Capítulo I

Conceptos Generales sobre
Sistemas Dinámicos con Ruido que presentan bifurcaciones

C A P I T U L O I

I.1. SISTEMAS DINAMICOS QUE PRESENTAN BIFURCACIONES:

Una poderosa herramienta en el estudio de sistemas dinámicos no lineales que presentan inestabilidades lo proporciona la teoría de bifurcaciones, la cual describe como las soluciones de ecuaciones diferenciales pueden ramificarse cuando uno o mas parámetros del sistema son variados. Las bifurcaciones son clasificadas en términos de su codimensión, es decir el numero de parámetros independientes que se necesitan variar para obtener las distintas soluciones. En la vecindad de un punto fijo estable, el sistema queda caracterizado por una variedad central cuya dimensión es igual al número de autovalores complejos conjugados de la parte lineal del sistema, cuya parte real puede ser variada caracterizando la bifurcación. Cuando estos autovalores se vuelven imaginarios el subespacio propio determina el o los modos críticos del sistema, y la dinámica sobre la variedad central puede ser reducida a una ecuación diferencial para el o ellos en la vecindad del punto de bifurcación.

Uno de los resultados mas importantes en la teoría de sistemas dinámicos no lineales es el Teorema de la Variedad Central [Ke67] que nos dice que es posible efectuar un cambio no lineal de variables en la vecindad del punto de bifurcación, de forma tal que las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema pueden ser transformadas en ecuaciones diferenciales para los modos críticos. Existen diferentes técnicas [CS83, GH83, CE84], conocidas como de las Formas Normales, para obtener el cambio no lineal de variables y las ecuaciones diferenciales para las variables críticas son conocidas como Forma Normal (FN) de la singularidad.

Los sistemas dinámicos que presentan bifurcaciones de Hopf presentan dos tipos de atractores o soluciones estables: 1) puntos fijos o sumideros y 2) soluciones periódicas (curvas cerradas simples) o ciclos limites.

Para ilustrar la formación de un ciclo límite consideremos el sistema dinámico descripto (en coordenadas polares) por: $\dot{r} = \mu r - r^3$ y $\dot{\theta} = \omega_o > 0$. Para $\mu<0$, el lado derecho de la primera ecuación es siempre negativo y el movimiento son espirales que caen en el sumidero r=0. Para $\mu>0$ es positivo en la vecindad de r=0 y el punto fijo deja de ser atractor; para $r<\mu$ ($r>\mu$) se tiene un incremento (disminución) de r con el tiempo. Asi el sistema evoluciona al ciclo límite $r(t)=\mu$, $\theta(t)=\omega_o t+\theta_o$. El pasaje de un punto fijo a un ciclo límite cuando μ pasa por cero, que caracteriza a esta bifurcación de Hopf, es ilustrada en la Fig.(I.1).

Los sistemas que presentan una bifurcación de Hopf quedan caracterizados por un parámetro de bifurcación μ, que es la parte real del par de autovalores complejos conjugados de la parte lineal del sistema de ecuaciones diferenciales que los modelan.

La dinámica de todo sistema que presenta una bifurcación de Hopf queda modelada alternativamente por la Forma Normal de la Bifurcacion de Hopf (FNBH). Su descripción en la vecindad del punto de bifurcación es cualitativamente el mismo, a un lado se tiene como atractor un punto fijo y al otro un ciclo límite circular, volviendose inestable el punto fijo. El cambio no lineal de variables es una expansión polinómica de las variables críticas, cuyo orden es μ, y da cuenta de las resonancias contenidas en el sistema dinámico. La composición espectral de las resonancias es consecuencia directa del comportamiento no lineal del sistema dinámico, es decir la forma funcional de la parte no lineal de la ecuación diferencial que lo modela. La FNBH no contiene resonancia alguna si el cambio no lineal de variables es efectuado adecuadamente. La metodología de Formas Normales propuesta por Coulet et al. [CE84, CE85] permite en una manera directa y sencilla efectuar dichos cálculos.

Cuando se incorporan excitaciones irregulares al sistema, debido a la inestabilidad de sus parámetros, ruido externo, interno o térmico la descripción anterior resulta incompleta.

Se muestra en este trabajo que el hecho de considerar al sistema afectado por ruido, da lugar a la aparición de nuevas resonancias o términos espectrales, que llamaremos estocásticas por su origen, mientras que las que son propias del sistema en ausencia de excitaciones las llamaremos deterministas. Este fenómeno conjeturado por Coullet et al., tiene su origen en el acoplamiento del ruido al forzado externo determinista, caracterizado por la frecuencia de oscilación o modos críticos del sistema dinámico. El ruido en cualquiera de sus formas contiene alguna porción del espectro, el blanco todo el espectro frecuencial.

En la naturaleza existen dos casos de particular interes:

ruido aditivo y multiplicativo lineal. El ruido aditivo tiene en cuenta los efectos del reservorio del que no da cuenta una descripción determinista y el ruido multiplicativo lineal tiene su origen en la fluctuación de los parámetros lineales del sistema.

Cuando se desea realizar la descripción de un sistema que presenta inestabilidades en presencia de ruido, la inclusión del mismo en la dinámica se debe realizar cuidadosamente. Todo tipo de transformación no lineal debe efectuarse sobre la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) que lo modela, obteniendose en este caso la ecuación diferencial de la forma normal estocástica llamada simplemente Forma Normal Estocástica (FNE) de la singularidad [ET87a, ET87b, EJ87].

La inclusión de ruido aditivo o multiplicativo trae como consecuencia la aparición de términos "resonantes" en la FNE, a diferencia de lo que ocurre en la descripción determinista. Son estos términos los que dan origen a nuevos términos espectrales o resonancias, que son armónicos de la frecuencia fundamental del sistema. El estudio de estas contribuciones es esencial ya que pueden entrar en competencia con las deterministas. La intensidad de las contribuciones dadas por los armónicos estocásticos en el espectro estara caracterizada no solo por la intensidad de la fuente de ruido, sino tambien por su tiempo de correlación, los parámetros que gobiernan la bifurcación y su frecuencia propia.

Se analiza en este trabajo los casos de ruido blanco y coloreado, ambos con valor medio nulo y función de correlación no nula. El ruido blanco, cuya correlacion es una distribucion delta con "tiempo de correlación cero", tiene por espectro o potencia espectral a todo el espacio de frecuencias; en cambio el ruido coloreado contendrá solo una porción del mismo, tal es el caso que consideraremos aqui: ruido de color que satisface un proceso de Ornstein-Uhlembeck y cuyo ancho espectral es proporcional al inverso del tiempo de correlación del ruido.

Existen gran variedad de sistemas físicos, químicos, biológicos y de la ingenieria que presentan inestabilidades tales como una bifurcación de Hopf. Aqui nos ocuparemos en particular del estudio de osciladores autoexitados, que aparecen en circuitos y dispositivos electricos [St63, FH83, TD89, CV88] y de modelos sencillos de variabilidad climatica, de utilidad para la descripción de fenómenos paleoclimáticos [Sa82, SS82, Su81, NN81, Ha76].

Los sistemas dinámicos que presentan una bifurcación de Hopf en presencia de ruido pueden ser modelados por N ecuaciones diferenciales, de primer orden en el tiempo, que describen la dinámica de las variables lentas del sistema. Los términos de ruido estocástico tienen en cuenta las excitaciones irregulares y asumen la existencia implícita de variables rápidas. En estas condiciones en la vecindad del punto de bifurcación, no será posible despreciar los efectos no lineales del sistema. Por otro lado existiran N-2 modos estables, es decir autovalores reales negativos.

La EDE que modela a un sistema que presenta una bifurcación de Hopf es

$$\dot{u} = L_{(\lambda)} u + N_{(\lambda)}(u) + F_{(\lambda)}(u;t) \quad , \qquad (I.1)$$

donde $\mathbf{u}=(u_1,...,u_N)$ es un vector N-dimensional de las variables dinámicas, $L_{(\lambda)}$ es una matriz que depende de los parámetros $(\lambda)=(\lambda_1,...,\lambda_m)$, al igual que la función $\mathbf{N}_{(\lambda)}(\mathbf{u})$ no lineal en $\mathbf{u}$ y la función $F_{(\lambda)}(u;t)$ que tiene en cuenta las fluctuaciones en el sistema. Es este el caso en que la solución estacionaria $\mathbf{u=0}$ pierde su estabilidad, es decir los parametros (λ) toman valores $(\bar{\lambda})$ para el cual 2 autovalores tienen parte real cero, mientras los restantes N-2 tienen autovalores γ_α $(\alpha=1,...,N-2)$ reales negativos. Los autovalores imaginarios determinan los modos inestables o críticos y los restantes los llamados estables. Este es el caso general de un sistema dinámico cuya inestabilidad es una bifurcacion de Hopf. De acuerdo al Teorema de la Variedad Central sabemos que es posible efectuar un cambio de variables

$$u \longrightarrow (A,B) \quad , \tag{I.2}$$

donde $A=(A_1,A_2)$ y $B=(b_1,...,b_{N-2})$, de forma tal que a partir de la Ec.(I.1), en el caso $\mathbf{F}\equiv\mathbf{0}$, puede obtenerse una ecuación cerrada para los dos modos críticos, conocida como FN, de la forma

$$\dot{A}_i = J_{ij}\, A_j + f_{1,i}(A) \tag{I.3}$$

válida para tiempos $t \gg (\min_\alpha \gamma_\alpha)^{-1}$ y donde J_{ij} es la matriz diagonal con autovalores críticos. La ecuación para los modos estables es

$$\dot{B}_\alpha = B_\alpha\, (\, \gamma_\alpha + f_{i,\alpha}(A)\,) \quad , \tag{I.4}$$

A continación consideremos un modelo 2-dimensional que describe un proceso climático que presenta una bifurcación de

Hopf. En este tipo de modelos solo modos críticos estan presentes, pero los mismos son suficientes para caracterizar el fenómeno que es motivo de estudio. Se establece explicitamente el cambio no lineal de variables, asi como la EDE obtenida o Forma Normal Estocástica (FNE) de la singularidad.

I.2. CARACTERIZACION DE UN SISTEMA DINAMICO QUE PRESENTA UNA BIFURCACION DE HOPF:

Consideremos el sistema dinámico, introducido por Saltzmann et al. [Sa82, SS82b] gobernado por 2 variables de un estado climático:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \phi_1 \theta - \phi_2 \eta + \mathcal{R}_\eta(\eta,\theta;t) \\ \dot{\theta} &= -\psi_1 \eta + \psi_2 \theta - \psi_3 \eta^2 \theta + \mathcal{R}_\theta(\eta,\theta;t) \end{aligned} \quad , \qquad (I.5)$$

donde η es el seno de la latitud de avance de los hielos marinos y θ es la temperatura promedio de un oceano. ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2 y ψ_3 son constantes positivas tratadas como parámetros y $\mathcal{R}_\eta$ y $\mathcal{R}_\theta$ representan fuerzas estocásticas multiplicativas o aditivas.

A pesar de ser un modelo sencillo el sistema sirve como prototipo de todos los modelos climáticos de dos variables que admiten comportamiento de ciclo límite como posible interpretación de los cambios climáticos. Más aun, tales sistemas se caracterizan por presentar una bifurcación de Hopf, y su dinámica en gran cantidad de casos queda restringida a la vecindad del punto de bifurcación. En [Sa82] se han realizado simulaciones numéricas mostrandose que las oscilaciones de ciclo límite de períodos grandes, que describen los ciclos glaciarios cuaternarios, presentan esta característica.

La introdución del ruido en el modelado del sistema dinámico debe realizarse con precaución, de forma tal que describa los fenomenos observados. Asi informacion adicional, sobre el sistema dinámico, puede ser recogida tal como intensidad de las fluctuaciones y la región del espacio de parámetros en la cual el sistema "funciona". Las simulaciones numéricas directas, si bien proporcionan información valiosa, pueden enmascarar la naturaleza del sistema confundiendo efectos deterministas con los estocásticos. Una forma de trabajo, que "separa" tales efectos en una manera clara es el tratamiento de estos sistemas a partir de la teoria de formas normales. Los calculos no seran dados aqui, aunque el lector interesado puede remitirse al Cap.V, donde se trata osciladores autoexitados que presentan una bifurcación de Hopf.

En el modelo presentado, un analisis dimensional muestra que si[1] $[\eta] = 1$ y $[\theta] = T$, entonces $[\phi_2] = [\psi_2] = [\psi_3] = t^{-1}$, $[\phi_1] = (Tt)^{-1}$ y $[\psi_1] = Tt^{-1}$. La Ec.(I.5) puede ser llevada a la forma mas sencilla

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x - y + \mathcal{R}_y(x,y;t) \\ \dot{x} &= -ay + bx - y^2x + \mathcal{R}_x(x,y;t) \end{aligned} \quad , \qquad (I.6)$$

donde las nuevas variables, parámetros y constantes son

[1] $[x]$ indica la dimension de x es, T es en este caso temperatura y t el tiempo.

adimensionales y se relacionan con las de Ec.(I.5) a través de $t=\lambda_0 \underline{t}$, $\theta=\lambda_1 x$, $\eta=\lambda_2 y$, $a=\psi_1/\phi_1$, $b=\psi_2/\phi_2$ con $\lambda_0=\phi_2^{-1}$, $\lambda_1=\phi_2^{3/2}\phi_1^{-1}\psi_3^{-1/2}$ y $\lambda_3=\phi_2^{1/2}\psi_3^{-1/2}$. En la Ec.(I.6): $(\dot{})=d/d\underline{t}$, $\mathcal{R}_x$ y $\mathcal{R}_y$ son los términos de ruido convenientemente escaleados con los de Ec.(I.5).

Diagonalizando la parte lineal de la Ec.(I.6) se obtienen autovalores $\mu\pm i\Omega$, con $\mu=(b-1)/2$ y $\Omega^2=((a-b)-\mu^2)$ y $a>b$. En $\mu=0$ $(b=1)$ el sistema presenta un punto de bifurcación y los autovalores se vuelven imaginarios $\pm i\omega$, $\omega=a-b$; para $b<1$ el sistema tiene una solución estable de punto fijo mientras que para $b>1$ una estable de ciclo límite volviendose inestable el punto fijo. Una base de vectores propios que diagonaliza la parte lineal es la dada por $\varkappa_1=\delta e_1+e_2$, $\varkappa_2=\varkappa_1^*$ con (e_1,e_2) la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\delta=(1+i\omega)^{-1}$. En la vecindad del punto de bifurcación $\mu=0$ es posible realizar un cambio no lineal de variables para hallar la FNE correspondiente a Ec.(I.5).

El cambio no lineal de variables es:

$$u = z\varkappa_1 + z^*\varkappa_2 + U^{[2]}(z,z^*) + U^{[3]}(z,z^*) + \cdots \qquad , \qquad \text{(I.7)}$$

donde $u=xe_1+ye_2$, $z\in\mathbb{C}$, y los vectores de cambio no lineal de variables estan dados por

$$U^{[2]}(z,z^*) = 0$$

$$U^{[3]}(z,z^*) = (\gamma/2i\omega)\ (-2\delta^2 z^3 + (\delta^2+2|\delta|^2)|z|^2 z^* + (\delta^{2*}/2)z^{3*})\ \varkappa_1 + \text{c.c.}$$

$$U^{[4]}(z,z^*) = 0$$

(I.8)

c.c. denota complejo conjugado y $\gamma=\delta^*(\delta^*-\delta)^{-1}$. Luego de pasar a la base canónica el cambio no lineal de variables es explicitamente:

$$x = a_1 z + a_2 z^2 z^* + a_3 z^3 + c.c. \qquad , \qquad \text{(I.9)}$$

$$y = b_1 z + b_2 z^2 z^* + b_2 z^3 + c.c.$$

siendo a_i y b_i (i=1,2,3) funciones de ω definidas por

$$a_1 = \frac{(1-i\omega)}{(1+\omega^2)} \quad , \quad a_2 = -\frac{3\ (1-i\omega)^2}{8\ (1+\omega^2)^2\omega^2} \quad , \quad a_3 = -\frac{(1+i\omega)}{2\ (1+\omega^2)^2\omega^2}$$

$$b_1 = 1 \quad , \quad b_2 = -\frac{i(5\omega^2+1)\omega - (7\omega^2+3)}{8\ \omega^2(1+\omega^2)^2} \quad , \quad b_3 = -\frac{1}{2\ (1+\omega^2)^2\omega^2} \, .$$

(I.10)

La FN determinista en la vecindad del punto de bifurcación es

$$\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (\alpha+i\beta)|z|^2 z + \cdots \qquad , \qquad \text{(I.11)}$$

y su ecuación compleja conjugada. Siendo $\alpha(\beta)$ la Re($\mathcal{I}m$) de $\gamma(\delta^2+2|\delta|^2)$ y por lo tanto funciones de ω expresadas como:

$$\alpha = \frac{1/2}{1+\omega^2} \qquad \beta = \frac{-3/2}{\omega(1+\omega^2)} \, . \qquad \text{(I.12)}$$

Considerando solo un término de ruido en la Ec.(I.6) impondremos que $\mathcal{R}_y=0$ el otro término puede ser aditivo o multiplicativo. Si $\mathcal{R}_x(x,y;t)=\varepsilon^{1/2}h(x,y)\zeta(t)$, donde ε es la intensidad del ruido y $\zeta(t)$ es ruido Gaussiano, con media nula y autocorrelacion no nula. Tomando por ejemplo h(x,y)=1 para el caso aditivo y $h(x,y)=x$ para el caso multiplicativo lineal, en la base canónica el término estocástico es $\varepsilon^{1/2}h(x,y)\ \zeta(t)\ e_2$ y realizando el cambio de base $e_2=\delta\varkappa_1+\varkappa_2$, la forma normal estocástica de la bifurcación de Hopf será

$$\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (\alpha+i\beta)|z|^2 z + \varepsilon^{1/2}G(z,z^*)\ \zeta(t) \qquad , \qquad (I.13)$$

y su compleja conjugada. Siendo la función que caracteriza al ruido aditivo (A) o multiplicativo lineal (M):

$$G(z,z\ ) = \begin{cases} 1 & (A) \\ z+z^* & (M) \end{cases} \qquad , \qquad (I.14)$$

La Ec.(I.13) con $\varepsilon=0$ (caso determinista) y $\alpha>0$ admite una solución estable de ciclo límite de frecuencia ω y radio $\lambda=(\mu/\alpha)^{1/2}$. De aquí es facil ver que si z es de orden λ, en efecto la expresión (I.7) es una serie, cuyo parametro de expansión es λ, que queda definida sin ambiguedad. Es esta serie, o su expresión alternativa (I.9), la que da la información sobre la composición espectral. Aparecen términos lineales, cúbicos, de grado 5, etc. que dan origen a términos de frecuencia ω, 3ω, 5ω, etc. respectivamente. Esta discusión se retomara al analizar el espectro en la Sec.I.4.

I.3. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UNA BIFURCACION DE HOPF CON RUIDO ADITIVO Y MULTIPLICATIVO:

La Forma Normal Estocástica de una Bifurcación de Hopf (FNEBH) puede ser genericamente escrita

$$\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (\alpha+i\beta)|z|^2 z + \varepsilon^{1/2}(\gamma+i\delta)\ g(z,z^*)\ F(t) \quad , \tag{I.15}$$

y su ecuación compleja conjugada, donde $z \in \mathbb{C}$. $F(t)$ es ruido aleatorio con valor medio nulo y autocorrelación no nula normalizada a 1, ε es la intensidad de la fuente de ruido F, y g es una función definida segun el proceso sea de ruido aditivo (A) o multiplicativo (M):

$$g(z,z^*) = \begin{cases} 1 & \text{(A)} \\ (\xi+i\zeta)z + (\xi-i\zeta)z^* & \text{(M)} \end{cases} \quad . \tag{I.16}$$

Todas las constantes son reales, en particular α>0. Si μ>0 el sistema contiene oscilaciones de ciclo límite.
Notemos que a diferencia del caso determinista (ε=0) la Ec.(I.15), con $g(z,z^*)$ definido por (I.16), no es invariante frente a transformaciones de fase, es decir $z \longrightarrow e^{i\varphi}z$. Este es el origén de la aparición de nuevos términos espectrales, como se verá en este trabajo, en todo sistema que presente una bifurcación de Hopf que se encuentra en el regimén de ciclo límite. El caso $g(z,z^*)=z$ es claramente invariante, pero este no caracteriza un sistema que presente una bifurcación de Hopf y no aparecen términos de esta forma acompañando al término de ruido en la Ec.(I.15).

La FNEBH puede ser escrita en una forma mas concisa realizando un escaleado de las variables y constantes en los casos (I.16). Para el caso (M) hacemos la sustitución

$$z = \alpha^{-1/2} \frac{\xi - i\zeta}{|\xi + i\zeta|} Z$$

$$\beta = \alpha B \qquad , \qquad (I.17)$$

$$\varepsilon = E^{1/2}\{|\gamma+i\delta|\,|\xi+i\zeta|\}^{-1}$$

y la ecuación escaleada es

$$\dot{Z} = (\mu+i\omega)Z - (1+iB)|Z|^2Z + E^{1/2}e^{i\Delta}\,(Z+Z^*)\,F(t) \quad , \qquad (I.18)$$

con $\Delta = \arg[\,(\gamma+i\delta)(\xi+i\zeta)]$, mientras que para el caso (A) realizamos la sustitución

$$z = \alpha^{-1/2}\, e^{i\Sigma}\, Z$$

$$\beta = \alpha\, B \qquad , \qquad (I.19)$$

$$\varepsilon = E^{1/2}|\gamma+i\delta|^{-1}\alpha^{-1/2}$$

$$\Sigma = \arg\,(\gamma+i\delta)$$

obteniendose la ecuación escaleada

$$\dot{Z} = (\mu+i\omega)Z - (1+iB)|Z|^2Z + E^{1/2}\,F(t)\ . \qquad (I.20)$$

Las Ecs. (I.18) y (I.20) pueden ser escritas genericamente

$$\dot{z} = (\mu+i\omega)z - (1+i\beta)|z|^2z + \varepsilon^{1/2}e^{i\Delta}\,G(z,z^*)\,F(t) \quad , \qquad (I.21)$$

siendo

$$G(z,z^*) = \begin{cases} 1 & ,\Lambda=0 \quad (A) \\ z + z^* & \quad (M) \end{cases} \tag{I.22}$$

Con la finalidad de trabajar en un sistema coordenado más conveniente a los efectos de los cálculos en integral funcional siguiendo la idea utilizada por Spina et al. [SV87], introducimos el cambio no lineal de coordenadas

$$z = \sqrt{\mu}\ e^{u+i\theta} \quad , \tag{I.23}$$

en lugar del cambio de coordenadas polares usual. Este ansatz tiene varias ventajas, la variable $u \in \mathbb{R}$ y las técnicas de integral funcional en este espacio estan bien establecidas, por otro lado es posible realizar un desarrollo perturbativo alrededor de la solución estable determinista u=0 que corresponde al regimén de ciclo límite con radio $\sqrt{\mu}$. La variable angular θ requiere ser definida correctamente, para evitar multivaluaciones que indeterminan el tratamiento en integral funcional. Si $\theta \in \mathbb{S}^1$, es decir el intervalo $[0,2\pi]$ con los extremos del intervalo identificados uno con el otro[2], la transformación (I.23) es un mapeo $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$, una banda cilíndrica. Esta elección no es caprichosa, ya que $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ es el espacio cociente de $\mathbb{R}^2$ por las tranformaciones enteras modulo 2π: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_{(\mathrm{mod}\ 2\pi)}$. Sin embargo, la resolución de nuestros problemas no se reduce a su estudio en $\mathbb{R}^2$, es necesario dar una formulación en integral funcional que

---

[2] $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1 \}$

contemple la topología del problema bajo consideración.

La EDE correspondiente a la FNEBH (I.21), en el espacio (u,θ) será

$$\dot{\theta} = \omega - \mu\beta\, e^{2u} + \upsilon^{1/2}\, g_1(u,\theta)\, F(t)$$
$$\dot{u} = \mu\,(1-e^{2u}) + \upsilon^{1/2}\, g_2(u,\theta)\, F(t) \qquad , \qquad (I.24)$$

siendo para el caso (A)

$$g_1(u,\theta) = -\, e^{-u}\, \mathrm{sen}\theta$$
$$g_2(u,\theta) = e^{u}\, \cos\theta \qquad , \qquad (I.25)$$
$$\upsilon = \varepsilon/\mu$$

y para el caso (M)

$$g_1(u,\theta) = \mathrm{sen}\Delta - \mathrm{sen}(2\theta-\Delta)$$
$$g_2(u,\theta) = \cos\Delta + \cos(2\theta-\Delta) \qquad , \qquad (I.26)$$
$$\upsilon = \varepsilon$$

A los efectos de obtener las nuevas contribuciones espectrales, es factible linealizar las Ecs. (I.26) alrededor de u=0, la solución estable determinista (ε=0), ya que términos de orden superior introducen correcciones a esta que es la contribución dominante y por ser (u) la variable que da cuenta de apartamientos perpendiculares al ciclo límite. Nuestro interés esta en la información contenida en la fase θ, y sera en esta variable donde se efectua el cálculo perturbativo para obtener las nuevas contribuciones espectrales de origen estocástico. Es entonces suficiente linealizar alrrededor de $u=0$ reteniendo términos lineales en el vector de arrastre e independientes en la matriz de difusión. Realizando la sustitución

$$\theta = \varphi + \Omega t - \Delta/2 \qquad , \tag{I.27}$$

con $\Omega = \omega - \beta\mu$ las ecuaciones (I.24) se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -2\beta\mu\ u + \ \upsilon^{1/2}\ g_1(\varphi+\Omega t)\ F(t) \\ \dot{u} &= -2\mu\ u + \upsilon^{1/2}\ g_2(\varphi+\Omega t)\ F(t) \end{aligned} \qquad , \tag{I.28}$$

siendo para el caso (A)

$$g_1(\psi) = -\mathrm{sen}\psi \qquad , \qquad g_2(\psi) = \cos\psi \qquad , \tag{I.29}$$

y para el caso (M)

$$g_1(\psi) = a-\mathrm{sen}2\psi \qquad , \qquad g_2(\psi) = b+\cos2\psi \qquad , \tag{I.30}$$

con $a^2+b^2=1$ y $a=\mathrm{sen}\Delta$.

El hecho de que $g(z,z^*)$ este dado por Ec.(I.16), o bien por la (I.22), no es invariante frente a tranformaciones de fase y en consecuencia tampoco lo sea la FNEBH, se manifiesta en la EC.(I.28) en que las funciones $g_i(\psi)$ no son invariantes frente a traslaciones de la fase ψ, es decir frente a transformaciones $g_i(\psi)\longrightarrow g_i(\psi+\alpha)$, $(\alpha\in\mathbb{R}/\alpha\neq2\pi)$. La invariancia se da solo en el caso $g_i\equiv1$, que no describe a la FNEBH. Por esta razón sera de utilidad estudiar en el formalismo de integral funcional EDE 1-dimensionales de la forma:

$$\dot{\varphi} = \varepsilon^{1/2} g(\varphi+\omega t)\ F(t) \quad , \tag{I.31}$$

para entender el mecánismo por el cual aparecen nuevos términos en el espectro. Aqui $g(\psi)$ es una función 2π-periodica. Esta ecuación puede ser interpretada como una EDE que describe una bifurcación de Hopf alrrededor de la solución estable u=0 en la Ec.(I.28).

I.4. EL ESPECTRO DE UN SISTEMA DINAMICO QUE PRESENTA UNA BIFURCACION DE HOPF:

En la mayoría de las situaciones reales es de interés conocer las funciones de correlación de las variables dinámicas que describen a los sistemas bajo estudio. Alternativamente es de utilidad su densidad de potencia espectral o espectro que es simplemente la transformada de Fourier coseno de la función de correlación, ya que esta puede ser obtenida en registros experimentales.

Para hacer un analisis detallado nos remitimos al caso estudiado en la Sección I.2., para el cual las funciones de correlación del proceso (x,y) a tiempos t y t', es decir la autocorrelaciones de (x) e (y) y la correlación cruzada de (x) con (y), que se denotan por

$$\begin{gathered} \langle x(t)\ x(t')\rangle \\ \langle y(t)\ y(t')\rangle \\ \langle x(t)\ y(t')\rangle \end{gathered} \tag{I.32}$$

pueden ser determinadas por el cambio no lineal de variables (I.9), si es de interés el estudio del sistema en la vecindad del punto de bifurcación. Consideremos aqui la autocorrelación de (x), por ser esta una variable relevante en el sistema geofísico considerado. Recordemos que a menos de un factor introducido en el escaleado, (x) describe a la temperatura en el modelo de variabilidad climática considerado. La autocorrelación de (x) será una serie formal cuyo parámetro de expansión es el cuadrado del radio del ciclo límite r, o en términos del parámetro de bifurcación μ es μ/α. La autocorrelación de (x) es

$$
\begin{aligned}
&\langle x(t)\; x(t')\rangle = \\
&= 2\, Re\, \{\; |a_1|^2\langle z(t)\; z^*(t')\rangle + |a_2|^2\langle z(t)|z(t)|^2 z^*(t')|z(t')|^2\rangle + \\
&\quad + |a_3|^2\langle z^3(t)\; z^{3*}(t')\rangle + (a_1\; a_2^*\; \langle z(t)|z(t)|^2 z^*(t')\rangle + \\
&\quad + a_1\; a_3^*\; \langle z(t)\; z^{3*}(t')\rangle + a_2\; a_3^*\; \langle z(t)|z(t)|^2 z^{3*}(t')\rangle + c.c.) + \\
&\quad + a_1^2\; \langle z(t)\; z(t')\rangle + a_2^2\; \langle z(t)|z(t)|^2 z(t')|z(t')|^2\rangle + \\
&\quad + a_3^2\; \langle z^3(t)\; z^3(t')\rangle + a_1\; a_3\; (\langle z^3(t)\; z(t')\rangle + \langle z^3(t')\; z(t)\rangle) + \\
&\quad + a_1\; a_2\; (\langle z(t)|z(t)|^2 z(t')\rangle + \langle z(t)\; z(t')|z(t')|^2\rangle) + \\
&\quad + a_2\; a_3\; (\langle z(t)|z(t)|^2 z^3(t')\rangle + \langle z^3(t)\; z(t')|z(t')|^2\rangle\;)\;\}\; .
\end{aligned}
\tag{I.33}
$$

De aqui se desprende que determinando las funciones de autocorrelación y correlación cruzadas del proseso (z,z^*) al orden μ/α

$$\langle z(t)\, z(t')\rangle \quad ,$$

$$\langle z(t)\, z^{*}(t')\rangle \quad , \qquad \text{(I.34)}$$

sus correcciones al orden $(\mu/\alpha)^2$ dadas por los momentos

$$\langle z(t)\, z^{3}(t')\rangle \quad ,$$

$$\langle z(t)\, z^{3*}(t')\rangle \quad ,$$

$$\langle z(t)\, z(t')|z(t')|^{2}\rangle \quad , \qquad \text{(I.35)}$$

$$\langle z(t)\, z^{*}(t')|z(t')|^{2}\rangle \quad ,$$

y al orden $(\mu/\alpha)^3$ por

$$\langle z^{3}(t)\, z^{3}(t')\rangle \quad ,$$

$$\langle z^{3}(t)\, z^{3*}(t')\rangle \quad ,$$

$$\langle z^{3}(t)\, z(t')|z(t')|^{2}\rangle \quad , \qquad \text{(I.36)}$$

$$\langle z^{3}(t)\, z^{*}(t')|z(t')|^{2}\rangle \quad ,$$

$$\langle z(t)|z(t)|^{2}z(t')|z(t')|^{2}\rangle \quad ,$$

$$\langle z(t)|z(t)|^{2}z^{*}(t')|z(t')|^{2}\rangle \quad ,$$

y sus complejos conjugados.

Para una descripsión determinista del espectro es necesario introducir el concepto de función de autocorrelación de la variable q(t) al tiempo t y a un tiempo posterior $t+\tau$. En el presente caso no tendremos un proceso aleatorio y deberá estar dada a traves del promedio temporal definido por

$$\langle q(t)\ q(t+\tau)\rangle = \underset{T\longrightarrow+\infty}{Lim}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt'\ q(t')\ q(t'+\tau)\quad . \tag{I.37}$$

Si consideramos la solución estable determinista de (I.21) alrrededor de u=0 dada por

$$z = \sqrt{\mu}\ e^{i(\omega t+\varphi_0)}\quad , \tag{I.38}$$

donde φ_0 es la condición inicial para la fase, podemos determinar el espectro del sistema descripto por la variable (x).
Es necesario definir el promedio de la autocorrelación sobre la fase inicial como

$$|\langle\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\rangle| = \int_0^{2\pi} d\varphi_0\ \langle\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\rangle\ \mathcal{P}_{st}(\varphi_0)\quad , \tag{I.39}$$

siendo en este caso $\mathcal{P}_{st}(\varphi_0) = 1/2\pi$.

Las unicas contribuciones no nulas a la autocorrelación de (x) en (I.33) estarán dadas por

$$\begin{aligned}
&\langle z(t)\ z^*(t+\tau)\rangle = (\mu/\alpha)\ e^{i\omega\tau}\\
&\langle z^3(t)\ z^{3*}(t+\tau)\rangle = (\mu/\alpha)^3 e^{i3\omega\tau}\quad , \\
&\langle z(t)\,|z(t)|^2 z^*(t+\tau)\,|z(t+\tau)|^2\rangle = (\mu/\alpha)^3 e^{i\omega\tau}
\end{aligned} \tag{I.40}$$

Se desprende que x(t) tiene contribuciones espectrales principales de frecuencia ω al orden 1 en μ, 3ω al orden 3 en μ, etc.

En una descripsión estocástica, los resultados al orden cero en una teoría perturbativa no deben diferir cualitativamente de los dados aquí. Este es uno de los puntos que se responderan a lo largo de este trabajo.

Aqui resulta de interés preguntarse si las funciones de correlación del proceso (z,z^*) dadas en (I.34) y que son de orden 1 en μ no dan contribuciones de frecuencia 3ω que sean relevantes frente a las deterministas. Esta cuestión se respondera en el presente trabajo utilizando el esquema perturbativo en Integral Funcional que presentaremos en el próximo Capitulo.