Delta\theta_j - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})]^2}{2\,\varepsilon\, G(\theta_{j-1})}\right\}\Bigg|_{q_0,\theta_0} \tag{II.34}$$

Notemos que esta última expresión no contiene una suma sobre n, a diferencia de lo que ocurre para la DPT (II.26). En consecuencia el promedio de funciones 2π periódicas en $\mathbb{S}^1$ es igual al promedio de estas en $\mathbb{R}$. En el cálculo usual no existen restricciones acerca de las funciones con las cuales se trabaja. La Ec.(II.34) puede ser escrita abreviadamente

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_{\gamma(0)} Dq \ \exp\left\{-1/2 \int_{t_0}^{t} d\tau \ L^{\gamma(0)}(\dot{q}(\tau),q(\tau))\right\} \ F\{R(\theta_j)\} \ \delta(q_0-\theta_0) \tag{II.35}$$

siendo en este caso la medida de integración

$$Dq \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} (2\pi\varepsilon G(\theta_0))^{-1/2} \, dq_{N+1} \prod_{i=1}^{N} dq_i (2\pi\varepsilon G(\theta_i))^{-1/2} \; . \qquad (II.36)$$

II.3. REPRESENTACIONES POR INTEGRAL FUNCIONAL A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL ESTOCASTICA:

Dada la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) o de Langevin para un proceso unidimensional definido en S^1:

$$\dot{\theta} = A(\theta) + \eta^{1/2} g(\theta)\, f(t) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \; , \qquad (II.37)$$

con condición inicial

$$\theta(t_0) = \theta_0 \; , \qquad (II.38)$$

e interpretada en el sentido de Ito, es decir todas las funciones de θ son evaluadas en el pre-punto $\theta(t_j)=\theta_{j-1}$,si dividimos el intervalo de tiempo $[t_0,t]$ en N+1 intervalos de longitud $\varepsilon=(t_j-t_0)/j$ $(t=t_{N+1}$ $j=1,\ldots,N+1)$. mod 2π indica que la variable $\theta\in S^1$,mientras que $A(\theta)$ y $g(\theta)$ son funciones 2π periódicas. $f(t)$ es ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y con autocorrelación una distribución delta de Dirac:

$$\langle f(t)\rangle = 0 \quad ,$$
$$\langle f(t)\, f(t')\rangle = \delta(t-t') \quad , \tag{II.39}$$

y η es la intensidad de la fuente de ruido. La EDE (II.37) admite como solución para f(t) fijo a $\theta_f(t;\theta_o,t_o)$ un funcional de f(t) definido en $\mathfrak{F}^1$.

Escribiendo la EDE en su forma diferencial

$$d\theta = \mathbf{A}(\theta)\, dt + \eta^{1/2}\mathbf{g}(\theta)\, dw \quad , \tag{II.40}$$

donde dw es el diferencial de un proceso de Wiener definido por

$$dw = f(t)\, dt \quad , \tag{II.41}$$

podemos considerar la DPT para el proceso estocástico θ y construir la RIF para ella a partir de la EDE.

A efectos de una descripción suficientemente precisa, consideremos la ecuación (II.40) en el discreto:

$$\Delta\theta_j = \varepsilon\; \mathbf{A}(\theta_{j-1}) + \eta^{1/2}\mathbf{g}(\theta_{j-1})\; \Delta w_j \;, \tag{II.42}$$

siendo $\theta_j = \theta(t_j)$, $\Delta\theta_j = \theta_j-\theta_{j-1}$, $w_j = w(t_j)$, $\Delta w_j = w_j-w_{j-1}$. Cualquier funcional $F\{\theta_f(t_k)\}$ de f(t), usando la notación $\theta_f(t_k)=\theta_f(t_k;\theta_o,t_o)$ y $\{\theta_f(t_k)\}=(\theta_f(t_1),...,\theta_f(t_{N+1}))$, puede ser expresado como

$$F\{\theta_f(t_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=0}^{N+1} dq_j \quad F\{R(q_j)\} \quad \delta(q_j-\theta_f(t_j)) \ , \tag{II.43}$$

siendo R la función definida en la Subsecc.(II.2.C.). Usando la propiedad de la "función" delta de Dirac

$$\delta[\, g(x)] = \sum_{x_n} \frac{\delta(x-x_n)}{\mathrm{Det}[\partial g/\partial x]|_{x_n}} \ , \tag{II.44}$$

siendo x_n los ceros de la función $g(x)$, tenemos que

$$\prod_{i=0}^{N+1} \delta(q_i-\theta_f(t_i)) = \prod_{j=0}^{N+1} \mathrm{Det}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{\Delta q_j}{\varepsilon} - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w_j}{\varepsilon}\right]\right\}\Bigg|_{q_k=\theta_f(t_k)}$$

$$\times \quad \delta\left(\frac{\Delta q_j}{\varepsilon} - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w_j}{\varepsilon}\right) \quad \delta(q_0-\theta_0) =$$

$$= \prod_{j=1}^{N+1} (1/\varepsilon) \ \delta\left(\frac{\Delta q_j}{\varepsilon} - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w_j}{\varepsilon}\right) \ \delta(q_c-\theta_0) \tag{II.45}$$

donde $\theta_f(t_0;\theta_0,t_0)=\theta_0$. Reemplazando en la Ec. (II.43)

$$F\{\theta_f(t_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=0}^{N+1} (dq_j/\varepsilon) \ \delta\left(\frac{\Delta q_j}{\varepsilon} - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w_j}{\varepsilon}\right)$$

$$\times \quad F\{R(q_j)\} \ \ \delta(q_0-\theta_0) \ . \tag{II.46}$$

Escribiendo cada una de las "funciones" delta como

$$\delta(\circ) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \quad (\varepsilon/2\pi) \quad e^{i\varepsilon(\circ)p_j} \ , \tag{II.47}$$

y como el ruido blanco es un proceso de Wiener $\Delta w_j = \varepsilon f_j$, $w_o = 0$, los promedios sobre el ruido de funcionales del ruido f se efectuan de la siguiente manera:

$$\langle F[f]\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N+1} \frac{dw_j}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \quad F[f] \quad \exp\left\{- \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{N+1} (\Delta w_j)^2\right\} \Bigg]_{w_o = 0} .$$

(II.48)

Asi el promedio de la Ec.(II.46) sobre f es:

$$\langle F\{\theta_f(t_j)\}\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N+1} dq_j \quad \frac{dp_j}{2\pi} \frac{dw_j}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \quad F\{R(q_j)\}$$

$$\times \quad \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{N+1} p_j(\Delta q_j - \varepsilon \ A(q_{j-1}) + \eta^{1/2} g(q_{j-1})\Delta w_j)\right\} \Bigg]_{q_o = \theta_o}$$

$$\times \quad \exp\left\{- \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{N+1} (\Delta w_j)^2\right\} \Bigg]_{w_o = 0} .$$

(II.49)

Integrando sobre $\{w_j\}$ y $\{p_j\}$ se obtiene la Ec.(II.34) siendo $G(q)=g(q)^2$. Una RIF para los momentos conjugados $\{p,q\}$ puede ser obtenida integrando solo sobre los $\{w_j\}$:

$$\langle F\{\theta_f(t_j)\}\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to +\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} dq_o \prod_{j=1}^{N+1} dq_j \frac{dp_j}{2\pi} F\{R(q_j)\}$$

$$\times \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{N+1} \left[p_j(\frac{\Delta q_j}{\varepsilon} - A(q_{j-1})) + i\,\frac{\eta}{2}\, G(q_{j-1}) \right] \right\} \delta(q_o-\theta_o)$$

(II.50)

Aqui $p_j \in \mathbb{R}$ es la variable conjugada de los q_j , no así de la variable estocástica θ_j . Esta ultima ecuación puede ser escrita formalmente como

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_{\gamma(o)} Dq\; Dp\; F\{R(q_j)\} \exp\left\{i\int_{t_o}^{t} d\tau\,[\,p\dot{q}-H^{\gamma(o)}(p,q)]\right\} \delta(q_o-\theta_o)$$

(II.51)

siendo la medida de integración

$$Dp\; Dq \equiv \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to +\infty}} dq_o \prod_{j=1}^{N+1} dq_j \frac{dq_j}{2\pi} , \qquad \text{(II.52)}$$

y el Hamiltoniano

$$H(p,q) = -i/2\; p^2\; G(q) + p\; g(q) \quad . \qquad \text{(II.53)}$$

Es importante señalar que cualquier otra prescripción puede ser determinada a partir de la EDE en un sentido de discretización arbitraria, es decir que todas las funciones son evaluadas en $\theta^{[r]}_{j-1} = \theta_{j-1} + r\;\Delta\theta_j$, $\forall r$: $r\in[0,1]$ (siendo $r=0$ el caso particular de

II.b). La derivación de la RIF para una discretización arbitraria, solo difiere en el cálculo del Jacobiano de transformación de coordenadas que aparece en (II.45). La prescripción de discretización $\gamma(0)$ elegida aquí es suficiente para lo que sigue.

II.4. PROMEDIOS ESTOCASTICOS:

II.4.A. La Densidad de Probabilidad de Transición como un promedio estocástico:

Si $\theta_f = \theta_f(t;\theta_o,t_o)$ es la solución de la EDE (II.37) para una función fija f(t) con condición inicial $\theta_f(t_o;\theta_o,t_o) = \theta_o$, la DPT para este proceso determinista es

$$P_f(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \sum_{\mathbb{Z}} \delta(\theta-\theta_f+2m\pi) \quad , \tag{II.54}$$

y satisface la ecuación de continuidad derivable de (II.37)

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[A(\theta) + \eta^{1/2} g(\theta)\, f(t)\right] P_f \; . \tag{II.55}$$

El promedio sobre f(t), definido en la Sección III. permite obtener una RIF para la DPT:

$$P(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \langle P_f(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o)\rangle \quad , \tag{II.56}$$

que verifica el proceso de Markov definido por (II.37)

Utilizando la expresión que expresa el promedio sobre el ruido de un funcional del ruido, dado en la Sección III., es posible obtener la DPT en el espacio de configuración dada por las Ecs. (II.27) y (II.38), o bien en el espacio de las fases a partir de las Ecs. (II.34) y (II.35), obteniendose la expresión abreviada:

$$P(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}q\ \mathcal{D}p\ \ \exp\left\{ i \int_{t_o}^{t} d\tau\ \left[p\dot{q} - H^{\gamma(o)}(p,q)\right] \right\}$$

$$\times\ \ \delta(q_o-\theta_o)\ \delta(q-\theta+2m\pi)\ . \tag{II.57}$$

La medida de integración esta dada por la expresión (II.52) y el Hamiltoniano por (II.53).

II.4.B. Funcional generatriz de funciones 2π periódicas:

Cualquier funcional $F\{\theta_f(t_j)\}$ de $f(t)$ con $\theta_f\in S^1$, puede ser desarollada en serie de Fourier

$$F\{\theta_f(t_j)\} = \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}}\ \ \exp\{i\vec{p}\cdot\vec{\theta}_f\}\ \ , \tag{II.58}$$

donde $\vec{p}$ es un vector de enteros (N+1) dimensional y $\vec{\theta}_f = \{\theta_f(t_i)\}$ $i=1,\ldots,N+1$. Es entonces factible definir un funcional generatriz

$$Z[j,j^*]=\int_{\gamma(o)} \mathcal{D}q\ \mathcal{D}p\ \exp\left\{i\int_{t_o}^{t} d\tau\ [\,p\dot{q} - H^{\gamma(o)}(p,q) + jq + j^*p]\right\}\ \delta(q_o-\theta_o)$$

(II.59)

De esta forma el cálculo de (II.58) se reduce a

$$\exp\{i\vec{p}\cdot\vec{\theta}_f\} = Z[\ j(\circ)=\textstyle\sum_{k=1}^{N+1} n_k\ \delta(\circ-t_k);\ j^*(\circ)=0]\ . \qquad \text{(II.60)}$$

II.5. APENDICE:

Sea $f(\theta)$, con $0\leq\theta<2\pi$, una función desarrollable en serie de Fourier [Li64]

$$f(\theta) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\ e^{in\theta}\ , \qquad \text{(II.A.1)}$$

con coeficientes de Fourier dados por

$$a_n = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\theta\quad e^{in\theta}\quad f(\theta)\quad . \qquad \text{(II.A.2)}$$

Es entonces posible escribir

$$f(\theta) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\theta+2n\pi)\ , \qquad \text{(II.A.3)}$$

a partir de la identidad

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta} = 2\pi\ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(\theta-2m\pi)\ . \qquad \text{(II.A.4)}$$

Prueba de (II.A.4). Sea

$$f(x) = x - 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta(x-2n\pi) + 2\pi \sum_{n=0}^{-\infty} \Theta(-x-2n\pi) \quad , \qquad \text{(II.A.5)}$$

la función mántisa de x definida en $[0,2\pi)$. La misma admite un desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \pi + \sum_{n\neq 0} (i/n) \quad e^{inx} \quad . \qquad \text{(II.A.6)}$$

Derivando (II.A.5) y (II.A.6) con respecto a x e igualando obtenemos (II.A.4).

Para demostrar (II.A.3), sea

$$a(k) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\theta \quad e^{-ik\theta} \; f(\theta) \quad , \qquad \text{(II.A.7)}$$

con $a(k=n)=a_n$ dado por (II.A.2). Tomando

$$F(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad a(k) \quad e^{ik\theta} \quad . \qquad \text{(II.A.8)}$$

Utilizando la identidad (II.A.4), queda demostrada (II.A.4) luego de un breve cálculo. Siguiendo este procedimiento, se puede demostrar la igualdad (II.25):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n_j} \exp\{in_j(\Delta\theta_j - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2 \; n_j^2 \; \mathbf{G}(\theta_{j-1})\} =$$

$$= \sum_{n_j} \int_{-\infty}^{\infty} dk/2\pi \quad \exp\{ik(\Delta\theta_j - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2 \; k^2 \mathbf{G}(\theta_{j-1})\} \quad \delta(k-n_j)$$

$$= \sum_{n_j} \int_{-\infty}^{\infty} dk/2\pi \quad \exp\{ik[(\Delta\theta_j - 2n_j\pi) - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})] - \varepsilon/2 \; n_j^2 \mathbf{G}(\theta_{j-1})\}$$

$$= (2\pi\varepsilon\mathbf{G}(\theta_{j-1}))^{-1/2} \sum_{n_j} \exp\left\{ - \frac{[\Delta\theta_j - 2n_j\pi - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})]^2}{2\;\varepsilon\;\mathbf{G}(\theta_{j-1})} \right\}$$

(II.A.9)

C A P I T U L O III

III.1. INTRODUCCION:

Se presenta el esquema perturbativo en Integral Funcional para determinar funciones de correlación o momentos en el régimen estacionario. Para ello, se introduce un modelo no perturbativo, el proceso de Wiener en el anillo a fin de establecer los principios sobre el cual se asienta el calculo perturbativo. El mismo es considerado, a continuación, para un modelo simplificado que muestra como se determinan las nuevas contribuciones espectrales.

El eje central de este Cápitulo es determinar las contribuciones espectrales de sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf. Para ello, el punto de pártida es considerar la forma normal estocástica de una bifurcación de Hopf, la cual es presentada en el sentido de Ito, dado que la misma facilita el tratamiento en integral funcional. Se consideraran los casos de ruido blanco aditivo y multiplicativo lineal.

III.2. PROCESO DE WIENER EN S^1. DESCRIPCION A PARTIR DEL FORMALISMO EN INTEGRAL FUNCIONAL:

Consideremos la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) que caracteriza al Proceso de Wiener en S^1:

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2} f(t) \qquad \text{(III.1)}$$

$$(\text{mod } 2\pi) \quad ,$$

$$\theta_o = \theta(t_o)$$

donde f(t) es ruido blanco Gaussiano delta correlacionado y ε su intensidad de ruido.

Estamos interesados en el cálculos de funciones de autocorrelación de un proceso $h(\theta(t))$, siendo $h(\theta)$ 2π periódica. Es entonces posible definir a partir de (II.59) la siguiente Funcional Generatriz (FG) de promedios estocásticos de funciones 2π periódicas:

$$\mathcal{Z}_o[j,j^*] = \int \mathcal{D}q\ \mathcal{D}q \quad \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau [\, p\dot{q} - \mathcal{H}_o(p) + jq + j^*p] \right\} \delta(q(t_o)-\theta_o)$$

(III.2.a)

$$H_o(p) = -i/2\ \varepsilon\ p^2 \quad . \qquad \text{(III.2.b)}$$

El subíndice 0 indica que estamos en presencia de una teoría libre, es decir H_o no contiene funciones periódicas. La FG dada en (III.2) la conoceremos de aquí en más como Funcional Generatriz "libre" (FGL) o no oscilatoria, la misma es Gaussiana y en consecuencia su integración es inmediata:

$$\mathcal{Z}_o[j,j^*] = \quad \exp\left\{ i\theta \int_{t_o}^{T} d\tau \ j(\tau) \right\}$$

$$\times \exp\left\{ -1/2 \int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau \ d\tau' [\, 2i \ \ j(\tau)S(\tau,\tau')j^*(\tau') + j(\tau)R(\tau,\tau')j(\tau')] \right\}$$

(III.3)

siendo las funciones de Green

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad , \tag{III.4.a}$$

$$R(\tau,\tau') = \varepsilon\ (\min(\tau,\tau')-t_o) \quad . \tag{III.4.b}$$

Notemos que $\mathcal{Z}_o[j,j^*]\longrightarrow 0$ cuando $t_o\longrightarrow -\infty$, a menos que se satisfaga

$$\int_{t_o}^{T} d\tau \ \ j(\tau) = 0 \quad , \tag{III.5}$$

en cuyo caso es posible definir una Funcional Generatriz Libre Estacionaria (FGLE):

$$\mathcal{Z}_o^{es}[j,j^*] =$$

$$= \exp\left\{-1/2 \int_{-\infty}^{T}\int_{-\infty}^{T} d\tau\ \ d\tau' [\ 2i\ \ j(\tau)S(\tau,\tau')j^*(\tau') + j(\tau)D(\tau,\tau')j(\tau')]\ \right\}$$

(III.6)

donde la función de Green estacionaria es

$$D(\tau,\tau') = \varepsilon \ \min(\tau,\tau') \quad . \tag{III.7}$$

De acuerdo a la condición (III.5) o estacionaria sobre la fuente j, la misma debe ser evaluada como

$$j(\circ) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i\ \ \delta(\circ-t_i) \quad , \tag{III.8.a}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i = 0 \quad , \tag{III.8.b}$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$. En consecuencia solo es posible cálcular promedios estocásticos de la forma $\exp\{in[\theta(t)-\theta(t')]\}$ a efectos del cálculo de funciones de correlación del proceso $h(\theta(t))$. Explicitamente:

$$\begin{aligned}\langle \exp\{in[\theta(t)-\theta(t')]\}\rangle^{est} &= \exp\{in\omega(t-t')\}\ \mathcal{Z}_o^{es}[n(\delta(\circ-t)-\delta(\circ-t'));\nu] \\ &= \exp\{in\omega(t-t')-\varepsilon n^2|t-t'|\} \quad .\end{aligned} \tag{III.9}$$

Como se ve esta cantidad es estacionaria, es decir depende solo de la diferencia $T=t-t'$. La función de autocorrelación de $h(\theta)$ es

$$K(T) = \langle h(\theta(t)\ h(\theta(t'))\rangle^{est} = \sum_{\mathbb{Z}} |h_n|\ \langle \exp\{in[\theta(t)-\theta(t')]\}\rangle^{est} \quad . \tag{III.10}$$

Teniendo en cuenta que el valor medio de $h(\theta(t))$ es h_o, la variancia del proceso $h(\theta(t))$ esta dada por (III.10) pero n=0 excluido en la suma.

Para un proceso de Wiener con $\omega=0$, la variancia es simplemente

$$\sigma(T) = \sum_{n\geq o} (2/n^2)\ \exp\{-\varepsilon n^2|T|/2\} \quad . \tag{III.11}$$

La función de autocorrelación de un proceso de Wiener definido en $\mathbb{R}$, es simplemente dada por $R(t,t')$ que es no estacionaria, mientras que si el proceso esta definido en S^1 es simplemente $K(T)=\varkappa+\sigma(T)$ el cual es estacionario. Dos cantidades de interés caracterizan a un proceso estacionario, tales como el tiempo de correlación τ_c y el coeficiente de intensidad $\varkappa$ del proceso $\theta(t)$. Asi:

$$\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \;\; \sigma(\tau) = \frac{8}{\varepsilon}\, \zeta(4) \quad , \tag{III.12}$$

nos da una idea de la intensidad de las fluctuaciones, mientras que

$$\tau = \frac{2}{\varkappa} \int_{0}^{\infty} d\tau \;\; \tau \;\; \sigma(\tau) = \frac{2}{\varepsilon}\, \frac{\zeta(6)}{\zeta(4)} \quad , \tag{III.13}$$

nos da idea del lapso sobre el cual la correlación se extiende entre valores del proceso $\theta(t)$. ζ es la función Zeta de Riemann [Ab1][1] definida por $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$, $s\in\mathbb{N}$. Se podran despreciar correlaciónes cuyo tiempo de separación T sea mucho mayor que τ_c, de (III.13) se tiene que para bajas intensidades de ruido todas las correlaciones se vuelven importantes, ya que el sistema se relaja lentamente.

Para determinar la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT) se pueden utilizar los resultados conocidos para el proceso de Wiener en la recta

---

[1] Form.23.2.1.(Pag.807)

$\zeta(4)=\pi^2/90=1.0823$ y $\zeta(6)=1.0173$ (Pag.811)

$$\mathcal{P}_W(x,t\,|\,x_o,t_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\tau|}}\exp\left\{-\frac{(x-x_o)^2}{2\varepsilon|\tau|}\right\} \quad , \qquad \text{(III.14)}$$

donde $x\in\mathbb{R}$ y $\tau=t-t_o$.

De las Ecs. (II.54) y (II.56) se tiene

$$\mathcal{P}(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\tau|}}\sum_{\mathbb{Z}}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_o+2n\pi)^2}{2\varepsilon|\tau|}\right\} . \qquad \text{(III.15)}$$

Estos resultados pueden ser alcanzados alternativamente a partir de la Ecuación de Fokker-Planck (EFP), con condiciones de contorno periódica para la DPT dada por Ec.(II.7) y condición inicial dada por Ec.(II.6). Una técnica a utilizar es separación de variables que ha sido profusamente utilizada en la bibliografía [Ri84, Ga83]. La condición de normalización para la DPT debe ser definida en $\mathbb{S}^1$, luego la corriente de probabilidad debe ser periódica. En un proceso de Wiener lineal la DPT y la corriente de probabilidad se anulan en $\pm\infty$, pero en el anillo $\mathbb{S}^1$ los extremos del intervalo se identifican mutuamente, en consecuencia se tiene una condición de continuidad en todos los puntos de este. Las soluciones estacionarias de la EFP han sido tratadas por Gardiner [Ga83] para contornos reflejantes y absorventes, y como ejemplos trata procesos de Wiener. En particular Risken [Ri84] ha tratado el caso de movimiento Browniano en potenciales periódicos.

III.3. CONTRIBUCIONES ESPECTRALES EN UN PROCESO ESTOCASTICO UNIDIMENSIONAL DEFINIDO EN S^1:

Consideremos la EDE 1-dimensional

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2} g(\theta)\ f(t) \qquad \text{(III.16)}$$

$$(\text{mod } 2\pi) \quad ,$$

$$\theta_o = \theta(t_o)$$

donde $g(\theta)$ y su derivada son funciones 2π periódicas y continuas en $[0,2\pi]$, de forma que admitan desarollo en Serie de Fourier. Pediremos que sean funciones acotadas en $(-1,1)$ para asegurar la convergencia en los cálculos que siguen. La EDE (III.16) puede ser interpretada en un sentido arbitrario, es decir si realizamos la partición temporal del intervalo $[t_o,t]$ en N trozos de forma tal que $t_j = t_o + j\varepsilon$ $(j=1,\dots,N+1)$ donde $\varepsilon=(t-t_o)/N$, $t=t_{N+1}$ tenemos que $\theta(t_j) = \theta_j^{[s]} = \theta_{j-1} + s\ \Delta\theta_j$ $(\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1})$. Si $s=0$ la EDE se dice que la EDE es interpretada en el sentido de Ito (prescripción de discretización del pre-punto) y si $s=1/2$ en el sentido de Stratonovich o del cálculo usual (prescripción del punto medio). Nosotros nos independizaremos de la prescripción de discretización, elegimos una arbitraria con $s\in[0,1]$ pero a efectos del tratamiento con integral funcional llevamos esta EDE a otra definida en el sentido de Ito. Luego de un cálculo estandar que no daremos aqui pero que esta detallado en el Apendice A se tiene la siguiente EDE

$$\dot{\theta} = \omega + s\ \varepsilon\ g(\theta)\ g'(\theta) + \varepsilon^{1/2} g(\theta)\ f(t) \quad , \tag{III.17}$$

$$\theta_0 = \theta(t_0) \quad ,$$

donde $s\in[0,1]$ y g' indica derivada de g con respecto a θ. El término $g(\theta)\ g'(\theta)$ es conocido como de arrastre espurio.

El Hamiltoniano correspondiente a integrales funcionales definidas en el espacio de fases (II.51) será de acuerdo a (II.53):

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}\{p,q;t) = -i/2\ \varepsilon\ A_0 p^2 + \sum_{l\in\mathbb{Z}_0} (-i\varepsilon A_l p^2/2 - B_l p)\ \exp\{il[\ q+\Omega t\ ]\} \quad , \tag{III.18}$$

donde A_l y B_l son los coeficientes de Fourier de $g^2(\theta)$ y $g(\theta)\ g'(\theta)$ respectivamente y $\Omega=\omega+B_0$. $\gamma(0)$ indica prescripción de discretización del prepunto en la integral funcional y $\mathbb{Z}_0=\mathbb{Z}-\{0\}$. En el Hamiltoniano hemos separado explicitamente dos términos, uno libre o no oscilatorio a partir del cual se efectua el cálculo perturbativo y el otro término oscilatorio o perturbativo.

A continuación se da el cálculo de la función de autocorrelación del proceso $\cos\theta(t)$, lo que dara origen a la aparición de las contribuciones espectrales orden a orden en teoría perturbativa. La función de autocorrelación estacionaria es

$$C(T) = 1/2\ \mathrm{Re}\{\ \langle\exp[\ i(\theta(T)-\theta(0))]\ \rangle^{st} + \langle\exp[\ i(\theta(T)+\theta(0))]\ \rangle^{st}\} \quad , \tag{III.19}$$

La funcional generatriz (FG) dada en Ec.(II.59) la expresamos como

$$\mathcal{Z}[j,j^*] = \sum_{\mathbb{N}} \frac{\varepsilon^n}{n!} \int_{\gamma(o)} Dp\ Dq \quad \left(-i\int_{t_o}^{T} d\tau\ \mathcal{H}^{\gamma(o)}(p,q;t)\right)^n$$

$$\times \quad \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ \left[pq - \mathcal{H}_o(p) + jq + j^* p \right] \right\}\Bigg|_{q(t_o)=\theta_o} ,$$

(III.20)

siendo el Hamiltoniano libre o no perturbado

$$\mathcal{H}_o(p) = (-i/2)\varepsilon A_o p^2 \quad , \qquad \text{(III.21)}$$

y la parte pertubativa

$$\mathcal{H}^{\gamma(o)}(p,q;t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}_o} (\alpha_l p^2 - \beta_l p)\ \exp\{il[q+\Omega t]\} \quad , \qquad \text{(III.22)}$$

con $\alpha_l=(-i/2)A_l$ y $\beta_l=\varepsilon B_l$. El término n=0 en la suma de la Ec.(III.20) define la FGL, que al ser integrada e imponiendo la condición de régimen estacionario (III.5) permite obtener la FGLE dada en (III.6). En este caso las funciones de Green son

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad , \qquad \text{(III.23.a)}$$

$$D(\tau,\tau') = \varepsilon A_o\ \min(\tau,\tau') \quad . \qquad \text{(III.23.b)}$$

La contribución a orden cero a la función de correlación C(T), de acuerdo a la condición sobre la fuente viene dada por

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_0^{est} = \exp\{i\Omega T\}\ \mathcal{Z}_0^{es}[\,(\delta(\circ-T)-\delta(\circ));0]$$

$$= \exp\{i\Omega T-(\varepsilon A_0/2)\,|T|\} \quad . \tag{III.24}$$

Por no satisfacerse la misma condición se tiene en cambio que

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)+\theta(0)]\}\rangle_0^{est} = 0 \quad . \tag{III.25}$$

Luego la función de autocorrelación del proceso $\cos\theta$ es

$$C_0(T) = 1/2\ \cos\Omega T\ \exp\{-(\varepsilon A_0/2)\,|T|\} \quad . \tag{III.26}$$

A orden 1 la contribución del FGLE es

$$\mathcal{Z}_1^{es}[j,j\,] = -i\varepsilon \int_{t_0}^{T} dt \sum_{\mathbb{Z}_0} e^{il\Omega t} \left[\alpha_l\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t)^2}\right)-\beta_l\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j^*(t)}\right)\right]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{es}[\,j(\circ)+l\delta(\circ-t);j^*(\circ)] \quad .$$

(III.27)

La unica contribución no nula a la función de autocorrelación viene dada por el término l=-2 en la suma, ya que solo en este caso se satisface la condición (III.5), siendo

$$\langle\exp\{i[\,\theta(T)+\theta(0)]\}\rangle_1^{est} = \exp\{i\Omega T\}\ \mathcal{Z}_1^{es}[\,(\delta(\circ-T)-\delta(\circ));0] =$$

$$= -i\varepsilon\ \exp\{i\Omega T\}\ \int_{t_0}^{T} dt\ e^{i2\Omega t}\left[\alpha_{-2}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t)^2}\right)-\beta_{-2}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t)}\right)\right]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\,j,j^*]\ \Bigg|_{\substack{j(\circ)=\delta(\circ-T)+\delta(\circ)-2\delta(\circ-t)\\ j^*(\circ)=0}} .$$

(III.28)

Utilizando la relación (9) del Apendice A

$$\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j^*(t)}\mathcal{Z}_0 = -\int_{-\infty}^{T} dt'\ \Theta(t'-t)\ j(t')\ \mathcal{Z}_0 \quad , \qquad \text{(III.29)}$$

evaluando en las fuentes, y teniendo en cuenta que la prescripción de discretización elegida es la del pre-punto (es decir $\theta(0)=0$) la Ec.(III.28) se expresa como

$$\langle\exp\{i[\,\theta(T)+\theta(0)]\}\rangle_1^{est} = -i\varepsilon\ \exp\{i\Omega T\}\ \int_{-\infty}^{T} dt\ [\alpha_{-2}(1+\Theta(-t))+\beta_{-2}]$$

$$\times\ (1+\Theta(-t))\ \exp\{-i2\Omega t + 2\varepsilon A_0 \min(t,0)\} .$$

(III.30)

Este término da solo contribuciones espectrales a la frecuencia fundamental Ω dada en (III.24), introduciendo solo correcciones a esta. El otro término que aparece en la función de correlación C(T) tiene contribución nula ya que no se satisface en este caso la condición (III.5) sobre la fuente j.

Las nuevas contribuciones espectrales, de frecuencia 3Ω, vienen al orden dos. En este caso la contribución de la FGLE es

$$\mathcal{Z}_2^{es}[j,j^*] = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{T} dt_1 \int_{t_0}^{T} dt_2 \sum_{\mathbb{Z}_0} \exp\{i\Omega(l_1 t_1 + l_2 t_2)\}$$

$$\times \left[\alpha_{l_1}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_1)^2}\right) - \beta_{l_1}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_1)}\right)\right] \left[\alpha_{l_2}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_2)^2}\right) - \beta_{l_2}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_2)}\right)\right]$$

$$\times \mathcal{Z}_0^{es}[j(\circ)+l_1\delta(\circ-t_1)+l_2\delta(\circ-t_2);j^*(\circ)] \quad .$$

(III.31)

La contribución al orden 2 a C(T) viene dada por los términos $l_1=-l_2=l\neq 0$ en la suma de (III.31):

$$\langle \exp\{i[\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_2^{est} = \exp\{i\Omega T\}\ \mathcal{Z}_2^{es}[(\delta(\circ-T)-\delta(\circ));0] =$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}\exp\{i\Omega T\} \int_{t_0}^{T} dt_1 \int_{t_0}^{T} dt_2 \left\{ \sum_{\mathbb{Z}_0} \exp\{i\Omega l(t_1-t_2)\}\right.$$

$$\times \left[\alpha_l\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_1)^2}\right) - \beta_l\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_1)}\right)\right]\left[\alpha_{-l}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_1)^2}\right) - \beta_{-l}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t_1)}\right)\right]$$

$$\left.\times \mathcal{Z}_0^{est}[j,j^*] \Big|_{\substack{j(\circ)=\delta(\circ-T)+\delta(\circ)+l(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2)) \\ j^*(\circ)=0}} \right\} \quad .$$

(III.32)

El procedimiento para evaluar esta expresión es el siguiente: utilizamos la relación (III.30) y evaluamos en las fuentes con la prescripción de discretización del pre-punto. Teniendo en cuenta que el integrando es simetrico en las variables de integración, puesto que la suma se extiende sobre $\mathbb{Z}_0$:

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_2^{est} =$$

$$= -\,\varepsilon^2 \exp\{(i\Omega - \varepsilon A_0/2)T\} \int_{t_0}^{T} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_0} g_n(t_1)\;\; f_n(t_2) \tag{III.33}$$

siendo las funciones integrando

$$g_n(t_1) = \Theta(t_1)(\alpha_n \Theta(t_1)+\beta_n)$$

$$\times\;\; \exp\{in\Omega t_1-(\varepsilon A_0/2)[\,2n(t_1-\min(t_1,0))+n^2 t_1]\}, \tag{III.34.a}$$

$$f_n(t_2) = (\Theta(t_2)+n)(\alpha_{-n}(\Theta(t_2)+n)+\beta_{-n})$$

$$\times\;\; \exp\{-in\Omega t_2-(\varepsilon A_0/2)[\,2n(-t_2+\min(t_2,0))-n^2 t_2]\}. \tag{III.34.b}$$

Aqui no es nuestro proposito integrar explicitamente (III.33) sino calcular solo contribuciones espectrales o resonantes de frecuencia $(n+1)\Omega$, $n\neq 0$. Estaran dadas por

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_{2,res}^{est} =$$

$$= -\,\varepsilon^2 \exp\{(i\Omega - \varepsilon A_0/2)T\} \sum_{n\in\mathbb{Z}_0} G_n(T)\;[\,F_n(0^-) - F_n(0^+)]\;\;, \tag{III.35}$$

donde $G_n(t)$ es la primitiva de la función $g_n(t)$ y $F_n(t)$ es la de

$f_n(t)$, mientras que $F_n(0^-) - F_n(0^+)$ es la discontinuidad de la integral en $t_2=0$. Es este hecho el que introduce la aparición de nuevos términos espectrales o resonantes. Hasta aqui no se ha dicho nada acerca del parámetro de expansión perturbativo, el mismo debe ser una cantidad adimensional, un simple cálculo muestra que el mismo es ε/Ω. La demostración se efectua en el Cap.VI. En términos de parámetro de expansión la Ec.(III.35) es explicitamente

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle^{est}_{2,res} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\Omega}\right)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_0} D_n(\varepsilon/\Omega)\, \exp\{[\, i(n+1)\Omega-(n+1)^2\varepsilon A_0/2]\, T\} \tag{III.36.a}$$

$$D_n(E)=\frac{\alpha_n+\beta_n}{(in-EA_0 n(n+2)/2)}\left\{ \frac{n(n\alpha_{-n}+\beta_{-n})}{(-in+EA_0 n^2/2)} - \frac{(1+n)((1+n)\alpha_{-n}+\beta_{-n})}{(-in+EA_0 n(n+2)/2)} \right\}, \tag{III.36.b}$$

siendo $E=\varepsilon/\Omega$.

La otra contribución a $G(T)$ al orden 2 esta dada por $l_1=-(l_2+2)\neq 0$ en la expresión (III.32). Los cálculos no seran dados aqui, ya que no ofrecen nuevas alternativas, se evaluan las fuentes, se sigue utilizando la prescripción de discretización del pre-punto y se tiene en cuenta que el integrando es simétrico en las variables de integración. Las contribuciones espectrales nuevamente tienen su origen en la discontinuidad del integrando. Expresada en términos del parámetro de expansión

$$\langle \exp\{i[\theta(T)+\theta(0)]\}\rangle^{est}_{2,res} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\Omega}\right)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_0} E_n(\varepsilon/\Omega)\ \exp\{[\ i(n+1)\Omega-(n+1)^2\varepsilon A_0/2]\ T\}$$

(III.37.a)

$$E_n(E)=\frac{\alpha_n+\beta_n}{(in-EA_0n(n+2)/2)}\left\{\frac{(2+n)((2+n)\alpha_{-n-2}+\beta_{-n-2})}{(-i(n+2)+EA_0(n+2)^2/2)}-\frac{(3+n)((3+n)\alpha_{-n-2}+\beta_{-n-2})}{(-i(n+2)+EA_0n(n+2)/2)}\right\}$$

(III.37.b)

De lo visto hasta aqui a orden 2 en el parámetro de expansión ε/Ω aparecen términos que dan nuevas contribuciones espectrales de frecuencia 0, Ω, 2Ω,... .

El procedimiento aquí detallado puede será extendido para el cálculo de funciones de correlación de cualquier proceso $h(\theta)$ 2π periódico. Hemos elegido aqui el caso $h(\theta)=\cos\theta$ por ser este el que será considerado en las proximas subsecciones cuando consideremos el cálculo de funciones de correlación a partir de la Forma Normal de la bifurcación de Hopf.

En algún caso puede ser de interés conocer valores medios de un proceso $h(\theta)$, que se remite al cálculo de los valores medios

$$\langle \exp\{in\theta(T)\}\rangle = \exp\{in\Omega T\}\ \mathcal{Z}[\ n\delta(\circ-T);0] \quad , \qquad \text{(III.38)}$$

con $n\neq0$. A orden cero en teoría perturbativa la contribución es nula de acuedo con la condición estacionaria (III.5). Las primeras contribuciones no nulas aparecen al primer orden, las mismas son todas de frecuencia Ω.

III.4 FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF EN EL SENTIDO DE ITO:

Las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE) dadas en la Secc.I.3. son interpretadas en el sentido usual del cálculo o de Stratonovich, en el cual las funciones de las variables dinámicas son interpretadas en la prescripción de discretización del punto medio. Puede ser de interés en algunos casos tener EDE definidas en el sentido de Ito, es decir con prescripción de discretización del pre-punto. La técnica como pasar de una EDE interpretada en el sentido de Stratonovich a otra en el de Ito ha sido tratado profusamente en la bibliografía. En el Apendice A se da una demostración trabajando en el discreto de como pasar de una EDE dada en un sentido arbitrario a otra en cualquier otra prescripción siguiendo las técnicas desarolladas en [LR82]. En todos los casos, se introduce un término de arrastre espurio que debe ser considerado. En este trabajo elegimos como convención la interpretación de Ito, siendo necesario dar la Ec.(I.10) en tal sentido. Asi, realizando el cambio no lineal de variables [SV87]:

$$z = \sqrt{M}\, e^{u+i\theta} , \tag{III.39}$$

con $M = \mu$ en el caso (A) y $M = \mu + \upsilon/2$ en el (M), la EDE (I.10) en el sentido de Ito es

$$\dot{\theta} = \omega - M\,\beta\, e^{2u} + 1/2\ \upsilon\ h_1(u,\theta) + \upsilon^{1/2}\ g_1(u,\theta)\ F(t)$$
$$\dot{u} = M\,(1-e^{2u}) + 1/2\ \upsilon\ h_2(u,\theta) + \upsilon^{1/2}\ g_2(u,\theta)\ F(t) \qquad \text{(III.40)}$$

siendo para el caso (A)

$$h_1(u,\theta) = e^{-2u}\ \mathrm{sen}2\theta \quad ,$$
$$h_2(u,\theta) = -\ e^{-2u}\ \cos 2\theta \qquad \text{(III.41)}$$

y para el (M)

$$h_1(u,\theta) = -2\ \mathrm{sen}\Delta\ \cos(2\theta-\Delta) + \mathrm{sen}[2(2\theta-\Delta)] \quad ,$$
$$h_2(u,\theta) = 1 - 2\ \mathrm{sen}\Delta\ \mathrm{sen}(2\theta-\Delta) - \cos[2(2\theta-\Delta)] \qquad \text{(III.42)}$$

Realizando la sustitución (I.13) con $\Omega = \omega - \beta M$, linealizando alrrededor de u=0 las EDE (III.18) se reducen a

$$\dot{\varphi} = -2\beta M\ u + \upsilon/2\ h_1(\varphi+\Omega t) + \upsilon^{1/2}\ g_1(\varphi+\Omega t)\ F(t) \quad ,$$
$$\dot{u} = -2M\ u + \upsilon/2\ h_2(\varphi+\Omega t) + \upsilon_2^{1/2}\ g\ (\varphi+\Omega t)\ F(t) \qquad \text{(III.43)}$$

siendo para el caso (A)

$$h_1(\psi) = \mathrm{sen}2\psi \quad , \qquad h_2(\psi) = -\cos 2\psi \quad , \qquad \text{(III.44)}$$

y para el (M)

$$h_1(\psi) = -2a\ \text{sen}2\psi + \text{sen}4\psi\ ,\quad h_2(\psi) = -2a\ \cos2\psi - \cos4\psi\ . \tag{III.45}$$

III.5 FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO ADITIVO:

La Forma Normal Estocástica de una Bifurcación de Hopf (FNEBH) en presencia de ruido aditivo, como se ha visto puede ser transformada a una EDE para variables (u,θ) a través del cambio no lineal de variables:

$$z = \sqrt{\mu}\ \exp\{u+i(\varphi+\Omega t)\} \tag{III.46}$$

con $\Omega=\omega-\mu\beta$. La EDE obtenida viene dada por la Ec.(III.43). Consideraremos por simplicidad el caso $\beta=0$, la EDE interpretada en el sentido de Ito es

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 1/2\ \upsilon\ \text{sen}2\psi - \upsilon^{1/2}\text{sen}\psi\ f(t) \\ \dot{u} &= -2\mu\ u - 1/2\ \upsilon\ \cos2\psi + \upsilon^{1/2}\cos\psi\ f(t)\ , \\ \psi &= \varphi + \omega t \end{aligned} \tag{III.47}$$

donde $u\in\mathbb{R}$ define pequeños desplazamientos "transversales" a la solución estable $u=0$ y $\varphi\in\mathbb{S}^1$ define la fase de oscilación del sistema.

Estamos interesados en determinar las contribuciones espectrales o resonancias que son ármonicos secundarios a las funciones de correlación cruzada y autocorrelación del proceso (z,z^*)

$$\langle z(t)z^*(t')\rangle \quad , \qquad \langle z(t)z(t')\rangle \quad . \tag{III.48}$$

respectivamente, y sus complejas conjugadas. Asimismo determinaremos los momentos y funciones de correlación del proceso (z,z^*) al orden cero en υ o contribuciones principales.

De acuerdo a los resultados alcanzados en el Cápitulo II., se tiene que la Funcional Generatriz de momentos y funciones de correlación es

$$\mathcal{Z}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(0)} D\underset{\sim}{q}\ D\underset{\sim}{p}\ \exp\Big\{ i\int_{t_0}^{T} d\tau\ [\, p_1 q_1 + p_2 q_2 - \mathcal{H}^{\gamma(0)}(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t) +$$
$$+ j_1 q_1 + j_2 q_2 + j_1^* p_1 + j_2^* p_2 \,] \Big\}$$
$$\times\ \delta(q_1(t_0)-\varphi_0)\ \ \delta(q_2(t_0)-u_0) \quad , \tag{III.49}$$

siendo los momentos conjugados $\underset{\sim}{p}=(p_1,p_2)$ y $\underset{\sim}{q}=(q_1,q_2)$, las fuentes $\underset{\sim}{j}=(j_1,j_2)$ y $\underset{\sim}{j}^*=(j_1^*,j_2^*)$, y la medida de integración $D\underset{\sim}{q}\ D\underset{\sim}{p} \equiv Dq_1 Dq_2 Dp_1 Dp_2$. El Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q;t) = -i/2\ \upsilon\ p_1^2\ \text{sen}^2(q_1+\omega t) - i/2\ \upsilon\ p_2^2\ \cos^2(q_1+\omega t) +$$

$$+ i/2\ \upsilon\ 2\ p_1 p_2\ \text{sen}(q_1+\omega t)\ \cos(q_1+\omega t) -$$

$$- p_2\ (2\mu\ q_2 + 1/2\ \upsilon\ \cos[2(q_1+\omega t)]) +$$

$$+ p_1\ 1/2\ \upsilon\ \text{sen}[2(q_1+\omega t)] \quad , \qquad \text{(III.50)}$$

del cual es posible separar una parte "libre' o no oscilatoria

$$\mathcal{H}_o(p,q;t) = -i/2\ (\upsilon/2)\ p_1^2 - i/2\ (\upsilon/2)\ p_2^2 - 2\mu q_2 p_2 \ , \qquad \text{(III.51)}$$

siendo la parte perturbativa $\mathcal{K}^{\gamma(0)} = \mathcal{H}^{\gamma(0)} - \mathcal{H}_o$.

Definimos una Funcional generatriz "libre" (FGL) o no oscilatoria $\mathcal{Z}_o[j,j]$ reemplazando el Hamiltoniano "libre" (III.51) en la ecuación (III.49). La expresión es facilmente integrada (en el Apendice A se dan los cálculos) obteniendose

$$\mathcal{Z}_o[j,j^*] = \exp\left\{ i\varphi_o \int_{t_o}^{T} d\tau\ j_1(\tau) + iu_o \int_{t_o}^{T} d\tau\ j_2(\tau)\ \exp\{2\mu(t_o-\tau)\} \right\}$$

$$\times\ \exp\left\{ -1/2 \int_{t_o}^{T} d\tau\ d\tau' [\,2i j_\nu(\tau) \mathbf{S}_\nu(\tau,\tau') j_\nu^*(\tau') + j_\nu(\tau) \mathbf{R}_\nu(\tau,\tau') j_\nu(\tau')] \right\} ,$$

$$\text{(III.52)}$$

donde ν=1,2 e índices repetidos implican suma. Las funciones de Green son en este caso

$$S_1(t,t') = \Theta(t-t') \quad , \tag{III.53.a}$$

$$S_2(t,t') = \Theta(t-t') \exp\{-2\mu(t-t')\} \ , \tag{III.53.b}$$

$$R_1(t,t') = \upsilon/2 \ (\min(t,t')-t_o) \ , \tag{III.53.c}$$

$$R_2(t,t') = (\upsilon/8\mu)\{\exp[-2\mu|t-t'|]-\exp[-2\mu(t+t'-2t_o)]\}. \tag{III.53.d}$$

Notemos que $\mathcal{Z}_o[j,j^*]\longrightarrow 0$ cuando $t_o \longrightarrow -\infty$, a menos que se satisfaga la condición

$$\int_{t_o}^{T} d\tau \ \ j_1(\tau) = 0 \quad . \tag{III.54}$$

Esta condición es la que permite caracterizar al sistema en el régimen estacionario, es una condición necesaria y suficiente. En el régimen transitorio no es necesario imponer tal condición. Reemplazando en la Ec.(III.52) y luego tomando $t_o \longrightarrow -\infty$ se obtiene la funcional generatriz libre estacionaria (FGLE):

$$\mathcal{Z}_o^{est}[j,j^*] =$$

$$= \exp\left\{-1/2\int_{t_o}^{T} d\tau \ d\tau' [\ 2i\, j_\nu(\tau)S_\nu(\tau,\tau')j_\nu^*(\tau')+ \ j_\nu(\tau)D_\nu(\tau,\tau')j_\nu(\tau')] \ \right\}, \tag{III.55}$$

siendo las funciones de Green

$$D_1(t,t') = \upsilon/2 \ \min(t,t') \quad , \tag{III.56.a}$$

$$D_2(t,t') = (\upsilon/8\mu)\exp[-2\mu|t-t'|] \ . \tag{III.56.b}$$

Las funciones de correlación no nulas al orden cero son

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_0^{est} = \mu\exp\{i\omega T\}\ \mathscr{Z}_0^{est}[\,\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0]$$

$$= \mu\exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\upsilon|T|/4 + (\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\} \ .$$

(III.57)

Para efectuar el cálculo perturbativo que permite encontrar las contribuciones espectrales mas significativas damos la FG en el régimen estacionario para realizar el esquema perturbativo a partir de (III.49)

$$\mathscr{Z}_0^{est}[j,j^*] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n!}\int_{\gamma(0)} D\mathbf{q}\ D\mathbf{p}\ \left(-i\int_{t_0}^{t} d\tau\ \mathcal{K}^{\gamma(0)}(\mathbf{p},\mathbf{q};t)\right)^n$$

$$\times\ \exp\left\{i\int_{t_0}^{T} d\tau\ [\,p_1\dot q_1 + p_2\dot q_2 - \mathscr{H}_0(\mathbf{p},\mathbf{q};t) + j_1q_1 + j_2q_2 + j_1^*p_1 + j_2^*p_2]\right\}$$

$$\times\ \delta(q_1(t_0)-\varphi_0)\ \delta(q_2(t_0)-u_0) \ .$$

(III.58)

El término perturbativo $\mathcal{K}^{\gamma(0)}$ introduce correcciones orden a orden en el parámetro de expansión perturbativo, que como veremos a continuación es υ/ω. La corrección a orden 1 a las funciones de correlación dadas en (III.48) es de términos espectrales cuya frecuencia es ω. Este cálculo no lo daremos aqui. Para ilustar el procedimiento pasemos a determinar las correcciones de 2 orden que son las que dan términos de frecuencia múltiplo de la fundamental ω. Dando $\mathcal{K}^{\gamma(0)}$ por su desarrollo en Serie de Fourier, se vuelve mas sencilla la aplicación de la condición (III.54) y los cálculos que siguen:

$$\mathcal{K}^{\gamma(0)}(p,q;t) = -i\nu/8 \left\{ [\,(p_2+ip_1^2) - 2i(p_2+ip_1)]\ \exp\{i2(q_1+\omega t)\} + \right.$$
$$\left. + [\,(p_2-ip_1)^2 + 2i(p_2-ip_1)]\ \exp\{-i2(q_1+\omega t)\} \right\} .$$

(III.59)

Las contribuciones no nulas a las funciones de correlación (III.48), al orden 2 quedan determinadas por la condición (III.54) sobre la fuente j_1. Reemplazando los momentos conjugados p_1 y p_2 por $-i$ veces la derivada funcional de $\mathcal{Z}_0^{est}$ respecto de las fuentes j_1 y j_2 respectivamente:

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_2^{est} = \mu \exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_2^{est}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0]$$

$$= \mu \exp\{i\omega T\}\ \frac{1}{2}\ (\frac{\upsilon}{8})^2 \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} dt_1 dt_2 \Bigg\{ \exp\{i2\omega(t_1-t_2)\}$$

$$\times \Big[\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)} \Big)^{(2)} - 2i \Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)} \Big) \Big]$$

$$\times \Big[\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)} \Big)^{(2)} + 2i \Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)} \Big) \Big]$$

$$\times \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Bigg|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)+\delta(\circ)+2(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2));\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ j_1^*(\circ)=j_2^*(\circ)=0}}$$

$$+ P(t_1,t_2) \Bigg\} ,$$

(III.60)

(2) indica derivadas funcionales de orden 2 y $P(t_1,t_2)$ denota el término que se obtiene permutando t_1 y t_2 en el sumando previo. Efectuando las derivadas funcionales se tiene:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1^*(t)} \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Bigg|_{j_1(\circ)} =$$

$$= -\ [\Theta(T-t)-\Theta(-t)+2(\Theta(t_1-t)-\Theta(t_2-t))]\ \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Bigg|_{j_1(\circ)}$$

(III.61.a)

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t)} \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Big|_{j_2(\circ)} =$$

$$= i\ [\ \Theta(T-t)\ \exp\{-2\mu(T-t)\} + \Theta(-t)\ \exp\{2\mu t\}]\ \ \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Big|_{j_2(\circ)}$$

(III.61.b)

$$j_1(\circ)=\delta(\circ-T)+\delta(\circ)+2(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2)) \ , \qquad \text{(III.61.c)}$$

$$j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ)) \ , \qquad \text{(III.61.d)}$$

para $t=t_1,t_2$. El integrando en (III.61) es simétrico en t_1,t_2 luego llevamos la región de integración a $T>t_1>t_2$. Trabajando en la prescripción de discretización del pre-punto, es decir con $\Theta(0)=0$ se tiene:

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_2^{est}=(\tfrac{\upsilon}{B})^2\mu\ \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\upsilon|T|/4 + (\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\}$$

$$\times \int_{t_0}^{T} dt_1\quad g(t_1)\quad \int_{t_0}^{t_1} dt_2\quad f(t_2) \quad ,$$

(III.62.a)

$$g(t_1) = \{\ [\ (\exp(-2\mu T) + \ \Theta(-t_1))\ \exp(2\mu t_1) - \Theta(t_1)]^2 -$$

$$- 2\ [\ (\exp(-2\mu T) + \Theta(-t_1))\ \exp(2\mu t_1) - \Theta(t_1)]\ \}$$

$$\times\ \exp\{\ i2\omega t_1 - \upsilon(\ 2t_1 - \min(0,t_1)\ )\ \} \quad , \qquad \text{(III.62.b)}$$

$$f(t_2) = \{\ [\ (\exp(-2\mu T) + \ \Theta(-t_2))\ \exp(2\mu t_2) + (2+\Theta(t_2))]^2 -$$

$$- 2\ [\ (\exp(-2\mu T) + \Theta(-t_2))\ \exp(2\mu t_2) + (2+\Theta(t_2))]\ \ \}$$

$$\times\ \exp\{\ -i2\omega t_2 + \upsilon(\ 2t_2 - \min(0,t_2)\ )\ \} \quad .$$

(III.62.c)

Las contribuciones espectrales principales de frecuencia 3ω aparecen a este orden de la teoría perturbativa. Estan dadas por

$$\langle z(T)z^{*}(0)\rangle^{est}_{2,3\omega}=(\frac{\upsilon}{8})^{2}\mu\ \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\upsilon|T|/2+(\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\}$$

$$\times\ G(T)\ [F(0^{-})-F(0^{+})]\quad ,$$

(III.63)

donde $G(t_1)$ y $F(t_2)$ son las primitivas de las funciones integrando $g(t_1)$ y $f(t_2)$ respectivamente y $[F(0^{-})-F(0^{+})]$ es la discontinuidad de la integral en $t_2=0$. Integrando en cada una de las regiones y evaluando

$$G(T)=\left[\frac{1}{4\mu-2\upsilon+i2\omega}-\frac{4}{2\mu-2\upsilon+i2\omega}+\frac{3}{-2\upsilon+i2\omega}\right]\exp\{(i2\omega-2\upsilon)T\}\ ,$$

(III.64.a)

$$F(0^{-})=\left[\frac{(\exp(-2\mu T)+1)^{2}}{4\mu+\upsilon-i2\omega}+\frac{6(\exp(-2\mu T)+1)}{2\mu+\upsilon-i2\omega}+\frac{8}{\upsilon-i2\omega}\right]\ , \qquad \text{(III.64.b)}$$

$$F(0^{+})=\left[\frac{\exp(-4\mu T)}{4\mu+2\upsilon-i2\omega}+\frac{8\ \exp(-2\mu T)}{2\mu+2\upsilon-i2\omega}+\frac{15}{2\upsilon-i2\omega}\right]. \qquad \text{(III.64.c)}$$

Analizando cada uno de los términos que aparecen en la discontinuidad se tiene: a) que el factor $\exp(-4\mu T)$ es de orden 1 en υ y como el cálculo perturbativo es a orden 2, este término introduce una contribución que es de orden 3 que deshechamos, b) el término que contiene a $\exp(-2\mu T)$ tiene contribución no nula a orden 0 en υ, es de orden 1 en μ y lo retenemos en los cálculos que siguen, y c) el término independiente no tiene contribuciones despreciables. Luego reteniendo solo términos a orden cero en υ:

$$G(T)\ [F(0^-)-F(0^+)] = \omega^{-2}\left\{A(\mu/\omega)\ \exp(-2\mu T) + B(\mu/\omega)\right\} \exp\{2(i\omega-\upsilon)T\}$$

(III.65.a)

$$A(\sigma) = \left[\frac{1}{2\sigma-i} - \frac{1}{\sigma-i} \right] \left[\frac{1/2}{2\sigma+i} - \frac{2}{\sigma+i} - 3i/2 \right] , \qquad \text{(III.65.b)}$$

$$B(\sigma) = \left[\frac{1/2}{2\sigma-i} + \frac{3}{\sigma-i} - 7i/2 \right] \left[\frac{1/2}{2\sigma+i} - \frac{2}{\sigma+i} - 3i/2 \right] . \qquad \text{(III.65.c)}$$

Reteniendo solo términos de orden 2 en el parámetro de expansión perturbativo υ/ω la función de correlación dada por (III.67) es

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{2,3\omega} = \frac{1}{64}\ \mu\ \left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2\ \exp\{i3\omega T-2\upsilon|T|\}$$

$$\times\ \{A(\mu/\omega)\ \exp(-2\mu T) + B(\mu/\omega)\} \qquad \text{(III.66)}$$

$$\times\ \exp\{-\upsilon|T|/4 + (\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\} .$$

La función de autocorrelación del proceso z(t) es

$$\langle z(T)z(0)\rangle^{est}_{2,3\omega} = 0 \quad . \qquad \text{(III.67)}$$

ya que no se satisface la condición de régimen estacionario.

III.6. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO MULTIPLICATIVO:

La FNEBH en presencia de ruido blanco multiplicativo lineal, de acuerdo a la introducción dada, puede ser transformada en un sistema de EDE para las variables (u,φ) a traves de un cambio no lineal de coordenadas de las variables criticas (z,z^*):

$$z = \sqrt{M} \quad \exp\{u+i(\varphi+\Omega t)\} \quad , \qquad \text{(III.68.a)}$$

$$\Omega = \omega - \beta M \quad , \qquad \text{(III.68.b)}$$

$$M = \mu + \varepsilon/2 \quad . \qquad \text{(III.68.c)}$$

La EDE obtenida puede ser linealizada convenientemente alrededor de u=0 de acuerdo a lo ya visto, por ser esta la solución estable de ciclo límite. En la EDE la variable $u\in\mathbb{R}$ define pequenos apartamientos "transversales " al ciclo límite y $\varphi\in S^1$ es la fase de oscilación del sistema. El espacio de configuración es ahora (u,φ), y la EDE explicitamente es, en el caso $\beta=0$,

$$\dot{\varphi} = \varepsilon \, (-a \cos2\psi +1/2 \, \text{sen}4\psi) + \varepsilon^{1/2}(a - \text{sen}2\psi) \, f(t) \quad ,$$

$$\dot{u} = -2Mu + \varepsilon \, (-a \, \text{sen}2\psi -1/2 \cos4\psi) + \varepsilon^{1/2}(b + \cos2\psi) \, f(t)$$

(III.69)

con $\psi = \varphi + \omega t$ y $a^2+b^2=1$, f(t) es ruido Gaussiano con valor medio nulo y "delta" correlacionado. La Funcional Generatriz (FG) viene dada por la Ec.(III.53) siendo en este caso el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q;t) = -i/2\ \varepsilon\ p_1^2\ [a - \mathrm{sen}[2(q_1+\omega t)]]^2 -$$

$$-i/2\ \varepsilon\ p_2^2\ [a + \cos[2(q_1+\omega t)]]^2 -$$

$$-i/2\ \varepsilon\ 2p_1p_2\ [a - \mathrm{sen}[2(q_1+\omega t)]][a + \cos[2(q_1+\omega t)]] +$$

$$+ p_2\ [-2M\ q_2 + \varepsilon(-a\ \mathrm{sen}[2(q_1+\omega t)]\ - 1/2\ \cos[4(q_1+\omega t)])]$$

$$+ p_1\ [\varepsilon(-a\ \cos[2(q_1+\omega t)]\ + 1/2\ \mathrm{sen}[4(q_1+\omega t)])] \quad , \tag{III.70}$$

del cual es posible separar la parte "libre" o no oscilatoria

$$\mathcal{H}_0(p) = -i/2\ (\varepsilon_{11}p_1^2 + \varepsilon_{22}p_2^2 + 2\varepsilon_{12}p_1p_2) - 2M\ q_2p_2 \ , \tag{III.71}$$

con $\varepsilon_{11}=\varepsilon(a^2+1/2)$, $\varepsilon_{22}=\varepsilon(b^2+1/2)$, $\varepsilon_{12}=\varepsilon ab$, siendo el determinante de la matriz de difusión no nulo: $\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2=3\varepsilon/4$. La parte perturbativa es $\mathcal{K}^{\gamma(0)}=\mathcal{H}^{\gamma(0)}-\mathcal{H}_0$.

Definimos la Funcional Generatriz "libre" o no oscilatoria reemplazando $\mathcal{H}_0$ en la ecuación (III.49). La expresión resultante puede ser facilmente integrada (en el Ap.A se dan los cálculos) dando

$$\mathcal{Z}_0[j,j^*] = \exp\left\{ i\varphi_c \int_{t_0}^{T} d\tau\ \ j_1(\tau) + iu_0 \int_{t_0}^{T} d\tau\ j_2(\tau)\ \exp\{2M\ (t-\tau)\} \right\}$$

$$\times \exp\left\{ -1/2 \int_{t_0}^{T} d\tau\ \ d\tau' [\,2i\ j_\nu(\tau) S_\nu(\tau,\tau')\, j_\nu^*(\tau') + \ j_\nu(\tau) R_{\nu\sigma}(\tau,\tau')\, j_\sigma(\tau')] \right\} \ , \tag{III.72}$$

donde índices repetidos $\nu,\sigma=1,2$ indican suma. Las funciones de

Green, correctamente simetrizadas, son

$$S_1(t,t') = \Theta(t-t') \quad , \tag{III.73.a}$$

$$S_2(t,t') = \Theta(t-t') \exp\{-2M(t-t')\} \quad , \tag{III.73.b}$$

$$R_{11}(t,t') = \varepsilon_{11}(\min(t,t')-t_0) \quad , \tag{III.73.c}$$

$$R_{22}(t,t') = (\varepsilon_{22}/4M)\{\exp[-2M|t-t'|]-\exp[-2M(t+t'-2t_0)]\}, \tag{III.73.d}$$

$$R_{12}(t,t') = (\varepsilon_{12}/4M)\ \{\exp(-2Mt)+\exp(-2Mt')\}$$
$$\times \{\exp(2M\min(t,t'))-\exp(2Mt_0)\}. \tag{III.73.e}$$

Definimos una Funcional Generatriz Libre Estacionaria (FGLE), teniendo en cuenta que $\mathcal{Z}_0 \longrightarrow 0$ cuando $t_0 \longrightarrow -\infty$ a menos que se satisfaga la condición de régimen estacionario (III.54). La FGLE será

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] =$$

$$= \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T} d\tau\ d\tau' [\,2i\,j_\nu(\tau) S_\nu(\tau,\tau') j_\nu^*(\tau') + j_\nu(\tau) D_{\nu\sigma}(\tau,\tau') j_\sigma(\tau')] \right\}. \tag{III.75}$$

siendo las funciones de Green para el régimen estacionario

$$D_{11}(t,t') = \varepsilon_{11}\min(t,t') \quad , \tag{III.76.a}$$

$$D_{22}(t,t') = (\varepsilon_{22}/4M)\quad \exp[-2M|t-t'|] \quad , \tag{III.76.b}$$

$$D_{12}(t,t') = (\varepsilon_{12}/4M)\ \{\exp(-2Mt)+\exp(-2Mt')\}\ \exp(2M\min(t,t'))\ . \tag{III.76.c}$$

La condición de régimen estacionario (III.54) impone que a orden 0 la unica función de correlación no nula sea

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_0^{est} = M \exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_0^{est}[\,\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0\ ;\ 0]$$

$$= M \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\varepsilon_{11}|T|/2 + (\varepsilon_{22}/8M)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

(III.77)

Para determinar contribuciones espectrales a las funciones de correlación cuya frecuencia no sea la fundamental, partimos de la FGLE dada en (III.58), siendo la parte perturbativa desarrollada en Serie de Fourier a efectos de los cálculos que siguen:

$$\mathcal{H}^{I(1)}(p,q;t) = -i\varepsilon/8\ \left\{[\,(p_2+ip_1)^2-2i(p_2+ip_1)]\ \exp\{i4(q_1+\omega t)\} + c.c.\right\} -$$

$$-i\varepsilon/2\ \left\{[\,(ap_1+bp_2-a)(p_2+ip_1)]\ \exp\{i2(q_1+\omega t)\} + c.c.\right\},$$

(III.78)

donde c.c. indica conplejo conjugado de la expresión precedente.
A primer orden en teoría perturbativa no aparecen ármonicos de la frecuencia ω, solo correcciones a la expresion (III.77), como se concluye de un breve cálculo que no daremos aqui. Recien al orden 2 en teoría perturbativa aparecen las nuevas contribuciones espectrales o ármonicos que caracterizan el espectro de la FNEBH con ruido multiplicativo. A continuación consideraremos las mismas para las funciones de correlación del proceso (z,z^*).

i) Contribuciones espectrales o armonicos a $\langle z(T)z^*(0)\rangle_2^{est}$:

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_2^{est} = M\exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_2^{est}[\,\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0]$$

$$= M\exp\{i\omega T\}\ \Bigg\{\Bigg\{\ \frac{1}{2}\ (\frac{\varepsilon}{8})^2 \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} dt_1 dt_2\ \Bigg\{\ \exp\{i4\omega(t_1-t_2)\}$$

$$\times\Bigg[\Big(\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)} - 2i\Big)\Big(\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)}\Big)\Bigg]$$

$$\times\Bigg[\Big(\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)} + 2i\Big)\Big(\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)}\Big)\Bigg]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\ \Bigg|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+4(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2));\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ j_1^*(\circ)=j_2^*(\circ)=0}} +$$

$$+\,P(t_1,t_2)\ \Bigg\}\ +\ \Bigg\{\ \frac{1}{2}\ (\frac{\varepsilon}{2})^2 \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} dt_1 dt_2\ \Bigg\{\ \exp\{i2\omega(t_1-t_2)\}$$

$$\times\Bigg[\Big(a\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)} + b\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} - a\Big)\Big(\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)}\Big)\Bigg]$$

$$\times\Bigg[\Big(a\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)} + b\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - a\Big)\Big(\ \frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)}\Big)\Bigg]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\ \Bigg|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+2(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2));\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ j_1^*(\circ)=j_2^*(\circ)=0}} +$$

$$+\,P(t_1,t_2)\ \Bigg\}\ \Bigg\} \qquad \text{(III.79)}$$

$P(t_1,t_2)$ denota términos que se obtienen permutando t_1 y t_2 en los sumandos previos. La derivada funcional de $\mathcal{Z}_0^{est}$ respecto de la fuente j_1^* evaluada en la fuente estara dada por Ec.(III.61.b), reemplazando μ por M, y derivando respecto de j_2 y luego evaluando se tiene que

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1^*(t)} \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Big]_{j_1^{(n)}(s)} =$$

$$= - \left[\Theta(T-t)-\Theta(-t)+n(\Theta(t_1-t)-\Theta(t_2-t))\right] \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Big]_{j_1^{(n)}(s)}$$

(III.80.a)

$$j_1^{(n)}(s)=\delta(s-T)+\delta(s)+n(\delta(s-t_1)-\delta(s-t_2)) \ ,$$ (III.80.b)

siendo $t=t_1,t_2$ y $n=2,4$.

En estos cálculos se utiliza el hecho que el integrando de (III.79) es simétrico en las variables de integración, y trabajamos en la discretización del pre-punto. Esta ecuación ha sido escrita con dos sumandos bien diferenciados, el primero da la contribuciones espectrales o armónicos de frecuencias 5ω y 3ω y el segundo a 0 y 3ω. Los cálculos para determinar la contribución a 5ω, siguen las alternativas de los dados en la Sección precedente para el caso de ruido aditivo, con la diferencia que se evalua $\mathcal{Z}_0^{est}$ en $j_1^{(n)}$ en la aproximacion $\varepsilon/M < 1$.

i.1) Contribución espectral o armónico de frecuencia 5ω:

El mismo queda determinado a partir de la integración de

$$(\frac{\varepsilon}{8})^2 M\ \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\varepsilon_{11}|T|/2 + (\varepsilon_{22}/8M)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

$$\times \int_{t_0}^{T} dt_1\ \ g(t_1)\ \int_{t_0}^{t_1} dt_2\ \ f(t_2)\quad , \tag{III.81.a}$$

$$g(t_1) = [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_1))\exp(2Mt_1) - (\Theta(t_1)+2)]$$

$$\times [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_1))\exp(2Mt_1) - \Theta(t_1)] \tag{III.81.b}$$

$$\times \exp\{i4\omega t_1 - 4\varepsilon_{11}(3t_1 - \min(0,t_1)\}\quad ,$$

$$f(t_2) = [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_2))\exp(2Mt_2) + (6+\Theta(t_2))]$$

$$\times [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_2))\exp(2Mt_2) + (4+\Theta(t_2))] \tag{III.81.c}$$

$$\times \exp\{-4\omega t_1 + 4\varepsilon_{11}(3t_1 - \min(0,t_1)\}\quad .$$

Al igual que en el caso aditivo, la contribución espectral de frecuencia 5ω estara dada por

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{z,5\omega} = (\frac{\varepsilon}{8})^2 M\ \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\varepsilon_{11}|T|/2+(\varepsilon_{22}/8M)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

$$\times\ G(T)\ [F(0^-) - F(0^+)]\quad , \tag{III.82.a}$$

$$G(T) = \left[\frac{1}{4M-12\varepsilon_{11}+i4\omega} - \frac{4}{2M-12\varepsilon_{11}+i4\omega} + \frac{3}{-12\varepsilon_{11}+i4\omega}\right]\exp\{(i4\omega-12\varepsilon_{11})T\} \tag{III.82.b}$$

$$F(0^-) = \left[\frac{(\exp(-2MT)+1)^2}{4M+8\varepsilon_{11}-i4\omega} + \frac{10(\exp(-2MT)+1)}{2M+8\varepsilon_{11}-i4\omega} + \frac{24}{8\varepsilon_{11}-i4\omega}\right], \tag{III.82.c}$$

$$F(0^+) = \left[\frac{\exp(-4MT)}{4M+12\varepsilon_{11}-i4\omega} + \frac{12\,\exp(-2MT)}{2M+12\varepsilon_{11}-i4\omega} + \frac{35}{12\varepsilon_{11}-i4\omega} \right]. \qquad \text{(III.82.d)}$$

Reteniendo términos de orden cero en la discontinuidad y separando explícitamente la dependencia en el parámetro de expansión ε/ω se tiene

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{z,5\omega} = \frac{1}{64}\, M\, \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 \exp\{i5\omega T-12\varepsilon(a^2+1/2)|T|\}$$

$$\times\ \{A(M/\omega)\,\exp(-2MT) + B(M/\omega)\}$$

$$\times\ \exp\{-\varepsilon(a^2+1/2)|T|/2+(\varepsilon/8M)(b^2+1/2)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

$$\text{(III.83.a)}$$

$$A(\sigma) = \left[\frac{1/2}{\sigma-i} - \frac{1}{\sigma-2i} \right] \left[\frac{1/4}{\sigma+i} - \frac{2}{\sigma+2i} - 3i/4 \right], \qquad \text{(III.83.b)}$$

$$B(\sigma) = \left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{5}{\sigma-2i} - 11i/4 \right] \left[\frac{1/4}{\sigma+i} - \frac{2}{\sigma+2i} - 3i/4 \right]. \qquad \text{(III.83.c)}$$

i.2) Contribución espectral o armónico de frecuencia 3ω:

La misma está contenida en el segundo sumando de la primera integral y el primer sumando de la segunda integral de la Ec.(III.79). Los cálculos para obtener esta contribución se realizan siguiendo la metodologia indicada en i.1), la misma es

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{2,3\omega} = \frac{1}{4} M \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 \{ \{C(M/\omega) \exp(-2M\,T) + D(M/\omega)\}\, e^{i3\omega T} +$$

$$+ \frac{1}{16} \{E(M/\omega) \exp(-2M\,T) + F(M/\omega)\}\, e^{-i3\omega T} \}$$

$$\times \exp\{-9\varepsilon(a^2+1/2)|T|/2+(\varepsilon/8M)(b^2+1/2)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

(III.84.a)

$$C(\sigma) = \frac{1}{4} \left[\frac{2b}{2\sigma-i} - \frac{b+ia}{\sigma-i} \right] \left[\frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-i2a}{\sigma+i} - 2a \right], \qquad \text{(III.84.b)}$$

$$D(\sigma) = \frac{1}{4} \left[\frac{b}{2\sigma-i} + \frac{2b+i3a}{\sigma-i} + 6a \right] \left[\frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-2ia}{\sigma+i} - 2a \right], \qquad \text{(III.84.c)}$$

$$E(\sigma) = \left[\frac{1/2}{\sigma+i} + \frac{1}{\sigma+2i} \right] \left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4 \right], \qquad \text{(III.84.d)}$$

$$F(\sigma) = \left[\frac{1/4}{\sigma+i} + \frac{3/2}{\sigma+2i} - 5i/4 \right] \left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4 \right]. \qquad \text{(III.84.e)}$$

ii) Contribuciones espectrales o armonicos a $\langle z(T)z(0)\rangle^{est}_2$:

A diferencia de lo que ocurre en el caso aditivo de la FNEBH, donde la autocorrelación de z al orden 2 es nula, por no satisfacerse la condicion de regimén estacionario, aqui existen contribuciones armónicas de frecuencia 3ω. Las mismas estan contenidas en el cálculo de

$$\langle z(T)z(0)\rangle_2^{est} = M\, \exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_2^{est}[\,\delta(\circ-T)+\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0]$$

$$= M\, \exp\{i\omega T\}\ \ \frac{1}{2}\,(\frac{\varepsilon}{4})^2 \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} dt_1 dt_2\ \Big\{ \exp\{i\omega(2t_1-4t_2)\}$$

$$\times \Big[\Big(a\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)} + b\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} - a\Big)\Big(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)}\Big)\Big]$$

$$\times \Big[\Big(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)} + 2i\Big)\Big(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)}\Big)\Big]$$

$$\times\, \mathcal{Z}_0^{est}[\,j, j^*]\ \Big|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+2\delta(\circ-t_1)-4\delta(\circ-t_2);\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ \ j_1^*(\circ)=j_2^*(\circ)=0}} +$$

$$+\, \Gamma(t_1,t_2)\ \Big\}\ .$$

(III.86)

La contribución de frecuencia 3ω a la función de autocorrelación al orden 2 es

$$\langle z(T)z(0)\rangle_{2,3\omega}^{est} = \frac{1}{16}\, M\, (\frac{\varepsilon}{\omega})^2\ \{\ \{P(M/\omega)\ \exp(-2M\ T) + Q(M/\omega)\}\ e^{i3\omega T}\ +$$

$$+\ \{R(M/\omega)\ \exp(-2M\ T) + S(M/\omega)\}\ e^{-i3\omega T}\ \}$$

$$\times\ \exp\{-9\varepsilon(a^2+1/2)|T|/2+(\varepsilon/8M)(b^2+1/2)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

(III.87.a)

$$P(\sigma) = \frac{1}{2}\left[\ \frac{1/2}{\sigma-i} - \frac{1}{\sigma-2i}\ \right]\left[\ \frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-i2a}{\sigma+i} - 2a\ \right]\ , \qquad \text{(III.87.b)}$$

$$Q(\sigma) = \frac{1}{2}\left[\frac{1/4}{\sigma-i} - \frac{5}{\sigma-2i} - 11i/4\right]\left[\frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-2ia}{\sigma+i} - 2a\right], \tag{III.84.c}$$

$$R(\sigma) = \left[\frac{b}{2\sigma+i} + \frac{(b-ia)}{\sigma+i}\right]\left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4\right], \tag{III.87.d}$$

$$S(\sigma) = \left[\frac{b}{2\sigma+i} + \frac{(4b-3ia)}{\sigma+i} - 6a\right]\left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4\right]. \tag{III.87.e}$$

III.7. APENDICE A:

Se da aqui como debe ser interpretada una EDE en el sentido de Ito cuando la misma tiene originalmente una prescripción de discretización arbitraria.

Dada la EDE

$$\dot{q}^{\mu} = a^{\mu}(q,t) + \eta^{1/2}\ \sigma^{\mu}_{k}\ (q,t)\ \zeta^{k}(t) \quad , \tag{III.A.1.a}$$

con condición inicial

$$q^{\mu}(t_o) = Q^{\mu}_{o} \quad , \tag{III.A.1.b}$$

donde $\mu=1,...,m$ y siendo $\zeta^{k}(t)$ $(k=1,...,d\leq m)$ ruidos blancos con valor medio nulo y funciones de correlación

$$\langle\zeta^{k}(t)\ \zeta^{l}(t')\rangle = Q^{kl}\ \delta(t-t') \quad . \tag{III.A.2}$$

La Ec.(III.A.1) puede ser escrita en forma diferencial como

$$dq^{\mu} = a^{\mu}(q,t)\, dt + \eta^{1/2}\, \sigma^{\mu}_{k}\, (q,t)\, dw^{k} \quad , \tag{III.A.3}$$

siendo $dw^{k} = \xi^{k}(t)\, dt$. Esta ecuación puede ser interpretada en el discreto en un sentido arbitrario, es decir

$$q^{[r]}(t_{j}) \equiv q^{[r]}_{i} = q_{j-1} + r\, \Delta q_{j} \quad , \tag{III.A.4.a}$$

$$\Delta q_{j} = q_{j} - q_{j-1} \quad , \tag{III.A.4.b}$$

$$t_{j} - t_{j-1} = \varepsilon \quad , \qquad r \in [0,1] \quad . \tag{III.A.4.c}$$

La Ec.(III.A.3) sera

$$\Delta q^{\mu}_{j} = \varepsilon\, a^{\mu}(q^{[r]}_{j}, \underline{t}_{j}) + \eta^{1/2}\, \sigma^{\mu}_{k}\, (q^{[r]}_{j}, \underline{t}_{j})\, \Delta w^{k} \quad . \tag{III.A.5}$$

con $\underline{t}_{j} \in [t_{j-1}, t_{j}]$. Desarrollando en serie alrededor de q_{j-1}

$$\Delta q^{\mu}_{i} = \varepsilon\, [\, a^{\mu}(q_{j-1}, \underline{t}_{j}) + \eta^{1/2}\, r\, \frac{\partial a^{\mu}}{\partial q^{\nu}_{j-1}}\, \Delta q^{\nu}_{j} + \cdots] + \tag{III.A.6}$$

$$+ \eta^{1/2}\, [\, \sigma^{\mu}_{k}\, (q_{j-1}, \underline{t}_{j}) + s\, \frac{\partial \sigma^{\mu}_{k}}{\partial q^{\nu}_{j-1}}\, \Delta q^{\nu}_{i} + \cdots]\, \Delta w^{k} \quad ,$$

con $s \in [0,1]$. Teniendo en cuenta que Δw_{i} es de orden 1/2 en ε, puesto que

$$\Delta w^{i}\Delta w^{j} = \varepsilon\; Q^{ij} \quad , \qquad \text{(III.A.7)}$$

tenemos que

$$\Delta q^{\mu}_{j} = \eta^{1/2}\; \sigma^{\mu}_{k}\; (q_{j-1},t_{j})\; \Delta w^{k} + \vartheta(\varepsilon) \quad . \qquad \text{(III.A.8)}$$

Reemplazando en la Ec.(III.A.6), reteniendo términos de hasta orden 1 en ε luego de usar la Ec.(III.A.7), se tiene que

$$\Delta q^{\mu}_{j} = \varepsilon\; A^{\mu^{[s]}}(q_{j-1},t_{j}) + \eta^{1/2}\; \sigma^{\mu}_{k}(q_{j-1},t_{j})\; \Delta w^{k} \quad , \qquad \text{(III.A.9)}$$

donde

$$A^{\mu^{[s]}}(q_{j-1},t_{j}) = a^{\mu}(q_{j-1},t_{j}) + \eta\; s\; \frac{\partial\sigma^{\mu}_{k}}{\partial q^{\nu}_{j-1}}\; \sigma^{\nu}_{l}(q_{j-1},t_{j})\; Q^{kl}, \qquad \text{(III.A.10)}$$

es llamado término de arrastre espureo. La Ec.(III.A.9) se dice que esta discretizada en el prepunto, o que esta en la forma de Ito. La misma guarda "memoria" de la EDE original (III.A.5) unicamente a traves de del parametro $s\in[0,1]$. De esta forma los terminos que se agregan al arrastre provienen solo de los elementos de la matriz de difusión. En Ec.(III.A.9) si $s=0$ ($s=1/2$) se dice que la Ec.(III.A.5) esta en el sentido de Ito (Stratonovich). Cuando se dice que los cálculos son efectuados en el sentido usual nos referimos a que la EDE es interpretad en el sentido de Stratonovich. A lo largo de este cápitulo se ha utilizado $Q^{ij}= 1$.

III.8. APENDICE B:

Aquí daremos el cálculo de integración de la FOL que es utilizada a lo largo de este Capítulo:

$$\mathcal{Z}\,[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\ \mathcal{D}\underset{\sim}{q}\ \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ \left[(i/2)p_\mu C_{\mu\nu} p_\nu + p_\mu(\dot{q}^\mu + \lambda^{(\mu)} q^\mu) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + j_\mu q^\mu + j^{*\mu} p^\mu \right] \right\} \Bigg|_{q^\mu(t_o)=Q_o^\mu} \quad ,$$

(III.B.1)

y determinaremos las funciones de Green.

Utilizamos la propiedad que satisface todo funcional $K[\underset{\sim}{x}]$ de $\{x_\mu\}$

$$\int \mathcal{D}\underset{\sim}{x}\quad \frac{\delta}{\delta x_\mu(\tau)}\ K[\underset{\sim}{x}] = 0 \quad , \qquad \text{(III.B.2)}$$

e imponiendo las condiciones de contorno sobre las derivadas funcionales de $\mathcal{Z}_o$ respecto de las fuentes:

$$\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_\mu(t)}\ \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\Bigg|_{t=t_o} = Q_o^\mu\ \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \quad , \qquad \text{(III.B.3.a)}$$

$$\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(t)}\ \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\Bigg|_{t=T} = 0 \quad . \qquad \text{(III.B.3.b)}$$

De acuerdo a la propiedad (III.B.2) derivando el exponencial de

(III.B.1) respecto a $q^{\mu}(\tau)$ se obtiene[1]:

$$0 = \int \mathcal{D}p \, \mathcal{D}q \, [-\dot{p}_{\mu} + \lambda^{(\mu\nu)} p_{\mu} + j_{\mu}] \, \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau \, [p_{\mu}\dot{q}^{\mu} + \mathcal{H}_o(p,q;\tau) + \right.$$

$$\left. + j_{\mu} q^{\mu} + j^{*\mu} p_{\mu}] \right\} \Big|_{q^{\mu}(t_o)=Q_o^{\mu}}$$

(III.B.4)

expresión que dada en términos de $\mathcal{Z}_o$ es

$$(d/d\tau - \lambda^{(\mu\nu)}) \quad \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^{*}_{\sigma}(t)} \mathcal{Z}_o[j,j^{*}] = j_{\mu}(\tau) \, \mathcal{Z}_o[j,j^{*}] \, . \qquad \text{(III.B.5)}$$

Derivando funcionalmente el exponencial de (III.B.2) respecto de $p_{\mu}(\tau)$:

$$0 = \int \mathcal{D}p \, \mathcal{D}q \, [\dot{q}_{\mu} + \lambda^{(\mu\nu)} q_{\mu} + j^{*\mu} + iC^{\mu\nu} p_{\nu}] \, \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau \, [p_{\mu}\dot{q}^{\mu} + \mathcal{H}_o(p,q;\tau) + \right.$$

$$\left. + j_{\mu} q^{\mu} + j^{*\mu} p^{\mu}] \right\} \Big|_{q^{\mu}(t_o)=Q_o^{\mu}}$$

(III.B.6)

y expresada en térmminos de $\mathcal{Z}_o$ es

$$(d/d\tau + \lambda^{(\mu\nu)}) \quad \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j_{\mu}(\tau)} \mathcal{Z}_o[j,j^{*}] = -(j^{*}_{\mu}(\tau) + C^{\mu\sigma} \frac{\delta}{\delta j^{*}_{\sigma}(\tau)}) \, \mathcal{Z}_o[j,j^{*}]$$

(III.B.7)

La Ec.(III.B.5) con condición de contorno (III.B.3.b) tiene

---

[1] $\mathcal{H}_o(p,q;t) = -1/2 \; p_{\mu} C^{\mu\nu} p_{\nu} - p_{\mu} \lambda^{\mu}_{\nu} q^{\nu}$

solución:$(T \geq t)$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*_\mu(t)} \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = -\int_{t_o}^{T} d\tau \; S^{(\mu)}(\tau - t) \; j_\mu(\tau) \; \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \;, \tag{III.B.8}$$

siendo la función de Green

$$S^{(\mu)}(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \exp\{-\lambda^{(\mu)}(\tau-\tau')\} \;. \tag{III.B.9}$$

La Ec.(III.B.7) con condición de contorno (III.B.3.a) tiene solución

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu(t)} \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = Q_o^\mu \exp\{-\lambda^{(\mu)}(t-t_o)\} \; \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] -$$

$$- \int_{t_o}^{T} d\tau \; \left(j^*_\mu(\tau) + C^{\mu\sigma}\frac{\delta}{\delta j^*_\sigma(\tau)}\right) \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \exp\{-\lambda^{(\mu)}(t-\tau)\}$$

(III.B.10)

Reemplazando explicitamente (A.8) en la Ec.(A.10)

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu(t)} \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = Q_o^\mu \; S^{(\mu)}(t-t_o) - \int_{t_o}^{T} d\tau \; j^{*\mu}(\tau) \; S^{(\mu)}(t,\tau) +$$

$$+ \; i \int_{t_t}^{T} d\tau' \; R^{\mu\nu}(t,\tau') \; j^\nu(\tau') \;,$$

(III.B.11)

siendo la 2da. función de Green

$$R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = \int_{t_o}^{\tau} dt'\ S^{(\mu)}(\tau,t')\ G^{\mu\nu}\ S^{(\nu)}(\tau',t') \ , \qquad \text{(III.B.12)}$$

que satisface la propiedad $R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = R^{\nu\mu}(\tau',\tau)$. Integrando (III.B.12) se tiene:

$$R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = \frac{1}{2}\ \frac{G^{\mu\nu}}{\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\nu)}} \left[\exp(-\lambda^{(\mu)}\tau \ -\lambda^{(\nu)}\tau') + \exp(-\lambda^{(\nu)}\tau \ -\lambda^{(\mu)}\tau')\right]$$

$$\times \left[\exp[\,(\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\nu)})\min(\tau,\tau') - \exp[\,(\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\nu)})t_o\right]$$

(III.B.13)

En el caso particular $\lambda^{(\mu)} = \lambda^{(\nu)} = 0$, que se utiliza en varias oportunidades, la función de Green es

$$R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = G^{\mu\nu}(\min(\tau,\tau') - t_o) \ . \qquad \text{(III.B.14)}$$

C A P I T U L O IV:

IV.1. INTRODUCCION:

Un aspecto de interés en los fenómenos no lineales fuera del equilibrio es la influencia del ruido en tales sistemas, que puede tener su origen en un reservorio o ser generado en el laboratorio y aplicado al sistema. Es bien conocido [SS88] que el ruido externo produce modificaciones de interés en el comportamiento de los sistemas, por ejemplo cambio en los parámetros críticos de una transición de fase fuera del equilibrio [AH78, SS87]. En muchos casos es de interés predecir el comportamiento del sistema respecto de los parámetros que caracterizan al ruido, pero en la mayoría de los casos los sistemas, modelados por Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE) no lineales, son descriptos en término de ruido blanco Gaussiano. En tal caso el proceso es de Markov, y como hemos visto los cálculos con ruido blanco no presentan dificultades desde el punto de vista matematico, pero los resultados no son completamente satisfactorios, puesto que no permiten un estudio completo de la influencia de todos los parámetros del sistema. Esto se debe a que el límite de ruido blanco esta caracterizado por un solo parámetro, su intensidad de ruido ε, mientras que un ruido más real esta caracterizado al menos por otro parámetro, su tiempo de correlación τ. En situaciones experimentales la intensidad de ruido ε es identificada por el producto de parámetros $\varepsilon\tau$ del ruido real. De esta forma, al menos 2 parámetros pueden ser variados independientemente en un ruido real externo. Es de interés estudiar la validez de la idealización de ruido blanco y ver cuales son los nuevos efectos que no pueden ser descriptos por la teoría de ruido blanco en el contexto del problema que se estudia.

Consideremos la EDE unidimensional

$$\dot{q}(t) = A(q,t) + g(q,t)\,\zeta(t) \quad , \qquad q(t_o) = q_o \tag{IV.1}$$

donde $\zeta(t)$ es ruido multiplicativo (aditivo si $g\equiv 1$) no blanco o coloreado y puede ser asumido como un proceso estocástico estacionario. La función de correlación para el ruido $\zeta(t)$ será

$$K(t,t') = \langle\zeta(t)\zeta(t')\rangle \quad , \tag{IV.2}$$

y será una función de la diferencia de tiempos T=t−t'.

A fín de estudiar el comportamiento del proceso estocástico q(t) frente al comportamiento de los parámetros que caracterizan al ruido $\zeta(t)$, su intensidad ε y su tiempo de correlación τ definidos por

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ K(x) \quad , \tag{IV.3.a}$$

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ K(x) \quad , \tag{IV.3.b}$$

se hace necesario una expresión explícita para la autocorrelación del ruido (IV.2). La EDE puede ser convenientemente redefinida a fin de que la función de correlación del ruido este normalizada a 1 en (IV.3.a). De esta forma la EDE se vuelve

$$\dot{q}(t) = A(q,t) + \varepsilon^{1/2} g(q,t)\ \zeta(t) \quad . \tag{IV.4}$$

Aqui estudiaremos los efectos del ruido coloreado $\zeta(t)$ cuando este satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck [SS88] es decir un proceso con valor medio nulo y función de autocorrelación

$$K(T) = (\gamma/2) \quad \exp\{-\gamma\,|T|\} \quad , \tag{IV.5}$$

y tiempo de correlación $\tau=1/\gamma$. Ademas, el límite de ruido blanco es recuperado en el límite de "tiempo de correlación nulo":

$$K(T) \xrightarrow{\gamma \to +\infty} \delta(T) \quad . \tag{IV.6}$$

Todo proceso de Ornstein-Uhembeck, puede ser descripto por una EDE lineal para $\zeta(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= -\gamma\zeta + c^{1/2} f(t) \\ \zeta(t_o) &= \zeta_o \end{aligned} \quad , \tag{IV.7}$$

donde $c=\gamma^2$ para que se satifaga (IV.6). En este caso $f(t)$ es ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y "delta" correlacionado con intensidad de ruido γ^{-2}.

El proceso estocástico definido por las variables (q,ζ) es

Markoviano y en consecuencia se satisface una Ecuación de Fokker-Planck (EFP) para la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT). El proceso q es no Markoviano y la DPT no satisface una EFP. Sin embargo es posible obtener en ambos casos una Representación por Integral Funecional (RIF) para la DPT del proceso estocástico q en presencia de ruido coloreado ζ, y efectuar cálculos de promedios, momentos y funciones de correlación de funciones de la variable estocástica q.

El hecho de considerar una EDE no lineal con ruido coloreado que satisface una EDE lineal (IV.7) por técnicas de Integral Funcional es una posible alternativa de trabajo, que puede ser llevada a cabo dando una formulación para las variables dinámicas $\{q^{\mu}\}$ (μ=1,...,d) de un proceso d-dimensional, o bien aumentando el número de variables incluyendo los ruidos como nuevas variables y estudiar el proceso Markoviano resultante en el espació ampliado $\{q^{\mu},\zeta^{i}\}$ (i=1,...,n) de (d+n)-dimensiones. Ambos tratamientos no presentan dificultades practicas a los efectos del cálculo, aunque veremos que los resultados no son coincidentes, si lo son formalmente ya que sus expansiones en términos de la intensidad de ruido ε coinciden orden a orden [CW89].

Aqui se estudiaran los efectos que introduce el ruido coloreado en la Forma Normal Estocástica de una Bifurcación de Hopf (FNEBH) para los casos de ruido multiplicativo lineal y aditivo. Se trata de hallar los nuevos efectos que se detectan en el espectro, tales como la aparición de nuevas contribuciones espectrales, su intensidad y determinación de los parámetros de expansión perturbativo con respecto al caso de ruido blanco ya examinado en el Capítulo precedente.

Se presentan dos enfoques utilizando técnicas de Integral Funcional (IF). En primera instancia se considera el proceso (z,z^*) y en segundo lugar se incluye al ruido como variable dinámica.

IV.2. REPRESENTACIONES POR INTEGRAL FUNCIONAL PARA PROCESOS ESTOCASTICOS EN PRESENCIA DE RUIDO COLOREADO:

IV.2.A. Formalismo:

Dada la EDE d-dimensional

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\mu}(t) &= A^{\mu}(q,t) + \varepsilon^{1/2} g_i^{\mu}(\underset{\sim}{q},t)\ \zeta^i(t) \\ q^{\mu}(t_o) &= Q_o^{\mu} \end{aligned} \qquad , \qquad (IV.8)$$

donde $i=1,\ldots,m$ y $m\geq d$, $\{\zeta^i\}$ son ruidos coloreados cuyos valores medios son nulos y su correlación esta dada por

$$K^{ij}(t,t') = \langle \zeta^i(t)\ \zeta^j(t') \rangle \quad . \qquad (IV.9)$$

Si $q_{\zeta} = q_{\zeta}^{\mu}(t;\underset{\sim}{Q}_o,t_o)$ es solución del sistema (IV.8), cualquier funcional de los $\{\zeta^i\}$ puede ser escrito como [LR82]

$$F[q_\zeta] = \int \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q\ \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ p_\mu[\ \dot{q}^\mu - A^\mu(q,\tau) - \varepsilon^{1/2} g_i^\mu(q,\tau)\ \zeta_i(\tau)] \right\}$$

$$\times\ \{\delta(q^\mu(t_o) - Q_o^\mu)\} \quad .$$

(IV.10)

El promedio sobre los $\{\zeta^i\}$ viene dado por

$$\langle F[q_\zeta]\rangle = \int \mathcal{D}\zeta\quad F[q_\zeta]\quad \exp\left\{ -1/2\int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau\ d\tau'\ \zeta^i(\tau) J^{ij}(\tau,\tau')\zeta^j(\tau') \right\} ,$$

(IV.11)

donde $J^{ij}(\tau,\tau')$ es el nucleo inverso de $K^{ij}(\tau,\tau')$ definido a traves de

$$\int_{t_o}^{T} dt\ K^{ik}(\tau,t)\ J^{kj}(t,\tau') = \delta^{ij}\delta(\tau-\tau') \quad . \qquad \text{(IV.12)}$$

Reemplazando la Ec.(IV.10) en la (IV.11) se tiene luego de integrar sobre los $\{\zeta^i\}$

$$\langle F[q_\zeta]\rangle = \int \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q\ \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ p_\mu(\tau)[\ (\dot{q}^\mu - A^\mu(q,\tau)) + \right.$$

$$\left. + \ i\ \frac{\varepsilon}{2}\ g_i^\mu(q,\tau)\ \int_{t_o}^{T} d\tau'\ K^{ij}(\tau,\tau')\ g_j^\nu(q,\tau')\ p_\nu(\tau')] \right\}$$

$$\times\ \{\delta(q_o^\mu(t\ ) - Q_o^\mu)\} \quad .$$

(IV.13)

El proceso estocástico $\{q^{\mu}\}$ (μ=1,...,d) si tiene definido un conjunto de variables en una subvariedad $\mathbb{T}^c$ con c≤d, queda caracterizado sin ambiguedad por las ecuaciones (IV.11) y (IV.13) debiendo contener las mismas información sobre la periodicidad en la condición inicial, de acuerdo a lo obtenido en el Capitulo II.

IV.2.B. Contribuciones espectrales en un modelo sencillo:

Consideremos la EDE unidimensional, interpretada en el sentido de Ito, para un proceso estocástico $\theta(t)$ definido en $\mathbb{S}^1$:

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2} g(\theta)\, f(t) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \quad , \qquad\qquad (\mathrm{IV.14}) \\ &\theta(t_0)=\theta_0 \end{aligned}$$

donde ε es la intensidad del ruido, $g(\theta)$ es función 2π periodica y f(t) es ruido coloreado con valor medio nulo, que satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck, es decir con función de autocorrelación dada por (IV.5), siendo $1/\gamma$ el tiempo de autocorrelación y $\gamma \gg \varepsilon$. De acuerdo a lo visto en la Subsección precedente la Funcional Generatriz (FG) para el proceso $\theta(t)$, dada en la prescripción de discretización del pre-punto, es

$$Z[j,j^*] = \int_{\gamma(0)} Dp\ Dq \quad \exp\left\{ i\int_{t_0}^{T} d\tau \ \{p(\tau)\ [\ \dot q(\tau) + \right.$$

$$+\ i\ \frac{\varepsilon}{2}\ g(q(\tau)+\omega\tau) \int_{t_0}^{T} d\tau'\ \ K(\tau,\tau')\ g(q(\tau')+\omega\tau')\ p(\tau')]\}$$

$$\left. +\ j(\tau)\ q(\tau)\ +\ j^*(\tau)\ p(\tau)\} \right\} \delta(q(t_0),\theta_0) \ .$$

(IV.15)

Es necesario definir un FG "libre" o no perturbativo a partir del cual realizar el cálculo perturbativo en potencias de ε. El criterio aqui es considerar que el límite de ruido blanco debe ser recuperado para "tiempo de correlación nulo", expresable a traves de la expresión (IV.67). De esta forma el cálculo perturbativo describira pequeños apartamientos del caso de ruido blanco, pero incorporara nuevos elementos con respecto a este. Cuando la función de autocorrelación del ruido se vuelve una función "delta", el término no oscilatorio del desarrollo en Serie de Fourier de $g^2(\theta)$, que llamamos A_0 en el caso de ruido blanco considerado en el Capitulo II, permitia definir una Funcional Generatriz libre (FGL) de términos oscilatorios. Aqui, el criterio es tomar una función $\alpha(\gamma)$ de forma que esta tiende a A_0 en el límite de ruido blanco. Aqui no nos ocuparemos de la forma funciónal de α, que será considerada con mayor detalle en el Cap.V. La FGL será

$$Z_0[j,j^*]=\int_{p(0)} Dp\ Dq\ \exp\left\{ i\int_{t_0}^{T} d\tau\ \{p(\tau)[\,\dot q(\tau) + i\tfrac{\varepsilon}{2}\alpha \int_{t_0}^{T} d\tau'\ K(\tau,\tau')\ p(\tau')]\}\right.$$

$$\left. +\ j(\tau)\ q(\tau) + j^*(\tau)\ p(\tau)\} \right\} \delta(q(t_0)-\theta_0) \quad .$$

(IV.16)

Este funcional de las fuentes puede ser evaluado explicitamente con la ayuda de las técnicas estandar. En el Ap.A se muestra, siguiendo el procedimiento dado en [LR82], que luego de integrar (IV.16) se obtiene

$$Z_0[j,j^*] = \exp\left\{ i\theta_0 \int_{t_0}^{T} d\tau\ \ j(\tau) \right\}$$

$$\times \exp\left\{ -1/2 \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} d\tau\ \ d\tau'[\ 2i\,j(\tau)S(\tau,\tau')j^*(\tau)+j(\tau)R(\tau,\tau')j(\tau')] \right\}.$$

(IV.17)

siendo las funciones de Green

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau,\tau') \quad , \qquad \text{(IV.18.a)}$$

$$R(\tau,\tau') = \varepsilon\alpha\ [\ \min(\tau,\tau')-t_0 - K(\tau,\tau') + \qquad \text{(IV.18.b)}$$

$$+\ (1/2\gamma)\ (\exp(-\gamma\tau)+\exp(-\gamma\tau'))\ \exp(\gamma t_0)] \quad .$$

Para definir una Funcional Generatriz Libre Estacionaria (FGLE) es suficiente exigir la condición de regimén estacionario que se impone sobre la fuente j(t):

$$\int_{t_o}^{T} j(\tau)\, d\tau = 0 \quad . \qquad (IV.19)$$

Luego de tomar $t_o \longrightarrow -\infty$ en la expresión para la FGL dada en Ec.(IV.19) se obtiene la FGLE:

$$Z_o^{est}[j,j^*] =$$

$$\times \exp\left\{-1/2 \int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau\, d\tau'[\, 2i\, j(\tau)S(\tau,\tau')j^*(\tau)+j(\tau)R(\tau,\tau'')j(\tau')]\right\},$$

(IV.20)

siendo la función de Green

$$D(\tau,\tau') = \varepsilon\alpha\, [\, \min(\tau,\tau') - K(\tau,\tau')\,] \quad . \qquad (IV.21)$$

Como se ha establecido a lo largo de este trabajo la fuente puede ser expresada como combinación lineal de funciones "delta" con coeficientes enteros de tal forma que su suma sea cero.

Consideremos para ilustrar el prodedimiento perturbativo el caso $g(\theta)=\cos\theta$. Calcularemos funciones de autocorrelación para el proceso $g(\theta)$ a orden cero y perturbativamente a orden 1 en el parametro de expansión que en este caso será ε/γ, ya que esta será la contribución espectral dominante de frecuencia distinta de la fundamental. La función de autocorrelación para el proceso $\cos\theta$ es determinada a traves de los términos de su desarrollo en Serie de Fourier.

Al orden cero la función de autocorrelación estara dada por

$$G_o(T) = 1/2\ \mathit{Re}\{\ \exp(i\omega T)\ Z_o^{est}[\ \delta(\circ - T) - \delta(\circ);0]\ \} \tag{IV.22}$$

$$= 1/2\ \cos(\omega T)\ \ \exp\{-\varepsilon/4[\ |T| - (1/\gamma)(1-\exp(-\gamma|T|))]\}\ .$$

Las contribuciones perturbativas a la función de autocorrelación son calculadas a partir de la expresión (IV.15) en el límite estacionario, es decir con $t_o \longrightarrow -\infty$, reescrita como

$$Z^{es}[j,j^*] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q\ \int_{-\infty}^{T} \prod_{j=1}^{n} dt_j\, dt'_j\ p(t_j)K(t_j,t'_j)p(t_j)$$

$$\times\ [\ g(q(t_j)+\omega t_j)\ g(q(t'_j)+\omega t_j{}') - \alpha]$$

$$\times\ \exp\left\{ i\int_{-\infty}^{T} d\tau\ \ \{p(\tau)[\ \dot{q}(\tau)+i\frac{\varepsilon}{2}\alpha\int_{-\infty}^{T} d\tau' K(\tau,\tau')p(\tau')]\}+j(\tau)q(\tau)+j^*(\tau)p(\tau)\} \right\} \tag{IV.23}$$

A orden 1 aparece la contribución espectral de frecuencia múltiplo de la fundamental, estando la misma contenida en el cálculo de

$$\langle \exp\{i[\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_1^{est} = \exp(i\omega T)\, Z_1^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\exp(i\omega T)\int_{-\infty}^{T} dt_1 dt_2 K(t_1,t_2)\left\{\left\{\frac{1}{4}\exp\{i\omega(t_1-t_2)\}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_1)\delta j^*(t_2)}\right)\right.\right.$$

$$\left.\times Z_0^{es}[j,j^*]\Big|_{j(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);\,j^*(\circ)=0} + P(t_1,t_2)\right\} -$$

$$\left. - \alpha\quad Z_0^{es}[j,j^*]\Big|_{j(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\,j^*(\circ)=0}\right\} . \qquad \text{(IV.24)}$$

Teniendo en cuenta que el integrando es simétrico en las variables de integración, llevamos la misma a la región $T>t_1>t_2$. Los cálculos no seran dados aqui, pero una breve prospección del integrando muestra que el término que contiene a $\exp\{i\omega(t_1-t_2)\}$ en factor es el que introduce nuevos armónicos en este caso de frecuencia 2ω. El otro sumando, que contiene como factor a su complejo conjugado, agrega términos de frecuencia 0. Finalmente el término que contiene a α debe ser analizado por separado ya que por corrección al orden 1 de fracuencia ω, debe ser agregado a estos. La técnica de cálculo es la ya señalada a lo largo de este trabajo, trabajando en la prescripción de discretización del pre-punto. La FG evaluada en las fuentes puede ser desarrollada en serie de potencias de ε/γ como sigue:

$$Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0] =$$

$$= Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0] \exp\{-1/2 \,[\, D(t_1,t_1) + D(t_2,t_2) - 2D(t_1,t_2) +$$

$$+ 2\,(D(T,t_1) - D(T,t_2) - D(0,t_1) + D(0,t_2))\,]\}$$

$$\simeq Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0] \,\{ \exp\{-\varepsilon\alpha/2\, [\, 3t_1 - t_2 - 2\min(t_1,t_2) -$$

$$-2\min(0,t_1) + 2\min(0,t_2)]\} + \vartheta(\varepsilon/\gamma) \} \tag{IV.25}$$

Para $\varepsilon/\gamma \ll 1$ el primer sumando de (IV.24) es

$$-(\varepsilon/4\gamma)\; Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0] \int_{-\infty}^{T} dt_1\; g(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2\; f(t_2) \;, \tag{IV.26.a}$$

$$g(t_1) = \exp\{(i\omega-\gamma)t_1 - \varepsilon\alpha(3t_1/2 - \min(0,t_1))\}\; \Theta(t_1) \;, \tag{IV.26.b}$$

$$f(t_2) = \exp\{-(i\omega-\gamma)t_2 + \varepsilon\alpha(3t_2/2 - \min(0,t_2))\}\; (\Theta(t_2)+1) \;, \tag{IV.26.c}$$

estando en él contenidos los términos principales de frecuencia 2ω

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle^{est}_{1,2\omega} = -(\varepsilon/4\gamma)\; Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]$$

$$\times\; G(T)[\,F(0^-)-F(0^+)] \;, \tag{IV.27.a}$$

$$G(T) = (i\omega-\gamma-3\varepsilon/4)^{-1}\exp[\,(i\omega-\gamma-3\varepsilon/4)T] \;, \tag{IV.27.b}$$

$$F(0^-) = (-i\omega+\gamma+\varepsilon/4)^{-1} \;, \tag{IV.27.c}$$

$$F(0^+) = 2(-i\omega+\gamma+3\varepsilon/4)^{-1} \;. \tag{IV.27.d}$$

donde G y F son las primitivas de g y f respectivamente, como se ha visto con anterioridad las nuevas contribuciones espectrales estan dadas por la discontinuidad del integrando en $t_2=0$ dada por $F(0^-)-F(0^+)$. Finalmente la contribución a la función de correlación, en función del parámetro de expansión ε/γ será

$$C_1^{2\omega}(T) = -(\varepsilon/8\gamma)\ \exp\{-(\varepsilon+\gamma)|T|+(\varepsilon/4\gamma)(1-\exp(-\gamma|T|))]\}$$

$$\times\ Re\{\ \exp(2i\omega T)\ S(\varepsilon/\gamma,\omega/\gamma)\ \} \qquad \text{(IV.28.a)}$$

$$S(\sigma,\nu) = (-i\nu-3\sigma/4-1)^{-1}[\,(-i\nu+\sigma/4+1)^{-1}-2(-i\nu+3\sigma/4+1)^{-1}] \qquad \text{(IV.28.b)}$$

con $\sigma=\varepsilon/\gamma$ y $\nu=\omega/\gamma$. Como solo términos de orden ε/γ son de interés podemos tomar el desarrollo de $S(\sigma,\nu)$ alrrededor de $\sigma=0$ y retener el primer término. Finalmente:

$$C_1^{2\omega}(T) = -(\varepsilon/8\gamma)\ \exp[-(\varepsilon+\gamma)T+(\varepsilon/4\gamma)(1-\exp(-\gamma|T|))]\}$$

$$\times\left\{\ \frac{1-(\omega/\gamma)^2}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\ \cos 2\omega T\ -\ \frac{2\omega/\gamma}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\ \mathrm{sen} 2\omega T\ \right\} \qquad \text{(IV.29)}$$

La metodología dada aqui para determinación de los armónicos en en el esquema de cálculo perturbativo por integral funcional, es aplicable para el cálculo de otros términos, tal como el de frecuencia 0 que tambien aparece al primer orden. Los resultados aqui alcanzados pueden ser obtenidos en el contexto de la IF al considerar el proceso estocástico de las variables (θ,f).

IV.3. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO COLOREADO:

Consideremos la EDE en las variables (u,θ) que describe un sistema dinámico que presenta bifurcación de Hopf, siendo u la variable "transversal" al ciclo límite y que en este caso describe pequeños apartamientos del mismo. La misma en el sentido de Ito es

$$\dot{\varphi} = -2\mu\beta\ u + \upsilon^{1/2} g_1(\varphi+\omega t)\ f(t)$$
$$\dot{u} = -2\mu\ u + \upsilon^{1/2} g_2(\varphi+\omega t)\ f(t) \qquad , \qquad (IV.30)$$

donde para el caso Aditivo $\upsilon=\varepsilon/\mu$ y

$$g_2(\psi) = \cos\psi \quad , \qquad g_1(\psi) = -\mathrm{sen}\psi \quad , \qquad (IV.31)$$

y para el caso Lineal Multiplicativo $\upsilon=\varepsilon$ y

$$g_2(\psi) = c + \cos 2\psi \quad , \qquad g_1(\psi) = s - \sin 2\psi \quad , \qquad (IV.32)$$

f(t) es ruido coloreado con valor medio nulo y autocorrelación dada por (IV.5).

La Funcional Generatriz es en este caso:

$$Z[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\, \mathcal{D}\underset{\sim}{q} \quad \exp\Big\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \; \{p_1(\tau)(\dot{q}_1(\tau)+2\mu\beta q_1)+p_2(\tau)(\dot{q}_2(\tau)+2\mu q_2)+$$

$$+ \; i\,\frac{\upsilon}{2} \int_{t_o}^{T} d\tau' \; p_i(\tau)\; g_i(q(\tau)+\omega\tau)\; K(\tau,\tau')\; g_j(q(\tau')+\omega\tau')\; p_j(\tau')]\}$$

$$+ \; j_i(\tau)\; q_i(\tau) \; + \; j_i^*(\tau)\; p_i(\tau)\} \Big\} \; \delta(q_1(t_o)-\theta_o)\; \delta(q_2(t_o)-u_o) \;,$$

(IV.33)

donde $\underset{\sim}{j}_1\equiv(j_1,j_1^*)$, $\underset{\sim}{j}_2\equiv(j_2,j_2^*)$, i,j,=1,2 e indices repetidos implican suma. Siguiendo el mismo criterio de la Subsección precedente el FGL será:

$$Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\; \mathcal{D}\underset{\sim}{q} \quad \exp\Big\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \; \{p_1(\tau)(\dot{q}_1(\tau)+2\mu\beta q_1)+p_2(\tau)(\dot{q}_2(\tau)+2\mu q_2)+$$

$$+ \; i\;\frac{\upsilon}{2}\;\alpha^{ij} \int_{t_o}^{T} d\tau' \; p_i(\tau)\; K(\tau,\tau')\; p_j(\tau')]\} \; +$$

$$+ \; j_i(\tau)\; q_i(\tau) \; + \; j_i^*(\tau)\; p_i(\tau)\} \Big\}$$

$$\times \quad \delta(q_1(t_o)-\theta_o)\; \delta(q_2(t_o)-u_o) \quad ,$$

(IV.35)

donde $\alpha^{ij}(\gamma)$ tiende al coeficiente A_c^{ij}, del desaarrollo de Fourier de $g_i(\theta)g_j(\theta)$, cuando $\gamma \longrightarrow -\infty$.

Para ilustrar el procedimiento consideremos el caso de ruido aditivo con β=0, $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$ y $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha$. Teniendo en cuenta que $Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = Z_o[j_1,j_1^*]\; Z_o[j_2,j_2^*]$, en este caso, queda luego de integrar la FGL dada en (IV.35)

$$Z_0[j,j^*] = \prod_{\mu=1,2} \exp\left\{ iQ_0^{\mu}\int_{t_0}^{T} d\tau \;\; j_{\mu}(\tau)\; S_{\mu}(\tau,t_0)\right\}$$

$$\times \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} d\tau \; d\tau' \;\; [\,2i\,j_{\mu}(\tau)S_{\mu}(\tau,\tau')j_{\mu}^{*}(\tau')+j_{\mu}(\tau)R_{\mu}(\tau,\tau')j_{\mu}(\tau')]\right\}$$

(IV.36)

siendo $Q_0^1=\theta_0$ y $Q_0^2=u_0$ y las funciones de Green

$$S_1(t,t') = \Theta(t-t') \quad , \qquad \text{(IV.37.a)}$$

$$S_2(t,t') = \Theta(t-t')\; \exp\{-\lambda(t-t')\} \quad , \qquad \text{(IV.37.b)}$$

$$R_1(t,t') = \upsilon\alpha\; [\;\min(t,t')-t_0-K(t,t') +$$

$$+\; (1/2\gamma)(\exp(\gamma t)+\exp(-\gamma t'))\; \exp(\gamma t_0)) \;, \qquad \text{(IV.37.c)}$$

$$R_2(t,t') = (\upsilon\alpha/2)\; (\lambda+\gamma)^{-1}[\,(\lambda-\gamma)^{-1}\exp(-\gamma\,|t-t'|) +$$

$$+\; (\lambda^{-1}-(\lambda-\gamma)^{-1})\; \exp(-\lambda\,|t-t'|) -$$

$$-\; (\lambda^{-1}-2(\lambda-\gamma)^{-1})\; \exp(-\lambda(t+t'-2t_0)) -$$

$$-\; (\lambda-\gamma)^{-1}(\exp(-\lambda t-\gamma t')+\exp(-\lambda t'-\gamma t))\exp((\gamma+\lambda)t_0)]$$

(IV.37.d)

con $\lambda=2\mu$. Imponiendo la condición de regimén estacionario establecida sobre la fuente $j_1(t)$ y luego tomando el límite $t_0\rightarrow-\infty$en la Ec.(4.36) queda definida la Funcional Genratriz Libre Estacionaria (FGLE):

$$Z_0[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] =$$

$$\prod_{\mu=1,2} \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} d\tau \; d\tau' \; [\, 2i j_\mu(\tau) S_\mu(\tau,\tau') j_\mu^*(\tau') + j_\mu(\tau) \mathbf{D}_\mu(\tau,\tau') j_\mu(\tau')\right\}$$

(IV.38)

siendo en este caso las funciones de Green

$$D_1(t,t') = \nu\alpha \; [\; \min(t,t') - K(t,t') \;] \quad , \qquad \text{(IV.39.a)}$$

$$D_2(t,t') = \nu\alpha \; \gamma^2(\gamma^2+\lambda^2)^{-1}[\,(1/2\gamma)\exp(-\gamma\,|t-t'|) - (1/2\lambda)\exp(-\lambda\,|t-t'|)]$$

(IV.39.b)

A orden cero en teoría perturbativa determinamos funciones de correlación del proceso (z,z^*). La función de autocorrelación es

$$\langle z(T) z(0)\rangle_0^{est} = 0 \quad , \qquad \text{(IV.40)}$$

ya que no se satisface la condición de regimén estacionario. La función de correlación conjunta es en cambio

$$\langle z(T) z^*(0)\rangle_0^{est} = Z_0^{es}[\,\delta(\circ - T) - \delta(\circ); -i(\delta(\circ - T) + \delta(\circ)); 0; 0\,] \quad \exp(i\omega T)$$

$$= A(T) \;\; \exp(i\omega T) \quad ,$$

(IV.41.a)

$$A(T) = \exp\{-\nu\alpha[\; |T| + (1/\gamma)(\gamma^2(4\mu^2-\gamma^2)^{-1} - 1)(\exp(-\gamma\,|T|) - 1) -$$

$$- \; (1/2\mu)(\gamma^2(4\mu^2-\gamma^2)^{-1})(\exp(-2\mu\,|T|) - 1)\} \;. \qquad \text{(IV.41.b)}$$

La contribución espectral de frecuencia 2ω al orden 1 en teoría de perturbaciones, con parámetro de expansión υ/γ esta dada unicamente por la función de correlación cruzada

$$\langle z(T)z^{*}(0)\rangle^{est}_{1,2\omega} = \upsilon/\gamma \;\; A(T) \;\; d(\omega/\gamma,\upsilon/\gamma) \;\; \exp\{i2\omega T-(\gamma+\upsilon)|T|\} \qquad \text{(IV.42.a)}$$

$$d(\sigma,\rho) = \rho^{2}[\,(i\sigma-\rho)^{2}(i\sigma+2\rho-1)(i\sigma-2\rho-1)]^{-1} \;, \qquad \text{(IV.42.b)}$$

con $\sigma=\omega/\gamma$ y $\rho=\upsilon/\gamma$.

IV.4. EL RUIDO COLOREADO COMO UN PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK EN EL FORMALISMO DE INTEGRAL FUNCIONAL:

Los resultados hasta aqui obtenidos a partir del formalismo presentado en la Subsec.(IV.2.A) pueden ser alcanzados incluyendo al ruido como una variable relevante en la dinámica, para lo cual suponemos que se satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck definido por la EDE (IV.7). De esta forma los resultados alcanzados son formalmente igual en una expansión en términos de los parámetros perturbativos. Aunque no son coincidentes permiten obtener de una manera sencilla, utilizando el formalismo de Integral Funcional para procesos con ruido blanco, las contribuciones espectrales o armónicos principales en la teoría perturbativa. Para ilustrar estas ideas consideremos el sistema de EDE definido por Ecs. (IV.7) y (IV.14). La FG es definida de acuerdo a la Ec.(II.59):

$$Z[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} D\underset{\sim}{p}\; D\underset{\sim}{q} \quad \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \; \{ \; p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - \mathcal{H}^{\gamma(o)}(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t) + \right.$$

$$\left. + \; j_i(\tau)\; q_i(\tau) + j_i^*(\tau)\; p_i(\tau) \} \right\}$$

$$\times \quad \delta(q_1(t_c)-\theta_o)\; \delta(q_2(t_o)-\zeta_o) \quad ,$$

(IV.63.a)

$$\mathcal{H}^{\gamma(o)}(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t) = -i\gamma/2 \; p_2^2 + \varepsilon^{1/2} p_1 \; g(q_1+\omega t)\; q_2 - \gamma p_2 q_2 \; , \qquad \text{(IV.63.b)}$$

a partir de la cual definimos la FGL

$$Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} D\underset{\sim}{p}\; D\underset{\sim}{q} \quad \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \; \{ \; p_1\dot{q}_1 + p_2(\dot{q}_2+\gamma q_2) + i\gamma/2 \; p_2^2 + \right.$$

$$\left. + \; j_i(\tau)\; q_i(\tau) + j_i^*(\tau)\; p_i(\tau) \} \right\}$$

$$\times \quad \delta(q_1(t_c)-\theta_o)\; \delta(q_2(t_o)-\zeta_o) \quad ,$$

(IV.64)

que integrada sobre variables y momentos conjugados permite obtener la expresión (IV.36) con funciones de Green

$$S_1(t,t') = i\Theta(t-t') \quad , \qquad \text{(IV.65.a)}$$

$$S_2(t,t') = i\Theta(t-t') \; \exp\{-\gamma(t-t')\} \quad , \qquad \text{(IV.65.b)}$$

$$R_2(t,t') = (\gamma/2) \; [\, \exp(-\gamma\,|t-t'|)-\exp(-\gamma(t+t'-2t_o))] \; . \qquad \text{(IV.65.c)}$$

En el límite $t_o \longrightarrow -\infty$, como la FGL debe ser independiente de las condiciones iniciales, es natural exigir la condición de regimén estacionario (IV.19). Queda asi establecida la FGLE (IV.38) con función de Green

$$D_2(t,t') = K(t,t') \tag{IV.66}$$

La función de correlación para el proceso $\cos\theta$ al orden 0 sera

$$C_0(T) = 1/2 \cos\omega T \tag{IV.67}$$

Las contribuciones espectrales, en teoría perturbativa se determinan siguiendo las técnicas ya establecidas. Al orden 1, en el parámetro de expansión ε/γ, se tiene que la contribución de frecuencia 2ω es

$$C_1^{2\omega}(T) = -(\varepsilon/8\gamma)\ \exp\{-\gamma|T|\}\left\{\frac{1-(\omega/\gamma)^2}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\cos 2\omega T - \frac{2\omega/\gamma}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\operatorname{sen}2\omega T\right\} \tag{IV.68}$$

El desarrollo de la Ec.(IV.29) en potencias de ε/γ coincide con esta ultima expresión, lo cual permite ver que para el cálculo de las contribuciones espectrales o armónicos el método establecido da la contribución principal en potencias de ε/γ. Sin embargo, no es de utilidad para establecer la contribución de orden cero.

IV.5. APENDICE:

Se evaluara la FGL generica que aparece en un proceso con ruido coloreado donde $K^{\mu\nu}(t,t')$ es la función de correlación de los ruidos que intervienen en un proceso. La misma es de la forma

$$Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\ \mathcal{D}\underset{\sim}{q}\ \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ [\, p_\mu(\dot{q}^\mu+\lambda^{(\mu)} q^\mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2}\ \alpha\int_{t_o}^{T} d\tau'\ p_\mu(\tau)K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_\nu(\tau') + j_\mu q^\mu + j^{*\mu}p_\mu] \right\}$$

$$\times\ \{\delta(q^\mu(t_o)-Q_o^\mu)\}$$

(IV.A.1)

Utilizando la propiedad de cualquier funcional $G[\underset{\sim}{x}]$ de $\{x_\mu\}$:

$$\int \mathcal{D}\underset{\sim}{x}\ \ \frac{\delta}{\delta x_\mu(\tau)}\ G[\underset{\sim}{x}] = 0 \qquad \text{(IV.A.2)}$$

y utilizando las condiciones de contorno sobre las derivadas funcionales de la Funcional Generatriz Libre (FGL) respecto de las fuentes:

$$\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j_\mu(t)}\ Z_o\ \Big|_{t=t_o} = Q_o^\mu\ Z_o \qquad \text{(IV.A.3.a)}$$

$$\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(t)}\ Z_o\ \Big|_{t=T} = 0 \qquad \text{(IV.A.3.b)}$$

es posible determinar una expresión para la FGL y las funciones de Green.

Derivando funcionalmente (IV.A.1) respecto a los momentos conjugados p_μ y teniendo en cuenta la propiedad (IV.A.2):

$$0 = \int \mathcal{D}p\, \mathcal{D}q\, [\, (\dot{q}^{\mu}+\lambda^{(\mu)} q^{\mu}) \;+\; i\alpha \int_{t_o}^{T} d\tau'\; K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_{\nu}(\tau')]$$

$$\times \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau\; [\, p_{\mu}(\dot{q}^{\mu}+\lambda^{(\mu)} q^{\mu}) \;+\; \frac{1}{2}\;\alpha\int_{t_o}^{T} d\tau'\;\; p_{\mu}(\tau)K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_{\nu}(\tau')\right.$$

$$\left. +\;\; j_{\mu}q^{\mu} \;+\; j^{*\mu}p_{\mu}] \right\} \;\; \{\delta(q^{\mu}(t_o)-Q_o^{\mu})\} \qquad .$$

(IV.A.4)

Esta relación puede ser expresada en términos de la FGL como

$$\left(\frac{d}{d\tau} + \lambda^{(\mu)}\right) \frac{1}{i}\, \frac{\delta}{\delta j_{\mu}(\tau)}\, Z_o = -\left(j^{*\mu}(\tau) + \alpha \int_{t_o}^{T} d\tau'\; K^{\mu\nu}(\tau,\tau')\, \frac{\delta}{\delta j^{*\nu}(\tau')}\right) Z_o$$

(IV.A.5)

Derivando funcionalmente respecto a las variables $\{q^{\mu}\}$ la FGL (IV.A.1) y en virtud de la propiedad (IV.A.2) se tiene

$$0 = \int \mathcal{D}p\, \mathcal{D}q\, [\;\; \dot{p}_{\mu} \;+\; \lambda^{(\mu)} p_{\mu} \;+\; j_{\mu}]$$

$$\times \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau\; [\, p_{\mu}(\dot{q}^{\mu}+\lambda^{(\mu)} q^{\mu}) \;+\; \frac{1}{2}\;\alpha\int_{t_o}^{T} d\tau'\;\; p_{\mu}(\tau)K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_{\nu}(\tau')\right.$$

$$\left. +\;\; j_{\mu}q^{\mu} \;+\; j^{*\mu}p_{\mu}] \right\} \;\; \{\delta(q^{\mu}(t_o)-Q_o^{\mu})\} \qquad ,$$

(IV.A.6)

que expresada en términos de la FGL es

$$\left(\frac{d}{d\tau} - \lambda^{(\mu)}\right) \frac{1}{i}\, \frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(\tau)}\, Z_o = j_{\mu}(\tau)\; Z_o \qquad . \qquad \text{(A.7)}$$

Esta última Ecuación Diferencial (ED) con condición de contorno (IV.A.3.b) admite como solución a

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(\tau)} Z_o = - \int_{t_o}^{T} dt' \; S^{(\mu)}(t',\tau) \; j_\mu(t') \quad , \qquad \text{(IV.A.8)}$$

siendo

$$S^{(\mu)}(t',t) = \Theta(t'-t) \exp\{-\lambda^{(\mu)}(t'-t)\} \quad , \qquad \text{(IV.A.9)}$$

la función de Green que resuelve la ED (IV.A.7)

Los cálculos para determinar la solución de la ED (IV.A.5) con condición de contorno (IV.A.3.a), que no daremos aqui dada su extensión, requieren de la forma explícita de las funciones de correlación de los ruidos coloreados. En los casos que nos ocupan las mismas estan dadas por

$$K^{\mu\nu}(t,t') = 1/2 \; A^{\mu\nu} \exp\{-\Lambda|t-t'|\} \quad , \qquad \text{(IV.A.10)}$$

es decir con tiempos de correlación iguales pero diferentes intensidades. El caso mas general no ofrecera dificultades adicionales. La solución de la ED (IV.A.5) será

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu(\tau)} Z_o = Q_o^\mu \exp\{\lambda^{(\mu)} t_o\} \; Z_o - \int_{t_o}^{T} dt' \; S^{(\mu)}(t',\tau) \; j^{*\mu}(t') \; +$$

$$+ \; i\alpha \int_{t_o}^{T} d\tau' \; R^{\mu\sigma}(\tau',\tau) \; j^{\sigma}(\tau') \quad ,$$

(IV.A.11)

siendo la función de Green

$$R^{\mu\sigma}(\tau',\tau) = \int_{t_o}^{\tau} dt\, dt'\, S^{(\sigma)}(\tau',t)\, K^{\mu\sigma}(t,t')\, S^{(\mu)}(\tau,t') \quad , \tag{IV.A.12}$$

y explicitamente para el caso (IV.A.10) se tiene

$$R^{\mu\sigma}(\tau',\tau) = r^{\mu\sigma}(\tau',\tau) + r^{\sigma\mu}(\tau,\tau') \quad . \tag{IV.A.13.a}$$

$$\begin{aligned} r^{\mu\sigma}(\tau',\tau) = {} & 1/2\ \Lambda^{\mu\sigma}\ (\lambda^{(\mu)} + \Lambda)^{-1}\ \{\ (\lambda^{(\sigma)} - \Lambda)^{-1} \\ & \times [\ \Theta(\tau'-\tau)\ (\exp(-\lambda^{(\sigma)}(\tau'-\tau)) - \exp(-\Lambda(\tau'-\tau))) - \\ & - \exp(-\lambda^{(\mu)}(\tau-t_o))\ (\exp(-\lambda^{(\sigma)}(\tau'-t_o)) - \exp(-\Lambda(\tau'-t_o)))] + \\ & + (\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\sigma)})^{-1}\ \exp(-\lambda^{(\sigma)}\tau' - \lambda^{(\mu)}\tau) \\ & \times [\ \exp((\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\sigma)})\min(t,t')) - \exp((\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\sigma)})t_o)\ ]\} \end{aligned} \tag{IV.A.13.b}$$

Es de interés el caso particular $\lambda^{(\mu)} = \lambda^{(\sigma)} = 0$ y $\Lambda^{\mu\sigma} = \Lambda^{-1}$ para el cual la función de Green es explicitamente

$$\begin{aligned} R(\tau',\tau) = {} & \Lambda^{-2}\ [\ \min(\tau,\tau') - t_o - K(\tau,\tau') + \\ & + 2\ (\ K(\tau,t_o) + K(\tau',t_o)\ )\ ] \quad . \end{aligned} \tag{IV.A.15}$$

Capítulo V

Estructura de los términos de la Expansión Perturbativa. Determinación de los Parámetros de Expansión

C A P I T U L O V:

V.1. INTRODUCCION:

En este Capítulo se presenta el formalismo general para la determinación de la estructura de los términos de la serie perturbativa a que da lugar el formalismo de integral funcional en el cálculo de funciones de correlación estacionarias. Se analizara el caso general de ruido blanco, y se extiende para un caso de ruido coloreado que satisface un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Para determinar los posibles parámetros de expansión perturbativa se analizan los posibles escaleados que pueden llevarse a cabo en la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) y los criterios de elección de ellos. Los parámetros de expansión deben ser adimensionales y un simple análisis dimensional muestra, en cada uno de los casos, las posibles elecciones.

Se analiza la convergencia de los términos de la serie perturbativa, asi como la estructura general de ellos y se da la forma general de la serie.

Finalmente se muestra que el espectro o potencia espectral es tambien un desarrollo perturbativo en los parámetros de expansión elegidos.

V.2. RUIDO BLANCO:

V.2.A. Escaleado de la Ecuación Diferencial Estocástica:

Consideremos la Ecuación Diferencial Estocastica (EDE):

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2}\, g(\theta)\, f(t) \quad , \tag{V.1}$$

donde f(t) es ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y función de autocorrelación

$$\langle\, f(t)\, f(t')\, \rangle = \delta(\, t-t') \quad , \tag{V.2}$$

donde ω es la frecuencia característica del sistema, ε es la intensidad de ruido.

Un análisis dimensional muestra que si $[t] = T$ (dimensión del tiempo t es T), $g(\theta)$ es adimensional y $[f(t)] = T^{-1/2}$; se tiene que los parámetros físicos son

$$[\varepsilon] = [\omega] = T^{-1} \; . \tag{V.3}$$

De aqui se tiene que ε/ω y ω/ε son las dos posibles elecciones de parámetros adimensionales para realizar una expansión perturbativa.

Para obtener la EDE que se obtiene luego de un escaleado, hacemos la sustitución $\theta = \varphi + \omega\, t$, llamando $t = \lambda\, \underline{t}$, $\varphi(t) = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $f(t) = \lambda^{-1/2}\, \underline{f}(\underline{t})$, la EDE y la función de correlación del ruido escaleada son:

$$d\varphi/d\underline{t} = (\lambda\varepsilon)^{1/2}\, g(\lambda\omega\underline{t}+\varphi(\underline{t}))\; \underline{f}(\underline{t}) \quad , \qquad (V.4)$$

$$\langle\; \underline{f}(\underline{t})\; \underline{f}(\underline{t}') \;\rangle = \delta(\; \underline{t}-\underline{t}') \quad , \qquad (V.5)$$

respectivamente. Podemos fijar el escaleado con la elección:

$$\lambda\varepsilon = 1 \quad , \quad \Omega = \omega/\varepsilon \quad , \quad \underline{t} = \varepsilon t \quad , \qquad (V.6)$$

o con la alternativa

$$\lambda\omega = 1 \quad , \quad E = \varepsilon/\omega \quad , \quad \underline{t} = \omega t \quad . \qquad (V.7)$$

Las funciones de correlación de funciones 2π-periodicas pueden ser calculadas en las nuevas variables escaleadas, es decir para un proceso $h(\underline{\theta}(\underline{t}))$, con $\underline{\theta}(\underline{t}) = \lambda\omega\underline{t}+\underline{\varphi}(\underline{t})$, se tiene:

$$\underline{C}(\; \underline{t},\underline{t}') = \langle\; h(\underline{\theta}(\underline{t}))\; h(\underline{\theta}(\underline{t}')) \;\rangle \quad , \qquad (V.8)$$

que esta relacionada con las variables originales como

$$\underline{C}(\; \underline{t},\underline{t}') = C(\; t,t') \quad , \qquad (V.9)$$

a traves del reemplazo $\underline{t} = \lambda^{-1}t$.

La elección del escaleado (V.6) es la que se adopta aqui por razones que se justifican en la Sección siguiente, resultando la EDE escaleada:

$$d\varphi/d\underline{t} = g(\Omega\underline{t}+\varphi(\underline{t}))\ \underline{f}(\underline{t}) \quad , \tag{V.10}$$

siendo una ecuación a un parámetro Ω, con intensidad de ruido 1 y $\underline{f}(\underline{t})$ ruido blanco Gaussiano.

V.2.B. Serie perturbativa:

Interpretando la EDE escaleada (V.10) en el sentido de Ito, es decir todas las funciones del tiempo son evaluadas en el pre-punto, la funcional generatriz de momentos y funciones de correlación sera:

$$\mathscr{Z}[j,j^*] = \int_{\gamma(0)} \mathscr{D}p\ \mathscr{D}q \quad \exp\left\{ i \int_{t_0}^{T} d\tau\ [\ j\ q + j^* p\ ] \right\}$$

$$\times \quad \exp\left\{ i \int_{t_0}^{T} d\tau\ [\ p\ \dot{q} - \mathscr{H}^{\gamma(0)}(p,q,\tau)] \right\} \quad \delta(q(\underline{t}_0)-\varphi_0) \quad , \tag{V.11}$$

$$\mathscr{H}^{\gamma(0)}(p,q,\tau) = -\ i/2\ A_0 p^2 + \sum_{Z_0} (-i/2\ A_k p^2)\ \exp\{ik(q+\Omega\tau)\} \quad , \tag{V.12}$$

donde $A_k = \sum_n a_n\ a_{j-n}$ es el coeficiente de Fourier de $g^2(\theta)$ y $g(\theta) = \sum_n a_n\ e^{in\theta}$. Separando una parte "libre" o no oscilatoria en el Hamiltoniano (V.12):

$$\mathscr{H}^{\gamma(0)}(p,q,\tau) = \mathscr{H}_0(p) + \mathscr{K}^{\gamma(0)}(p,q,\tau) \quad , \tag{V.13.a}$$

$$\mathscr{H}_o(p) = -\,i/2\ A_o\ p^2 \quad , \tag{V.13.b}$$

es posible dar la funcional generatriz como una serie formal:

$$\mathcal{Z}[j,j^*] = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q \left[-i \int_{t_o}^{T} d\tau\ \mathscr{H}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) \right]^n$$

$$\times \ \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau\ [\ p\ \dot{q} - \mathscr{H}_o(p) + j\ q + j^* p\ ] \right\} \delta(q(\underline{t}_c) - \varphi_o) \ ,$$

(V.14)

y definir una funcional generatriz "libre" o no oscilatoria estacionaria, integrando (V.14), inponiendo la condición de regimén estacionario

$$\int_{t_o}^{T} d\tau\ \ j(\tau) = 0 \quad , \tag{V.15}$$

y tomando el limite de $t_o \to -\infty$ se tiene

$$\mathcal{Z}_o^{es}[j,j^*] = \exp\left\{ -1/2 \int_{-\infty}^{T} d\tau\ d\tau'[\ \ 2\ i\ j(\tau)\ S(\tau,\tau')\ j^*(\tau') + \right.$$

$$\left. +\ j(\tau)\ R(\tau,\tau')\ j(\tau')\ ] \right\} \ ,$$

(V.16)

donde las funciones de Green son

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad . \tag{V.17.a}$$

$$R(\tau,\tau') = A_o \min(\tau,\tau') \quad . \tag{V.17.b}$$

La contribución n-sima a la suma en (V.14) en el regimén estacionario es

$$\mathcal{Z}_n^{es}[j,j^*] = \frac{1}{n!} \left[1/2 \int_{-\infty}^{T} d\tau \sum_{\mathbb{Z}_o} A_k \exp\{ik(q+\Omega\tau)\} \left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(\tau)^2}\right) \right]^n$$

$$\times \mathcal{Z}_o^{es}[j,j^*] \quad . \tag{V.18}$$

Los momentos y funciones de correlación de funciones 2π-periodicas son determinados a través de

$$\langle \exp\{i[\mu_{n+1} \varphi(T) + \mu_o \varphi(0)]\} \rangle^{est} = \mathcal{Z}_o^{es}[\mu_{n+1}\delta(\circ-T) + \mu_o\delta(\circ) \; ; \; 0 \;] , \tag{V.19}$$

siendo μ_{n+1} y $\mu_o \in \mathbb{Z}$.

La contribución a (V.19) del n-simo término de la serie

$$\langle \exp\{i[\mu_{n+1} \underline{\theta}(\underline{T}) + \mu_c \underline{\theta}(0)]\} \rangle_n^{est} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_i \, (i=1,\dots,n) \\ \Sigma_{i=0}^{n+1}\mu_i=0}} A_{\mu_1 \dots \mu_n} \int_{-\infty}^{T} dt_n \; \dots \int_{-\infty}^{T} dt_1 \; \exp\{ i\Omega \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k t_k \}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_j)^2}\right) \mathcal{Z}_o^{est}[j,j^*] \Bigg|_{j(\circ)=\Sigma_{i=0}^{n+1} \mu_i \delta(\circ-t_i);\, j^*(\circ)=0} \tag{V.20}$$

donde $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \ldots > t_1$, $t_0 = 0$, $\underline{\theta}(\underline{T}) = \underline{\varphi}(\underline{T}) + \Omega\, \underline{T}$. La restricción $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 0$ sobre los términos de la suma equivale a la condición (V.15) y $A_{\mu_1 \ldots \mu_n} = (-1/2)^n \prod_{i=1}^{n} A_{\mu_i}$.

Introduciendo la identidad

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \Theta(t_i - t_j) = 1 \quad , \tag{V.21}$$

es posible llevar la región de integración de $\mathbb{R}^n$ a la definida por $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \ldots > t_1$ y cancelar el factor 1/n!. Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}_0^{est}}{\delta j^*(t)} = - \int_{-\infty}^{\underline{T}} d\tau \; \Theta(\tau - t) \; \mathcal{Z}_0^{est}[\, j, j^*] \quad , \tag{V.22}$$

luego de evaluar en las fuentes, y sobreentendiendo de aqui en más la suma y el coeficiente, la Ec.(V.20) es

$$\int_{-\infty}^{\underline{T}} dt_n \ldots \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \quad \exp\{ i\Omega \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k t_k \} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \Theta(t_i - t_j) \right)^2$$

$$\times \; \exp\{ -A_0/2 \sum_{j,k=0}^{n+1} \mu_j \mu_k \min(t_j, t_k) \} \quad .$$

(V.23)

La suma contenida en la productoria puede ser escrita

$$\sum_{j=0}^{n+1} \Theta(t_j - t_i) = - \mu_0 \; \Theta(t_i) - s_i \quad , \tag{V.24.a}$$

$$s_i = \sum_{k=0}^{i} \mu_k \quad , \tag{V.24.b}$$

y la suma del exponencial

$$\sum_{j,k=0}^{n+1} \mu_j \mu_k \min(t_j,t_k) = \underline{T} + \sum_{k=0}^{n} \phi_k t_k \quad , \tag{V.25.a}$$

$$\phi_k = s_{k-1}^2 - s_k^2 + 2 \mu_0 \mu_k (\min(0,t_k)/t_k - 1) \; , \tag{V.25.b}$$

con $s_0 = 0$. La integral (V.20) luego del cálculo indicado es

$$\langle \exp\{i[\mu_{n+1} \underline{\theta}(\underline{T}) + \mu_0 \underline{\theta}(0)]\} \rangle_n^{est} = \exp\{ -A_0 \underline{T}/2 + i\,\Omega\, \mu_{n+1} \underline{T} \}$$

$$\times \sum_{\substack{\mu_i \,(i=1,\dots,n) \\ \sum_{i=0}^{n+1} \mu_i = 0}} A_{\mu_1 \dots \mu_n} \int_{-\infty}^{T} dt_n \; . \; . \; . \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{n} (\mu_0 \Theta(t_i) + s_i)^2$$

$$\times \exp\{ \sum_{k=1}^{n} (i\,\Omega\, \mu_k - A_0 \phi_k/2) t_k \} \quad .$$

(V.26)

V.2.C. Convergencia de la serie perturbativa:

Se prueba en esta Sección que una integral múltiple del tipo (V.26) no contiene divergencias. Para esto es suficiente estudiar

$$\int_{-\infty}^{0} dt_k \; ... \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{k} (\mu_0 \Theta(t_i) + s_i)^2 \quad \exp\{\sum_{j=1}^{k} (i\Omega\mu_j - A_0\phi_j/2)t_j\},$$

(V.27)

donde $1 \leq k \leq n$ y $s_i \neq 0$ $\forall$ $i \neq k$. Obviamente la convergencia la da el coeficiente que acompaña a t_k. Notemos que $0 > t_k > \ldots > t_1 > -\infty$. Para $t_j \in \mathbb{R}^-$, denotamos a ϕ_j

$$\phi_j^- = s_{j-1}^2 - s_j^2 \quad , \quad s_0 = 0 \quad . \tag{V.28}$$

Ademas $\Theta(t_i) = 0$ en la región de integración. Luego de integrar en $t_1, \ldots, t_{k-1}$ se tiene

$$\prod_{i=1}^{k} s_i^2 \; (i\Omega\mu_i - A_0\phi_i^-/2)^{-1} \int_{-\infty}^{0} dt_k \; \exp\{(i\Omega s_k - A_0 s_k^2/2)t_k\} \; . \tag{V.29}$$

Notemos que si $s_k \neq 0$ la expresión (V.29) tiende a cero cuando $t_k \to -\infty$ ya que $A_0 > 0$, en cambio si $s_k = 0$ se tiene que es identicamente nula. De esta forma queda probado que si $s_i = 0$ con $1 \leq i \leq k \leq n$ la integral (V.27) es cero.

V.2.D. Forma funcional de la serie perturbativa:

Para la región de integración $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \ldots > t_1$ es sencillo mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\underline{T}} dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n,\ldots,t_1) =$$

$$= \int_0^{\underline{T}} dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int_c^{t_3} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n,\ldots,t_1) +$$

$$+ \int_0^{\underline{T}} dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int_0^{t_4} dt_3 \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n,\ldots,t_1) +$$

$$+ \ldots +$$

$$\int_0^{\underline{T}} dt_n \int_{-\infty}^{0} dt_{n-1} \int_{-\infty}^{0} dt_{n-2} \ldots \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n,\ldots,t_1)$$

(V.30)

introduciendo la identidad

$$1 = \prod_{i=2}^{n} \left(\Theta(t_i) + \Theta(-t_i) \right) \quad , \qquad \text{(V.31)}$$

en el lado derecho de (V.30) y teniendo en cuenta que existen (n-1) contribuciones no nulas dadas por

$$\Theta(t_n)\,\Theta(t_{n-1}) \ldots \Theta(t_2) \;,$$

$$\Theta(t_n)\,\Theta(t_{n-1}) \ldots \Theta(t_3)\;\Theta(-t_2) \;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Theta(t_n)\,\Theta(t_{n-1}) \ldots \Theta(t_{k+1})\;\Theta(-t_k)\;\Theta(-t_{k-1}) \ldots \Theta(-t_2) \;,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Theta(t_n)\,\Theta(-t_{n-1}) \ldots \Theta(-t_2) \;.$$

(V.32)

La integral (V.26) definida en la región $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \ldots > t_1$

se escribe como suma de (n-1) términos definidos por las subregiones dadas en (V.32). Una integral tipo es:

$$\int_0^T dt_n \cdot\cdot\cdot \int_0^{t_{k+1}} dt_k \int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \cdot\cdot\cdot \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (\mu_o \Theta(t_i)+s_i)^2 \quad \exp\{ \sum_{j=1}^{n} (i\Omega\mu_j - A_o \phi_j/2)t_j \} \quad .$$

(V.33)

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \cdot\cdot\cdot \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \quad \prod_{i=1}^{k-1} (\mu_o \Theta(t_i)+s_i)^2$$

$$\times \quad \exp\{ \sum_{j=1}^{k-1} (i\Omega\mu_j - A_o \phi_j/2)t_j \} = \sum_{j=1}^{k-1} (1-\delta_{s_i,o}) \prod_{i=1}^{k-1} K_i(\Omega) \ ,$$

(V.34)

el cálculo se reduce a

$$\int_0^T dt_n \cdot\cdot\cdot \int_c^{t_{k+1}} dt_k \quad \prod_{i=k}^{n} (\mu_o \Theta(t_i)+s_i)^2 \quad \exp\{ \sum_{j=k}^{n} (i\Omega\mu_j - A_o \phi_j^+/2)t_j \},$$

(V.35)

donde

$$\phi_j^+ = s_{j-1}^2 - s_j^2 - 2 \mu_o \mu_j \quad . \qquad \text{(V.36)}$$

Si $s_l \neq 0$ para $l \leq i \leq n$, cada integral la evaluaremos en t_{l+1} con integrando

$$\exp(i\Omega\psi'_l - A_o\phi'_l/2)t_l \quad , \tag{5.37.a}$$

$$\phi'_l = \phi^+_l + \sum_{j=k}^{l-1} \gamma_j\, \phi^+_j \quad , \tag{5.37.b}$$

$$\psi'_l = \mu_l + \sum_{j=k}^{l-1} \gamma_j\, \mu_j \quad , \tag{5.37.c}$$

donde $\gamma_j = \sigma_{l-1}\sigma_{l-2}\cdot\cdot\cdot\sigma_{j+1}\sigma_j$ con $\sigma_k = 0$, 1 que indica que cada término integrando es evaluado respectivamente en el extremo inferior o superior de intervalo de integración. Notemos que si $\gamma_\alpha = 0$ ($\forall$ α: j < α < k-1), entonces $\gamma_i = 0$ $\forall$ i < l, ya que $\gamma_j = \gamma_{j+1}\sigma_j$. Luego:

$$\phi'_l = \phi^{(\alpha)}_l = \sum_{j=\alpha+1\geq 1}^{l} \phi^+_j = (s_\alpha + \mu_o)^2 - (s_l + \mu_o)^2 \; , \tag{V.38.a}$$

$$\psi'_l = \psi^{(\alpha)}_l = \sum_{j=\alpha+1\geq 1}^{l} \mu_j = s_l - s_\alpha \quad , \tag{V.38.b}$$

con $\gamma_\alpha = 0$. El cálculo final muestra que (V.35) para $s_\alpha \neq s_l$ puede escribirse como

$$\sum_{s_\alpha\ (\alpha > k)} A_{s_\alpha}(\Omega) \quad \exp\{(i\Omega\psi^{(\alpha)}_n - A_o\phi^{(\alpha)}_n/2)\underline{T}\ \} \tag{V.39}$$

Notemos que s_α rotula todos los posibles términos consecuencia de todas las contribuciones dadas por evaluar en cada uno de los limites de integración.

Para el caso $g(\underline{\theta}) = \cos \underline{\theta}$, la función de correlación estacionaria del proceso $\cos \underline{\theta}$ es

$$\underline{C}(\underline{T}) = 1/2\, Re\{ e^{i\Omega \underline{T}} [\langle e^{i[\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(o)]} \rangle + \langle e^{i[\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(o)]} \rangle] \} \tag{V.40}$$

luego se tiene que $\mu_{n+1} = 1$, $\mu_o = 1$ y $s_n = -2$ o $\mu_o = -1$ y $s_n = 0$. Para $\mu_{n+1} = \mu_o = 1$, $s_n = -2$ el exponente de (V.39) es $\phi_n^{(\alpha)} + 1 = (s_\alpha + 1)^2 > 0$,y para $\mu_{n+1} = 1$,$\mu_o = -1$ y $s_n = 0$ es $\phi_n^{(\alpha)} + 1 = (s_\alpha - 1)^2 > 0$, con lo cual se muestra que la función decae exponencialmente en este caso.

En el caso $s_\alpha = s_l$ se tiene de la Ec.(V.38) que $\phi_l^{(\alpha)} = \psi_l^{(\alpha)} = 0$ para $k \leq l \leq n$ y en consecuencia se originan términos lineales en t_l, más aun si existe $s_\alpha = s_{l'}$, $\phi_{l'}^{(\alpha)} = \psi_{l'}^{(\alpha)} = 0$ para $k \leq l \leq l' \leq n$ aparecerán términos cuadráticos en $t_{l'}$. De esta forma se originan los términos polinómicos en $\underline{T}$, que acompañan al exponencial o constantes de la expresión general. La máxima potencia que aparece en cada orden puede ser determinada en cada caso particular, aqui lo haremos para el caso $g(\underline{\theta}) = \cos \underline{\theta}$, en términos del parámetro de expansión perturbativo.

V.2.E. Determinación de los parámetros de expansión:

Analizando la integral tipo que aparece en el cálculo perturbativo dada en (V.33), se tiene que para la primera integración ($0 > t_2 > t_1 > -\infty$) se tiene el factor

$$K_1\ (\Omega) = (\ i\Omega\mu_1 - A_0\phi_1^-/2\ )^{-1} \quad , \tag{V.41}$$

y para las (k-2) integraciones intermedias $(0 > t_{k-1} > \ldots > t_2 > t_1)$ por cada integración se obtienen los factores

$$K_2\ (\Omega) = (\ i\Omega s_2 - A_0 s_2^2/2\ )^{-1}\ (1-\delta_{s_2,0}) \quad ,$$

$$K_3\ (\Omega) = (\ i\Omega\mu_3 - A_0\phi_3^-/2\ )^{-1}\ (1-\delta_{s_3,0}) \quad ,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \tag{V.42}$$

$$K_{k-1}(\Omega) = (\ i\Omega\mu_{k-1} - A_0\phi_{k-1}^-/2\ )^{-1}\ (1-\delta_{s_{k-1},0}) \quad ,$$

y por las (n-k-1) integraciones para $\underline{T} > t_n > \ldots > t_k > 0$ se tiene

$$K_l\ (\Omega) = \begin{cases} (\ i\Omega\psi_l^{(\alpha)} - A_0\phi_l^{(\alpha)}/2\ )^{-1} & s_l \neq s_\alpha \\ 1 & s_l = s_\alpha \end{cases} \quad , \tag{V.43}$$

con $k \leq l \leq n$ y $\alpha > k$.

Factorizando Ω^{-1} en todas las funciones de Ω, teniendo en cuenta que $\Omega^{-1} = \varepsilon/\omega$, se tiene que este es un parámetro de expansión perturbativo y junto con las potencias en $\underline{T}$ dan el orden perturbativo. Luego por cada integración exponencial se tiene un factor Ω^{-1} por una función de Ω^{-1}, en caso contrario se agregan constantes de la integración del polinomio en $\underline{T}$.

V.2.F. Estructura general de los términos perturbativos:

El orden del polinomio en $\underline{T}$ a que da lugar cada orden quedara determinado por la expresión

$$\int_0^{\underline{T}} dt_n \int_c^{t_n} dt_{n-1} \; . \; . \; . \int_0^{t_3} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{n} (\mu_c \Theta(t_i) + s_i)^2$$

$$\times \exp\{ \sum_{j=1}^{n} (i\Omega\mu_j - A_o \phi_j /2) t_j \} \quad ,$$

(V.44)

contenida en el cálculo de la función de correlación. La primera integración, de un exponencial, introduce un factor Ω^{-1}. Luego el orden del polinomio en $\underline{T}$ es (n-1), es decir, el número de integraciones restantes.

La forma general de los términos de frecuencia $(2p+1)\Omega$ al orden n en la serie perturbativa para el proceso $\cos\theta$ en el caso $g(\theta)=\cos\theta$ es

$$\langle \exp\{i[\underline{\theta}(\underline{T}) \pm \underline{\theta}(0)]\} \rangle^{est}_{n,(2p+1)\Omega} = \exp\{ (i(2p+1)\Omega - A_o(2p+1)^2/2) \; \underline{T} \}$$

$$\times \sum_{k=1}^{n>p} (\frac{1}{\Omega})^k \; \underline{T}^{n-k} \quad S_{nk}^{(2p+1)}(\Omega^{-1}) \quad ,$$

(V.45)

donde $S_{nk}^{(2p+1)}(\Omega^{-1})$ son constantes o funciones de la forma $(i \; b + a \; \Omega^{-1})^{-1}$ y n es par (impar) tomando el signo + (-) en el exponencial.

V.2.6. El espectro como una serie de potencias en el parámetro perturbativo:

El espectro o potencia espectral es obtenido como la Transformada de Fourier coseno de la función de autocorrelacion [St1][1]:

$$\mathcal{S}(k) = 4 \int_0^\infty dT \quad C(T) \quad \cos kT \quad . \tag{V.46}$$

En las variables escaleadas se tiene que $\underline{T} = \varepsilon T$ y como $C(T) = \underline{C}(\underline{T})$ se tiene:

$$\underline{\mathcal{S}}(\underline{k}) = \varepsilon \; \mathcal{S}(k) \quad , \tag{V.47}$$

con $\underline{k} = k/\varepsilon$. En la resonancia $k = (2p+1)\omega$ tenemos $\underline{k} = (2p+1)\Omega$ ya que $\Omega=\omega/\varepsilon$. Como puede concluirse de un simple análisis dimensional $[\varepsilon]=T^{-1}$ y $[\mathcal{S}]=T$, luego $\underline{\mathcal{S}}(\underline{k})$ es adimensional.

Las contribuciones de la forma

$$C(\underline{T}) = 1/2 \; \underline{T}^k \exp\{-\alpha\underline{T}\} \; \{A(\Omega) \; \cos[(2p+1)\Omega\underline{T}] + A(\Omega) \; \cos[(2p+1)\Omega\underline{T}]\} \tag{V.48}$$

en la Ec.(V.45) tiene transformada de Fourier inmediata dada en el

---

[1] Pag.23, Vol.I.

Ap.V.B y se puede concluir luego de un breve cálculo que el parámetro perturvativo, lo es tambien en la potencia espectral. Solo se introducen variantes en los términos polinómicos que dan origen a un α^{-1} por cada orden en $\underline{T}$. Para $(2p+1)\Omega \gg \alpha$, $\forall p$, la densidad de potencia espectral es

$$\underline{\mathcal{S}}((2p+1)\Omega) \approx (k-1)!\ \alpha^{-1}\ A(\Omega) \quad . \tag{V.49}$$

V.3. RUIDO COLOREADO:

V.3.A. Escaleado de la Ecuación Diferencial Estocástica:

Consideremos la EDE dada en (V.1) siendo ω la frecuencia del sistema, ε la intensidad de ruido, $g(\theta)$ una función 2π periodica y $F(t)$ ruido coloreado Gaussiano con valor medio nulo y que satisface el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (O-U)

$$\dot{F} = -\gamma F + c^{1/2}\zeta(t) \quad , \tag{V.50}$$

siendo c la intensidad del ruido blanco Gaussiano $\zeta(t)$ y γ^{-1} es el tiempo de correlación del ruido coloreado. La función de autocorrelación de un proceso F(t) es

$$A(t,t') = (c/2\gamma)\ e^{-\gamma|t-t'|} \quad . \tag{V.51}$$

Un análisis dimensional muestra que $[F] = [\,c/\gamma\,]^{1/2} = [c]^{1/2}T^{1/2}$

$[\gamma] = [\omega] = T^{-1}$ se tiene que $[c][\varepsilon] = T^{-3}$. Algunas de las posibles combinaciones paramétricas adimensionales son

a) $(\varepsilon c)^{1/3}\omega^{-1}$ y $(\varepsilon c)^{1/3}\gamma^{-1}$,

b) ω/γ y $(\varepsilon c)^{1/3}\gamma^{-1}$,

c) γ/ω y $(\varepsilon c)^{1/3}\omega^{-1}$.

Una vez escaleado el sistema de EDE dadas por Ecs. (V.1) y (V.50) se reduce a uno a dos parámetros. Veamos a continuación las ecuaciones escaleadas. Haciendo los reemplazos $t = \lambda \underline{t}$, $\theta(t) = \underline{\theta}(\underline{t})$, $F(t) = \sigma\ \underline{F}(\underline{t})$, $\zeta(t) = |\lambda|^{-1/2}\underline{\zeta}(\underline{t})$ las ecuaciones (V.1) y (V.60) se reducen a

$$d\underline{\theta}(\underline{t})/d\underline{t} = (\lambda\omega) + (\varepsilon^{1/2}\sigma\ \lambda)\ g(\underline{\theta})\ \underline{F}(\underline{t}) \quad , \qquad \text{(V.52.a)}$$

$$d\underline{F}(\underline{t})/d\underline{t} = -(\lambda\ \gamma)\ \underline{F} + ((|\lambda|c)^{-1/2}/\sigma)\ \zeta(\underline{t}) \quad , \qquad \text{(V.52.b)}$$

$$\langle\ \underline{\zeta}(\underline{t})\ \underline{\zeta}(\underline{t}')\ \rangle = \delta(\underline{t}-\underline{t}') \quad . \qquad \text{(V.52.c)}$$

Podemos fijar el escaleado, a traves de λ tomando $(|\lambda|c)^{-1/2} = \sigma$, de tres formas diferentes con $\lambda>0$:

a) $\lambda = \omega^{-1}$, entonces $\varepsilon^{1/2}\sigma\ \lambda = (\varepsilon c\omega^{-3})^{1/2}$,

b) $\lambda = \gamma^{-1}$, entonces $\varepsilon^{1/2}\sigma\ \lambda = (\varepsilon c\gamma^{-3})^{1/2}$,

c) $\lambda = (\varepsilon^{1/2}\sigma)^{-1} = (\varepsilon c)^{-1/3}$.

Consideraremos aqui el caso c) para el cual las ecuaciones (V.52) se vuelven

$$d\theta(t)/dt = \Omega + g(\theta)\, F(t) \quad , \tag{V.53.a}$$

$$dF(t)/dt = -\Gamma\, F + \zeta(t) \quad , \tag{V.53.b}$$

con $\Omega = \omega\, (\varepsilon c)^{-1/3}$ y $\Gamma = \gamma\, (\varepsilon c)^{-1/3}$, siendo la función de autocorrelación del ruido $F(t)$

$$\Lambda(t,t') = (1/2\Gamma)\, e^{-\Gamma|t-t'|} \quad . \tag{V.54}$$

El caso $c = \gamma^2$ se corresponde al límite de ruido blanco cuando $\gamma \to +\infty$. Los parámetros de las Ecs.(V.53) y (V.54) son $\Gamma = \gamma/\varepsilon$ y $\Omega = \omega/\varepsilon$, siendo Ω el parámetro elegido en el caso de ruido blanco. En el presente caso tenemos 2 parámetros y debemos elegir uno de ellos como parámetro perturbativo.

V.3.B. Serie perturbativa:

Haciendo la sustitución $\theta(t) = \varphi(t) + \Omega t$ la primera de las ecuaciones (V.53) será

$$d\varphi(t)/dt = g(\varphi+\Omega t)\, F(t) \quad . \tag{V.55}$$

Esta ecuación se interpreta en un sentido arbitrario de discretizacion, ya que se trata de un proceso con ruido coloreado [LR82]. Aqui utilizamos por simplicidad en los cálculos la prescripción de discretización del pre-punto. La funcional generatriz de momentos y funciones de correlación esta dada por la expresión (V.11), donde ahora el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) = -i/2\; p(\tau)\; g(q(\tau)+\Omega\tau) \int_{t_o}^{\underline{T}} d\tau'\; \underline{\Lambda}(\tau,\tau')\; g(q(\tau')+\Omega\tau')\; p(\tau') \tag{V.56}$$

El criterio para separar una parte "libre" o no oscilatoria es el utilizado en el Capitulo IV. Si A_o es el coeficiente de Fourier no oscilatorio de $g^2(\theta)$ y estamos interesados en pequeños apartamientos del caso de ruido blanco tenemos que

$$\mathcal{H}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) = \mathcal{H}_o(p) + \mathcal{K}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) \quad , \tag{V.57.a}$$

$$\mathcal{H}_o(p) = -i/2\; \alpha\; p(\tau) \int_{t_o}^{\underline{T}} d\tau'\; \underline{\Lambda}(\tau,\tau')\; p(\tau') \quad , \tag{V.57.b}$$

donde $0<\alpha<1$ es una constante a ser determinada que depende de los parámetros del sistema Γ y Ω, que tiende a A_o en el límite de ruido blanco.

Asi es posible escribir la ecuación (V.11) como la serie formal, dada en la expresión (V.14) en la cual

$$\mathcal{K}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) = -i/2\; p(\tau) \int_{t_o}^{\underline{T}} d\tau'\; \underline{\Lambda}(\tau,\tau')[\,(q(\tau)+\Omega\tau)\; g(q(\tau')+\Omega\tau')-\alpha]\; p(\tau') \tag{V.58}$$

La funcional generatriz libre estacionaria viene dada por la ecuación (V.15) con funciones de Green

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad , \tag{V.59.a}$$

$$R(\tau,\tau') = \frac{\alpha}{\Gamma^2} \left[\min(\tau,\tau') - \underline{\Lambda}(\tau,\tau') \right] \quad . \tag{V.59.b}$$

Detalles de estos resultados se encuentran en el Ap.IV.A.

En el límite estacionario la funcional generatriz es

$$\mathcal{Z}^{es}[j,j^*] = \sum_n \frac{1}{n!} (-1/2)^n \int_{\gamma(c)} \mathcal{D}p \; \mathcal{D}q \quad \int_{-\infty}^{T} \ldots \int_{-\infty}^{T} \prod_{j=1}^{n} dt_j \; dt'_j$$

$$\times \quad p(t_j) \, \underline{\Lambda}(t_j,t'_j) \; p(t'_j) \; [\, (q(t_j)+\Omega t_j) \; g(q(t'_j)+\Omega t'_j) - \alpha]$$

$$\times \quad \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{T} d\tau \; [\; p \; \dot{q} - \mathcal{H}_o(p) + j \; q + j^* p \;] \right\} \quad . \tag{V.60}$$

El término n-simo puede ser escrito simbolicamente tomando el desarrollo en serie de Fourier de la función $(q(t_j)+\Omega t_j) \; g(q(t'_j)+\Omega t'_j) - \alpha$

$$\mathcal{Z}_n^{es}[j,j^*] = \frac{1}{n!}\,(-1/2)^n \int_{-\infty}^{T}\cdots\int_{-\infty}^{T} \prod_{j=1}^{n} dt_j\, dt'_j\, \underline{\Lambda}(t_j,t'_j) \sum_{l,l'} A_l\, A_{l'}$$

$$\times\ \exp\{\, i[\ l\,(q(t_j)+\Omega t_j) + l'(q(t'_j)+\Omega t'_j)\ ]\}$$

$$\times\ \left(-\,\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_j)\delta j^*(t'_j)}\right)\ \mathcal{Z}_o^{es}[\,j,j^*] \quad .$$

(V.61)

Los momentos y funciones de correlación se cálculan a traves de la expresión (V.19), siendo en este caso la contribución del n-simo término de la serie

$$\langle\ \exp\{i[\,\mu_{2n+1}\ \underline{\theta}(\underline{T}) + \mu_o\ \underline{\theta}(0)]\}\ \rangle_n^{est} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_i\ (i=1,\dots,2n)\\ \Sigma_{i=0}^{2n+1}\mu_i=0}} A_{\mu_1\dots\mu_{2n}} \int_{-\infty}^{T} dt_{2n}\ \ .\ .\ .\ \int_{-\infty}^{T} dt_1\ \ \exp\{\ i\Omega\sum_{k=0}^{n+1}\mu_k t_k\ \}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \underline{\Lambda}(t_j,t'_j)\ \left(-\,\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_j)\delta j^*(t'_j)}\right)$$

$$\times\ \mathcal{Z}_o^{es}[\ j,j^*]\ \Big|_{j(\circ)=\Sigma_{i=0}^{n+1}\mu_i\delta(\circ-t_i)\,;\,j^*(\circ)=0}$$

(V.62)

IV.3.C. Determinación de los parámetros de expansión para el caso $g(\theta) = \cos\theta$:

Determinaremos la función de correlación para el proceso $\cos\theta$ en el esquema perturbativo detallado hasta aqui y explicitamente el parámetro de expansión perturbativo.

A orden cero en teoría perturbativa se tiene:

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle_{0}^{est} = e^{i\Omega\underline{T}} \; \mathcal{Z}_{0}^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \quad , \tag{V.63.a}$$

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle_{0}^{est} = 0 \quad , \tag{V.63.b}$$

$$\mathcal{Z}_{0}^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] = \exp\{-(\alpha/2\Gamma^{2})[\,\underline{T}-(1/\Gamma)(1-e^{-\Gamma\underline{T}})]\} \; . \tag{V.63.c}$$

A primer orden y utilizando la metodología de cálculo señalada

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle_1^{est} = e^{i\Omega\underline{T}}\ \mathcal{Z}_1^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] =$$

$$= -1/2\ e^{i\Omega\underline{T}} \int_{-\infty}^{\underline{T}} dt_1 \int_{-\infty}^{\underline{T}} dt_2 \left\{ \left[1/4\ \exp(i\Omega(t_1-t_2))\ \underline{\Lambda}(t_1,t_2) \right.\right.$$

$$(\Theta(\underline{T}-t_1)-\Theta(-t_1)+\Theta(0)-\Theta(t_2-t_1))\ (\Theta(\underline{T}-t_2)-\Theta(-t_2)+\Theta(t_1-t_2)-\Theta(0))$$

$$\left. \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0] + P[t_1,t_2] \right] -$$

$$- \alpha\ \underline{\Lambda}(t_1,t_2)\ (\Theta(\underline{T}-t_1)-\Theta(-t_1))\ (\Theta(\underline{T}-t_2)-\Theta(-t_2))$$

$$\left. \times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \right\},$$

(V.64)

donde $P[t_1,t_2]$ indica un término en el cual se ha realiza la permutación de las variables de integración en el sumando previo. Tomando $\Theta(0)=0$, es decir la prescripción de discretización del pre-punto, llevando la región de integración a $\underline{T} > t_1 > t_2$ y teniendo en cuenta que en el integrando

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0] = \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0]$$

$$\exp\{-(\alpha/2\Gamma^2)[\,3(t_1-t_2)-2\min(0,t_1)+2\min(0,t_2)]\}$$

$$\exp\{-(\alpha/2\Gamma^2)[\,\underline{\Delta}(t_1,t_1)+\underline{\Delta}(t_2,t_2)-2\underline{\Delta}(t_1,t_2)+2(\underline{\Delta}(\underline{T},t_1)-\underline{\Delta}(\underline{T},t_2)-$$

$$-\underline{\Delta}(0,t_1)+\underline{\Delta}(0,t_2))]\}\ .$$

(V.65)

Como la integración de este ultimo factor es no trivial y nos interesa el límite $\Gamma\mapsto-\infty$, desarrollamos el mismo y vemos que Γ^{-3} es un buen candidato para parámetro perturbativo. En estas condiciones reteniendo solo el primer término del desarrollo y luego de efectuar la integración (V.64) tenemos las contribuciones de orden 1 en Γ^{-3} que las separamos segun su descomposición espectral.

a) Orden 1, frecuencia 0. La contribución principal a esta frecuencia es

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))]\, \rangle^{est}_{1,\alpha\Omega} = \Gamma^{-3}\ S^{(0)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})\ \exp\{-(\Gamma+(3\alpha/2\Gamma^{2}))\underline{T}\}$$

$$\times\ \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0]\quad ,$$

(V.66.a)

$$S^{(0)}_{101}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = 1/8\ (i\omega/\gamma+1-\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}(-i\omega/\gamma-1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}\ . \qquad \text{(V.66.b)}$$

b) Orden 1, frecuencia Ω. La primera corrección al orden cero dada por (5.63) es

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))]\, \rangle^{est}_{1,\Omega} =$$

$$= \Gamma^{-3}\ [\, S^{(1)}_{100}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) + \Gamma\underline{T}\ S^{(1)}_{110}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) + e^{-\Gamma\underline{T}}\ S^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})]$$

$$\times\ e^{i\Omega\underline{T}}\ \ \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0]\quad ,$$

(V.67.a)

$$S^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -\{ \alpha/2 + 1/8 \ (i\omega/\gamma+1-\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}(-i\omega/\gamma-1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1} +$$

$$+ \ 1/8 \ (i\omega/\gamma-1-3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}[(-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}-2 \ (-i\omega/\gamma+1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}]\}$$

(V.67.b)

$$S^{(1)}_{11c}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = 1/4 \ [\ 2\alpha - (-i\omega/\gamma+1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}] \ , \qquad \text{(V.67.c)}$$

$$S^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = \alpha/2 \ . \qquad \text{(V.67.d)}$$

c) Orden 1, frecuencia 2Ω. La contribución principal esta dada por

$$\langle \exp[\ i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))]\ \rangle^{est}_{1,2\Omega} = \Gamma^{-3} \ S^{(2)}_{1\alpha 1}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) \ \exp\{(i2\Omega-\Gamma-(3\alpha/2\Gamma^{2}))\underline{T}\}$$

$$\times \ \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \ ,$$

(V.68.a)

$$S^{(2)}_{1\alpha 1}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -1/8 \ (i\omega/\gamma-1-3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1} \ [(-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}-$$

$$-2(i\omega/\gamma-1-3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}] \ .$$

(V.68.b)

El otro término que aparece en la función de correlación del proceso $\cos\theta$ al orden 1 es

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle_1^{est} = e^{i\Omega \underline{T}}\ \mathcal{Z}_1^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0] =$$

$$= -1/2\ e^{i\Omega\underline{T}} \int_{-\infty}^{T} dt_1 \int_{-\infty}^{T} dt_2 \Big[\ 1/4\ \exp(-i\Omega(t_1+t_2))\ \underline{\Lambda}(t_1,t_2)$$

$$(\Theta(\underline{T}-t_1)+\Theta(-t_1)-\Theta(0)-\Theta(t_2-t_1))\ (\Theta(\underline{T}-t_2)+\Theta(-t_2)-\Theta(t_1-t_2)-\Theta(0))$$

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ)-\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0]\ \Big] .$$

(V.69)

Los cálculos se efectuan de la forma usual y las contribuciones espectrales al orden 1 son

d) Orden 1, frecuencia 0. Se agregan a las ya calculadas en a)

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle_{1,c\Omega}^{est} = \Gamma^{-3}\ R_{101}^{(0)}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})\ \exp\{-(\Gamma+(\alpha/2\Gamma^{2}))\underline{T}\}$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0]\quad ,$$

(V.70.a)

$$R_{101}^{(0)}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -1/8\ (-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}(-i\omega/\gamma-1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}\ , \qquad \text{(V.70.b)}$$

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0] = \exp\{-(\alpha/2\Gamma^{2})[\,\underline{T}-(1/\Gamma)(1+e^{-\Gamma\underline{T}})]\}\ . \qquad \text{(V.70.c)}$$

e) Orden 1, frecuencia Ω. Se agregan a las ya calculadas en b)

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{1,\Omega} = \Gamma^{-3}\ R^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})\ e^{i\Omega\underline{T}}$$

$$\times\ \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0]\quad , \qquad \text{(V.71.a)}$$

$$R^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -1/8\ (-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}[\ \ 2(-i\omega/\gamma+\Gamma^{-3})^{-1}-$$

$$-\ (-i\omega/\gamma-1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}]\quad . \qquad \text{(V.71.b)}$$

De lo que resulta de los cálculos a primer orden, la composición espectral viene en 0, Ω y 2Ω. Una cuestion de interés se plantea al querer recuperar resultados para el caso de ruido blanco. Para ello debemos estudiar la estructura de los coeficientes $S^{(n)}_{ijk}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})$ y $R^{(n)}_{ijk}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})$, $n=0,1,2,...$ .De una breve inspeccción vemos que contienen términos de la forma

$$f(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = (in\omega/\gamma+a+b\Gamma^{-3})^{-1}(im\omega/\gamma+c+d\Gamma^{-3})^{-1}\quad , \qquad (5.72)$$

con $n,m \in \mathbb{N}$ y $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Tomando $\Gamma^{-3}= \varepsilon/\gamma$ y $\Omega=\varepsilon/\gamma$, en el limite $\gamma \mapsto +\infty$

$$\Gamma^{-3}f(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } a\neq 0 \text{ y } c\neq 0 \\ a\Omega^{-1}(im+d\Omega^{-1}) & \text{si } a\neq 0 \text{ y } c=0 \end{cases}\quad , \qquad (5.73)$$

entonces la única contribución no nula esta dada por (5.61) en este límite

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{1,\Omega} = \Omega^{-1}\ R^{(0)}(\Omega^{-1})\ e^{(i\Omega-1/4)\underline{T}} , \qquad (V.74.a)$$

$$R^{(0)}(\Omega^{-1}) = -1/4\ (-i2+\Omega^{-1})^{-1} . \qquad (V.74.b)$$

Esta contribución coincide con la que se obtiene partiendo de la Ec.V.1) interpretada en el sentido de Stratonovich, ya que el límite de una EDE con ruido coloreado que satisface un proceso de Ornstein-Ulhenbeck cuando $\gamma \mapsto +\infty$ es una EDE con ruido blanco con la prescripción de discretización del punto medio.

III.3.D. Estructura general de la serie perturbativa:

Como se ha visto hasta aquí el parámetro de expansión es Γ^{-1}. Para determinar la estructura general de la serie perturbativa se hace necesario ver cuales son los términos polinómicos en $\underline{T}$ que aparecen y cual es el orden de los mismos. Si n es el orden perturvativo apareceran 2n integraciones, n funciones $\underline{\Delta}$ y por cada una de ellas un Γ^{-1}, luego hay un factor comun Γ^{-n} al orden n. Para determinar el orden del polinomio en $\underline{T}$ de $\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{n,\Omega}$ consideramos las contribuciones que contienen solo funciones $\underline{\Delta}$ en el integrando de Ec.(V.62) con $\mu_{2n+1} = 1$ y $\mu_0 = -1$. Por cada integración se genera un Γ^{-1} y un término lineal por la integración siguiente. Luego se tiene un factor Γ^{-n} y un polinomio cuyo término de mayor orden es $\underline{T}^n$. Asi

$(\underline{T}/\Gamma^2)^n$ es el factor que aparece en este caso. Para determinar los términos polinómicos que aparecen en las contribuciones de frecuencia $(p+1)\Omega$ al orden n, consideremos que la primera integración en Ec.(V.62) introduce siempre un factor Γ^{-1} y las (2n-1) integraciones siguientes dan el orden del polinomio.

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T}) \pm \underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{(p+1)\Omega,n} = \exp\{\, [\, i(p+1)\Omega - (b^{(p+1)}/\Gamma^{-2})]\, \underline{T}\, \}$$

$$\times \; \exp\{-(\alpha/4\Gamma^2)[\, \underline{T} - (1/\Gamma)(1 - e^{-\Gamma \underline{T}})]\}$$

$$\times \sum_{k=1-\delta_{0p}}^{2n>p} \Gamma^{-(n+k)} \; \underline{T}^{2n-k} \; \sum_j \; S^{(p+1)}_{nkj}(\omega/\gamma, \Gamma^{-3}) \;\; \exp\{-\hat{a}^{(p+1)}_{nkj} \Gamma \underline{T}\} \;, \tag{V.75}$$

donde p=0 solo en el caso de signo - en el exponencial.

V.4. APENDICE A:

Consideremos la función de correlación de un proceso estacionario $\zeta(t)$ dada por

$$\langle \zeta(\tau)\zeta(0) \rangle = r(\tau)\, \cos\omega\tau + s(\tau)\, \mathrm{sen}\,\omega\tau \;, \tag{A.1}$$

para $\tau > 0$ y donde $r(\tau)$ es una función par y $s(\tau)$ es impar.

Introduciendo el concepto de densidad de la potencia espectral [St1][1], o simplemente Densidad Espectral (DE), del proceso $\zeta(\tau)$:

$$\mathcal{S}(k) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ e^{ikt} \langle \zeta(\tau)\zeta(0)\rangle \quad , \tag{A.2}$$

la densidad espectral para (A.1) será

$$\mathcal{S}(k) = \Delta_c(k+\omega) - \Delta_s(k+\omega) + \Delta_c(k-\omega) + \Delta_s(k-\omega) \quad , \tag{A.3}$$

siendo Δ_c y Δ_s, las Transformadas de Fourier Coseno (TFC) y Seno (TRS) de $r(\tau)$ y $s(\tau)$ respectivamente, definidas por

$$\Delta_c(\Omega) = 2 \int_0^{+\infty} dt\ r(t) \cos\Omega t \quad , \tag{A.4.a}$$

$$\Delta_s(\Omega) = 2 \int_0^{+\infty} dt\ s(t) \operatorname{sen}\Omega t \quad . \tag{A.4.b}$$

Es facil concluir que Δ_c es una función par mientras que Δ_s es impar. Si estas funciones son apreciablemente diferentes de cero para $\Omega=0$, mientras son pequeñas para $\Omega=k+\omega$ y frecuencias positivas se tiene que[2]

---

[1] Pag.23, Vol.I.

[2] $\approx$ indica "aproximadamente igual a".

$$\mathscr{F}(k) \approx \Delta_c(k-\omega) + \Delta_s(k-\omega) \quad . \tag{A.5}$$

V.5. Apendice B:

Las funciones de correlación que aparecen en un proceso con ruido blanco son de la forma (A.1) donde $r(\tau)$ y $s(\tau)$ son funciones que se pueden escribir genericamente como

$$1/2\ \tau^{-n}\ e^{-\alpha\tau} \quad , \tag{B.1}$$

para $\tau>0$. Para n=0 las TFC y TFS definidas en Ecs.(A.4) son

$$\Delta_c^o(\Omega) = \frac{\alpha}{\Omega^2 + \alpha^2} \quad , \tag{B.2.a}$$

$$\Delta_s^o(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega^2 + \alpha^2} \quad . \tag{B.2.b}$$

Para n>0 podemos determinar las transformadas a partir de las obtenidas para n=0, a partir de las siguientes relaciones

$$\Delta_c^{2n}(\Omega) = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dk^{2n}} \Delta_c^o(\Omega) \quad , \tag{B.3.a}$$

$$\Delta_c^{2n+1}(\Omega) = (-1)^{n+1} \frac{d^{2n+1}}{dk^{2n+1}} \Delta_s^o(\Omega) \quad , \tag{B.3.b}$$

$$\Delta_s^{2n}(\Omega) = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dk^{2n}} \Delta_s^o(\Omega) \quad , \tag{B.3.c}$$

$$\Delta_s^{2n+1}(\Omega) = (-1)^{n+1} \frac{d^{2n+1}}{dk^{2n+1}} \Delta_c^0(\Omega) \quad , \tag{B.3.d}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Explicitamente para $n=1,2$ se tiene que

$$\Delta_c^1(\Omega) = \frac{1}{\Omega^2 + \alpha^2} - \frac{2\Omega^2}{(\Omega^2+\alpha^2)^2} \quad , \tag{B.4.a}$$

$$\Delta_c^2(\Omega) = 2\alpha \left(\frac{1}{(\Omega^2+\alpha^2)^2} + \frac{4\Omega^2}{(\Omega^2+\alpha^2)^3} \right) \quad , \tag{B.4.b}$$

$$\Delta_s^1(\Omega) = \frac{2\alpha\Omega}{\Omega^2+\alpha^2} \quad , \tag{B.4.c}$$

$$\Delta_s^2(\Omega) = \frac{6\Omega}{\Omega^2+\alpha^2} - \frac{8\Omega^3}{(\Omega^2+\alpha^2)^3} \quad . \tag{B.4.d}$$

En las resonancias ($\Omega=0$) las TFC son $\Delta_c^0(0)=\alpha^{-1}$, $\Delta_c^1(0)=\alpha^{-2}$, $\Delta_c^2(0)=2\alpha^{-3}$, etc., mientras que las TFS dan contribución nula.

V.6. APENDICE C:

Aqui se dan las expresiones para las DE que aparecen en un proceso de ruido de color. Se determina el comportamiento asintótico, asi como el valor que toma en las resonancias.

Las funciones de correlación que aparecen en un proceso con ruido coloreado son de la forma (A.1) donde $r(\tau)$ y $s(\tau)$ son funciones que se pueden escribir genericamente como

$$\frac{1}{2}\ \exp\{\ -\nu[\ \tau\ -1\ +\ e^{-\tau}\ ]\ \}\quad , \tag{C.1}$$

para $\tau > 0$. Estudiemos las transformadas de Fourier coseno (TFC) y seno (TFS), ya que estas determinan las funciones de correlación. Pueden ser determinadas a partir de

$$\begin{pmatrix} \Delta_c(\Omega) \\ \Delta_s(\Omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} d\tau\ \ \exp\{\ -\nu[\ \tau\ -1\ +\ e^{-\tau}\ ]\ \}\ \exp\{-i\Omega\tau\}\quad . \tag{C.2}$$

Realizando el cambio de variables $z=e^{-\tau}$:

$$\begin{pmatrix} \Delta_c(\Omega) \\ \Delta_s(\Omega) \end{pmatrix} = e^{\nu} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \int_0^1 dz\ \ e^{-\nu z}\ z^{\nu+i\Omega-1}\quad . \tag{C.3}$$

Esta función puede ser expresada en términos de la función gamma incompleta [Ab1][3]:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t}\ t^{a-1}\ dt\quad , \tag{C.4}$$

luego de hacer la sustitución $\nu z=t$

---

[3] Form.(6.5.1), Pag. 260.

$$\begin{pmatrix}\Delta_c(\Omega)\\ \Delta_s(\Omega)\end{pmatrix} = e^{\nu} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\nu^{-\nu-ik} \gamma(\nu+i\Omega,\nu) \right] . \qquad (C.5)$$

Sin embargo esta expresión analítica no es de utilidad a fin de calculos prácticos. Desarrollando el exponencial $\exp\{-\nu\ e^{-\tau}\}$ por su expanción en serie, la Ec.(C.2) es simplemente

$$\begin{pmatrix}\Delta_c(\Omega)\\ \Delta_s(\Omega)\end{pmatrix} = e^{\nu} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left(\frac{1}{n+\nu+i\Omega}\right) , \qquad (C.6)$$

o luego de tomar la parte *Re* se tiene para la TFC:

$$\Delta_c(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{n+\nu}{(n+\nu)^2 + \Omega^2}\right] . \qquad (C.7)$$

Mientras que tomando la parte imaginaria, la TFS es

$$\Delta_s(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{\Omega}{(n+\nu)^2 + \Omega^2}\right] . \qquad (C.8)$$

Es de interés describir el comportamiento asintótico de ambas transformadas, para $\Omega \gg 1$ es posible desarrollar la serie alternada dada para la TFC de la siguiente forma

$$\Delta_c(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{2\nu(\nu+n+1)}{((n+\nu)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)} \right] =$$

$$= e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{\nu}{((n+\nu)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)} + \right. \tag{C.9}$$

$$\left. + \frac{8\nu^2(\nu+n+1)}{((n+\nu)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)} \right]$$

Para $\nu \ll 1$ se tiene que

$$\Delta_c(\Omega) \approx \frac{\nu}{(\Omega^2+\nu^2)(\Omega^2+(\nu+1)^2)} + \vartheta(\nu^2,\Omega^{-4}) \quad . \tag{C.10}$$

Luego la TFC de (C.1) para $\nu \ll 1$ tiene comportamiento asintótico, para $\Omega \gg 1$, dado por

$$\Delta_c(\Omega) \approx \nu\, \Omega^{-4} + \vartheta(\nu^2,\Omega^{-4}) \quad . \tag{C.11}$$

En particular la contribución en la resonancia estara dada por

$$\Delta_c(0) \approx \nu^{-1} + \vartheta(1) \quad . \tag{C.12}$$

La expresión para la TFC es una suma alternada de Lorentzianas que tiene comportamiento asintótico Ω^{-4}, sin embargo la contribución en $\Omega=0$ esta dada por el primer término de la serie. Para la TFS la contribución asintótica dominante es Ω^{-2}, y en la resonancia la contribución es nula.

Es de interés conocer las Transormadas de Fourier de la función de correlación mas general dada por

$$\frac{1}{2}\ \tau^{n} \quad \exp\{ -\nu[\tau -1 + e^{-\tau}] \} \exp\{-\beta\tau\} \quad . \tag{C.13}$$

La TFC y TFS para n=0 estan dadas por Ecs.(C.7) y (C.8). Las transformadas para n>0 estaran dadas a partir de estas dos, las TFC serán explicitamente para n=1,2 se tiene

$$\Delta_c^1(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{1}{(n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2} - \frac{2\Omega^2}{((n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2)^2} \right] \tag{C.14.a}$$

$$\Delta_c^2(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0} \frac{(-\nu)^n}{n!} 2 \left[\frac{1}{((n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2)^2} + \frac{4\Omega^2}{((n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2)^3} \right] (\nu+\beta+n) \tag{C.14.b}$$

En la siguiente tabla se da la contribución resonante de la TFC, para $\nu \ll 1$, $\beta \geq 0$ y n=0,1,2

	$\beta=0$	$\beta>0$
$\Delta^{0}_{c}(0)\approx$	$\nu^{-1}+\ \vartheta(1)$	$(\nu+\beta)^{-1}+\ \vartheta(\nu)$
$\Delta^{1}_{c}(0)\approx$	$\nu^{-2}+\ \vartheta(\nu^{-1})$	$(\nu+\beta)^{-2}+\ \vartheta(\nu)$
$\Delta^{2}_{c}(0)\approx$	$2\nu^{-3}+\ \vartheta(\nu^{-2})$	$2(\nu+\beta)^{-3}+\ \vartheta(\nu)$

(C.15)

Para n=1,2 las TFS estaran dadas por

$$\Delta^{1}_{c}(\Omega)\ =\ e^{\nu}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\nu)^{n}}{n!}\ \frac{2\Omega(\nu+\beta+n)}{((n+\nu+\beta)^{2}+\ \Omega^{2})^{2}}\quad, \tag{C.16.a}$$

$$\Delta^{2}_{c}(\Omega)\ =\ e^{\nu}\sum_{n=0}\frac{(-\nu)^{n}}{n!}\left[\frac{6\Omega}{((n+\nu+\beta)^{2}+\ \Omega^{2})^{2}}\ -\ \frac{8\Omega^{3}}{((n+\nu+\beta)^{2}+\ \Omega^{2})^{3}}\right]\ . \tag{C.16.b}$$

La contribución de la TFS en la resonancia será nula para todo $n\in\mathbb{N}$.

Capítulo VI

Osciladores Autoexitados con Ruido que presentan una Bifurcación de Hopf

C A P I T U L O VI

VI.1. OSCILADORES AUTOEXITADOS QUE PRESENTAN UNA BIFURCACION DE HOPF:

Las oscilaciones autoexitadas, presentes en varios fenómenos físicos, pueden ser modeladas por ecuaciones de formas muy diversas que describen su comportamiento. Aquí nos ocuparemos de osciladores descriptos por una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo y que presenten una bifurcación de Hopf para algun parámetro crítico en el espacio de las fases; consideremos aquellos que son generadores de onda sinusoidal, es decir aquellos cuya salida es aproximadamente de esta clase. Pueden ser representados por

$$\ddot{x} = f_{(\lambda)}(x,\dot{x};t) \quad , \qquad \text{(VI.1)}$$

donde x(t) es la variable dinámica, por ejemplo voltaje o corriente en un dado circuito. Por cada punto encima de las variables se indica una derivada temporal. $f_{(\lambda)}$ es alguna función determinada por la naturaleza especifica del oscilador a describir y el subíndice (λ) indica el o los parámetros que caracterizan la bifurcación y que dependera de las constantes físicas del sistema bajo estudio.

Una caracterización de la forma de obtener salidas cuasi-sinusoidales ha sido analizada por Stratonovich [St63][1], así como los apartamientos del caso senoidal puro.

Si la señal generada por un oscilador $x(t)$ es puramente senoidal, y ω_o es su frecuencia, se satisface la Ec.(VI.1) con

$$f_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) = -\omega_o^2\, x \quad , \tag{VI.2}$$

en cambio si no lo es, pero las desviaciones son pequeñas, introduciendo un pequeño parámetro ε es posible escribir

$$f_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) = -\omega_o^2\, x + \varepsilon\, F_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) \quad . \tag{VI.3}$$

La Ec.(VI.1) con (VI.3) permiten describir oscilaciones cuando excitaciones externas e internas son aplicadas al sistema oscilante. En este caso $F_{\langle\lambda\rangle}$ depende explícitamente del tiempo t. Oscilaciones externas son usadas para sincronizar la frecuencia del oscilador; este es el caso de excitaciones regulares. Pueden existir excitaciones irregulares, debido a la inestabilidad de los parámetros del sistema, descargas de ruido interno y térmico, así como ruido externo. En todos los casos, las excitaciones irregulares dependientes del tiempo deben ser descriptas estadísticamente. Luego la señal generada por el oscilador a la salida del dispositivo es una función aleatoria del tiempo. En algunos casos no es conveniente despreciar las fluctuaciones, ya

---

[1] Pag.222, Cap.IX ,Vol.2.

que las mismas permiten obtener oscilaciones resonantes.

Si el sistema oscilante presenta inestabilidades en el espacio de las fases $(x,\dot{x})$ tal como una bifurcación de Hopf, y su funcionamiento esta en el régimen de ciclo límite, es de esperar que el ruido incorpore nuevos elementos que deben ser considerados, como se ha visto a lo largo de este trabajo. En una situación real la potencia espectral o espectro es de interés y la misma contiene contribuciones de origen determinista o bien estocástico. Es necesario discriminar unas de otras, para ello un análisis teórico puede ser de utilidad.

A fin de caracterizar a este tipo de osciladores es necesario dar una forma funcional explicita para $F_{\langle\lambda\rangle}$. Si es una función polinómica de x y $\dot{x}$, es posible separar el término lineal en $\dot{x}$

$$F_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) = \omega\ \dot{x} + N_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) \quad , \qquad \text{(VI.4)}$$

donde $N_{\langle\lambda\rangle}$ es un polinomio de grado mayor o igual a 2 y la constante ω con unidades de frecuencia ω_o se introduce para mantener las dimensiones correctas si elegimos a ε como parámetro adimensional. Luego se tiene que el sistema a describir puede ser modelado por ecuaciones diferenciales de primer orden en (x) e (y) de la forma:

$$\dot{u} = L_{\langle\lambda\rangle} u + N_{\langle\lambda\rangle}(u) \quad . \qquad \text{(VI.5)}$$

En la base canónica (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$, tenemos que $u=xe_1+ye_2$. Las partes lineal y no lineal estan dadas por

11

$$L_{\langle\lambda\rangle} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_o^2 \\ -1 & \varepsilon\omega \end{bmatrix} \quad , \tag{VI.6.a}$$

$$N_{\langle\lambda\rangle}(u) = \varepsilon\ \omega_o^{-2}\ N_{\langle\lambda\rangle}(x,\omega_o^2 y;t) \quad , \tag{VI.6.b}$$

El sistema descripto presenta una inestabilidad, es decir en un punto λ^c del espacio de parámetros L tiene dos autovalores con parte real nula llamados modos críticos, y en una vecindad del parámetro crítico el estado estacionario **u** deja de ser estable. Tomando $\varepsilon>0$, L tiene autovalores $\mu\pm i\Omega$, con $\mu=\varepsilon\omega/2$ y $\Omega=(\omega_o^2-\mu^2)^{1/2}$ para $|\omega_o|>|\mu|$. para $\mu<0$ la solución estacionaria **u=0** es estable y para $\mu>0$ deja de serlo. En este caso $\lambda=\varepsilon\omega/2$, y $\lambda^c=0$.

Aplicando el Teorema de la Variedad Central [Ke67] se puede efectuar un cambio no lineal de variables $(x,y)\rightarrow(A_1,A_2)$, en el punto de bifurcación $\mu=0$, de forma tal que la Ec.(VI.5) se puede transformar a una ecuación diferencial para las variables críticas $A\equiv(A_1,A_2)$ de la forma

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{D}\ \mathbf{A} + \mathbf{F}(\mathbf{A}) \quad , \tag{VI.7}$$

donde **D** es la matriz diagonal con elementos $\pm i\omega_o$. Cuando esta ecuación esta escrita en la forma más sencilla posible se la conoce como Forma Normal de la singularidad o simplemente Forma Normal (FN).

VI.2. FORMA NORMAL DE UN OSCILADOR AUTOEXITADO:

Con el objeto de ilustrar como obtener la Ecuación de la Forma Normal (VI.7) para un oscilador autoexitado, consideremos el caso en el cual las no linealidades de (VI.6) estan dadas por

$$N_{\langle o\rangle}(u) = (cy^2+dy^3)\ e_2 \quad . \qquad \text{(VI.8)}$$

A efectos de encontrar las ecuaciones para las variables criticas $A_i(t)$ (i=1,2) efectuamos el cambio de variables

$$u = A_i\varkappa_i + U^{[2]}\{A\} + U^{[3]}\{A\} + \cdots \quad , \qquad \text{(VI.9)}$$

donde los indices repetidos indican suma y $\{\varkappa_1,\varkappa_2\}$ es la base que diagonaliza a $L_{\langle o\rangle}$

$$L_{\langle o\rangle}\varkappa_j = D_{jk}\varkappa_k \quad , \qquad \text{(VI.10)}$$

en el espacio critico $\mathfrak{H}^c=\mathbb{C}$. Los vectores $U^{[r]}$ del espacio $\mathfrak{H}^c$ son de orden r. La Ec. (VI.7) para los modos criticos escrita orden a orden es

$$\dot{A}_i = D_{ij}A_j + f_i^{[2]}\{A\} + f_i^{[3]}\{A\} + \cdots \quad , \qquad \text{(VI.11)}$$

donde $f_i^{[r]}\{A\}$ es de orden $r\geq2$ en A_1 y A_2. Es posible calcular [CE84, ET87, Ti88, DT89, BC86] orden a orden en potencias de A_1 y A_2 los vectores $U^{[r]}\{A\}$ y los coeficientes $f_i^{[r]}\{A\}$ para el caso general de un sistema que presenta bifurcaciones de Hopf [CE84]. Aquí daremos solo una breve descripsion de como se efectuan los cálculos. Eligiendo una base $\varkappa_1 = -i\omega_0 e_1 + e_2$, $\varkappa_2 = \varkappa_1^*$, evaluamos la Ec.(VI.7) orden a orden, es decir

$$\dot{u}^{[r]} = [\, Lu + N(u)]^{[r]} \quad , \tag{VI.12}$$

que se satisface identicamente a primer orden ya que

$$\dot{u}^{[1]} = L(A_i \varkappa_i) = i\omega_0 A_1 \varkappa_1 - i\omega_0 A_2 \varkappa_2 \quad . \tag{VI.13}$$

A orden r puede escribirse la Ec.(VI.12) explicitamente como

$$\mathscr{L}\mathbf{u}^{[r]} \equiv (\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{u}^{[r]} = \mathbf{I}^{[r]} - f_i^{[r]} \varkappa_i \equiv \mathbf{K}^{[r]} \quad , \tag{VI.14}$$

donde

$$\mathbf{D} \equiv D_{ij} A_j \frac{\partial}{\partial A_i} \quad , \tag{VI.15.a}$$

$$\mathbf{I}^{[r]} = N(u)^{[r]} - \sum_{s=2}^{r-1} (\partial_t A_i)^{[s]} \frac{\partial \mathbf{u}^{[r-s+1]}}{\partial A_i} \quad . \tag{VI.15.b}$$

La Ec.(VI.14) es definida en el espacio producto tensorial $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^c \otimes \mathfrak{H}^*$, donde $\mathfrak{H}^c$ es el espacio de los vectores criticos **u**, $\mathfrak{H}^*$ es el espacio de funciones **f(A)** en la representación de Bargmann [Ba61, Ba62]. En el caso de funciones de varias variables **f(A)**, $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$, se define el producto escalar en $\mathfrak{H}^*$

$$\langle f,g\rangle = \int \bar{f}(A)\ g(A)\ d\mu(A) \quad , \qquad (VI.16)$$

con $A_i = x_i + iy_i$, en el cual la funciones $\{1, \sqrt{n!}A_i^n, n>1\}$ forman una base ortonormal y los operadores $\hat{a}_i^+ f(A)=A_i f(A)$, $\hat{a}_i f(A)=(\partial/\partial A_i)f(A)$ son adjuntos entre si $[\hat{a}_i^+, \hat{a}_j]=\delta_{ij}$. La medida de integración es

$$d\mu(A) = \pi^{-n}\exp(-\sum_{i=1}^n |A_i|^2) \prod_{i=1}^n dx_i dy_i \quad . \qquad (VI.17)$$

El producto escalar en $\mathfrak{H}^c$ queda definido por

$$\langle \varkappa_i, \varkappa_j\rangle = \delta_{ij} \quad . \qquad (VI.18)$$

Entonces **D** actua en $\mathfrak{H}^*$ y **L** actua en $\mathfrak{H}^c$. Luego si $\mathbf{L}^+$ es el adjunto de **L** respecto del producto escalar definido en (VI.18), el espacio $\mathfrak{H}^c$ es invariante frente a **L** y $\mathbf{L}^+$. Es facil ver que el operador $\mathscr{L}\equiv\mathbf{D}-\mathbf{L}$ tiene eutovalores cero, luego es no invertible y $\mathscr{L}\mathbf{u}^{[r]}=\mathbf{K}^{[r]}$ no tendra soluciones para $\mathbf{u}^{[r]}$ a menos que $\mathbf{K}^{[r]}\in \mathcal{R}a(\mathscr{L}) = \mathfrak{H} \perp \mathcal{N}u(\mathscr{L}^+)$[2] (Teorema de la Alternativa de Fredholm). Debemos encontrar una base del $\mathcal{N}u(\mathscr{L}^+)$ e imponer que $\mathbf{K}^{[r]}$ sea ortogonal a cada elemento de la base eligiendo los coeficientes no concidos $f_i^{[r]}$ en una forma minima y luego determinar $\mathbf{u}^{[r]}$, de acuerdo a las condiciones de ortonormalidad de los productos definidos por las expresiones (VI.17) y (VI.18).

---

[2] $\mathcal{R}a(\mathscr{L})$: rango de $\mathscr{L}$; $\mathcal{N}u(\mathscr{L}^+)=\{v\in\mathfrak{H}/\mathscr{L}^+v=0\}$: nucleo del adjunto de $\mathscr{L}^+$; $\mathfrak{H}\perp\mathcal{N}u(\mathscr{L}^+)$: complemento ortogonal de $\mathcal{N}u(\mathscr{L}^+)$ en $\mathfrak{H}$.

A orden 2 tenemos que $I(u)^{[2]} = N^{[2]}\{u^{[1]}\}$, expresando $K^{[2]}\{A\}$ en la base $(\varkappa_1, \varkappa_2)$:

$$K^{[2]}\{A\} = (c/2)\ (A_1+A_2)^2(\varkappa_1+\varkappa_2) - f_i^{[2]}\{A\}\ \varkappa_i \quad . \tag{VI.19}$$

Despues de un breve cálculo se concluye que **0** es vector base para $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$, luego $K^{[2]}\{A\}$ genera la imagen de $\mathcal{L}$ con la elección mínimal para los coeficientes

$$f_i^{[2]}\{A\} = 0 \quad . \tag{VI.20}$$

El vector $U^{[2]}\{A\}$ lo determinamos de forma que satisfaga (VI.14):

$$U^{[2]}\{A\} = (c/i\omega_o)\ (A_1^2/2 - A_2^2/6 - A_1A_2)\ \varkappa_1 - \tag{VI.21}$$

$$- (c/i\omega_o)\ (A_2^2/2 - A_1^2/6 - A_1A_2)\ \varkappa_2 \quad .$$

A orden 3 tenemos que $I(u)^{[3]} = N^{[3]}\{u^{[1]}\}$, luego en la base $(\varkappa_1, \varkappa_2)$:

$$K^{[3]}\{A\} = (d/2)\ (A_1+A_2)^3(\varkappa_1+\varkappa_2) - f_i^{[3]}\{A\}\ \varkappa_i \quad . \tag{VI.22}$$

Una base ortonormal para $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$ en el espacio $\mathfrak{H}$ esta dada por $\{(1/\sqrt{2})A_1^2A_2\varkappa_1, (1/\sqrt{2})A_1A_2^2\varkappa_2\}$. Cada uno de los vectores base debe ser ortonormal a $K^{[3]}\{A\}$, lo cual exige una elección mínima para los $f_i^{[3]}\{A\}$ realizada de acuerdo a los productos escalares definidos:

$$f_i^{[2]}(A) = (3/2)\ d\ A_1^2 A_2 \quad , \qquad f_i^{[2]}(A) = (3/2)\ d\ A_1 A_2^2 \quad . \tag{VI.23}$$

Resolviendo la Ec.(VI.14) utilizando las relaciones (VI.22) y (VI.23) se obtiene:

$$U^{[3]}(A) = (d/4i\omega_o)\ (A_1^3 - A_2^3/2 - 3A_1A_2^2)\ \varkappa_1 - \tag{VI.24}$$

$$- (d/4i\omega_o)\ (A_2^3 - A_1^3/2 - 3A_1^2A_2)\ \varkappa_2 \quad .$$

A orden 4, se sigue el el procedimiento descripto, la elección minimal para los coeficientes es

$$f_i^{[4]}(A) = 0 \quad , \tag{VI.25}$$

y el vector de cambio de variables

$$U^{[4]}(A) = (c/\omega_o^2)[-(2c^2/27i\omega_o)A_1^4+(3d/2)A_1^3A_2+(3d-(4c^2/9i\omega_o))A_1^2A_2^2+$$

$$+ (d/6)A_1A_2^3+(2c^2/45i\omega_o)A_2^4]\ \varkappa_1 +$$

$$+ (c/\omega_o^2)[\ (2c^2/27i\omega_o)A_2^4+(3d/2)A_2^3A_1+(3d+(4c^2/9i\omega_o))A_2^2A_1^2$$

$$+ (d/6)A_2A_1^3-(2c^2/45i\omega_o)A_1^4]\ \varkappa_2 \quad , \tag{VI.26}$$

Damos por finalizado el procedimiento con la elección minimal de los coeficientes

$$f_1^{[5]}(A) = (27d^2/8i\omega_o)A_1^3A_2^2 \quad ,$$

$$f_2^{[5]}(A) = -(27d^2/8i\omega_o)A_1^2A_2^3 \quad . \tag{VI.27}$$

Resulta inmediato que si $A_2=A_1^*$, se tiene que $f_2^{[r]}(A) = f_1^{[r]}(A)^*$ y que $U_2^{[r]}(A) = U_1^{[r]}(A)^*$. Llamando $A_1=z$, $z\in\mathbb{C}$ y expresando en término de la base canónica el cambio de variables (VI.9) es explícitamente al orden 4

$$x(z,z^*) = -i\omega_o(z-z^*) -(c/3)(z^2-6|z|^2+z^{2*}) -$$

$$- (d/8)\ (z^3-6|z|^2(z+z^*)+z^{3*}) +$$

$$+ (4c/135\omega_o^2)\ (c^2(z^4+z^{4*}) - i45d\omega_o|z|^2(z^2-z^{2*})), \tag{VI.28.a}$$

$$y(z,z^*) = (z+z^*) + i(2c/3\omega_o)(z^2-z^{2*}) +$$

$$+ i(3d/8\omega_o)(z^3+2|z|^2(z-z^*)+z^{3*}) +$$

$$+ (c/135\omega_o^3)(i8c^2(2z^4+15|z|^4-2z^{4*})+$$

$$+ 45d\omega_o|z|^2(5z^2+18|z|^2+5z^{2*})) \quad . \tag{VI.28.b}$$

y la Ecuación Diferencial o Forma Normal para los modos críticos (z,z^*) es

$$\dot{z} = i\omega_o z + (3d/2)|z|^2 z + (27d^2/8i\omega_o)|z|^4 z \quad , \tag{VI.29}$$

y su compleja conjugada.

Estamos interesados en conocer la Forma Normal en la vecindad de la singularidad $\lambda^c=0$, para lo cual consideramos perturbaciones constantes $\delta\lambda=\mu$ alrrededor de $\lambda^c=0$. La matriz L que depende del parámetro μ y N que contiene los terminos no lineales pueden ser expandidos en potencias de μ:

$$L_\mu = L_o + \mu\ L^{[1]} + \vartheta(\mu\ ) \quad , \tag{VI.30}$$

$$N_\mu = N_o + \mu\ N^{[1]} + \vartheta(\mu\ ) \quad ,$$

donde L_o y N_o estan definidos por las expresiones dadas en (VI.10) y (VI.8) respectivamente. El cambio no lineal de variables, en lugar de (VI.9) puede ser indicado por

$$u(A) = \sum_{r=1}^{+\infty}\{U^{[r]}(A) + \sum_{j=1}\mu^j\ U^{[j,r]}(A)\} \quad , \tag{VI.31}$$

[j,r] denota orden j en μ y orden r en las variables A_i. Es claro que $U^{[1]}(A) = A_i\varkappa_i$ de acuedo con la Ec.(VI.9). La Ecuación Diferencial para los modos criticos alrrededor de la inestabilidad esta dada por

$$\dot{A}_i = \sum_{r=1}^{+\infty}\{f_i^{[r]}(A) + \sum_{j=1}\mu^j\ f_i^{[j,r]}(A)\} \quad , \tag{VI.32}$$

donde $f_i^{[1]}(A)=D_{ij}A_j$ de acuedo con la Ec.(VI.13).

Los vectores $\mathbf{U}^{[j,r]}(A)$ son evaluados orden a orden de acuerdo a:

$$\dot{u}^{[j,r]} = [\, Lu + N(u)]^{[j,r]} \quad . \qquad \text{(VI.33)}$$

Para el orden r=j=1 puede ser reescrita como

$$\mathcal{L}u^{[1,1]}(A) = - f_i^{[1,1]}(A)\ \varkappa_i \quad , \qquad \text{(VI.34)}$$

con $\mathcal{L}$ definido a traves de la Ec.(VI.14).

Los vectores $\{A_1\varkappa_1, A_2\varkappa_2\}$ son base para $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$, luego cada uno de ellos debe ser ortogonal a $f_i^{[1,1]}(A)$, que elegimos de forma minimal no trivial como

$$f_1^{[1,1]}(A) = A_1 \quad , \qquad f_2^{[1,1]}(A) = A_2 \quad . \qquad \text{(VI.35)}$$

Reemplazando en (VI.33), la Forma Normal en una vecindad de la singularidad μ=0 es

$$\dot{z} = (\mu + i\omega_o)z + (3d/2)|z|^2 z + (27d^2/8i\omega_o)|z|^4 z \quad , \qquad \text{(VI.36)}$$

y su compleja conjugada. Solo se han retenido términos lineales en μ, ya que como se ha visto en la vecindad del punto de bifurcación z es de orden 1 en μ y términos de orden superior solo dan correcciones a la Ec.(VI.36).

Para d<0 el sistema describira oscilaciones de ciclo limite de radio $(2\mu/3|d|)^{1/2}$ y frecuencia ω_o a orden 0 en μ. En esta ecuación retenemos términos de orden 5 en (z,z^*) para introducir correcciones a la frecuencia al orden mas bajo. El cambio no lineal de variables dado por la expresión (VI.28) a orden cero en μ es suficiente para describir la resonancia determinista, aparecen contribuciones espectrales de frecuencia ω, 2ω, 3ω, etc. correspondientes a terminos lineales, cuadráticos, cúbicos, etc. en (z,z^*) respectivamente. Como estamos interesados en las contribuciones mas importantes, el cambio de variables a orden 0 en μ es suficiente.

Las contribuciones espectrales deterministas, pueden ser determinadas a traves de las funciones de correlación del proceso (x,y), siguiendo la metodología empleada en la Secc.(I.4). Omitiremos aqui desarrollos intermedios, pero es suficiente para esto considerar la solución estable determinista alrrededor dada por Ec.(I.38) y calcular las funciones de correlación a través de Ec.(I.37) promediando sobre la condición inicial con Ec.(I.39). Las contribuciones no nulas a la funciones de autocorrelación de (x) e (y) son

$$
\begin{aligned}
\langle x(t)\ x(t')\rangle = 2\ Re\{ & \omega_o\langle z(t)\ z^{*}(t')\rangle + (c/3)^2\langle z^2(t)\ z^{2*}(t')\rangle + \\
& + 4c^2\langle |z(t)|^2\,|z(t')|^2\rangle + (d/8)^2\langle z^3(t)\ z^{3*}(t')\rangle + \\
& + (3d/4)^2\langle |z(t)|^2 z(t)\ \ |z(t')|^2 z^{*}(t')\rangle + \qquad\qquad (VI.37.a) \\
& + (4c^3/135\omega_o^2)^2\langle z^4(t)\ z^{4*}(t')\rangle + \\
& + (4cd/3\omega_o^2)^2\langle |z(t)|^2 z^2(t)\ \ |z(t')|^2 z^{2*}(t')\rangle\} \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle y(t)\ y(t')\rangle = 2\ Re\{ & \langle z(t)\ z^{*}(t')\rangle + (2c/3\omega_o)^2\langle z^2(t)\ z^{2*}(t')\rangle + \\
& + (3d/8\omega_o)^2\langle z^3(t)\ z^{3*}(t')\rangle + \\
& + (3d/8\omega_o)^2\langle |z(t)|^2 z(t)\ \ |z(t')|^2 z^{*}(t')\rangle \qquad\qquad (VI.37.b) \\
& + (16c^3/135\omega_2^3)^2\langle z^4(t)\ z^{4*}(t')\rangle + \\
& + (2c/9\omega_o^3)^2(14c^2+27d\omega_o)^2\langle |z(t)|^4\,|z(t')|^4\rangle\ \} \quad .
\end{aligned}
$$

De aqui se tiene que las contribuciones espectrales principales son de frecuencia ω al orden 1 en μ, 2ω al orden 2, 3ω al orden 3, etc. En ambos casos aparecen contribuciones de frecuencia 0 al espectro que son de orden 2 en la autocorrelación de (x) y de orden 4 en la de (y). La autocorrelación cruzada de (x,y) se calcula en la forma indicada en la Secc.(I.4) del Cap.I.

VI.3. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UN OSCILADOR AUTOEXITADO:

Las fluctuaciones irregulares, debidas a inestabilidades de los parámetros del oscilador, ruido interno o térmico, en todos los casos dependientes del tiempo deben ser consideradas como ruido en las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema oscilante.

Las funciones aleatorias que son introducidas en las ecuaciones originales no conservan su forma en la Ecuación Diferencial de la FN. En la vecindad del punto de bifurcacion, los nuevos términos de ruido son consecuencia del cambio de variables no lineal efectuado. La forma funcional dependerá explicitamente de la que tenga la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) original. Aquí se analiza que el caso de ruido multiplicativo lineal que tiene su origen en la fluctuación de alguno de los parámetros lineales del sistema, y ruido aditivo que describe fluctuaciones internas o del baño térmico o reservorio del sistema oscilante.

La EDE que tendrá en cuenta tales fluctuaciones será:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}_{\langle\lambda\rangle}\mathbf{u} + \mathbf{N}_{\langle\lambda\rangle}(\mathbf{u}) + \mathbf{d}(t) + \mathbf{m}(t)\mathbf{u} \quad , \qquad \text{(VI.38)}$$

donde $\mathbf{d}(t)$ es un vector columna y $\mathbf{m}(t)$ es una matriz, cuyos elementos tienen valor medio nulo y función de correlación no todas nulas siendo ruidos Gaussianos.

Analizaremos aqui ambos efectos por separado, ya que no es nuestro interés estudiar el fenómeno de interferencia.

Separando un término de ruido aditivo $\eta^{1/2}f(t)$ en la ecuación del oscilador (VI.3) se tiene explicitamente que

$$d(t) = \eta^{1/2}f(t)\ e_2 \quad , \tag{VI.39}$$

en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Si el término de frecuencia ω en la Ec.(VI.4) es una función aleatoria del tiempo $\omega(t)$ que fluctua alrrededor de su valor medio, es decir

$$\omega(t) = \omega + \upsilon^{1/2}f(t) \quad , \tag{VI.40}$$

siendo $f(t)$ en las dos últimas ecuaciones ruido Gaussiano con valor medio nulo, y (υ) y (η) miden las intensidades del ruido en ambos casos. Haciendo el escaleado $\upsilon\varepsilon^2=\eta$ en (VI.40) tenemos:

$$m(t) = \eta^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(t) \quad . \tag{VI.41}$$

La FNEBH en la vecindad de la singularidad $\mu=0$ será

$$\dot{z} = (\mu+i\omega_0)z + (3d/2)|z|^2z + (27d^2/8i\omega_0)|z|^4z + \eta^{1/2}G(z,z^*)\ f(t) \ , \tag{VI.42}$$

y su compleja conjugada. $G(z,z^*)$ se determina siguiendo las tecnicas de Formas Normales. Para el caso de ruido aditivo, expresando $d(t) = 1/2\ \eta^{1/2}f(t)\ (x_1+x_2)$ en la base (x_1,x_2) es inmediato que $G(z,z^*) = 1/2$. Para el caso Multiplicativo Lineal

$m(t)u = 1/2\ \eta^{1/2} f(t)\ (z+z^*)\ (\varkappa_1+\varkappa_2)$ al orden cero en μ en la misma base, es inmediato que $\Theta(z,z^*) = 1/2\ (z+z^*)$.

VI.4. RESONANCIAS EN UN OSCILADOR AUTOEXITADO:

Daremos aqui una descripción del fenómeno de aparición de las resonancias o nuevas contribuciones espectrales en un oscilador autoexitado cuyo regimén de funcionamiento sea el de ciclo límite en la vecindad del punto de bifurcación ω=0. No solo es de interés conocer las nuevas contribuciones o resonancias de origen determinista sino las que introduce el ruido estocástico. Se considera aqui el caso de un Oscilador Autoexitado que contiene no linealidades en términos cúbicos solamente, para caracterizar el fenómeno que nos ocupa.

Realizando el cambio no lineal de variables $z = \rho_0 \exp\{u+i\theta\}$, con $\rho_0^2 = 2\mu/3|d| = \varepsilon\omega/3|d|$, la Ec.(VI.42) se vuelve en las variables (u,θ):

$$\dot{\theta} = \omega_0 - (3\mu^2/2\omega_0)\ e^{4u} + \sigma^{1/2} g_1(u,\theta)\ f(t)$$

(VI.43)

$$\dot{u} = \mu(1-e^{2u}) + \sigma^{1/2} g_2(u,\theta)\ f(t)$$

Para ruido aditivo: $g_1(u,\theta) = -e^{-u}\mathrm{sen}\theta$, $g_2(u,\theta) = e^{-u}\cos\theta$, $\sigma^{1/2} = \eta^{1/2}/2\rho_0$; y para multiplicativo: $g_1(u,\theta) = -\mathrm{sen}2\theta$, $g_2(u,\theta) = 1+\cos 2\theta$, $\sigma^{1/2} = \eta^{1/2}/2$.

VI.4.A. Ruido blanco:

La FNEOA dada por Ecs. (VI.42) y (VI.43) esta interpretada en el sentido usual del cálculo o de Stratonovich. A efectos de los los cálculos en Integral Funcional es de interés dar la misma en el sentido de Ito. Se introducen de esta forma términos de arrastre espureo.

De la Forma Normal Estocástica de un Oscilador Autoexitado (FNEOA), interpretada en el sentido de Ito, desarrollada alrrededor de u=0, reteniendo terminos lineales de arraste espureo e independientes en la matriz de difusión, se obtiene la EDE:

$$\dot{\varphi} = - (6\mu^2/\omega_0)\ u + \sigma/2\ h_1(\varphi+\tilde{\Omega}t) + \sigma^{1/2} g_1(\varphi+\tilde{\Omega}t)\ f(t) \quad ,$$

$$\dot{u} = -2\mu\ u + \sigma/2\ h_2(\varphi+\tilde{\Omega}t) + \sigma^{1/2} g_2(\varphi+\tilde{\Omega}t)\ f(t) \quad , \tag{VI.44}$$

siendo $\varphi = \theta+\tilde{\Omega}t$, $\tilde{\Omega} = \Omega -(3\mu^2/2\omega_0)$. Los términos de arrastre espureo para ruido aditivo son: $h_1(\psi) = \text{sen}2\psi$ y $h_2(\psi) = -\cos2\psi$, u para multiplicativo son: $h_1(\psi) = \text{sen}4\psi$ y $h_2(\psi) = -\cos4\psi$. Para ambos casos los términos de difusión son: $g_1(\psi) = -\text{sen}\psi$ y $g_2(\psi) = \cos\psi$. El término de arrastre $-(6\mu^2/\omega_0)u$ puede ser despreciados por ser de orden 2 en μ, a los efectos del analisis que sigue. En la vecindad del punto de bifurcación podemos considerar a la frecuencia dada por Ω, ya que las correcciones son despreciables.

Para el caso de ruido aditivo la ecuación que se obtiene ha sido estudiada en la Sec.III.5. Nos limitaremos aquí a aplicar los resultados alcanzados para el caso c=0 en Ec.(VI.8). Solo contribuciones espectrales de frecuencia Ω y 3Ω se obtienen hasta el orden 3 en el parámetro de expansión perturbativo σ/Ω.

Para la función de autocorrelación de (x) las contribucion de frecuencia Ω mas significativa, es decir al orden 0 en el Coeficiente de Expansión Perturbativo (CEP) σ/Ω y orden 1 en el parámetro μ/Ω que denotamos por [0,1], esta dada por

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle_{\Omega}^{[0,1]} = 2\ \omega_o^2\ Re\ \langle z(\tau)\ z^{*}(0)\rangle_o$$

$$= 2\omega_o^2\rho_o^2\ \cos\Omega\tau\ \exp\{-\sigma/4[\ |T|-(1/4\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))]\}. \qquad \text{(VI.45)}$$

La contribución espectral de frecuencia 3Ω a orden cero en teoría perturbativa, es decir al orden 0 en el CEP y orden 3 en el parámetro μ/Ω, es

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle_{3\Omega}^{[0,3]} = (d/8)^2\ Re\ \langle z(\tau)\ z^{*}(0)\rangle_o$$

$$=(d/8)^2\rho_o^3\ \cos3\Omega\tau\ \ \exp\{-9\sigma/4[\ |T|-(1/4\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))]\}\ . \qquad \text{(VI.46)}$$

La razón entre las densidades espectrales obtenidas a partir de las Ecs.(VI.46) y (VI.45) evaluadas en 3Ω nos da información sobre la región del espacio de parametros donde la resonancia se presenta en forma mas intensa. En la región de parámetros $\mu>\sigma$

$$\mathcal{D}_{3\Omega}(\frac{\mu}{\Omega},\frac{\sigma}{\Omega}) = \frac{\mathcal{S}^{[0,3]}_{3\Omega}(3\Omega)}{\mathcal{S}^{[0,1]}_{3\Omega}(3\Omega)} \tag{VI.47}$$

$$\approx \frac{2}{81}(\frac{\mu}{\omega_c})^2 \; [\; (\frac{\sigma}{\Omega})^{-2} + \mathcal{O}(1) \;]$$

Vemos que la contribución espectral de frecuencia 3Ω es significativa para pequeños valores del CEP y que se vuelve poco importante en la vecindad del punto de bifurcación del sistema si fijamos la intensidad del ruido, pero se satisface que $\mathcal{D}_{3\Omega} > 2\%$. Las Fig.(II.1.a-b) muestran el comportamiento para distintos valores de los parámetros adimensionales σ/Ω y μ/Ω.

En teoría perturbativa queda determinada la otra contribución espectral de frecuencia 3Ω a la función de autocorrelación de $\langle x \rangle$, que viene al orden 2 en el CEP y orden 1 en el parámetro μ/Ω. De la Ec.(III.66) se tiene que

$$\langle x(\tau)\; x(0)\rangle^{[2,1]}_{3\Omega} = 2\; \omega_o^2\; Re\; \langle z^3(\tau)\; z^{3*}(0)\rangle_{2,3\Omega}$$

$$= (\omega_o^2/32)\rho_o\; (\frac{\sigma}{\Omega})^2\; \exp\{-9\sigma/4[\;|T|-(1/4\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))]\} \tag{VI.48}$$

$$\times\; Re\; \{\; e^{i3\Omega T}\; [\; A(\frac{\mu}{\Omega})\; \exp(-2\mu|T|) + B(\frac{\mu}{\Omega})\;]\; \}$$

donde $A(\mu/\Omega)$ y $B(\mu/\Omega)$ estan dados por las Ecs.(III.65.a-b). La razón de densidades espectrales entre está distribución y la dominante de frecuencia Ω, evaluadas en 3Ω, es

$$\mathscr{E}_{3\Omega}\left(\frac{\mu}{\Omega},\frac{\sigma}{\Omega}\right) = \frac{\mathscr{S}^{[2,1]}_{3\Omega}(3\Omega)}{\mathscr{S}^{[0,1]}_{3\Omega}(3\Omega)} \qquad \text{(VI.49)}$$

$$\approx \frac{1}{9}\, Re\ B(\mu/\Omega) + \mathcal{O}(\sigma/\Omega)$$

Las Figs.(II.2.a-b) muestran $\mathscr{E}_{3\Omega}$, para $\mu > \sigma$, es solo función del parámetro μ/Ω. Las contribuciones estocásticas son de poca intensidad frente a las de origén determinista y son negativas, ya que $-0.5 < \mathscr{E}_{3\Omega} < 0$. Luego el ruido tiende a disminuir los efectos de origén determinista, e inclusive desparece toda contribución de frecuencia 3Ω en alguna región del espacio de parámetros. Observemos que para $\mu/\Omega \rightarrow 0$ toda contribución de origen determinista o estocástico se anula.

Sin embargo, en la región de parámetros donde las contribuciones resonantes deterministas son importantes las contribuciones espectrales estocásticas son despreciables y no juegan ningún rol frente a aquellas.

Otra cantidad de interés, que describe estos efectos, es $\mathscr{E}_{3\Omega} = \mathscr{D}_{3\Omega}/\mathscr{E}_{3\Omega}$. Su comportamiento, en función de los parámetros μ/Ω y σ/Ω, se da en las Figs.(II.3.a-b). Es negativa y muestra que en la mayoria de los casos son de origén determinista. Las Figs.(II.4.a-b) nos muestran que $\mathscr{G}_{3\Omega} = \mathscr{D}_{3\Omega} + \mathscr{E}_{3\Omega}$, es decir la contribución neta en 2Ω es poco significativa cuando es negativa e importante cuando es positiva en la región donde se da la resonancia determinista.

Luego, para un oscilador autoexitado con ruido blanco las únicas contribuciones resonantes son las de origen determinista, el ruido solo introduce correcciones poco significativas desde el punto de vista del fenómeno que se investiga.

VI.4.B. Ruido Coloreado:

A partir de la FNEOA (VI.43) y con la finalidad de evaluar las contribuciones espectrales consideremos que es posible despreciar las fluctuaciones transversales al ciclo límite, es decir alrrededor de u=0. El cambio no lineal de variables se reduce a $z(t)=\sqrt{\mu}\ \exp[i(\varphi(t)+\tilde{\Omega}t)]$. En el caso que el ruido de color sea aditivo la dinámica queda descripta por

$$\dot{\varphi} = \sigma^{1/2} g_1(\varphi+\tilde{\Omega}t)\ f(t) \quad , \qquad \text{(VI.50)}$$

con $g_1(\psi)=-\mathrm{sen}\psi$, $\sigma^{1/2}=\eta^{1/2}/2\rho_0$.
La función de autocorrelación del proceso (x) al orden 0en el CEP (σ/γ) será

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle_{\tilde{\Omega}}^{[0]} = 2\ \omega_0^2\ \mathrm{Re}\langle z(\tau)\ z^*(0)\rangle_{1,\tilde{\Omega}} =$$

$$= 2\ \omega_0^2\ \mu\ \cos\tilde{\Omega}\tau\ \exp(-\alpha\sigma/2\ [\,|\tau|-(1/\gamma)(1-e^{-\gamma|\tau|})])$$

(VI.51)

La contribución espectral estocástica principal de frecuencia $2\tilde{\Omega}$ viene dada en la función de correlación al orden 1 en el CEP por

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle^{[1]}_{2\tilde{\Omega}} = 2\ \omega_o^2\ \mathrm{Re}\langle z(\tau)\ z^*(0)\rangle_{1,2\tilde{\Omega}} =$$

$$= 2\ \omega_o^2\ \mu\ (\sigma/8\gamma)\ \exp(-(2\alpha\sigma+\gamma)|\tau|+(\sigma\alpha/2\gamma)(1-e^{-\gamma|\tau|}))$$

$$\times\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}\ \{\ [(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1]\ \cos 2\tilde{\Omega}\tau\ -\ (2\tilde{\Omega}/\gamma)\ \mathrm{sen} 2\tilde{\Omega}\tau\ \}$$

(VI.52)

El parámetro α, que fue dejado libre en la teoría, se fija por la relación $\alpha = 1/2\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-1}$ para asegurar la convergencia de la serie perturbativa.

Para $\sigma/\gamma \ll 1$, la Ec.(VI.52) es simplemente

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle^{[1]}_{2\tilde{\Omega}} = \omega_o^2\ \mu\ (\sigma/4\gamma)\ \exp[-\gamma|\tau|]$$

$$\times\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}\ \{\ [(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1]\ \cos 2\tilde{\Omega}\tau\ -\ (2\tilde{\Omega}/\gamma)\ \mathrm{sen} 2\tilde{\Omega}\tau\ \}$$

(VI.53)

La contribución al espectro de frecuencia $\tilde{\Omega}$, que se deriva de Ec.(VI.51) a través de las relaciones dadas en el Apéndice C del Cap.V, muestra que el comportamiento asintótico del espectro es $\mathcal{S}(k) \propto k^{-4}$ mientras que la contribución a la frecuencia $2\tilde{\Omega}$, evaluada a partir de Ec.(VI.52) con las relaciones del Apendice B del Cap.V, es $\mathcal{S}(k) \propto k^{-2}$. Luego, es posible comparar la contribución de la cola de la contribución de frecuencia $\tilde{\Omega}$ con la resonancia en $2\tilde{\Omega}$.

La densidad de potencia espectral o espectro para la contribución resonante en $2\tilde{\Omega}$, en la aproximación $\sigma/\gamma \ll 1$, es

$$\mathcal{E}_{2\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega}) = 1/2\ \omega_o(\sigma/\gamma)\ (\mu/\gamma)\ [(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1]\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}$$

(VI.54)

Se concluye que es una contribución positiva para $\tilde{\Omega}/\gamma > 1$, es decir cuando el tiempo de correlación del ruido es mayor que el período de oscilación de ciclo límite. Si es igual la contribución es nula y si es menor la contribución es poco significativa. Las simulaciones numéricas como se verá corroboran estos resultados.

La contribución espectral principal de frecuencia $\tilde{\Omega}$, evaluada en $2\tilde{\Omega}$, para $\tilde{\Omega}/\gamma > 1$ es

$$\mathcal{D}_{\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega}) = 1/2\ \omega_o(\sigma/\gamma)\ (\mu/\gamma)\ (\tilde{\Omega}/\gamma)^{-2}[1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}$$

(VI.55)

La intensidad relativa de la contribución resonante con respecto a la cola de la contribución de frecuencia dominante es

$$\frac{\mathcal{E}_{2\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega})}{\mathcal{D}_{\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega})} = (\tilde{\Omega}/\gamma)^{-2}[(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1] \quad . \tag{VI.56}$$

Esto indica que, si el tiempo de correlación del ruido es mucho mayor que el período de oscilación de ciclo límite se tiene una contribución al espectro significativa. Es por esto que nos referimos a este fenómeno como de resonancia estocástica. Estos resultados están cualitativamente de acuerdo con las experiencias numéricas.

En las Figs.(III-X) se muestran algunos resultados de las experiencias numéricas. Se dan los gráficos del espectro de las funciones de correlación (z,z^*) en función de la frecuencia para una bifurcación de Hopf en presencia de ruido blanco y coloreado. También se muestran los graficos para las funciones de correlación de los modelos considerados en este trabajo que tienen la finalidad de ilustrar el fenómeno estudiado. Se hallan comentados en el pie de página de cada una de ellos.

Conclusiones

CONCLUSIONES:

Se investigan, en este trabajo de Tesis, cuales son los efectos del ruido en sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf en el regimén de ciclo límite y en la vecindad del punto de bifurcación. Se investigan tambien modelos sencillos de procesos estocásticos definidos en un anillo.

Se determina el espectro o densidad de potencia espectral de tales sistemas en presencia de ruido blanco y ruido de color.

Los sistemas dinámicos estudiados son procesos estocásticos definidos en espacios compactos. Para su investigación es suficiente utilizar una formulación perturbativa a partir de las representaciones por integral funcional. De esta forma es posible calcular densidades de probabilidad de transición, funciones de correlacion y momentos para procesos estocásticos definidos en un anillo. La extensión al toro resulta inmediata y puede ser de utilidad en el estudio de osciladores acoplados autoexitados con ruido o cualquier sistema dinámico que presente multiples bifurcaciones de Hopf. La generalización a otras variedades compactas que puedan ser expresadas como el cociente de espacios abiertos por algun grupo de tranformaciones, es un punto abierto a futuras investigaciones. La comprensión de estos problemas no es solo de interés en la investigación de los Procesos Estocásticos sino tambien en Mecánica Cuántica.

Se presenta el formalismo que permite obtener las representaciones por integral funcional para el caso que el proceso estocástico este definido en un anillo. En el caso de sistemas que presentan una bifurcación de Hopf la dinámica puede ser descripta en un espacio semiabierto, el cilindro, para el cual se pueden aplicar las técnicas de integral funcional desarrolladas.

El esquema perturbativo queda establecido a partir de definir una funcional generatriz de funciones periódicas. Está es coincidente con la dada para la recta, pero la prescripción para efectuar los cálculos de promedios de las variables estocásticas es diferente.

Para realizar cálculos perturbativos en el regimén estacionario ha sido necesario establecer una funcional generatriz libre o no oscilatoria, que contiene términos no oscilantes. Un aspecto de interés, lo constituye la condición sobre la fuente de la variable dinámica que esta definida en la funcional generatriz, que permite caracterizar el regimén estacionario e independizarnos de las condiciones iniciales. La condición de regimén estacionario, es decir que la integral - sobre el lapso en el cual esta definido el proceso - de la fuente sea nula, implica una única elección para la misma, esto es, que sea combinación lineal de distribuciones delta de Dirac con coeficientes enteros tal que la suma sea nula. Esta condición es el punto de partida para efectuar los cálculos perturbativos que combinan esta prescripción con la de las técnicas usuales en integral funcional. En un espacio abierto, como la recta real, no es necesaria tal condición.

Se determinan las contribuciones espectrales para procesos estocásticos con ruido blanco. En este caso no es posible referirnos a las mismas como resonancias, como se muestra en el Cap.VI para un oscilador autoexitado con ruido las contribuciones espectrales estocásticas son despreciables frente a las deterministas en la región del espacio de parámetros donde estas se vuelven importantes. Las contribuciones espectrales deterministas y estocásticas entran en competición en una región del espacio de parámetros que carece de interés ya que las contribuciones son de pequeña intensidad. Luego en un sistema dinámico con ruido blanco que presenta bifurcaciones de Hopf, las únicas contribuciones espectrales resonantes son las de origén determinista.

Se demuestra que para sistemas dinámicos con bifurcaciones de Hopf que contengan fluctuaciones con tiempo de correlación no nulo, tal como el caso de ruido coloreado que satisface un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, el espectro contendrá contribuciones espectrales relevantes a las cuales nos referimos como resonantes. En el caso de que el ruido sea aditivo (multiplicativo) la contribución perturbativa al espectro es de frecuencia igual al doble (triple) de la fundamental o de oscilación de ciclo límite. La dinámica de los sistemas estudiados queda esencialmente descripta por las variables lentas o críticas, en el caso que el tiempo de correlación del ruido sea mucho mayor que el tiempo de relajación de las variables rápidas o no críticas y siempre es posible realizar una eliminación adiabática de estas últimas [Le85]. Luego es posible describir el sistema unicamente por la ecuación de la forma normal estocástica para los modos críticos con ruido de color.

La resonancia estocástica se verificará solo en el caso que el tiempo de correlación de los ruidos sea mucho mayor que el período de oscilación de los modos críticos. El fenómeno se acentúa cuando más coloreado se vuelve el ruido. El sistema responde ante el ruido de color como si estuviera excitado por un forzado periódico de amplitud constante y frecuencia próxima a la de oscilación de ciclo límite. Este último caso ha sido investigado recientemente [FH83, MW89, GM89] y se lo reporta como resonancia estocástica. Sin embargo, el origén del fenómeno es diferente, fluctuaciones irregulares o ruido de color en nuestro caso y regulares en los trabajos citados.

Experiencias numéricas permiten corroborar los resultados teóricos alcanzados, tanto para el caso de ruido blanco como de color. Estas permiten ir mucho más alla de la teoría, que como se ha señalado es a partir de técnicas perturbativas.

El fenómeno de resonancia estocástica para los sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf es una consecuencia directa del hecho que la forma normal estocástica contiene términos resonantes que no pueden ser eliminados en un cambio no lineal de variables. En otras palabras, es una consecuencia de la ruptura de la simetría que introduce el ruido y que se manifiesta en la no invariancia de la forma normal estocástica frente a transformaciones de fase.

Los sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf han concitado la atención de los investigadores en esta década. Osciladores autoexitados y el fenómeno de variabilidad climática presentan estas características. Recientemente [Co90], el estudio del fenómeno de oscilación de algunas estrellas pulsantes, ha despertado interés en la Astrofísica. La inclusión del ruido en el modelado debe ser tenida en cuenta y evaluar los efectos a los que da lugar es de gran importancia para dar una descripción completa del fenómeno.