Capítulo V

Estructura de los términos de la Expansión Perturbativa. Determinación de los Parámetros de Expansión

C A P I T U L O V:

V.1. INTRODUCCION:

En este Capítulo se presenta el formalismo general para la determinación de la estructura de los términos de la serie perturbativa a que da lugar el formalismo de integral funcional en el cálculo de funciones de correlación estacionarias. Se analizara el caso general de ruido blanco, y se extiende para un caso de ruido coloreado que satisface un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Para determinar los posibles parámetros de expansión perturbativa se analizan los posibles escaleados que pueden llevarse a cabo en la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) y los criterios de elección de ellos. Los parámetros de expansión deben ser adimensionales y un simple análisis dimensional muestra, en cada uno de los casos, las posibles elecciones.

Se analiza la convergencia de los términos de la serie perturbativa, asi como la estructura general de ellos y se da la forma general de la serie.

Finalmente se muestra que el espectro o potencia espectral es tambien un desarrollo perturbativo en los parámetros de expansión elegidos.

V.2. RUIDO BLANCO:

V.2.A. Escaleado de la Ecuación Diferencial Estocástica:

Consideremos la Ecuación Diferencial Estocastica (EDE):

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon^{1/2}\, g(\theta)\, f(t) \quad , \tag{V.1}$$

donde f(t) es ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y función de autocorrelación

$$\langle f(t)\, f(t') \rangle = \delta(t-t') \quad , \tag{V.2}$$

donde ω es la frecuencia característica del sistema, ε es la intensidad de ruido.

Un análisis dimensional muestra que si $[t] = T$ (dimensión del tiempo t es T), $g(\theta)$ es adimensional y $[f(t)] = T^{-1/2}$; se tiene que los parámetros físicos son

$$[\varepsilon] = [\omega] = T^{-1} \; . \tag{V.3}$$

De aqui se tiene que ε/ω y ω/ε son las dos posibles elecciones de parámetros adimensionales para realizar una expansión perturbativa.

Para obtener la EDE que se obtiene luego de un escaleado, hacemos la sustitución $\theta = \varphi + \omega\, t$, llamando $t = \lambda\, \underline{t}$, $\varphi(t) = \underline{\varphi}(\underline{t})$, $f(t) = \lambda^{-1/2}\, \underline{f}(\underline{t})$, la EDE y la función de correlación del ruido escaleada son:

$$d\varphi/d\underline{t} = (\lambda\varepsilon)^{1/2}\ g(\lambda\omega\underline{t}+\varphi(\underline{t}))\ \underline{f}(\underline{t}) \quad , \tag{V.4}$$

$$\langle\ \underline{f}(\underline{t})\ \underline{f}(\underline{t}')\ \rangle = \delta(\ \underline{t}-\underline{t}') \quad , \tag{V.5}$$

respectivamente. Podemos fijar el escaleado con la elección:

$$\lambda\varepsilon = 1 \quad , \quad \Omega = \omega/\varepsilon \quad , \quad \underline{t} = \varepsilon t \quad , \tag{V.6}$$

o con la alternativa

$$\lambda\omega = 1 \quad , \quad E = \varepsilon/\omega \quad , \quad \underline{t} = \omega t \quad . \tag{V.7}$$

Las funciones de correlación de funciones 2π-periodicas pueden ser calculadas en las nuevas variables escaleadas, es decir para un proceso $h(\underline{\theta}(\underline{t}))$, con $\underline{\theta}(\underline{t}) = \lambda\omega\underline{t}+\underline{\varphi}(\underline{t})$, se tiene:

$$\underline{C}(\ \underline{t},\underline{t}') = \langle\ h(\underline{\theta}(\underline{t}))\ h(\underline{\theta}(\underline{t}'))\ \rangle \quad , \tag{V.8}$$

que esta relacionada con las variables originales como

$$\underline{C}(\ \underline{t},\underline{t}') = C(\ t,t') \quad , \tag{V.9}$$

a traves del reemplazo $\underline{t} = \lambda^{-1}t$.

La elección del escaleado (V.6) es la que se adopta aqui por razones que se justifican en la Sección siguiente, resultando la EDE escaleada:

$$d\varphi/d\underline{t} = g(\Omega\underline{t}+\varphi(\underline{t}))\ \underline{f}(\underline{t}) \quad , \tag{V.10}$$

siendo una ecuación a un parámetro Ω, con intensidad de ruido 1 y $\underline{f}(\underline{t})$ ruido blanco Gaussiano.

V.2.B. Serie perturbativa:

Interpretando la EDE escaleada (V.10) en el sentido de Ito, es decir todas las funciones del tiempo son evaluadas en el pre-punto, la funcional generatriz de momentos y funciones de correlación sera:

$$\mathcal{Z}[j,j^*] = \int_{\gamma(0)} \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q \quad \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau\ [\ j\ q + j^* p\ ] \right\}$$

$$\times \ \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau\ [\ p\ \dot{q} - \mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q,\tau)] \right\} \ \delta(q(\underline{t}_o)-\varphi_o) \qquad , \tag{V.11}$$

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q,\tau) = -\ i/2\ A_o p^2 + \sum_{Z_o} (-i/2\ A_k p^2)\ \exp\{ik(q+\Omega\tau)\} \quad , \tag{V.12}$$

donde $A_k = \sum_n a_n\ a_{j-n}$ es el coeficiente de Fourier de $g^2(\theta)$ y $g(\theta) = \sum_n a_n\ e^{in\theta}$. Separando una parte "libre" o no oscilatoria en el Hamiltoniano (V.12):

$$\mathcal{H}^{\gamma(0)}(p,q,\tau) = \mathcal{H}_o(p) + \mathcal{K}^{\gamma(0)}(p,q,\tau) \quad , \tag{V.13.a}$$

$$\mathcal{H}_o(p) = - i/2\ A_o\ p^2 \quad , \tag{V.13.b}$$

es posible dar la funcional generatriz como una serie formal:

$$\mathcal{Z}[j,j^*] = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{\gamma(o)} \mathcal{D}p\ \mathcal{D}q \left[-i \int_{t_o}^{T} d\tau\ \mathcal{K}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) \right]^n$$

$$\times\ \exp\left\{ i \int_{t_o}^{T} d\tau\ [\ p\ \dot{q} - \mathcal{H}_o(p) + j\ q + j^* p\ ] \right\} \delta(q(\underline{t}_c)-\varphi_o) \ , \tag{V.14}$$

y definir una funcional generatriz "libre" o no oscilatoria estacionaria, integrando (V.14), inponiendo la condición de regimén estacionario

$$\int_{t_o}^{T} d\tau\ \ j(\tau) = 0 \quad , \tag{V.15}$$

y tomando el limite de $t_o \to -\infty$ se tiene

$$\mathcal{Z}_o^{es}[j,j^*] = \exp\left\{ -1/2 \int_{-\infty}^{T} d\tau\ d\tau'[\ \ 2\ i\ j(\tau)\ S(\tau,\tau')\ j^*(\tau') + \right.$$

$$\left. +\ j(\tau)\ R(\tau,\tau')\ j(\tau')\ ] \right\} \ , \tag{V.16}$$

donde las funciones de Green son

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad . \tag{V.17.a}$$

$$R(\tau,\tau') = A_o \min(\tau,\tau') \quad . \tag{V.17.b}$$

La contribución n-sima a la suma en (V.14) en el regimén estacionario es

$$\mathcal{Z}_n^{es}[j,j^*] = \frac{1}{n!}\left[1/2 \int_{-\infty}^{T} d\tau \sum_{\mathbb{Z}_o} A_k \exp\{ik(q+\Omega\tau)\} \left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(\tau)^2}\right)\right]^n$$
$$\times\ \mathcal{Z}_o^{es}[\ j,j^*] \quad .$$

(V.18)

Los momentos y funciones de correlación de funciones 2π-periodicas son determinados a través de

$$\langle \exp\{i[\mu_{n+1}\ \varphi(T) + \mu_o\ \varphi(0)]\}\rangle^{st} = \mathcal{Z}_o^{es}[\ \mu_{n+1}\delta(\circ-T) + \mu_o\delta(\circ)\ ;\ 0\ ]\ ,$$

(V.19)

siendo μ_{n+1} y $\mu_o \in \mathbb{Z}$.

La contribución a (V.19) del n-simo término de la serie

$$\langle \exp\{i[\mu_{n+1}\ \underline{\theta}(\underline{T}) + \mu_c\ \underline{\theta}(0)]\}\rangle_n^{est} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_i\ (i=1,\dots,n)\\ \sum_{i=0}^{n+1}\mu_i=0}} A_{\mu_1\dots\mu_n} \int_{-\infty}^{T} dt_n \ \dots \int_{-\infty}^{T} dt_1 \ \exp\{\ i\Omega\sum_{k=0}^{n+1}\mu_k t_k\ \}$$
$$\times \prod_{j=1}^{n}\left(-\frac{\delta^2}{\delta j^*(t_j)^2}\right) \mathcal{Z}_o^{est}[\ j,j^*]\Big|_{j(\circ)=\sum_{i=0}^{n+1}\mu_i\delta(\circ-t_i);\,j^*(\circ)=0}$$

(V.20)

donde $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \ldots > t_1$, $t_o = 0$, $\underline{\theta}(\underline{T}) = \underline{\varphi}(\underline{T}) + \Omega\, \underline{T}$. La restricción $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 0$ sobre los términos de la suma equivale a la condición (V.15) y $A_{\mu_1 \ldots \mu_n} = (-1/2)^n \prod_{i=1}^{n} A_{\mu_i}$.

Introduciendo la identidad

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \Theta(t_i - t_j) = 1 \quad , \qquad \text{(V.21)}$$

es posible llevar la región de integración de $\mathbb{R}^n$ a la definida por $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \ldots > t_1$ y cancelar el factor $1/n!$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}_o^{est}}{\delta j^*(t)} = - \int_{-\infty}^{\underline{T}} d\tau \; \Theta(\tau - t) \; \mathcal{Z}_o^{est}[\, j, j^*] \quad , \qquad \text{(V.22)}$$

luego de evaluar en las fuentes, y sobreentendiendo de aqui en más la suma y el coeficiente, la Ec.(V.20) es

$$\int_{-\infty}^{\underline{T}} dt_n \; \ldots \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \quad \exp\{\, i\Omega \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k t_k \,\} \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{n+1} \Theta(t_i - t_j) \Big)^2$$

$$\times \; \exp\{\, -A_o/2 \sum_{j,k=0}^{n+1} \mu_j \mu_k \min(t_j, t_k) \,\} \quad .$$

(V.23)

La suma contenida en la productoria puede ser escrita

$$\sum_{j=0}^{n+1} \Theta(t_j - t_i) = - \mu_o \; \Theta(t_i) - s_i \quad , \qquad \text{(V.24.a)}$$

$$s_i = \sum_{k=0}^{i} \mu_k \quad , \tag{V.24.b}$$

y la suma del exponencial

$$\sum_{j,k=0}^{n+1} \mu_j \, \mu_k \, \min(t_j, t_k) = \underline{T} + \sum_{k=0}^{n} \phi_k \, t_k \quad , \tag{V.25.a}$$

$$\phi_k = s_{k-1}^2 - s_k^2 + 2 \, \mu_o \, \mu_k \, (\min(0, t_k)/t_k - 1) \; , \tag{V.25.b}$$

con $s_o = 0$. La integral (V.20) luego del cálculo indicado es

$$\langle \exp\{ i [\mu_{n+1} \, \underline{\theta}(\underline{T}) + \mu_o \, \underline{\theta}(0)] \} \rangle_n^{est} = \exp\{ -A_o \underline{T} / 2 + i \, \Omega \, \mu_{n+1} \, \underline{T} \}$$

$$\times \sum_{\substack{\mu_i \, (i=1,\ldots,n) \\ \sum_{i=0}^{n+1} \mu_i = 0}} A_{\mu_1 \ldots \mu_n} \int_{-\infty}^{\underline{T}} dt_n \; \ldots \; \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{n} (\mu_o \, \Theta(t_i) + s_i)^2$$

$$\times \exp\{ \sum_{k=1}^{n} (i \, \Omega \, \mu_k - A_o \phi_k / 2) \, t_k \} \quad . \tag{V.26}$$

V.2.C. Convergencia de la serie perturbativa:

Se prueba en esta Sección que una integral múltiple del tipo (V.26) no contiene divergencias. Para esto es suficiente estudiar

$$\int_{-\infty}^{0} dt_k \; \ldots \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{k} (\mu_o \Theta(t_i) + s_i)^2 \quad \exp\{ \sum_{j=1}^{k} (i \Omega \mu_j - A_o \phi_j / 2) t_j \}, \tag{V.27}$$

donde $1 \leq k \leq n$ y $s_i \neq 0$ $\forall$ $i \neq k$. Obviamente la convergencia la da el coeficiente que acompaña a t_k. Notemos que $0 > t_k > \ldots > t_1 > -\infty$. Para $t_j \in \mathbb{R}^-$, denotamos a ϕ_j

$$\phi_j^- = s_{j-1}^2 - s_j^2 \quad , \quad s_0 = 0 \quad . \tag{V.28}$$

Ademas $\Theta(t_i) = 0$ en la región de integración. Luego de integrar en $t_1, \ldots, t_{k-1}$ se tiene

$$\prod_{i=1}^{k} s_i^2 \; (i\Omega\mu_i - A_0\phi_i^-/2)^{-1} \int_{-\infty}^{0} dt_k \; \exp\{(i\Omega s_k - A_0 s_k^2/2)t_k\} \; . \tag{V.29}$$

Notemos que si $s_k \neq 0$ la expresión (V.29) tiende a cero cuando $t_k \to -\infty$ ya que $A_0 > 0$, en cambio si $s_k = 0$ se tiene que es identicamente nula. De esta forma queda probado que si $s_i = 0$ con $1 \leq i \leq k \leq n$ la integral (V.27) es cero.

V.2.D. Forma funcional de la serie perturbativa:

Para la región de integración $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \ldots > t_1$ es sencillo mostrar que

$$\int_{-\infty}^{T} dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \; . \; . \; . \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n, \ldots, t_1) =$$

$$= \int_0^{T} dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \; . \; . \; . \int_0^{t_3} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n, \ldots, t_1) +$$

$$+ \int_0^{T} dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \; . \; . \; . \int_0^{t_4} dt_3 \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n, \ldots, t_1) +$$

$$+ \; . \; . \; . \; +$$

$$\int_0^{T} dt_n \int_{-\infty}^{0} dt_{n-1} \int_{-\infty}^{0} dt_{n-2} \; . \; . \; . \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \; F(t_n, \ldots, t_1)$$

(V.30)

introduciendo la identidad

$$1 = \prod_{i=2}^{n} \left(\Theta(t_i) + \Theta(-t_i) \right) \quad , \qquad \text{(V.31)}$$

en el lado derecho de (V.30) y teniendo en cuenta que existen (n-1) contribuciones no nulas dadas por

$$\Theta(t_n)\,\Theta(t_{n-1}) \ldots \Theta(t_2) \; ,$$
$$\Theta(t_n)\,\Theta(t_{n-1}) \ldots \Theta(t_3)\; \Theta(-t_2) \; ,$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\Theta(t_n)\,\Theta(t_{n-1}) \ldots \Theta(t_{k+1})\; \Theta(-t_k)\; \Theta(-t_{k-1}) \; . \; . \; . \; \Theta(-t_2) \; ,$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\Theta(t_n)\,\Theta(-t_{n-1}) \ldots \; \Theta(-t_2) \; .$$

(V.32)

La integral (V.26) definida en la región $\underline{T} = t_{n+1} > t_n > \, . \, . \, . > t_1$

se escribe como suma de (n-1) términos definidos por las subregiones dadas en (V.32). Una integral tipo es:

$$\int_0^T dt_n \cdots \int_0^{t_{k+1}} dt_k \int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \cdots \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (\mu_o \Theta(t_i)+s_i)^2 \quad \exp\{ \sum_{j=1}^{n} (i\Omega\mu_j - A_o\phi_j/2)t_j\} \quad .$$

(V.33)

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \int_{-\infty}^{0} dt_{k-1} \cdots \int_{-\infty}^{0} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \quad \prod_{i=1}^{k-1} (\mu_o \Theta(t_i)+s_i)^2$$

$$\times \quad \exp\{ \sum_{j=1}^{k-1} (i\Omega\mu_j - A_o\phi_j/2)t_j\} = \sum_{j=1}^{k-1} (1-\delta_{s_i,o}) \prod_{i=1}^{k-1} K_i(\Omega) \; ,$$

(V.34)

el cálculo se reduce a

$$\int_0^T dt_n \cdots \int_c^{t_{k+1}} dt_k \quad \prod_{i=k}^{n} (\mu_o \Theta(t_i)+s_i)^2 \quad \exp\{ \sum_{j=k}^{n} (i\Omega\mu_j - A_o\phi_j^{+}/2)t_j\},$$

(V.35)

donde

$$\phi_j^{+} = s_{j-1}^2 - s_j^2 - 2\,\mu_o\,\mu_j \quad . \qquad \text{(V.36)}$$

Si $s_l \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$, cada integral la evaluaremos en t_{l+1} con integrando

$$\exp(i\Omega\psi'_l - A_o\phi'_l/2)t_l \quad , \tag{5.37.a}$$

$$\phi'_l = \phi^+_l + \sum_{j=k}^{l-1} \gamma_j\, \phi^+_j \quad , \tag{5.37.b}$$

$$\psi'_l = \mu_l + \sum_{j=k}^{l-1} \gamma_j\, \mu_j \quad , \tag{5.37.c}$$

donde $\gamma_j = \sigma_{l-1}\sigma_{l-2} \ldots \sigma_{j+1}\sigma_j$ con $\sigma_k = 0\,,\,1$ que indica que cada término integrando es evaluado respectivamente en el extremo inferior o superior de intervalo de integración. Notemos que si $\gamma_\alpha = 0$ ($\forall\ \alpha$: $j < \alpha < k-1$), entonces $\gamma_i = 0$ $\forall\ i < l$, ya que $\gamma_j = \gamma_{j+1}\sigma_j$. Luego:

$$\phi'_l = \phi^{(\alpha)}_l = \sum_{j=\alpha+1\geq 1}^{l} \phi^+_j = (s_\alpha + \mu_o)^2 - (s_l + \mu_o)^2 \ , \tag{V.38.a}$$

$$\psi'_l = \psi^{(\alpha)}_l = \sum_{j=\alpha+1\geq 1}^{l} \mu_j = s_l - s_\alpha \quad , \tag{V.38.b}$$

con $\gamma_\alpha = 0$. El cálculo final muestra que (V.35) para $s_\alpha \neq s_l$ puede escribirse como

$$\sum_{s_\alpha\ (\alpha > k)} A_{s_\alpha}(\Omega) \quad \exp\{(i\Omega\psi^{(\alpha)}_n - A_o\phi^{(\alpha)}_n/2)\underline{T}\ \} \tag{V.39}$$

Notemos que s_α rotula todos los posibles términos consecuencia de todas las contribuciones dadas por evaluar en cada uno de los limites de integración.

Para el caso $g(\underline{\theta}) = \cos\underline{\theta}$, la función de correlación estacionaria del proceso $\cos\underline{\theta}$ es

$$\underline{C}(\underline{T}) = 1/2\; Re\{\, e^{i\Omega\underline{T}}\; [\, \langle e^{i[\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(o)]}\rangle + \langle e^{i[\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(o)]}\rangle \,]\, \} \tag{V.40}$$

luego se tiene que $\mu_{n+1} = 1$, $\mu_o = 1$ y $s_n = -2$ o $\mu_o = -1$ y $s_n = 0$. Para $\mu_{n+1} = \mu_o = 1$, $s_n = -2$ el exponente de (V.39) es $\phi_n^{(\alpha)} + 1 = (s_\alpha + 1)^2 > 0$,y para $\mu_{n+1} = 1$,$\mu_o = -1$ y $s_n = 0$ es $\phi_n^{(\alpha)} + 1 = (s_\alpha - 1)^2 > 0$, con lo cual se muestra que la función decae exponencialmente en este caso.

En el caso $s_\alpha = s_l$ se tiene de la Ec.(V.38) que $\phi_l^{(\alpha)} = \psi_l^{(\alpha)} = 0$ para $k \leq l \leq n$ y en consecuencia se originan términos lineales en t_l, más aun si existe $s_\alpha = s_{l'}$, $\phi_{l'}^{(\alpha)} = \psi_{l'}^{(\alpha)} = 0$ para $k \leq l \leq l' \leq n$ aparecerán términos cuadráticos en $t_{l'}$. De esta forma se originan los términos polinómicos en $\underline{T}$, que acompañan al exponencial o constantes de la expresión general. La máxima potencia que aparece en cada orden puede ser determinada en cada caso particular, aqui lo haremos para el caso $g(\underline{\theta}) = \cos\underline{\theta}$, en términos del parámetro de expansión perturbativo.

V.2.E. Determinación de los parámetros de expansión:

Analizando la integral tipo que aparece en el cálculo perturbativo dada en (V.33), se tiene que para la primera integración ($0 > t_2 > t_1 > -\infty$) se tiene el factor

$$K_1\ (\Omega) = (\ i\Omega\mu_1 - A_o\phi_1^-/2\ )^{-1} \quad , \tag{V.41}$$

y para las (k-2) integraciones intermedias $(0 > t_{k-1} > \dots > t_2 > t_1)$ por cada integración se obtienen los factores

$$K_2\ (\Omega) = (\ i\Omega s_2 - A_o s_2^2/2\ )^{-1}\ (1-\delta_{s_2,o}) \quad ,$$

$$K_3\ (\Omega) = (\ i\Omega\mu_3 - A_o\phi_3^-/2\ )^{-1}\ (1-\delta_{s_3,o}) \quad ,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \tag{V.42}$$

$$K_{k-1}(\Omega) = (\ i\Omega\mu_{k-1} - A_o\phi_{k-1}^-/2\ )^{-1}\ (1-\delta_{s_{k-1},o}) \quad ,$$

y por las (n-k-1) integraciones para $\underline{T} > t_n > \dots > t_k > 0$ se tiene

$$K_l\ (\Omega) = \begin{cases} (\ i\Omega\psi_l^{(\alpha)} -\ A_o\phi_l^{(\alpha)}/2\ )^{-1} & s_l \neq s_\alpha \\ 1 & s_l = s_\alpha \end{cases} \quad , \tag{V.43}$$

con $k \le l \le n$ y $\alpha > k$.

Factorizando Ω^{-1} en todas las funciones de Ω, teniendo en cuenta que $\Omega^{-1} = \varepsilon/\omega$, se tiene que este es un parámetro de expansión perturbativo y junto con las potencias en $\underline{T}$ dan el orden perturbativo. Luego por cada integración exponencial se tiene un factor Ω^{-1} por una función de Ω^{-1}, en caso contrario se agregan constantes de la integración del polinomio en $\underline{T}$.

V.2.F. Estructura general de los términos perturbativos:

El orden del polinomio en $\underline{T}$ a que da lugar cada orden quedara determinado por la expresión

$$\int_0^{\underline{T}} dt_n \int_c^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_3} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{n} (\mu_c \Theta(t_i)+s_i)^2$$

$$\times \exp\{ \sum_{j=1}^{n} (i\Omega\mu_j - A_o \phi_j/2) t_j \} \quad ,$$

(V.44)

contenida en el cálculo de la función de correlación. La primera integración, de un exponencial, introduce un factor Ω^{-1}. Luego el orden del polinomio en $\underline{T}$ es (n-1), es decir, el número de integraciones restantes.

La forma general de los términos de frecuencia $(2p+1)\Omega$ al orden n en la serie perturbativa para el proceso $\cos\theta$ en el caso $g(\theta)=\cos\theta$ es

$$\langle \exp\{i[\, \underline{\theta}(\underline{T}) \pm \underline{\theta}(0)]\} \rangle^{est}_{n,(2p+1)\Omega} = \exp\{ (i(2p+1)\Omega - A_o(2p+1)^2/2)\, \underline{T} \}$$

$$\times \sum_{k=1}^{n>p} \left(\frac{1}{\Omega}\right)^k \underline{T}^{n-k} \; S_{nk}^{(2p+1)}(\Omega^{-1}) \quad ,$$

(V.45)

donde $S_{nk}^{(2p+1)}(\Omega^{-1})$ son constantes o funciones de la forma $(i\, b + a\, \Omega^{-1})^{-1}$ y n es par (impar) tomando el signo + (-) en el exponencial.

V.2.6. El espectro como una serie de potencias en el parámetro perturbativo:

El espectro o potencia espectral es obtenido como la Transformada de Fourier coseno de la función de autocorrelacion [St1][1]:

$$\mathcal{S}(k) = 4 \int_0^{\infty} dT \quad C(T) \quad \cos kT \quad . \qquad (V.46)$$

En las variables escaleadas se tiene que $\underline{T} = \varepsilon T$ y como $C(T) = \underline{C}(\underline{T})$ se tiene:

$$\underline{\mathcal{S}}(\underline{k}) = \varepsilon \, \mathcal{S}(k) \quad , \qquad (V.47)$$

con $\underline{k} = k/\varepsilon$. En la resonancia $k = (2p+1)\omega$ tenemos $\underline{k} = (2p+1)\Omega$ ya que $\Omega = \omega/\varepsilon$. Como puede concluirse de un simple análisis dimensional $[\varepsilon]=T^{-1}$ y $[\mathcal{S}]=T$, luego $\underline{\mathcal{S}}(\underline{k})$ es adimensional.

Las contribuciones de la forma

$$C(T) = 1/2 \; \underline{T}^{k} \exp\{-\alpha\underline{T}\} \; \{A(\Omega) \cos[(2p+1)\Omega\underline{T}] + A(\Omega) \cos[(2p+1)\Omega\underline{T}]\}$$

$$(V.48)$$

en la Ec.(V.45) tiene transformada de Fourier inmediata dada en el

---

[1] Pag.23, Vol.I.

Ap.V.B y se puede concluir luego de un breve cálculo que el parámetro perturvativo, lo es tambien en la potencia espectral. Solo se introducen variantes en los términos polinómicos que dan origen a un α^{-1} por cada orden en $\underline{T}$. Para $(2p+1)\Omega \gg \alpha$, $\forall p$, la densidad de potencia espectral es

$$\underline{\mathcal{S}}((2p+1)\Omega) \approx (k-1)!\ \alpha^{-1}\ A(\Omega) \quad . \tag{V.49}$$

V.3. RUIDO COLOREADO:

V.3.A. Escaleado de la Ecuación Diferencial Estocástica:

Consideremos la EDE dada en (V.1) siendo ω la frecuencia del sistema, ε la intensidad de ruido, $g(\theta)$ una función 2π periodica y $F(t)$ ruido coloreado Gaussiano con valor medio nulo y que satisface el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (O-U)

$$\dot{F} = -\gamma F + c^{1/2}\zeta(t) \quad , \tag{V.50}$$

siendo c la intensidad del ruido blanco Gaussiano $\zeta(t)$ y γ^{-1} es el tiempo de correlación del ruido coloreado. La función de autocorrelación de un proceso $F(t)$ es

$$A(t,t') = (c/2\gamma)\ e^{-\gamma|t-t'|} \quad . \tag{V.51}$$

Un análisis dimensional muestra que $[F] = [\,c/\gamma\,]^{1/2} = [c]^{1/2}T^{1/2}$

$[\gamma] = [\omega] = T^{-1}$ se tiene que $[c][\varepsilon] = T^{-3}$. Algunas de las posibles combinaciones paramétricas adimensionales son

a) $(\varepsilon c)^{1/3}\omega^{-1}$ y $(\varepsilon c)^{1/3}\gamma^{-1}$,

b) ω/γ y $(\varepsilon c)^{1/3}\gamma^{-1}$,

c) γ/ω y $(\varepsilon c)^{1/3}\omega^{-1}$.

Una vez escaleado el sistema de EDE dadas por Ecs. (V.1) y (V.50) se reduce a uno a dos parámetros. Veamos a continuación las ecuaciones escaleadas. Haciendo los reemplazos $t = \lambda \underline{t}$, $\theta(t) = \underline{\theta}(\underline{t})$, $F(t) = \sigma\, \underline{F}(\underline{t})$, $\zeta(t) = |\lambda|^{-1/2}\underline{\zeta}(\underline{t})$ las ecuaciones (V.1) y (V.60) se reducen a

$$d\underline{\theta}(\underline{t})/d\underline{t} = (\lambda\omega) + (\varepsilon^{1/2}\sigma\, \lambda)\, g(\underline{\theta})\, \underline{F}(\underline{t}) \quad , \tag{V.52.a}$$

$$d\underline{F}(\underline{t})/d\underline{t} = -(\lambda\, \gamma)\, \underline{F} + ((|\lambda|c)^{-1/2}/\sigma)\, \zeta(\underline{t}) \quad , \tag{V.52.b}$$

$$\langle\, \underline{\zeta}(\underline{t})\, \underline{\zeta}(\underline{t}')\, \rangle = \delta(\underline{t}-\underline{t}') \quad . \tag{V.52.c}$$

Podemos fijar el escaleado, a traves de λ tomando $(|\lambda|c)^{-1/2} = \sigma$, de tres formas diferentes con $\lambda>0$:

a) $\lambda = \omega^{-1}$, entonces $\varepsilon^{1/2}\sigma\, \lambda = (\varepsilon c\omega^{-3})^{1/2}$,

b) $\lambda = \gamma^{-1}$, entonces $\varepsilon^{1/2}\sigma\, \lambda = (\varepsilon c\gamma^{-3})^{1/2}$,

c) $\lambda = (\varepsilon^{1/2}\sigma)^{-1} = (\varepsilon c)^{-1/3}$.

Consideraremos aqui el caso c) para el cual las ecuaciones (V.52) se vuelven

$$d\underline{\theta}(\underline{t})/d\underline{t} = \Omega + g(\underline{\theta})\ \underline{F}(\underline{t}) \quad , \tag{V.53.a}$$

$$d\underline{F}(\underline{t})/d\underline{t} = -\Gamma\ \underline{F} + \underline{\zeta}(\underline{t}) \quad , \tag{V.53.b}$$

con $\Omega = \omega\ (\varepsilon c)^{-1/3}$ y $\Gamma = \gamma\ (\varepsilon c)^{-1/3}$, siendo la función de autocorrelación del ruido $\underline{F}(\underline{t})$

$$\underline{\Lambda}(\underline{t},\underline{t}') = (1/2\Gamma)\ e^{-\Gamma|\underline{t}-\underline{t}'|} \quad . \tag{V.54}$$

El caso $c = \gamma^2$ se corresponde al límite de ruido blanco cuando $\gamma \to +\infty$. Los parámetros de las Ecs.(V.53) y (V.54) son $\Gamma = \gamma/\varepsilon$ y $\Omega = \omega/\varepsilon$, siendo Ω el parámetro elegido en el caso de ruido blanco. En el presente caso tenemos 2 parámetros y debemos elegir uno de ellos como parámetro perturbativo.

V.3.B. Serie perturbativa:

Haciendo la sustitución $\underline{\theta}(\underline{t}) = \underline{\varphi}(\underline{t}) + \Omega\underline{t}$ la primera de las ecuaciones (V.53) será

$$d\underline{\varphi}(\underline{t})/d\underline{t} = g(\underline{\varphi}+\Omega\underline{t})\ \underline{F}(\underline{t}) \quad . \tag{V.55}$$

Esta ecuación se interpreta en un sentido arbitrario de discretizacion, ya que se trata de un proceso con ruido coloreado [LR82]. Aqui utilizamos por simplicidad en los cálculos la prescripción de discretización del pre-punto. La funcional generatriz de momentos y funciones de correlación esta dada por la expresión (V.11), donde ahora el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) = -i/2\ p(\tau)\ g(q(\tau)+\Omega\tau) \int_{t_o}^{T} d\tau'\ \underline{\Lambda}(\tau,\tau')\ g(q(\tau')+\Omega\tau')\ p(\tau') \tag{V.56}$$

El criterio para separar una parte "libre" o no oscilatoria es el utilizado en el Capitulo IV. Si A_o es el coeficiente de Fourier no oscilatorio de $g^2(\theta)$ y estamos interesados en pequeños apartamientos del caso de ruido blanco tenemos que

$$\mathcal{H}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) = \mathcal{H}_o(p) + \mathcal{K}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) \quad , \tag{V.57.a}$$

$$\mathcal{H}_o(p) = -i/2\ \alpha\ p(\tau) \int_{t_o}^{T} d\tau'\ \underline{\Lambda}(\tau,\tau')\ p(\tau') \quad , \tag{V.57.b}$$

donde $0<\alpha<1$ es una constante a ser determinada que depende de los parámetros del sistema Γ y Ω, que tiende a A_o en el limite de ruido blanco.

Asi es posible escribir la ecuación (V.11) como la serie formal, dada en la expresión (V.14) en la cual

$$\mathcal{K}^{\gamma(o)}(p,q,\tau) = -i/2\ p(\tau) \int_{t_o}^{\underline{T}} d\tau'\ \underline{\Lambda}(\tau,\tau')[\ (q(\tau)+\Omega\tau)\ g(q(\tau')+\Omega\tau')-\alpha]\ p(\tau') \tag{V.58}$$

La funcional generatriz libre estacionaria viene dada por la ecuación (V.15) con funciones de Green

$$S(\tau,\tau') = \Theta(\tau-\tau') \quad , \tag{V.59.a}$$

$$R(\tau,\tau') = \frac{\alpha}{\Gamma^2} \left[\min(\tau,\tau') - \underline{\Lambda}(\tau,\tau') \right] \quad . \tag{V.59.b}$$

Detalles de estos resultados se encuentran en el Ap.IV.A.

En el límite estacionario la funcional generatriz es

$$\mathcal{Z}^{es}[j,j^*] = \sum_n \frac{1}{n!} (-1/2)^n \int_{\gamma(c)} \mathcal{D}p \ \mathcal{D}q \int_{-\infty}^{T} \cdots \int_{-\infty}^{T} \prod_{j=1}^{n} dt_j \ dt'_j$$

$$\times \ p(t_j) \ \underline{\Lambda}(t_j,t'_j) \ p(t'_j) \ [\ (q(t_j)+\Omega t_j) \ g(q(t'_j)+\Omega t'_j) - \alpha]$$

$$\times \ \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{T} d\tau \ [\ p \ \dot{q} - \mathcal{H}_0(p) + j \ q + j^* p \ ] \right\} \ . \tag{V.60}$$

El término n-simo puede ser escrito simbolicamente tomando el desarrollo en serie de Fourier de la función $(q(t_j)+\Omega t_j) \ g(q(t'_j)+\Omega t'_j) - \alpha$

$$\mathcal{Z}_n^{est}[j,j^*] = \frac{1}{n!}\,(-1/2)^n \int_{-\infty}^{T}\cdots\int_{-\infty}^{T} \prod_{j=1}^{n} dt_j\, dt'_j\, \underline{\Lambda}(t_j,t'_j) \sum_{l,l'} A_l\, A_{l'}$$

$$\times \quad \exp\{\, i[\; l\,(q(t_j)+\Omega t_j) \;+ l'(q(t'_j)+\Omega t'_j)\;]\,\}$$

$$\times \quad \left(- \frac{\delta^2}{\delta j^*(t_j)\delta j^*(t'_j)}\right) \mathcal{Z}_o^{est}[\, j,j^*] \quad .$$

(V.61)

Los momentos y funciones de correlación se cálculan a traves de la expresión (V.19), siendo en este caso la contribución del n-simo término de la serie

$$\langle\, \exp\{ i[\, \mu_{2n+1}\; \underline{\theta}(\underline{T}) \;+\; \mu_o\; \underline{\theta}(0)]\,\}\, \rangle_n^{est} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_i\ (i=1,\dots,2n)\\ \Sigma_{i=0}^{2n+1}\mu_i=0}} A_{\mu_1\dots\mu_{2n}} \int_{-\infty}^{T} dt_{2n}\ \dots \int_{-\infty}^{T} dt_1 \quad \exp\{\, i\Omega \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k t_k\,\}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \underline{\Lambda}(t_j,t'_j) \left(- \frac{\delta^2}{\delta j^*(t_j)\delta j^*(t'_j)}\right)$$

$$\times\ \mathcal{Z}_o^{est}[\, j,j^*] \Bigg|_{j(\circ)=\Sigma_{i=0}^{n+1}\mu_i\,\delta(\circ-t_i)\,;\,j^*(\circ)=0}$$

(V.62)

IV.3.C. Determinación de los parámetros de expansión para el caso $g(\theta) = \cos\theta$:

Determinaremos la función de correlación para el proceso $\cos\theta$ en el esquema perturbativo detallado hasta aqui y explicitamente el parámetro de expansión perturbativo.

A orden cero en teoría perturbativa se tiene:

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle_{0}^{est} = e^{i\Omega \underline{T}}\ \mathcal{Z}_{0}^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \quad , \qquad \text{(V.63.a)}$$

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle_{0}^{est} = 0 \quad , \qquad \text{(V.63.b)}$$

$$\mathcal{Z}_{0}^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] = \exp\{-(\alpha/2\Gamma^{2})[\,\underline{T}-(1/\Gamma)(1-e^{-\Gamma \underline{T}})]\} \ . \qquad \text{(V.63.c)}$$

A primer orden y utilizando la metodología de cálculo señalada

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle_1^{est} = e^{i\Omega\underline{T}}\, \mathcal{Z}_1^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] =$$

$$= -1/2\; e^{i\Omega\underline{T}} \int_{-\infty}^{T} dt_1 \int_{-\infty}^{T} dt_2 \left\{ \left[\; 1/4\, \exp(i\Omega(t_1-t_2))\; \underline{\Delta}(t_1,t_2) \right.\right.$$

$$(\Theta(\underline{T}-t_1)-\Theta(-t_1)+\Theta(0)-\Theta(t_2-t_1))\;\; (\Theta(\underline{T}-t_2)-\Theta(-t_2)+\Theta(t_1-t_2)-\Theta(0))$$

$$\left. \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0] \;+\; P[t_1,t_2] \right] -$$

$$- \alpha\; \underline{\Delta}(t_1,t_2)\; (\Theta(\underline{T}-t_1)-\Theta(-t_1))\; (\Theta(\underline{T}-t_2)-\Theta(-t_2))$$

$$\left. \times\;\; \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \right\} ,$$

(V.64)

donde $P[t_1,t_2]$ indica un término en el cual se ha realiza la permutación de las variables de integración en el sumando previo. Tomando $\Theta(0)=0$, es decir la prescripción de discretización del pre-punto, llevando la región de integración a $\underline{T} > t_1 > t_2$ y teniendo en cuenta que en el integrando

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ)+\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0] = \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0]$$

$$\exp\{-(\alpha/2\Gamma^2)[\, 3(t_1-t_2)-2\min(0,t_1)+2\min(0,t_2)]\}$$

$$\exp\{-(\alpha/2\Gamma^2)[\, \underline{\Delta}(t_1,t_1)+\underline{\Delta}(t_2,t_2)-2\underline{\Delta}(t_1,t_2)+2(\underline{\Delta}(\underline{T},t_1)-\underline{\Delta}(\underline{T},t_2)-$$

$$-\underline{\Delta}(0,t_1)+\underline{\Delta}(0,t_2))]\} \quad .$$

(V.65)

Como la integración de este ultimo factor es no trivial y nos interesa el límite $\Gamma \mapsto -\infty$, desarrollamos el mismo v vemos que Γ^{-3} es un buen candidato para parámetro perturbativo. En estas condiciones reteniendo solo el primer término del desarrollo y luego de efectuar la integración (V.64) tenemos las contribuciones de orden 1 en Γ^{-3} que las separamos segun su descomposición espectral.

a) Orden 1, frecuencia 0. La contribución principal a esta frecuencia es

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{1,0} = \Gamma^{-3}\; S^{(0)}_{101}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})\; \exp\{-(\Gamma+(3\alpha/2\Gamma^{2}))\underline{T}\}$$

$$\times\; \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \quad ,$$

(V.66.a)

$$S^{(0)}_{101}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = 1/8\; (i\omega/\gamma+1-\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}(-i\omega/\gamma-1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1} \;. \qquad \text{(V.66.b)}$$

b) Orden 1, frecuencia Ω. La primera corrección al orden cero dada por (5.63) es

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{1,\Omega} =$$

$$= \Gamma^{-3}\, [\, S^{(1)}_{100}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) + \Gamma\underline{T}\; S^{(1)}_{110}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) + e^{-\Gamma\underline{T}}\; S^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})]$$

$$\times\; e^{i\Omega\underline{T}}\;\; \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \quad ,$$

(V.67.a)

$$S^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -\{ \alpha/2 + 1/8 \; (i\omega/\gamma+1-\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}(-i\omega/\gamma-1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1} +$$

$$+ 1/8 \; (i\omega/\gamma-1-3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}[(-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}-2 \; (-i\omega/\gamma+1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}]\}$$

(V.67.b)

$$S^{(1)}_{11\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = 1/4 \; [\; 2\alpha - (-i\omega/\gamma+1+3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}] \quad , \tag{V.67.c}$$

$$S^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = \alpha/2 \; . \tag{V.67.d}$$

c) Orden 1, frecuencia 2Ω. La contribución principal esta dada por

$$\langle \exp[i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{1,2\Omega} = \Gamma^{-3} \; S^{(2)}_{1\alpha 1}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) \; \exp\{(i2\Omega-\Gamma-(3\alpha/2\Gamma^{2}))\underline{T}\}$$

$$\times \; \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})-\delta(\circ);0] \quad ,$$

(V.68.a)

$$S^{(2)}_{1\alpha 1}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -1/8 \; (i\omega/\gamma-1-3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1} \; [(-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}-$$

$$-2(i\omega/\gamma-1-3\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}] \; .$$

(V.68.b)

El otro término que aparece en la función de correlación del proceso $\cos\theta$ al orden 1 es

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle_1^{est} = e^{i\Omega\underline{T}}\ \mathcal{Z}_1^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0] =$$

$$= -1/2\ e^{i\Omega\underline{T}} \int_{-\infty}^{T} dt_1 \int_{-\infty}^{T} dt_2 \Big[\ 1/4\ \exp(-i\Omega(t_1+t_2))\ \underline{\Lambda}(t_1,t_2)$$

$$(\Theta(\underline{T}-t_1)+\Theta(-t_1)-\Theta(0)-\Theta(t_2-t_1))\ (\Theta(\underline{T}-t_2)+\Theta(-t_2)-\Theta(t_1-t_2)-\Theta(0))$$

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ)-\delta(\circ-t_1)-\delta(\circ-t_2);0]\ \Big] .$$

(V.69)

Los cálculos se efectuan de la forma usual y las contribuciones espectrales al orden 1 son

d) Orden 1, frecuencia 0. Se agregan a las ya calculadas en a)

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle_{1,c\Omega}^{est} = \Gamma^{-3}\ R_{1c1}^{(c)}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})\ \exp\{-(\Gamma+(\alpha/2\Gamma^2))\underline{T}\}$$

$$\times\ \mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0]\quad ,$$

(V.70.a)

$$R_{101}^{(0)}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -1/8\ (-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}(-i\omega/\gamma-1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}\ , \qquad \text{(V.70.b)}$$

$$\mathcal{Z}_0^{est}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0] = \exp\{-(\alpha/2\Gamma^2)[\ \underline{T}-(1/\Gamma)(1+e^{-\Gamma\underline{T}})]\ \}\ . \qquad \text{(V.70.c)}$$

e) Orden 1, frecuencia Ω. Se agregan a las ya calculadas en b)

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{1,\Omega} = \Gamma^{-3}\ R^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})\ e^{i\Omega\underline{T}}$$

$$\times\ \mathcal{Z}^{est}_{0}[\delta(\circ-\underline{T})+\delta(\circ);0] \quad , \qquad \text{(V.71.a)}$$

$$R^{(1)}_{1\alpha}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = -1/8\ (-i\omega/\gamma+1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}[\ 2(-i\omega/\gamma+\Gamma^{-3})^{-1}-$$

$$-\ (-i\omega/\gamma-1+\alpha\Gamma^{-3}/2)^{-1}] \quad . \qquad \text{(V.71.b)}$$

De lo que resulta de los cálculos a primer orden, la composición espectral viene en 0, Ω y 2Ω. Una cuestion de interés se plantea al querer recuperar resultados para el caso de ruido blanco. Para ello debemos estudiar la estructura de los coeficientes $S^{(n)}_{ijk}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})$ y $R^{(n)}_{ijk}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})$, $n=0,1,2,...$ .De una breve inspeccción vemos que contienen términos de la forma

$$f(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) = (in\omega/\gamma+a+b\Gamma^{-3})^{-1}(im\omega/\gamma+c+d\Gamma^{-3})^{-1} \quad , \qquad \text{(5.72)}$$

con $n,m \in \mathbb{N}$ y $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Tomando $\Gamma^{-3}= \varepsilon/\gamma$ y $\Omega=\varepsilon/\gamma$, en el limite $\gamma \mapsto +\infty$

$$\Gamma^{-3}f(\omega/\gamma,\Gamma^{-3}) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } a\neq 0 \text{ y } c\neq 0 \\ a\Omega^{-1}(im+d\Omega^{-1}) & \text{si } a\neq 0 \text{ y } c=0 \end{cases} \quad , \qquad \text{(5.73)}$$

entonces la única contribución no nula esta dada por (5.61) en este límite

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})+\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{1,\Omega} = \Omega^{-1}\; R^{(0)}(\Omega^{-1})\; e^{(i\Omega-1/4)\underline{T}} , \qquad (V.74.a)$$

$$R^{(0)}(\Omega^{-1}) = -1/4\; (-i2+\Omega^{-1})^{-1} . \qquad (V.74.b)$$

Esta contribución coincide con la que se obtiene partiendo de la Ec.V.1) interpretada en el sentido de Stratonovich, ya que el límite de una EDE con ruido coloreado que satisface un proceso de Ornstein-Ulhenbeck cuando $\gamma \mapsto +\infty$ es una EDE con ruido blanco con la prescripción de discretización del punto medio.

III.3.D. Estructura general de la serie perturbativa:

Como se ha visto hasta aquí el parámetro de expansión es Γ^{-1}. Para determinar la estructura general de la serie perturbativa se hace necesario ver cuales son los términos polinómicos en $\underline{T}$ que aparecen y cual es el orden de los mismos. Si n es el orden perturvativo apareceran 2n integraciones, n funciones $\underline{\Delta}$ y por cada una de ellas un Γ^{-1}, luego hay un factor comun Γ^{-n} al orden n. Para determinar el orden del polinomio en $\underline{T}$ de $\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})-\underline{\theta}(0))] \rangle^{est}_{n,\Omega}$ consideramos las contribuciones que contienen solo funciones $\underline{\Delta}$ en el integrando de Ec.(V.62) con $\mu_{2n+1}= 1$ y $\mu_0= -1$. Por cada integración se genera un Γ^{-1} y un término lineal por la integración siguiente. Luego se tiene un factor Γ^{-n} y un polinomio cuyo término de mayor orden es $\underline{T}^n$. Asi

$(T/\Gamma^2)^n$ es el factor que aparece en este caso. Para determinar los términos polinómicos que aparecen en las contribuciones de frecuencia $(p+1)\Omega$ al orden n, consideremos que la primera integración en Ec.(V.62) introduce siempre un factor Γ^{-1} y las (2n-1) integraciones siguientes dan el orden del polinomio.

$$\langle \exp[\, i(\underline{\theta}(\underline{T})\pm\underline{\theta}(0))]\,\rangle^{est}_{(p+1)\Omega,\,n} = \exp\{\ [\, i(p+1)\Omega-(b^{(p+1)}/\Gamma^{-2})]\,\underline{T}\ \}$$

$$\times\ \exp\{-(\alpha/4\Gamma^2)[\,\underline{T}-(1/\Gamma)(1-e^{-\Gamma\underline{T}})]\}$$

$$\times \sum_{k=1-\delta_{0p}}^{2n>p} \Gamma^{-(n+k)}\ \underline{T}^{2n-k} \ \sum_j\ S^{(p+1)}_{nkj}(\omega/\gamma,\Gamma^{-3})\ \exp\{-\hat{a}^{(p+1)}_{nkj}\Gamma\underline{T}\}\ , \tag{V.75}$$

donde p=0 solo en el caso de signo - en el exponencial.

V.4. APENDICE A:

Consideremos la función de correlación de un proceso estacionario $\zeta(t)$ dada por

$$\langle\zeta(\tau)\zeta(0)\rangle = r(\tau)\ \cos\omega\tau + s(\tau)\ \mathrm{sen}\,\omega\tau\ , \tag{A.1}$$

para $\tau>0$ y donde $r(\tau)$ es una función par y $s(\tau)$ es impar.

Introduciendo el concepto de densidad de la potencia espectral [St1][1], o simplemente Densidad Espectral (DE), del proceso $\zeta(\tau)$:

$$\mathcal{S}(k) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ e^{ikt} \langle \zeta(\tau)\zeta(0)\rangle \quad , \qquad (A.2)$$

la densidad espectral para (A.1) será

$$\mathcal{S}(k) = \Delta_c(k+\omega) - \Delta_s(k+\omega) + \Delta_c(k-\omega) + \Delta_s(k-\omega) \quad , \qquad (A.3)$$

siendo Δ_c y Δ_s, las Transformadas de Fourier Coseno (TFC) y Seno (TRS) de $r(\tau)$ y $s(\tau)$ respectivamente, definidas por

$$\Delta_c(\Omega) = 2 \int_0^{+\infty} dt\ r(t) \cos\Omega t \quad , \qquad (A.4.a)$$

$$\Delta_s(\Omega) = 2 \int_0^{+\infty} dt\ s(t) \operatorname{sen}\Omega t \quad . \qquad (A.4.b)$$

Es facil concluir que Δ_c es una función par mientras que Δ_s es impar. Si estas funciones son apreciablemente diferentes de cero para $\Omega=0$, mientras son pequeñas para $\Omega=k+\omega$ y frecuencias positivas se tiene que[2]

---

[1] Pag.23, Vol.I.

[2] $\approx$ indica "aproximadamente igual a".

$$\mathcal{F}(k) \approx \Delta_c(k-\omega) + \Delta_s(k-\omega) \quad . \tag{A.5}$$

V.5. Apendice B:

Las funciones de correlación que aparecen en un proceso con ruido blanco son de la forma (A.1) donde $r(\tau)$ y $s(\tau)$ son funciones que se pueden escribir genericamente como

$$1/2 \ \tau^{-n} \ e^{-\alpha\tau} \quad , \tag{B.1}$$

para $\tau>0$. Para n=0 las TFC y TFS definidas en Ecs.(A.4) son

$$\Delta_c^o(\Omega) = \frac{\alpha}{\Omega^2+ \ \alpha^2} \quad , \tag{B.2.a}$$

$$\Delta_s^o(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega^2+ \ \alpha^2} \quad . \tag{B.2.b}$$

Para n>0 podemos determinar las transformadas a partir de las obtenidas para n=0, a partir de las siguientes relaciones

$$\Delta_c^{2n}(\Omega) = (-1)^n \ \frac{d^{2n}}{dk^{2n}} \ \Delta_c^o(\Omega) \quad , \tag{B.3.a}$$

$$\Delta_c^{2n+1}(\Omega) = (-1)^{n+1} \ \frac{d^{2n+1}}{dk^{2n+1}} \ \Delta_s^o(\Omega) \quad , \tag{B.3.b}$$

$$\Delta_s^{2n}(\Omega) = (-1)^n \ \frac{d^{2n}}{dk^{2n}} \ \Delta_s^o(\Omega) \quad , \tag{B.3.c}$$

$$\Delta_s^{2n+1}(\Omega) = (-1)^{n+1} \frac{d^{2n+1}}{dk^{2n+1}} \Delta_c^{0}(\Omega) \quad , \tag{B.3.d}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Explicitamente para $n=1,2$ se tiene que

$$\Delta_c^{1}(\Omega) = \frac{1}{\Omega^2 + \alpha^2} - \frac{2\Omega^2}{(\Omega^2 + \alpha^2)^2} \quad , \tag{B.4.a}$$

$$\Delta_c^{2}(\Omega) = 2\alpha \left(\frac{1}{(\Omega^2 + \alpha^2)^2} + \frac{4\Omega^2}{(\Omega^2 + \alpha^2)^3} \right) \quad , \tag{B.4.b}$$

$$\Delta_s^{1}(\Omega) = \frac{2\alpha\Omega}{\Omega^2 + \alpha^2} \quad , \tag{B.4.c}$$

$$\Delta_s^{2}(\Omega) = \frac{6\Omega}{\Omega^2 + \alpha^2} - \frac{8\Omega^3}{(\Omega^2 + \alpha^2)^3} \quad . \tag{B.4.d}$$

En las resonancias $(\Omega=0)$ las TFC son $\Delta_c^{0}(0)=\alpha^{-1}$, $\Delta_c^{1}(0)=\alpha^{-2}$, $\Delta_c^{2}(0)=2\alpha^{-3}$, etc., mientras que las TFS dan contribución nula.

V.6. APENDICE C:

Aqui se dan las expresiones para las DE que aparecen en un proceso de ruido de color. Se determina el comportamiento asintótico, asi como el valor que toma en las resonancias.

Las funciones de correlación que aparecen en un proceso con ruido coloreado son de la forma (A.1) donde $r(\tau)$ y $s(\tau)$ son funciones que se pueden escribir genericamente como

$$\frac{1}{2}\ \exp\{\ -\nu[\ \tau\ -1\ +\ e^{-\tau}\ ]\ \}\quad , \tag{C.1}$$

para $\tau>0$. Estudiemos las transformadas de Fourier coseno (TFC) y seno (TFS), ya que estas determinan las funciones de correlación. Pueden ser determinadas a partir de

$$\begin{pmatrix}\Delta_c(\Omega)\\ \Delta_s(\Omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} d\tau\ \ \exp\{\ -\nu[\ \tau\ -1\ +\ e^{-\tau}\ ]\ \}\ \exp\{-i\Omega\tau\}\quad . \tag{C.2}$$

Realizando el cambio de variables $z=e^{-\tau}$:

$$\begin{pmatrix}\Delta_c(\Omega)\\ \Delta_s(\Omega)\end{pmatrix} = e^{\nu} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \int_0^1 dz\ e^{-\nu z}\ z^{\nu+i\Omega-1}\quad . \tag{C.3}$$

Esta función puede ser expresada en términos de la función gamma incompleta [Ab1][3]:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t}\ t^{a-1}\ dt\quad , \tag{C.4}$$

luego de hacer la sustitución $\nu z=t$

---

[3] Form.(6.5.1), Pag. 260.

$$\begin{pmatrix} \Delta_c(\Omega) \\ \Delta_s(\Omega) \end{pmatrix} = e^{\nu} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\nu^{-\nu-ik}\ \gamma(\nu+i\Omega,\nu) \right] . \qquad (C.5)$$

Sin embargo esta expresión analítica no es de utilidad a fin de calculos prácticos. Desarrollando el exponencial $\exp\{-\nu\ e^{-\tau}\}$ por su expanción en serie, la Ec.(C.2) es simplemente

$$\begin{pmatrix} \Delta_c(\Omega) \\ \Delta_s(\Omega) \end{pmatrix} = e^{\nu} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left(\frac{1}{n+\nu+i\Omega}\right) , \qquad (C.6)$$

o luego de tomar la parte *Re* se tiene para la TFC:

$$\Delta_c(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{n+\nu}{(n+\nu)^2+\Omega^2}\right] . \qquad (C.7)$$

Mientras que tomando la parte imaginaria, la TFS es

$$\Delta_s(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{\Omega}{(n+\nu)^2+\Omega^2}\right] . \qquad (C.8)$$

Es de interés describir el comportamiento asintótico de ambas transformadas, para $\Omega \gg 1$ es posible desarrollar la serie alternada dada para la TFC de la siguiente forma

$$\Delta_c(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{2\nu(\nu+n+1)}{((n+\nu)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)} \right] =$$

$$= e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{\nu}{((n+\nu)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)} + \right. \qquad (C.9)$$

$$\left. + \frac{8\nu^2(\nu+n+1)}{((n+\nu)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)((n+\nu+1)^2+\Omega^2)} \right]$$

Para $\nu \ll 1$ se tiene que

$$\Delta_c(\Omega) \approx \frac{\nu}{(\Omega^2+\nu^2)(\Omega^2+(\nu+1)^2)} + \vartheta(\nu^2,\Omega^{-4}) \quad . \qquad (C.10)$$

Luego la TFC de (C.1) para $\nu \ll 1$ tiene comportamiento asintótico, para $\Omega \gg 1$, dado por

$$\Delta_c(\Omega) \approx \nu\ \Omega^{-4} + \vartheta(\nu^2,\Omega^{-4}) \quad . \qquad (C.11)$$

En particular la contribución en la resonancia estara dada por

$$\Delta_c(0) \approx \nu^{-1} + \vartheta(1) \quad . \qquad (C.12)$$

La expresión para la TFC es una suma alternada de Lorentzianas que tiene comportamiento asintótico Ω^{-4}, sin embargo la contribución en $\Omega=0$ esta dada por el primer término de la serie. Para la TFS la contribución asintótica dominante es Ω^{-2}, y en la resonancia la contribución es nula.

Es de interés conocer las Transormadas de Fourier de la función de correlación mas general dada por

$$\frac{1}{2}\ \tau^{n}\ \ \exp\{\ -\nu[\ \tau\ -1\ +\ e^{-\tau}]\ \ \}\ \exp\{-\beta\tau\} \quad . \qquad (C.13)$$

La TFC y TFS para n=0 estan dadas por Ecs.(C.7) y (C.8). Las transformadas para n>0 estaran dadas a partir de estas dos, las TFC serán explicitamente para n=1,2 se tiene

$$\Delta_c^{1}(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\nu)^n}{n!} \left[\frac{1}{(n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2} - \frac{2\Omega^2}{((n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2)^2} \right] \qquad (C.14.a)$$

$$\Delta_c^{2}(\Omega) = e^{\nu} \sum_{n=0} \frac{(-\nu)^n}{n!} 2 \left[\frac{1}{((n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2)^2} + \frac{4\Omega^2}{((n+\nu+\beta)^2 + \Omega^2)^3} \right] (\nu+\beta+n)$$

(C.14.b)

En la siguiente tabla se da la contribución resonante de la TFC, para $\nu \ll 1$, $\beta \geq 0$ y n=0,1,2

	$\beta=0$	$\beta>0$
$\Delta^{0}_{c}(0)\approx$	$\nu^{-1}+\vartheta(1)$	$(\nu+\beta)^{-1}+\vartheta(\nu)$
$\Delta^{1}_{c}(0)\approx$	$\nu^{-2}+\vartheta(\nu^{-1})$	$(\nu+\beta)^{-2}+\vartheta(\nu)$
$\Delta^{2}_{c}(0)\approx$	$2\nu^{-3}+\vartheta(\nu^{-2})$	$2(\nu+\beta)^{-3}+\vartheta(\nu)$

(C.15)

Para n=1,2 las TFS estaran dadas por

$$\Delta^{1}_{c}(\Omega) = e^{\nu}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\nu)^{n}}{n!}\,\frac{2\Omega(\nu+\beta+n)}{((n+\nu+\beta)^{2}+\Omega^{2})^{2}}\ , \tag{C.16.a}$$

$$\Delta^{2}_{c}(\Omega) = e^{\nu}\sum_{n=0}\frac{(-\nu)^{n}}{n!}\left[\frac{6\Omega}{((n+\nu+\beta)^{2}+\Omega^{2})^{2}} - \frac{8\Omega^{3}}{((n+\nu+\beta)^{2}+\Omega^{2})^{3}}\right] .$$

(C.16.b)

La contribución de la TFS en la resonancia será nula para todo $n\in\mathbb{N}$.