C A P I T U L O III

III.1. INTRODUCCION:

Se presenta el esquema perturbativo en Integral Funcional para determinar funciones de correlación o momentos en el régimen estacionario. Para ello, se introduce un modelo no perturbativo, el proceso de Wiener en el anillo a fin de establecer los principios sobre el cual se asienta el calculo perturbativo. El mismo es considerado, a continuación, para un modelo simplificado que muestra como se determinan las nuevas contribuciones espectrales.

El eje central de este Cápitulo es determinar las contribuciones espectrales de sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf. Para ello, el punto de pártida es considerar la forma normal estocástica de una bifurcación de Hopf, la cual es presentada en el sentido de Ito, dado que la misma facilita el tratamiento en integral funcional. Se consideraran los casos de ruido blanco aditivo y multiplicativo lineal.

III.2. PROCESO DE WIENER EN S^1. DESCRIPCION A PARTIR DEL FORMALISMO EN INTEGRAL FUNCIONAL:

Consideremos la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) que caracteriza al Proceso de Wiener en S^1:

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2} f(t) \qquad \text{(mod } 2\pi) \quad , \tag{III.1}$$

$$\theta_o = \theta(t_o)$$

donde $f(t)$ es ruido blanco Gaussiano delta correlacionado y ε su intensidad de ruido.

Estamos interesados en el cálculos de funciones de autocorrelación de un proceso $h(\theta(t))$, siendo $h(\theta)$ 2π periódica. Es entonces posible definir a partir de (II.59) la siguiente Funcional Generatriz (FG) de promedios estocásticos de funciones 2π periódicas:

$$\mathcal{Z}_o[j,j^*] = \int \mathcal{D}q\ \mathcal{D}q \quad \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau [\, pq - \mathcal{H}_o(p) + jq + j^* p] \right\} \delta(q(t_o) - \theta_o) \tag{III.2.a}$$

$$H_o(p) = -i/2\ \varepsilon\ p^2 \quad . \tag{III.2.b}$$

El subíndice 0 indica que estamos en presencia de una teoría libre, es decir H_o no contiene funciones periódicas. La FG dada en (III.2) la conoceremos de aquí en más como Funcional Generatriz "libre" (FGL) o no oscilatoria, la misma es Gaussiana y en consecuencia su integración es inmediata:

$$\mathcal{Z}_o[j,j^*] = \quad \exp\left\{ i\theta \int_{t_o}^{T} d\tau \ j(\tau) \right\}$$

$$\times \exp\left\{ -1/2 \int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau \ d\tau' [\, 2i \ j(\tau) S(\tau,\tau') j^*(\tau') + j(\tau) R(\tau,\tau') j(\tau')] \right\} \tag{III.3}$$

siendo las funciones de Green

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad , \qquad \text{(III.4.a)}$$

$$R(\tau,\tau') = \varepsilon\,(\min(\tau,\tau')-t_o) \quad . \qquad \text{(III.4.b)}$$

Notemos que $\mathcal{Z}_o[j,j^*]\longrightarrow 0$ cuando $t_o\longrightarrow -\infty$, a menos que se satisfaga

$$\int_{t_o}^{T} d\tau \;\; j(\tau) = 0 \quad , \qquad \text{(III.5)}$$

en cuyo caso es posible definir una Funcional Generatriz Libre Estacionaria (FGLE):

$$\mathcal{Z}_o^{es}[j,j^*] =$$

$$= \exp\left\{-1/2 \int_{-\infty}^{T}\int_{-\infty}^{T} d\tau \;\, d\tau' [\, 2i \;\; j(\tau)S(\tau,\tau')j^*(\tau') \; + \; j(\tau)D(\tau,\tau')j(\tau')] \right\}$$

(III.6)

donde la función de Green estacionaria es

$$D(\tau,\tau') = \varepsilon \; \min(\tau,\tau') \quad . \qquad \text{(III.7)}$$

De acuerdo a la condición (III.5) o estacionaria sobre la fuente j, la misma debe ser evaluada como

$$j(\circ) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i \;\, \delta(\circ - t_i) \quad , \qquad \text{(III.8.a)}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i = 0 \quad , \tag{III.8.b}$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$. En consecuencia solo es posible cálcular promedios estocásticos de la forma $\exp\{in[\,\theta(t)-\theta(t')]\}$ a efectos del cálculo de funciones de correlación del proceso $h(\theta(t))$. Explicitamente:

$$\begin{aligned} \langle \exp\{in[\,\theta(t)-\theta(t')]\}\rangle^{est} &= \exp\{in\omega(t-t')\}\ \mathcal{Z}_0^{es}[\,n(\delta(\circ-t)-\delta(\circ-t'));\nu] \\ &= \exp\{in\omega(t-t')-\varepsilon n^2|t-t'|\} \quad . \end{aligned} \tag{III.9}$$

Como se ve esta cantidad es estacionaria, es decir depende solo de la diferencia $T=t-t'$. La función de autocorrelación de $h(\theta)$ es

$$K(T) = \langle h(\theta(t)\ h(\theta(t'))\rangle^{est} = \sum_{\mathbb{Z}} |h_n|\ \langle \exp\{in[\,\theta(t)-\theta(t')]\}\rangle^{est} \quad . \tag{III.10}$$

Teniendo en cuenta que el valor medio de $h(\theta(t))$ es h_o, la variancia del proceso $h(\theta(t))$ esta dada por (III.10) pero n=0 excluido en la suma.

Para un proceso de Wiener con $\omega=0$, la variancia es simplemente

$$\sigma(T) = \sum_{n\geq 0} (2/n^2)\ \exp\{-\varepsilon n^2|T|/2\} \quad . \tag{III.11}$$

La función de autocorrelación de un proceso de Wiener definido en $\mathbb{R}$, es simplemente dada por $R(t,t')$ que es no estacionaria, mientras que si el proceso esta definido en S^1 es simplemente $K(T)=\varkappa+\sigma(T)$ el cual es estacionario. Dos cantidades de interés caracterizan a un proceso estacionario, tales como el tiempo de correlación τ_c y el coeficiente de intensidad $\varkappa$ del proceso $\theta(t)$. Asi:

$$\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ \sigma(\tau) = \frac{8}{\varepsilon} \zeta(4) \quad , \tag{III.12}$$

nos da una idea de la intensidad de las fluctuaciones, mientras que

$$\tau = \frac{2}{\varkappa} \int_{0}^{\infty} d\tau \ \tau \ \sigma(\tau) = \frac{2}{\varepsilon} \frac{\zeta(6)}{\zeta(4)} \quad , \tag{III.13}$$

nos da idea del lapso sobre el cual la correlación se extiende entre valores del proceso $\theta(t)$. ζ es la función Zeta de Riemann [Ab1][1] definida por $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$, $s\in\mathbb{N}$. Se podran despreciar correlaciónes cuyo tiempo de separación T sea mucho mayor que τ_c, de (III.13) se tiene que para bajas intensidades de ruido todas las correlaciones se vuelven importantes, ya que el sistema se relaja lentamente.

Para determinar la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT) se pueden utilizar los resultados conocidos para el proceso de Wiener en la recta

---

[1] Form.23.2.1.(Pag.807)

$\zeta(4)=\pi^2/90=1.0823$ y $\zeta(6)=1.0173$ (Pag.811)

$$\mathcal{P}_W(x,t\,|\,x_o,t_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,|\tau|}}\exp\left\{-\frac{(x-x_o)^2}{2\varepsilon\,|\tau|}\right\} , \tag{III.14}$$

donde $x\in\mathbb{R}$ y $\tau=t-t_o$.

De las Ecs. (II.54) y (II.56) se tiene

$$\mathcal{P}(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,|\tau|}}\sum_{\mathbb{Z}}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_o+2n\pi)^2}{2\varepsilon\,|\tau|}\right\} . \tag{III.15}$$

Estos resultados pueden ser alcanzados alternativamente a partir de la Ecuación de Fokker-Planck (EFP), con condiciones de contorno periódica para la DPT dada por Ec.(II.7) y condición inicial dada por Ec.(II.6). Una técnica a utilizar es separación de variables que ha sido profusamente utilizada en la bibliografía [Ri84, Ga83]. La condición de normalización para la DPT debe ser definida en $\mathbb{S}^1$, luego la corriente de probabilidad debe ser periódica. En un proceso de Wiener lineal la DPT y la corriente de probabilidad se anulan en $\pm\infty$, pero en el anillo $\mathbb{S}^1$ los extremos del intervalo se identifican mutuamente, en consecuencia se tiene una condición de continuidad en todos los puntos de este. Las soluciones estacionarias de la EFP han sido tratadas por Gardiner [Ga83] para contornos reflejantes y absorventes, y como ejemplos trata procesos de Wiener. En particular Risken [Ri84] ha tratado el caso de movimiento Browniano en potenciales periódicos.

III.3. CONTRIBUCIONES ESPECTRALES EN UN PROCESO ESTOCASTICO UNIDIMENSIONAL DEFINIDO EN S^1:

Consideremos la EDE 1-dimensional

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2} g(\theta)\ f(t) \qquad \text{(mod } 2\pi\text{)} \ , \qquad \theta_o = \theta(t_o) \tag{III.16}$$

donde $g(\theta)$ y su derivada son funciones 2π periódicas y continuas en $[0,2\pi]$, de forma que admitan desarollo en Serie de Fourier. Pediremos que sean funciones acotadas en $(-1,1)$ para asegurar la convergencia en los cálculos que siguen. La EDE (III.16) puede ser interpretada en un sentido arbitrario, es decir si realizamos la partición temporal del intervalo $[t_o,t]$ en N trozos de forma tal que $t_j = t_o + j\varepsilon$ $(j=1,\ldots,N+1)$ donde $\varepsilon=(t-t_o)/N$, $t=t_{N+1}$ tenemos que $\theta(t_j) = \theta_j^{[s]} = \theta_{j-1} + s\ \Delta\theta_j$ $(\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1})$. Si $s=0$ la EDE se dice que la EDE es interpretada en el sentido de Ito (prescripción de discretización del pre-punto) y si $s=1/2$ en el sentido de Stratonovich o del cálculo usual (prescripción del punto medio). Nosotros nos independizaremos de la prescripción de discretización, elegimos una arbitraria con $s\in[0,1]$ pero a efectos del tratamiento con integral funcional llevamos esta EDE a otra definida en el sentido de Ito. Luego de un cálculo estandar que no daremos aqui pero que esta detallado en el Apendice A se tiene la siguiente EDE

$$\dot{\theta} = \omega + s\ \varepsilon\ g(\theta)\ g'(\theta) + \varepsilon^{1/2} g(\theta)\ f(t) \quad , \tag{III.17}$$

$$\theta_0 = \theta(t_0) \quad ,$$

donde $s\in[0,1]$ y g' indica derivada de g con respecto a θ. El término $g(\theta)\ g'(\theta)$ es conocido como de arrastre espurio.

El Hamiltoniano correspondiente a integrales funcionales definidas en el espacio de fases (II.51) será de acuerdo a (II.53):

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}\{p,q;t) = -i/2\ \varepsilon\ A_0 p^2 + \sum_{l\in\mathbb{Z}_0} (-i\varepsilon A_l p^2/2 - B_l p)\ \exp\{il[\ q+\Omega t\,]\} \ , \tag{III.18}$$

donde A_l y B_l son los coeficientes de Fourier de $g^2(\theta)$ y $g(\theta)\ g'(\theta)$ respectivamente y $\Omega=\omega+B_0$. $\gamma(0)$ indica prescripción de discretización del prepunto en la integral funcional y $\mathbb{Z}_0=\mathbb{Z}-\{0\}$. En el Hamiltoniano hemos separado explicitamente dos términos, uno libre o no oscilatorio a partir del cual se efectua el cálculo perturbativo y el otro término oscilatorio o perturbativo.

A continuación se da el cálculo de la función de autocorrelación del proceso $\cos\theta(t)$, lo que dara origen a la aparición de las contribuciones espectrales orden a orden en teoría perturbativa. La función de autocorrelación estacionaria es

$$C(T) = 1/2\ \mathrm{Re}\{\ \langle\exp[\ i(\theta(T)-\theta(0))]\ \rangle^{st} + \langle\exp[\ i(\theta(T)+\theta(0))]\ \rangle^{st}\} \ , \tag{III.19}$$

La funcional generatriz (FG) dada en Ec.(II.59) la expresamos como

$$
\mathcal{Z}[j,j^*] = \sum_{\mathbb{N}} \frac{\varepsilon^n}{n!} \int_{\gamma(0)} Dp\ Dq \quad \left(-i\int_{t_0}^{T} d\tau\ \mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q;t)\right)^n
$$

$$
\times \quad \exp\left\{ i\int_{t_0}^{T} d\tau\ \left[pq - \mathcal{H}_0(p) + jq + j^* p \right] \right\}\Bigg|_{q(t_0)=\theta_0} , \tag{III.20}
$$

siendo el Hamiltoniano libre o no perturbado

$$
\mathcal{H}_0(p) = (-i/2)\varepsilon A_0 p^2 \quad , \tag{III.21}
$$

y la parte pertubativa

$$
\mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q;t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}_0} (\alpha_l p^2 - \beta_l p)\ \exp\{il[\,q+\Omega t\,]\} \quad , \tag{III.22}
$$

con $\alpha_l=(-i/2)A_l$ y $\beta_l=\varepsilon B_l$. El término n=0 en la suma de la Ec.(III.20) define la FGL, que al ser integrada e imponiendo la condición de régimen estacionario (III.5) permite obtener la FGLE dada en (III.6). En este caso las funciones de Green son

$$
S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad , \tag{III.23.a}
$$

$$
D(\tau,\tau') = \varepsilon A_0\ \min(\tau,\tau') \quad . \tag{III.23.b}
$$

La contribución a orden cero a la función de correlación C(T), de acuerdo a la condición sobre la fuente viene dada por

$$\langle \exp\{i[\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_0^{est} = \exp\{i\Omega T\}\ \mathcal{Z}_0^{est}[(\delta(\circ-T)-\delta(\circ));0]$$

$$= \exp\{i\Omega T-(\varepsilon A_0/2)|T|\} \quad . \tag{III.24}$$

Por no satisfacerse la misma condición se tiene en cambio que

$$\langle \exp\{i[\theta(T)+\theta(0)]\}\rangle_0^{est} = 0 \quad . \tag{III.25}$$

Luego la función de autocorrelación del proceso $\cos\theta$ es

$$C_0(T) = 1/2\ \cos\Omega T\ \exp\{-(\varepsilon A_0/2)|T|\} \quad . \tag{III.26}$$

A orden 1 la contribución del FGLE es

$$\mathcal{Z}_1^{es}[j,j^*] = -i\varepsilon \int_{t_0}^{T} dt \sum_{\mathbb{Z}_0} e^{il\Omega t} \left[\alpha_l\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t)^2}\right)-\beta_l\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t)}\right)\right]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{es}[j(\circ)+l\delta(\circ-t);j^*(\circ)] \quad .$$

(III.27)

La unica contribución no nula a la función de autocorrelación viene dada por el término l=-2 en la suma, ya que solo en este caso se satisface la condición (III.5), siendo

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)+\theta(0)\,]\}\rangle_1^{est} = \exp\{i\Omega T\}\ \mathcal{Z}_1^{es}[\,(\delta(\circ-T)-\delta(\circ));0] =$$

$$= -i\varepsilon\ \exp\{i\Omega T\} \int_{t_0}^{T} dt\ e^{i2\Omega t}\left[\alpha_{-2}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t)^2}\right)-\beta_{-2}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*(t)}\right)\right]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\,j,j^*] \Bigg|_{\substack{j(\circ)=\delta(\circ-T)+\delta(\circ)-2\delta(\circ-t)\\ j^*(\circ)=0}} .$$

(III.28)

Utilizando la relación (9) del Apendice A

$$\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta j^*(t)}\mathcal{Z}_0 = -\int_{-\infty}^{T} dt'\ \Theta(t'-t)\ j(t')\ \mathcal{Z}_0\quad , \tag{III.29}$$

evaluando en las fuentes, y teniendo en cuenta que la prescripción de discretización elegida es la del pre-punto (es decir $\theta(0)=0$) la Ec.(III.28) se expresa como

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)+\theta(0)\,]\}\rangle_1^{est} = -i\varepsilon\ \exp\{i\Omega T\} \int_{-\infty}^{T} dt\ [\alpha_{-2}(1+\Theta(-t))+\beta_{-2}]$$

$$\times\ (1+\Theta(-t))\ \exp\{-i2\Omega t + 2\varepsilon A_0 \min(t,0)\}\ .$$

(III.30)

Este término da solo contribuciones espectrales a la frecuencia fundamental Ω dada en (III.24), introduciendo solo correcciones a esta. El otro término que aparece en la función de correlación C(T) tiene contribución nula ya que no se satisface en este caso la condición (III.5) sobre la fuente j.

Las nuevas contribuciones espectrales, de frecuencia 3Ω, vienen al orden dos. En este caso la contribución de la FGLE es

$$\mathcal{Z}_2^{es}[j,j] = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{T} dt_1 \int_{t_0}^{T} dt_2 \sum_{\mathbb{Z}_0} \exp\{i\Omega(l_1 t_1 + l_2 t_2)\}$$

$$\times \left[\alpha_{l_1}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^* \overline{(t_1)}^2}\right) - \beta_{l_1}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^* \overline{(t_1)}}\right)\right] \left[\alpha_{l_2}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^* \overline{(t_2)}^2}\right) - \beta_{l_2}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^* \overline{(t_2)}}\right)\right]$$

$$\times \mathcal{Z}_0^{es}[j(\circ) + l_1 \delta(\circ - t_1) + l_2 \delta(\circ - t_2); j^*(\circ)] \quad .$$

(III.31)

La contribución al orden 2 a C(T) viene dada por los términos $l_1 = -l_2 = l \neq 0$ en la suma de (III.31):

$$\langle \exp\{i[\theta(T) - \theta(0)]\}\rangle_2^{est} = \exp\{i\Omega T\}\ \mathcal{Z}_2^{est}[(\delta(\circ - T) - \delta(\circ)); 0] =$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2} \exp\{i\Omega T\} \int_{t_0}^{T} dt_1 \int_{t_0}^{T} dt_2 \left\{ \sum_{\mathbb{Z}_0} \exp\{i\Omega l(t_1 - t_2)\}\right.$$

$$\times \left[\alpha_l \left(-\frac{\delta^2}{\delta j^* \overline{(t_1)}^2}\right) - \beta_l\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^* \overline{(t_1)}}\right)\right] \left[\alpha_{-l}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^* \overline{(t_1)}^2}\right) - \beta_{-l}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^* \overline{(t_1)}}\right)\right]$$

$$\left. \times \mathcal{Z}_0^{est}[j, j^*] \Bigg|_{\substack{j(\circ) = \delta(\circ - T) + \delta(\circ) + l(\delta(\circ - t_1) - \delta(\circ - t_2)) \\ j^*(\circ) = 0}} \right\} \quad .$$

(III.32)

El procedimiento para evaluar esta expresión es el siguiente: utilizamos la relación (III.30) y evaluamos en las fuentes con la prescripción de discretización del pre-punto. Teniendo en cuenta que el integrando es simetrico en las variables de integración, puesto que la suma se extiende sobre $\mathbb{Z}_0$:

$$\langle \exp\{i[\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_2^{est} =$$

$$= -\varepsilon^2 \exp\{(i\Omega - \varepsilon A_0/2)T\} \int_{t_0}^{T} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_0} g_n(t_1)\ \ f_n(t_2)$$

(III.33)

siendo las funciones integrando

$$g_n(t_1) = \Theta(t_1)(\alpha_n \Theta(t_1)+\beta_n)$$

$$\times \exp\{in\Omega t_1-(\varepsilon A_0/2)[2n(t_1-\min(t_1,0))+n^2 t_1]\},$$ (III.34.a)

$$f_n(t_2) = (\Theta(t_2)+n)(\alpha_{-n}(\Theta(t_2)+n)+\beta_{-n})$$

$$\times \exp\{-in\Omega t_2-(\varepsilon A_0/2)[2n(-t_2+\min(t_2,0))-n^2 t_2]\}.$$ (III.34.b)

Aqui no es nuestro proposito integrar explicitamente (III.33) sino calcular solo contribuciones espectrales o resonantes de frecuencia $(n+1)\Omega$, $n\neq 0$. Estaran dadas por

$$\langle \exp\{i[\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_{2,res}^{est} =$$

$$= -\varepsilon^2 \exp\{(i\Omega - \varepsilon A_0/2)T\} \sum_{n\in\mathbb{Z}_0} G_n(T)\ [F_n(0^-) - F_n(0^+)]\ ,$$

(III.35)

donde $G_n(t)$ es la primitiva de la función $g_n(t)$ y $F_n(t)$ es la de

$f_n(t)$, mientras que $F_n(0^-) - F_n(0^+)$ es la discontinuidad de la integral en $t_2=0$. Es este hecho el que introduce la aparición de nuevos términos espectrales o resonantes. Hasta aquí no se ha dicho nada acerca del parámetro de expansión perturbativo, el mismo debe ser una cantidad adimensional, un simple cálculo muestra que el mismo es ε/Ω. La demostración se efectua en el Cap.VI. En términos de parámetro de expansión la Ec.(III.35) es explicitamente

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle^{est}_{2,res} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\Omega}\right)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_0} D_n(\varepsilon/\Omega)\ \exp\{[\,i(n+1)\Omega-(n+1)^2\varepsilon A_0/2]\,T\}$$

(III.36.a)

$$D_n(E)=\frac{\alpha_n+\beta_n}{(in-EA_0n(n+2)/2)}\left\{\frac{n(n\alpha_{-n}+\beta_{-n})}{(-in+EA_0n^2/2)}-\frac{(1+n)((1+n)\alpha_{-n}+\beta_{-n})}{(-in+EA_0n(n+2)/2)}\right\},$$

(III.36.b)

siendo $E=\varepsilon/\Omega$.

La otra contribución a $G(T)$ al orden 2 esta dada por $l_1=-(l_2+2)\neq0$ en la expresión (III.32). Los cálculos no seran dados aquí, ya que no ofrecen nuevas alternativas, se evaluan las fuentes, se sigue utilizando la prescripción de discretización del pre-punto y se tiene en cuenta que el integrando es simétrico en las variables de integración. Las contribuciones espectrales nuevamente tienen su origen en la discontinuidad del integrando. Expresada en términos del parámetro de expansión

$$\langle \exp\{i[\,\theta(T)+\theta(0)]\}\rangle^{est}_{2,res} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\Omega}\right)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_o} E_n(\varepsilon/\Omega)\ \exp\{[\,i(n+1)\Omega-(n+1)^2\varepsilon A_o/2]\,T\}$$

(III.37.a)

$$E_n(E)=\frac{\alpha_n+\beta_n}{(in-EA_o n(n+2)/2)}\left\{\frac{(2+n)((2+n)\alpha_{-n-2}+\beta_{-n-2})}{(-i(n+2)+EA_o(n+2)^2/2)}-\frac{(3+n)((3+n)\alpha_{-n-2}+\beta_{-n-2})}{(-i(n+2)+EA_o n(n+2)/2)}\right\}$$

(III.37.b)

De lo visto hasta aquí a orden 2 en el parámetro de expansión ε/Ω aparecen términos que dan nuevas contribuciones espectrales de frecuencia 0, Ω, 2Ω,... .

El procedimiento aquí detallado puede será extendido para el cálculo de funciones de correlación de cualquier proceso $h(\theta)$ 2π periódico. Hemos elegido aquí el caso $h(\theta)=\cos\theta$ por ser este el que será considerado en las proximas subsecciones cuando consideremos el cálculo de funciones de correlación a partir de la Forma Normal de la bifurcación de Hopf.

En algún caso puede ser de interés conocer valores medios de un proceso $h(\theta)$, que se remite al cálculo de los valores medios

$$\langle \exp\{in\theta(T)\}\rangle = \exp\{in\Omega T\}\ \mathcal{Z}[\,n\delta(\circ-T);0] \quad , \qquad \text{(III.38)}$$

con $n\neq0$. A orden cero en teoría perturbativa la contribución es nula de acuedo con la condición estacionaria (III.5). Las primeras contribuciones no nulas aparecen al primer orden, las mismas son todas de frecuencia Ω.

III.4 FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF EN EL SENTIDO DE ITO:

Las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE) dadas en la Secc.I.3. son interpretadas en el sentido usual del cálculo o de Stratonovich, en el cual las funciones de las variables dinámicas son interpretadas en la prescripción de discretización del punto medio. Puede ser de interés en algunos casos tener EDE definidas en el sentido de Ito, es decir con prescripción de discretización del pre-punto. La técnica como pasar de una EDE interpretada en el sentido de Stratonovich a otra en el de Ito ha sido tratado profusamente en la bibliografía. En el Apendice A se da una demostración trabajando en el discreto de como pasar de una EDE dada en un sentido arbitrario a otra en cualquier otra prescripción siguiendo las técnicas desarolladas en [LR82]. En todos los casos, se introduce un término de arrastre espurio que debe ser considerado. En este trabajo elegimos como convención la interpretación de Ito, siendo necesario dar la Ec.(I.10) en tal sentido. Asi, realizando el cambio no lineal de variables [SV87]:

$$z = \sqrt{M}\; e^{u+i\theta} \,, \qquad \text{(III.39)}$$

con $M = \mu$ en el caso (A) y $M = \mu + \upsilon/2$ en el (M), la EDE (I.10) en el sentido de Ito es

$$\dot{\theta} = \omega - M\,\beta\, e^{2u} + 1/2\ \upsilon\ h_1(u,\theta) + \upsilon^{1/2}\ g_1(u,\theta)\ F(t)$$

$$\dot{u} = M\ (1-e^{2u}) + 1/2\ \upsilon\ h_2(u,\theta) + \upsilon^{1/2}\ g_2(u,\theta)\ F(t) \qquad \text{(III.40)}$$

siendo para el caso (A)

$$h_1(u,\theta) = e^{-2u}\ \mathrm{sen}2\theta \quad , \qquad h_2(u,\theta) = -\ e^{-2u}\ \cos 2\theta \qquad \text{(III.41)}$$

y para el (M)

$$h_1(u,\theta) = -2\ \mathrm{sen}\Delta\ \cos(2\theta-\Delta) + \mathrm{sen}[2(2\theta-\Delta)] \quad ,$$

$$h_2(u,\theta) = 1 - 2\ \mathrm{sen}\Delta\ \mathrm{sen}(2\theta-\Delta) - \cos[2(2\theta-\Delta)] \qquad \text{(III.42)}$$

Realizando la sustitución (I.13) con $\Omega = \omega - \beta M$, linealizando alrrededor de u=0 las EDE (III.18) se reducen a

$$\dot{\varphi} = -2\beta M\ u + \ \upsilon/2\ h_1(\varphi+\Omega t) + \upsilon^{1/2}\ g_1(\varphi+\Omega t)\ F(t) \quad ,$$

$$\dot{u} = -2M\ u + \upsilon/2\ h_2(\varphi+\Omega t) + \upsilon_2^{1/2}\ g\ (\varphi+\Omega t)\ F(t) \qquad \text{(III.43)}$$

siendo para el caso (A)

$$h_1(\psi) = \mathrm{sen}2\psi \quad , \qquad h_2(\psi) = -\cos 2\psi \quad , \qquad \text{(III.44)}$$

y para el (M)

$$h_1(\psi) = -2a\ \mathrm{sen}2\psi + \mathrm{sen}4\psi\ , \quad h_2(\psi) = -2a\ \cos 2\psi - \cos 4\psi\ . \qquad \text{(III.45)}$$

III.5 FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO ADITIVO:

La Forma Normal Estocástica de una Bifurcación de Hopf (FNEBH) en presencia de ruido aditivo, como se ha visto puede ser transformada a una EDE para variables (u,θ) a través del cambio no lineal de variables:

$$z = \sqrt{\mu}\ \exp\{u+i(\varphi+\Omega t)\} \qquad \text{(III.46)}$$

con $\Omega=\omega-\mu\beta$. La EDE obtenida viene dada por la Ec.(III.43). Consideraremos por simplicidad el caso $\beta=0$, la EDE interpretada en el sentido de Ito es

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 1/2\ \upsilon\ \mathrm{sen}2\psi - \upsilon^{1/2}\mathrm{sen}\psi\ f(t) \\ \dot{u} &= -2\mu\ u - 1/2\ \upsilon\ \cos 2\psi + \upsilon^{1/2}\cos\psi\ f(t)\ , \qquad \text{(III.47)} \\ \psi &= \varphi + \omega t \end{aligned}$$

donde $u\in\mathbb{R}$ define pequeños desplazamientos "transversales" a la solución estable $u=0$ y $\varphi\in\mathbb{S}^1$ define la fase de oscilación del sistema.

Estamos interesados en determinar las contribuciones espectrales o resonancias que son ármonicos secundarios a las funciones de correlación cruzada y autocorrelación del proceso (z,z^*)

$$\langle z(t)z^*(t')\rangle \quad , \qquad \langle z(t)z(t')\rangle \quad . \tag{III.48}$$

respectivamente, y sus complejas conjugadas. Asimismo determinaremos los momentos y funciones de correlación del proceso (z,z^*) al orden cero en υ o contribuciones principales.

De acuerdo a los resultados alcanzados en el Cápitulo II., se tiene que la Funcional Generatriz de momentos y funciones de correlación es

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(0)} \mathcal{D}\underset{\sim}{q}\ \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\ \exp\Big\{ i\int_{t_0}^{T} d\tau\ [\, p_1 q_1 + p_2 q_2 - \mathcal{H}^{\gamma(0)}(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t) \ + \\ + j_1 q_1 + j_2 q_2 + j_1^* p_1 + j_2^* p_2 \,] \Big\} \\ \times\ \delta(q_1(t_0)-\varphi_0)\ \delta(q_2(t_0)-u_0) \quad , \end{aligned} \tag{III.49}$$

siendo los momentos conjugados $\underset{\sim}{p}=(p_1,p_2)$ y $\underset{\sim}{q}=(q_1,q_2)$, las fuentes $\underset{\sim}{j}=(j_1,j_2)$ y $\underset{\sim}{j}^*=(j_1^*,j_2^*)$, y la medida de integración $\mathcal{D}\underset{\sim}{q}\ \mathcal{D}\underset{\sim}{p} \equiv \mathcal{D}q_1\mathcal{D}q_2\mathcal{D}p_1\mathcal{D}p_2$. El Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q;t) = -i/2\ \upsilon\ p_1^2\ \mathrm{sen}^2(q_1+\omega t) - i/2\ \upsilon\ p_2^2\ \cos^2(q_1+\omega t) +$$

$$+ i/2\ \upsilon\ 2\ p_1 p_2\ \mathrm{sen}(q_1+\omega t)\ \cos(q_1+\omega t) -$$

$$- p_2\ (2\mu\ q_2 + 1/2\ \upsilon\ \cos[2(q_1+\omega t)]) +$$

$$+ p_1\ 1/2\ \upsilon\ \mathrm{sen}[2(q_1+\omega t)]\quad , \tag{III.50}$$

del cual es posible separar una parte "libre' o no oscilatoria

$$\mathcal{H}_0(p,q;t) = -i/2\ (\upsilon/2)\ p_1^2 - i/2\ (\upsilon/2)\ p_2^2 - 2\mu q_2 p_2\ , \tag{III.51}$$

siendo la parte perturbativa $\mathcal{K}^{\gamma(0)} = \mathcal{H}^{\gamma(0)} - \mathcal{H}_0$.

Definimos una Funcional generatriz "libre" (FGL) o no oscilatoria $\mathcal{Z}_0[j,j]$ reemplazando el Hamiltoniano "libre" (III.51) en la ecuación (III.49). La expresión es facilmente integrada (en el Apendice A se dan los cálculos) obteniendose

$$\mathcal{Z}_0[j,j^*] = \exp\left\{i\varphi_0\int_{t_0}^{T} d\tau\ \ j_1(\tau) + iu_0\int_{t_0}^{T} d\tau\ \ j_2(\tau)\ \exp\{2\mu(t_0-\tau)\}\ \right\}$$

$$\times\ \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T} d\tau\ \ d\tau'[\ 2ij_\nu(\tau)\mathbf{S}_\nu(\tau,\tau')j_\nu^*(\tau')+\ j_\nu(\tau)\mathbf{R}_\nu(\tau,\tau')j_\nu(\tau')]\ \right\}\ , \tag{III.52}$$

donde ν=1,2 e indices repetidos implican suma. Las funciones de Green son en este caso

$$S_1(t,t') = \Theta(t-t') \quad , \tag{III.53.a}$$

$$S_2(t,t') = \Theta(t-t')\exp\{-2\mu(t-t')\} \ , \tag{III.53.b}$$

$$R_1(t,t') = \upsilon/2\ (\min(t,t')-t_0) \ , \tag{III.53.c}$$

$$R_2(t,t') = (\upsilon/8\mu)\{\exp[-2\mu|t-t'|]-\exp[-2\mu(t+t'-2t_0)]\}. \tag{III.53.d}$$

Notemos que $\mathcal{Z}_0[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\longrightarrow 0$ cuando $t_0\longrightarrow-\infty$, a menos que se satisfaga la condición

$$\int_{t_0}^{T} d\tau\ \ j_1(\tau) = 0 \quad . \tag{III.54}$$

Esta condición es la que permite caracterizar al sistema en el régimen estacionario, es una condición necesaria y suficiente. En el régimen transitorio no es necesario imponer tal condición. Reemplazando en la Ec.(III.52) y luego tomando $t_0\longrightarrow-\infty$ se obtiene la funcional generatriz libre estacionaria (FGLE):

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] =$$

$$= \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T} d\tau\ \ d\tau'[\ 2i\,j_\nu(\tau)S_\nu(\tau,\tau')j_\nu^*(\tau')+\ j_\nu(\tau)D_\nu(\tau,\tau')j_\nu(\tau')]\ \ \right\}, \tag{III.55}$$

siendo las funciones de Green

$$D_1(t,t') = \upsilon/2\ \min(t,t') \quad , \tag{III.56.a}$$

$$D_2(t,t') = (\upsilon/8\mu)\ \exp[-2\mu|t-t'|] \ . \qquad \text{(III.56.b)}$$

Las funciones de correlación no nulas al orden cero son

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_0^{est} = \mu\ \exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_0^{est}[\ \delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0]$$
$$= \mu\ \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\upsilon|T|/4 + (\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\} \ . \qquad \text{(III.57)}$$

Para efectuar el cálculo perturbativo que permite encontrar las contribuciones espectrales mas significativas damos la FG en el régimen estacionario para realizar el esquema perturbativo a partir de (III.49)

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n!} \int_{\gamma(0)} D\underset{\sim}{q}\ D\underset{\sim}{p}\ \left(-i\int_{t_0}^{t} d\tau\ \mathcal{K}^{\gamma(0)}(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t)\ \right)^n$$
$$\times\ \exp\left\{i\int_{t_0}^{T} d\tau\ [\,p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - \mathcal{H}_0(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t) + j_1q_1 + j_2q_2 + j_1^*p_1 + j_2^*p_2]\right\}$$
$$\times\,\delta(q_1(t_0)-\varphi_0)\ \delta(q_2(t_0)-u_0) \ . \qquad \text{(III.58)}$$

El término perturbativo $\mathcal{K}^{\gamma(0)}$ introduce correcciones orden a orden en el parámetro de expansión perturbativo, que como veremos a continuación es υ/ω. La corrección a orden 1 a las funciones de correlación dadas en (III.48) es de términos espectrales cuya frecuencia es ω. Este cálculo no lo daremos aqui. Para ilustar el procedimiento pasemos a determinar las correcciones de 2 orden que son las que dan términos de frecuencia múltiplo de la fundamental ω. Dando $\mathcal{K}^{I(0)}$ por su desarrollo en Serie de Fourier, se vuelve mas sencilla la aplicación de la condición (III.54) y los cálculos que siguen:

$$\mathcal{K}^{I(0)}(p,q;t) = -i\omega/8 \left\{ [(p_2+ip_1^2) - 2i(p_2+ip_1)] \exp\{i2(q_1+\omega t)\} + \right.$$

$$\left. + [(p_2-ip_1)^2 + 2i(p_2-ip_1)] \exp\{-i2(q_1+\omega t)\} \right\} .$$

(III.59)

Las contribuciones no nulas a las funciones de correlación (III.48), al orden 2 quedan determinadas por la condición (III.54) sobre la fuente j_1. Reemplazando los momentos conjugados p_1 y p_2 por $-i$ veces la derivada funcional de $\mathcal{Z}_0^{est}$ respecto de las fuentes j_1 y j_2 respectivamente:

$$\langle z(T)z^{*}(0)\rangle_{2}^{est} = \mu \exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_{2}^{est}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0]$$

$$= \mu \exp\{i\omega T\}\ \frac{1}{2}\ (\frac{\upsilon}{8})^{2} \int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} dt_1 dt_2 \Bigg\{ \exp\{i2\omega(t_1-t_2)\}$$

$$\times \Bigg[\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)}\Big)^{(2)} - 2i\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)}\Big)\Bigg]$$

$$\times \Bigg[\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)}\Big)^{(2)} + 2i\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)}\Big)\Bigg]$$

$$\times \mathcal{Z}_{o}^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^{*}]\ \Bigg|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)+\delta(\circ)+2(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2));\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ j_1^*(\circ)=j_2^*(\circ)=0}}$$

$$+ P(t_1,t_2) \Bigg\} ,$$

(III.60)

(2) indica derivadas funcionales de orden 2 y $P(t_1,t_2)$ denota el término que se obtiene permutando t_1 y t_2 en el sumando previo. Efectuando las derivadas funcionales se tiene:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1^*(t)}\ \mathcal{Z}_{o}^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^{*}]\ \Bigg|_{j_1(\circ)} =$$

$$= -\ [\Theta(T-t)-\Theta(-t)+2(\Theta(t_1-t)-\Theta(t_2-t))]\ \mathcal{Z}_{o}^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^{*}]\ \Bigg|_{j_1(\circ)}$$

(III.61.a)

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^*(t)} \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Big]_{j_2(\circ)} =$$

$$= i\ [\Theta(T-t)\ \exp\{-2\mu(T-t)\} + \Theta(-t)\ \exp\{2\mu t\}]\ \ \mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \Big]_{j_2(\circ)}$$

(III.61.b)

$$j_1(\circ)=\delta(\circ-T)+\delta(\circ)+2(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2)) \ , \qquad \text{(III.61.c)}$$

$$j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ)) \ , \qquad \text{(III.61.d)}$$

para $t=t_1,t_2$. El integrando en (III.64) es simétrico en t_1,t_2 luego llevamos la región de integración a $T>t_1>t_2$. Trabajando en la prescripción de discretización del pre-punto, es decir con $\Theta(0)=0$ se tiene:

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_2^{est}=(\tfrac{\upsilon}{B})^2\mu\ \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\upsilon|T|/4 + (\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\}$$

$$\times \int_{t_0}^{T} dt_1 \quad g(t_1) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \quad f(t_2) \quad ,$$

(III.62.a)

$$g(t_1) = \{\ [(\exp(-2\mu T) + \Theta(-t_1))\ \exp(2\mu t_1) - \Theta(t_1)]^2 -$$

$$- 2\ [(\exp(-2\mu T) + \Theta(-t_1))\ \exp(2\mu t_1) - \Theta(t_1)]\}$$

$$\times \exp\{\ i2\omega t_1 - \upsilon(\ 2t_1 - \min(0,t_1)\ \}\quad , \qquad \text{(III.62.b)}$$

$$f(t_2) = \{\ [(\exp(-2\mu T) + \Theta(-t_2))\ \exp(2\mu t_2) + (2+\Theta(t_2))]^2 -$$

$$- 2\ [(\exp(-2\mu T) + \Theta(-t_2))\ \exp(2\mu t_2) + (2+\Theta(t_2))]\ \}$$

$$\times \exp\{\ -i2\omega t_2 + \upsilon(\ 2t_2 - \min(0,t_2)\ \}\quad .$$

(III.62.c)

Las contribuciones espectrales principales de frecuencia 3ω aparecen a este orden de la teoría perturbativa. Estan dadas por

$$\langle z(T)z^{*}(0)\rangle^{est}_{2,3\omega}=\left(\frac{\upsilon}{8}\right)^{2}\mu\ \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\upsilon|T|/2+(\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\}$$

$$\times\ G(T)\ [F(0^{-})-F(0^{+})]\quad , \tag{III.63}$$

donde $G(t_1)$ y $F(t_2)$ son las primitivas de las funciones integrando $g(t_1)$ y $f(t_2)$ respectivamente y $[F(0^{-})-F(0^{+})]$ es la discontinuidad de la integral en $t_2=0$. Integrando en cada una de las regiones y evaluando

$$G(T)=\left[\frac{1}{4\mu-2\upsilon+i2\omega}-\frac{4}{2\mu-2\upsilon+i2\omega}+\frac{3}{-2\upsilon+i2\omega}\right]\exp\{(i2\omega-2\upsilon)T\}\ , \tag{III.64.a}$$

$$F(0^{-})=\left[\frac{(\exp(-2\mu T)+1)^{2}}{4\mu+\upsilon-i2\omega}+\frac{6(\exp(-2\mu T)+1)}{2\mu+\upsilon-i2\omega}+\frac{8}{\upsilon-i2\omega}\right]\ , \tag{III.64.b}$$

$$F(0^{+})=\left[\frac{\exp(-4\mu T)}{4\mu+2\upsilon-i2\omega}+\frac{8\ \exp(-2\mu T)}{2\mu+2\upsilon-i2\omega}+\frac{15}{2\upsilon-i2\omega}\right]\ . \tag{III.64.c}$$

Analizando cada uno de los términos que aparecen en la discontinuidad se tiene: a) que el factor $\exp(-4\mu T)$ es de orden 1 en υ y como el cálculo perturbativo es a orden 2, este término introduce una contribución que es de orden 3 que deshechamos, b) el término que contiene a $\exp(-2\mu T)$ tiene contribución no nula a orden 0 en υ, es de orden 1 en μ y lo retenemos en los cálculos que siguen, y c) el término independiente no tiene contribuciones despreciables. Luego reteniendo solo términos a orden cero en υ:

$$\Theta(T)\,[\,F(0^-)-F(0^+)\,] = \omega^{-2}\left\{A(\mu/\omega)\ \exp(-2\mu T) + B(\mu/\omega)\right\}\ \exp\{2(i\omega-\upsilon)T\}$$

(III.65.a)

$$A(\sigma) = \left[\frac{1}{2\sigma-i} - \frac{1}{\sigma-i}\right]\left[\frac{1/2}{2\sigma+i} - \frac{2}{\sigma+i} - 3i/2\right] , \qquad \text{(III.65.b)}$$

$$B(\sigma) = \left[\frac{1/2}{2\sigma-i} + \frac{3}{\sigma-i} - 7i/2\right]\left[\frac{1/2}{2\sigma+i} - \frac{2}{\sigma+i} - 3i/2\right] . \qquad \text{(III.65.c)}$$

Reteniendo solo términos de orden 2 en el parámetro de expansión perturbativo υ/ω la función de correlación dada por (III.67) es

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{2,3\omega} = \frac{1}{64}\ \mu\ \left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2\ \exp\{i3\omega T-2\upsilon|T|\}$$

$$\times\ \{A(\mu/\omega)\ \exp(-2\mu T) + B(\mu/\omega)\} \qquad \text{(III.66)}$$

$$\times\ \exp\{-\upsilon|T|/4 + (\upsilon/16\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))\} .$$

La función de autocorrelación del proceso z(t) es

$$\langle z(T)z(0)\rangle^{est}_{2,3\omega} = 0 \quad . \qquad \text{(III.67)}$$

ya que no se satisface la condición de régimen estacionario.

III.6. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO MULTIPLICATIVO:

La FNEBH en presencia de ruido blanco multiplicativo lineal, de acuerdo a la introducción dada, puede ser transformada en un sistema de EDE para las variables (u,φ) a traves de un cambio no lineal de coordenadas de las variables criticas (z,z^*):

$$z = \sqrt{M} \quad \exp\{u+i(\varphi+\Omega t)\} \quad , \qquad \text{(III.68.a)}$$

$$\Omega = \omega - \beta M \quad , \qquad \text{(III.68.b)}$$

$$M = \mu + \varepsilon/2 \quad . \qquad \text{(III.68.c)}$$

La EDE obtenida puede ser linealizada convenientemente alrededor de u=0 de acuerdo a lo ya visto, por ser esta la solución estable de ciclo límite. En la EDE la variable $u \in \mathbb{R}$ define pequenos apartamientos "transversales " al ciclo límite y $\varphi \in S^1$ es la fase de oscilación del sistema. El espacio de configuración es ahora (u,φ), y la EDE explicitamente es, en el caso $\beta=0$,

$$\dot{\varphi} = \varepsilon\ (-a \cos 2\psi +1/2 \operatorname{sen} 4\psi) + \varepsilon^{1/2}(a - \operatorname{sen} 2\psi)\ f(t) \quad ,$$

$$\dot{u} = -2Mu + \varepsilon\ (-a \operatorname{sen} 2\psi -1/2 \cos 4\psi) + \varepsilon^{1/2}(b + \cos 2\psi)\ f(t)$$

(III.69)

con $\psi = \varphi + \omega t$ y $a^2+b^2=1$, f(t) es ruido Gaussiano con valor medio nulo y "delta" correlacionado. La Funcional Generatriz (FG) viene dada por la Ec.(III.53) siendo en este caso el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q;t) = -i/2\ \varepsilon\ p_1^2\ [a -\mathrm{sen}[2(q_1+\omega t)]]^2-$$

$$-i/2\ \varepsilon\ p_2^2\ [a +\cos[2(q_1+\omega t)]]^2-$$

$$-i/2\ \varepsilon\ 2p_1p_2\ [a -\mathrm{sen}[2(q_1+\omega t)]][a +\cos[2(q_1+\omega t)]] +$$

$$+ p_2\ [-2M\ q_2+\varepsilon(-a\ \mathrm{sen}[2(q_1+\omega t)]\ -1/2\ \cos[4(q_1+\omega t)])]$$

$$+ p_1\ [\varepsilon(-a\ \cos[2(q_1+\omega t)]\ +1/2\ \mathrm{sen}[4(q_1+\omega t)])]\ ,$$

(III.70)

del cual es posible separar la parte "libre" o no oscilatoria

$$\mathcal{H}_0(p) = -i/2\ (\varepsilon_{11}p_1^2\ +\varepsilon_{22}p_2^2\ +2\varepsilon_{12}p_1p_2)\ -2M\ q_2p_2\ , \qquad \text{(III.71)}$$

con $\varepsilon_{11}=\varepsilon(a^2+1/2)$, $\varepsilon_{22}=\varepsilon(b^2+1/2)$, $\varepsilon_{12}=\varepsilon ab$, siendo el determinante de la matriz de difusión no nulo: $\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2=3\varepsilon/4$. La parte perturbativa es $\mathcal{K}^{\gamma(0)}=\mathcal{H}^{\gamma(0)}-\mathcal{H}_0$.

Definimos la Funcional Generatriz "libre" o no oscilatoria reemplazando $\mathcal{H}_0$ en la ecuación (III.49). La expresión resultante puede ser fácilmente integrada (en el Ap.A se dan los cálculos) dando

$$\mathcal{Z}_0[j,j^*] = \exp\left\{i\varphi_c\int_{t_0}^{T}d\tau\ \ j_1(\tau)\ +\ iu_0\int_{t_0}^{T}d\tau\ j_2(\tau)\ \exp\{2M\ (t-\tau)\}\right\}$$

$$\times\ \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T}d\tau\ \ d\tau'[\ 2i\ j_\nu(\tau)S_\nu(\tau,\tau')\,j_\nu^*(\tau')+\ j_\nu(\tau)R_{\nu\sigma}(\tau,\tau')\,j_\sigma(\tau')]\right\}\ ,$$

(III.72)

donde índices repetidos $\nu,\sigma=1,2$ indican suma. Las funciones de

Green, correctamente simetrizadas, son

$$S_1(t,t') = \Theta(t-t') \quad , \tag{III.73.a}$$

$$S_2(t,t') = \Theta(t-t') \exp\{-2M(t-t')\} \quad , \tag{III.73.b}$$

$$R_{11}(t,t') = \varepsilon_{11}(\min(t,t')-t_0) \quad , \tag{III.73.c}$$

$$R_{22}(t,t') = (\varepsilon_{22}/4M)\{\exp[-2M|t-t'|]-\exp[-2M(t+t'-2t_0)]\}, \tag{III.73.d}$$

$$R_{12}(t,t') = (\varepsilon_{12}/4M) \ \{\exp(-2Mt)+\exp(-2Mt')\}$$
$$\times \ \{\exp(2M\min(t,t'))-\exp(2Mt_0)\}. \tag{III.73.e}$$

Definimos una Funcional Generatriz Libre Estacionaria (FGLE), teniendo en cuenta que $\mathcal{Z}_0 \longrightarrow 0$ cuando $t_0 \longrightarrow -\infty$ a menos que se satisfaga la condición de régimen estacionario (III.54). La FGLE será

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] =$$

$$= \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T} d\tau \ d\tau'[\,2i\,j_\nu(\tau)S_\nu(\tau,\tau')j_\nu^*(\tau')+ \ j_\nu(\tau)D_{\nu\sigma}(\tau,\tau')j_\sigma(\tau')] \ \right\}. \tag{III.75}$$

siendo las funciones de Green para el régimen estacionario

$$D_{11}(t,t') = \varepsilon_{11}\min(t,t') \quad , \tag{III.76.a}$$

$$D_{22}(t,t') = (\varepsilon_{22}/4M) \quad \exp[-2M|t-t'|] \quad , \tag{III.76.b}$$

$$D_{12}(t,t') = (\varepsilon_{12}/4M) \ \{\exp(-2Mt)+\exp(-2Mt')\} \ \exp(2M\min(t,t')) \ . \tag{III.76.c}$$

La condición de régimen estacionario (III.54) impone que a orden 0 la unica función de correlación no nula sea

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_0^{est} = M \exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_0^{est}[\,\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0\ ;\ 0]$$

$$= M \exp\{i\omega T\}\ \exp\{-\varepsilon_{11}|T|/2 + (\varepsilon_{22}/8M)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

(III.77)

Para determinar contribuciones espectrales a las funciones de correlación cuya frecuencia no sea la fundamental, partimos de la FGLE dada en (III.58), siendo la parte perturbativa desarrollada en Serie de Fourier a efectos de los cálculos que siguen:

$$\mathcal{K}^{I(\varepsilon)}(p,q;t) = -i\varepsilon/8\ \left\{[\,(p_2+ip_1)^2-2i(p_2+ip_1)]\ \exp\{i4(q_1+\omega t)\} + c.c.\right\} -$$

$$-i\varepsilon/2\ \left\{[\,(ap_1+bp_2-a)(p_2+ip_1)]\ \exp\{i2(q_1+\omega t)\} + c.c.\right\}\ ,$$

(III.78)

donde c.c. indica conplejo conjugado de la expresión precedente.

A primer orden en teoría perturbativa no aparecen ármonicos de la frecuencia ω, solo correcciones a la expresion (III.77), como se concluye de un breve cálculo que no daremos aqui. Recien al orden 2 en teoría perturbativa aparecen las nuevas contribuciones espectrales o ármonicos que caracterizan el espectro de la FNEBII con ruido multiplicativo. A continuación consideraremos las mismas para las funciones de correlación del proceso (z,z^*).

i) Contribuciones espectrales o armonicos a $\langle z(T)z^*(0)\rangle_2^{est}$:

$$\langle z(T)z^{*}(0)\rangle_{2}^{est} = M\exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_{2}^{est}[\,\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0]$$

$$= M\exp\{i\omega T\}\ \Bigg\{\Bigg\{\ \frac{1}{2}\ (\tfrac{\varepsilon}{8})^{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} dt_1 dt_2\ \Bigg\{\ \exp\{i4\omega(t_1-t_2)\}$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_1)}+\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_1)}-2i\right)\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_1)}+\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_1)}\right)\right]$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_2)}-\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_2)}+2i\right)\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_2)}-\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_2)}\right)\right]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_{0}^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^{*}]\ \Bigg|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+4(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2));\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ j_1^{*}(\circ)=j_2^{*}(\circ)=0}} +$$

$$+\,P(t_1,t_2)\ \Bigg\}\ +\ \Bigg\{\ \frac{1}{2}\ (\tfrac{\varepsilon}{2})^{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} dt_1 dt_2\ \Bigg\{\ \exp\{i2\omega(t_1-t_2)\}$$

$$\times\left[\left(a\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_1)}+b\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_1)}-a\right)\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_1)}+\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_1)}\right)\right]$$

$$\times\left[\left(a\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_2)}+b\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_2)}-a\right)\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^{*}(t_2)}-\frac{\delta}{\delta j_1^{*}(t_2)}\right)\right]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_{0}^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^{*}]\ \Bigg|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+2(\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2));\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ j_1^{*}(\circ)=j_2^{*}(\circ)=0}} +$$

$$+\,P(t_1,t_2)\ \Bigg\}\ \Bigg\} \qquad \text{(III.79)}$$

$P(t_1,t_2)$ denota términos que se obtienen permutando t_1 y t_2 en los sumandos previos. La derivada funcional de $\mathcal{Z}_0^{est}$ respecto de la fuente j_1^* evaluada en la fuente estara dada por Ec.(III.61.b), reemplazando μ por M, y derivando respecto de j_2 y luego evaluando se tiene que

$$\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_1^*(t)}\,\mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\,\Bigg]_{j_1^{(n)}(s)} =$$

$$= -\,[\,\Theta(T-t)-\Theta(-t)+n(\Theta(t_1-t)-\Theta(t_2-t))]\;\;\mathcal{Z}_0^{est}[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\,\Bigg]_{j_1^{(n)}(s)}$$

(III.80.a)

$$j_1^{(n)}(s)=\delta(s-T)+\delta(s)+n(\delta(s-t_1)-\delta(s-t_2))\ ,\qquad \text{(III.80.b)}$$

siendo $t=t_1,t_2$ y $n=2,4$.

En estos cálculos se utiliza el hecho que el integrando de (III.79) es simétrico en las variables de integración, y trabajamos en la discretización del pre-punto. Esta ecuación ha sido escrita con dos sumandos bien diferenciados, el primero da la contribuciones espectrales o armónicos de frecuencias 5ω y 3ω y el segundo a 0 y 3ω. Los cálculos para determinar la contribución a 5ω, siguen las alternativas de los dados en la Sección precedente para el caso de ruido aditivo, con la diferencia que se evalua $\mathcal{Z}_0^{est}$ en $j_1^{(n)}$ en la aproximacion $\varepsilon/M < 1$.

i.1) Contribución espectral o armónico de frecuencia 5ω:

El mismo queda determinado a partir de la integración de

$$(\tfrac{\varepsilon}{8})^2 M \exp\{i\omega T\} \exp\{-\varepsilon_{11}|T|/2 + (\varepsilon_{22}/8M)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

$$\times \int_{t_0}^{T} dt_1 \; g(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \; f(t_2) \quad , \tag{III.81.a}$$

$$g(t_1) = [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_1)) \exp(2Mt_1) - (\Theta(t_1)+2)]$$

$$\times [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_1)) \exp(2Mt_1) - \Theta(t_1)] \tag{III.81.b}$$

$$\times \exp\{i4\omega t_1 - 4\varepsilon_{11}(3t_1 - \min(0,t_1)\} \quad ,$$

$$f(t_2) = [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_2)) \exp(2Mt_2) + (6+\Theta(t_2))]$$

$$\times [(\exp(-2MT) + \Theta(-t_2)) \exp(2Mt_2) + (4+\Theta(t_2))] \tag{III.81.c}$$

$$\times \exp\{ -4\omega t_1 + 4\varepsilon_{11}(3t_1 - \min(0,t_1)\} \quad .$$

Al igual que en el caso aditivo, la contribución espectral de frecuencia 5ω estara dada por

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{z,5\omega} = (\tfrac{\varepsilon}{8})^2 M \exp\{i\omega T\} \exp\{-\varepsilon_{11}|T|/2+(\varepsilon_{22}/8M)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

$$\times G(T) \; [F(0^-) - F(0^+)] \quad , \tag{III.82.a}$$

$$G(T) = \left[\frac{1}{4M - 12\varepsilon_{11} + i4\omega} - \frac{4}{2M - 12\varepsilon_{11} + i4\omega} + \frac{3}{-12\varepsilon_{11} + i4\omega}\right] \exp\{(i4\omega - 12\varepsilon_{11})T\} \tag{III.82.b}$$

$$F(0^-) = \left[\frac{(\exp(-2MT)+1)^2}{4M + 8\varepsilon_{11} - i4\omega} + \frac{10(\exp(-2MT)+1)}{2M + 8\varepsilon_{11} - i4\omega} + \frac{24}{8\varepsilon_{11} - i4\omega} \right], \tag{III.82.c}$$

$$F(0^+) = \left[\frac{\exp(-4MT)}{4M + 12\varepsilon_{11} - i4\omega} + \frac{12\ \exp(-2MT)}{2M + 12\varepsilon_{11} - i4\omega} + \frac{35}{12\varepsilon_{11} - i4\omega} \right]. \qquad (III.82.d)$$

Reteniendo términos de orden cero en la discontinuidad y separando explícitamente la dependencia en el parámetro de expansión ε/ω se tiene

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{z,5\omega} = \frac{1}{64}\ M\ \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2\ \exp\{i5\omega T - 12\varepsilon(a^2+1/2)|T|\}$$

$$\times\ \{A(M/\omega)\ \exp(-2MT)\ +\ B(M/\omega)\}$$

$$\times\ \exp\{-\varepsilon(a^2+1/2)|T|/2 + (\varepsilon/8M)(b^2+1/2)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

(III.83.a)

$$A(\sigma) = \left[\frac{1/2}{\sigma - i} - \frac{1}{\sigma - 2i} \right] \left[\frac{1/4}{\sigma + i} - \frac{2}{\sigma + 2i} - 3i/4 \right], \qquad (III.83.b)$$

$$B(\sigma) = \left[\frac{1/4}{\sigma - i} + \frac{5}{\sigma - 2i} - 11i/4 \right] \left[\frac{1/4}{\sigma + i} - \frac{2}{\sigma + 2i} - 3i/4 \right]. \qquad (III.83.c)$$

i.2) Contribución espectral o armónico de frecuencia 3ω:

La misma está contenida en el segundo sumando de la primera integral y el primer sumando de la segunda integral de la Ec.(III.79). Los cálculos para obtener esta contribución se realizan siguiendo la metodologia indicada en i.1), la misma es

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle^{est}_{2,3\omega} = \frac{1}{4} M \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 \{ \{C(M/\omega)\ \exp(-2M\ T) + D(M/\omega)\}\ e^{i3\omega T} +$$

$$+ \frac{1}{16} \{E(M/\omega)\ \exp(-2M\ T) + F(M/\omega)\}\ e^{-i3\omega T} \}$$

$$\times \exp\{-9\varepsilon(a^2+1/2)|T|/2+(\varepsilon/8M)(b^2+1/2)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

(III.84.a)

$$C(\sigma) = \frac{1}{4} \left[\frac{2b}{2\sigma-i} - \frac{b+ia}{\sigma-i} \right] \left[\frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-i2a}{\sigma+i} - 2a \right], \qquad (III.84.b)$$

$$D(\sigma) = \frac{1}{4} \left[\frac{b}{2\sigma-i} + \frac{2b+i3a}{\sigma-i} + 6a \right] \left[\frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-2ia}{\sigma+i} - 2a \right], \qquad (III.84.c)$$

$$E(\sigma) = \left[\frac{1/2}{\sigma+i} + \frac{1}{\sigma+2i} \right] \left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4 \right], \qquad (III.84.d)$$

$$F(\sigma) = \left[\frac{1/4}{\sigma+i} + \frac{3/2}{\sigma+2i} - 5i/4 \right] \left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4 \right]. \qquad (III.84.e)$$

ii) Contribuciones espectrales o armonicos a $\langle z(T)z(0)\rangle^{est}_2$:

A diferencia de lo que ocurre en el caso aditivo de la FNEBH, donde la autocorrelación de z al orden 2 es nula, por no satisfacerse la condicion de regimén estacionario, aqui existen contribuciones armónicas de frecuencia 3ω. Las mismas estan contenidas en el cálculo de

$$\langle z(T)z(0)\rangle_2^{est} = M\exp\{i\omega T\}\ \mathcal{Z}_2^{est}[\,\delta(\circ-T)+\delta(\circ);\ -i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ 0;\ 0\,]$$

$$= M\exp\{i\omega T\}\ \ \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} dt_1 dt_2 \ \Big\{ \exp\{i\omega(2t_1-4t_2)\}$$

$$\times \left[\left(a\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)} + b\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} - a\right)\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_1)} + \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_1)}\right)\right]$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)} + 2i\right)\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_2^*(t_2)} - \frac{\delta}{\delta j_1^*(t_2)}\right)\right]$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\,j, j^*\,]\ \Bigg|_{\substack{j_1(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+2\delta(\circ-t_1)-4\delta(\circ-t_2);\\ j_2(\circ)=-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));\ \ j_1^*(\circ)=j_2^*(\circ)=0}} \qquad +$$

$$+\ \Gamma(t_1,t_2)\ \Big\}\ .$$

(III.86)

La contribución de frecuencia 3ω a la función de autocorrelación al orden 2 es

$$\langle z(T)z(0)\rangle_{2,3\omega}^{est} = \frac{1}{16}\,M\left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 \Big\{ \{P(M/\omega)\exp(-2M\,T) + Q(M/\omega)\}\ e^{i3\omega T} +$$

$$+ \{R(M/\omega)\exp(-2M\,T) + S(M/\omega)\}\ e^{-i3\omega T} \Big\}$$

$$\cdot \exp\{-9\varepsilon(a^2+1/2)|T|/2+(\varepsilon/8M)(b^2+1/2)(1+\exp(-2M|T|))\}$$

(III.87.a)

$$P(\sigma) = \frac{1}{2}\left[\frac{1/2}{\sigma-i} - \frac{1}{\sigma-2i}\right]\left[\frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-i2a}{\sigma+i} - 2a\right], \qquad \text{(III.87.b)}$$

$$Q(\sigma) = \frac{1}{2}\left[\frac{1/4}{\sigma-i} - \frac{5}{\sigma-2i} - 11i/4\right]\left[\frac{b}{2\sigma+i} - \frac{b-2ia}{\sigma+i} - 2a\right], \qquad \text{(III.84.c)}$$

$$R(\sigma) = \left[\frac{b}{2\sigma+i} + \frac{(b-ia)}{\sigma+i}\right]\left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4\right], \qquad \text{(III.87.d)}$$

$$S(\sigma) = \left[\frac{b}{2\sigma+i} + \frac{(4b-3ia)}{\sigma+i} - 6a\right]\left[\frac{1/4}{\sigma-i} + \frac{2}{\sigma-2i} + 3i/4\right]. \qquad \text{(III.87.e)}$$

III.7. APENDICE A:

Se da aqui como debe ser interpretada una EDE en el sentido de Ito cuando la misma tiene originalmente una prescripción de discretización arbitraria.

Dada la EDE

$$\dot{q}^{\mu} = a^{\mu}(q,t) + \eta^{1/2}\, \sigma^{\mu}_{k}(q,t)\, \xi^{k}(t) \quad , \qquad \text{(III.A.1.a)}$$

con condición inicial

$$q^{\mu}(t_{o}) = Q^{\mu}_{o} \quad , \qquad \text{(III.A.1.b)}$$

donde $\mu=1,\ldots,m$ y siendo $\xi^{k}(t)$ $(k=1,\ldots,d\leq m)$ ruidos blancos con valor medio nulo y funciones de correlación

$$\langle \xi^{k}(t)\, \xi^{l}(t')\rangle = Q^{kl}\, \delta(t-t') \quad . \qquad \text{(III.A.2)}$$

La Ec.(III.A.1) puede ser escrita en forma diferencial como

$$dq^{\mu} = a^{\mu}(q,t)\ dt + \eta^{1/2}\ \sigma^{\mu}_{k}\ (q,t)\ dw^{k} \quad , \tag{III.A.3}$$

siendo $dw^{k} = \xi^{k}(t)\ dt$. Esta ecuación puede ser interpretada en el discreto en un sentido arbitrario, es decir

$$q^{[r]}(t_{j}) \equiv q^{[r]}_{i} = q_{j-1} + r\ \Delta q_{j} \quad , \tag{III.A.4.a}$$

$$\Delta q_{j} = q_{j} - q_{j-1} \quad , \tag{III.A.4.b}$$

$$t_{j} - t_{j-1} = \varepsilon \quad , \qquad r \in [0,1] \quad . \tag{III.A.4.c}$$

La Ec.(III.A.3) sera

$$\Delta q^{\mu}_{j} = \varepsilon\ a^{\mu}(q^{[r]}_{j}, \underline{t}_{j}) + \eta^{1/2}\ \sigma^{\mu}_{k}\ (q^{[r]}_{j}, \underline{t}_{j})\ \Delta w^{k} \quad . \tag{III.A.5}$$

con $\underline{t}_{j} \in [t_{j-1}, t_{j}]$. Desarrollando en serie alrededor de q_{j-1}

$$\Delta q^{\mu}_{i} = \varepsilon\ [\ a^{\mu}(q_{j-1}, \underline{t}_{j}) + \eta^{1/2}\ r\ \frac{\partial a^{\mu}}{\partial q^{\nu}_{j-1}}\ \Delta q^{\nu}_{j} + \cdots\ ] \ +$$
$$+\ \eta^{1/2}\ [\ \sigma^{\mu}_{k}\ (q_{j-1}, \underline{t}_{j}) + s\ \frac{\partial \sigma^{\mu}_{k}}{\partial q^{\nu}_{j-1}}\ \Delta q^{\nu}_{i} + \cdots\ ]\ \Delta w^{k} \quad , \tag{III.A.6}$$

con $s \in [0,1]$. Teniendo en cuenta que Δw_{i} es de orden 1/2 en ε, puesto que

$$\Delta w^i \Delta w^j = \varepsilon\ Q^{ij} \qquad , \qquad \text{(III.A.7)}$$

tenemos que

$$\Delta q^{\mu}_{j} = \eta^{1/2}\ \sigma^{\mu}_{k}\ (g_{j-1}, \underline{t}_j)\ \Delta w^k + \theta(\varepsilon) \quad . \qquad \text{(III.A.8)}$$

Reemplazando en la Ec.(III.A.6), reteniendo términos de hasta orden 1 en ε luego de usar la Ec.(III.A.7), se tiene que

$$\Delta q^{\mu}_{j} = \varepsilon\ A^{\mu^{[s]}}(g_{j-1}, \underline{t}_j) + \eta^{1/2}\ \sigma^{\mu}_{k}(g_{j-1}, \underline{t}_j)\ \Delta w^k \quad , \qquad \text{(III.A.9)}$$

donde

$$A^{\mu^{[s]}}(g_{j-1}, \underline{t}_j) = a^{\mu}(g_{j-1}, \underline{t}_j) + \eta\ s\ \frac{\partial \sigma^{\mu}_{k}}{\partial q^{\nu}_{j-1}}\ \sigma^{\nu}_{l}(g_{j-1}, \underline{t}_j)\ Q^{kl}, \qquad \text{(III.A.10)}$$

es llamado término de arrastre espureo. La Ec.(III.A.9) se dice que esta discretizada en el prepunto, o que esta en la forma de Ito. La misma guarda "memoria" de la EDE original (III.A.5) unicamente a traves de del parametro $s \in [0,1]$. De esta forma los terminos que se agregan al arrastre provienen solo de los elementos de la matriz de difusión. En Ec.(III.A.9) si $s=0$ ($s=1/2$) se dice que la Ec.(III.A.5) esta en el sentido de Ito (Stratonovich). Cuando se dice que los cálculos son efectuados en el sentido usual nos referimos a que la EDE es interpretad en el sentido de Stratonovich. A lo largo de este cápitulo se ha utilizado $Q^{ij} = 1$.

III.8. APENDICE B:

Aquí daremos el cálculo de integración de la FOL que es utilizada a lo largo de este Capítulo:

$$\mathcal{Z}\,[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\ \mathcal{D}\underset{\sim}{q}\ \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ \left[(i/2)p_\mu C_{\mu\nu}p_\nu + p_\mu(\dot{q}^\mu+\lambda^{(\mu)}q^\mu) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + j_\mu q^\mu + j^{*\mu}p^\mu \right] \right\} \Big|_{q^\mu(t_o)=Q_o^\mu} \quad , \tag{III.B.1}$$

y determinaremos las funciones de Green.

Utilizamos la propiedad que satisface todo funcional $K[\underset{\sim}{x}]$ de $\{x_\mu\}$

$$\int \mathcal{D}\underset{\sim}{x}\ \frac{\delta}{\delta x_\mu(\tau)}\, K[\underset{\sim}{x}] = 0 \quad , \tag{III.B.2}$$

e imponiendo las condiciones de contorno sobre las derivadas funcionales de $\mathcal{Z}_o$ respecto de las fuentes:

$$\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_\mu(t)}\,\mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\Big|_{t=t_o} = Q_o^\mu\ \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] \quad , \tag{III.B.3.a}$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(t)}\,\mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\Big|_{t=T} = 0 \quad . \tag{III.B.3.b}$$

De acuerdo a la propiedad (III.B.2) derivando el exponencial de

(III.B.1) respecto a $q^{\mu}(\tau)$ se obtiene[1]:

$$0 = \int \mathcal{D}p\, \mathcal{D}q\, [-\dot{p}_{\mu} + \lambda^{(\mu\nu)} p_{\mu} + j_{\mu}] \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\, [p_{\mu}\dot{q}^{\mu} + \mathcal{H}_o(p,q;\tau) + j_{\mu}q^{\mu} + j^{*\mu}p_{\mu}] \right\} \Big|_{q^{\mu}(t_o)=Q_o^{\mu}}$$

(III.B.4)

expresión que dada en términos de $\mathcal{Z}_o$ es

$$(d/d\tau - \lambda^{(\mu\nu)}) \; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^{*}_{\sigma}(t)} \mathcal{Z}_o[j,j^{*}] = j_{\mu}(\tau)\, \mathcal{Z}_o[j,j^{*}] \; . \qquad \text{(III.B.5)}$$

Derivando funcionalmente el exponencial de (III.B.2) respecto de $p_{\mu}(\tau)$:

$$0 = \int \mathcal{D}p\, \mathcal{D}q\, [\dot{q}_{\mu} + \lambda^{(\mu\nu)} q_{\mu} + j^{*\mu} + iC^{\mu\nu}p_{\nu}] \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\, [p_{\mu}\dot{q}^{\mu} + \mathcal{H}_o(p,q;\tau) + j_{\mu}q^{\mu} + j^{*\mu}p^{\mu}] \right\} \Big|_{q^{\mu}(t_o)=Q_o^{\mu}}$$

(III.B.6)

y expresada en términmimos de $\mathcal{Z}_o$ es

$$(d/d\tau + \lambda^{(\mu\nu)}) \; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j_{\mu}(\tau)} \mathcal{Z}_o[j,j^{*}] = -(j^{*}_{\mu}(\tau) + C^{\mu\sigma} \frac{\delta}{\delta j^{*}_{\sigma}(\tau)})\, \mathcal{Z}_o[j,j^{*}]$$

(III.B.7)

La Ec.(III.B.5) con condición de contorno (III.B.3.b) tiene

---

[1] $\mathcal{H}_o(p,q;t) = -1/2\; p_{\mu}C^{\mu\nu}p_{\nu} - p_{\mu}\lambda^{\mu}_{\nu}q^{\nu}$

solución:(T≥t)

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^*_{\mu}(t)} \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = -\int_{t_o}^{T} d\tau\ S^{(\mu)}(\tau - t)\ j_{\mu}(\tau)\ \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] , \tag{III.B.8}$$

siendo la función de Green

$$S^{(\mu)}(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau')\ \exp\{-\lambda^{(\mu)}(\tau-\tau')\} . \tag{III.B.9}$$

La Ec.(III.B.7) con condición de contorno (III.B.3.a) tiene solución

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\mu}(t)} \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = Q^{\mu}_{o}\ \exp\{-\lambda^{(\mu)}(t-t_o)\}\ \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] -$$

$$- \int_{t_o}^{T} d\tau\ \left(j^*_{\mu}(\tau) + G^{\mu\sigma}\frac{\delta}{\delta j^*_{\sigma}(\tau)}\right) \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*]\ \exp\{-\lambda^{(\mu)}(t-\tau)\}$$

(III.B.10)

Reemplazando explicitamente (A.8) en la Ec.(A.10)

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\mu}(t)} \mathcal{Z}_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = Q^{\mu}_{o}\ S^{(\mu)}(t-t_o) - \int_{t_o}^{T} d\tau\ j^{*\mu}(\tau)\ S^{(\mu)}(t,\tau) +$$

$$+ i\int_{t_c}^{T} d\tau'\ R^{\mu\nu}(t,\tau')\ j^{\nu}(\tau') ,$$

(III.B.11)

siendo la 2da. función de Green

$$R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = \int_{t_o}^{\tau} dt'\ S^{(\mu)}(\tau,t')\ G^{\mu\nu}\ S^{(\nu)}(\tau',t') \ , \qquad \text{(III.B.12)}$$

que satisface la propiedad $R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = R^{\nu\mu}(\tau',\tau)$. Integrando (III.B.12) se tiene:

$$R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = \frac{1}{2}\ \frac{G^{\mu\nu}}{\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\nu)}} \left[\exp(-\lambda^{(\mu)}\tau\ -\lambda^{(\nu)}\tau') + \exp(-\lambda^{(\nu)}\tau\ -\lambda^{(\mu)}\tau')\right]$$

$$\times \left[\exp[\,(\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\nu)})\min(\tau,\tau')\ - \exp[\,(\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\nu)})t_o\right]$$

(III.B.13)

En el caso particular $\lambda^{(\mu)} = \lambda^{(\nu)} = 0$, que se utiliza en varias oportunidades, la función de Green es

$$R^{\mu\nu}(\tau,\tau') = G^{\mu\nu}(\min(\tau,\tau') - t_o) \ . \qquad \text{(III.B.14)}$$