Capítulo VI

Osciladores Autoexitados con Ruido que presentan una Bifurcación de Hopf

C A P I T U L O VI

VI.1. OSCILADORES AUTOEXITADOS QUE PRESENTAN UNA BIFURCACION DE HOPF:

Las oscilaciones autoexitadas, presentes en varios fenómenos físicos, pueden ser modeladas por ecuaciones de formas muy diversas que describen su comportamiento. Aquí nos ocuparemos de osciladores descriptos por una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo y que presenten una bifurcación de Hopf para algun parámetro crítico en el espacio de las fases; consideremos aquellos que son generadores de onda sinusoidal, es decir aquellos cuya salida es aproximadamente de esta clase. Pueden ser representados por

$$\ddot{x} = f_{(\lambda)}(x,\dot{x};t) \quad , \qquad \text{(VI.1)}$$

donde x(t) es la variable dinámica, por ejemplo voltaje o corriente en un dado circuito. Por cada punto encima de las variables se indica una derivada temporal. $f_{(\lambda)}$ es alguna función determinada por la naturaleza especifica del oscilador a describir y el subíndice (λ) indica el o los parámetros que caracterizan la bifurcación y que dependera de las constantes físicas del sistema bajo estudio.

Una caracterización de la forma de obtener salidas cuasi-sinusoidales ha sido analizada por Stratonovich [St63][1], así como los apartamientos del caso senoidal puro.

Si la señal generada por un oscilador $x(t)$ es puramente senoidal, y ω_o es su frecuencia, se satisface la Ec.(VI.1) con

$$f_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) = -\omega_o^2\, x \quad , \tag{VI.2}$$

en cambio si no lo es, pero las desviaciones son pequeñas, introduciendo un pequeño parámetro ε es posible escribir

$$f_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) = -\omega_o^2\, x + \varepsilon\, F_{\langle\lambda\rangle}(x,\dot{x};t) \quad . \tag{VI.3}$$

La Ec.(VI.1) con (VI.3) permiten describir oscilaciones cuando excitaciones externas e internas son aplicadas al sistema oscilante. En este caso $F_{\langle\lambda\rangle}$ depende explicitamente del tiempo t. Oscilaciones externas son usadas para sincronizar la frecuencia del oscilador; este es el caso de excitaciones regulares. Pueden existir excitaciones irregulares, debido a la inestabilidad de los parámetros del sistema, descargas de ruido interno y térmico, asi como ruido externo. En todos los casos, las excitaciones irregulares dependientes del tiempo deben ser descriptas estadisticamente. Luego la señal generada por el oscilador a la salida del dispositivo es una función aleatoria del tiempo. En algunos casos no es conveniente despreciar las fluctuaciones, ya

---

[1] Pag.222, Cap.IX ,Vol.2.

que las mismas permiten obtener oscilaciones resonantes.

Si el sistema oscilante presenta inestabilidades en el espacio de las fases $(x,\dot{x})$ tal como una bifurcación de Hopf, y su funcionamiento esta en el régimen de ciclo límite, es de esperar que el ruido incorpore nuevos elementos que deben ser considerados, como se ha visto a lo largo de este trabajo. En una situación real la potencia espectral o espectro es de interés y la misma contiene contribuciones de origen determinista o bien estocástico. Es necesario discriminar unas de otras, para ello un análisis teórico puede ser de utilidad.

A fin de caracterizar a este tipo de osciladores es necesario dar una forma funcional explicita para $F_{(\lambda)}$. Si es una función polinómica de x y $\dot{x}$, es posible separar el término lineal en $\dot{x}$

$$F_{(\lambda)}(x,\dot{x};t) = \omega\ \dot{x} + N_{(\lambda)}(x,\dot{x};t) \quad , \tag{VI.4}$$

donde $N_{(\lambda)}$ es un polinomio de grado mayor o igual a 2 y la constante ω con unidades de frecuencia ω_o se introduce para mantener las dimensiones correctas si elegimos a ε como parámetro adimensional. Luego se tiene que el sistema a describir puede ser modelado por ecuaciones diferenciales de primer orden en (x) e (y) de la forma:

$$\dot{u} = L_{(\lambda)}u + N_{(\lambda)}(u) \quad . \tag{VI.5}$$

En la base canónica (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$, tenemos que $u=xe_1+ye_2$. Las partes lineal y no lineal estan dadas por

$$L_{\langle\lambda\rangle} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_o^2 \\ -1 & \varepsilon\omega \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{(VI.6.a)}$$

$$N_{\langle\lambda\rangle}(u) = \varepsilon\ \omega_o^{-2}\ N_{\langle\lambda\rangle}(x,\omega_o^2 y;t) \quad , \qquad \text{(VI.6.b)}$$

El sistema descripto presenta una inestabilidad, es decir en un punto λ^c del espacio de parámetros L tiene dos autovalores con parte real nula llamados modos críticos, y en una vecindad del parámetro crítico el estado estacionario **u** deja de ser estable. Tomando $\varepsilon>0$, L tiene autovalores $\mu\pm i\Omega$, con $\mu=\varepsilon\omega/2$ y $\Omega=(\omega_o^2-\mu^2)^{1/2}$ para $|\omega_o|>|\mu|$. para $\mu<0$ la solución estacionaria **u=0** es estable y para $\mu>0$ deja de serlo. En este caso $\lambda=\varepsilon\omega/2$, y $\lambda^c=0$.

Aplicando el Teorema de la Variedad Central [Ke67] se puede efectuar un cambio no lineal de variables $(x,y)\rightarrow(A_1,A_2)$, en el punto de bifurcación $\mu=0$, de forma tal que la Ec.(VI.5) se puede transformar a una ecuación diferencial para las variables críticas $A\equiv(A_1,A_2)$ de la forma

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{D}\ \mathbf{A} + \mathbf{F}(\mathbf{A}) \quad , \qquad \text{(VI.7)}$$

donde **D** es la matriz diagonal con elementos $\pm i\omega_o$. Cuando esta ecuación esta escrita en la forma más sencilla posible se la conoce como Forma Normal de la singularidad o simplemente Forma Normal (FN).

VI.2. FORMA NORMAL DE UN OSCILADOR AUTOEXITADO:

Con el objeto de ilustrar como obtener la Ecuación de la Forma Normal (VI.7) para un oscilador autoexitado, consideremos el caso en el cual las no linealidades de (VI.6) estan dadas por

$$N_{(o)}(u) = (cy^2+dy^3)\ e_2 \quad . \tag{VI.8}$$

A efectos de encontrar las ecuaciones para las variables criticas $A_i(t)$ (i=1,2) efectuamos el cambio de variables

$$u = A_i \varkappa_i + U^{[2]}\{A\} + U^{[3]}\{A\} + \cdots \quad , \tag{VI.9}$$

donde los indices repetidos indican suma y $\{\varkappa_1,\varkappa_2\}$ es la base que diagonaliza a $L_{(o)}$

$$L_{(o)} \varkappa_j = D_{jk} \varkappa_k \quad , \tag{VI.10}$$

en el espacio critico $\mathfrak{H}^c=\mathbb{C}$. Los vectores $U^{[r]}$ del espacio $\mathfrak{H}^c$ son de orden r. La Ec. (VI.7) para los modos criticos escrita orden a orden es

$$\dot{A}_i = D_{ij} A_j + f_i^{[2]}\{A\} + f_i^{[3]}\{A\} + \cdots \quad , \tag{VI.11}$$

donde $f_i^{[r]}\{A\}$ es de orden $r\geq2$ en A_1 y A_2. Es posible calcular [CE84, ET87, Ti88, DT89, BC86] orden a orden en potencias de A_1 y A_2 los vectores $U^{[r]}\{A\}$ y los coeficientes $f_i^{[r]}\{A\}$ para el caso general de un sistema que presenta bifurcaciones de Hopf [CE84]. Aquí daremos solo una breve descripsion de como se efectuan los cálculos. Eligiendo una base $\varkappa_1 = -i\omega_0 e_1 + e_2$, $\varkappa_2 = \varkappa_1^*$, evaluamos la Ec.(VI.7) orden a orden, es decir

$$\dot{u}^{[r]} = [\, Lu + N(u)]^{[r]} \quad , \tag{VI.12}$$

que se satisface identicamente a primer orden ya que

$$\dot{u}^{[1]} = L(A_i \varkappa_i) = i\omega_0 A_1 \varkappa_1 - i\omega_0 A_2 \varkappa_2 \quad . \tag{VI.13}$$

A orden r puede escribirse la Ec.(VI.12) explicitamente como

$$\mathscr{L} \mathbf{u}^{[r]} \equiv (\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{u}^{[r]} = \mathbf{I}^{[r]} - f_i^{[r]} \varkappa_i \equiv \mathbf{K}^{[r]} \quad , \tag{VI.14}$$

donde

$$\mathbf{D} \equiv D_{ij} A_j \frac{\partial}{\partial A_i} \quad , \tag{VI.15.a}$$

$$\mathbf{I}^{[r]} = N(u)^{[r]} - \sum_{s=2}^{r-1} (\partial_t A_i)^{[s]} \frac{\partial \mathbf{u}^{[r-s+1]}}{\partial A_i} \quad . \tag{VI.15.b}$$

La Ec.(VI.14) es definida en el espacio producto tensorial $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^c \otimes \mathfrak{H}^*$, donde $\mathfrak{H}^c$ es el espacio de los vectores críticos **u**, $\mathfrak{H}^*$ es el espacio de funciones **f(A)** en la representación de Bargmann [Ba61, Ba62]. En el caso de funciones de varias variables **f(A)**, **A**$=(A_1,\ldots,A_n)$, se define el producto escalar en $\mathfrak{H}^*$

$$\langle f,g\rangle = \int \bar{f}(A)\ g(A)\ d\mu(A) \quad , \tag{VI.16}$$

con $A_i = x_i + iy_i$, en el cual la funciones $\{1, \sqrt{n!}A_i^n, n>1\}$ forman una base ortonormal y los operadores $\hat{a}_i^+ f(A) = A_i f(A)$, $\hat{a}_i f(A) = (\partial/\partial A_i) f(A)$ son adjuntos entre si $[\hat{a}_i^+, \hat{a}_j] = \delta_{ij}$. La medida de integración es

$$d\mu(A) = \pi^{-n} \exp(-\textstyle\sum_{i=1}^{n} |A_i|^2) \prod_{i=1}^{n} dx_i dy_i \quad . \tag{VI.17}$$

El producto escalar en $\mathfrak{H}^c$ queda definido por

$$\langle \varkappa_i, \varkappa_j \rangle = \delta_{ij} \quad . \tag{VI.18}$$

Entonces **D** actua en $\mathfrak{H}^*$ y **L** actua en $\mathfrak{H}^c$. Luego si $\mathbf{L}^+$ es el adjunto de **L** respecto del producto escalar definido en (VI.18), el espacio $\mathfrak{H}^c$ es invariante frente a **L** y $\mathbf{L}^+$. Es facil ver que el operador $\mathcal{L} \equiv \mathbf{D} - \mathbf{L}$ tiene eutovalores cero, luego es no invertible y $\mathcal{L}\mathbf{u}^{[r]} = \mathbf{K}^{[r]}$ no tendra soluciones para $\mathbf{u}^{[r]}$ a menos que $\mathbf{K}^{[r]} \in \mathcal{R}a(\mathcal{L}) = \mathfrak{H} \perp \mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$[2] (Teorema de la Alternativa de Fredholm). Debemos encontrar una base del $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$ e imponer que $\mathbf{K}^{[r]}$ sea ortogonal a cada elemento de la base eligiendo los coeficientes no concidos $f_i^{[r]}$ en una forma mínima y luego determinar $\mathbf{u}^{[r]}$, de acuerdo a las condiciones de ortonormalidad de los productos definidos por las expresiones (VI.17) y (VI.18).

---

[2] $\mathcal{R}a(\mathcal{L})$: rango de $\mathcal{L}$; $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+) = \{v \in \mathfrak{H} / \mathcal{L}^+ v = 0\}$: nucleo del adjunto de $\mathcal{L}^+$; $\mathfrak{H} \perp \mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$: complemento ortogonal de $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$ en $\mathfrak{H}$.

A orden 2 tenemos que $I(u)^{[2]} = N^{[2]}\{u^{[1]}\}$, expresando $K^{[2]}\{A\}$ en la base $(\varkappa_1,\varkappa_2)$:

$$K^{[2]}\{A\} = (c/2)\ (A_1+A_2)^2(\varkappa_1+\varkappa_2) - f_i^{[2]}\{A\}\ \varkappa_i \quad . \tag{VI.19}$$

Despues de un breve cálculo se concluye que **0** es vector base para $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$, luego $K^{[2]}\{A\}$ genera la imagen de $\mathcal{L}$ con la elección minimal para los coeficientes

$$f_i^{[2]}\{A\} = 0 \quad . \tag{VI.20}$$

El vector $U^{[2]}\{A\}$ lo determinamos de forma que satisfaga (VI.14):

$$U^{[2]}\{A\} = (c/i\omega_o)\ (A_1^2/2 - A_2^2/6 - A_1A_2)\ \varkappa_1 - \tag{VI.21}$$

$$- (c/i\omega_o)\ (A_2^2/2 - A_1^2/6 - A_1A_2)\ \varkappa_2 \quad .$$

A orden 3 tenemos que $I(u)^{[3]} = N^{[3]}\{u^{[1]}\}$, luego en la base $(\varkappa_1,\varkappa_2)$:

$$K^{[3]}\{A\} = (d/2)\ (A_1+A_2)^3(\varkappa_1+\varkappa_2) - f_i^{[3]}\{A\}\ \varkappa_i \quad . \tag{VI.22}$$

Una base ortonormal para $\mathcal{N}u(\mathcal{L}^+)$ en el espacio $\mathfrak{H}$ esta dada por $\{(1/\sqrt{2})A_1^2A_2\varkappa_1, (1/\sqrt{2})A_1A_2^2\varkappa_2\}$. Cada uno de los vectores base debe ser ortonormal a $K^{[3]}\{A\}$, lo cual exige una elección mínima para los $f_i^{[3]}\{A\}$ realizada de acuerdo a los productos escalares definidos:

$$f_i^{[2]}(A) = (3/2)\ d\ A_1^2 A_2 \quad , \quad f_i^{[2]}(A) = (3/2)\ d\ A_1 A_2^2 \ . \tag{VI.23}$$

Resolviendo la Ec.(VI.14) utilizando las relaciones (VI.22) y (VI.23) se obtiene:

$$U^{[3]}(A) = (d/4i\omega_o)\ (A_1^3 - A_2^3/2 - 3A_1A_2^2)\ \varkappa_1 - \tag{VI.24}$$

$$- (d/4i\omega_o)\ (A_2^3 - A_1^3/2 - 3A_1^2A_2)\ \varkappa_2 \ .$$

A orden 4, se sigue el el procedimiento descripto, la elección minimal para los coeficientes es

$$f_i^{[4]}(A) = 0 \quad , \tag{VI.25}$$

y el vector de cambio de variables

$$U^{[4]}(A) = (c/\omega_o^2)[\ -(2c^2/27i\omega_o)A_1^4 + (3d/2)A_1^3A_2 + (3d-(4c^2/9i\omega_o))A_1^2A_2^2 +$$

$$+ (d/6)A_1A_2^3 + (2c^2/45i\omega_o)A_2^4]\ \varkappa_1 \ +$$

$$+ (c/\omega_o^2)[\ (2c^2/27i\omega_o)A_2^4 + (3d/2)A_2^3A_1 + (3d+(4c^2/9i\omega_o))A_2^2A_1^2$$

$$+ (d/6)A_2A_1^3 - (2c^2/45i\omega_o)A_1^4]\ \varkappa_2 \quad , \tag{VI.26}$$

Damos por finalizado el procedimiento con la elección minimal de los coeficientes

$$f_1^{[5]}(A) = (27d^2/8i\omega_o)A_1^3A_2^2 \quad ,$$

$$f_2^{[5]}(A) = -(27d^2/8i\omega_o)A_1^2A_2^3 \quad . \tag{VI.27}$$

Resulta inmediato que si $A_2=A_1^*$, se tiene que $f_2^{[r]}(A) = f_1^{[r]}(A)^*$ y que $U_2^{[r]}(A) = U_1^{[r]}(A)^*$. Llamando $A_1=z$, $z\in\mathbb{C}$ y expresando en término de la base canónica el cambio de variables (VI.9) es explicitamente al orden 4

$$x(z,z^*) = -i\omega_o(z-z^*) -(c/3)(z^2-6|z|^2+z^{2*}) -$$

$$-(d/8)\ (z^3-6|z|^2(z+z^*)+z^{3*}) +$$

$$+(4c/135\omega_o^2)\ (c^2(z^4+z^{4*}) - i45d\omega_o|z|^2(z^2-z^{2*})), \tag{VI.28.a}$$

$$y(z,z^*) = (z+z^*) + i(2c/3\omega_o)(z^2-z^{2*}) +$$

$$+ i(3d/8\omega_o)(z^3+2|z|^2(z-z^*)+z^{3*}) +$$

$$+ (c/135\omega_o^3)(i8c^2(2z^4+15|z|^4-2z^{4*})+$$

$$+ 45d\omega_o|z|^2(5z^2+18|z|^2+5z^{2*})) \quad . \tag{VI.28.b}$$

y la Ecuación Diferencial o Forma Normal para los modos críticos (z,z^*) es

$$\dot{z} = i\omega_o z + (3d/2)|z|^2 z + (27d^2/8i\omega_o)|z|^4 z \quad , \qquad (VI.29)$$

y su compleja conjugada.

Estamos interesados en conocer la Forma Normal en la vecindad de la singularidad $\lambda^c=0$, para lo cual consideramos perturbaciones constantes $\delta\lambda=\mu$ alrrededor de $\lambda^c=0$. La matriz L que depende del parámetro μ y N que contiene los terminos no lineales pueden ser expandidos en potencias de μ:

$$L_\mu = L_o + \mu\, L^{[1]} + \vartheta(\mu\ ) \quad , \qquad (VI.30)$$

$$N_\mu = N_o + \mu\, N^{[1]} + \vartheta(\mu\ ) \quad ,$$

donde L_o y N_o estan definidos por las expresiones dadas en (VI.10) y (VI.8) respectivamente. El cambio no lineal de variables, en lugar de (VI.9) puede ser indicado por

$$u(A) = \sum_{r=1}^{+\infty}\{U^{[r]}(A) + \sum_{j=1}\mu^j\ U^{[j,r]}(A)\} \quad , \qquad (VI.31)$$

[j,r] denota orden j en μ y orden r en las variables A_i. Es claro que $U^{[1]}(A) = A_i \varkappa_i$ de acuedo con la Ec.(VI.9). La Ecuación Diferencial para los modos criticos alrrededor de la inestabilidad esta dada por

$$\dot{A}_i = \sum_{r=1}^{+\infty}\{f_i^{[r]}(A) + \sum_{j=1}\mu^j\ f_i^{[j,r]}(A)\} \quad , \qquad (VI.32)$$

donde $f_i^{[1]}\{A\}=D_{ij}A_j$ de acuedo con la Ec.(VI.13).

Los vectores $\mathbf{U}^{[j,r]}\{A\}$ son evaluados orden a orden de acuerdo a:

$$\dot{u}^{[j,r]} = [\, Lu + N(u) \,]^{[j,r]} \quad . \tag{VI.33}$$

Para el orden r=j=1 puede ser reescrita como

$$\mathscr{L}u^{[1,1]}\{A\} = - f_i^{[1,1]}\{A\}\, \varkappa_i \quad , \tag{VI.34}$$

con $\mathscr{L}$ definido a traves de la Ec.(VI.14).

Los vectores $\{A_1\varkappa_1, A_2\varkappa_2\}$ son base para $\mathcal{N}u(\mathscr{L}^+)$, luego cada uno de ellos debe ser ortogonal a $f_i^{[1,1]}\{A\}$, que elegimos de forma minimal no trivial como

$$f_1^{[1,1]}\{A\} = A_1 \quad , \qquad f_2^{[1,1]}\{A\} = A_2 \quad . \tag{VI.35}$$

Reemplazando en (VI.33), la Forma Normal en una vecindad de la singularidad $\mu=0$ es

$$\dot{z} = (\mu + i\omega_o)z + (3d/2)|z|^2 z + (27d^2/8i\omega_o)|z|^4 z \quad , \tag{VI.36}$$

y su compleja conjugada. Solo se han retenido términos lineales en μ, ya que como se ha visto en la vecindad del punto de bifurcación z es de orden 1 en μ y términos de orden superior solo dan correcciones a la Ec.(VI.36).

Para d<0 el sistema describira oscilaciones de ciclo limite de radio $(2\mu/3|d|)^{1/2}$ y frecuencia ω_o a orden 0 en μ. En esta ecuación retenemos términos de orden 5 en (z,z^*) para introducir correcciones a la frecuencia al orden mas bajo. El cambio no lineal de variables dado por la expresión (VI.28) a orden cero en μ es suficiente para describir la resonancia determinista, aparecen contribuciones espectrales de frecuencia ω, 2ω, 3ω, etc. correspondientes a terminos lineales, cuadráticos, cúbicos, etc. en (z,z^*) respectivamente. Como estamos interesados en las contribuciones mas importantes, el cambio de variables a orden 0 en μ es suficiente.

Las contribuciones espectrales deterministas, pueden ser determinadas a traves de las funciones de correlación del proceso (x,y), siguiendo la metodología empleada en la Secc.(I.4). Omitiremos aqui desarrollos intermedios, pero es suficiente para esto considerar la solución estable determinista alrrededor dada por Ec.(I.38) y calcular las funciones de correlación a través de Ec.(I.37) promediando sobre la condición inicial con Ec.(I.39). Las contribuciones no nulas a la funciones de autocorrelación de (x) e (y) son

$$\langle x(t)\, x(t')\rangle = 2\, Re\{\omega_o\langle z(t)\, z^*(t')\rangle + (c/3)^2\langle z^2(t)\, z^{2*}(t')\rangle +$$

$$+ 4c^2\langle|z(t)|^2|z(t')|^2\rangle + (d/8)^2\langle z^3(t)\, z^{3*}(t')\rangle +$$

$$+ (3d/4)^2\langle|z(t)|^2 z(t)\ |z(t')|^2 z^*(t')\rangle + \qquad \text{(VI.37.a)}$$

$$+ (4c^3/135\omega_o^2)^2\langle z^4(t)\, z^{4*}(t')\rangle +$$

$$+ (4cd/3\omega_o^2)^2\langle|z(t)|^2 z^2(t)\ |z(t')|^2 z^{2*}(t')\rangle\} \quad ,$$

$$\langle y(t)\, y(t')\rangle = 2\, Re\{\ \langle z(t)\, z^*(t')\rangle + (2c/3\omega_o)^2\langle z^2(t)\, z^{2*}(t')\rangle +$$

$$+ (3d/8\omega_o)^2\langle z^3(t)\, z^{3*}(t')\rangle +$$

$$+ (3d/8\omega_o)^2\langle|z(t)|^2 z(t)\ |z(t')|^2 z^*(t')\rangle \qquad \text{(VI.37.b)}$$

$$+ (16c^3/135\omega_2^3)^2\langle z^4(t)\, z^{4*}(t')\rangle +$$

$$+ (2c/9\omega_o^3)^2(14c^2+27d\omega_o)^2\langle|z(t)|^4|z(t')|^4\rangle\ \} \quad .$$

De aqui se tiene que las contribuciones espectrales principales son de frecuencia ω al orden 1 en μ, 2ω al orden 2, 3ω al orden 3, etc. En ambos casos aparecen contribuciones de frecuencia 0 al espectro que son de orden 2 en la autocorrelación de (x) y de orden 4 en la de (y). La autocorrelación cruzada de (x,y) se calcula en la forma indicada en la Secc.(I.4) del Cap.I.

VI.3. FORMA NORMAL ESTOCASTICA DE UN OSCILADOR AUTOEXITADO:

Las fluctuaciones irregulares, debidas a inestabilidades de los parámetros del oscilador, ruido interno o térmico, en todos los casos dependientes del tiempo deben ser consideradas como ruido en las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema oscilante.

Las funciones aleatorias que son introducidas en las ecuaciones originales no conservan su forma en la Ecuación Diferencial de la FN. En la vecindad del punto de bifurcacion, los nuevos términos de ruido son consecuencia del cambio de variables no lineal efectuado. La forma funcional dependerá explicitamente de la que tenga la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) original. Aquí se analiza que el caso de ruido multiplicativo lineal que tiene su origen en la fluctuación de alguno de los parámetros lineales del sistema, y ruido aditivo que describe fluctuaciones internas o del baño térmico o reservorio del sistema oscilante.

La EDE que tendrá en cuenta tales fluctuaciones será:

$$\dot{u} = L_{(\lambda)}u + N_{(\lambda)}(u) + d(t) + m(t)u \quad , \qquad \text{(VI.38)}$$

donde $d(t)$ es un vector columna y $m(t)$ es una matriz, cuyos elementos tienen valor medio nulo y función de correlación no todas nulas siendo ruidos Gaussianos.

Analizaremos aqui ambos efectos por separado, ya que no es nuestro interés estudiar el fenómeno de interferencia.

Separando un término de ruido aditivo $\eta^{1/2}f(t)$ en la ecuación del oscilador (VI.3) se tiene explicitamente que

$$d(t) = \eta^{1/2}f(t)\, e_2 \quad , \tag{VI.39}$$

en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Si el término de frecuencia ω en la Ec.(VI.4) es una función aleatoria del tiempo $\omega(t)$ que fluctua alrrededor de su valor medio, es decir

$$\omega(t) = \omega + \upsilon^{1/2}f(t) \quad , \tag{VI.40}$$

siendo $f(t)$ en las dos últimas ecuaciones ruido Gaussiano con valor medio nulo, y (υ) y (η) miden las intensidades del ruido en ambos casos. Haciendo el escaleado $\upsilon\varepsilon^2=\eta$ en (VI.40) tenemos:

$$m(t) = \eta^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(t) \quad . \tag{VI.41}$$

La FNEBH en la vecindad de la singularidad $\mu=0$ será

$$\dot{z} = (\mu+i\omega_0)z + (3d/2)|z|^2z + (27d^2/8i\omega_0)|z|^4z + \eta^{1/2}G(z,z^*)\, f(t) \ , \tag{VI.42}$$

y su compleja conjugada. $G(z,z^*)$ se determina siguiendo las tecnicas de Formas Normales. Para el caso de ruido aditivo, expresando $d(t) = 1/2\ \eta^{1/2}f(t)\,(\varkappa_1+\varkappa_2)$ en la base $(\varkappa_1,\varkappa_2)$ es inmediato que $G(z,z^*) = 1/2$. Para el caso Multiplicativo Lineal

$m(t)u = 1/2\ \eta^{1/2} f(t)\ (z+z^*)\ (\varkappa_1+\varkappa_2)$ al orden cero en μ en la misma base, es inmediato que $\Theta(z,z^*) = 1/2\ (z+z^*)$.

VI.4. RESONANCIAS EN UN OSCILADOR AUTOEXITADO:

Daremos aqui una descripción del fenómeno de aparición de las resonancias o nuevas contribuciones espectrales en un oscilador autoexitado cuyo regimén de funcionamiento sea el de ciclo límite en la vecindad del punto de bifurcación ω=0. No solo es de interés conocer las nuevas contribuciones o resonancias de origen determinista sino las que introduce el ruido estocástico. Se considera aqui el caso de un Oscilador Autoexitado que contiene no linealidades en términos cúbicos solamente, para caracterizar el fenómeno que nos ocupa.

Realizando el cambio no lineal de variables $z = \rho_0 \exp\{u+i\theta\}$, con $\rho_0^2 = 2\mu/3|d| = \varepsilon\omega/3|d|$, la Ec.(VI.42) se vuelve en las variables (u,θ):

$$\dot{\theta} = \omega_0 - (3\mu^2/2\omega_0)\ e^{4u} + \sigma^{1/2} g_1(u,\theta)\ f(t)$$

(VI.43)

$$\dot{u} = \mu(1-e^{2u}) + \sigma^{1/2} g_2(u,\theta)\ f(t)$$

Para ruido aditivo: $g_1(u,\theta) = -e^{-u}\mathrm{sen}\theta$, $g_2(u,\theta) = e^{-u}\cos\theta$, $\sigma^{1/2} = \eta^{1/2}/2\rho_0$; y para multiplicativo: $g_1(u,\theta) = -\mathrm{sen}2\theta$, $g_2(u,\theta) = 1+\cos2\theta$, $\sigma^{1/2} = \eta^{1/2}/2$.

VI.4.A. Ruido blanco:

La FNEOA dada por Ecs. (VI.42) y (VI.43) esta interpretada en el sentido usual del cálculo o de Stratonovich. A efectos de los los cálculos en Integral Funcional es de interés dar la misma en el sentido de Ito. Se introducen de esta forma términos de arrastre espureo.

De la Forma Normal Estocástica de un Oscilador Autoexitado (FNEOA), interpretada en el sentido de Ito, desarrollada alrrededor de u=0, reteniendo terminos lineales de arraste espureo e independientes en la matriz de difusión, se obtiene la EDE:

$$\dot{\varphi} = - (6\mu^2/\omega_o)\ u + \sigma/2\ h_1(\varphi+\tilde{\Omega}t) + \sigma^{1/2} g_1(\varphi+\tilde{\Omega}t)\, f(t) \quad ,$$

$$\dot{u} = -2\mu\ u + \sigma/2\ h_2(\varphi+\tilde{\Omega}t) + \sigma^{1/2} g_2(\varphi+\tilde{\Omega}t)\, f(t) \quad , \qquad \text{(VI.44)}$$

siendo $\varphi = \theta+\tilde{\Omega}t$, $\tilde{\Omega} = \Omega -(3\mu^2/2\omega_o)$. Los términos de arrastre espureo para ruido aditivo son: $h_1(\psi) = \mathrm{sen}2\psi$ y $h_2(\psi) = -\cos 2\psi$, u para multiplicativo son: $h_1(\psi) = \mathrm{sen}4\psi$ y $h_2(\psi) = -\cos 4\psi$. Para ambos casos los términos de difusión son: $g_1(\psi) = -\mathrm{sen}\psi$ y $g_2(\psi) = \cos\psi$. El término de arrastre $-(6\mu^2/\omega_o)u$ puede ser despreciados por ser de orden 2 en μ, a los efectos del analisis que sigue. En la vecindad del punto de bifurcación podemos considerar a la frecuencia dada por Ω, ya que las correcciones son despreciables.

Para el caso de ruido aditivo la ecuación que se obtiene ha sido estudiada en la Sec.III.5. Nos limitaremos aquí a aplicar los resultados alcanzados para el caso c=0 en Ec.(VI.8). Solo contribuciones espectrales de frecuencia Ω y 3Ω se obtienen hasta el orden 3 en el parámetro de expansión perturbativo σ/Ω.

Para la función de autocorrelación de (x) las contribucion de frecuencia Ω mas significativa, es decir al orden 0 en el Coeficiente de Expansión Perturbativo (CEP) σ/Ω y orden 1 en el parámetro μ/Ω que denotamos por [0,1], esta dada por

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle_{\Omega}^{[0,1]} = 2\ \omega_o^2\ Re\ \langle z(\tau)\ z^*(0)\rangle_o \tag{VI.45}$$

$$= 2\omega_o^2\rho_o^2\ \cos\Omega\tau\ \exp\{-\sigma/4[\ |T| - (1/4\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))]\}.$$

La contribución espectral de frecuencia 3Ω a orden cero en teoría perturbativa, es decir al orden 0 en el CEP y orden 3 en el parámetro μ/Ω, es

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle_{3\Omega}^{[0,3]} = (d/8)^2\ Re\ \langle z(\tau)\ z^*(0)\rangle_o \tag{VI.46}$$

$$=(d/8)^2\rho_o^3\ \cos3\Omega\tau\ \ \exp\{-9\sigma/4[\ |T| - (1/4\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))]\}\ .$$

La razón entre las densidades espectrales obtenidas a partir de las Ecs.(VI.46) y (VI.45) evaluadas en 3Ω nos da información sobre la región del espacio de parametros donde la resonancia se presenta en forma mas intensa. En la región de parámetros $\mu>\sigma$

$$\mathcal{D}_{3\Omega}(\frac{\mu}{\Omega},\frac{\sigma}{\Omega}) = \frac{\mathcal{S}^{[0,3]}_{3\Omega}(3\Omega)}{\mathcal{S}^{[0,1]}_{3\Omega}(3\Omega)} \tag{VI.47}$$

$$\approx \frac{2}{81}(\frac{\mu}{\omega_c})^2 \ [\ (\frac{\sigma}{\Omega})^{-2} + \vartheta(1) \ ]$$

Vemos que la contribución espectral de frecuencia 3Ω es significativa para pequeños valores del CEP y que se vuelve poco importante en la vecindad del punto de bifurcación del sistema si fijamos la intensidad del ruido, pero se satisface que $\mathcal{D}_{3\Omega} > 2\%$. Las Fig.(II.1.a-b) muestran el comportamiento para distintos valores de los parámetros adimensionales σ/Ω y μ/Ω.

En teoría perturbativa queda determinada la otra contribución espectral de frecuencia 3Ω a la función de autocorrelación de $\langle x\rangle$, que viene al orden 2 en el CEP y orden 1 en el parámetro μ/Ω. De la Ec.(III.66) se tiene que

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle^{[2,1]}_{3\Omega} = 2\ \omega_o^2\ Re\ \langle z^3(\tau)\ z^{3*}(0)\rangle_{z,3\Omega}$$

$$= (\omega_o^2/32)\rho_o\ (\frac{\sigma}{\Omega})^2\ \exp\{-9\sigma/4[\ |T|-(1/4\mu)(1+\exp(-2\mu|T|))]\} \tag{VI.48}$$

$$\times\ Re\ \{\ e^{i3\Omega T}\ [\ A(\frac{\mu}{\Omega})\ \exp(-2\mu|T|) + B(\frac{\mu}{\Omega})\ ]\ \}$$

donde $A(\mu/\Omega)$ y $B(\mu/\Omega)$ estan dados por las Ecs.(III.65.a-b). La razón de densidades espectrales entre está distribución y la dominante de frecuencia Ω, evaluadas en 3Ω, es

$$\mathscr{E}_{3\Omega}(\frac{\mu}{\Omega},\frac{\sigma}{\Omega}) = \frac{\mathscr{S}^{[2,1]}_{3\Omega}(3\Omega)}{\mathscr{S}^{[0,1]}_{3\Omega}(3\Omega)} \qquad \text{(VI.49)}$$

$$\approx \frac{1}{9}\, Re\ B(\mu/\Omega) + \mathcal{O}(\sigma/\Omega)$$

Las Figs.(II.2.a-b) muestran $\mathscr{E}_{3\Omega}$, para $\mu>\sigma$, es solo función del parámetro μ/Ω. Las contribuciones estocásticas son de poca intensidad frente a las de origén determinista y son negativas, ya que $-0.5 < \mathscr{E}_{3\Omega} < 0$. Luego el ruido tiende a disminuir los efectos de origén determinista, e inclusive desparece toda contribución de frecuencia 3Ω en alguna región del espacio de parámetros. Observemos que para $\mu/\Omega \to 0$ toda contribución de origen determinista o estocástico se anula.

Sin embargo, en la región de parámetros donde las contribuciones resonantes deterministas son importantes las contribuciones espectrales estocásticas son despreciables y no juegan ningún rol frente a aquellas.

Otra cantidad de interés, que describe estos efectos, es $\mathscr{E}_{3\Omega} = \mathscr{D}_{3\Omega}/\mathscr{E}_{3\Omega}$. Su comportamiento, en función de los parámetros μ/Ω y σ/Ω, se da en las Figs.(II.3.a-b). Es negativa y muestra que en la mayoria de los casos son de origén determinista. Las Figs.(II.4.a-b) nos muestran que $\mathscr{G}_{3\Omega} = \mathscr{D}_{3\Omega} + \mathscr{E}_{3\Omega}$, es decir la contribución neta en 2Ω es poco significativa cuando es negativa e importante cuando es positiva en la región donde se da la resonancia determinista.

Luego, para un oscilador autoexitado con ruido blanco las únicas contribuciones resonantes son las de origen determinista, el ruido solo introduce correcciones poco significativas desde el punto de vista del fenómeno que se investiga.

VI.4.B. Ruido Coloreado:

A partir de la FNEOA (VI.43) y con la finalidad de evaluar las contribuciones espectrales consideremos que es posible despreciar las fluctuaciones transversales al ciclo límite, es decir alrrededor de u=0. El cambio no lineal de variables se reduce a $z(t)=\sqrt{\mu}\ \exp[i(\varphi(t)+\tilde{\Omega}t)]$. En el caso que el ruido de color sea aditivo la dinámica queda descripta por

$$\dot{\varphi} = \sigma^{1/2} g_1(\varphi+\tilde{\Omega}t)\ f(t) \quad , \qquad \text{(VI.50)}$$

con $g_1(\psi)=-\mathrm{sen}\psi$, $\sigma^{1/2}=\eta^{1/2}/2\rho_0$.

La función de autocorrelación del proceso (x) al orden 0en el CEP (σ/γ) será

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle_{\tilde{\Omega}}^{[0]} = 2\ \omega_0^2\ \mathrm{Re}\langle z(\tau)\ z^*(0)\rangle_{1,\tilde{\Omega}} =$$

$$= 2\ \omega_0^2\ \mu\ \cos\tilde{\Omega}\tau\ \exp(-\alpha\sigma/2\ [\,|\tau|-(1/\gamma)(1-e^{-\gamma|\tau|})])$$

$$\text{(VI.51)}$$

La contribución espectral estocástica principal de frecuencia $2\tilde{\Omega}$ viene dada en la función de correlación al orden 1 en el CEP por

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle^{[1]}_{2\tilde{\Omega}} = 2\ \omega_o^2\ \mathrm{Re}\langle z(\tau)\ z^*(0)\rangle_{1,2\tilde{\Omega}} =$$

$$= 2\ \omega_o^2\ \mu\ (\sigma/8\gamma)\ \exp(-(2\alpha\sigma+\gamma)|\tau|+(\sigma\alpha/2\gamma)(1-e^{-\gamma|\tau|}))$$

$$\times\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}\ \{\ [(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1]\ \cos 2\tilde{\Omega}\tau\ -\ (2\tilde{\Omega}/\gamma)\ \mathrm{sen} 2\tilde{\Omega}\tau\ \}$$

(VI.52)

El parámetro α, que fue dejado libre en la teoría, se fija por la relación $\alpha = 1/2\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-1}$ para asegurar la convergencia de la serie perturbativa.

Para $\sigma/\gamma \ll 1$, la Ec.(VI.52) es simplemente

$$\langle x(\tau)\ x(0)\rangle^{[1]}_{2\tilde{\Omega}} = \omega_o^2\ \mu\ (\sigma/4\gamma)\ \exp[-\gamma|\tau|]$$

$$\times\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}\ \{\ [(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1]\ \cos 2\tilde{\Omega}\tau\ -\ (2\tilde{\Omega}/\gamma)\ \mathrm{sen} 2\tilde{\Omega}\tau\ \}$$

(VI.53)

La contribución al espectro de frecuencia $\tilde{\Omega}$, que se deriva de Ec.(VI.51) a través de las relaciones dadas en el Apéndice C del Cap.V, muestra que el comportamiento asintótico del espectro es $\mathcal{S}(k) \propto k^{-4}$ mientras que la contribución a la frecuencia $2\tilde{\Omega}$, evaluada a partir de Ec.(VI.52) con las relaciones del Apendice B del Cap.V, es $\mathcal{S}(k) \propto k^{-2}$. Luego, es posible comparar la contribución de la cola de la contribución de frecuencia $\tilde{\Omega}$ con la resonancia en $2\tilde{\Omega}$.

La densidad de potencia espectral o espectro para la contribución resonante en $2\tilde{\Omega}$, en la aproximación $\sigma/\gamma \ll 1$, es

$$\mathcal{S}_{2\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega}) = 1/2\ \omega_o(\sigma/\gamma)\ (\mu/\gamma)\ [(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1]\ [1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}$$

(VI.54)

Se concluye que es una contribución positiva para $\tilde{\Omega}/\gamma > 1$, es decir cuando el tiempo de correlación del ruido es mayor que el período de oscilación de ciclo límite. Si es igual la contribución es nula y si es menor la contribución es poco significativa. Las simulaciones numéricas como se verá corroboran estos resultados.

La contribución espectral principal de frecuencia $\tilde{\Omega}$, evaluada en $2\tilde{\Omega}$, para $\tilde{\Omega}/\gamma > 1$ es

$$\mathcal{D}_{\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega}) = 1/2\ \omega_o(\sigma/\gamma)\ (\mu/\gamma)\ (\tilde{\Omega}/\gamma)^{-2}[1+(\tilde{\Omega}/\gamma)^2]^{-2}$$

(VI.55)

La intensidad relativa de la contribución resonante con respecto a la cola de la contribución de frecuencia dominante es

$$\frac{\mathcal{S}_{-2\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega})}{\mathcal{D}_{\tilde{\Omega}}(2\tilde{\Omega})} = (\tilde{\Omega}/\gamma)^{-2}[(\tilde{\Omega}/\gamma)^2-1] \quad . \qquad \text{(VI.56)}$$

Esto indica que, si el tiempo de correlación del ruido es mucho mayor que el período de oscilación de ciclo límite se tiene una contribución al espectro significativa. Es por esto que nos referimos a este fenómeno como de resonancia estocástica. Estos resultados están cualitativamente de acuerdo con las experiencias numéricas.

En las Figs.(III-X) se muestran algunos resultados de las experiencias numéricas. Se dan los gráficos del espectro de las funciones de correlación (z,z^*) en función de la frecuencia para una bifurcación de Hopf en presencia de ruido blanco y coloreado. También se muestran los graficos para las funciones de correlación de los modelos considerados en este trabajo que tienen la finalidad de ilustrar el fenómeno estudiado. Se hallan comentados en el pie de página de cada una de ellos.