C A P I T U L O IV:

IV.1. INTRODUCCION:

Un aspecto de interés en los fenómenos no lineales fuera del equilibrio es la influencia del ruido en tales sistemas, que puede tener su origen en un reservorio o ser generado en el laboratorio y aplicado al sistema. Es bien conocido [SS88] que el ruido externo produce modificaciones de interés en el comportamiento de los sistemas, por ejemplo cambio en los parámetros críticos de una transición de fase fuera del equilibrio [AH78, SS87]. En muchos casos es de interés predecir el comportamiento del sistema respecto de los parámetros que caracterizan al ruido, pero en la mayoría de los casos los sistemas, modelados por Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE) no lineales, son descriptos en término de ruido blanco Gaussiano. En tal caso el proceso es de Markov, y como hemos visto los cálculos con ruido blanco no presentan dificultades desde el punto de vista matematico, pero los resultados no son completamente satisfactorios, puesto que no permiten un estudio completo de la influencia de todos los parámetros del sistema. Esto se debe a que el límite de ruido blanco esta caracterizado por un solo parámetro, su intensidad de ruido ε, mientras que un ruido más real esta caracterizado al menos por otro parámetro, su tiempo de correlación τ. En situaciones experimentales la intensidad de ruido ε es identificada por el producto de parámetros $\varepsilon\tau$ del ruido real. De esta forma, al menos 2 parámetros pueden ser variados independientemente en un ruido real externo. Es de interés estudiar la validez de la idealización de ruido blanco y ver cuales son los nuevos efectos que no pueden ser descriptos por la teoría de ruido blanco en el contexto del problema que se estudia.

Consideremos la EDE unidimensional

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= A(q,t) + g(q,t)\,\zeta(t) \\ q(t_o) &= q_o \end{aligned} \quad , \qquad \text{(IV.1)}$$

donde $\zeta(t)$ es ruido multiplicativo (aditivo si $g\equiv1$) no blanco o coloreado y puede ser asumido como un proceso estocástico estacionario. La función de correlación para el ruido $\zeta(t)$ será

$$K(t,t') = \langle\zeta(t)\zeta(t')\rangle \quad , \qquad \text{(IV.2)}$$

y será una función de la diferencia de tiempos T=t-t'.

A fín de estudiar el comportamiento del proceso estocástico q(t) frente al comportamiento de los parámetros que caracterizan al ruido $\zeta(t)$, su intensidad ε y su tiempo de correlación τ definidos por

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ K(x) \quad , \qquad \text{(IV.3.a)}$$

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ K(x) \quad , \qquad \text{(IV.3.b)}$$

se hace necesario una expresión explícita para la autocorrelación del ruido (IV.2). La EDE puede ser convenientemente redefinida a fin de que la función de correlación del ruido este normalizada a 1 en (IV.3.a). De esta forma la EDE se vuelve

$$\dot{q}(t) = A(q,t) + \varepsilon^{1/2} g(q,t)\, \zeta(t) \quad . \tag{IV.4}$$

Aqui estudiaremos los efectos del ruido coloreado $\zeta(t)$ cuando este satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck [SS88] es decir un proceso con valor medio nulo y función de autocorrelación

$$K(T) = (\gamma/2) \quad \exp\{-\gamma\,|T|\} \quad , \tag{IV.5}$$

y tiempo de correlación $\tau=1/\gamma$. Ademas, el límite de ruido blanco es recuperado en el límite de "tiempo de correlación nulo":

$$K(T) \xrightarrow{\gamma \to +\infty} \delta(T) \quad . \tag{IV.6}$$

Todo proceso de Ornstein-Uhembeck, puede ser descripto por una EDE lineal para $\zeta(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= -\gamma\zeta + c^{1/2} f(t) \\ \zeta(t_o) &= \zeta_o \end{aligned} \quad , \tag{IV.7}$$

donde $c=\gamma^{2}$ para que se satifaga (IV.6). En este caso f(t) es ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y "delta" correlacionado con intensidad de ruido γ^{-2}.

El proceso estocástico definido por las variables (q,ζ) es

Markoviano y en consecuencia se satisface una Ecuación de Fokker-Planck (EFP) para la Densidad de Probabilidad de Transición (DPT). El proceso q es no Markoviano y la DPT no satisface una EFP. Sin embargo es posible obtener en ambos casos una Representación por Integral Funecional (RIF) para la DPT del proceso estocástico q en presencia de ruido coloreado ζ, y efectuar cálculos de promedios, momentos y funciones de correlación de funciones de la variable estocástica q.

El hecho de considerar una EDE no lineal con ruido coloreado que satisface una EDE lineal (IV.7) por técnicas de Integral Funcional es una posible alternativa de trabajo, que puede ser llevada a cabo dando una formulación para las variables dinámicas $\{q^{\mu}\}$ (μ=1,...,d) de un proceso d-dimensional, o bien aumentando el número de variables incluyendo los ruidos como nuevas variables y estudiar el proceso Markoviano resultante en el espació ampliado $\{q^{\mu},\zeta^{i}\}$ (i=1,...,n) de (d+n)-dimensiones. Ambos tratamientos no presentan dificultades practicas a los efectos del cálculo, aunque veremos que los resultados no son coincidentes, si lo son formalmente ya que sus expansiones en términos de la intensidad de ruido ε coinciden orden a orden [CW89].

Aqui se estudiaran los efectos que introduce el ruido coloreado en la Forma Normal Estocástica de una Bifurcación de Hopf (FNEBH) para los casos de ruido multiplicativo lineal y aditivo. Se trata de hallar los nuevos efectos que se detectan en el espectro, tales como la aparición de nuevas contribuciones espectrales, su intensidad y determinación de los parámetros de expansión perturbativo con respecto al caso de ruido blanco ya examinado en el Capítulo precedente.

Se presentan dos enfoques utilizando técnicas de Integral Funcional (IF). En primera instancia se considera el proceso (z,z^*) y en segundo lugar se incluye al ruido como variable dinámica.

IV.2. REPRESENTACIONES POR INTEGRAL FUNCIONAL PARA PROCESOS ESTOCASTICOS EN PRESENCIA DE RUIDO COLOREADO:

IV.2.A. Formalismo:

Dada la EDE d-dimensional

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\mu}(t) &= A^{\mu}(q,t) + \varepsilon^{1/2} g_i^{\mu}(\underset{\sim}{q},t)\, \zeta^i(t) \\ q^{\mu}(t_o) &= Q_o^{\mu} \end{aligned} \qquad , \qquad \text{(IV.8)}$$

donde $i=1,\dots,m$ y $m \geq d$, $\{\zeta^i\}$ son ruidos coloreados cuyos valores medios son nulos y su correlación esta dada por

$$K^{ij}(t,t') = \langle \zeta^i(t)\, \zeta^j(t') \rangle \quad . \qquad \text{(IV.9)}$$

Si $q_{\zeta} = q_{\zeta}^{\mu}(t;\underset{\sim}{Q}_o,t_o)$ es solución del sistema (IV.8), cualquier funcional de los $\{\zeta^i\}$ puede ser escrito como [LR82]

$$F[q_\zeta] = \int \mathcal{D}p \; \mathcal{D}q \; \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau \; p_\mu [\, \dot{q}^\mu - A^\mu(q,\tau) - \varepsilon^{1/2} g_i^\mu(q,\tau) \; \zeta_i(\tau)] \right\}$$

$$\times \; \{ \delta(q^\mu(t_o) - Q_o^\mu) \} \quad .$$

(IV.10)

El promedio sobre los $\{\zeta^i\}$ viene dado por

$$\langle F[q_\zeta] \rangle = \int \mathcal{D}\zeta \quad F[q_\zeta] \quad \exp\left\{ -1/2 \int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau \; d\tau' \; \zeta^i(\tau) J^{ij}(\tau,\tau') \zeta^j(\tau') \right\} ,$$

(IV.11)

donde $J^{ij}(\tau,\tau')$ es el nucleo inverso de $K^{ij}(\tau,\tau')$ definido a traves de

$$\int_{t_o}^{T} dt \; K^{ik}(\tau,t) \; J^{kj}(t,\tau') = \delta^{ij} \delta(\tau-\tau') \quad . \qquad \text{(IV.12)}$$

Reemplazando la Ec.(IV.10) en la (IV.11) se tiene luego de integrar sobre los $\{\zeta^i\}$

$$\langle F[q_\zeta] \rangle = \int \mathcal{D}p \; \mathcal{D}q \; \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau \; p_\mu(\tau) [\, (\dot{q}^\mu - A^\mu(q,\tau)) + \right.$$

$$\left. + \; i \; \frac{\varepsilon}{2} \; g_i^\mu(q,\tau) \int_{t_o}^{T} d\tau' \; K^{ij}(\tau,\tau') \; g_j^\nu(q,\tau') \; p_\nu(\tau')] \right\}$$

$$\times \; \{ \delta(q_o^\mu(t\;) - Q_o^\mu) \} \quad .$$

(IV.13)

El proceso estocástico $\{q^{\mu}\}$ (μ=1,...,d) si tiene definido un conjunto de variables en una subvariedad $\mathbb{T}^{c}$ con c≤d, queda caracterizado sin ambiguedad por las ecuaciones (IV.11) y (IV.13) debiendo contener las mismas información sobre la periodicidad en la condición inicial, de acuerdo a lo obtenido en el Capitulo II.

IV.2.B. Contribuciones espectrales en un modelo sencillo:

Consideremos la EDE unidimensional, interpretada en el sentido de Ito, para un proceso estocástico $\theta(t)$ definido en $\mathbb{S}^{1}$:

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2} g(\theta)\, f(t) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \quad , \qquad \text{(IV.14)}$$
$$\theta(t_{o}) = \theta_{o}$$

donde ε es la intensidad del ruido, $g(\theta)$ es función 2π periodica y f(t) es ruido coloreado con valor medio nulo, que satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck, es decir con función de autocorrelación dada por (IV.5), siendo $1/\gamma$ el tiempo de autocorrelación y $\gamma \gg \varepsilon$. De acuerdo a lo visto en la Subsección precedente la Funcional Generatriz (FG) para el proceso $\theta(t)$, dada en la prescripción de discretización del pre-punto, es

$$Z[j,j^*] = \int_{\gamma(0)} Dp\ Dq\ \ \exp\left\{ i\int_{t_0}^{T} d\tau\ \{p(\tau)\ [\ \dot{q}(\tau) + \right.$$

$$+\ i\ \frac{\varepsilon}{2}\ g(q(\tau)+\omega\tau) \int_{t_0}^{T} d\tau'\ \ K(\tau,\tau')\ g(q(\tau')+\omega\tau')\ p(\tau')]\}$$

$$\left. +\ j(\tau)\ q(\tau)\ +\ j^*(\tau)\ p(\tau)\} \right\}\ \delta(q(t_0),\theta_0)\ \ .$$

(IV.15)

Es necesario definir un FG "libre" o no perturbativo a partir del cual realizar el cálculo perturbativo en potencias de ε. El criterio aqui es considerar que el límite de ruido blanco debe ser recuperado para "tiempo de correlación nulo", expresable a traves de la expresión (IV.67). De esta forma el cálculo perturbativo describira pequeños apartamientos del caso de ruido blanco, pero incorporara nuevos elementos con respecto a este. Cuando la función de autocorrelación del ruido se vuelve una función "delta", el término no oscilatorio del desarrollo en Serie de Fourier de $g^2(\theta)$, que llamamos A_0 en el caso de ruido blanco considerado en el Capitulo II, permitia definir una Funcional Generatriz libre (FGL) de términos oscilatorios. Aqui, el criterio es tomar una función $\alpha(\gamma)$ de forma que esta tiende a A_0 en el límite de ruido blanco. Aqui no nos ocuparemos de la forma funciónal de α, que será considerada con mayor detalle en el Cap.V. La FGL será

$$Z_o[j,j^*]=\int_{j(o)} Dp\; Dq\; \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\; \{p(\tau)[\,\dot q(\tau) + i\tfrac{\varepsilon}{2}\alpha \int_{t_o}^{T} d\tau'\; K(\tau,\tau')\; p(\tau')]\} \right.$$

$$\left. +\; j(\tau)\; q(\tau) + j^*(\tau)\; p(\tau)\} \right\} \delta(q(t_o)-\theta_o) \quad .$$

(IV.16)

Este funcional de las fuentes puede ser evaluado explicitamente con la ayuda de las técnicas estandar. En el Ap.A se muestra, siguiendo el procedimiento dado en [LR82], que luego de integrar (IV.16) se obtiene

$$Z_o[j,j^*] = \exp\left\{ i\theta_o \int_{t_o}^{T} d\tau\; j(\tau) \right\}$$

$$\times \exp\left\{ -1/2 \int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau\; d\tau' [\, 2i\, j(\tau) S(\tau,\tau') j^*(\tau) + j(\tau) R(\tau,\tau'') j(\tau')] \right\}.$$

(IV.17)

siendo las funciones de Green

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau,\tau') \quad , \qquad \text{(IV.18.a)}$$

$$R(\tau,\tau') = \varepsilon\alpha\; [\;\min(\tau,\tau')-t_o - K(\tau,\tau') + \qquad \text{(IV.18.b)}$$

$$+\; (1/2\gamma)\; (\exp(-\gamma\tau)+\exp(-\gamma\tau'))\; \exp(\gamma t_o)] \quad .$$

Para definir una Funcional Generatriz Libre Estacionaria (FGLE) es suficiente exigir la condición de regimén estacionario que se impone sobre la fuente j(t):

$$\int_{t_o}^{T} j(\tau)\, d\tau = 0 \quad . \tag{IV.19}$$

Luego de tomar $t_o \to -\infty$ en la expresión para la FGL dada en Ec.(IV.19) se obtiene la FGLE:

$$Z_o^{est}[j,j^*] =$$

$$\times \exp\left\{-1/2 \int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau \; d\tau' [\, 2i\, j(\tau)S(\tau,\tau')j^*(\tau)+j(\tau)\mathbf{R}(\tau,\tau'')j(\tau')]\right\}, \tag{IV.20}$$

siendo la función de Green

$$\mathbf{D}(\tau,\tau') = \varepsilon\alpha \,[\; \min(\tau,\tau') - K(\tau,\tau') \;] \;. \tag{IV.21}$$

Como se ha establecido a lo largo de este trabajo la fuente puede ser expresada como combinación lineal de funciones "delta" con coeficientes enteros de tal forma que su suma sea cero.

Consideremos para ilustrar el prodedimiento perturbativo el caso $g(\theta)=\cos\theta$. Calcularemos funciones de autocorrelación para el proceso $g(\theta)$ a orden cero y perturbativamente a orden 1 en el parametro de expansión que en este caso será ε/γ, ya que esta será la contribución espectral dominante de frecuencia distinta de la fundamental. La función de autocorrelación para el proceso $\cos\theta$ es determinada a traves de los términos de su desarrollo en Serie de Fourier.

Al orden cero la función de autocorrelación estara dada por

$$G_o(T) = 1/2\ Re\{\ \exp(i\omega T)\ Z_o^{est}[\,\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]\ \} \tag{IV.22}$$

$$= 1/2\ \cos(\omega T)\ \ \exp\{-\varepsilon/4[\ |T|-(1/\gamma)(1-\exp(-\gamma\,|T|))]\}\ \ .$$

Las contribuciones perturbativas a la función de autocorrelación son calculadas a partir de la expresión (IV.15) en el límite estacionario, es decir con $t_o \longrightarrow -\infty$, reescrita como

$$Z^{es}[j,j^*] = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\frac{\varepsilon}{2})^n \int_{\gamma(o)} Dp\ Dq\ \int_{-\infty}^{T} \prod_{j=1}^{n} dt_j dt_j'\ p(t_j)K(t_j,t_j')p(t_j)$$

$$\times\ [\,g(q(t_j)+\omega t_j)\ g(q(t_j')+\omega t_j') - \alpha]$$

$$\times\ \exp\left\{ i\int_{-\infty}^{T} d\tau\ \ \{p(\tau)[\,\dot q(\tau)+i\frac{\varepsilon}{2}\alpha\int_{-\infty}^{T} d\tau' K(\tau,\tau')p(\tau')]\}+j(\tau)q(\tau)+j^*(\tau)p(\tau)\}\right\}$$

(IV.23)

A orden 1 aparece la contribución espectral de frecuencia múltiplo de la fundamental, estando la misma contenida en el cálculo de

$$\langle \exp\{i[\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle_1^{est} = \exp(i\omega T)\ Z_1^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\exp(i\omega T)\int_{-\infty}^{T} dt_1 dt_2 K(t_1,t_2)\left\{\left\{\ \frac{1}{4}\exp\{i\omega(t_1-t_2)\}\ \left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_1)\delta j^*(t_2)}\right)\right.\right.$$

$$\left.\times Z_0^{es}[j,j^*]\Big|_{j(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);\,j^*(\circ)=0} + P(t_1,t_2)\right\} -$$

$$\left. - \alpha\quad Z_0^{es}[j,j^*]\Big|_{j(\circ)=\delta(\circ-T)-\delta(\circ);\,j^*(\circ)=0}\right\}\quad .$$

(IV.24)

Teniendo en cuenta que el integrando es simétrico en las variables de integración, llevamos la misma a la región $T>t_1>t_2$. Los cálculos no seran dados aqui, pero una breve prospección del integrando muestra que el término que contiene a $\exp\{i\omega(t_1-t_2)\}$ en factor es el que introduce nuevos armónicos en este caso de frecuencia 2ω. El otro sumando, que contiene como factor a su complejo conjugado, agrega términos de frecuencia 0. Finalmente el término que contiene a α debe ser analizado por separado ya que por corrección al orden 1 de fracuencia ω, debe ser agregado a estos. La técnica de cálculo es la ya señalada a lo largo de este trabajo, trabajando en la prescripción de discretización del pre-punto. La FG evaluada en las fuentes puede ser desarrollada en serie de potencias de ε/γ como sigue:

$$Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0] =$$

$$= Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]\ \exp\{-1/2\ [\ D(t_1,t_1) +D(t_2,t_2) -2D(t_1,t_2) +$$

$$+\ 2\ (D(T,t_1) -D(T,t_2) -D(0,t_1) +D(0,t_2))\ ]\}$$

$$\simeq Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]\ \{\ \exp\{-\varepsilon\alpha/2\ [\,3t_1-t_2-2\min(t_1,t_2)-$$

$$-2\min(0,t_1)+2\min(0,t_2)]\} + \mathcal{O}(\varepsilon/\gamma)\ \}$$

$$\text{(IV.25)}$$

Para $\varepsilon/\gamma\ll 1$ el primer sumando de (IV.24) es

$$-(\varepsilon/4\gamma)\ Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]\ \int_{-\infty}^{T} dt_1\ g(t_1)\ \int_{-\infty}^{t_1} dt_2\ f(t_2)\ , \qquad \text{(IV.26.a)}$$

$$g(t_1) = \exp\{(i\omega-\gamma)t_1-\varepsilon\alpha(3t_1/2-\min(0,t_1))\}\ \Theta(t_1)\ , \qquad \text{(IV.26.b)}$$

$$f(t_2) = \exp\{-(i\omega-\gamma)t_2+\varepsilon\alpha(3t_2/2-\min(0,t_2))\}\ (\Theta(t_2)+1)\ , \qquad \text{(IV.26.c)}$$

estando en él contenidos los términos principales de frecuencia 2ω

$$\langle\exp\{i[\,\theta(T)-\theta(0)]\}\rangle^{est}_{1,2\omega} = -(\varepsilon/4\gamma)\ Z_0^{es}[\delta(\circ-T)-\delta(\circ);0]$$

$$\times\ G(T)[\,F(0^-)-F(0^+)]\ , \qquad \text{(IV.27.a)}$$

$$G(T) = (i\omega-\gamma-3\varepsilon/4)^{-1}\exp[\,(i\omega-\gamma-3\varepsilon/4)T]\ , \qquad \text{(IV.27.b)}$$

$$F(0^-) = (-i\omega+\gamma+\varepsilon/4)^{-1}\ , \qquad \text{(IV.27.c)}$$

$$F(0^+) = 2(-i\omega+\gamma+3\varepsilon/4)^{-1}\ . \qquad \text{(IV.27.d)}$$

donde G y F son las primitivas de g y f respectivamente, como se ha visto con anterioridad las nuevas contribuciones espectrales estan dadas por la discontinuidad del integrando en $t_2=0$ dada por $F(0^-)-F(0^+)$. Finalmente la contribución a la función de correlación, en función del parámetro de expansión ε/γ será

$$C_1^{2\omega}(T) = -(\varepsilon/8\gamma)\ \exp\{-(\varepsilon+\gamma)|T|+(\varepsilon/4\gamma)(1-\exp(-\gamma|T|))]\}$$

$$\times\ Re\{\ \exp(2i\omega T)\ S(\varepsilon/\gamma,\omega/\gamma)\ \} \qquad \text{(IV.28.a)}$$

$$S(\sigma,\nu) = (-i\nu-3\sigma/4-1)^{-1}[\,(-i\nu+\sigma/4+1)^{-1}-2(-i\nu+3\sigma/4+1)^{-1}] \qquad \text{(IV.28.b)}$$

con $\sigma=\varepsilon/\gamma$ y $\nu=\omega/\gamma$. Como solo términos de orden ε/γ son de interés podemos tomar el desarrollo de $S(\sigma,\nu)$ alrrededor de $\sigma=0$ y retener el primer término. Finalmente:

$$C_1^{2\omega}(T) = -(\varepsilon/8\gamma)\ \exp[-(\varepsilon+\gamma)T+(\varepsilon/4\gamma)(1-\exp(-\gamma|T|))]\}$$

$$\times\left\{\ \frac{1-(\omega/\gamma)^2}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\cos 2\omega T\ -\ \frac{2\omega/\gamma}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\ \mathrm{sen}\,2\omega T\ \right\} \qquad \text{(IV.29)}$$

La metodología dada aqui para determinación de los armónicos en en el esquema de cálculo perturbativo por integral funcional, es aplicable para el cálculo de otros términos, tal como el de frecuencia 0 que tambien aparece al primer orden. Los resultados aqui alcanzados pueden ser obtenidos en el contexto de la IF al considerar el proceso estocástico de las variables (θ,f).

IV.3. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO COLOREADO:

Consideremos la EDE en las variables (u,θ) que describe un sistema dinámico que presenta bifurcación de Hopf, siendo u la variable "transversal" al ciclo límite y que en este caso describe pequeños apartamientos del mismo. La misma en el sentido de Ito es

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -2\mu\beta\ u + \upsilon^{1/2} g_1(\varphi+\omega t)\ f(t) \\ \dot{u} &= -2\mu\ u + \upsilon^{1/2} g_2(\varphi+\omega t)\ f(t) \end{aligned} \quad , \qquad \text{(IV.30)}$$

donde para el caso Aditivo $\upsilon=\varepsilon/\mu$ y

$$g_2(\psi) = \cos\psi \quad , \qquad g_1(\psi) = -\mathrm{sen}\psi \quad , \qquad \text{(IV.31)}$$

y para el caso Lineal Multiplicativo $\upsilon=\varepsilon$ y

$$g_2(\psi) = c + \cos 2\psi \quad , \qquad g_1(\psi) = s - \sin 2\psi \quad , \qquad \text{(IV.32)}$$

f(t) es ruido coloreado con valor medio nulo y autocorrelación dada por (IV.5).

La Funcional Generatriz es en este caso:

$$Z[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\; \mathcal{D}\underset{\sim}{q} \quad \exp\Big\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \;\; \{ p_1(\tau)(\dot{q}_1(\tau)+2\mu\beta q_1)+p_2(\tau)(\dot{q}_2(\tau)+2\mu q_2)+$$

$$+ \, i\, \frac{\upsilon}{2} \int_{t_o}^{T} d\tau' \;\; p_i(\tau)\;\; g_i(q(\tau)+\omega\tau) \;\; K(\tau,\tau') \;\; g_j(q(\tau')+\omega\tau') \;\; p_j(\tau')]\}$$

$$+ \; j_i(\tau)\;\; q_i(\tau) \; + \; j_i^*(\tau)\;\; p_i(\tau)\} \Big\} \; \delta(q_1(t_o)-\theta_o) \;\; \delta(q_2(t_o)-u_o) \;\; ,$$

(IV.33)

donde $\underset{\sim}{j}_1\equiv(j_1,j_1^*)$, $\underset{\sim}{j}_2\equiv(j_2,j_2^*)$, i,j,=1,2 e indices repetidos implican suma. Siguiendo el mismo criterio de la Subsección precedente el FGL será:

$$Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\; \mathcal{D}\underset{\sim}{q} \quad \exp\Big\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \;\; \{ p_1(\tau)(\dot{q}_1(\tau)+2\mu\beta q_1)+p_2(\tau)(\dot{q}_2(\tau)+2\mu q_2)+$$

$$+ \; i\; \frac{\upsilon}{2}\; \alpha^{ij} \int_{t_o}^{T} d\tau' \;\; p_i(\tau) \;\; K(\tau,\tau') \;\; p_j(\tau')]\} \; +$$

$$+ \; j_i(\tau)\;\; q_i(\tau) \; + \; j_i^*(\tau)\;\; p_i(\tau)\} \Big\}$$

$$\times \;\; \delta(q_1(t_o)-\theta_o) \;\; \delta(q_2(t_o)-u_o) \quad ,$$

(IV.35)

donde $\alpha^{ij}(\gamma)$ tiende al coeficiente A_c^{ij}, del desaarrollo de Fourier de $g_i(\theta)g_j(\theta)$, cuando $\gamma\longrightarrow-\infty$.

Para ilustrar el procedimiento consideremos el caso de ruido aditivo con $\beta=0$, $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$ y $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha$. Teniendo en cuenta que $Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = Z_o[j_1,j_1^*]\; Z_o[j_2,j_2^*]$, en este caso, queda luego de integrar la FGL dada en (IV.35)

$$Z_o[j,j^*] = \prod_{\mu=1,2} \exp\left\{ iQ_o^{\mu}\int_{t_o}^{T} d\tau \;\; j_{\mu}(\tau)\; S_{\mu}(\tau,t_o)\right\}$$

$$\times \exp\left\{-1/2\int_{t_o}^{T}\int_{t_o}^{T} d\tau\; d\tau' \;[\,2ij_{\mu}(\tau)S_{\mu}(\tau,\tau')j^*_{\mu}(\tau')+j_{\mu}(\tau)R_{\mu}(\tau,\tau')j_{\mu}(\tau')]\right\}$$

(IV.36)

siendo $Q_o^1=\theta_o$ y $Q_o^2=u_o$ y las funciones de Green

$$S_1(t,t') = \Theta(t-t') \quad , \qquad \text{(IV.37.a)}$$

$$S_2(t,t') = \Theta(t-t')\; \exp\{-\lambda(t-t')\} \quad , \qquad \text{(IV.37.b)}$$

$$R_1(t,t') = \upsilon\alpha\;[\;\min(t,t')-t_o-K(t,t') +$$

$$+\;(1/2\gamma)(\exp(\gamma t)+\exp(-\gamma t'))\;\exp(\gamma t_o)) \quad , \qquad \text{(IV.37.c)}$$

$$R_2(t,t') = (\upsilon\alpha/2)\;(\lambda+\gamma)^{-1}[\,(\lambda-\gamma)^{-1}\exp(-\gamma\,|t-t'\,|) +$$

$$+\;(\lambda^{-1}-(\lambda-\gamma)^{-1})\;\exp(-\lambda\,|t-t'\,|) -$$

$$-\;(\lambda^{-1}-2(\lambda-\gamma)^{-1})\;\exp(-\lambda(t+t'-2t_o)) -$$

$$-\;(\lambda-\gamma)^{-1}(\exp(-\lambda t-\gamma t')+\exp(-\lambda t'-\gamma t))\exp((\gamma+\lambda)t_o)]$$

(IV.37.d)

con $\lambda=2\mu$. Imponiendo la condición de regimén estacionario establecida sobre la fuente $j_1(t)$ y luego tomando el límite $t_o\rightarrow-\infty$en la Ec.(4.36) queda definida la Funcional Genratriz Libre Estacionaria (FGLE):

$$Z_0[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] =$$

$$\prod_{\mu=1,2} \exp\left\{-1/2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} d\tau \; d\tau' \; [\, 2i j_\mu(\tau) S_\mu(\tau,\tau') j_\mu^*(\tau') + j_\mu(\tau) \mathbf{D}_\mu(\tau,\tau') j_\mu(\tau')\right\}$$

(IV.38)

siendo en este caso las funciones de Green

$$D_1(t,t') = \nu\alpha \, [\; \min(t,t') - K(t,t') \;] \quad , \qquad \text{(IV.39.a)}$$

$$D_2(t,t') = \nu\alpha\, \gamma^2(\gamma^2+\lambda^2)^{-1}[\,(1/2\gamma)\exp(-\gamma|t-t'|)-(1/2\lambda)\exp(-\lambda|t-t'|)]$$

(IV.39.b)

A orden cero en teoría perturbativa determinamos funciones de correlación del proceso (z,z^*). La función de autocorrelación es

$$\langle z(T)z(0)\rangle_0^{est}=0 \quad , \qquad \text{(IV.40)}$$

ya que no se satisface la condición de regimén estacionario. La función de correlación conjunta es en cambio

$$\langle z(T)z^*(0)\rangle_0^{est} = Z_0^{est}[\,\delta(\circ-T)-\delta(\circ);-i(\delta(\circ-T)+\delta(\circ));0;0] \;\; \exp(i\omega T)$$

$$= A(T) \;\; \exp(i\omega T) \quad ,$$

(IV.41.a)

$$A(T) = \exp\{-\nu\alpha[\;|T|+(1/\gamma)(\gamma^2(4\mu^2-\gamma^2)^{-1}-1)(\exp(-\gamma|T|)-1)-$$

$$-\;(1/2\mu)(\gamma^2(4\mu^2-\gamma^2)^{-1})(\exp(-2\mu|T|)-1)\} \;. \qquad \text{(IV.41.b)}$$

La contribución espectral de frecuencia 2ω al orden 1 en teoría de perturbaciones, con parámetro de expansión υ/γ esta dada unicamente por la función de correlación cruzada

$$\langle z(T)z^{*}(0)\rangle^{est}_{1,2\omega} = \upsilon/\gamma \;\; A(T) \;\; d(\omega/\gamma,\upsilon/\gamma) \;\; \exp\{i2\omega T-(\gamma+\upsilon)|T|\} \qquad \text{(IV.42.a)}$$

$$d(\sigma,\rho) = \rho^{2}[\,(i\sigma-\rho)^{2}(i\sigma+2\rho-1)(i\sigma-2\rho-1)]^{-1} \;, \qquad \text{(IV.42.b)}$$

con $\sigma=\omega/\gamma$ y $\rho=\upsilon/\gamma$.

IV.4. EL RUIDO COLOREADO COMO UN PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK EN EL FORMALISMO DE INTEGRAL FUNCIONAL:

Los resultados hasta aqui obtenidos a partir del formalismo presentado en la Subsec.(IV.2.A) pueden ser alcanzados incluyendo al ruido como una variable relevante en la dinámica, para lo cual suponemos que se satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck definido por la EDE (IV.7). De esta forma los resultados alcanzados son formalmente igual en una expansión en términos de los parámetros perturbativos. Aunque no son coincidentes permiten obtener de una manera sencilla, utilizando el formalismo de Integral Funcional para procesos con ruido blanco, las contribuciones espectrales o armónicos principales en la teoría perturbativa. Para ilustrar estas ideas consideremos el sistema de EDE definido por Ecs. (IV.7) y (IV.14). La FG es definida de acuerdo a la Ec.(II.59):

$$Z[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} D\underset{\sim}{p}\; D\underset{\sim}{q} \quad \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \; \{ \; p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - \mathcal{H}^{\gamma(o)}(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t) + \right.$$

$$\left. + \; j_i(\tau)\; q_i(\tau) + j_i^*(\tau)\; p_i(\tau)\} \right\}$$

$$\times \quad \delta(q_1(t_c)-\theta_o)\; \delta(q_2(t_o)-\zeta_o) \quad ,$$

(IV.63.a)

$$\mathcal{H}^{\gamma(o)}(\underset{\sim}{p},\underset{\sim}{q};t) = -i\gamma/2 \; p_2^2 + \varepsilon^{1/2} p_1 \; g(q_1+\omega t)\; q_2 - \gamma p_2 q_2 \;, \qquad \text{(IV.63.b)}$$

a partir de la cual definimos la FGL

$$Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int_{\gamma(o)} D\underset{\sim}{p}\; D\underset{\sim}{q} \quad \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau \; \{ \; p_1\dot{q}_1 + p_2(\dot{q}_2+\gamma q_2) + i\gamma/2 \; p_2^2 + \right.$$

$$\left. + \; j_i(\tau)\; q_i(\tau) + j_i^*(\tau)\; p_i(\tau)\} \right\}$$

$$\times \quad \delta(q_1(t_c)-\theta_o)\; \delta(q_2(t_o)-\zeta_o) \quad ,$$

(IV.64)

que integrada sobre variables y momentos conjugados permite obtener la expresión (IV.36) con funciones de Green

$$S_1(t,t') = i\Theta(t-t') \quad , \qquad \text{(IV.65.a)}$$

$$S_2(t,t') = i\Theta(t-t')\; \exp\{-\gamma(t-t')\} \quad , \qquad \text{(IV.65.b)}$$

$$R_2(t,t') = (\gamma/2)\; [\, \exp(-\gamma\,|t-t'|)-\exp(-\gamma(t+t'-2t_o))] \;. \qquad \text{(IV.65.c)}$$

En el límite $t_o\rightarrow-\infty$, como la FGL debe ser independiente de las condiciones iniciales, es natural exigir la condición de regimén estacionario (IV.19). Queda asi establecida la FGLE (IV.38) con función de Green

$$D_2(t,t') = K(t,t') \tag{IV.66}$$

La función de correlación para el proceso $\cos\theta$ al orden 0 sera

$$C_0(T) = 1/2 \cos\omega T \tag{IV.67}$$

Las contribuciones espectrales, en teoría perturbativa se determinan siguiendo las técnicas ya establecidas. Al orden 1, en el parámetro de expansión ε/γ, se tiene que la contribución de frecuencia 2ω es

$$C_1^{2\omega}(T) = -(\varepsilon/8\gamma)\ \exp\{-\gamma|T|\}\left\{\frac{1-(\omega/\gamma)^2}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\cos 2\omega T - \frac{2\omega/\gamma}{(1+(\omega/\gamma)^2)^2}\operatorname{sen}2\omega T\right\} \tag{IV.68}$$

El desarrollo de la Ec.(IV.29) en potencias de ε/γ coincide con esta ultima expresión, lo cual permite ver que para el cálculo de las contribuciones espectrales o armónicos el método establecido da la contribución principal en potencias de ε/γ. Sin embargo, no es de utilidad para establecer la contribución de orden cero.

IV.5. APENDICE:

Se evaluara la FGL generica que aparece en un proceso con ruido coloreado donde $K^{\mu\nu}(t,t')$ es la función de correlación de los ruidos que intervienen en un proceso. La misma es de la forma

$$Z_o[\underset{\sim}{j},\underset{\sim}{j}^*] = \int \mathcal{D}\underset{\sim}{p}\, \mathcal{D}\underset{\sim}{q}\, \exp\Big\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\, [\, p_\mu(\dot{q}^\mu+\lambda^{(\mu)} q^\mu) +$$

$$+ \frac{i}{2}\, \alpha\int_{t_o}^{T} d\tau'\, p_\mu(\tau)K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_\nu(\tau') + j_\mu q^\mu + j^{*\mu}p_\mu] \Big\}$$

$$\times \{\delta(q^\mu(t_o)-Q_o^\mu)\}$$

(IV.A.1)

Utilizando la propiedad de cualquier funcional $G[\underset{\sim}{x}]$ de $\{x_\mu\}$:

$$\int \mathcal{D}\underset{\sim}{x}\, \frac{\delta}{\delta x_\mu(\tau)}\, G[\underset{\sim}{x}] = 0 \qquad \text{(IV.A.2)}$$

y utilizando las condiciones de contorno sobre las derivadas funcionales de la Funcional Generatriz Libre (FGL) respecto de las fuentes:

$$\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j_\mu(t)}\, Z_o \Big|_{t=t_o} = Q_o^\mu\, Z_o \qquad \text{(IV.A.3.a)}$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(t)}\, Z_o \Big|_{t=T} = 0 \qquad \text{(IV.A.3.b)}$$

es posible determinar una expresión para la FGL y las funciones de Green.

Derivando funcionalmente (IV.A.1) respecto a los momentos conjugados p_μ y teniendo en cuenta la propiedad (IV.A.2):

$$0 = \int \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q\ [\ (\dot{q}^{\mu}+\lambda^{(\mu)}q^{\mu}) + i\alpha \int_{t_o}^{T} d\tau'\ K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_{\nu}(\tau')]$$

$$\times \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ [\ p_{\mu}(\dot{q}^{\mu}+\lambda^{(\mu)}q^{\mu}) + \frac{i}{2}\ \alpha\int_{t_o}^{T} d\tau'\ p_{\mu}(\tau)K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_{\nu}(\tau')\right.$$

$$\left. +\ j_{\mu}q^{\mu} + j^{*\mu}p_{\mu}] \right\}\ \{\delta(q^{\mu}(t_o)-Q_o^{\mu})\} \quad .$$

(IV.A.4)

Esta relación puede ser expresada en términos de la FGL como

$$\left(\frac{d}{d\tau} + \lambda^{(\mu)}\right) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j_{\mu}(\tau)} Z_o = -\left(j^{*\mu}(\tau) + \alpha \int_{t_o}^{T} d\tau'\ K^{\mu\nu}(\tau,\tau') \frac{\delta}{\delta j^{*\nu}(\tau')}\right) Z_o$$

(IV.A.5)

Derivando funcionalmente respecto a las variables $\{q^{\mu}\}$ la FGL (IV.A.1) y en virtud de la propiedad (IV.A.2) se tiene

$$0 = \int \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q\ [\ \dot{p}_{\mu} + \lambda^{(\mu)}p_{\mu} + j_{\mu}]$$

$$\times \exp\left\{ i\int_{t_o}^{T} d\tau\ [\ p_{\mu}(\dot{q}^{\mu}+\lambda^{(\mu)}q^{\mu}) + \frac{i}{2}\ \alpha\int_{t_o}^{T} d\tau'\ p_{\mu}(\tau)K^{\mu\nu}(\tau,\tau')p_{\nu}(\tau')\right.$$

$$\left. +\ j_{\mu}q^{\mu} + j^{*\mu}p_{\mu}] \right\}\ \{\delta(q^{\mu}(t_o)-Q_o^{\mu})\} \quad ,$$

(IV.A.6)

que expresada en términos de la FGL es

$$\left(\frac{d}{d\tau} - \lambda^{(\mu)}\right) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(\tau)} Z_o = j_{\mu}(\tau)\ Z_o \quad . \qquad \text{(A.7)}$$

Esta última Ecuación Diferencial (ED) con condición de contorno (IV.A.3.b) admite como solución a

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{*\mu}(\tau)} Z_o = - \int_{t_o}^{T} dt' \; S^{(\mu)}(t',\tau) \; j_\mu(t') \quad , \qquad \text{(IV.A.8)}$$

siendo

$$S^{(\mu)}(t',t) = \Theta(t'-t) \; \exp\{-\lambda^{(\mu)}(t'-t)\} \quad , \qquad \text{(IV.A.9)}$$

la función de Green que resuelve la ED (IV.A.7)

Los cálculos para determinar la solución de la ED (IV.A.5) con condición de contorno (IV.A.3.a), que no daremos aqui dada su extensión, requieren de la forma explícita de las funciones de correlación de los ruidos coloreados. En los casos que nos ocupan las mismas estan dadas por

$$K^{\mu\nu}(t,t') = 1/2 \; A^{\mu\nu} \; \exp\{-\Lambda|t-t'|\} \quad , \qquad \text{(IV.A.10)}$$

es decir con tiempos de correlación iguales pero diferentes intensidades. El caso mas general no ofrecera dificultades adicionales. La solución de la ED (IV.A.5) será

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu(\tau)} Z_o = Q_o^\mu \; \exp\{\lambda^{(\mu)} t_o\} \; Z_o - \int_{t_o}^{T} dt' \; S^{(\mu)}(t',\tau) \; j^{*\mu}(t') \; +$$

$$+ \; i\alpha \int_{t_o}^{T} d\tau' \; R^{\mu\sigma}(\tau',\tau) \; j^\sigma(\tau') \quad ,$$

(IV.A.11)

siendo la función de Green

$$R^{\mu\sigma}(\tau',\tau) = \int_{t_o}^{T} dt\ dt'\ S^{(\sigma)}(\tau',t)\ K^{\mu\sigma}(t,t')\ S^{(\mu)}(\tau,t') \quad , \qquad \text{(IV.A.12)}$$

y explicitamente para el caso (IV.A.10) se tiene

$$R^{\mu\sigma}(\tau',\tau) = r^{\mu\sigma}(\tau',\tau) + r^{\sigma\mu}(\tau,\tau') \quad . \qquad \text{(IV.A.13.a)}$$

$$r^{\mu\sigma}(\tau',\tau) = 1/2\ \Lambda^{\mu\sigma}\ (\lambda^{(\mu)}+\Lambda)^{-1}\ \{\ (\lambda^{(\sigma)}-\Lambda)^{-1}$$

$$\times [\ \Theta(\tau'-\tau)\ (\exp(-\lambda^{(\sigma)}(\tau'-\tau)) - \exp(-\Lambda(\tau'-\tau))) -$$

$$- \exp(-\lambda^{(\mu)}(\tau-t_o))\ (\exp(-\lambda^{(\sigma)}(\tau'-t_o)) - \exp(-\Lambda(\tau'-t_o)))] +$$

$$+ (\lambda^{(\mu)}+\lambda^{(\sigma)})^{-1}\ \exp(-\lambda^{(\sigma)}\tau'-\lambda^{(\mu)}\tau)$$

$$\times [\ \exp((\lambda^{(\mu)}+\lambda^{(\sigma)})\min(t,t')) - \exp((\lambda^{(\mu)}+\lambda^{(\sigma)})t_o)\ ]\}$$

(IV.A.13.b)

Es de interés el caso particular $\lambda^{(\mu)}= \lambda^{(\sigma)}= 0$ y $\Lambda^{\mu\sigma}= \Lambda^{-1}$ para el cual la función de Green es explicitamente

$$R(\tau',\tau) = \Lambda^{-2}\ [\ \min(\tau,\tau')-t_o- K(\tau,\tau') + \qquad \text{(IV.A.15)}$$

$$+ 2\ (\ K(\tau,t_o) + K(\tau',t_o)\ )\ ] \quad .$$