Capítulo II

La Integral Funcional para Procesos Estocásticos definidos en un anillo

C A P I T U L O II

II.1. INTRODUCCION:

Se presenta el formalismo que permite obtener las Representaciones por Integral Funcional (RIF), para densidades de probabilidad de transición, promedios de funciones de las variables periódicas y funcionales generatrices, en el caso que el proceso estocástico este definido en el toro. En la forma normal de una bifurcación de Hopf con ruido las variables criticas (z,z^*) definen un proceso estocástico en el plano complejo, en cambio en coordenadas polares (ρ,θ) el espacio de configuración es el cilindro $\mathbb{R}^+\times\mathbb{S}^1$. Aqui $\mathbb{S}^1=\mathbb{R}_{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}$ índica reales módulo 2π y tiene la topología del anillo, es decir los dos extremos del intervalo $[0,2\pi]$ se identifican el uno con el otro. En este caso $\mathbb{R}$ es su espacio de recubrimiento, ya que $\mathbb{S}^1$ es el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}$ de los reales por el grupo de traslaciones enteras módulo 2π. Un proceso estocástico definido en el toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ admite como espacio de recubrimiento a $\mathbb{R}^2$.

Esto motiva a desarrollar un formalismo para obtener RIF que tenga en cuenta la topología del espacio donde esta definido el proceso estocástico. El toro d-dimensional $\mathbb{T}^d=\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1$ (d veces) se trata de una variedad compacta y no de un espacio abierto tipo $\mathbb{R}^d$. Todas las funciones de las variables definidas en el toro, y que caracterizan el proceso estocástico, deben ser periódicas, en el caso de $\mathbb{S}^1$ deben ser 2π periódicas.

El formalismo de integral funcional a desarrollar es aplicable tambien al caso en el cual el proceso estocástico este definido en un espacio abierto tipo $\mathbb{R}^d$, pero existan condiciones periódicas de contorno.

Las RIF son halladas en primer lugar Secc.(II.2) a partir del formalismo de operadores de la Mecánica Cuántica, siguiendo las alternativas del cálculo usual de la Integral de Camino de Feymann [Fe48] definida en $\mathbb{R}$, aunque el punto de partida es basicamente el mismo se introducen nuevas alternativas en los cálculos que tienen en cuenta la topología. Se obtienen las RIF para la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT) asi como la Funcional Generatriz (FG) de momentos y funciones de correlación de funciones 2π periódicas. Estos resultados son obtenidos en la Secc.(II.3) a partir de la Ecuación Diferencial Estocastica (EDE) que caracteriza al proceso estocástico en estudio. En ambos casos se estudia el caso unidimensional $\mathbb{S}^1$, siendo la extensión a un número mayor de dimensiones inmediata sin presentar dificultades adicionales.

II.2. DERIVACION DE LAS REPRESENTACIONES DE INTEGRAL FUNCIONAL A PARTIR DE LA ECUACION DE FOKKER-PLANCK

II.2.A. Formalismo:

Sea $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)$ la solución o propagador de la ecuación de diferencial de primer orden (en el tiempo t) de:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}(\underset{\sim}{\theta},\partial,t) \right] \Phi(\underset{\sim}{\theta},t) = 0 \qquad . \qquad \text{(II.1)}$$

Las condiciones de contorno periódicas deben ser especificadas en el espacio $\underset{\sim}{\theta}$, mientras que la condición inicial debe tener en cuenta la periodicidad de la variable. El operador $\mathcal{L}$ no debe ser necesariamente hermítico y puede depender explicitamente del tiempo. Los casos de interés físico aquí son los que contienen el operador $\partial=\partial/\partial t$ hasta orden 2. Puede ser escrito en forma general como:

$$\mathcal{L}(\underset{\sim}{\theta},\partial,t) = 1/2\ c\ \partial_\mu \partial_\nu Q^{\mu\nu}(\underset{\sim}{\theta},t) + \partial_\mu A^\mu(\underset{\sim}{\theta},t) + 1/c\ V(\underset{\sim}{\theta},t)\ , \tag{II.2}$$

donde los índices griegos van desde 1 hasta d, la dimensión del espacio $\underset{\sim}{\theta}$. c es un número complejo, con parte real positiva. Si c=i la ecuación (II.1) es una ecuación de Schrödinger, si c=1 es una ecuación tipo difusión o de Fokker-Planck (EFP).

En el caso que (II.1) sea una ecuación de Schrödinger se tiene que $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o) = \langle\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o\rangle$, es la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT) de que el sistema pase del estado $|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o\rangle$ al tiempo t_o al estado $|\underset{\sim}{\theta},t\rangle$ al tiempo t. En el caso que represente una ecuación de Fokker-Planck, $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)$ tiene la interpretación de una DPT o condicional de que el sistema este en $\underset{\sim}{\theta}$ al tiempo t si estaba en $\underset{\sim}{\theta}_o$ al tiempo t_o ($t<t_o$), $Q^{\mu\nu}$ es conocida como matriz de difusión y A^μ como vector de arrastre.

La propiedad de $P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)$, que permite obtener su representación por integral funcional es la ley de semigrupo:

$$P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o) = \int d\underset{\sim}{\theta}'\ P(\underset{\sim}{\theta},t|\underset{\sim}{\theta}',t')\ P(\underset{\sim}{\theta}',t'|\underset{\sim}{\theta}_o,t_o)\ , \tag{II.3}$$

con $d\underset{\sim}{\theta} = d\theta_1 ... d\theta_d$ e integrando sobre todo el espacio $\underset{\sim}{\theta}$.

En dinámica de Fokker-Planck (II.3) se llama Ecuación de Chapman-Kolmogorov y expresa la propiedad de Markov del proceso estocástico $\underset{\sim}{\theta}$.

Consideremos el caso unidimensional de aqui en adelante, suprimiendo los subíndices griegos en la notación. Una RIF de la DPT se obtiene de la siguiente forma: se divide el intervalo de tiempo $[t_o,t]$ en N+1 intervalos de longitud $\varepsilon=(t-t_o)/(N+1)$, indicando los tiempos intermedios por $t_j=t_o+j\varepsilon$ $(j=0,...,N+1)$ y tomando $t_{N+1}= t$. Iterando (I.4) obtenemos (con $q_{N+1}= q$):

$$P(\theta,t|\theta_o,t_o) = \int \prod_{i=1}^{N} d\theta_i \prod_{j=1}^{N+1} P(\theta_j,t_j|\theta_{j-1},t_{j-1}) . \tag{II.4}$$

Es de interés expresar (II.4) en el límite $N \longrightarrow \infty$, asi $\varepsilon=t_j-t_{j-1}$ se vuelve arbitrariamente pequeño y $P(\theta_j,t_j|\theta_{j-1},t_{j-1})$ se llama en Mecánica Cuántica propagador a tiempos cortos. Se demuestra [LR82] que si el límite existe cada propagador a tiempos cortos contribuye a $P(\theta,t|\theta_o,t_o)$ con términos a orden ε solamente. Esta manera de hallar la RIF ha sido analizada profusamente en la bibliografía a partir de los trabajos de Feymann [Fe48, FH65]. Nos ocuparemos aqui del caso en el cual el proceso estocástico este definido en $\mathbb{S}^1$ para obtener la RIF. Las mismas pueden ser halladas por diferentes procedimientos que describiremos a continuación, y la extensión a $\mathbb{T}^d$ resulta inmediata en todos los casos. Se presenta un enfoque a partir del formalismo de operadores de la Mecánica Cuántica, en forma análoga a el cálculo usual de la integral de camino de Feymann definida en la linea, aunque el punto de partida es el mismo se introducen nuevas alternativas en el mismo. Estos resultados pueden ser tambien obtenidos a partir de la EDE, teniendo en cuenta la topología en la cual está definido el proceso estocástico.

La condición de periodicidad para el operador $\mathcal{L}$ debe ser exigida:

$$\mathcal{L}(\theta,\partial,t) = \mathcal{L}(\theta+2\pi,\partial,t) \quad , \tag{II.5}$$

de esta forma $Q(\theta,t)$, $A(\theta,t)$, $V(\theta,t)$ deben ser periódicos.

Consideremos el caso de la EFP (II.1) con $c=1$ y $V(\theta,t)=0$, para obtener una RIF para la DPT $P(\theta,t|\theta_o,t_o)$. La condición inicial [Gr83] estará dada por

$$\begin{aligned} P(\theta,t_o|\theta_o,t_o) &= \delta^{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}(\theta-\theta_o) \quad . \\ &= \sum_{\mathbb{Z}} \delta(\theta-\theta_o-2n\pi) \quad . \end{aligned} \tag{II.6}$$

Introduciendo operadores $\hat{\theta}$ y $\hat{n}$ con reglas de conmutación

$$[\hat{\theta} , \hat{n}] = i \quad , \tag{II.7}$$

y con representación

$$\hat{\theta} \longrightarrow \theta \quad , \quad \hat{n} \longrightarrow -i\ \partial/\partial\theta \quad , \tag{II.8}$$

y definiendo estados $|\theta\rangle$ y $|n\rangle$ de forma que

$$\hat{\theta}\ |\theta\rangle = \theta\ |\theta\rangle \quad , \quad \hat{n}\ |n\rangle = n\ |n\rangle \quad , \tag{II.9}$$

con normalización

$$\langle\theta'|\theta\rangle = \delta(\theta-\theta') \quad , \quad \langle\theta|n\rangle = (2\pi)^{-1/2} e^{in\theta} \quad . \tag{II.10}$$

Las relaciones de completitud para los estados base estan dadas por:

$$\sum_{\mathbb{Z}} \ |n\rangle\langle n| = \hat{1} \quad , \tag{II.11.a}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \quad |\theta\rangle\langle\theta| = 1 \quad . \tag{II.11.b}$$

Aplicando el bra $\langle\theta'|$ y el ket $|\theta\rangle$ a (II.11.a) y el bra $\langle n'|$ y el ket $|n\rangle$ a (II.11.b) se obtienen las relaciones de completitud y de normalización respectivamente:

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}} \exp(in(\theta-\theta')) = 2\pi\ \delta(\theta-\theta') \quad , \tag{II.12.a}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta\ \exp(i(n-n')\theta) = 2\pi\ \delta_{nn'} \quad . \tag{II.12.b}$$

Podemos identificar el operador $\mathcal{L}$ de (II.1) con un operador llamado "Hamiltoniano":

$$\mathcal{H}(\hat{\theta},\hat{n};t) = i\ \mathcal{L}(\hat{\theta},i\hat{n};t) \quad . \tag{II.13}$$

A travez de la regla de correspondencia (II.8) tenemos:

$$\mathcal{H}(\hat{\theta},\hat{n};t) = i\ [\,-1/2\ \hat{n}^2\hat{G}(\hat{\theta})\ -i\ \hat{n}\ \hat{A}(\hat{\theta})\ ]\quad . \tag{II.14}$$

De esta forma, utilizando la representación de Heisemberg ya que:

$$P(\theta,t\,|\,\theta',t') = \langle\theta,t\,|\,\theta_o,t_o\rangle\quad , \tag{II.15}$$

los operadores dependientes del tiempo son definidos como:

$$\hat{n}(t) = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)\ \hat{n}\ \hat{\mathcal{U}}(t)\quad , \tag{II.16.a}$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)\ \hat{\theta}\ \hat{\mathcal{U}}(t)\quad , \tag{II.16.b}$$

y los vectores de estado bra y ket como:

$$\langle\theta,t\,| = \langle\theta|\ \hat{\mathcal{U}}(t)\ ,\ |\theta,t\rangle = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)\ |\theta\rangle\ , \tag{II.17}$$

siendo $\hat{\mathcal{U}}(t) \equiv \hat{\mathcal{U}}(t,0)$; asi tenemos que:

$$P(\theta,t\,|\,\theta',t') = \langle\theta\,|\,\hat{\mathcal{U}}(t,t_o)\,|\,\theta_o\rangle\quad , \tag{II.18}$$

donde $\hat{\mathcal{U}}(t,t')$ satisface:

$$\left[\ i\ \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(\hat{\theta},\hat{n},t)\ \right]\ \hat{\mathcal{U}}(t,t_o) = 0\quad , \tag{II.19}$$

con condición inicial:

$$\hat{\mathcal{U}}(t_0,t_0) = \hat{1} \quad . \tag{II.20}$$

El uso repetido de la propiedad de semigrupo del operador evolución $\hat{\mathcal{U}}(t_1,t_2) = \hat{\mathcal{U}}(t_1,t')\,\hat{\mathcal{U}}(t',t_2)$ con $t_1<t'<t_2$ y la relación de completitud para el estado $|\theta\rangle$ dada por (II.11.b) permite obtener (II.3), que en términos del operador evolución a tiempos cortos $\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})$, con $t_j-t_{j-1}= \varepsilon j$, queda expresada como:

$$P(\theta,t\,|\theta_0,t_0) = \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{N} d\theta_i \prod_{j=1}^{N+1} \langle\theta_j|\ \hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})\ |\theta_{j-1}\rangle \ . \tag{II.21}$$

El procedimiento usual es aproximar $\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})$ a orden ε, ya que son solo términos de este orden los que contribuyen en la integral funcional cuando $N \longrightarrow +\infty$ y $\varepsilon \longrightarrow 0$, con $t-t_0$ finito. Así:

$$\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1}) = \hat{1} - i\varepsilon\ \mathcal{H}(\hat{\theta},\hat{n};\bar{t}_j) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad , \tag{II.22}$$

con $t_{j-1} < \bar{t}_j < t_j$.

Introduciendo en el propagador a tiempos cortos $\langle\theta_j|\ \hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})\ |\theta_{j-1}\rangle$ la relación de completitud $\sum_{n_j\in\mathbb{Z}} |n_j\rangle\langle n_j| = \hat{1}$, se obtiene utilizando (II.10):

$$\langle\theta_j|\hat{\mathcal{U}}(t_j,t_{j-1})|\theta_{j-1}\rangle = (2\pi)^{-1/2}\sum_{n_j\in\mathbb{Z}}(1-i\varepsilon h(n_j,\theta_{j-1}))\ \exp(in_j\Delta\theta_j)$$

$$\simeq (2\pi)^{-1/2}\sum_{n_j\in\mathbb{Z}}\exp\left(in_j\Delta\theta_j - i\varepsilon\ h(n_j,\theta_{j-1})\right) \quad , \tag{II.23}$$

con $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$,siendo:

$$h(n_j,\theta_{j-1}) = -(i/2)\ n_j^2\ G(\theta_{j-1}) + n_j\ A(\theta_{j-1})\ . \tag{II.24}$$

El operador Hamiltoniano (II.14) esta dado en orden anti-estandard o normal, es decir, todos los operadores $\hat{n}$ estan a la izquierda de los operadores $\hat{\theta}$. Esto da lugar a la RIF en la discretización de pre-punto, es decir, el Hamiltoniano (II.24) es evaluado en $\theta_{j-1} = \theta(t_{j-1})$, suele denotarse por $\gamma(0)$. Prescripciones de discretización diferentes pueden ser obtenidas, estas se derivan de todas las formas posibles de ordenar los factores no-conmutantes en el operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$. La técnica para obtenerlas es desarollada en [La82][1] . A efectos de este cálculo se utilizo la discretización $\gamma(0)$, aunque cualquier otra podria haberse elegido.

Reemplazando (II.23) en (II.21) se obtiene la siguiente expresión para la DPT (con $\theta = \theta_{N+1}$):

---

[1] Pag.15

$$P(\theta,t|\theta_o,t_o) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to+\infty}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{n_{N+1}\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_N}{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi}$$

$$\times \exp\left\{ \sum_{j=1}^{N+1} \left[i n_j(\Delta\theta_j - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2\; n_j^2\; G(\theta_{j-1})\right]\right. \tag{II.25}$$

Esta RIF para la DPT no es la adecuada a efectos prácticos, ya que las integrales van de 0 a 2π y tenemos una suma múltiple de caminos. La expresión obtenida es análoga a la RIF en $\mathbb{R}$, el rol de los momentos conjugados de la coordenada es desempeñado por enteros n_i, $i = 1,\ldots,N+1$. La existencia de las variables enteras es natural y consecuencia de la periodicidad. Aqui la integral funcional queda restringida a S^1. Si al comenzar los cálculos se hubiese tomado $V(\theta) \neq 0$ y 2π periódico, se agrega en la suma del exponencial de (II.25) el término $-\varepsilon V(\theta_{j-1})$ y la inclusión de este término no agregara dificultades en los cálculos.

El caso $A(\theta) = G(\theta) = V(\theta) = 0$, conocido como caso de partícula libre no masiva en Mecánica Cuántica, ha sido analizado extensamente por medio de expansión en autofunciones [Ma80, MT78], a partir de teoría de grupos [Do71, Do74, Sh68, Sh81], etc. En Ref. [We79] una de las conclusiones es que no es posible encontrar una expresion cerrada para las sumas Gaussianas (II.25) como en el caso de las integrales Gaussianas de los momentos conjugados de las coordenadas definidas en $\mathbb{R}$, salvo en el caso de partícula libre sin masa. Aqui se da una forma alternativa de efectuar los cálculos.

II.2.B. La Densidad de Probabilidad de Transición en $\mathbb{S}^1$:

En esta Subsección se muestra que como el rango de integración para θ puede ser extendido del intervalo $[0,2\pi]$ a $\mathbb{R}$. La técnica consiste en utilizar una identidad, generalización de la conocida fórmula de Poisson [Be61], aplicable al propagador a tiempos cortos (II.23):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n_j} \exp\{i n_j (\Delta\theta_j - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2 \; n_j^2 \; \mathbf{G}(\theta_{j-1})\} =$$

$$= (2\pi\varepsilon \mathbf{G}(\theta_{j-1}))^{-1/2} \sum_{n_j} \exp\left\{- \frac{[\Delta\theta_j - 2n_j\pi - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})]^2}{2\,\varepsilon\,\mathbf{G}(\theta_{j-1})}\right\} , \tag{II.26}$$

que se halla demostrada en el Apendice. La expresión (II.25) para la DPT sera, a menos de una fase $2n_j n_{j-1}\pi$ en (II.26),

$$P(\theta,t|\theta_0,t_0) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{n_{N+1} \in \mathbb{Z}} (2\pi\varepsilon\mathbf{G}(\theta_0))^{-1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_N}{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi}$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} (2\pi\varepsilon\mathbf{G}(\theta_{j-1}))^{-1/2} \exp\left\{- \sum_{j=1}^{N+1} \frac{[\Delta\theta_j - 2n_j\pi - + 2n_{j-1}\pi - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})]^2}{2\,\varepsilon\,\mathbf{G}(\theta_{j-1})}\right\} \tag{II.27}$$

Haciendo la sustitución $q_j = \theta_j + 2n_j\pi$ ($\forall$ j: j=0,...,N+1), por periodicidad $\mathbf{A}(q_j)=\mathbf{A}(\theta_j)$ y $\mathbf{G}(q_j)=\mathbf{G}(\theta_j)$ es posible llevar el intervalo de integración de $[0,2\pi]$ a $[2n_j\pi\ ,\ 2(n_j+1)\pi]$ de la siguiente manera

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} (\cdot)\ d\theta \ = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot)\ dq \quad .$$

Luego

$$P(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to+\infty}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi\varepsilon G(\theta_o))^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i (2\pi\varepsilon G(\theta_{i-1}))^{-1/2}$$

$$\times \quad \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N+1} \frac{[\,\Delta\theta_j - \varepsilon A(\theta_{j-1})]^2}{2\ \varepsilon\ G(\theta_{j-1})}\right\}\Bigg|_{q_{N+1}=\theta+2\pi,\ q_0=\theta_o} ,$$

(II.28)

De esta forma se ha pasado de tener una RIF en $\mathbb{S}^1$ a otra definida en $\mathbb{R}$, sin embargo la Ec.(II.28) guarda memoria de la topología en la suma sobre n y en que θ y θ_o esten definidos en $\mathbb{S}^1$. Esta expresión resulta de utilidad a los fines prácticos, puesto que si es conocida la expresion para la DPT en $\mathbb{R}$, es posible determinarla en el presente caso. Una notación abreviada para la Ec.(II.28) es

$$P(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}q \ \ \exp\left\{-\ 1/2 \int_{t_o}^{t} d\tau\ L^{\gamma(o)}\ (\dot q(\tau),q(\tau))\right\}$$

$$\times \quad \delta(q_o-\theta_o)\ \ \delta(q-\theta+2n\pi) \qquad ,$$

(II.29.a)

$$L(\dot{q},q) = G(q)^{-1}\,[\,\dot{q} - A(q)]^{2} \quad , \qquad \text{(II.29.b)}$$

siendo la medida de integración definida por

$$Dq \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} (2\pi\varepsilon G(\theta_0))^{-1/2} \prod_{i=1}^{N} dq_i (2\pi\varepsilon G(\theta_{i-1}))^{-1/2}, \qquad \text{(II.30)}$$

y $\gamma(0)$ nos indica que las funciones de q deben ser evaluadas en el pre-punto.

II.2.C. Representación por Integral Funcional de Promedios Estocásticos:

Es de interés derivar una expresión en integral funcional para promedios estocásticos de funciones 2π periódicas de la variable θ a tiempos comprendidos en $[t_0,t]$ a partir de

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_0^{2\pi} \prod_{i=0}^{N+1} d\theta_j \quad F\{\theta_j\} \quad W_{N+2}(\theta_{N+1},t_{N+1};...;\theta_0,t_0) \; ,$$

(II.31)

con $\{\theta(t_j)\}=(\theta(t_1),...,\theta(t_{N+1}))$, $t_0 < \cdots < t_k < \cdots < t_{N+1}$, siendo $W_{N+2}(\theta_{N+1},t_{N+1};...;\theta_0,t_0)$ la Densidad de Probabilidad Conjunta (DPC) del proceso θ. Si el proceso es de Markov, la DPC es expresable en terminos de la DPT:

$$W_{N+2}(\theta_{N+1},t_{N+1};...;\theta_0,t_0) = \prod_{j=1}^{N+1} P(\theta,t\,|\,\theta_0,t_0) \quad W(\theta_0,t_0) \; .$$

(II.32)

De esta forma (II.31) puede ser expresado alternativamente en el formalismo de operadores, con condición inicial $W(\theta,t_0)=\delta(\theta-\theta_0)$ queda:

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_0^{2\pi} d\theta \quad \langle \theta\, t\,|\hat{F}\{\hat{\theta}_j\}|\,\theta_0\, t_0\rangle \quad . \tag{II.33}$$

Si F es periódica para todo θ_j , es posible definir una función $\mathcal{R}:\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $F\{\theta_j\}=F\{R(\theta_j)\}$. Realizando los cálculos ya descriptos para la DPT tenemos que:

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\longrightarrow 0\\ N\longrightarrow +\infty}} (2\pi\varepsilon\mathbf{G}(\theta_0))^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} dq_i\, (2\pi\varepsilon\mathbf{G}(\theta_{i-1}))^{-1/2}$$

$$\times \quad F\{R(\theta_j)\} \quad \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N+1} \frac{[\,\Delta\theta_j - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})\,]^2}{2\ \varepsilon\ \mathbf{G}(\theta_{j-1})}\right\}\Bigg|_{q_0=\theta_0} \tag{II.34}$$

Notemos que esta última expresión no contiene una suma sobre n, a diferencia de lo que ocurre para la DPT (II.26). En consecuencia el promedio de funciones 2π periódicas en $\mathbb{S}^1$ es igual al promedio de estas en $\mathbb{R}$. En el cálculo usual no existen restricciones acerca de las funciones con las cuales se trabaja. La Ec.(II.34) puede ser escrita abreviadamente

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_{\gamma(0)} Dq \ \exp\left\{-1/2 \int_{t_0}^{t} d\tau \ L^{\gamma(0)}(q(\tau),\dot{q}(\tau))\right\} \ F\{R(\theta_j)\} \ \delta(q_0-\theta_0) \tag{II.35}$$

siendo en este caso la medida de integración

$$\mathcal{D}q \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} (2\pi\varepsilon G(\theta_0))^{-1/2}\, dq_{N+1} \prod_{i=1}^{N} dq_i (2\pi\varepsilon G(\theta_i))^{-1/2} \ . \qquad (II.36)$$

II.3. REPRESENTACIONES POR INTEGRAL FUNCIONAL A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL ESTOCASTICA:

Dada la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) o de Langevin para un proceso unidimensional definido en S^1:

$$\dot{\theta} = A(\theta) + \eta^{1/2} g(\theta)\, f(t) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)\ , \qquad (II.37)$$

con condición inicial

$$\theta(t_0) = \theta_0 \ , \qquad (II.38)$$

e interpretada en el sentido de Ito, es decir todas las funciones de θ son evaluadas en el pre-punto $\theta(t_j)=\theta_{j-1}$,si dividimos el intervalo de tiempo $[t_0,t]$ en N+1 intervalos de longitud $\varepsilon=(t_j-t_0)/j$ $(t=t_{N+1}$ $j=1,\ldots,N+1)$. mod 2π indica que la variable $\theta\in S^1$,mientras que $A(\theta)$ y $g(\theta)$ son funciones 2π periódicas. $f(t)$ es ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y con autocorrelación una distribución delta de Dirac:

$$\langle f(t)\rangle = 0 \quad ,$$
$$\langle f(t)\, f(t')\rangle = \delta(t-t') \quad , \tag{II.39}$$

y η es la intensidad de la fuente de ruido. La EDE (II.37) admite como solución para f(t) fijo a $\theta_f(t;\theta_0,t_0)$ un funcional de f(t) definido en $\mathfrak{S}^1$.

Escribiendo la EDE en su forma diferencial

$$d\theta = \mathbf{A}(\theta)\, dt + \eta^{1/2}\mathbf{g}(\theta)\, dw \quad , \tag{II.40}$$

donde dw es el diferencial de un proceso de Wiener definido por

$$dw = f(t)\, dt \quad , \tag{II.41}$$

podemos considerar la DPT para el proceso estocástico θ y construir la RIF para ella a partir de la EDE.

A efectos de una descripción suficientemente precisa, consideremos la ecuación (II.40) en el discreto:

$$\Delta\theta_j = \varepsilon\ \mathbf{A}(\theta_{j-1}) + \eta^{1/2}\mathbf{g}(\theta_{j-1})\ \Delta w_j \ , \tag{II.42}$$

siendo $\theta_j = \theta(t_j)$, $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $w_j = w(t_j)$, $\Delta w_j = w_j - w_{j-1}$. Cualquier funcional $F\{\theta_f(t_k)\}$ de f(t), usando la notación $\theta_f(t_k) = \theta_f(t_k;\theta_0,t_0)$ y $\{\theta_f(t_k)\} = (\theta_f(t_1),\ldots,\theta_f(t_{N+1}))$, puede ser expresado como

$$F\{\theta_f(t_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=0}^{N+1} dq_j \quad F\{R(q_j)\} \quad \delta(q_j-\theta_f(t_j)) \ , \tag{II.43}$$

siendo R la función definida en la Subsecc.(II.2.C.). Usando la propiedad de la "función" delta de Dirac

$$\delta[\,g(x)] = \sum_{x_n} \frac{\delta(x-x_n)}{\mathrm{Det}[\partial g/\partial x]|_{x_n}} \ , \tag{II.44}$$

siendo x_n los ceros de la función $g(x)$, tenemos que

$$\prod_{i=0}^{N+1} \delta(q_i-\theta_f(t_i)) = \prod_{j=0}^{N+1} \mathrm{Det}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{\Delta q}{\varepsilon}{}_j - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w}{\varepsilon}{}_j\right]\right\}\Bigg|_{q_k=\theta_f(t_k)}$$

$$\times \quad \delta\left(\frac{\Delta q}{\varepsilon}{}_j - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w}{\varepsilon}{}_j\right) \quad \delta(q_0-\theta_0) =$$

$$= \prod_{j=1}^{N+1} (1/\varepsilon) \quad \delta\left(\frac{\Delta q}{\varepsilon}{}_j - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w}{\varepsilon}{}_j\right) \quad \delta(q_0-\theta_0)$$

(II.45)

donde $\theta_f(t_0;\theta_0,t_0)=\theta_0$. Reemplazando en la Ec. (II.43)

$$F\{\theta_f(t_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=0}^{N+1} (dq_j/\varepsilon) \ \delta\left(\frac{\Delta q}{\varepsilon}{}_j - \mathbf{A}(q_{j-1}) - \eta^{1/2}\mathbf{g}(q_{j-1})\frac{\Delta w}{\varepsilon}{}_j\right)$$

$$\times \quad F\{R(q_j)\} \ \ \delta(q_0-\theta_0) \ .$$

(II.46)

Escribiendo cada una de las "funciones" delta como

$$\delta(\circ) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \quad (\varepsilon/2\pi) \quad e^{i\varepsilon(\circ)p_j} , \tag{II.47}$$

y como el ruido blanco es un proceso de Wiener $\Delta w_j = \varepsilon f_j$, $w_o = 0$, los promedios sobre el ruido de funcionales del ruido f se efectuan de la siguiente manera:

$$\langle F[f]\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N+1} \frac{dw_j}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \quad F[f] \quad \exp\left\{- \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{N+1} (\Delta w_j)^2\right\} \Bigg|_{w_o=0} . \tag{II.48}$$

Asi el promedio de la Ec.(II.46) sobre f es:

$$\langle F\{\theta_f(t_j)\}\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to +\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N+1} \quad dq_j \quad \frac{dp_j}{2\pi} \frac{dw_j}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \quad F\{R(q_j)\}$$

$$\times \quad \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{N+1} p_j(\Delta q_j - \varepsilon \; A(q_{j-1}) + \eta^{1/2} g(q_{j-1})\Delta w_j)\right\} \Bigg|_{q_o=\theta_o}$$

$$\times \quad \exp\left\{- \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{N+1} (\Delta w_j)^2\right\} \Bigg|_{w_o=0} . \tag{II.49}$$

Integrando sobre $\{w_j\}$ y $\{p_j\}$ se obtiene la Ec.(II.34) siendo $G(q)=g(q)^2$. Una RIF para los momentos conjugados $\{p,q\}$ puede ser obtenida integrando solo sobre los $\{w_j\}$:

$$\langle F\{\theta_f(t_j)\}\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to+\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} dq_o \prod_{j=1}^{N+1} dq_j \frac{dp_j}{2\pi} F\{R(q_j)\}$$

$$\times \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{N+1} \left[p_j\left(\frac{\Delta q_j}{\varepsilon} - A(q_{j-1})\right) + i\,\frac{\eta}{2}\, G(q_{j-1}) \right] \right\} \delta(q_o-\theta_o)$$

(II.50)

Aqui $p_j\in\mathbb{R}$ es la variable conjugada de los q_j , no así de la variable estocástica θ_j . Esta ultima ecuación puede ser escrita formalmente como

$$\langle F\{\theta(t_j)\}\rangle = \int_{\gamma(o)} Dq\, Dp\; F\{R(q_j)\} \exp\left\{i\int_{t_o}^{t} d\tau\,[\, p\dot{q} - H^{\gamma(o)}(p,q)]\right\} \delta(q_o-\theta_o)$$

(II.51)

siendo la medida de integración

$$Dp\; Dq \equiv \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to+\infty}} dq_o \prod_{j=1}^{N+1} dq_j\, \frac{dq_j}{2\pi} \quad , \qquad \text{(II.52)}$$

y el Hamiltoniano

$$H(p,q) = -i/2\; p^2\; G(q) + p\; g(q) \quad . \qquad \text{(II.53)}$$

Es importante señalar que cualquier otra prescripción puede ser determinada a partir de la EDE en un sentido de discretización arbitraria, es decir que todas las funciones son evaluadas en $\theta^{[r]}_{j-1} = \theta_{j-1} + r\;\Delta\theta_j$, $\forall r$: $r\in[0,1]$ (siendo $r=0$ el caso particular de

II.c). La derivación de la RIF para una discretización arbitraria, solo difiere en el cálculo del Jacobiano de transformación de coordenadas que aparece en (II.45). La prescripción de discretización $\gamma(0)$ elegida aquí es suficiente para lo que sigue.

II.4. PROMEDIOS ESTOCASTICOS:

II.4.A. La Densidad de Probabilidad de Transición como un promedio estocástico:

Si $\theta_f = \theta_f(t;\theta_o,t_o)$ es la solución de la EDE (II.37) para una función fija $f(t)$ con condición inicial $\theta_f(t_o;\theta_o,t_o) = \theta_o$, la DPT para este proceso determinista es

$$P_f(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \sum_{\mathbb{Z}} \delta(\theta-\theta_f+2m\pi) \quad , \tag{II.54}$$

y satisface la ecuación de continuidad derivable de (II.37)

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\, A(\theta) + \eta^{1/2} g(\theta)\; f(t)\right] P_f \; . \tag{II.55}$$

El promedio sobre $f(t)$, definido en la Sección III. permite obtener una RIF para la DPT:

$$P(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \langle P_f(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o)\rangle \quad , \tag{II.56}$$

que verifica el proceso de Markov definido por (II.37)

Utilizando la expresión que expresa el promedio sobre el ruido de un funcional del ruido, dado en la Sección III., es posible obtener la DPT en el espacio de configuración dada por las Ecs. (II.27) y (II.38), o bien en el espacio de las fases a partir de las Ecs. (II.34) y (II.35), obteniendose la expresión abreviada:

$$P(\theta,t\,|\,\theta_o,t_o) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}q\ \mathcal{D}p\ \ \exp\left\{ i \int_{t_o}^{t} d\tau\ \left[p\dot{q} - \mathcal{H}^{\gamma(o)}(p,q)\right] \right\}$$

$$\times\ \ \delta(q_o-\theta_o)\ \delta(q-\theta+2m\pi)\ . \tag{II.57}$$

La medida de integración esta dada por la expresión (II.52) y el Hamiltoniano por (II.53).

II.4.B. Funcional generatriz de funciones 2π periódicas:

Cualquier funcional $F\{\theta_f(t_j)\}$ de f(t) con $\theta_f\in S^1$, puede ser desarollada en serie de Fourier

$$F\{\theta_f(t_j)\} = \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}}\ \ \exp\{i\vec{p}\cdot\vec{\theta}_f\}\quad , \tag{II.58}$$

donde $\vec{p}$ es un vector de enteros (N+1) dimensional y $\vec{\theta}_f = \{\theta_f(t_i)\}$ i=1,...,N+1. Es entonces factible definir un funcional generatriz

$$Z[j,j^*]=\int_{\gamma(o)} \mathcal{D}q\ \mathcal{D}p\ \exp\left\{i\int_{t_o}^{t} d\tau\ [\,p\dot{q} - H^{\gamma(o)}(p,q) + jq + j^*p]\right\}\ \delta(q_o-\theta_o) \tag{II.59}$$

De esta forma el cálculo de (II.58) se reduce a

$$\exp\{i\vec{p}\cdot\vec{\theta}_f\} = Z[\ j(\cdot)=\textstyle\sum_{k=1}^{N+1} n_k\ \delta(\cdot-t_k);\ j^*(\cdot)=0] \ . \tag{II.60}$$

II.5. APENDICE:

Sea $f(\theta)$, con $0\leq\theta<2\pi$, una función desarrollable en serie de Fourier [Li64]

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\ e^{in\theta} \ , \tag{II.A.1}$$

con coeficientes de Fourier dados por

$$a_n = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\theta\ \ e^{in\theta}\ \ f(\theta) \ . \tag{II.A.2}$$

Es entonces posible escribir

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\theta+2n\pi) \ , \tag{II.A.3}$$

a partir de la identidad

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta} = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(\theta-2m\pi) \ . \tag{II.A.4}$$

Prueba de (II.A.4). Sea

$$f(x) = x - 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta(x-2n\pi) + 2\pi \sum_{n=0}^{-\infty} \Theta(-x-2n\pi) \ , \qquad \text{(II.A.5)}$$

la función mántisa de x definida en $[0,2\pi)$. La misma admite un desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \pi + \sum_{n\neq 0} (i/n) \quad e^{inx} \ . \qquad \text{(II.A.6)}$$

Derivando (II.A.5) y (II.A.6) con respecto a x e igualando obtenemos (II.A.4).

Para demostrar (II.A.3), sea

$$a(k) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\theta \quad e^{-ik\theta} \; f(\theta) \quad , \qquad \text{(II.A.7)}$$

con $a(k=n)=a_n$ dado por (II.A.2). Tomando

$$F(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad a(k) \quad e^{ik\theta} \ . \qquad \text{(II.A.8)}$$

Utilizando la identidad (II.A.4), queda demostrada (II.A.4) luego de un breve cálculo. Siguiendo este procedimiento, se puede demostrar la igualdad (II.25):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n_j} \exp\{in_j(\Delta\theta_j - \varepsilon \mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2 \; n_j^2 \; \mathbf{G}(\theta_{j-1})\} =$$

$$= \sum_{n_j} \int_{-\infty}^{\infty} dk/2\pi \quad \exp\{ik(\Delta\theta_j - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})) - \varepsilon/2 \; k^2 \mathbf{G}(\theta_{j-1})\} \quad \delta(k-n_j)$$

$$= \sum_{n_j} \int_{-\infty}^{\infty} dk/2\pi \quad \exp\{ik[(\Delta\theta_j - 2n_j\pi) - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})] - \varepsilon/2 \; n_j^2 \mathbf{G}(\theta_{j-1})\}$$

$$= (2\pi\varepsilon\mathbf{G}(\theta_{j-1}))^{-1/2} \sum_{n_j} \exp\left\{- \frac{[\Delta\theta_j - 2n_j\pi - \varepsilon\mathbf{A}(\theta_{j-1})]^2}{2\,\varepsilon\,\mathbf{G}(\theta_{j-1})}\right\}$$

(II.A.9)