

Bosonization of Luttinger liquids: spin flipping interactions and spin-orbit coupling

(in spanish)

A thesis submitted to
Universidad Nacional de La Plata
for the
Ph.D. degree in Physics

by
Aníbal Iucci
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

April 2004.

Abstract

In this thesis we present contributions in the field of the applications of quantum field theories techniques to condensed matter models. In chapter 3 we investigate on the non covariant fermionic determinant and its connection to Luttinger liquids. We address the problem of the regularization of the theory. In chapter 4 we treat spin flipping interactions in the non local Thirring model and we obtain an effective bosonic actions that describe separated spin and charge degrees of freedom. In chapter 4 we apply the self consistent harmonic approximation to previously derived bosonic action and we obtain potential depending equations for the spectrum gap. In chapter 5 we include spin-orbit couplings and compute correlations functions. We show that the spin orbit interactions modify the exponents and the phase diagram of the system and makes new susceptibilities diverge for low temperature. Finally in chapter 6 we summarize the main results and the conclusions.

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), de la Fundación Antorchas y del Departamento de Física de la UNLP.

Quiero agradecer muy especialmente a Carlos por haberme guiado aconsejado y enseñado un montón de cosas en estos cuatro años, y haber estado siempre dispuesto a las más variadas discusiones. A los compañeros del Grupo Vicky, Mariano, Marta, Kang, y otros compañeros y amigos del Departamento, Daniel Cabra, Ale, Julián, Gaby, Virginia, Cecilia, Juan.

Por último, nada de todo esto hubiera sido posible sin el afecto y el apoyo de los amigos, Nico, la gente del Coro del Nacio, de mi familia, Carlos, Alicia, Emilia, Matías, Leti y Fede, los Cardoso, los gatos Luisa y Cultrúm, y muy especialmente de vos, Yami.

Índice General

1	Introducción	6
2	Bosonización	11
2.1	Equivalencia entre operadores fermiónicos y bosónicos	11
2.1.1	Campos fermiónicos	11
2.1.2	Campos bosónicos	14
2.1.3	Factores de Klein	17
2.1.4	Identidades de bosonización	18
2.2	Aplicaciones de la bosonización: el modelo g-ology	22
3	El determinante fermiónico no covariante y su relación con los líquidos de Luttinger	29
3.1	Introducción	29
3.2	El modelo y el determinante fermiónico	31
3.3	Enfoque desacoplante de la bosonización	32
3.3.1	Método Point-splitting	34
3.3.2	Método Heat-kernel	36
3.4	El Hamiltoniano bosonizado y las corrientes	37
3.5	Conclusiones	39
4	Interacciones de inversión de spin en el modelo de Thirring no local	41
4.1	Introducción	41
4.2	El modelo y su relación con una descripción no abeliana previa.	42
4.3	La acción bosónica equivalente	44
4.4	Conclusiones	50
5	La aproximación armónica autoconsistente	52
5.1	Introducción	52
5.2	Detalles de la aproximación y el espectro del sector de spin en electrones unidimensionales	54
5.2.1	El modelo seno-Gordon en teoría de campos	56
5.3	Determinación de Ω mediante técnicas de teoría de campos conformes	58
5.3.1	El modelo de Ising en 2D	59
5.4	Conclusiones	63

6	Interacciones spin-órbita	65
6.1	Introducción	65
6.2	Formulación del modelo y formalismo	67
6.2.1	Hamiltoniano fermiónico	67
6.2.2	Bosonización	68
6.3	Funciones de correlación	70
6.3.1	Funciones de correlación a temperatura finita	71
6.3.2	Funciones de correlación instantáneas a temperatura cero	75
6.4	Conclusiones	79
7	Conclusiones	80
A	Propagador bosónico a temperatura finita	82
B	Diagonalización del Hamiltoniano bosónico	85
C	Identidad útil para el cálculo de valores medios bosónicos	89

Capítulo 1

Introducción

La descripción de sistemas de fermiones altamente correlacionados es un problema central de la física de materia condensada. Durante las décadas pasadas, diversos experimentos llevados a cabo en diferentes clases de materiales mostraron que la alta correlación es un ingrediente fundamental a considerar para la comprensión de sus propiedades físicas. Entre otros podemos mencionar sistemas de efecto Hall, superconductores de alta T_c , y diversos metales, superconductores y aisladores orgánicos. Por otro lado, el tratamiento teórico de estos sistemas constituye una tarea formidable. Las ideas básicas acerca del comportamiento de los electrones en materiales son conocidas, al menos intuitivamente, desde hace muchos años. En aparente contradicción con lo expresado más arriba, Sommerfeld [1] mostró que el comportamiento lineal del calor específico de los metales a bajas temperaturas, al igual que el comportamiento asintótico a bajas temperaturas de la resistividad y de la conductividad óptica podían ser entendidos suponiendo que los electrones en el metal se comportaban como un gas de fermiones no interactuantes. Simultáneamente, Pauli [2] calculó la susceptibilidad paramagnética de electrones *libres* y halló que es independiente de la temperatura, en perfecto acuerdo con los experimentos. Al mismo tiempo, a partir de los trabajos de Bloch [3] y Wigner [4], se encontró que las energías de interacción de los electrones en el rango metálico de densidades era comparable a la energía cinética.

La resolución de esta paradoja surgió con los trabajos de Landau [5, 6] donde se introdujeron las ideas fundamentales que dominarían la visión de los sistemas interactuantes en materia condensada hasta nuestros días. Landau postuló que los sistemas en interacción evolucionan a partir de los sistemas libres al conectar la interacción de manera adiabática. Y que los estados de partículas en el sistema no interactuante se corresponden uno a uno con estados de *cuasipartículas* o excitaciones elementales en el sistema en interacción, es decir que poseen los mismos números cuánticos. Existen sin embargo algunas restricciones: la más importante impone que sólo pueden considerarse excitaciones en una escala de energía pequeña comparada con la energía de Fermi. Esta restricción sin embargo nada dice acerca de la intensidad de las interacciones que ocurren entre los electrones; éstas pueden ser arbitrariamente fuertes. De allí que los sistemas fuertemente interactuantes que pueden

tratarse con esta teoría se comportan cualitativamente como sistemas libres, con *parámetros renormalizados por las interacciones*. Sin embargo, las propiedades de baja temperatura de muchos materiales que exhiben este tipo de comportamiento, poseen coeficientes que difieren hasta un factor de 10^3 respecto de los valores para electrones libres. Por otro lado los estados en el sistema libre e interactuante deben tener la misma simetría, y además, al conectar la interacción no deben formarse estados ligados. Estas restricciones impiden atacar con este formalismo problemas tales como el ferromagnetismo o la superconductividad, que se caracterizan justamente por esos efectos.

La teoría microscópica que respaldó esta teoría fenomenológica pronto se desarrolló a partir de un Hamiltoniano fermiónico con interacciones de dos cuerpos [7]. En general los objetos de interés son las funciones de Green $G(\mathbf{k}, \omega)$; si se las conoce para todos los valores de \mathbf{k} y ω , pueden obtenerse en principio todas las propiedades termodinámicas del sistema. Su comportamiento a bajas energías y grandes longitudes de onda está relacionado con el estado fundamental y los estados excitados más bajos, y como el espectro de baja energía está determinado cualitativamente por unos pocos parámetros universales como la dimensión, simetrías y leyes de conservación, el comportamiento infrarojo de las funciones de Green permite efectuar una clasificación de los sistemas de muchos cuerpos en interacción.

En la mayoría de las situaciones de interés es imposible calcular las funciones de Green en forma exacta, de modo que es necesario recurrir a métodos aproximados. El enfoque usual consiste en hacer un desarrollo perturbativo de $G(\mathbf{k}, \omega)$ en potencias de la interacción. En los llamados *líquidos de Landau Fermi*, este enfoque perturbativo es posible, y aunque para interacciones fuertes deben sumarse infinitos ordenes del desarrollo, las integrales generadas en la expansión perturbativa están libres de divergencias. Este desarrollo arroja como resultado aproximado

$$G(\mathbf{k}, \omega + i0^+) \approx \frac{Z_{\mathbf{k}}}{\omega - \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}}, \quad (1.1)$$

para la función de Green retardada con \mathbf{k} en la vecindad de la superficie de Fermi. El número $Z_{\mathbf{k}}$ es el llamado *residuo de la cuasipartícula*, y la energía $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}$ es la energía de excitación de una cuasipartícula. Como en general los líquidos de Landau Fermi son metales, $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}$ no debe tener gap. Esto significa que existe una superficie en el espacio \mathbf{k} en la que $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} = 0$, lo que define la superficie de Fermi, y $Z_{\mathbf{k}_F}$ representa la magnitud del salto de la distribución de momentos en dicha superficie. La energía $\gamma_{\mathbf{k}}$ puede identificarse con el amortiguamiento de la cuasi-partícula (o lo que es lo mismo, $\tau_{\mathbf{k}} = 1/\gamma_{\mathbf{k}}$ con su tiempo de vida). Nótese que en el plano complejo ω , $G(\mathbf{k}, \omega + i0^+)$ posee un polo simple en $\omega = \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - i\gamma_{\mathbf{k}}$ con residuo $Z_{\mathbf{k}}$. La función de Green de los electrones no interactuantes, denotada $G_0(\mathbf{k}, \omega)$, puede obtenerse como caso especial de la Ec. (1.1) tomando $Z_{\mathbf{k}} = 1$, $\gamma_{\mathbf{k}} = 0$ e identificando $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}$ con la dispersión del sistema sin interacciones. En este caso el polo simple en $\omega = \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - i0^+$ con residuo unidad representa la propagación no amortiguada de una partícula con energía $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}$. El correspondiente polo en la función de Green del líquido de Fermi en interacción se asocia con el llamado *polo de la cuasipartícula*. El punto importante es que en la vecindad del

polo de la cuasipartícula, las funciones de Green del sistema interactuante poseen la misma estructura que las del sistema libre. Si definimos la autoenergía $\Sigma(\mathbf{k}, \omega)$ como

$$\Sigma(\mathbf{k}, \omega) = [G_0(\mathbf{k}, \omega)]^{-1} - [G(\mathbf{k}, \omega)]^{-1}, \quad (1.2)$$

entonces las cantidades $Z_{\mathbf{k}}$, $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}$ y $\gamma_{\mathbf{k}}$ pueden calcularse de las derivadas de la autoenergía.

En algunos casos, sin embargo, la aplicación de esta maquinaria conduce a integrales divergentes en la expansión perturbativa de $\Sigma(\mathbf{k}, \omega)$. El colapso del desarrollo perturbativo es un indicador de que la función de Green de la teoría en interacción no se relaciona más en forma simple con la función de Green de la teoría libre, por ejemplo por la existencia de polos múltiples o de singularidades no algebraicas, lo que impide definir las cuasipartículas. En este caso el sistema no puede ser un líquido de Fermi.

En años más recientes, el interés en sistemas en una dimensión espacial se vio incrementado debido a la realización experimental de materiales en los cuales el movimiento electrónico correlacionado se encuentra efectivamente confinado a una dimensión. Podemos citar como ejemplos nanotubos de carbono [8], estados de borde en sistemas de efecto Hall [9–11], conductores orgánicos [12], heteroestructuras semiconductoras (alambres cuánticos) [13], etc. Al intentar aplicar la teoría del líquido de Fermi a tales sistemas, se arriba a los problemas antes mencionados. El modelo más sencillo considerado con el objeto de describir el estado metálico normal de estos sistemas es el modelo de Tomonaga-Luttinger [14–16]. Como veremos en el capítulo siguiente, este modelo es exactamente soluble, sus funciones de correlación pueden ser calculadas, y todas sus propiedades se vuelven accesibles, por ejemplo el espectro de bajas energías resulta lineal y sin gap. Las excitaciones fundamentales no son más las cuasipartículas, sino fluctuaciones bosónicas colectivas *independientes* de grados de libertad de carga y spin. Esta independencia entre ambos se denomina separación spin-carga [17].

El colapso de la teoría de Landau del líquido de Fermi en este modelo puede entenderse al observar el comportamiento de su función de Green, que presenta un decaimiento algebraico no universal, es decir, el exponente del decaimiento depende de las interacciones. Además el cálculo de la distribución de momentos también arroja un comportamiento algebraico en las proximidades de la superficie de Fermi, y se vuelve continuo en dicha superficie, aún a temperatura cero.

Haldane [18] conjeturó que este conjunto de propiedades no es exclusivo del modelo de Tomonaga-Luttinger, sino que son propiedades genéricas del estado metálico normal de sistemas de electrones interactuantes en una dimensión. Más aún, llamó *Líquidos de Luttinger* a estos sistemas, y propuso que el modelo de Tomonaga-Luttinger es su límite a bajas energías, en el mismo sentido en el que el gas de Fermi es el modelo libre sobre el que se construye el líquido de Fermi. La inclusión de interacciones que sacan al sistema del punto fijo del líquido de Luttinger, como dispersión hacia atrás o umklapp generan gaps en los espectros de carga o spin, y dependiendo de los valores de los acoplamientos pueden ocurrir transiciones de fase entre un estado sin gap de tipo Líquido de Luttinger y otros con gaps en los espectros de carga o spin, por ejemplo la llamada transición metal aislador de Mott [17]. La importancia de los líquidos de Luttinger recobró ímpetu hace pocos años desde la propuesta

de Anderson de que poseen propiedades que son semejantes a la de los superconductores de alta temperatura crítica [19, 20].

La correspondencia entre teoría y experimento para estos sistemas unidimensionales se ha visto puesta a prueba en diversos materiales. Las leyes de potencia de funciones de correlación se han verificado en muchos de ellos, por ejemplo en las Ref. 21–23 mediante propiedades de transporte. Sin embargo la separación spin-carga ha sido más elusiva, y las pruebas más convincentes son muy recientes [24].

El marco teórico en el cual se da tratamiento a estos sistemas se encuentra íntimamente vinculado a los formalismos utilizados en teoría cuántica de campos y en el tratamiento de las interacciones fundamentales de la naturaleza. La bosonización abeliana, o trasmutación de fermiones en bosones, es la técnica construida para la resolución original del modelo de Tomonaga-Luttinger en materia condensada [16, 25, 26], y fue desarrollada en paralelo con la técnica del mismo nombre en teoría de campos [27–29]. Ésta se aplicó a la resolución del modelo de Thirring, y el modelo de Thirring masivo, que son versiones en el lenguaje de la teoría de campos del modelo de Tomonaga-Luttinger. Más tarde, a partir del trabajo de Fujikawa [30], la técnica de bosonización en teoría de campos se extendió para ser aplicada en el contexto de las integrales funcionales [31, 32], y un proceso equivalente ocurrió en materia condensada [33, 34]. Más específicamente, la bosonización funcional se aplicó en la Ref. 35 al estudio de una versión del modelo de Thirring, en la que se modificó el acoplamiento entre las corrientes fermiónicas para dar lugar a la posibilidad de una interacción no local. En la Ref. 36 se aplicó dicha formulación al cálculo de las funciones de Green del modelo con interacciones de largo alcance, más específicamente de tipo columbiano.

En esta tesis presentamos contribuciones originales en el campo de las aplicaciones de las teorías cuánticas de campos a la formulación de modelos de materia condensada en los que el spin electrónico juega un rol crucial. En particular nos concentramos en el modelo de Tomonaga-Luttinger con spin y dos extensiones posibles: interacciones de inversión de spin, y acoplamiento spin-órbita [37, 38]. Además estudiamos problemas que surgen al realizar la bosonización de teorías de materia condensada en el marco de la integral funcional. El plan es el siguiente: en el capítulo 2 presentamos la bosonización en el marco operacional en forma detallada, y la aplicamos al estudio de modelos concretos de teorías de muchos cuerpos en baja dimensión. Para esto seguimos la bibliografía estándar [17, 39, 40]. En el capítulo 3 analizamos las ambigüedades que se presentan en la bosonización debido a los necesarios mecanismos de regularización que deben implementarse, particularmente cuando la teoría bajo estudio no posee la invarianza de Lorentz de las teorías de campos usuales, y allanamos el camino para estudiar teorías más complejas de materia condensada mediante bosonización funcional [41]. En el capítulo 4 atacamos uno de esos modelos: el modelo de Thirring no local con dos especies de fermiones, que es una versión de teoría de campos del modelo de Tomonaga-Luttinger con spin. Consideramos además el efecto de añadir al Lagrangiano términos de inversión de spin. Obtenemos una acción bosónica efectiva que representa oscilaciones de densidad de carga y de spin de forma independiente; la función de partición resulta factorizada, dando lugar a la separación spin-carga [42]. En el capítulo

5 examinamos la aproximación armónica autoconsistente y su utilización en el marco de la integral funcional y las teorías de materia condensada. Hallamos una fórmula para el gap de las excitaciones del sector de spin del modelo estudiado en el capítulo anterior, como función de potenciales arbitrarios de interacciones electrón-electrón de tipo dispersión hacia adelante [42]. En este capítulo proponemos además un nuevo método para determinar el parámetro incógnita asociado a la aproximación y lo aplicamos al estudio del régimen de escala del modelo de Ising en 2D fuera del punto crítico y en presencia de un campo magnético h [43]. En el capítulo 6 calculamos funciones de correlación en sistemas unidimensionales de electrones en interacción en los que los grados de libertad de carga y spin se encuentran acoplados a través de la interacción spin-órbita. Este acoplamiento está representado por una asimetría en el espectro libre de los electrones. Estudiamos fluctuaciones de tipo ondas de densidad de carga y spin, y de tipo superconductor singlete y triplete. Mostramos que la interacción spin-órbita modifica los exponentes del decaimiento de las funciones de correlación y el diagrama de fases del sistema. Además encontramos que susceptibilidades que eran finitas a bajas temperaturas, se vuelven divergentes cuando la interacción spin-órbita es suficientemente intensa [44]. Para concluir, en el capítulo 7 reunimos los resultados más destacados y las conclusiones.

Finalmente queremos mencionar que las investigaciones realizadas en esta tesis se complementan con los estudios del modelo de Tomonaga Luttinger sin spin realizados en las Ref. 45 y 46. En la primera se estudió el efecto de interacciones de tipo dispersión hacia adelante y umklapp no locales, y la generalización de la ecuación del gap a estos casos, y en la segunda se consideró la asimetría en el espectro libre, pero en el caso simplificado de electrones sin spin.

Capítulo 2

Bosonización

Presentaremos una derivación exhaustiva de la técnica de bosonización en el marco operacional. Seguiremos las referencias usuales para mostrar la equivalencia entre operadores fermiónicos y operadores bosónicos. Este es el punto de partida para el estudio de teorías de materia condensada en una dimensión.

2.1 Equivalencia entre operadores fermiónicos y bosónicos

2.1.1 Campos fermiónicos

Tomemos una teoría que puede formularse en términos de un conjunto de operadores de creación y de aniquilación fermiónicos en una dimensión espacial, que satisfacen relaciones canónicas de anticonmutación

$$\{c_{krs}, c_{k'r's'}^\dagger\} = \delta_{kk'}\delta_{rr'}\delta_{ss'}. \quad (2.1)$$

Estos operadores están etiquetados por los índices r , que distingue partículas que se mueven a la derecha ($r = +1$) o a la izquierda ($r = -1$), s que en general puede referirse a M especies de fermiones, por ejemplo en problemas de múltiples cadenas, pero que usualmente se utilizará para indicar el spin electrónico ($s = +1$ para spin para arriba y $s = -1$ para spin para abajo), y un índice discreto y no acotado k que denota el momento (o número de onda), de la forma

$$k = \frac{2\pi}{L} \left(n_k - \frac{1}{2}\delta_b \right), \quad \text{con } n_k \in \mathbb{Z} \text{ y } \delta_b \in [0, 2). \quad (2.2)$$

Aquí L es la longitud asociada al tamaño del sistema y δ_b es un parámetro que determina las condiciones de contorno del problema. k usualmente etiqueta las autoenergías ϵ_k del sistema libre (con ϵ_0 correspondiente a la energía de Fermi ϵ_F). Que este índice sea discreto y no acotado es un requisito indispensable para realizar una derivación rigurosa de las identidades de

bosonización. Estas identidades son independientes de un problema específico como puede serlo el modelo de Tomonaga-Luttinger, o el problema de Kondo; y de la relación de dispersión ϵ_k . Esto es posible porque dichas identidades son igualdades entre operadores, es decir, válidas cuando actúan sobre cualquier estado del espacio de Fock. Son independientes entonces del Hamiltoniano, cuya forma detallada sólo se vuelve relevante al calcular funciones de correlación. Su aplicación a modelos más concretos será analizada más adelante. En esta sección seguiremos en detalle la exposición hecha en la Ref. 39 con dos diferencias mínimas: un cambio en la normalización, para adecuarla a las aplicaciones de materia condensada más usuales, y la inclusión explícita del índice r , debido a que ciertos conmutadores dependen explícitamente de él (en la mencionada referencia se lo incluyó junto con el índice s en un único índice $\eta = 1, \dots, M$).

Comenzando por el dado conjunto de operadores de destrucción c_{krs} con las propiedades (2.1) y (2.2) definimos un conjunto de campos fermiónicos de la siguiente manera:

$$\psi_{rs}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{irkx} c_{krs}, \quad \psi_{rs}^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-irkx} c_{krs}^\dagger, \quad (2.3)$$

donde $x \in [-\infty, \infty]$ es la variable espacial. Sus inversas son

$$c_{krs} = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx e^{-irkx} \psi_{rs}(x), \quad c_{krs}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx e^{irkx} \psi_{rs}^\dagger(x). \quad (2.4)$$

Los operadores ψ_{rs} satisfacen las condiciones de contorno

$$\psi_{rs}(x+L) = e^{i\pi\delta_b} \psi_{rs}(x) \quad \text{y} \quad \psi_{rs}^\dagger(x+L) = e^{-i\pi\delta_b} \psi_{rs}^\dagger(x), \quad (2.5)$$

periódicas para $\delta_b = 0$ y antiperiódicas para $\delta_b = 1$. Las ecuaciones (2.1) y (2.2), junto con la identidad

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{iny} = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(y - 2\pi m) \quad (2.6)$$

implican de inmediato las relaciones de anticonmutación

$$\left\{ \psi_{rs}(x), \psi_{r's'}^\dagger(x') \right\} = \delta_{rr'} \delta_{ss'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - x' - nL) e^{in\pi\delta_b} \quad (2.7)$$

$$\left\{ \psi_{rs}(x), \psi_{r's'}(x') \right\} = \left\{ \psi_{rs}^\dagger(x), \psi_{r's'}^\dagger(x') \right\} = 0. \quad (2.8)$$

Para $x, x' \in [0, L]$ o $L \rightarrow \infty$, y condiciones de contorno periódicas se reducen a las relaciones usuales para campos fermionicos.

El vacío fermiónico $|0\rangle_0$ (llamado a veces *mar de Fermi*) se define en la forma

$$c_{krs}|0\rangle_0 \equiv 0 \quad \text{para} \quad k > 0 \ (n > 0) \quad (2.9)$$

$$c_{krs}^\dagger|0\rangle_0 \equiv 0 \quad \text{para} \quad k \leq 0 \ (n \leq 0), \quad (2.10)$$

es decir que es un estado tal que para todos los valores de r y s los niveles llenos más altos corresponden a $n_k = 0$ y los vacíos má bajos a $n_k = 1$. Respecto a este vacío se define la operación de orden normal del producto de operadores $ABC \dots$ como

$$:ABC\dots: = ABC\dots - {}_0\langle 0|ABC\dots|0\rangle_0, \quad (2.11)$$

para $A, B, C, \dots \in \{c_{krs}; c_{krs}^\dagger\}$. Esta definición es equivalente a agrupar todos los operadores c_{krs} con $k > 0$ y todos los c_{krs}^\dagger con $k \leq 0$ a la derecha de los demás.

El operador número de partículas de tipo rs se define como

$$\hat{N}_{rs} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} :c_{krs}^\dagger c_{krs}: = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[c_{krs}^\dagger c_{krs} - {}_0\langle 0|c_{krs}^\dagger c_{krs}|0\rangle_0 \right]. \quad (2.12)$$

Mediante la aplicación de operadores de creación y aniquilación sobre el vacío construimos estados con distintas configuraciones de partículas y agujeros, $|\mathbf{N}\rangle$, autoestados de los operadores \hat{N}_{rs} , con autovalores N_{rs}

$$\hat{N}_{rs}|\mathbf{N}\rangle = N_{rs}|\mathbf{N}\rangle. \quad (2.13)$$

Designamos con la letra \mathbf{N} al conjunto de los autovalores N_{rs} para los diferentes r, s , y por abuso de lenguaje diremos que un estado de \mathbf{N} partículas es un estado en el que hay N_{rs} partículas de tipo rs . Nótese que es posible aniquilar partículas con $k < 0$ (ya que justamente el mar de Fermi está lleno hasta el nivel $k = 0$). Alternativamente en este caso decimos que creamos un agujero con impulso k . Esto disminuye el autovalor N_{rs} , que puede tomar así valores negativos.

El conjunto de autoestados con un dado \mathbf{N} conforman el espacio de Hilbert de \mathbf{N} partículas $\mathcal{H}_{\mathbf{N}}$. El espacio de Fock \mathcal{F} se define como suma directa de los espacios de Hilbert con número fijo de partículas $\mathcal{F} = \sum_{\oplus \mathbf{N}} \mathcal{H}_{\mathbf{N}}$.

Entre todos los estados con el mismo \mathbf{N} hay uno que posee menor energía, es aquel que está lleno hasta un determinado nivel, y vacío de allí en más. Éste es el estado fundamental de $\mathcal{H}_{\mathbf{N}}$, $|\mathbf{N}\rangle_0$. Podemos dar una definición más precisa de este estado:

$$|\mathbf{N}\rangle_0 \equiv \prod_{r,s} C_{rs}^{N_{rs}}|0\rangle_0, \quad (2.14)$$

donde

$$C_{rs}^{N_{rs}} \equiv \begin{cases} c_{N_{rs}rs}^\dagger c_{(N_{rs}-1)rs}^\dagger \cdots c_{1rs}^\dagger & \text{para } N_{rs} > 0, \\ 1 & \text{para } N_{rs} = 0, \\ c_{(N_{rs}+1)rs} c_{(N_{rs}+2)rs} \cdots c_{0rs} & \text{para } N_{rs} < 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

2.1.2 Campos bosónicos

A partir del estado $|\mathbf{N}\rangle_0$ pueden construirse el resto de las excitaciones de \mathbf{N} partículas. Definimos los siguientes operadores de *creación y aniquilación bosónicos* que cumplen dicha tarea,

$$b_{qrs}^\dagger \equiv \frac{i}{\sqrt{n_q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k+qrs}^\dagger c_{krs}, \quad b_{qrs} \equiv \frac{-i}{\sqrt{n_q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-qrs}^\dagger c_{krs}, \quad (2.16)$$

donde $n_q \in \mathbb{Z}^+$ es un entero positivo, y $q = 2\pi n_q/L > 0$. Estos operadores, al actuar sobre cualquier estado $|\mathbf{N}\rangle$ crean una combinación de excitaciones de partícula-agujero sobre ese estado con q unidades de momento más (o menos), pero sin salirse de $\mathcal{H}_{\mathbf{N}}$. En este sentido son operadores que aumentan y disminuyen el momento. Su normalización se eligió de modo que satisfagan relaciones de conmutación bosónicas

$$\left[b_{qrs}, b_{q'r's'}^\dagger \right] = \left[b_{qrs}^\dagger, b_{q'r's'} \right] = 0, \quad \left[\hat{N}_{rs}, b_{q'r's'} \right] = \left[\hat{N}_{rs}, b_{q'r's'}^\dagger \right] = 0, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \left[b_{qrs}, b_{q'r's'}^\dagger \right] &= \delta_{rr'} \delta_{ss'} \frac{1}{\sqrt{n_q n_q'}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(c_{k+q'-qrs}^\dagger c_{krs} - c_{k+q'rs}^\dagger c_{k+qrs} \right) \\ &= \delta_{rr'} \delta_{ss'} \delta_{qq'} \sum_k \frac{1}{n_q} \left\{ \left[: c_{krs}^\dagger c_{krs} : - : c_{k+qrs}^\dagger c_{k+qrs} : \right] \right. \\ &\quad \left. + \left({}_0\langle 0 | c_{krs}^\dagger c_{krs} | 0 \rangle_0 - {}_0\langle 0 | c_{k+qrs}^\dagger c_{k+qrs} | 0 \rangle_0 \right) \right\} \\ &= \delta_{rr'} \delta_{ss'} \delta_{qq'}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.17) se pueden verificar fácilmente, pero la derivación de (2.18) requiere cierto cuidado, como notaron por primera vez Mattis y Lieb [16]: para $q \neq q'$ los dos términos en la primera línea ya están ordenados normalmente (esto es porque sus valores medios de vacío son nulos) y pueden restarse trivialmente mediante un cambio $k \rightarrow k - q'$ en el segundo término, dando cero como resultado. Sin embargo, para $q = q'$ antes de hacer la sustracción debemos construir expresiones ordenadas normalmente, de otro modo estaríamos restando expresiones infinitas de un modo no controlado. Los términos en la segunda línea se cancelan, reemplazando en el segundo término $k \rightarrow k - q$ (esto ahora si se puede hacer porque están ordenados normalmente). La definición del vacío (Ecs. (2.9) y (2.10)) implica que la diferencia en los valores de expectación de la tercera línea arroja como resultado

$$\frac{1}{n_q} \left(\sum_{n_k=-\infty}^0 - \sum_{n_k=-\infty}^{-n_q} \right) = \frac{1}{n_q} n_q = 1. \quad (2.19)$$

Nótese que la construcción de los operadores b_{qrs} (2.16) y la derivación de los conmutadores (2.18) descansa fuertemente en el hecho de que el conjunto de ks es infinito y no acotado por debajo.

Es fácil verificar que dentro de $\mathcal{H}_{\mathbf{N}}$, $|\mathbf{N}\rangle_0$ actúa como estado fundamental para las excitaciones bosónicas:

$$b_{qrs}|\mathbf{N}\rangle_0 = 0, \quad \text{para todo } q, r, s. \quad (2.20)$$

Intuitivamente esto es claro: si $|\mathbf{N}\rangle_0$ es el estado fundamental entre todos aquellos que contienen \mathbf{N} partículas, entonces no se le pueden quitar unidades de momento sin quitar partículas, es decir, sin salir de $\mathcal{H}_{\mathbf{N}}$.

Es obvio que los estados excitados $|\mathbf{N}\rangle$ que conforman el espacio de Hilbert de \mathbf{N} partículas se pueden obtener actuando sobre $|\mathbf{N}\rangle_0$ con alguna función de los operadores fermiónicos: $|\mathbf{N}\rangle = \bar{f}(c_{krs}^\dagger, c_{k'rs})|\mathbf{N}\rangle_0$. Haldane [18] mostró que también existe una representación en términos de los b_{qrs}^\dagger . Más específicamente, mostró lo siguiente:

Teorema 1. *Para cualquier estado $|\mathbf{N}\rangle$, existe una función $f(b^\dagger)$ tal que*

$$|\mathbf{N}\rangle = f(b^\dagger)|\mathbf{N}\rangle_0. \quad (2.21)$$

Esta es una afirmación para nada trivial ya que los operadores b^\dagger crean complejas combinaciones de excitaciones partícula-agujero; y constituye el corazón de la bosonización debido a que implica una igualdad entre espacios de Fock bosónicos y fermiónicos. Omitiremos aquí la demostración, y remitiremos al lector a la mencionada referencia, y también a la Ref. 39.

El estado fundamental $|\mathbf{N}\rangle_0$ sirve para definir una operación de orden normal bosónica de un producto de operadores de tipo b_{qrs} y b_{qrs}^\dagger de manera análoga al orden normal fermiónico (2.11). Más aún, ambos son equivalentes, es decir que si un producto de operadores bosónicos está ordenado normalmente de acuerdo al orden bosónico, entonces también lo está de acuerdo al orden fermiónico, y viceversa. Por este motivo se utiliza la misma notación para ambos.

Con los operadores bosónicos definidos en la Ec (2.16) podemos definir campos bosónicos:

$$\varphi_{rs}(x) = - \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{n_q}} e^{irqx} b_{qrs} e^{-aq/2}, \quad \varphi_{rs}^\dagger(x) = - \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{n_q}} e^{-irqx} b_{qrs}^\dagger e^{-aq/2}, \quad (2.22)$$

y su combinación hermítica

$$\phi_{rs}(x) = \varphi_{rs}(x) + \varphi_{rs}^\dagger(x) = - \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{n_q}} (e^{irqx} b_{qrs} + e^{-irqx} b_{qrs}^\dagger) e^{-aq/2}. \quad (2.23)$$

Aquí $a > 0$ es un parámetro infinitesimal que regulariza divergencias ultravioletas que ocurren en ciertas expresiones y conmutadores no ordenados normalmente. Usualmente se toma

del orden del espaciado de red $a \sim 1/k_F$. Los campos así definidos satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[\varphi_{rs}(x), \varphi_{r's'}(x') \right] = \left[\varphi_{rs}^\dagger(x), \varphi_{r's'}^\dagger(x') \right] = 0, \quad (2.24)$$

$$\left[\varphi_{rs}(x), \varphi_{r's'}^\dagger(x') \right] = \delta_{rr'} \delta_{ss'} \sum_{q>0} \frac{1}{n_q} e^{q[ir(x-x')-a]} \quad (2.25)$$

$$= -\delta_{rr'} \delta_{ss'} \ln \left[1 - e^{\frac{2\pi}{L}[ir(x-x')-a]} \right] \quad (2.26)$$

$$\xrightarrow{L \rightarrow \infty} -\delta_{rr'} \delta_{ss'} \ln \left[\frac{2\pi}{L} [a - ir(x-x')] \right]. \quad (2.27)$$

La Ec. (2.26) se obtuvo utilizando la expansión en serie de $\log(1-y)$. Aquí se ve claramente que a actúa como cut-off de la divergencia ultravioleta para $x = x'$. Estos conmutadores son útiles en la evaluación del producto de operadores de vértice (exponenciales de campos bosónicos). Utilizando la identidad

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{[A,B]/2}, \quad (2.28)$$

para operadores A y B que conmutan con $[A, B]$, obtenemos

$$e^{i\varphi_{rs}^\dagger(x)} e^{i\varphi_{rs}(x)} = e^{i(\varphi_{rs}^\dagger + \varphi_{rs})(x)} e^{[i\varphi_{rs}^\dagger(x), i\varphi_{rs}(x)]/2} = \left(\frac{L}{2\pi a} \right)^{1/2} e^{i\phi_{rs}(x)} \quad (2.29)$$

$$e^{-i\varphi_{rs}(x)} e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)} = e^{-i(\varphi_{rs} + \varphi_{rs}^\dagger)(x)} e^{[-i\varphi_{rs}(x), -i\varphi_{rs}^\dagger(x)]/2} = \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^{1/2} e^{-i\phi_{rs}(x)} \quad (2.30)$$

Nótese que estas fórmulas son válidas para cualquier valor de L siempre que a sea suficientemente chico (esto es así porque para $x = x'$ el límite $L \rightarrow \infty$ en (2.26) es equivalente a $a \rightarrow 0$). Resulta interesante también la evaluación del conmutador del campo $\phi_{rs}(x)$ con su derivada:

$$\left[\phi_{rs}(x), \partial_{x'} \phi_{r's'}(x') \right] = -\delta_{rr'} \delta_{ss'} ir \frac{2\pi}{L} \sum_{n_q=1}^{\infty} \left[e^{\frac{2\pi}{L}[ir(x-x')-a]n_q} + e^{\frac{2\pi}{L}[-ir(x-x')-a]n_q} \right] \quad (2.31)$$

A partir de aquí podemos obtener dos expresiones diferentes de acuerdo a cómo se tomen los límites para $L \rightarrow \infty$ y a infinitesimal. Si queremos una expresión no periódica, para L grande, es conveniente hacer la suma geométrica, y posteriormente tomar los límites dejando el límite $a \rightarrow 0$ para el final:

$$\begin{aligned} \left[\phi_{rs}(x), \partial_{x'} \phi_{r's'}(x') \right] &= -\delta_{rr'} \delta_{ss'} \frac{2\pi}{L} ir \left[\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{L}[a-ir(x-x')] - 1}} + \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{L}[a+ir(x-x')] - 1}} \right] \\ &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} -\delta_{rr'} \delta_{ss'} 2\pi ir \frac{a/\pi}{(x-x')^2 + a^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} -\delta_{rr'} \delta_{ss'} 2\pi ir \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nótese que para tomar correctamente el límite $L \rightarrow \infty$ en la primera línea de las expresiones precedentes, se deben desarrollar los exponenciales hasta orden cuadrático en $1/L$. Para L finito, en cambio, tomamos primero el límite $a \rightarrow 0$ en (2.31), y utilizamos la identidad (2.6):

$$\left[\phi_{rs}(x), \partial_{x'} \phi_{r's'}(x') \right] = -\delta_{rr'} \delta_{ss'} 2\pi ir \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x-x'-nL) - \frac{1}{L} \right], \quad (2.33)$$

donde el término $1/L$ en esta última ecuación aparece debido a la ausencia del término $n_q = 0$ ($q = 0$) en la Ec. (2.31). Finalmente podemos calcular el conmutador del campo ϕ_{rs} con si mismo, obteniendo

$$\left[\phi_{rs}(x), \phi_{r's'}(x') \right] \xrightarrow{L \rightarrow \infty, a \rightarrow 0} 2\pi ir \delta_{rr'} \delta_{ss'} \epsilon(x-x') \quad \text{donde } \epsilon(x) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } x \gtrless 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

2.1.3 Factores de Klein

Los operadores b y b^\dagger crean excitaciones dentro del espacio de Hilbert de N partículas. Debemos definir entonces operadores que conecten espacios de Hilbert con diferente número de partículas, es decir, operadores escalera que aumenten o disminuyan el número fermiónico total, cosa que no pueden hacer los operadores bosónicos.

Definimos los *factores de Klein* F_{rs} y F_{rs}^\dagger como operadores con las siguientes propiedades:
i) conmutan con todos los operadores bosónicos:

$$\left[b_{qrs}, F_{r's'}^\dagger \right] = \left[b_{qrs}, F_{r's'} \right] = \left[b_{qrs}^\dagger, F_{r's'}^\dagger \right] = \left[b_{qrs}^\dagger, F_{r's'} \right] = 0 \quad \text{para todo } q, r, r', s, s', \quad (2.35)$$

y ii) su acción sobre un estado $|N\rangle_0$, es la de agregar una partícula en el nivel más bajo posible, y la de quitar una en el más alto respectivamente:

$$F_{rs}^\dagger |N\rangle_0 \equiv c_{(N_{rs}+1)rs}^\dagger |N\rangle_0, \quad (2.36)$$

$$F_{rs} |N\rangle_0 \equiv c_{N_{rs}rs} |N\rangle_0. \quad (2.37)$$

de este modo queda definida su acción sobre cualquier estado $|\mathbf{N}\rangle$. En efecto, el estado $|\mathbf{N}\rangle$ puede descomponerse de acuerdo a la Ec. (2.21), y por lo tanto,

$$F_{rs}^\dagger |\mathbf{N}\rangle = f(b^\dagger) c_{(N_{rs}+1)rs}^\dagger |\mathbf{N}\rangle_0, \quad (2.38)$$

$$F_{rs} |\mathbf{N}\rangle = f(b^\dagger) c_{N_{rs}rs} |\mathbf{N}\rangle_0. \quad (2.39)$$

Es decir, que el estado $F_{rs}^\dagger |\mathbf{N}\rangle$ (o $F_{rs} |\mathbf{N}\rangle$) posee el mismo conjunto de excitaciones bosónicas que el estado $|\mathbf{N}\rangle$, pero creadas sobre un estado con una partícula más (o menos). Así definidos, los factores de Klein poseen las siguientes propiedades:

$$F_{rs} F_{rs}^\dagger = F_{rs}^\dagger F_{rs} = 1 \quad (\text{unitariedad}); \quad (2.40)$$

$$\left\{ F_{rs}^\dagger, F_{r's'} \right\} = 2\delta_{rr'} \delta_{ss'} \quad \text{para todo } r, r', s, s'; \quad (2.41)$$

$$\left\{ F_{rs}^\dagger, F_{r's'}^\dagger \right\} = \left\{ F_{rs}, F_{r's'} \right\} = 0 \quad \text{para } r \neq r', s \neq s'; \quad (2.42)$$

$$\left[\hat{N}_{rs}, F_{r's'}^\dagger \right] = \delta_{rr'} \delta_{ss'} F_{rs}^\dagger, \quad \left[\hat{N}_{rs}, F_{r's'} \right] = -\delta_{rr'} \delta_{ss'} F_{rs}. \quad (2.43)$$

Para probar la unitariedad es fundamental que el espectro del operador \hat{N}_{rs} sea no acotado.

2.1.4 Identidades de bosonización

Con todas las definiciones y propiedades estudiadas estamos en condiciones de establecer igualdades entre operadores de campos bosónicos y fermiónicos. La primera de ellas, la más simple de derivar, establece una igualdad entre la densidad electrónica ordenada normalmente, y la derivada del campo bosónico $\partial_x \phi_{rs}(x)$:

$$\rho_{rs}(x) \equiv : \psi_{rs}^\dagger(x) \psi_{rs}(x) : = \frac{1}{L} \sum_q e^{irqx} \sum_k : c_{k-qr}^\dagger c_{krs} : \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{q>0} i\sqrt{n_q} (e^{irqx} b_{qrs} - e^{-irqx} b_{qrs}^\dagger) + \frac{1}{L} \sum_k : c_{krs}^\dagger c_{krs} : \quad (2.45)$$

$$= -r \frac{1}{2\pi} \partial_x \phi_{rs}(x) + \frac{1}{L} \hat{N}_{rs} \quad (\text{para } a \rightarrow 0). \quad (2.46)$$

La segunda, relaciona el campo fermiónico con el operador de vértice bosónico. Para derivarla debemos mostrar previamente la siguiente propiedad:

Prop. 1. $\psi_{rs}(x)|\mathbf{N}\rangle_0$ es un estado coherente bosónico

Mostraremos que dicho estado es un autoestado de b_{qr} y por lo tanto posee una representación como estado coherente. Para ello basta con calcular los conmutadores de b y b^\dagger con ψ :

$$\left[b_{qr's'}, \psi_{rs}(x) \right] = \delta_{rr'} \delta_{ss'} \alpha_{qr}(x) \psi_{rs}(x) \quad (2.47)$$

$$\left[b_{qr's'}^\dagger, \psi_{rs}(x) \right] = \delta_{rr'} \delta_{ss'} \alpha_{qr}^*(x) \psi_{rs}(x), \quad (2.48)$$

donde $\alpha_{qr}(x) = \frac{i}{\sqrt{n_q}} e^{-irqx}$. Estos conmutadores y la ecuación (2.20) implican inmediatamente que

$$b_{qr's'} \psi_{rs}(x) |N\rangle_0 = \delta_{rr'} \delta_{ss'} \alpha_{qr}(x) \psi_{rs}(x) |N\rangle_0. \quad (2.49)$$

Y por lo tanto, este estado posee una representación como estado coherente bosónico [47]:

$$\psi_{rs}(x) |N\rangle_0 = \exp \left[\sum_{q>0} \alpha_{qr}(x) b_{qr}^\dagger \right] F_{rs} \hat{\lambda}_{rs}(x) |N\rangle_0 = e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)} F_{rs} \hat{\lambda}_{rs}(x) |N\rangle_0 \quad (2.50)$$

Aquí utilizamos la definición del campo φ^\dagger (2.22) en la segunda igualdad. Hemos agregado el operador de fase $\hat{\lambda}_{rs}$ que derivaremos en lo sucesivo; y el factor de Klein, que es necesario porque ψ_{rs} remueve una partícula del estado $|N\rangle_0$, cosa que los campos bosónicos b^\dagger no pueden hacer. Para obtener el operador $\hat{\lambda}$ calculamos el siguiente valor medio de dos formas diferentes: por un lado,

$${}_0\langle N | F_{rs}^\dagger \psi_{rs}(x) | N \rangle_0 = {}_0\langle N | \hat{\lambda}_{rs}(x) | N \rangle_0 \equiv \lambda_{rs}(x) \quad (2.51)$$

donde hemos pasado adelante el factor de Klein F_{rs} en (2.50), ya que según su definición (2.35) conmuta con todos los b^\dagger ; utilizamos la unitariedad de los F 's, y expandimos en serie el exponencial, quedándonos con el término de orden 0, ya que ${}_0\langle N | b_{qr}^\dagger = 0$.

Por otro lado, insertamos la descomposición de Fourier (2.3) para $\psi(x)$ y la definición del factor de Klein (2.36), y nos quedamos sólo con el término $n_k = N_{rs}$ (o bien $k = \frac{2\pi}{L}(N_{rs} - \frac{1}{2}\delta_b)$):

$${}_0\langle N | F_{rs}^\dagger \psi_{rs}(x) | N \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{irkx} {}_0\langle N | c_{N_{rs}rs}^\dagger c_{kr} | N \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ir\frac{2\pi}{L}(N_{rs} - \frac{1}{2}\delta_b)x}. \quad (2.52)$$

Concluimos entonces que el operador $\hat{\lambda}_{rs}(x)$ está dado por

$$\hat{\lambda}_{rs}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ir\frac{2\pi}{L}(\hat{N}_{rs} - \frac{1}{2}\delta_b)x}. \quad (2.53)$$

Para derivar las identidades de bosonización debemos estudiar la acción del campo $\psi_{rs}(x)$ sobre un estado $|\mathbf{N}\rangle$ arbitrario (que según (2.21) puede escribirse como $|\mathbf{N}\rangle = f(\{b_{qr's'}^\dagger\})|\mathbf{N}\rangle_0$). Para ello utilizaremos las siguientes identidades [39],

$$\psi_{rs}(x)f(\{b_{qr's'}^\dagger\}) = f(\{b_{qr's'}^\dagger - \delta_{rr'}\delta_{ss'}\alpha_{qr}^*(x)\})\psi_{rs}(x), \quad (2.54)$$

$$f(\{b_{qr's'}^\dagger - \delta_{rr'}\delta_{ss'}\alpha_{qr}^*(x)\}) = e^{-i\varphi_{rs}(x)}f(\{b_{qr's}^\dagger\})e^{i\varphi_{rs}(x)}, \quad (2.55)$$

que se pueden mostrar facilmente a partir de la fórmula de Baker-Hausdorff

$$e^{-B}Ae^B = A + [A, B] + \frac{1}{2!}[[A, B]B] + \dots, \quad (2.56)$$

expandiendo en serie de Taylor la función f y empleando los conmutadores (2.47) y (2.48). Podemos evaluar entonces $\psi_{rs}(x)|\mathbf{N}\rangle$ conmutando $\psi_{rs}(x)$ con $f(\{b_{qr's}^\dagger\})$, insertando la representación (2.50) y reordenando los factores:

$$\begin{aligned} \psi_{rs}(x)|\mathbf{N}\rangle &= \psi_{rs}(x)f(\{b_{qr's}^\dagger\})|\mathbf{N}\rangle_0 \\ &= f(\{b_{qr's'}^\dagger - \delta_{rr'}\delta_{ss'}\alpha_{qr}^*(x)\})\psi_{rs}(x)|\mathbf{N}\rangle_0 && \text{[por la Ec. 2.54]} \\ &= f(\{b_{qr's'}^\dagger - \delta_{rr'}\delta_{ss'}\alpha_{qr}^*(x)\})e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)}F_{rs}\hat{\lambda}_{rs}(x)|\mathbf{N}\rangle_0 && \text{[por la Ec. 2.50]} \\ &= F_{rs}\hat{\lambda}_{rs}(x)e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)}f(\{b_{qr's'}^\dagger - \delta_{rr'}\delta_{ss'}\alpha_{qr}^*(x)\})|\mathbf{N}\rangle_0 && \text{[por la Ec. 2.35]} \\ &= F_{rs}\hat{\lambda}_{rs}(x)e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)}[e^{-i\varphi_{rs}(x)}f(\{b_{qr's}^\dagger\})e^{i\varphi_{rs}(x)}]|\mathbf{N}\rangle_0 && \text{[por la Ec. 2.55]} \\ &= F_{rs}\hat{\lambda}_{rs}(x)e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)}e^{-i\varphi_{rs}(x)}f(\{b_{qr's}^\dagger\})|\mathbf{N}\rangle_0 && \text{[por la Ec. 2.20]} \\ &= F_{rs}\hat{\lambda}_{rs}(x)e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)}e^{-i\varphi_{rs}(x)}|\mathbf{N}\rangle. && \text{[por la Ec. 2.21]} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dado que $|\mathbf{N}\rangle$ es arbitrario, y que todo estado del espacio de Fock es de esta forma, concluimos que las siguientes *fórmulas de bosonización* valen como identidades entre operadores en el espacio de Fock, y para todo L :

$$\psi_{rs}(x) = F_{rs}\hat{\lambda}_{rs}(x)e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)}e^{-i\varphi_{rs}(x)} \quad (2.58)$$

$$= F_{rs}\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ir\frac{2\pi}{L}(\hat{N}_{rs}-\frac{1}{2}\delta_b)x}e^{-i\varphi_{rs}^\dagger(x)}e^{-i\varphi_{rs}(x)} \quad \text{[por la Ec. 2.53]} \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}F_{rs}e^{ir\frac{2\pi}{L}(\hat{N}_{rs}-\frac{1}{2}\delta_b)x}e^{-i\phi_{rs}(x)}. \quad \text{[por la Ec. 2.29]} \quad (2.60)$$

Por último estudiaremos como representar un Hamiltoniano fermiónico libre con una relación de dispersión lineal. Más específicamente tomemos un Hamiltoniano de la forma (con $\hbar = 1$)

$$H_0 = \sum_{r,s} H_{0rs} \quad (2.61)$$

con

$$H_{0rs} \equiv -irv_{rs} \int_0^L dx : \psi_{rs}^\dagger(x) \partial_x \psi_{rs}(x) := v_{rs} \sum_k k : c_{krs}^\dagger c_{krs} : \quad (2.62)$$

La segunda forma se obtiene de la primera insertando el desarrollo de Fourier del campo ψ (2.3).

La ecuación (2.21) implica que los b^\dagger 's actuando sobre $|\mathbf{N}\rangle_0$ generan todo el espacio de Hilbert de \mathbf{N} partículas. Esto significa entonces, que H_{0rs} debe tener una representación en términos solamente de variables bosónicas. Para hallar esa representación, estudiemos el conmutador de b_{qs}^\dagger con H_{0rs} :

$$\left[H_{0rs}, b_{qr's'}^\dagger \right] = qb_{qs}^\dagger \delta_{rr'} \delta_{ss'}. \quad (2.63)$$

Además, dado que $[H_{0rs}, \hat{N}_{r's'}] = 0$ para todo r, r', s, s' , todo autoestado de \hat{N}_{rs} lo es también de H_{0rs} , en particular el estado fundamental de \mathbf{N} partículas, $|\mathbf{N}\rangle_0$. Su autovalor es

$$E_{0rs}^{\mathbf{N}} = {}_0\langle \mathbf{N} | H_{0rs} | \mathbf{N} \rangle_0 = \frac{v_{rs}}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right) N_{rs} (N_{rs} + 1 - \delta_b). \quad (2.64)$$

Se comprueba que la única forma bosónica para H_{0rs} que reproduce las Ecs. (2.63) y (2.64) es:

$$H_{0rs} = \sum_{q>0} qb_{qs}^\dagger b_{qs} + \frac{v_{rs}}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right) \hat{N}_{rs} \left(\hat{N}_{rs} + 1 - \delta_b \right) \quad (2.65)$$

$$= \frac{v_{rs}}{2} \int_0^L \frac{dx}{2\pi} : (\partial_x \phi_{rs}(x))^2 : + \frac{v_{rs}}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right) \hat{N}_{rs} \left(\hat{N}_{rs} + 1 - \delta_b \right). \quad (2.66)$$

Con esta última ecuación completamos la derivación de las identidades de bosonización, que valen para L finito. Para obtener expresiones con $L \rightarrow \infty$ basta con despreciar los términos $\sim 1/L$. En este capítulo seguimos un enfoque constructivo, de modo que no es necesario verificar los conmutadores de los campos fermiónicos o igualdad entre funciones de Green. A continuación veremos las aplicaciones del proceso de bosonización, y como se vuelve extremadamente útil para el estudio de complicadas teorías fermiónicas en una dimensión espacial.

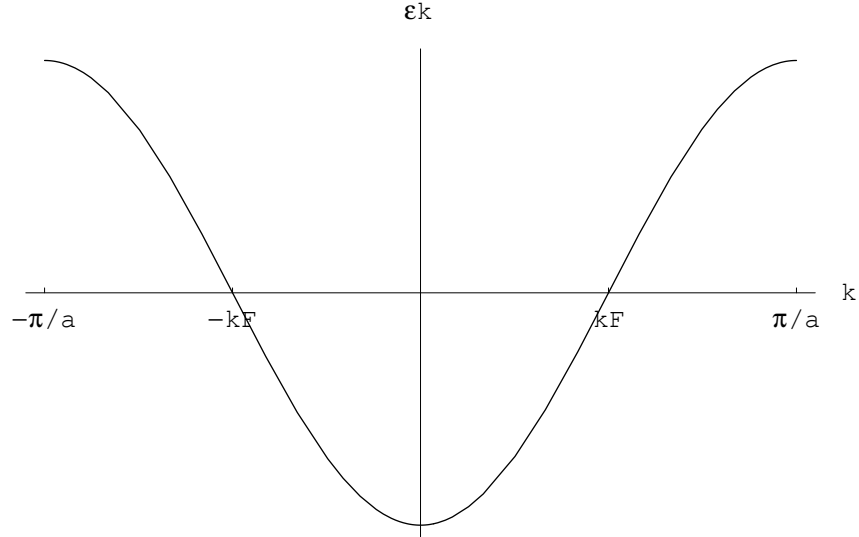


Figura 2.1: Relación de dispersión de un gas de electrones unidimensionales no interactuantes.

2.2 Aplicaciones de la bosonización: el modelo g-ology

Veremos a continuación cómo aplicar la técnica a una teoría de electrones interactuantes en una dimensión. El punto de comienzo de las teorías de muchos cuerpos en materia condensada es un Hamiltoniano de la forma $H = H_0 + H_{\text{int}}$, con

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}s}, \quad (2.67)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{ss'} f_{\mathbf{q}}^{\mathbf{k}s\mathbf{k}'s'} \hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}s}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}s'}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'s'} \hat{c}_{\mathbf{k}s}, \quad (2.68)$$

donde V es el volumen del sistema, y $\hat{c}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ y $\hat{c}_{\mathbf{k}s}$ son los operadores de creación y aniquilación de electrones, que satisfacen las relaciones de anticonmutación canónicas

$$\{\hat{c}_{\mathbf{k}s}, \hat{c}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (2.69)$$

Las cantidades $f_{\mathbf{q}}^{\mathbf{k}s\mathbf{k}'s'}$ son los llamados *parámetros de Landau*, que describen la dispersión de dos partículas desde un estado inicial con números cuánticos (\mathbf{k}, s) y (\mathbf{k}', s) a un estado final con números cuánticos $(\mathbf{k} + \mathbf{q}, s)$ y $(\mathbf{k} - \mathbf{q}, s)$. En general \mathbf{k} es el momento o pseudomomento de la partícula, s su spin y \mathbf{q} es el momento transferido. $\epsilon_{\mathbf{k}}$ es la energía cinética de los electrones medida desde el nivel de Fermi.

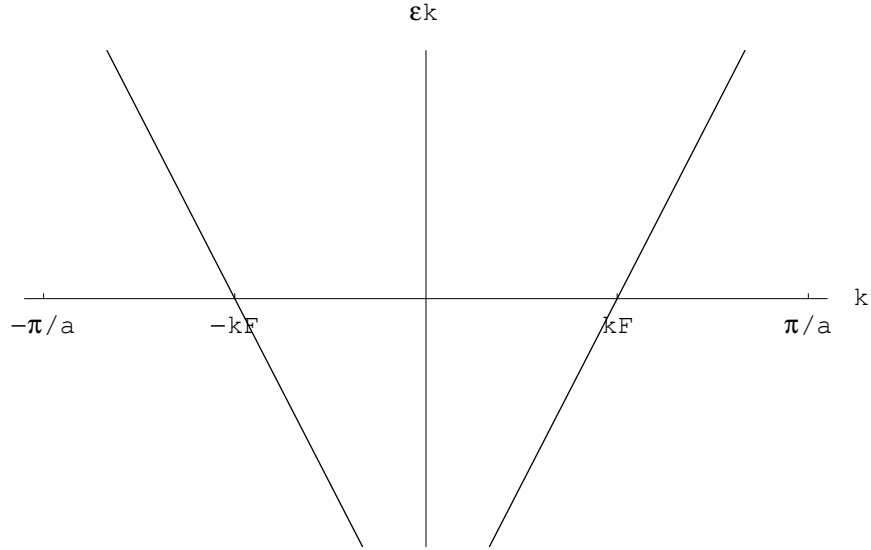


Figura 2.2: Relación de dispersión linealizada alrededor de los puntos de Fermi $\pm k_F$.

Como ya hemos comentado, en esta tesis estamos interesados principalmente en problemas de electrones en una dimensión espacial, y de aquí en más nos restringiremos a este caso. En la aproximación de electrones casi libres, o de ligadura fuerte, la energía cinética o relación de dispersión se ilustra esquemáticamente en la Fig. 2.1. En particular, en el modelo de Hubbard [48], el modelo realista más simple que puede plantearse en una dimensión, tenemos una expresión explícita para ϵ_k :

$$\epsilon_k = -2t \cos ka \quad (2.70)$$

donde t es la constante de intercambio (acoplamiento entre sitios vecinos) y a es el espaciado entre los átomos de la red.

El espectro del modelo de Hubbard puede hallarse mediante la técnica del ansatz de Bethe [49] (lo que a menudo en la literatura se denomina “resolver” el modelo). Sin embargo, esta técnica no brinda resultados para las funciones de Green. Por este motivo se vuelve necesaria la aplicación de otros métodos que permitan obtener una descripción de los tipos de fluctuaciones que tienen lugar. Una de las técnicas más utilizadas para el cálculo de funciones de correlación es la bosonización. Como se ha mostrado en las secciones previas, en su formulación más usual (operacional) este procedimiento se basa en identidades entre los operadores fermiónicos originales de la teoría y ciertos operadores bosónicos que se pueden construir a partir de los primeros. En particular, el Hamiltoniano de los diferentes modelos resulta escrito completamente en términos de fluctuaciones bosónicas. Sin embargo debemos hacer una aclaración: el modelo de Hubbard originalmente se formula en la red, mientras que la bosonización se aplica a modelos continuos. Por ello, al estudiar este modelo, en

algún punto debe tomarse dicho límite. Al hacerlo las propiedades que se derivan tienen validez para grandes distancias (ej. los decaimientos de las funciones de Green), o lo que es equivalente, para las excitaciones de baja energía.

La superficie de Fermi en un metal estrictamente unidimensional consiste en dos puntos, $+k_F$ y $-k_F$; en su vecindad podemos linealizar la relación de dispersión (2.70) [50]:

$$\epsilon_k = v_F(|k| - k_F) \quad (2.71)$$

Esta aproximación, en principio, es razonable en un rango finito alrededor de los puntos de Fermi. Sin embargo, los tratamientos matemáticos se simplifican enormemente si tomamos esta versión linealizada para todos los valores de k entre $-\infty$ y $+\infty$, es decir, si reemplazamos el espectro libre de la Fig. 2.1 por el de la Fig. 2.2. Por otro lado, de acuerdo a lo dicho más arriba, sólo estamos interesados en excitaciones de baja energía, a las que contribuyen estados próximos a la superficie de Fermi; de modo que la inclusión de los estados adicionales por efecto de la linealización es despreciable en éste régimen. Esto último se verifica a posteriori al estudiar los efectos producidos por la curvatura de banda, es decir incluyendo términos cuadráticos y cúbicos en la relación de dispersión. Se puede mostrar que las contribuciones de estos términos son irrelevantes frente a las del término lineal.

La linealización genera dos ramas bien definidas en la relación de dispersión. Los electrones que pertenecen a la rama que contiene al punto $+k_F$ ($-k_F$) se mueven hacia la derecha (izquierda), a los operadores que los representan los denotaremos $c_{(k-k_F)Rs}^\dagger$ y $c_{(k-k_F)Rs}$ ($c_{(-k-k_F)Ls}^\dagger$ y $c_{(-k-k_F)Ls}$). Este conjunto de operadores así definidos satisface los requisitos de ser un conjunto infinito y no acotado, y los identificamos inmediatamente con los descriptos en las Ecs. (2.1) y (2.2). En término de estos operadores, el Hamiltoniano libre se escribe

$$H_0 = \sum_{ks} v_F k \left(: c_{kRs}^\dagger c_{kRs} + c_{kLs}^\dagger c_{kLs} : \right) = -iv_F \sum_s \int_0^L : \left(\psi_{Rs}^\dagger \partial_x \psi_{Rs} - \psi_{Ls}^\dagger \partial_x \psi_{Ls} \right) : . \quad (2.72)$$

Para obtener la primera igualdad cambiamos $k \rightarrow -k$ en el segundo término, y posteriormente efectuamos la traslación $k \rightarrow k + k_F$. Para obtener la segunda, utilizamos la definición de los operadores de campo fermiónicos (2.3).

Los términos de interacción se pueden clasificar en cuatro tipos diferentes mostrados en la Fig. 2.3. Los electrones pertenecientes a ambas ramas se distinguen mediante líneas punteadas y sólidas. El proceso con constante de acoplamiento g_1 corresponde a dispersión hacia atrás, y posee una transferencia de momento de $2k_F$. Los procesos con constantes g_2 y g_4 son de dispersión hacia adelante, su transferencia de momento es nula. Por último el proceso con constante g_3 es de tipo umklapp, y su transferencia de momento es de $4k_F$. Este último proceso sólo es importante cuando estamos con un llenado medio, es decir, pensando en una situación del tipo del modelo de Hubbard, cuando tenemos un electrón por sitio. En ese caso, $4k_F$ es igual al vector de red recíproco.

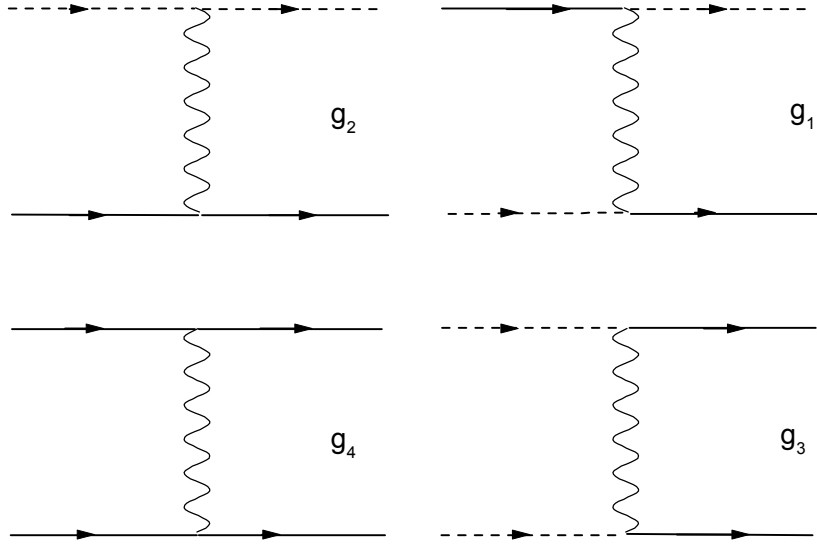


Figura 2.3: Procesos que intervienen en la dispersión del gas de electrones unidimensional: g_1 dispersión hacia atrás; g_2 y g_4 dispersión hacia adelante; g_3 umklapp.

Al introducir el spin electrónico, para cada uno de estos procesos aparecen dos variantes, de acuerdo a la orientación relativa de los electrones incidentes. Si ambos poseen spines alineados, le agregamos un subíndice \parallel a la constante de acoplamiento; en cambio, si los spines son antiparalelos, agregamos el subíndice \perp . Nótese que estos procesos no invierten el spin, es decir, el spin de las partículas finales es idéntico al de las partículas iniciales. La generalización de este modelo al caso en que las interacciones pueden cambiar el estado de spin es uno de los objetivos de esta tesis (ver Capítulo 4). Volviendo al caso presente, la expresión para el Hamiltoniano de interacción que describe estos procesos, en espacio de coordenadas es

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{int}} &= \sum_{ss'} \int_0^L dx (g_{1\parallel} \delta_{ss'} + g_{1\perp} \delta_{s,-s'}) \psi_{Ls}^\dagger \psi_{Rs} \psi_{Rs'}^\dagger \psi_{Ls'} \\
&+ \sum_{ss'} \int_0^L dx (g_{2\parallel} \delta_{ss'} + g_{2\perp} \delta_{s,-s'}) \rho_{Ls} \rho_{Rs'} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{rss'} \int_0^L dx (g_{3\parallel} \delta_{ss'} + g_{3\perp} \delta_{s,-s'}) \psi_{-rs}^\dagger \psi_{rs} \psi_{-rs'}^\dagger \psi_{rs'} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{rss'} \int_0^L dx (g_{4\parallel} \delta_{ss'} + g_{4\perp} \delta_{s,-s'}) \rho_{rs} \rho_{rs'}. \tag{2.73}
\end{aligned}$$

ρ_{rs} está definido en la Ec. (2.44). La teoría definida por las dos ecuaciones anteriores, versión continua del modelo de bajas energías de un ensemble de electrones, se conoce popularmente como modelo de “geología”, o “g-ology” [50]. La bosonización del Hamiltoniano es inmediata aplicando las identidades ya mostradas en la sección previa. Por simplicidad tomaremos $L \rightarrow \infty$, y $g_{3\parallel} = g_{1\parallel} = 0$, $g_{3\perp} = g_3$, $g_{1\perp} = g_1$. Para H_0 usamos las ecs. (2.61), (2.62) y (2.66):

$$H_0 = \frac{v_F}{2} \sum_{rs} \int \frac{dx}{2\pi} (\partial_x \phi_{rs})^2, \tag{2.74}$$

mientras que para H_{int} utilizamos (2.44)-(2.46) para los términos de dispersión hacia adelante, y (2.60) para los de dispersión hacia atrás y umklapp. El resultado es

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{int}} &= \sum_s \int dx g_1 e^{i\phi_{Ls}} e^{-i\phi_{Rs}} e^{i\phi_{R,-s}} e^{-i\phi_{L,-s}} \\
&+ \sum_{ss'} \int dx (g_{2\parallel} \delta_{ss'} + g_{2\perp} \delta_{s,-s'}) \frac{-1}{(2\pi)^2} \partial_x \phi_{Ls} \partial_x \phi_{Rs'} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{rs} \int dx g_3 e^{i\phi_{-rs}} e^{-i\phi_{rs}} e^{i\phi_{-r,-s}} e^{-i\phi_{r,-s}} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{rss'} \int dx (g_{4\parallel} \delta_{ss'} + g_{4\perp} \delta_{s,-s'}) \frac{1}{(2\pi)^2} \partial_x \phi_{rs} \partial_x \phi_{rs'}. \tag{2.75}
\end{aligned}$$

En los términos de dispersión hacia atrás y umklapp no tuvimos en cuenta los factores de Klein porque sus contribuciones pueden despreciarse en el límite $L \rightarrow \infty$ [17]. Introducimos a continuación los campos θ_ν y ϕ_ν con $\nu = \rho, \sigma$.

$$\phi_{rs} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\theta_\rho - r\phi_\rho + s(\theta_\sigma - r\phi_\sigma)]. \tag{2.76}$$

Para entender el significado físico de estos campos, estudiamos los operadores de densidad de carga y de spin, definidos del siguiente modo:

$$\hat{\rho} = \sum_{rs} \rho_{rs} \quad \hat{\sigma} = \sum_{rs} s\rho_{rs}. \quad (2.77)$$

Utilizando la equivalencia de bosonización (2.46), podemos encontrar expresiones para estos operadores en términos de los campos recientemente definidos:

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \partial_x \phi_\rho; \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \partial_x \phi_\sigma. \quad (2.78)$$

Entonces los campos ϕ_ρ y ϕ_σ están relacionados con la densidad de carga y de spin respectivamente. Más aún, utilizando los conmutadores del campo ϕ_{rs} con si mismo (2.34) y con su derivada (2.31) es posible mostrar que ϕ_ρ y θ_ρ , y sus derivadas conmutan con ϕ_σ y θ_σ y sus derivadas. Además si definimos $\Pi_\nu = \partial_x \theta_\nu$, hallamos que

$$\left[\phi_\nu(x), \Pi_\mu(x') \right] = i\delta_{\mu\nu} \delta(x - x'), \quad (2.79)$$

que constituyen las relaciones de conmutación canónicas para campos bosónicos. Introducimos además las constantes

$$g_2^\nu = \frac{1}{2} (g_{2\parallel} \pm g_{2\perp}), \quad (2.80)$$

$$g_4^\nu = \frac{1}{2} (g_{4\parallel} \pm g_{4\perp}), \quad (2.81)$$

las constantes de dureza

$$K_\nu = \sqrt{\frac{\pi v_F + g_4^\nu - g_2^\nu}{\pi v_F + g_4^\nu + g_2^\nu}}, \quad (2.82)$$

y las velocidades renormalizadas

$$v_\nu = \sqrt{(\pi v_F + g_4^\nu - g_2^\nu)(\pi v_F + g_4^\nu + g_2^\nu)}. \quad (2.83)$$

Con estas definiciones el Hamiltoniano total se escribe como $H = H_\rho + H_\sigma$, donde

$$H_\sigma = \int dx \frac{v_\sigma}{2} \left[K_\sigma (\partial_x \theta_\sigma)^2 + \frac{1}{K_\sigma} (\partial_x \phi_\sigma)^2 \right] + \frac{2g_1}{(2\pi a)^2} \cos(\sqrt{8\pi} \phi_\sigma) \quad (2.84)$$

$$H_\rho = \int dx \frac{v_\rho}{2} \left[K_\rho (\partial_x \theta_\rho)^2 + \frac{1}{K_\rho} (\partial_x \phi_\rho)^2 \right] + \frac{2g_3}{(2\pi a)^2} \cos(\sqrt{8\pi} \phi_\rho). \quad (2.85)$$

De este modo el Hamiltoniano fermiónico original queda escrito completamente en término de dos campos bosónicos ϕ_ρ y ϕ_σ que representan oscilaciones independientes de densidad

de carga y spin respectivamente, y que se propagan con velocidades diferentes. Además los campos de spin conmutan con los campos de carga, y lo mismo ocurre con los Hamiltonianos de cada sector. Estas características dan lugar a una propiedad fundamental de este tipo de modelos en una dimensión: la separación spin-carga. Por último mencionemos que las funciones de Green del sistema admiten una factorización semejante, en términos de un factor de carga y un factor de spin. Uno de los objetivos de esta tesis es analizar de qué manera este fenómeno emerge en un estudio de la teoría en el marco de la integral funcional, y cómo se manifiesta al nivel de las funciones de Green y del diagrama de fases la ruptura de la separación spin carga mediante la presencia de interacciones spin-órbita (ver Capítulo 6).

Capítulo 3

El determinante fermiónico no covariante y su relación con los líquidos de Luttinger

En este capítulo consideramos el procedimiento de bosonización en el marco de la integral funcional. Esto nos conduce naturalmente al estudio del determinante fermiónico asociado a una Teoría Cuántica de Campos no covariante, utilizada para describir un sistema no relativista en $(1 + 1)$ dimensiones. Explotando la libertad que brinda no mantener la invarianza de Lorentz, determinamos el operador regulador correspondiente al método del núcleo del calor (heat-kernel) que permite reproducir la relación de dispersión de las excitaciones bosónicas y los exponentes críticos correctos del modelo de Tomonaga-Luttinger. Además derivamos el Hamiltoniano del modelo bosonizado funcionalmente y las correspondientes corrientes. De este modo establecemos la regularización precisa mediante heat-kernel, que conduce a un completo acuerdo entre el abordaje operacional a la bosonización de modelos de materia condensada, y su alternativa mediante integrales funcionales. Estos resultados son parte de las contribuciones originales a esta tesis [41].

3.1 Introducción

Los determinantes fermiónicos juegan un rol central en las formulaciones modernas de las Teorías Cuánticas de Campos (QFT's). Como es bien sabido, emergen naturalmente al considerar funcionales generatrices asociadas a campos fermiónicos en el marco de la integral funcional [51]. En los últimos veinte años ha sido especialmente fructífero el estudio de determinantes fermiónicos en $(1 + 1)$ dimensiones. La observación de Fujikawa concerniente a la no trivialidad del jacobiano asociado a las transformaciones quirales en las variables fermiónicas [30, 52, 53] fue aplicada al caso en $(1 + 1)$ dimensiones, y condujo a avances

significativos en nuestra comprensión de los llamados *modelos de juguete* paradigmáticos, tales como la electrodinámica cuántica en dos dimensiones (QED_2), el modelo de Thirring, y sus versiones no abelianas [31, 54, 55]. De hecho, basado en un tratamiento adecuado del determinante fermiónico, se desarrolló una técnica de bosonización mediante integrales funcionales [56]. El punto crucial se encuentra en el cálculo del mencionado jacobiano. Un cálculo ingenuo arroja un resultado mal definido y se vuelve necesario implementar un procedimiento de regularización. En teorías de gauge con fermiones de Dirac, es natural considerar un esquema de regularización que preserve la invarianza de gauge. Por otro lado, cuando los campos vectoriales que se encuentran presentes en la teoría son sólo campos auxiliares (usualmente introducidos a través de una transformación de Hubbard-Stratonovich), se puede elegir un regulador más general [57, 58]. El modelo de Thirring [27] y el modelo de Schwinger quirral [59, 60] constituyen ejemplos en los que tienen lugar este tipo de ambigüedades en la regularización.

El tema de la regularización del jacobiano de Fujikawa, su relación con contratérminos locales, y su rol en el análisis de anomalías cuánticas ha sido extensivamente examinado en la literatura [61]. En todos los casos, los modelos bajo estudio son QFT's relativistas, es decir, teorías covariantes de Lorentz. Sin embargo, en ciertas situaciones relevantes, el interés recae en teorías de campos no covariantes. Es el caso del análisis de sistemas de electrones unidimensionales que pueden estudiarse mediante el modelo g-ology. En este contexto, la bosonización funcional, alternativa al enfoque operacional usual, fue sugerida por primera vez por Fogleby [33] y sucesivamente elaborada por Lee y Chen [34]. La conexión explícita entre la bosonización funcional que condujo a una acción efectiva para la dinámica de las excitaciones bosónicas colectivas y el jacobiano de Fujikawa fue establecida por primera vez en la Ref. 35. Pero aún en este caso se empleó una regularización covariante, tomada de la teoría de campos relativista. Como resultado las expresiones generales para las relaciones de dispersión de los modos bosónicos y los exponentes de decaimiento de las funciones de correlación en términos de las constantes de acoplamiento iniciales del modelo fermiónico no acordaron con las obtenidas mediante bosonización operacional usual. En este capítulo mostramos que el origen de este desacuerdo se encuentra en el tipo de regularización escogido para calcular el jacobiano de Fujikawa. Dado que se viola la invarianza de Lorentz subyacente, parecen posibles un número arbitrario de esquemas de regularización. Sólo uno de ellos conduce al resultado usual para los modelos g-ology y Tomonaga-Luttinger. En este punto quisiéramos enfatizar que no fuimos capaces de hallar un principio físico que sirviese de guía para elegir a priori entre diferentes esquemas de regularización, al estilo del principio de preservación a nivel cuántico de simetrías que se hallan en la teoría bajo estudio a nivel clásico, como lo son las ya mencionadas simetrías de gauge o de Lorentz. Sin embargo, hasta donde sabemos, tal principio tampoco ha sido identificado en el marco de la bosonización operacional de teorías de materia condensada. Por supuesto, este es un aspecto importante que merece futuras investigaciones.

El plan de este capítulo es el siguiente. En la sección 3.2 presentamos el modelo y expresamos su funcional generatriz en términos de un determinante fermiónico. En la sección

3.3, con el objeto de clarificar la discusión comenzamos con un trazado de los pasos principales del enfoque desacoplante a la bosonización, y los resultados que se obtienen al emplear una regularización estándar invariante de Lorentz. Aquí incluimos dos subsecciones donde presentamos dos tipos de regularización diferentes: el método point-splitting, y el método heat-kernel. En este último caso determinamos la forma precisa del operador necesario para obtener la respuesta correcta para las relaciones de dispersión y los exponentes. En la sección 3.4 mostramos como derivar, en nuestro marco de bosonización funcional, el Hamiltoniano bosónico y las correspondientes corrientes bosonizadas. Finalmente discutimos brevemente la conservación de la corriente. En la sección 3.5 reunimos los resultados y las conclusiones.

3.2 El modelo y el determinante fermiónico

Consideraremos una versión no covariante del modelo de Thirring definido por el Lagrangiano euclídeo

$$\mathbb{L} = \bar{\psi}i\partial\psi - \frac{g^2}{2}V_{(\mu)}j_{\mu}j_{\mu}, \quad (3.1)$$

donde V_0 and V_1 son las constantes de acoplamiento y las derivadas están redefinidas para incluir a la velocidad de Fermi:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \quad (3.2)$$

$$\partial_1 = v_F \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (3.3)$$

Nótese que v_F juega el rol de la velocidad de la luz en QFT que usualmente se toma unitaria. Para $v_F = 1$ y $V_0 = V_1 = 1$ tenemos el modelo de Thirring usual (la constante g^2 se incluye para facilitar la comparación con los resultados invariantes de Lorentz). La corriente fermiónica se define como

$$j_{\mu} = \bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi, \quad (3.4)$$

la cual satisface la ley de conservación clásica

$$\partial_{\mu}j_{\mu} = 0. \quad (3.5)$$

La funcional generatriz es

$$\mathcal{Z}[S] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[- \int d^2x (\mathbb{L} + j_{\mu}S_{\mu}) \right]. \quad (3.6)$$

Por medio de una transformación de Hubbard-Stratonovich, puede ser escrita en la forma

$$\mathcal{Z}[S] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \det \mathcal{D}[A] \exp \left[-\frac{1}{2g^2} \int d^2x d^2y V_{(\mu)}^{-1}(x-y)(gA_\mu - S_\mu)(x)(gA_\mu - S_\mu)(y) \right], \quad (3.7)$$

donde

$$\mathcal{D}[A] = i\partial + g\mathcal{A}, \quad (3.8)$$

y

$$\det \mathcal{D}[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[-\int d^2x \bar{\psi} \mathcal{D}[A] \psi \right]. \quad (3.9)$$

3.3 Enfoque desacoplante de la bosonización

Habiendo expresado la funcional generatriz en términos de un determinante fermiónico, trazaremos ahora un esquema del método desacoplante, que se encuentra en la base del enfoque funcional de la bosonización [31, 54–56]. En $(1+1)$ dimensiones espacio-temporales, el campo vectorial A_μ puede descomponerse en sus partes transversal y longitudinal del siguiente modo:

$$A_\mu = -(1/g)(\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi - \partial_\mu \eta), \quad (3.10)$$

donde η (ϕ) es un campo escalar (pseudoescalar). Notemos que si realizamos la siguiente transformación en los campos fermiónicos

$$\psi = e^{t[\gamma_5 \phi + i\eta]} \chi \quad (3.11)$$

$$\bar{\psi} = e^{t[\gamma_5 \phi - i\eta]} \bar{\chi}, \quad (3.12)$$

con t un parámetro real, entonces la densidad lagrangiana fermiónica cambia como

$$\bar{\psi} \mathcal{D}[A] \psi = \bar{\chi} \mathcal{D}_t[A] \chi \quad (3.13)$$

donde

$$\mathcal{D}_t[A] = \mathcal{D}[(1-t)A]. \quad (3.14)$$

Como fue observado por primera vez por Fujikawa [30], el jacobiano asociado al mencionado cambio en las variables fermiónicas es no trivial, y depende de los campos ϕ y η :

$$\det(i\partial + g\mathcal{A}) = J[\phi, \eta; t] \det(i\partial + g(1-t)\mathcal{A}). \quad (3.15)$$

Debe notarse que para $t = 1$ los grados de libertad bosónicos y fermiónicos se desacoplan completamente. Puede mostrarse que

$$J[\phi, \eta; 1] \equiv J = \exp \left[- \int_0^1 \omega(t) dt \right] \quad (3.16)$$

con

$$\omega(t) = - \text{tr} \mathcal{D}_t[A]^{-1} g \mathcal{A} = - \lim_{y \rightarrow x} \text{tr}^D \int d^2x \mathcal{D}_t[A]^{-1}(x, y) g \mathcal{A}(x), \quad (3.17)$$

donde tr^D indica la operación de traza en el espacio de Dirac. Todas estas fórmulas guardan una gran analogía con las correspondientes a una QFT covariante. Más aún, la única diferencia entre ellas es la presencia de v_F en lugar de la velocidad de la luz, aunque esto tiene consecuencias no triviales. La última ecuación debe ser regularizada, de otro modo aparecen divergencias, como es obvio al tomar el límite $y \rightarrow x$. En QFT, cualquier regularización aceptable tiene que ser invariante de Lorentz. En el presente caso, no tenemos esa limitación por dos razones: i) la invarianza de Lorentz está rota desde el principio dado que estamos en una teoría no relativista; ii) Hay una covarianza remanente: la teoría sin interacciones es invariante con respecto al grupo de Lorentz, donde la velocidad de la luz se ha reemplazado por la de Fermi, pero ésta es una simetría artificial, y no existe razón para respetarla. Más aún, al tomar $V_0 \neq V_1$ ($g_2 \neq g_4$) queda explícitamente rota. Antes de utilizar la libertad que proviene de la ausencia de covarianza, sería instructivo rever los resultados obtenidos previamente eligiendo una regularización invariante de Lorentz [35]. Utilizando un regulador de la forma

$$(\mathcal{D}_t[A] \mathcal{D}_t[A]^\dagger + \mathcal{D}_t[A]^\dagger \mathcal{D}_t[A]) / 2, \quad (3.18)$$

que fue propuesto por primera vez por Fujikawa en su análisis de las anomalías covariante y consistente [61], se obtiene

$$J_{\text{cov}} = \exp \left\{ - \frac{a}{2\pi v_F} \int d^2x [(\partial_1 \phi)^2 + (\partial_0 \phi)^2] \right\}, \quad (3.19)$$

donde a es un parámetro vinculado a posibles ambigüedades en la regularización. Para $a = 1$ se obtiene una regularización invariante de gauge. Aunque el modelo de Thirring no posee invarianza de gauge local, en el presente contexto estamos interesados fundamentalmente en la invarianza de Lorentz y podemos fijar $a = 1$ sin perder generalidad. Insertando el jacobiano anterior en la funcional generatriz, absorbiendo el determinante fermiónico libre, lo que resulta del procedimiento de desacople en un factor de normalización, y expresando A_μ en términos de ϕ y η según la Ec. (3.10), se obtiene una acción bosonizada. En el contexto de la materia condensada estos grados de libertad bosónicos se interpretan como campos asociados a oscilaciones de densidad de carga. De esta acción bosónica derivada a través

de una regularización que preserve la covarianza se puede fácilmente calcular la relación de dispersión correspondiente

$$p_0^2 + v_{\text{cov}}^2 p_1^2 = 0 \quad (3.20)$$

donde

$$v_{\text{cov}}^2 = v_{\text{F}}^2 \frac{\left(v_{\text{F}} + \frac{g^2 V_0}{\pi}\right)}{\left(v_{\text{F}} + \frac{g^2 V_1}{\pi}\right)}. \quad (3.21)$$

Debemos enfatizar aquí, que sólo para $V_1 = 0$ esta velocidad, llamada velocidad renormalizada, acuerda con el valor obtenido usando bosonización operacional en materia condensada, que es

$$v^2 = \left(v_{\text{F}} - \frac{V_1 g^2}{\pi}\right) \left(v_{\text{F}} + \frac{V_0 g^2}{\pi}\right). \quad (3.22)$$

A continuación describiremos dos métodos diferentes para regularizar el jacobiano, que no preservan la invarianza de Lorentz y que permiten obtener la acción bosónica efectiva que conduce a la respuesta correcta para las relaciones de dispersión.

3.3.1 Método Point-splitting

Como es bien sabido, el método de regularización point-splitting rompe la invarianza de Lorentz explícitamente. Consiste en una prescripción para tomar el límite $y \rightarrow x$ antes mencionado al definir

$$\lim_{y \rightarrow x} \mathcal{D}_t[A]^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \right) \mathcal{D}_t[A]^{-1}(x_0, x_1; x_0, x_1 + \epsilon), \quad (3.23)$$

es decir, tomando un límite simétrico en la variable espacial. Necesitamos entonces la función de Green del operador de Dirac, que satisface

$$\mathcal{D}_t[A]_x \mathcal{D}_t[A]^{-1}(x, y) = \delta^2(x - y) \quad (3.24)$$

Como es usual, proponemos el ansatz

$$\mathcal{D}_t[A]^{-1}(x, y) = e^{(1-t)[\gamma_5 \phi(x) + i\eta(x)]} G_0(x, y) e^{(1-t)[\gamma_5 \phi(y) - i\eta(y)]}, \quad (3.25)$$

donde G_0 es la función de Green del operador de Dirac libre:

$$i\partial_x G_0(x, y) = \delta^2(x - y). \quad (3.26)$$

Con esta receta, hallamos el siguiente resultado para la ecuación (3.23):

$$\lim_{y \rightarrow x} \mathcal{D}_t[A]^{-1}(x, y) = -\frac{i}{2\pi v_F}(1-t) \gamma_1 \partial_1 [\gamma_5 \phi(x) - i\eta(x)] \quad (3.27)$$

y entonces, el Jacobiano (Ecs. (3.16) y (3.17)) está dado por

$$J = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi v_F} \int d^2x [(\partial_1 \phi)^2 - (\partial_1 \eta)^2 - 2\partial_1 \phi \partial_0 \eta] \right\}. \quad (3.28)$$

La funcional de vacío puede entonces escribirse como

$$\mathcal{Z}[S=0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\eta e^{-S_{\text{ef}}} \quad (3.29)$$

donde \mathcal{N} es un factor de normalización que incluye el determinante fermiónico libre (independiente de las interacciones). También hemos definido S_{ef} , que en el espacio de momentos toma la forma

$$S_{\text{ef}} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} [\phi(p)A\phi(-p) + \eta(p)B\eta(-p) + 2\phi(p)C\eta(-p)]. \quad (3.30)$$

con

$$A = v_F^2 p_1^2 \left(\frac{1}{2g^2 V_0} + \frac{1}{2\pi v_F} \right) + \frac{p_0^2}{2g^2 V_1} \quad (3.31)$$

$$B = v_F^2 p_1^2 \left(\frac{1}{2g^2 V_1} - \frac{1}{2\pi v_F} \right) + \frac{p_0^2}{2g^2 V_0} \quad (3.32)$$

$$C = p_1 p_0 v_F \left(\frac{1}{2g^2 V_1} - \frac{1}{2g^2 V_0} - \frac{1}{2\pi v_F} \right) \quad (3.33)$$

El contenido físico del modelo puede extraerse de S_{ef} que describe la dinámica de los modos colectivos del sistema. Cuando el modelo fermiónico original está relacionado al modelo de Tomonaga-Luttinger utilizado para el estudio de sistemas electrónicos en una dimensión [17,40,62,63], estas excitaciones colectivas corresponden a oscilaciones de densidad de carga (plasmones). Su relación de dispersión puede obtenerse de los ceros del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

El resultado es

$$p_0^2 + v^2 p_1^2 = 0 \quad (3.35)$$

donde v es la velocidad renormalizada de los modos de densidad de carga dada por la Ec. (3.22).

3.3.2 Método Heat-kernel

Otro modo popular de tratar la regularización de los determinantes fermiónicos es el método heat-kernel [30,64]. En este esquema J se regula insertando un operador de la forma e^{-R/M^2} , R es un operador definido positivo, y M es un parámetro que juega el rol de una masa, y que se deja fijo en los cálculos intermedios. El límite $M^2 \rightarrow \infty$ se toma al final. De nuevo, debemos mencionar que en contextos de QFT estandar el operador R puede elegirse entre aquellos compatibles con la invarianza de Lorentz (dejemos de lado, por el momento, otras posibles simetrías), por ejemplo $R = \mathcal{D}_t[A]^2$. Aquí no tenemos esa limitación, y nuestro objetivo es hallar la forma precisa de R que conduce a una acción efectiva que contenga las relaciones de dispersión deseadas.

Comenzamos por reescribir la ecuación (3.17) como

$$\omega(t) = \text{tr} \left\{ \mathcal{D}_t[A]^{-1} [(\gamma_5 \phi - i\eta) \mathcal{D}_t[A] + \mathcal{D}_t[A] (\gamma_5 \phi + i\eta)] \right\}. \quad (3.36)$$

La operación de traza está mal definida, y necesita ser regularizada. Definimos nuestra ω regularizada como

$$\omega(t)_R = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left\{ \mathcal{D}_t[A]^{-1} [(\gamma_5 \phi - i\eta) \mathcal{D}_t[A] + \mathcal{D}_t[A] (\gamma_5 \phi + i\eta)] e^{-R/M^2} \right\}. \quad (3.37)$$

La elección de R siempre se encuentra dictada por consideraciones físicas, por ejemplo, si consideramos una teoría de gauge, debemos tener en cuenta regularizaciones que no destruyan la invarianza de gauge a nivel cuántico. Esto es usualmente realizado tomando $R = \mathcal{D}_t[A]^2$, donde A_μ es un campo de gauge. Aquí el modelo bajo estudio no es una teoría de gauge y por lo tanto tenemos más libertad de elegir el regulador. Emplearemos un operador de la forma $R = \mathcal{D}_t[B]^2$, donde B_μ es un cierto campo vectorial a ser determinado. Podemos escribir $\omega(t)_R$ como $\omega(t)_R = \omega_0(t) + \omega_{\text{nc}}(t)$ donde

$$\omega_0(t) = \text{tr} \left(2\gamma_5 \phi e^{-R/M^2} \right) \quad (3.38)$$

$$\omega_{\text{nc}}(t) = \text{tr} \left\{ \mathcal{D}_t[A]^{-1} (\gamma_5 \phi - i\eta) \left[\mathcal{D}_t[A], e^{-R/M^2} \right] \right\}. \quad (3.39)$$

Aquí el subíndice 0 indica el término que habríamos obtenido si hubiéramos empleado la propiedad cíclica de la traza en la ecuación (3.36). El subíndice nc se refiere a un término “no cíclico” (esta cuestión se discute en detalle en la Ref. 58). Las expresiones finales para estos dos términos son

$$\omega_0(t) = -(1-t) \frac{g}{\pi} \int d^2x \phi \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu \quad (3.40)$$

$$\omega_{\text{nc}}(t) = -(1-t) \frac{g}{2\pi} \int d^2x \partial_\mu (B_\nu - A_\nu) (\epsilon_{\nu\mu} \phi + \delta_{\nu\mu} \eta). \quad (3.41)$$

En este punto, un cálculo directo nos permite comprobar que tomando

$$B_0 = A_0 \tag{3.42}$$

$$B_1 = -A_1, \tag{3.43}$$

se arriba al mismo resultado obtenido en la subsección previa Ecs. (3.28)-(3.34)). De este modo, hemos hallado una forma explícita para el operador que regula el jacobiano asociado a un determinante fermiónico no covariante. A su vez, esta forma conduce a las relaciones de dispersión correctas para el modelo de Tomonaga-Luttinger. La derivación de este jacobiano, y del operador regulador era una de las principales motivaciones de este capítulo, y constituye uno de los aportes originales de esta tesis.

3.4 El Hamiltoniano bosonizado y las corrientes

Hasta este punto hemos trabajado en la formulación lagrangiana. Sin embargo en aplicaciones de materia condensada, el marco Hamiltoniano es usualmente el preferido. Es deseable entonces mostrar la derivación del Hamiltoniano usual para sistemas electrónicos unidimensionales en el marco de la bosonización funcional discutido en este capítulo, es decir, la forma bosónica del modelo de Tomonaga-Luttinger [17, 40, 62, 63]. El otro punto que tratamos en esta sección es la forma bosónica de las corrientes fermiónicas originales (densidad de carga y corriente eléctrica), y sus leyes de conservación.

Teniendo en cuenta la expresión para $\det \mathcal{D}[A]$ calculada en las secciones precedentes, y la relación entre los campos ϕ y η y el campo A_μ (Ec.(3.10)), podemos expresar la funcional generatriz (3.7) en términos del campo A_μ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[S] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y A_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) \right) \times \\ \exp \left(-\frac{1}{2g^2} \int d^2x d^2y S_\mu(x) V_{(\mu)}^{-1}(x-y) S_\mu(y) \right) \exp \left(-\frac{1}{g} \int d^2x d^2y A_\mu(x) V_{(\mu)}^{-1}(x-y) S_\mu(y) \right), \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde $D_{\mu\nu}$ está dado en el espacio de Fourier por

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{g^2}{\pi(p_0^2 + v_F^2 p_1^2)} \begin{pmatrix} v_F p_1^2 & p_0 p_1 \\ p_0 p_1 & -v_F p_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{v_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_1} \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

El campo A_μ se desacopla de la fuente S_μ a través del procedimiento usual de efectuar la traslación

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{D_{\mu\nu}^{-1} S_\nu}{gV_{(\nu)}}, \tag{3.46}$$

obteniendo

$$\mathcal{Z}[S] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y A_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) \right) \times \exp \left[\frac{1}{2} \int d^2x d^2y S_\mu(x) \Delta_{\mu\nu}^{-1}(x-y) S_\nu(y) \right], \quad (3.47)$$

con $\Delta_{\mu\nu}^{-1}$ y la constante de dureza K dados por (en el espacio de Fourier)

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = \frac{1}{\pi(p_0^2 + v^2 p_1^2)} \begin{pmatrix} -K v p_1^2 & p_0 p_1 \\ p_0 p_1 & \frac{v}{K} p_1^2 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

$$K = \sqrt{\frac{v_F - g^2 V_1 / \pi}{v_F + g^2 V_0 / \pi}}. \quad (3.49)$$

Esta constante gobierna los exponentes del decaimiento de las funciones de correlación. A continuación podemos multiplicar y dividir por

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y A_\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) \right), \quad (3.50)$$

y efectuar una traslación adicional en el campo A_μ

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \Delta_{\mu\nu}^{-1} S_\nu, \quad (3.51)$$

para obtener

$$\mathcal{Z}[S] = \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y A_\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) + \int d^2x S_\mu(x) A_\mu(x) \right). \quad (3.52)$$

Finalmente, definiendo los campos φ y θ del siguiente modo:

$$A_0 = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \varphi \quad (3.53)$$

$$A_1 = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \partial_x \theta, \quad (3.54)$$

llegamos a la funcional generatriz

$$\mathcal{Z}[S] = \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\theta \exp \left(-\frac{1}{2} \int dx d\tau \left[\frac{v}{K} (\partial_x \varphi)^2 + vK (\partial_x \theta)^2 + 2i \partial_x \theta \partial_\tau \varphi \right] \right) \times \exp \left(\int dx d\tau \left[-S_0 \partial_x \varphi / \sqrt{\pi} + i S_1 \partial_x \theta / \sqrt{\pi} \right] \right). \quad (3.55)$$

Naturalmente identificamos entonces el campo φ con el modo de densidad de carga del sistema y $\Pi = \partial_x \theta$ como su campo canónico conjugado. Más aún, los primeros dos términos en la acción cuadrática de la expresión previa pueden ser identificados con el Hamiltoniano del sistema:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int dx \left[\frac{v}{K} (\partial_x \varphi)^2 + vK (\partial_x \theta)^2 \right], \quad (3.56)$$

el cual coincide exactamente con el Hamiltoniano obtenido utilizando bosonización operacional estandar [17, 40, 62, 63]. Ahora, por derivación funcional obtenemos la forma bosónica de las corrientes

$$j_0 = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \varphi \quad (3.57)$$

$$j_1 = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \Pi, \quad (3.58)$$

que son idénticas, por supuesto, a las halladas en el enfoque operacional. Es importante enfatizar que estas corrientes no obedecen la ecuación de continuidad. Siguiendo la Ref. [65], se introduce una corriente eléctrica física j , que es en general diferente de j_1 . La densidad de carga es identificada con j_0 ($j_0 = \rho$). La corriente física se determina al imponer la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (3.59)$$

Obtenemos

$$j = \frac{i}{\sqrt{\pi}} v K \Pi. \quad (3.60)$$

Nótese que sólo para $V_1 = 0$ ($g_2 = g_4$ en el lenguaje de Tomonaga-Luttinger) se llega a $vK = 1$ y $j = j_1$.

3.5 Conclusiones

En este capítulo consideramos un determinante fermiónico asociado a teorías cuánticas de campos no covariantes. En particular estudiamos el determinante que aparece al implementar la bosonización mediante integrales funcionales basada en el desacople del determinante fermiónico a través de cambios apropiados en las variables de integración. El modelo analizado (una versión no covariante del modelo de Thirring) se ha utilizado previamente para describir sistemas de electrones altamente correlacionados en una dimensión (líquidos de Luttinger).

En el contexto del método de regularización del núcleo del calor, explotando la libertad originada en la no covarianza, determinamos el operador que actúa como regulador y que da lugar a una acción bosónica, a una relación de dispersión, y a un decaimiento de funciones de correlación correctos en términos de las constantes de acoplamiento, es decir, en completo acuerdo con aquellas que se obtienen, y son bien conocidas en el marco operacional. Cálculos previos mediante integrales funcionales habían hecho uso de reguladores covariantes tomados de teorías de campos relativistas, y daban un espectro y exponentes correctos sólo para valores particulares de las constantes de acoplamiento.

Finalmente mostramos como derivar el Hamiltoniano bosonizado y las corrientes, que coinciden con los obtenidos mediante bosonización operacional estandar. De este modo fuimos capaces de establecer el regulador heat-kernel que brinda completo acuerdo entre los enfoques operacionales y mediante integrales funcionales de la bosonización del modelo de Tomonaga-Luttinger.

Capítulo 4

Interacciones de inversión de spin en el modelo de Thirring no local

Extendemos una versión no local y no covariante del modelo de Thirring con el objeto de describir sistemas de muchos cuerpos que poseen interacciones de inversión de spin. Introduciendo un modelo con dos especies de fermiones evitamos el uso de bosonización no abeliana, necesario en un enfoque previo. Obtenemos una expresión bosonizada para la función de partición, que describe la dinámica de los modos colectivos del sistema. Los resultados de este capítulo constituyen un aporte original de esta tesis [42].

4.1 Introducción

En el capítulo anterior estudiamos el modelo de Tomonaga-Luttinger mediante bosonización funcional. Como ya se ha mencionado éste es un modelo en el que se desprecia el spin electrónico y que sólo contempla interacciones de dispersión hacia adelante, que poseen momento transferido nulo; sus características más notables son la existencia de funciones de correlación no analíticas y no universales, y de una singularidad algebraica en la distribución de momentos sobre la superficie de Fermi; los modos colectivos bosónicos resultantes poseen una relación de dispersión sin gap [17, 40, 62], de modo que una cantidad arbitrariamente pequeña de energía es capaz de producir excitaciones a partir del estado fundamental. Sin embargo, en situaciones más realistas se deben tener en cuenta el spin electrónico y procesos de dispersión electrónica más complejos como dispersión hacia atrás y umklapp. En estos procesos el momento transferido es $2k_F$ y $4k_F$ respectivamente. Estos problemas han sido tratados en el contexto de la bosonización operacional usual en el capítulo 2, siguiendo las referencias [17, 39]. La inclusión del spin electrónico da lugar a la separación spin-carga, y los nuevos términos de dispersión hacia atrás y umklapp generan gaps en los espectros de ambos sectores respectivamente, y por supuesto cambian los decaimientos algebraicos de las funciones de correlación por decaimientos exponenciales.

En trabajos recientes [35, 66, 67] se trataron estos modelos más realistas mediante el enfoque de la teoría de campos y la bosonización funcional. Se introdujo una versión no local y no covariante del modelo de Thirring en el que las densidades y corrientes fermiónicas se acoplan mediante potenciales bilocales generales, y una generalización a un modelo de Gross-Neveu $SU(N)$ no local con $N=2$ para tener en cuenta el spin electrónico. Estos modelos contienen al modelo de TL como caso particular (para $N=1$). Aunque constituyen un marco elegante para tratar problemas de muchos cuerpos en 1D, presentan dos inconvenientes: i) la técnica de bosonización funcional empleada descansa en la regularización del jacobiano tomada de la teoría de campos covariante, con las consiguientes diferencias halladas con las Ref. 17, 40, 62 mencionadas en el capítulo anterior, y ii) la descripción de los modelos con simetría $SU(N)$ se realizó mediante bosonización no abeliana, lo que resulta poco práctico para el análisis final.

En el presente capítulo salvamos estos problemas introduciendo un modelo de tipo Thirring con dos especies de fermiones, generalizando el modelo de dos fermiones de la Ref. 68, construido originalmente como una teoría local y covariante, al caso en que las interacciones entre corrientes fermiónicas se hallan mediadas por funciones bilocales. Este modelo no incluye interacciones de tipo umklapp. Sólo posee interacciones de tipo inversión de spin (IS), que en el caso local se reducen a las de dispersión hacia atrás. Adicionalmente utilizamos la técnica de bosonización abeliana en materia condensada, tal como se la formuló en el capítulo anterior.

El resultado final puede considerarse una extensión del trabajo de Grinstein, Minnhagen y Rosengren [69] donde se estudió una versión simplificada del problema de inversión de spin (contenido en nuestro modelo). Extendiendo formulaciones previas de modelos masivos [28, 32, 70], nuestro procedimiento permite obtener una funcional de vacío bosonizada. El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 4.2 introducimos el mencionado modelo no local de dos fermiones y explicamos su relación con la descripción no abeliana previa. En la sección 4.3 establecemos la equivalencia entre la función de partición fermiónica inicial y la que corresponde a una extensión no local de dos bosones del modelo seno-Gordon. Finalmente, en la sección 4.4 reunimos los puntos principales de nuestras investigaciones.

4.2 El modelo y su relación con una descripción no abeliana previa.

En esta sección introducimos una versión no local del modelo de Thirring que incorpora el spin electrónico considerando dos especies de fermiones, donde cada especie representa un estado de spin. La acción euclídea inicial es

$$S = \int d^2x \bar{\Psi}^a i \not{\partial} \Psi^a - \frac{g^2}{2} \int d^2x d^2y j_\mu^a(x) V_{(\mu)}^{ab}(x-y) j_\mu^b(y) - g_s \int d^2x d^2y \bar{\Psi}^1(x) \gamma_\mu \Psi^2(x) U_{(\mu)}(x-y) \bar{\Psi}^2(y) \gamma_\mu \Psi^1(y) \quad (4.1)$$

donde $a, b = 1, 2$, con $1 = \uparrow, 2 = \downarrow$, las corrientes j_μ^a son las corrientes fermiónicas usuales

$$j_\mu^1 = \bar{\Psi}^1 \gamma_\mu \Psi^1, \quad j_\mu^2 = \bar{\Psi}^2 \gamma_\mu \Psi^2, \quad (4.2)$$

y las matrices $V_{(\mu)}^{ab}$ tienen la forma

$$V_{(\mu)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_{(\mu)}^\rho + V_{(\mu)}^\sigma & V_{(\mu)}^\rho - V_{(\mu)}^\sigma \\ V_{(\mu)}^\rho - V_{(\mu)}^\sigma & V_{(\mu)}^\rho + V_{(\mu)}^\sigma \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde $V_{(\mu)}^\rho$ y $V_{(\mu)}^\sigma$ son los potenciales de acoplamiento relacionados a las constantes g_2 y g_4 de dispersión hacia adelante de Solyom [50]. Estas funciones se vinculan a interacciones del tipo corriente-corriente que no invierten el spin. Las funciones $U_{(\mu)}(x-y)$ son los acoplamientos que gobiernan los procesos que cambian el estado del spin electrónico. Hemos dejado las constantes g y g_s para facilitar la comparación con versiones locales del modelo. Por ejemplo, el caso $g_s = 0$ y $V_{(\mu)}^\rho = V_{(\mu)}^\sigma = \delta^2(x-y)$ corresponde a dos modelos de Thirring usuales desacoplados. La acción (4.1) tiene simetría quiral $U(1)$ manifiesta, es decir, es invariante bajo la transformación $\Psi^a \rightarrow e^{i\gamma_5\theta} \Psi^a$, $\bar{\Psi}^a \rightarrow \bar{\Psi}^a e^{i\gamma_5\theta}$. La conservación del spin fermiónico también se preserva en esta teoría.

La teoría definida más arriba es similar a la descrita por Zinn-Justin(ZJ) [68]. Existen, sin embargo dos diferencias importantes. En primer lugar nuestro modelo tiene en cuenta la posible naturaleza de largo alcance de los potenciales, mientras que el modelo de ZJ es local. Por otro lado, el modelo de ZJ no incluye términos del tipo g_4 asociados a procesos de dispersión fermiónica que involucran sólo una rama (derecha o izquierda), ni para diagramas de IS ni para diagramas ordinarios.

En lo concerniente a la relación entre nuestra acción y modelos previos inspirados en materia condensada, debemos mencionar los primeros trabajos de Luther y Emery [71], y Grinstein, Minnhagen y Rosengren [69]. Los primeros introdujeron el llamado modelo de dispersión hacia atrás. Aunque este sistema, en principio, no posee IS, en el límite local que ellos consideraron, los diagramas de dispersión hacia atrás coinciden con aquellos que cambian el spin. Grinstein y col. incluyeron desde el comienzo interacciones de tipo IS teniendo en cuenta un potencial coulombiano. Aunque dicho modelo es no local, considera el mismo potencial para todas las clases de diagramas (IS y los ordinarios). Por otro lado, con el objeto de establecer una relación entre su teoría y un sistema de tipo gas de Coulomb, los autores consideraron de nuevo el límite local. Y, nuevamente, no incluyeron términos de tipo g_4 .

Mostremos ahora que la acción(4.1) puede escribirse de un modo alternativo. Consideremos las corrientes $U(N)$

$$J_\mu^\alpha = \bar{\Psi} \gamma_\mu \lambda^\alpha \Psi \quad (4.4)$$

con

$$\lambda^0 = \frac{1}{2} I \quad (4.5)$$

$$\lambda^j = t^j, \quad (4.6)$$

siendo t^j los generadores de $SU(N)$ normalizados de acuerdo a

$$\text{tr } t^i t^j = \frac{1}{2} \delta^{ij}. \quad (4.7)$$

Con estas corrientes, podemos definir un modelo de Gross-Neveu, invariante quiral y no local, con una acción dada por

$$S = \int d^2x \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - \int d^2x d^2y J_\mu^\alpha(x) \mathcal{V}_{(\mu)}^{\alpha\beta}(x-y) J_\mu^\beta(y), \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, N^2 - 1 \quad (4.8)$$

donde $\mathcal{V}_{(\mu)}$ son $N^2 \times N^2$ matrices simétricas que pesan la interacción . Tomando $N = 2$, las acciones (4.1) y (4.8) son iguales si las matrices $\mathcal{V}_{(\mu)}$ se escriben como

$$\mathcal{V}_{(\mu)} = \begin{pmatrix} g^2 V_{(\mu)}^\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_s U_{(\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_s U_{(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^2 V_{(\mu)}^\sigma \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Este modelo no abeliano fue considerado en la Ref. 35. La acción efectiva bosonizada obtenida mediante bosonización no abeliana dio lugar a una funcional de Wess-Zumino-Witten (WZW), que resulta difícil de tratar a la hora de obtener el espectro físico. En la próxima sección mostramos como esta tarea se ve simplificada comenzando por (4.1) en lugar de (4.8) y combinando bosonización *abeliana* en el marco de la integral funcional y la aproximación armónica autoconsistente.

4.3 La acción bosónica equivalente

Comenzamos considerando la función de partición

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\Psi}^a \mathcal{D}\Psi^a e^{-S}, \quad (4.10)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización. Es conveniente escribir

$$S = S_0 + S_{\text{flip}}, \quad (4.11)$$

donde

$$S_0 = \int d^2x \bar{\Psi}^a i \not{\partial} \Psi^a - \frac{g^2}{2} \int d^2x d^2y j_\mu^a(x) V_{(\mu)}^{ab}(x-y) j_\mu^b(y) \quad (4.12)$$

y

$$S_{\text{flip}} = -g_s \int d^2x d^2y \bar{\Psi}^1(x) \gamma_\mu \Psi^2(x) U_{(\mu)}(x-y) \bar{\Psi}^2(y) \gamma_\mu \Psi^1(y). \quad (4.13)$$

La razón para esta separación se halla en el hecho de que S_0 contiene todos los términos de interacción que poseen invarianza quiral separada para cada especie fermiónica (estados de spin). Son interacciones de tipo Thirring, es decir que se transforman en términos libres de la acción. El segundo término no posee invarianza quiral separada, y será expandido en una serie perturbativa, en analogía con lo hecho con el término de masa en la bosonización funcional del modelo de Thirring masivo [32].

De igual forma que en el capítulo anterior, la introducción de campos vectoriales auxiliares A_μ^a mediante la transformación de Hubbard-Stratonovich permite escribir

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\bar{\Psi}^a \mathcal{D}\Psi^a \mathcal{D}A_\mu^a \exp \left[- \int d^2x \bar{\Psi}^a (i \not{\partial} + g A^a) \Psi^a - S[A] - S_{\text{flip}} \right], \quad (4.14)$$

donde \mathcal{N}' es una nueva constante de normalización que incluye al determinante fermiónico libre, y

$$S[A] = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \left(V_{(\mu)}^{-1} \right)^{ab} (x-y) A_\mu^a(x) A_\mu^b(y), \quad (4.15)$$

con $\left(V_{(\mu)}^{-1} \right)^{ab}$ definido a través de la ecuación

$$\int d^2y \left(V_{(\mu)}^{-1} \right)^{ab} (x-y) V_{(\mu)}^{bc}(y-z) = \delta^{(2)}(x-z) \delta^{ac}. \quad (4.16)$$

Descomponemos ahora A_μ^a en sus partes transversal y longitudinal

$$A_\mu^a(x) = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi^a(x) + \partial_\mu \eta^a(x), \quad (4.17)$$

donde ϕ^a y η^a son campos escalares. Además realizamos un cambio en los campos fermiónicos

$$\Psi^a(x) = e^{-g[\gamma_5 \phi^a(x) - i\eta^a(x)]} \chi^a(x) \quad (4.18)$$

$$\bar{\Psi}^a(x) = \bar{\chi}^a(x) e^{-g[\gamma_5 \phi^a(x) + i\eta^a(x)]}, \quad (4.19)$$

cuyo Jacobiano fue calculado en el capítulo anterior. Obtenemos entonces

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\chi}^a \mathcal{D}\chi^a \mathcal{D}\phi^a \mathcal{D}\eta^a e^{-S_{\text{ef}}}, \quad (4.20)$$

siendo S_{ef} una suma de tres partes:

$$S_{\text{ef}} = S_{0\text{F}} + S_{0\text{B}} + S_{\text{flip}} \quad (4.21)$$

donde

$$S_{0\text{F}} = \int d^2x \left(\bar{\chi}^1 i \not{\partial} \chi^1 + \bar{\chi}^2 i \not{\partial} \chi^2 \right), \quad (4.22)$$

$$S_{0\text{B}} = \frac{g^2}{2\pi} \int d^2x \left[(\partial_1 \phi^a)^2 - (\partial_1 \eta^a)^2 - 2\partial_1 \phi^a \partial_0 \eta^a \right] + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \left(V_{(\mu)}^{-1} \right)^{ab} (x-y) \\ \times \left[\epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\rho} \partial_\nu \phi^a(x) \partial_\rho \phi^b(y) + \partial_\mu \eta^a(x) \partial_\mu \eta^b(y) + 2\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi^a(x) \partial_\mu \eta^b(y) \right], \quad (4.23)$$

y S_{flip} es el mismo término de interacción IS ya definido en la Ec. (4.13). Respecto de este último término, desde ahora nos restringiremos al caso de interacciones IS de contacto:

$$U(x-y)_{(0)} = U(x-y)_{(1)} = \delta^{(2)}(x-y), \quad (4.24)$$

y por medio de una transformación de Fierz seguida del cambio quiral definido en las Ecs. (4.18) y (4.19), podemos escribirlo en la forma

$$S_{\text{flip}} = 2g_s \int d^2x \left[e^{-2g(\phi^1 - \phi^2)} \bar{\chi}^1 \frac{1 + \gamma_5}{2} \chi^1 \cdot \bar{\chi}^2 \frac{1 - \gamma_5}{2} \chi^2 + e^{2g(\phi^1 - \phi^2)} \bar{\chi}^1 \frac{1 - \gamma_5}{2} \chi^1 \cdot \bar{\chi}^2 \frac{1 + \gamma_5}{2} \chi^2 \right]. \quad (4.25)$$

Ahora estamos listos para hacer la expansión de la función de partición tomando g_s como parámetro perturbativo:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi^a \mathcal{D}\eta^a e^{-S_{0\text{B}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2g_s)^n}{n!} \int \prod_{i=1}^n d^2x_i \\ \times \left\langle \prod_{i=1}^n \left[e^{-2g(\phi^1 - \phi^2)} \bar{\chi}^1 \frac{1 + \gamma_5}{2} \chi^1 \cdot \bar{\chi}^2 \frac{1 - \gamma_5}{2} \chi^2 + e^{2g(\phi^1 - \phi^2)} \bar{\chi}^1 \frac{1 - \gamma_5}{2} \chi^1 \cdot \bar{\chi}^2 \frac{1 + \gamma_5}{2} \chi^2 \right] \right\rangle_{0\text{F}} \quad (4.26)$$

donde $\langle \rangle_{0\text{F}}$ significa valor medio en una teoría con acción $S_{0\text{F}}$. Sólo valores medios que involucran un mismo número de factores de la forma $\frac{1}{2} \bar{\chi}^a (1 + \gamma_5) \chi^a$ y $\frac{1}{2} \bar{\chi}^a (1 - \gamma_5) \chi^a$ (en esta

expresión no debe entenderse suma sobre índices repetidos) son no nulos, por lo tanto la función de partición puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi^a \mathcal{D}\eta^a e^{-S_{0B}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2g_s)^{2n}}{(n!)^2} \int \left(\prod_{i=1}^n d^2x_i d^2y_i e^{-2g[\phi^1(x_i) - \phi^2(x_i) - \phi^1(y_i) + \phi^2(y_i)]} \right) \\ \times \left\langle \prod_{i=1}^n \bar{\chi}^1(x_i) \frac{1 + \gamma_5}{2} \chi^1(x_i) \bar{\chi}^1(y_i) \frac{1 - \gamma_5}{2} \chi^1(y_i) \right\rangle_{\text{OF}} \\ \times \left\langle \prod_{i=1}^n \bar{\chi}^2(x_i) \frac{1 - \gamma_5}{2} \chi^2(x_i) \bar{\chi}^2(y_i) \frac{1 + \gamma_5}{2} \chi^2(y_i) \right\rangle_{\text{OF}} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

El siguiente paso consiste en introducir dos campos escalares locales sin masa ϑ^a que serán asociados a los fermiones libres $\bar{\chi}^a$ y χ^a . Este truco permite reemplazar los valores medios fermiónicos en la expresión de arriba por sus contrapartes bosónicas regularizadas [32, 68], lo que conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi^a \mathcal{D}\eta^a e^{-S_{0B}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2g_s)^{2n}}{(n!)^2} \int \left(\prod_{i=1}^n d^2x_i d^2y_i e^{-2g[\phi^1(x_i) - \phi^2(x_i) - \phi^1(y_i) + \phi^2(y_i)]} \right) \\ \times \left(\frac{i\Lambda}{2\pi} \right)^{2n} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{i\sqrt{4\pi}[\vartheta^1(x_i) - \vartheta^1(y_i)]} \right\rangle_{0, \vartheta^1} \\ \times \left(\frac{i\Lambda}{2\pi} \right)^{2n} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{i\sqrt{4\pi}[\vartheta^2(x_i) - \vartheta^2(y_i)]} \right\rangle_{0, \vartheta^2} . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ahora usamos el hecho de que las divergencias infrarojas del propagador del campo ϑ^a proveen una condición de neutralidad para los valores medios de los operadores de vértice. Esto significa que el valor medio $\langle \prod_{i=1}^n e^{i\beta_i \vartheta(x_i)} \rangle_{0, \vartheta}$ es no nulo solamente si $\sum_i \beta_i = 0$ [68]. La condición de neutralidad permite rearmar la serie perturbativa de un modo no trivial. Llegamos entonces a la acción completamente bosonizada S_{bos}

$$S_{\text{bos}} = S_{0B} + \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \vartheta^a)^2 - \frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2} \cos \left[2ig(\phi^1 - \phi^2) + \sqrt{4\pi}(\vartheta^1 + \vartheta^2) \right] \right\} . \quad (4.29)$$

En este punto es interesante observar que existe un cambio de variables que permite expresar la acción en un modo muy sugestivo. Efectivamente, escribiendo

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vartheta^1 + \vartheta^2) \quad (4.30)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vartheta^1 - \vartheta^2) \quad (4.31)$$

$$\phi^{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_\rho \pm \phi_\sigma) \quad (4.32)$$

$$\eta^{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_\rho \pm \eta_\sigma) \quad (4.33)$$

donde el signo más (menos) corresponde al par ϕ^1, η^1 (ϕ^2, η^2), se ve que el campo $\tilde{\theta}$ se desacopla completamente de los otros y por lo tanto puede integrarse, y la acción bosónica queda

$$S_{\text{bos}} = S_\rho + S_\sigma, \quad (4.34)$$

donde

$$S_\rho = \frac{g^2}{2\pi} \int d^2x [(\partial_1 \phi_\rho)^2 - (\partial_1 \eta_\rho)^2 - 2\partial_1 \phi_\rho \partial_0 \eta_\rho] + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \left(V_{(\mu)}^\rho \right)^{-1} (x-y) \\ \times [\epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\rho} \partial_\nu \phi_\rho(x) \partial_\rho \phi_\rho(y) + \partial_\mu \eta_\rho(x) \partial_\mu \eta_\rho(y) + 2\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi_\rho(x) \partial_\mu \eta_\rho(y)], \quad (4.35)$$

y

$$S_\sigma = \frac{g^2}{2\pi} \int d^2x [(\partial_1 \phi_\sigma)^2 - (\partial_1 \eta_\sigma)^2 - 2\partial_1 \phi_\sigma \partial_0 \eta_\sigma] + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \left(V_{(\mu)}^\sigma \right)^{-1} (x-y) \\ \times [\epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\rho} \partial_\nu \phi_\sigma(x) \partial_\rho \phi_\sigma(y) + \partial_\mu \eta_\sigma(x) \partial_\mu \eta_\sigma(y) + 2\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi_\sigma(x) \partial_\mu \eta_\sigma(y)] \\ + \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)^2 - \frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2} \cos \left(\sqrt{8} i g \phi_\sigma + \sqrt{8\pi} \theta \right) \right] \quad (4.36)$$

con las funciones $\left(V_{(\mu)}^{c,s} \right)^{-1}$ definidas como

$$\int d^2y \left(V_{(\mu)}^{c,s} \right)^{-1} (x-y) V_{(\mu)}^{c,s}(y-z) = \delta^{(2)}(x-z). \quad (4.37)$$

Esto, a su vez, conduce a una factorización de la función de partición en la forma $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_\rho \mathcal{Z}_\sigma$. Este resultado es una clara manifestación de la separación spin-carga [69, 71]. \mathcal{Z}_ρ es la función de partición asociada a las excitaciones de densidad de carga. Coincide con el modelo de Tomonaga-Luttinger sin spin estudiado en el capítulo anterior y en la Ref. 41. \mathcal{Z}_σ describe excitaciones de densidad de spin. La acción S_σ corresponde a un modelo seno-Gordon con término cinético no local, similar al considerado previamente en la Ref. 70. En el capítulo siguiente derivaremos una expresión para el gap de su espectro en función de los potenciales $V_{(\mu)}^\sigma$.

Dado que nuestro objetivo principal es analizar el sector de spin, desde ahora enfocaremos nuestra atención en S_σ . Transformando Fourier la acción (con la excepción del término del coseno, cuya transformada de Fourier no es muy esclarecedora) se obtiene

$$S_\sigma = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[\hat{\phi}(p)\hat{\phi}(-p)A(p) + \hat{\eta}(p)\hat{\eta}(-p)B(p) + \hat{\phi}(p)\hat{\eta}(-p)C(p) + \frac{p^2}{2}\theta(p)\theta(-p) \right] - \frac{g_s\Lambda^2}{\pi^2} \int d^2x \cos\left(\sqrt{8}ig\phi_\sigma + \sqrt{8\pi}\theta\right) \quad (4.38)$$

con

$$A = p_1^2 \left(\frac{1}{2V_0} + \frac{g^2}{2\pi} \right) + \frac{p_0^2}{2V_1} \quad (4.39)$$

$$B = p_1^2 \left(\frac{1}{2V_1} - \frac{g^2}{2\pi} \right) + \frac{p_0^2}{2V_0} \quad (4.40)$$

$$C = p_1p_0 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0} - \frac{g^2}{\pi} \right) \quad (4.41)$$

En la expresión de arriba, $\hat{\phi}(p)$, $\hat{\eta}(p)$ y $\theta(p)$ son las transformadas de Fourier de $\phi_\sigma(x)$, $\eta_\sigma(x)$ y $\theta(x)$ respectivamente. Es conveniente considerar todavía otro cambio de variables que diagonaliza la parte cuadrática de S_σ . Este cambio está dado por

$$\theta = \frac{\Delta\pi}{\Delta\pi + 2Bg^2p^2}\xi - \frac{ig}{\sqrt{\pi}}\zeta \quad (4.42)$$

$$\eta = \frac{i\sqrt{\pi}gCp^2}{\Delta\pi + 2Bg^2p^2}\xi - \varphi - \frac{C}{2B}\zeta \quad (4.43)$$

$$\phi = \zeta - \frac{2i\sqrt{\pi}gp^2B}{\Delta\pi + 2Bg^2p^2}\xi \quad (4.44)$$

donde ξ , ζ y χ son los nuevos campos bosónicos, y $\Delta = C^2 - 4AB$. La acción resultante se lee

$$S_\sigma = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{2K_\sigma v_\sigma} (p_0^2 + v_\sigma p_1^2) \xi(p)\xi(-p) - \frac{g_s\Lambda^2}{\pi^2} \int d^2x \cos(\sqrt{8\pi}\xi) + \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p^4(\pi - g^2V_{(1)}^\sigma)}{2(p_0^2\pi V_{(1)}^\sigma + p_1^2V_{(0)}(\pi - g^2V_{(1)}^\sigma)} \zeta(p)\zeta(-p) + \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \left[\frac{p_0^2}{V_{(0)}^\sigma} + p_1^2 \left(\frac{-g^2}{\pi} + \frac{1}{V_{(1)}^\sigma} \right) \right] \varphi(p)\varphi(-p) \quad (4.45)$$

donde

$$v_\sigma = \sqrt{\left(1 + \frac{g^2}{\pi} V_{(0)}^\sigma\right) \left(1 - \frac{g^2}{\pi} V_{(1)}^\sigma\right)}, \quad (4.46)$$

$$K_\sigma = \sqrt{\frac{1 + \frac{g^2}{\pi} V_{(0)}^\sigma}{1 - \frac{g^2}{\pi} V_{(1)}^\sigma}}. \quad (4.47)$$

Se observa que los campos ζ y φ se desacoplaron completamente de ξ . La parte de la acción que depende de ξ coincide con la obtenida mediante bosonización operacional en la sección 4.3 y es la parte relevante a considerar. Más generalmente la reescribimos como

$$S_\sigma = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \xi(p) \frac{F(p)}{2} \xi(-p) - \frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2} \int d^2x \cos(\sqrt{8\pi}\xi), \quad (4.48)$$

con

$$F(p) = \frac{1}{K_\sigma(p)v_\sigma(p)} [p_0^2 + v_\sigma(p)p_1^2]. \quad (4.49)$$

Esta acción corresponde a un modelo seno-Gordon con término cinético no local, introducido en la Ref. 70.

4.4 Conclusiones

En este capítulo hemos mejorado una versión no local del modelo de Thirring que provee una descripción tratable de los líquidos de Luttinger con spin, basada en teoría de campos. Efectivamente, en el contexto de teorías del tipo Thirring no local, los tratamientos previos de las interacciones de inversión de spin condujeron a un complicado modelo no abeliano (ver por ejemplo [35]). Específicamente construimos una acción basada en dos especies de fermiones que permite tener en cuenta interacciones de inversión de spin de un modo elegante y simple. Aunque nuestro modelo se inspiró en el considerado en la Ref. [68], incluye interacciones no contenidas en ese trabajo previo (los llamados diagramas g_4 en la terminología de Solyom [50]). Además, la teoría que presentamos posee potenciales bilocales generales que gobiernan las interacciones que no invierten el spin. Parametrizamos estos potenciales en términos de las funciones V^ρ y V^σ que se asocian a la dinámica de las densidades de carga y spin respectivamente, una vez que la separación spin-carga se hace manifiesta luego de un cambio de variables apropiado (ver ecuación (4.32) y (4.33)). Aunque nuestro análisis es únicamente válido para interacciones de inversión de spin locales, pudimos mantener la dependencia con la distancia en los potenciales ordinarios (que no invierten el spin) hasta el final de los cálculos. Bajo estas condiciones obtuvimos una acción bosónica efectiva cuyos grados de libertad de carga coinciden con descripciones previamente encontradas en

el capítulo anterior del problema de dispersión hacia adelante sin spin. Respecto del sector de spin, que es el de mayor interés en el presente contexto, hallamos que se corresponde con un modelo seno-Gordon con término cinético no local. En el capítulo siguiente estudiaremos su espectro dentro del marco de la aproximación armónica autoconsistente, derivando una expresión para el gap de las excitaciones de baja energía.

Capítulo 5

La aproximación armónica autoconsistente

Examinamos la aproximación armónica autoconsistente y su utilización en el marco de la integral funcional y las teorías de materia condensada. En particular hallamos una fórmula para el gap de las excitaciones del sector de spin del modelo estudiado en el capítulo anterior, como función de potenciales arbitrarios de interacción electrón-electrón. Proponemos además un nuevo método para determinar el parámetro incógnita asociado a esta aproximación. Comprobamos la validez de esta nueva técnica en el contexto del modelo seno-Gordon y como aplicación no trivial consideramos el régimen de escala del modelo de Ising en 2D fuera del punto crítico y en presencia de un campo magnético h . En este caso derivamos una expresión aproximada que relaciona la longitud de correlación ξ , $T - T_c$ y h . Los resultados de este capítulo constituyen aportes originales de esta tesis [42, 43].

5.1 Introducción

La aproximación armónica autoconsistente (SCHA, self-consistent harmonic approximation) es una técnica no perturbativa que ha sido utilizado extensivamente en aplicaciones de mecánica estadística [72, 73] y materia condensada [43, 74–77]. Consiste en reemplazar una acción verdadera S por una acción de prueba S_0 que hace que el problema resulte tratable. Usualmente S_0 es una acción cuadrática que depende de cierto parámetro desconocido Ω . Este parámetro debe ser determinado mediante algún criterio como por ejemplo la minimización de la energía libre. Esta aproximación está íntimamente relacionada al *potencial efectivo gaussiano* [78–80] en teoría cuántica de campos, una aproximación variacional al potencial efectivo que utiliza como estado fundamental de prueba una funcional de onda gaussiana dependiente de un parámetro de masa. También está basado en un *principio de mínima sensibilidad* [81, 82] para determinar el parámetro adicional.

En el capítulo anterior mostramos que la inclusión de términos que invierten el spin en la acción de una teoría de electrones fuertemente correlacionados en una dimensión espacial, condujo a una acción bosónica de tipo seno-Gordon para las fluctuaciones de los grados de libertad de spin. Aunque el espectro del modelo seno-Gordon usual se conoce exactamente a partir de los trabajos de Dashen, Hasslacher y Neveu (DHN) [83], en el caso que nos ocupa la presencia de interacciones de largo alcance dan lugar a un término cinético no local que destruye la solubilidad. Esta situación nos lleva naturalmente a considerar métodos aproximados. En el presente capítulo nos proponemos hallar el espectro de excitaciones del mencionado sector mediante la SCHA. El presente cálculo resulta de interés por dos motivos adicionales: en primer lugar, la SCHA es mucho más sencilla de implementar que las técnicas semiclásicas utilizadas en los mencionados trabajos. Y en segundo lugar, la SCHA puede extenderse fácilmente a modelos más complicados como por ejemplo el doble seno-Gordon [84] en teoría de campos, o la versión continua del modelo de Hubbard extendido en llenado medio [85] y líquidos de Luttinger acoplados [86].

Si bien nuestra motivación inicial para abordar el estudio de la SCHA fue contar con un método de aproximación para poder estimar el valor del gap (en modelos en los que la no localidad impide hallar una solución exacta) al familiarizarnos con la técnica pudimos realizar algunos aportes originales en lo concerniente al método en si mismo. Esto nos ha llevado a presentar también en este capítulo, a modo de leve digresión, los detalles de nuestra propuesta. En particular, señalamos que en problemas en dos dimensiones existe un modo alternativo de determinar el parámetro Ω . Este método está basado en teoría de campos conformes [87, 88]. Más aún, mostramos que nuestro método conduce a mejoras en los resultados para el modelo SG respecto del SCHA estandar y nos permite dar una nueva descripción del modelo de Ising bidimensional (MI2D) fuera del punto crítico. En el primer caso explotamos la existencia de resultados exactos [83, 89] para verificar la consistencia de nuestra propuesta, obteniendo una respuesta cualitativamente buena para la masa del solitón. Aplicamos entonces las mismas ideas al MI2D a $T \neq T_c$ y $h \neq 0$, un modelo no integrable para el cual se conocen pocos resultados cuantitativos [90–92]. Utilizamos la representación fermiónica del MI2D. Dado que la SCHA estandar está restringida a modelos bosónicos, el nuevo procedimiento provee también una extensión de la aproximación gaussiana a teorías fermiónicas bidimensionales. Nuestro resultado principal es una ecuación algebraica que permite obtener el comportamiento de la longitud de correlación como función de $T - T_c$ y h .

Debemos enfatizar que no estamos introduciendo una nueva aproximación, sino sólo un método para determinar el parámetro. Como es bien sabido, la SCHA es una aproximación no controlada, es decir, no hay ningún parámetro perturbativo involucrado. Es claro entonces que la misma crítica puede hacerse a la presente propuesta.

5.2 Detalles de la aproximación y el espectro del sector de spin en electrones unidimensionales

Comenzaremos mostrando el desarrollo mediante integrales funcionales de la SCHA. En general comenzamos con una función de partición

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mu e^{-S} \quad (5.1)$$

donde $\mathcal{D}\mu$ es una medida de integración funcional bosónica. Una manipulación elemental conduce a

$$\mathcal{Z} = \frac{\int \mathcal{D}\mu e^{-(S-S_0)} e^{-S_0}}{\int \mathcal{D}\mu e^{-S_0}} \int \mathcal{D}\mu e^{-S_0} = \mathcal{Z}_0 \langle e^{-(S-S_0)} \rangle_0. \quad (5.2)$$

para cualquier acción *de prueba* S_0 . Por medio de la propiedad

$$\langle e^{-f} \rangle \geq e^{-\langle f \rangle}, \quad (5.3)$$

para f real, y tomando logaritmo natural en la ecuación (5.2), obtenemos la desigualdad de Feynman [93].

$$\ln \mathcal{Z} \geq \ln \mathcal{Z}_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 \quad (5.4)$$

La aproximación consiste en reemplazar la acción verdadera, difícil de tratar, por una acción de prueba más simple, que contenga algún parámetro libre. Este se fija maximizando el lado derecho de la desigualdad (5.4).

Consideramos a continuación como acción verdadera, la acción que describe la dinámica del sector de spin en teorías de electrones altamente correlacionados en una dimensión (4.48), obtenida en el capítulo anterior. Además como acción de prueba tomamos una acción cuadrática de la forma

$$S_0 = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[\xi(p) \frac{F(p)}{2} \xi(-p) + \frac{\Omega^2}{2} \xi(p) \xi(-p) \right]. \quad (5.5)$$

Para la situación mencionada, F se define como

$$F(p) = \frac{1}{K_s v_s} (p_0^2 + v_s p_1^2), \quad (5.6)$$

aunque para los desarrollos siguientes consideraremos una F arbitraria, y obtendremos resultados generales. Una vez realizada la sustitución de acciones es inmediato obtener el espectro:

$$F(p) + \Omega^2 = 0. \quad (5.7)$$

Volviendo a frecuencias reales, $p_0 = i\omega$, $p_1 = k$, y tomando el término cinético (5.6) se obtiene la siguiente ecuación

$$v_s K_s \Omega^2 + v_s^2 k^2 - \omega^2 = 0. \quad (5.8)$$

Como se dijo anteriormente, el parámetro Ω puede determinarse maximizando el lado derecho de la ecuación (5.4). Para alcanzar este objetivo primero escribimos

$$\ln \mathcal{Z}_0 = \ln \int \mathcal{D}\xi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^2x \xi(x) (\hat{A}\xi)(x) \right] = [\ln(\det \hat{A})^{-1/2}] + \text{const} \quad (5.9)$$

$$= -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \hat{A} + \text{const}, \quad (5.10)$$

donde el operador \hat{A} está definido, en espacio de Fourier, por

$$(\hat{A}\xi)(p) = [F(p) + \Omega^2]\xi(p). \quad (5.11)$$

Es fácil entonces obtener

$$\text{tr} \ln \hat{A} = V \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln[F(p) + \Omega^2], \quad (5.12)$$

donde V es el volumen (infinito) de todo el espacio $\int d^2x$. Por otro lado, $\langle S - S_0 \rangle$ se puede calcular directamente siguiendo, por ejemplo, los pasos explicados en la Ref. 70 y la identidad del apéndice C. El resultado es

$$-\langle S - S_0 \rangle_0 = \int d^2x \left[\frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2} \langle \cos(\sqrt{8\pi}\xi) \rangle_0 + \frac{\Omega^2}{2} \langle \xi^2 \rangle_0 \right] \quad (5.13)$$

$$= V \frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2} \exp \left[-4\pi \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{F(p) + \Omega^2} \right] + V \frac{\Omega^2}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{F(p) + \Omega^2}. \quad (5.14)$$

Finalmente, podemos reunir todos los términos y escribir

$$\ln \mathcal{Z}_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 = V \left[\frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2} \exp(-4\pi I_0(\Omega)) + \frac{\Omega^2}{2} I_0(\Omega) - \frac{1}{2} I_1(\Omega) \right] + \text{const}. \quad (5.15)$$

donde definimos las integrales

$$I_1(\Omega) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \ln[F(p) + \Omega^2] \quad (5.16)$$

$$I_{-n}(\Omega) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[F(p) + \Omega^2]^{n+1}} \quad (5.17)$$

con las propiedades formales

$$\frac{dI_1(\Omega)}{d\Omega} = 2\Omega I_0 \quad (5.18)$$

$$\frac{dI_{-n}(\Omega)}{d\Omega} = -2(n+1)\Omega I_{-n-1}. \quad (5.19)$$

Hallando el extremo de la expresión (5.15) con respecto a Ω , y asumiendo que $I_{-1}(\Omega)$ es no nulo (una condición que vale para la mayoría de los potenciales realistas), finalmente obtenemos la ecuación del gap.

$$\Omega^2 - \frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2} e^{-4\pi I_0(\Omega)} = 0. \quad (5.20)$$

La ecuación (5.20) es uno de los resultados principales de este capítulo. Dentro de la aproximación armónica autoconsistente, da una expresión cerrada para el gap como funcional de los potenciales $V_{(\mu)}^s(p)$. Resulta interesante obtener un valor explícito para Ω para el potencial de contacto, dado por

$$V_{(0)}^s(p) = V_{(1)}^s(p) = 1. \quad (5.21)$$

En este caso $I_0(\Omega)$ es infinita. Si utilizamos la misma regularización empleada en el capítulo anterior se obtiene

$$\frac{\Omega^2}{\Lambda^2} = \frac{g_s}{\pi^2} \left[1 + \frac{(1 + g^2/\pi)\Lambda^2}{\Omega^2} \right]^{\frac{-1}{1+g^2/\pi}}. \quad (5.22)$$

Esta ecuación puede fácilmente resolverse para $\Lambda \gg \Omega$ y $\Omega \gg \Lambda$. Los resultados están dados respectivamente por

$$\Omega^2 = \Lambda^2 \left(\frac{g_s}{\pi} \right)^{\frac{1+g^2/\pi}{g^2/\pi}} \left(1 + \frac{g^2}{\pi} \right)^{-g^2/\pi}, \quad (5.23)$$

y

$$\Omega^2 = \frac{g_s \Lambda^2}{\pi^2}. \quad (5.24)$$

5.2.1 El modelo seno-Gordon en teoría de campos

Si bien el modelo estudiado en la sección precedente coincide con el modelo seno-Gordon considerado tradicionalmente en la literatura de la teoría de campos en el caso local dado por (5.21), existe una diferencia en el tratamiento de las divergencias en las integrales. Mientras que en teoría de campos se busca implementar mecanismos que hagan finitos los resultados finales, lo que se consigue al renormalizar los parámetros de la teoría, en materia

condensada las divergencias que aparecen son artificiales, es decir son introducidas por las técnicas mediante las cuales se trata la teoría. Por ejemplo, en el modelo de Hubbard original, el espectro es acotado, es decir, las sumas o integrales sobre k se realizan en una región finita. Al considerar la linealización de la relación de dispersión, y la inclusión de infinitos estados con energía por debajo del nivel de Fermi, el modelo se vuelve tratable matemáticamente mediante bosonización, pero al costo de la introducción de divergencias ultravioletas. Por otro lado, el parámetro que se introduce para regular el modelo [la constante a en la ecuación (2.22), o Λ en (4.28)], usualmente tiene un significado físico: está asociada con la constante de red. Por esta razón es usual que se deje su dependencia explícita en funciones de correlación y otras cantidades de interés.

En la sección anterior seguimos este último camino y obtuvimos una expresión para el gap que dependía explícitamente del cutoff Λ . En esta sección seguiremos el camino usual de la teoría de campos, es decir, introduciremos una constante de acoplamiento renormalizada, y obtendremos expresiones para el gap del modelo seno-Gordon que dependen de ella. Partimos de la acción

$$S = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \varphi(p) \frac{F(p)}{2} \varphi(-p) - \int d^2x \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\frac{1}{2}\beta^2 I_1(\rho)} \cos(\beta\varphi) \quad (5.25)$$

donde $\varphi(p)$ es un campo escalar y α es la constante de acoplamiento renormalizada¹ mediante un orden normal [28,32]; ρ es el parámetro que implementa el orden normal. Por simplicidad, en esta fórmula hemos escrito el término cinético en espacio de Fourier, pero hemos dejado el término de interacción en espacio de coordenadas.

Como acción de prueba, proponemos una acción cuadrática,

$$S_0 = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[\varphi(p) \frac{F(p)}{2} \varphi(-p) + \frac{\Omega^2}{2} \varphi(p) \varphi(-p) \right], \quad (5.26)$$

donde Ω es el parámetro de prueba. Con el objeto de realizar el proceso de minimización estandar, primero evaluamos $\langle S - S_0 \rangle$. El resultado es

$$-\langle S - S_0 \rangle_0 = \mathcal{V} \left[\frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 [I_0(\Omega) - I_0(\rho)]} + \frac{\Omega^2}{2} I_0(\Omega) \right]. \quad (5.27)$$

Insertando ahora (5.27) en la desigualdad de Feynman (5.4), y minimizando el lado derecho de dicha ecuación con respecto a Ω , finalmente obtenemos

$$\Omega^2 - \alpha e^{-\beta^2/2 [I_0(\Omega) - I_0(\rho)]} = 0. \quad (5.28)$$

Esta ecuación del gap permite extraer una respuesta finita para Ω , dependiente del parámetro de masa ρ (la diferencia $I_0(\Omega) - I_0(\rho)$ es finita). Nótese que el valor de ρ es completamente

¹Aquí el término renormalizado es un abuso de lenguaje, ya que en modelos en (1+1) dimensiones con interacciones sin derivadas, el orden normal elimina completamente todas las divergencias

arbitrario, si uno lo elige igual a la masa de prueba Ω , la solución de la ecuación es

$$\Omega^2 = \alpha. \quad (5.29)$$

El mismo resultado se obtiene si en lugar de $\rho = \Omega$ se toma $\rho = \sqrt{\alpha}$.

5.3 Determinación de Ω mediante técnicas de teoría de campos conformes

Presentaremos a continuación una ruta alternativa para determinar Ω . Para este fin explotaremos una predicción cuantitativa de la invarianza conforme para sistemas en 2D en el régimen de escala, fuera del punto crítico. Partiendo del llamado ‘Teorema-c’ [94], Cardy [95,96] mostró que el valor de la anomalía conforme c , que caracteriza al modelo en el punto crítico, y el segundo momento del correlador de densidad de energía en el régimen de escala de la teoría no crítica están relacionados por

$$\int d^2x |x|^2 \langle \varepsilon(x) \varepsilon(0) \rangle = \frac{c}{3 \pi t^2 (2 - \Delta_\varepsilon)^2}, \quad (5.30)$$

donde ε es el operador de densidad de energía, Δ_ε es su dimensión de escala y $t \propto (T - T_c)$ es la constante de acoplamiento del término de interacción que saca al sistema fuera del punto crítico. La validez de esta fórmula ha sido verificada explícitamente para varios modelos [95,96]. Para el modelo SG, el operador de densidad de energía está dado por el término del coseno, su dimensión conforme es $\Delta_\varepsilon = \beta^2/4\pi$, t es la constante de acoplamiento α/β^2 y la teoría conforme bosónica libre asociada posee $c = 1$.

Nosotros afirmamos que Ω puede ser determinado de una forma no variacional completamente diferente, forzando la validez de la identidad conforme de arriba para la acción de prueba. En otras palabras, impondremos que se verifique la siguiente ecuación:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^4} \int d^2x |x|^2 \langle \cos \beta\varphi(x) \cos \beta\varphi(0) \rangle_0 = \frac{1}{3 \pi (2 - \frac{\beta^2}{4\pi})^2}, \quad (5.31)$$

que debe ser considerada como una ecuación para el parámetro de masa Ω . Por supuesto, si uno está interesado en comparar la respuesta dada por esta fórmula con el resultado dado por la SCHA usual, al evaluar el lado derecho de (5.31), se debe adoptar una prescripción de regularización equivalente al orden normal implementado en la SCHA. Un cálculo cuidadoso conduce a la siguiente ecuación del gap:

$$\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)^{2(2-u)} = \left(\frac{\alpha}{\rho^2}\right)^2 \frac{3}{32} \frac{2-u}{u^2} \quad (5.32)$$

donde hemos definido la variable $u = \beta^2/4\pi$ ($0 \leq u < 2$) y ρ es el parámetro de orden normal, como antes. Vemos que, igual que en la ecuación SCHA estandar (5.28), hay diferentes

respuestas para diferentes elecciones de ρ , pero en este caso, los resultados obtenidos para los valores $\sqrt{\alpha}$ y Ω son diferentes. En cualquier caso se obtiene una dependencia no trivial de Ω con β^2 en contraste con la SCHA variacional. Esto es interesante si recordamos el significado físico de la masa del gap en el contexto del modelo SG. Efectivamente, como es bien sabido, Dashen, Hasslacher y Neveu (DHN) [83] calcularon mediante técnicas semiclásicas el espectro de masa para el modelo SG. Consiste en un solitón (asociado al fermión del modelo de Thirring) con masa

$$M_{sol} = \frac{2-u}{\pi u} \sqrt{\alpha}, \quad (5.33)$$

y una secuencia de estados ligados con masas

$$M_N = \frac{2(2-u)}{\pi u} \sin \left[N \frac{\pi u}{2(2-u)} \right] \sqrt{\alpha}, \quad (5.34)$$

con $N = 1, 2, \dots < (2-u)/u$. (De esta última condición es fácil ver que para tener N estados ligados debemos tener $u < 2/(N+1)$. Como consecuencia no hay estado ligado para $u > 1$). Más recientemente, Zamolodchikov [89], reinterpretando resultados obtenidos mediante el ansatz de Bethe, dio expresiones exactas para este espectro. En particular para el solitón su fórmula acuerda muy bien con (5.33), excepto para u cercano a 2, donde predice una divergencia. Por simplicidad, aquí comparamos nuestros resultados con la ecuación (5.33). Lo primero que debe notarse es que las masas en el espectro del modelo SG también dependen de u , igual que nuestra predicción dada por la ecuación (5.32). Por lo tanto, al respecto, nuestra propuesta parece mejorar la predicción gaussiana estándar para el modelo SG, al menos cualitativamente. Para efectuar una discusión cuantitativa más específica comparemos las ecuaciones (5.32) y (5.33) como funciones de u . Fijamos $\rho = \sqrt{\alpha}$, lo que corresponde a la prescripción empleada por DHN al derivar (5.33) y (5.34). El resultado se muestra en la figura 5.1 donde se puede observar una analogía cualitativa general entre ambas curvas. En particular, para $0.7 \leq u \leq 1$ ($u = 1$ corresponde al punto del fermión libre del modelo de Thirring y al punto de Emery en el modelo de dispersión hacia atrás [71]) nuestra predicción está de acuerdo con los valores de la masa del solitón calculados por DHN. Queremos recalcar que para $u = 1$ obtenemos $\Omega/\sqrt{\alpha} = \sqrt{3/32} \approx 0.30$ mientras que el valor dado por (5.33) es $1/\pi \approx 0.31$ (la SCHA estándar da, por supuesto, $\Omega/\sqrt{\alpha} = 1$).

5.3.1 El modelo de Ising en 2D

Habiendo verificado la admisibilidad de nuestra propuesta en un modelo en el que se conocen resultados exactos, es ahora deseable explorar un problema no trivial. Consideremos el modelo de Ising en 2D fuera del punto crítico ($T \neq T_c$ y $h \neq 0$):

$$S = S_M + \int d^2x [t \epsilon(x) + h \sigma(x)], \quad (5.35)$$

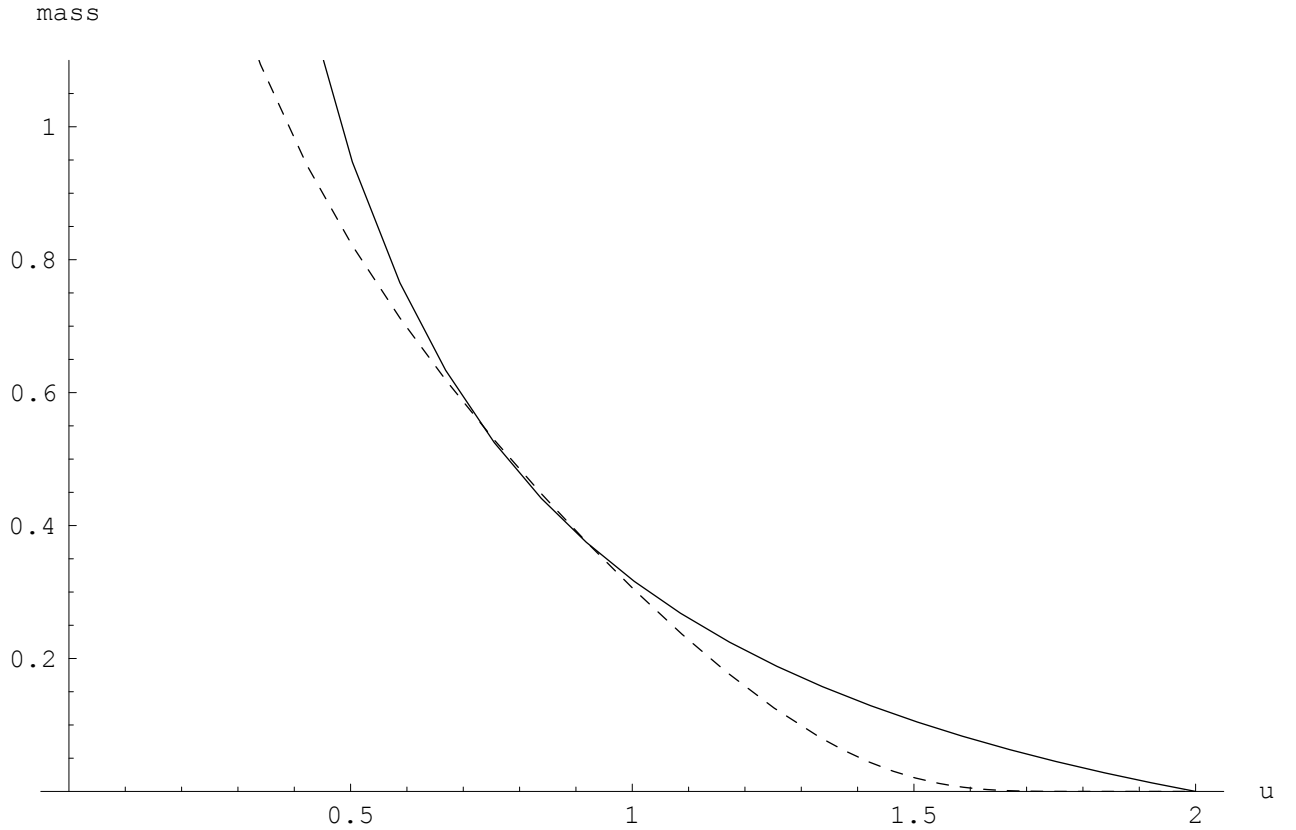


Figura 5.1: Masas en unidades de $\sqrt{\alpha}$ como función de u . La línea punteada es $M_{\text{sol}}/\sqrt{\alpha}$, mientras que la línea llena representa $\Omega/\sqrt{\alpha}$

donde S_M es la acción crítica, $t \propto (T - T_c)$, y $\epsilon(x)$ y $\sigma(x)$ son los operadores de densidad de energía y spin respectivamente. Usaremos la representación fermiónica de la mencionada acción. De este modo, S_M es la acción de un fermión de Majorana libre y sin masa, y $\epsilon \propto \bar{\Psi}\Psi$. Por otro lado, la expresión de $\sigma(x)$ en términos de los campos de Majorana es más complicada. Efectivamente, por medio de una transformación de Jordan-Wigner puede escribirse como exponencial de un bilineal fermiónico. En analogía con la SCHA usual, proponemos la siguiente acción cuadrática de prueba

$$S_0 = S_M + \Omega \int d^2x \epsilon(x), \quad (5.36)$$

La ecuación conforme(5.30) para el presente caso toma la forma

$$\int d^2r r^2 [t^2 (2 - \Delta_\varepsilon)^2 \langle \varepsilon(r)\varepsilon(0) \rangle_0 + h^2 (2 - \Delta_\sigma)^2 \langle \sigma(r)\sigma(0) \rangle_0 + 2th(2 - \Delta_\varepsilon)(2 - \Delta_\sigma) \langle \varepsilon(r)\sigma(0) \rangle_0] = \frac{1}{6\pi}, \quad (5.37)$$

donde fijamos $c = 1/2$, que es la carga central de los fermiones libres de Majorana, y $\Delta_\varepsilon = 1$ y $\Delta_\sigma = 1/8$ son las dimensiones de escala de los correspondientes operadores. Ahora debemos evaluar el valor medio en la acción de prueba. Esto nos dará una ecuación para Ω como función de t y h . Las funciones de correlación energía-energía y energía-spin fueron calculadas por Hecht [97] mientras que el correlador spin-spin puede hallarse en el trabajo de Wu, McCoy, Tracy and Barouch [98]. Como es usual, se define la longitud de correlación $\xi = 1/4\Omega$ y se considera el límite de escala, dado por $\xi \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, con r/ξ fijo. El siguiente paso es usar la expresión de los correladores para $(r/\xi) \ll 1$ y realizar las integrales correspondientes. En este punto debemos tener en cuenta que las funciones de correlación son proporcionales a ciertas funciones de escala $F_\pm(r/\xi)$ donde los signos $+$ y $-$ corresponden a los casos $\Omega > 0$ y $\Omega < 0$ respectivamente. En otras palabras, el parámetro Ω puede verse como un parámetro que define una nueva temperatura crítica *efectiva*. Las funciones F_\pm describen el régimen de escala por encima y por debajo de esta temperatura. Dado que estamos aproximando una perturbación magnética en el sistema, es claro que debemos usar la función F_- . De este modo obtenemos la siguiente ecuación que relaciona ξ , h y t :

$$t^2(4\xi)^2 + C_1 h^2 (4\xi)^{15/4} + C_2 t|h|(4\xi)^{23/8} = 1 \quad (5.38)$$

donde hemos introducido las constantes numéricas $C_1 = 0.749661$ y $C_2 = 0.186966$. El valor absoluto del campo magnético en el segundo término proviene del hecho de que $\langle \varepsilon\sigma \rangle \propto \langle \sigma \rangle$ y el producto $\langle \sigma \rangle h$ debe ser positivo dado que la magnetización y el campo magnético tienen que tener la misma orientación. Para ξ fijo, esta ecuación da una dependencia simple de h como función de t . Efectivamente, para $h > 0$ tenemos una semi elipse levemente rotada en el plano $h - t$ superior, y para $h < 0$ tenemos su reflexión sobre el eje $t = 0$.

Si reescribimos la ecuación 5.38 en términos de la longitud de correlación a campo nulo, $\xi_0 = 1/4t$, y la combinación adimensional $\chi = |h|^{-8/15}/4\xi_0$ obtenemos

$$\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 + C_1 \chi^{-15/4} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{15/4} \pm C_2 \chi^{-15/8} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{23/8} = 1. \quad (5.39)$$

Los signos $+$ y $-$ en el tercer término del miembro izquierdo corresponden al caso $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente. La acción (5.35) define una familia de teorías de campos dependientes de un parámetro χ [91].

Con el objeto de verificar la consistencia de la ecuación de arriba, consideramos los límites $h \rightarrow 0$ y $t \rightarrow 0$ en forma separada. El primer caso corresponde a $\chi \rightarrow \infty$ y se obtiene

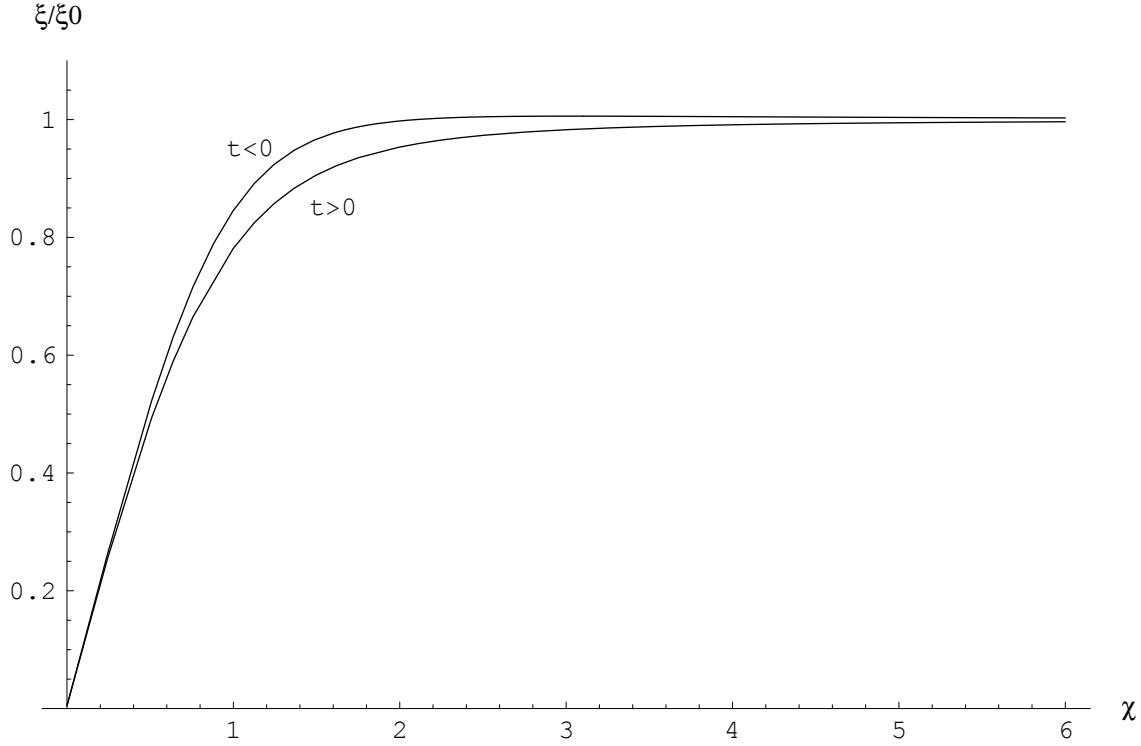


Figura 5.2: Longitud de correlación en unidades de ξ_0 como función de χ , para ambos casos, $t > 0$ y $t < 0$.

inmediatamente $\xi = \xi_0$, como era de esperar. En el segundo caso tenemos $\chi \rightarrow 0$ y obtenemos entonces $\xi \sim |h|^{-\frac{8}{15}}$, lo cual está en acuerdo con el resultado exacto obtenido en las Ref.99, 100. Debemos mencionar que en estas referencias la constante de proporcionalidad fue determinada exactamente en el valor 4,4, mientras que nuestro cálculo aproximado conduce al valor 3,7. Volviendo al caso general, resolvimos la ecuación (5.38) numéricamente para ξ como función de χ para $t > 0$ y $t < 0$. Los resultados se muestran en el gráfico de la figura 5.2. En el caso $t > 0$ la longitud de correlación se incrementa en forma monótona desde cero y alcanza el valor correspondiente a $h = 0$, ξ_0 desde abajo cuando $\chi \rightarrow \infty$. En el caso $t < 0$, aunque el comportamiento de ξ parece muy similar al caso previo, una mirada cuidadosa muestra que presenta una diferencia sutil, mostrada en la figura 5.3. Para $\chi \approx 2$ la longitud de correlación pasa sobre el valor ξ_0 , alcanza un máximo y entonces tiende a ξ_0 desde arriba cuando $\chi \rightarrow \infty$. Como este comportamiento depende de los valores de las constantes C_1 y C_2 no sabemos si es efectivamente una propiedad del modelo de Ising o un artificio introducido por nuestra aproximación.

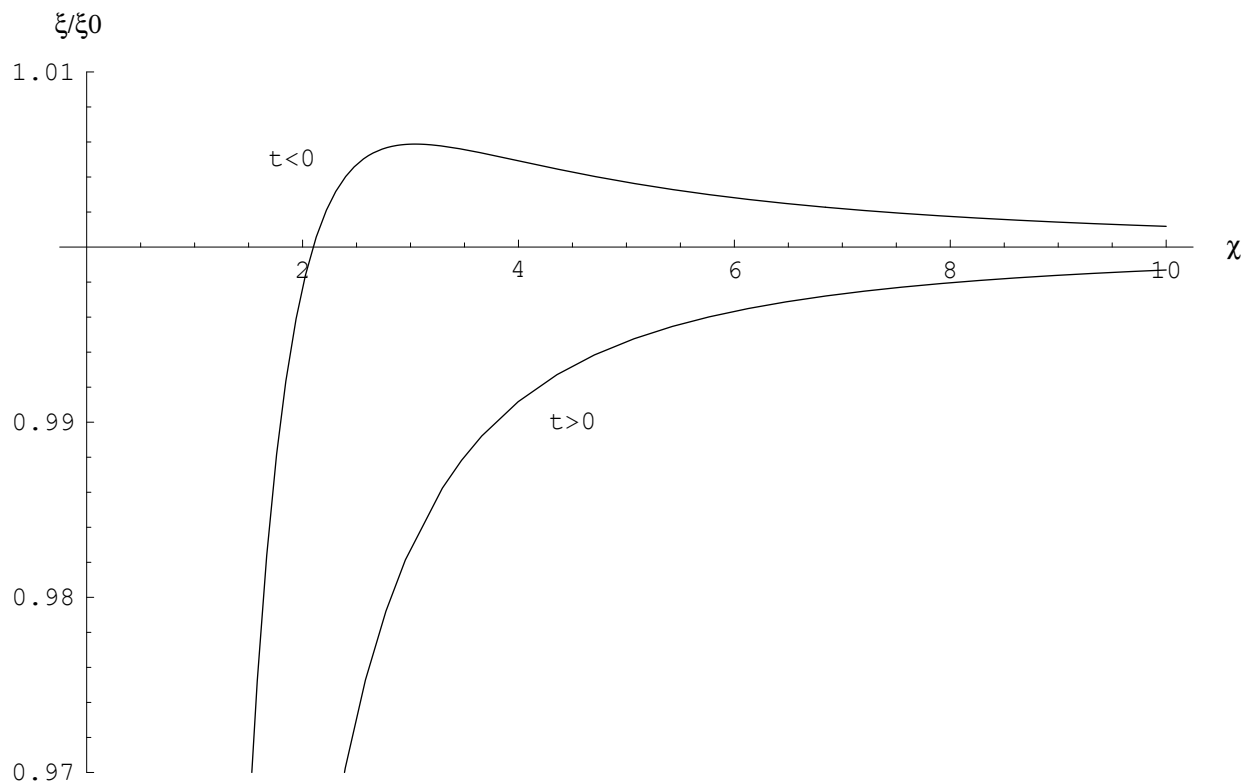


Figura 5.3: Igual que la Fig. 5.2. Al agrandar la escala se observan los detalles del comportamiento de $\xi(\chi)$ para $t > 0$ y $t < 0$.

5.4 Conclusiones

En este capítulo hemos reconsiderado el conocido método de aproximación armónica auto-consistente, en el cual una acción comparativamente compleja es reemplazada por un sistema cuadrático más simple dependiente de un parámetro de masa Ω que se determina usualmente mediante un cálculo variacional. Aplicamos este método para la obtención del gap del espectro de excitaciones del modelo de Thirring no local con interacciones de inversión de spin, formulado en el capítulo anterior.

Al trabajar con la SCHA advertimos que, para el caso de teorías 1+1 dimensionales, el parámetro Ω se podía determinar de un modo alternativo, no variacional. Nuestra propuesta se basa en una consecuencia del teorema-c de Zamolodchikov [94] derivada por primera vez por Cardy [95]. Ilustramos la idea considerando el modelo seno-Gordon. Mostramos que para este modelo nuestro método da una predicción bastante buena para el comportamiento de la masa del solitón como función de β^2 (ver las ecuaciones (5.32) y (5.33) y la Fig. 5.1).

Como aplicación no trivial consideramos el modelo de Ising en 2D fuera del punto crítico

($T \neq T_c$ and $h \neq 0$). A partir de una descripción mediante teoría de campos en términos de fermiones de Majorana, proponemos una acción cuadrática de prueba dependiente de un parámetro Ω que define una longitud de correlación aproximada ξ . Nuestro resultado principal está dado por la ecuación (5.38)(o su forma alternativa (5.39)) que permite determinar el parámetro Ω (o lo que es lo mismo, ξ) en términos de los parámetros físicos originales t y h .

Sería interesante probar nuestro enfoque en otros modelos tales como la versión continua del modelo de Ising tricrítico, que puede describirse mediante el segundo modelo de la serie minimal unitaria [101, 102] con carga central $c = 7/10$.

Capítulo 6

Interacciones spin-órbita

En este capítulo calculamos funciones de correlación en sistemas unidimensionales de electrones en interacción en los que los grados de libertad de carga y spin se encuentran acoplados a través de la interacción spin-órbita. Estudiamos fluctuaciones de tipo ondas de densidad de carga y spin, y de tipo superconductor singulete y triplete. Mostramos que la interacción spin-órbita modifica los exponentes del decaimiento de las funciones de correlación y el diagrama de fases del sistema. Además encontramos que susceptibilidades que eran finitas a bajas temperaturas, se vuelven divergentes a causa de la interacción spin-órbita. Estos resultados constituyen una contribución original de esta tesis [44]

6.1 Introducción

Al considerar el comportamiento de los electrones dentro de materiales, debe tenerse en cuenta que éstos se mueven en presencia de campos eléctricos. Como consecuencia, experimentan no sólo la fuerza electrostática originada en estos campos, sino una influencia relativista conocida como *interacción spin-órbita* (SO) que rompe la simetría de rotación de spin SU(2). Su origen se encuentra en el acoplamiento de Pauli entre el momento magnético de spin del electrón y un campo magnético que aparece en su sistema de referencia en reposo debido al movimiento en un campo eléctrico. Una forma general de describir la interacción SO consiste en agregar el siguiente término al Hamiltoniano, que se obtiene a partir de la expansión cuadrática en v/c de la ecuación de Dirac:

$$H_{\text{SO}} = \frac{\hbar}{(2m_0c)^2} \nabla V(\mathbf{r})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \times \hat{\mathbf{p}}). \quad (6.1)$$

Aquí m_0 es la masa en reposo del electrón, $\hat{\mathbf{p}}$ es el operador momento, $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ es el vector de las matrices de Pauli, y $V(\mathbf{r})$ es el potencial de la partícula.

En materiales cristalinos tridimensionales, la energía $V(\mathbf{r})$ proviene exclusivamente del potencial cristalino *microscópico*. Dresselhaus [103] mostró que en estructuras cristalinas

sin simetría de inversión como la estructura de tipo zinc-blenda (por ejemplo el material semiconductor GaAs posee esta estructura), la interacción SO conduce a un splitting de la banda de conducción en dos subbandas. La magnitud del splitting es proporcional al cubo del número de onda k del electrón.

Es posible obtener gases de electrones bidimensionales partiendo de sistemas en 3D confinando el movimiento electrónico a dos dimensiones mediante la aplicación de un campo eléctrico perpendicular, generando un pozo cuántico. La reducción de la dimensión efectiva disminuye la simetría del cristal subyacente, y agrega un término adicional, lineal en k , al splitting de las subbandas. Más aún, si el pozo cuántico es suficientemente estrecho, el término lineal en k se vuelve dominante. Por otro lado Rashba [104] mostró que este potencial confinante *macroscópico* da lugar a un segundo término en el Hamiltoniano de interacción SO que es responsable de la aparición de un término lineal en k adicional en el splitting de las subbandas. En diversos sistemas, como heteroestructuras de InGaAs/InAlAs [105], GaAs [106] y GaAs/AlGaAs ésta se convierte en la contribución más importante al acoplamiento SO. En este último caso, el splitting de las subbandas también depende del potencial confinante, hecho que ha sido comprobado experimentalmente por ejemplo en las Ref. 105–108 mediante el estudio de fenómenos de transporte.

Las investigaciones tendientes a la comprensión y control de los fenómenos que involucran el spin electrónico en materiales semiconductores han cobrado un renovado interés en los últimos años a partir de la idea de fabricar unidades *spintrónicas*, en las que se utiliza el spin electrónico en lugar de su carga para el manejo y almacenamiento de información. En ellas, la interacción SO, y el efecto Rashba en particular juegan un rol central [109–112].

Existen diversas técnicas para crear sistemas de electrones en una dimensión a partir de gases de electrones bidimensionales [113]. En esencia, todos utilizan un confinamiento adicional mediante un potencial transversal. Este se convierte así en una fuente adicional de potencial macroscópico, origen de la interacción spin-órbita. Si el confinamiento es suficientemente fuerte (angosto y profundo), entonces este campo se vuelve importante frente al efecto Rashba, y puede convertirse en dominante. Aunque hasta nuestro conocimiento no existe evidencia experimental de la interacción SO que resulta de este potencial, estudios teóricos indican que afecta cualitativamente el comportamiento de la energía de splitting como función del vector de onda k . En efecto, Moroz y col. resolvieron la ecuación de Shrödinger que resulta de situar un electrón estrictamente bidimensional (en el plano xy) en un campo eléctrico transversal (en la dirección del eje z) y en un potencial cuadrático en el eje x [114]. Además consideraron los términos de interacción SO del tipo de la ecuación (6.1) con los potenciales anteriormente descritos. Dado que el sistema continúa teniendo invarianza traslacional en el eje y , k_y sigue siendo un buen número cuántico. Las energías como función de k_y que se encuentran al resolver la ecuación de Schrödinger se muestran en la figura 6.1. Se observa un splitting entre las subbandas de spin para arriba y spin para abajo, y además una nueva característica, propia del confinamiento a una dimensión, que es la deformación de cada una de las bandas como función de k_y . La característica más importante de esta deformación consiste en que cada banda pierde su eje de simetría vertical, y la velocidad de

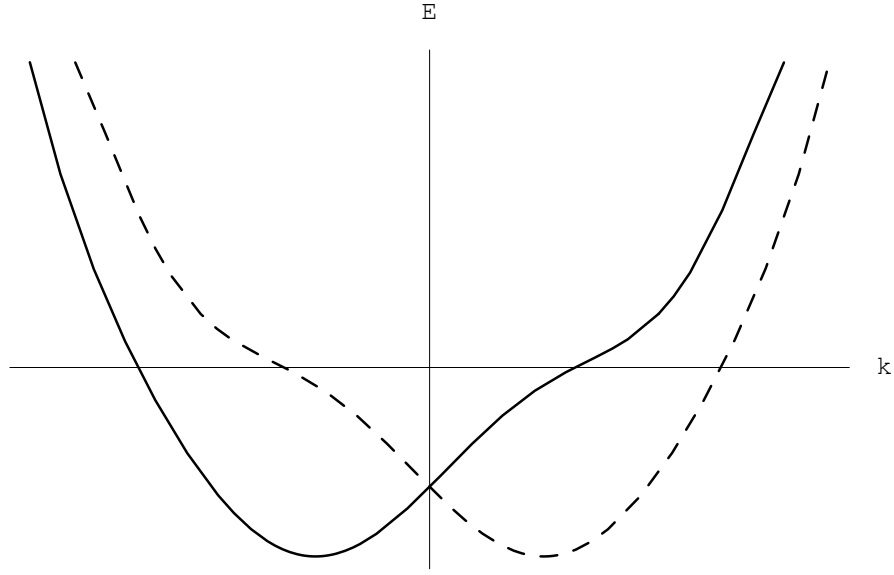


Figura 6.1: Espectro de energía de los electrones en un alambre cuántico con interacciones spin-órbita.

Fermi de los electrones se vuelve diferente para cada dirección de movimiento. Los cálculos indican [114] que la diferencia de las velocidades de Fermi se incrementa en forma monótona con el acoplamiento SO llegando a ser del orden de 10-20%. Esta razón se encuentra dentro del rango en el que es posible realizar mediciones experimentales.

6.2 Formulación del modelo y formalismo

6.2.1 Hamiltoniano fermiónico

Como fue mencionado ya varias veces a lo largo de esta tesis, un ingrediente central de los electrones en una dimensión en metales y materiales semiconductores es la alta correlación. De modo que se vuelve necesario incorporar la interacción electrónica en modelos para interacciones SO. Para ello fue propuesto el siguiente Hamiltoniano [37, 38]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (6.2)$$

donde el Hamiltoniano libre es

$$\mathcal{H}_0 = -iv_1 \int dx \left(\psi_{R,\uparrow}^\dagger \partial_x \psi_{R,\uparrow} - \psi_{L,\downarrow}^\dagger \partial_x \psi_{L,\downarrow} \right) - iv_2 \int dx \left(\psi_{R,\downarrow}^\dagger \partial_x \psi_{R,\downarrow} - \psi_{L,\uparrow}^\dagger \partial_x \psi_{L,\uparrow} \right). \quad (6.3)$$

$\psi_{r,\alpha}^\dagger$ crea un fermión de spin α que se mueve a la derecha ($r = +1$) o a la izquierda ($r = -1$). Este Hamiltoniano es similar al correspondiente al modelo de Tomonaga-Luttinger con spin, con la diferencia de que en este caso, los fermiones que se mueven a izquierda y derecha en ambas bandas, poseen diferentes velocidades de Fermi ($v_1 \neq v_2$), reflejando la asimetría del espectro libre. El término de interacción describe interacciones de dispersión hacia adelante, y posee la forma usual:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} = \sum_{\alpha,\beta} \int dx \left(g_{2\parallel} \delta_{\alpha\beta} + g_{2\perp} \delta_{\alpha,-\beta} \right) \psi_{L,\alpha}^\dagger \psi_{R,\alpha} \psi_{R,\beta}^\dagger \psi_{L,\beta} \\ + \frac{1}{2} \sum_{r,\alpha,\beta} \int dx \left(g_{4\parallel} \delta_{\alpha\beta} + g_{4\perp} \delta_{\alpha,-\beta} \right) \psi_{r,\alpha}^\dagger \psi_{r,\alpha} \psi_{r,\beta}^\dagger \psi_{r,\beta}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Los términos de dispersión hacia atrás y umklapp son irrelevantes si nos restringimos a interacciones repulsivas en el primer caso, y estamos lejos del llenado medio en el segundo.

En este capítulo calculamos las funciones de correlación de los operadores que representan ondas de densidad de carga (CDW) y spin (SDW), y superconductividad de tipo singulete (SS) y triplete (TS) en el modelo anteriormente presentado. Las funciones de correlación para estos operadores son bien conocidas en ausencia de acoplamiento SO [17, 48, 50], incluyendo factores de corrección logarítmica que se originan en términos irrelevantes [85, 115] y dependencia con el tiempo y la temperatura [48]. En el presente capítulo se extienden estos cálculos al caso en que las interacciones SO se encuentran presentes, y se estudia como se modifican los exponentes de sus decaimientos algebraicos. Como resultado encontramos interesantes modificaciones del diagrama de fases del sistema. Para ciertas regiones del espacio de parámetros, la interacción SO cambia la fluctuación dominante, y hace que susceptibilidades que eran finitas, ahora se vuelvan también divergentes a bajas temperaturas.

6.2.2 Bosonización

El Hamiltoniano (6.2) puede estudiarse mediante la técnica de bosonización, como en la Ref. 37, 38. Aunque es indistinto emplear bosonización funcional u operacional, elegiremos esta última para llevar un paralelismo lo más estrecho posible con dicha referencia, aunque finalmente los valores medios serán calculados utilizando técnicas funcionales. Por conveniencia definimos una velocidad promedio $v_0 = (v_1 + v_2)/2$ y la diferencia $\delta v = v_2 - v_1$. A partir de la figura 6.1 se observa que los momentos de Fermi también son diferentes para ambas ramas, por esa razón, hacemos lo mismo para los momentos de Fermi, definiendo el promedio $k_0 = (k_1 + k_2)/2$ y la diferencia $\delta k = k_2 - k_1$. Para efectuar la bosonización introducimos los campos de fase usuales ϕ_ρ y ϕ_σ para los grados de libertad de carga y spin, y los correspondientes campos duales Π_ρ y Π_σ siguiendo el procedimiento explicado en el capítulo 2. En términos de los campos bosónicos, el Hamiltoniano puede representarse como

$$\mathcal{H} = \frac{v_\rho}{2} \int dx \left[\frac{1}{K_\rho} (\partial_x \phi_\rho)^2 + K_\rho \Pi_\rho^2 \right] + \frac{v_\sigma}{2} \int dx \left[\frac{1}{K_\sigma} (\partial_x \phi_\sigma)^2 + K_\sigma \Pi_\sigma^2 \right] + \delta v \int dx [(\partial_x \phi_\rho) \Pi_\sigma + (\partial_x \phi_\sigma) \Pi_\rho]. \quad (6.5)$$

$v_{\rho,\sigma}$ son las velocidades de propagación de los modeos colectivos del modelo desacoplado ($\delta v = 0$), y $K_{\rho,\sigma}$ son las constantes de dureza. El acoplamiento SO aparece como un efecto que rompe la separación spin-carga, lo cual se manifiesta en la presencia del tercer término en la última ecuación. Sin embargo, este Hamiltoniano puede ser diagonalizado en términos de dos nuevos campos de fase, que portan una mezcla de carga y spin. Dado que el Hamiltoniano posee términos cruzados en los campos y los momentos, su diagonalización no es trivial, por ejemplo no puede diagonalizarse por una transformación de similitud, porque resulta no canónica. Dejamos para el apéndice B los detalles. Baste mencionar que las velocidades de propagación de estos nuevos modos colectivos son

$$v_\pm^2 = \frac{v_\sigma^2 + v_\rho^2}{2} + \delta v^2 \pm \sqrt{\left(\frac{v_\rho^2 - v_\sigma^2}{2}\right)^2 + \delta v^2 \left[v_\sigma^2 + v_\rho^2 + v_\rho v_\sigma \left(\frac{K_\rho}{K_\sigma} + \frac{K_\sigma}{K_\rho} \right) \right]}. \quad (6.6)$$

A medida que $\delta v \rightarrow 0$, $v_+ \rightarrow \max(v_\rho, v_\sigma)$ y $v_- \rightarrow \min(v_\rho, v_\sigma)$. A medida que δv se incrementa, v_- disminuye hasta anularse en los puntos

$$\delta v_\rho^2 = v_\rho v_\sigma \frac{K_\sigma}{K_\rho}, \quad (6.7)$$

$$\delta v_\sigma^2 = v_\rho v_\sigma \frac{K_\rho}{K_\sigma}. \quad (6.8)$$

En estos puntos, el congelamiento del modo bosónico más lento está acompañado por una divergencia en las funciones respuesta de carga y spin. La compresibilidad de carga estática κ diverge para $\delta v = \delta v_\rho$ y para $\delta v = \delta v_\sigma$ ocurre una divergencia en la susceptibilidad de spin estática χ . Sus comportamientos son

$$\kappa = \kappa_0 \left[1 - \frac{\delta v}{\delta v_\rho} \right]^{-1}, \quad \kappa_0 = \frac{2K_\rho}{\pi v_\rho}, \quad (6.9)$$

$$\chi = \chi_0 \left[1 - \frac{\delta v}{\delta v_\sigma} \right]^{-1}, \quad \chi_0 = \frac{2K_\sigma}{\pi v_\sigma}, \quad (6.10)$$

donde κ_0 y χ_0 son los valores de κ y χ en ausencia de acoplamiento SO. Más allá de estos puntos las susceptibilidades se vuelven negativas. Este comportamiento de las funciones

respuesta estáticas junto con el hecho de que las velocidades de los modos colectivos se anulen indican que el sistema se ha vuelto inestable [17, 116] y que realiza una transición de fase de primer orden [85]. Para $K_\rho > K_\sigma$, δv_ρ resulta menor que δv_σ , y a medida que δv crece desde 0, la divergencia física tiene lugar en la compresibilidad de carga. Esta inestabilidad se conoce como separación de fases y se ha mostrado que ocurre en el modelo de Hubbard extendido [117] y en el modelo $t - J$ [118]. En el caso en que $K_\rho < K_\sigma$, la inestabilidad tiene lugar en el subsistema de spin, y está relacionada a la llamada transición metamagnética, observada por ejemplo en el compuesto cuasi unidimensional $\text{Ba}_3\text{Cu}_2\text{O}_4\text{Cl}_2$ [119]. También ocurre en el diagrama de fases del modelo XXZ con segundos vecinos [120]. En presencia de un potencial químico (campo magnético), la región en la cual κ (χ) se vuelve negativa está asociada a la coexistencia de dos fases con diferente concentración de agujeros (magnetización). La divergencia en κ fue hallada también en otros modelos con dispersión asimétrica y sin interacciones SO [46].

6.3 Funciones de correlación

Enfoquemos ahora nuestra atención en las funciones de correlación. Los operadores de interés son

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}} = \sum_{r,\alpha} \psi_{r\alpha}^\dagger \psi_{-r\alpha} e^{-2irk_{\text{F}}x}, \quad (6.11)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SDW},x} = \sum_{r,\alpha} \psi_{r\alpha}^\dagger \psi_{-r,-\alpha} e^{-2irk_{\text{F}}x}, \quad (6.12)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SDW},y} = \sum_{r,\alpha} (-i\alpha) \psi_{r\alpha}^\dagger \psi_{-r,-\alpha} e^{-2irk_{\text{F}}x}, \quad (6.13)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SDW},z} = \sum_{r,\alpha} \alpha \psi_{r\alpha}^\dagger \psi_{-r\alpha} e^{-2irk_{\text{F}}x}, \quad (6.14)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SS}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha} \alpha \psi_{L\alpha} \psi_{R,-\alpha}, \quad (6.15)$$

$$\mathcal{O}_{\text{TS},0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha} \psi_{L\alpha} \psi_{R,-\alpha}, \quad (6.16)$$

$$\mathcal{O}_{\text{TS},\alpha} = \psi_{L\alpha} \psi_{R\alpha}. \quad (6.17)$$

Para obtener su forma bosónica basta utilizar las expresiones de equivalencia entre campos fermiónicos y bosónicos, (2.60) y (2.76). El resultado es

$$\mathcal{O}_{\text{CDW}} = \frac{2}{\pi a} \cos(2k_0 x + \sqrt{2\pi}\phi_\rho) \cos \sqrt{2\pi}\phi_\sigma, \quad (6.18)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SDW},x} = \frac{2}{\pi a} \cos(2k_0 x + \sqrt{2\pi}\phi_\rho) \cos(\delta k x + \sqrt{2\pi}\theta_\sigma), \quad (6.19)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SDW},y} = \frac{2}{\pi a} \cos(2k_0 x + \sqrt{2\pi}\phi_\rho) \sin(\delta k x + \sqrt{2\pi}\theta_\sigma), \quad (6.20)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SDW},z} = \frac{2}{\pi a} \sin(2k_0 x + \sqrt{2\pi}\phi_\rho) \sin \sqrt{2\pi}\phi_\sigma, \quad (6.21)$$

$$\mathcal{O}_{\text{SS}} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}a} e^{-i\sqrt{2\pi}\theta_\rho} \sin \sqrt{2\pi}\phi_\sigma, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{O}_{\text{TS},0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-i\sqrt{2\pi}\theta_\rho} \cos \sqrt{2\pi}\phi_\sigma, \quad (6.23)$$

$$\mathcal{O}_{\text{TS},\pm 1} = \frac{1}{2\pi a} e^{\pm i\delta k x} e^{-i\sqrt{2\pi}(\theta_\rho \pm \theta_\sigma)}. \quad (6.24)$$

Recordamos que, según se definió en el capítulo 2, θ_ν está vinculado con Π_ν por la relación $\Pi_\nu = \partial_x \theta_\nu$.

6.3.1 Funciones de correlación a temperatura finita

Las funciones de correlación se calcularon en el marco de la integral funcional dentro del formalismo de tiempo imaginario de Matsubara [47]. En este formalismo, se definen como

$$\begin{aligned} R_i(x, \tau; \beta) &= \left\langle \mathcal{O}_i(x, \tau) \mathcal{O}_i^\dagger(0, 0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\Pi_\rho \mathcal{D}\Pi_\sigma \mathcal{D}\phi_\rho \mathcal{D}\phi_\sigma \mathcal{O}_i(x, \tau) \mathcal{O}_i^\dagger(0, 0) \exp\{-S[\Pi_\nu, \phi_\nu]\}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde \mathcal{Z}_0 es la función de partición

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\Pi_\rho \mathcal{D}\Pi_\sigma \mathcal{D}\phi_\rho \mathcal{D}\phi_\sigma \exp\{-S[\Pi_\nu, \phi_\nu]\}, \quad (6.26)$$

S es la acción euclídea

$$S[\Pi_\nu, \phi_\nu] = \int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(\tau) - i \int_0^\beta d\tau \int dx \Pi_\nu(x, \tau) \partial_\tau \phi_\nu(x, \tau), \quad (6.27)$$

y τ es el tiempo imaginario. Las propiedades de tiempo real se obtienen por continuación analítica $\tau \rightarrow it$. Como los operadores (6.18) están expresados en términos de ϕ_ν y θ_ν , es conveniente trabajar en términos de θ_ν en lugar de Π_ν . La acción expresada en las nuevas variables es

$$\begin{aligned}
S[\theta_\nu, \phi_\nu] = & \frac{v_\rho}{2} \int_0^\beta d\tau \int dx \left[\frac{1}{K_\rho} (\partial_x \phi_\rho)^2 + K_\rho (\partial_x \theta_\rho)^2 \right] \\
& + \frac{v_\sigma}{2} \int_0^\beta d\tau \int dx \left[\frac{1}{K_\sigma} (\partial_x \phi_\sigma)^2 + K_\sigma (\partial_x \theta_\sigma)^2 \right] \\
& + \int_0^\beta d\tau \int dx [\partial_x \theta_\rho (i\partial_\tau \phi_\rho + \delta v \partial_x \phi_\sigma) + \partial_x \theta_\sigma (i\partial_\tau \phi_\sigma + \delta v \partial_x \phi_\rho)]. \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Por la forma que poseen los operadores (6.18), sus funciones de correlación pueden escribirse de forma general como una combinación de términos de la forma

$$\left\langle \exp \left\{ i \sum_k \beta_k [\varphi_k(x) - \varphi_k(0)] \right\} \right\rangle \quad (6.29)$$

donde definimos el campo φ de la siguiente manera:

$$(\varphi_j) = \begin{pmatrix} \phi_\rho \\ \theta_\rho \\ \phi_\sigma \\ \theta_\sigma \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

con β_k constantes apropiadas, y $j = 1, 2, 3, 4$. La expresión (6.29) es igual a (fórmula obtenida en el apéndice C)

$$\exp \left\{ \sum_{i,j} \beta_i \beta_j [\Delta_{ij}^{-1}(x) - \Delta_{ij}^{-1}(0)] \right\}, \quad (6.31)$$

donde

$$\langle \varphi_i(x) \varphi_j(y) \rangle = \Delta_{ij}^{-1}(x - y). \quad (6.32)$$

De modo tal que las funciones de correlación que nos interesan (exponenciales de los campos) quedan expresadas en términos de funciones de correlación de los campos ϕ_ν y θ_ν . Éstas se pueden calcular siguiendo el procedimiento estándar de construir una funcional generatriz con la acción (6.28), y derivar funcionalmente respecto de las fuentes externas. Mediante este procedimiento se encuentra

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\varphi_i, \varphi_j}(x, \tau; \beta) & \equiv \langle [\varphi_i(x) - \varphi_i(0)] [\varphi_j(x) - \varphi_j(0)] \rangle \\
& = \frac{1}{\pi\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk (1 - e^{-ikx - i\omega_n \tau}) G_{\varphi_i, \varphi_j}(\omega_n, k) e^{-\epsilon|k|}. \quad (6.33)
\end{aligned}$$

donde ω_n son las frecuencias de Matsubara $\omega_n = 2\pi n/\beta$. El factor $e^{-\epsilon|k|}$ actúa como regulador en el U.V. Las funciones $G_{\varphi_i, \varphi_j}(\omega_n, k)$, simétricas en el intercambio de φ_i con φ_j , resultan

$$G_{\phi_\rho, \phi_\rho}(\omega_n, k) = \frac{K_\rho v_\rho (\omega_n^2 + k^2 v_s^2) - \delta v K_\sigma v_\sigma k^2}{(\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.34)$$

$$G_{\phi_\sigma, \phi_\sigma}(\omega_n, k) = \frac{K_\sigma v_\sigma (\omega_n^2 + k^2 v_s^2) - \delta v K_\rho v_\rho k^2}{(\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.35)$$

$$G_{\theta_\rho, \theta_\rho}(\omega_n, k) = \frac{K_\sigma v_\rho (\omega_n^2 + k^2 v_s^2) - \delta v K_\rho v_\sigma k^2}{K_\sigma K_\rho (\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.36)$$

$$G_{\theta_\sigma, \theta_\sigma}(\omega_n, k) = \frac{K_\rho v_\sigma (\omega_n^2 + k^2 v_s^2) - \delta v K_\sigma v_\rho k^2}{K_\rho K_\sigma (\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.37)$$

$$G_{\phi_\rho, \theta_\rho}(\omega_n, k) = i \frac{\omega_n [\omega_n^2 + k^2 (v_\sigma^2 + \delta v^2)]}{k (\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.38)$$

$$G_{\phi_\sigma, \theta_\sigma}(\omega_n, k) = i \frac{\omega_n [\omega_n^2 + k^2 (v_\rho^2 + \delta v^2)]}{k (\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.39)$$

$$G_{\phi_\rho, \phi_\sigma}(\omega_n, k) = \delta v \frac{i \omega_n k (K_\rho v_\rho + K_\sigma v_\sigma)}{(\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.40)$$

$$G_{\theta_\rho, \theta_\sigma}(\omega_n, k) = \delta v \frac{i \omega_n k (K_\rho v_\sigma + K_\sigma v_\rho)}{K_\rho K_\sigma (\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.41)$$

$$G_{\phi_\rho, \theta_\sigma}(\omega_n, k) = \delta v \frac{k^2 (K_\rho v_\rho v_\sigma - K_\sigma \delta v^2) / K_\sigma - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)} \quad (6.42)$$

$$G_{\phi_\sigma, \theta_\rho}(\omega_n, k) = \delta v \frac{k^2 (K_\sigma v_\sigma v_\rho - K_\rho \delta v^2) / K_\rho - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + v_+^2 k^2)(\omega_n^2 + v_-^2 k^2)}. \quad (6.43)$$

Debe notarse que las funciones que involucran mezclas de campos de carga con campos de spin son proporcionales a δv , de modo que se anulan cuando no hay acoplamiento spin-órbita, restaurando la separación spin-carga. Dejaremos los detalles del cálculo de las integrales para el apéndice A, y aquí presentaremos los resultados finales para las funciones (6.25):

$$R_{\text{CDW}}(x, \tau; \beta) = R_{\text{SDW},z}(x, \tau; \beta) = \frac{\cos 2k_0 x}{2(\pi a)^2} (z_+ \bar{z}_+)^{-(K_\rho \nu_+^\rho + K_\sigma \nu_+^\sigma)/2} (z_- \bar{z}_-)^{-(K_\rho \nu_-^\rho + K_\sigma \nu_-^\sigma)/2} \left[\left(\frac{\bar{z}_+ z_-}{z_+ \bar{z}_-} \right)^{H \text{ sign}(x\tau)} + h.c. \right] \quad (6.44)$$

$$R_{\text{SDW},xy}(x, \tau; \beta) = \frac{\cos 2k_1 x}{2(\pi a)^2} (z_+ \bar{z}_+)^{-(K_\rho \nu_+^\rho + \mu_+^\sigma / K_\sigma)/2 - \theta_+^\sigma} (z_- \bar{z}_-)^{-(K_\rho \nu_-^\rho + \mu_-^\sigma / K_\sigma)/2 - \theta_-^\sigma} + \frac{\cos 2k_2 x}{2(\pi a)^2} (z_+ \bar{z}_+)^{-(K_\rho \nu_+^\rho + \mu_+^\sigma / K_\sigma)/2 + \theta_+^\sigma} (z_- \bar{z}_-)^{-(K_\rho \nu_-^\rho + \mu_-^\sigma / K_\sigma)/2 + \theta_-^\sigma} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{SS}}(x, \tau; \beta) &= R_{\text{TS},0}(x, \tau; \beta) \\
&= \frac{1}{2(2\pi a)^2} (z_+ \bar{z}_+)^{-(\mu_+^\rho/K_\rho + K_\sigma \nu_+^\sigma)/2 + \theta_+^\rho} (z_- \bar{z}_-)^{-(\mu_-^\rho/K_\rho + K_\sigma \nu_-^\sigma)/2 + \theta_-^\rho} + (\theta_\pm^\rho \rightarrow -\theta_\pm^\rho) \quad (6.46)
\end{aligned}$$

$$R_{\text{TS},\pm 1}(x, \tau; \beta) = \frac{e^{\pm i \delta k x}}{(2\pi a)^2} (z_+ \bar{z}_+)^{-(\mu_+^\rho/K_\rho + \mu_+^\sigma/K_\sigma)/2} (z_- \bar{z}_-)^{-(\mu_-^\rho/K_\rho + \mu_-^\sigma/K_\sigma)/2} \left(\frac{\bar{z}_+ z_-}{z_+ \bar{z}_-} \right)^{\pm G \text{sign}(x\tau)} \quad (6.47)$$

donde

$$z_\pm = \frac{\sin \frac{\pi}{v_\pm \beta} (\epsilon + v_\pm \tau + ix)}{\sin \frac{\pi \epsilon}{v_\pm \beta}} \quad (6.48)$$

$$\bar{z}_\pm = \frac{\sin \frac{\pi}{v_\pm \beta} (\epsilon + v_\pm \tau - ix)}{\sin \frac{\pi \epsilon}{v_\pm \beta}} \quad (6.49)$$

y los exponentes dependen de las constantes K multiplicadas por factores que incluyen dependencias en las velocidades. Están dados por

$$\nu_\pm^\lambda = \pm \frac{v_\lambda v_\pm^2 - v_{-\lambda}^2 (1 - \delta v^2 / \delta v_{-\lambda}^2)}{v_\pm^2 - v_-^2} \quad (6.50)$$

$$\mu_\pm^\lambda = \pm \frac{v_\lambda v_\pm^2 - v_{-\lambda}^2 (1 - \delta v^2 / \delta v_\lambda^2)}{v_\pm^2 - v_-^2} \quad (6.51)$$

$$\theta_\pm^\lambda = \pm \frac{\delta v v_\pm^2 - (\delta v_\lambda^2 - \delta v^2)}{v_\pm^2 - v_-^2} \quad (6.52)$$

con $\lambda = \rho, \sigma$, y

$$H = \delta v \frac{K_\rho v_\rho + K_\sigma v_\sigma}{v_+^2 - v_-^2} \quad (6.53)$$

$$G = \delta v \frac{v_\rho / K_\rho + v_\sigma / K_\sigma}{v_+^2 - v_-^2}. \quad (6.54)$$

ν_\pm^λ y μ_\pm^λ son positivos, y θ_\pm^λ , G y H tienen el mismo signo que δv . En el modelo sin acoplamiento SO, la simetría SU(2) puede restaurarse fijando el valor de $K_\sigma = 1$, valor que emerge naturalmente si el modelo bajo estudio es el límite continuo de un modelo en la red con solamente interacciones de tipo densidad de carga. En nuestro caso esta simetría está

explícitamente rota desde el principio, y no es posible restaurarla. Esta ruptura se manifiesta en las diferencias en los decaimientos entre las funciones de correlación de operadores SDW en la dirección z y las direcciones x e y .

Igual que en el caso en que no hay acoplamiento SO, las funciones de correlación para operadores SDW en la dirección z y operadores CDW son iguales. Lo mismo ocurre con las funciones de correlación para operadores TS y SS. Esta degeneración se rompe al incluir correcciones logarítmicas que surgen si se tienen en cuenta términos irrelevantes de umklapp y backscattering [115].

Un punto interesante de observar es la aparición de dos términos en la función SDW, xy [Ec. (6.45)] donde las modulaciones poseen diferentes frecuencias y decaen con diferentes exponentes. Como θ_{\pm}^{λ} tiene el mismo signo que δv [ver la Ec. (6.52) y el comentario debajo de la Ec. (6.54)] para $v_2 > v_1$ ($v_2 < v_1$) el término dominante es el de frecuencia k_2 (k_1). En otras palabras, la mayor frecuencia domina. Además $R_{TS,\pm 1}$ se vuelve oscilante.

6.3.2 Funciones de correlación instantáneas a temperatura cero

Hasta aquí hemos obtenido fórmulas muy generales para las funciones de correlación dependientes del espacio, tiempo imaginario y la temperatura. Podemos lograr una mayor comprensión de la física del problema observando el decaimiento algebraico de las funciones de correlación instantáneas ($\tau = 0$) y a temperatura cero y estudiar como sus exponentes se modifican respecto del caso con acoplamiento SO nulo. El comportamiento general de estas funciones es

$$R_i(x) \sim |x|^{-2+\alpha_i}. \quad (6.55)$$

Los exponentes α_i 's determinan la divergencia de la correspondiente susceptibilidad en el espacio de Fourier cuando $T \rightarrow 0$, $\chi_i(T) \sim T^{-\alpha_i}$ [17]. De este modo, estas inestabilidades resultan de una naturaleza completamente diferente a las descritas en las Ecs. (6.9) y (6.10). Las expresiones obtenidas para los α_i son

$$\alpha_{CDW} = \alpha_{SDW,z} = 2 - K_{\rho}\nu^{\rho} - K_{\sigma}\nu^{\sigma} \quad (6.56)$$

$$\alpha_{SDW,x} = \alpha_{SDW,y} = 2(1 + |\theta^{\sigma}|) - K_{\rho}\nu^{\rho} - \mu^{\sigma}/K_{\sigma} \quad (6.57)$$

$$\alpha_{SS} = \alpha_{TS,0} = 2(1 + |\theta^{\rho}|) - \mu^{\rho}/K_{\rho} - K_{\sigma}\nu^{\sigma} \quad (6.58)$$

$$\alpha_{TS,\pm 1} = 2 - \mu^{\rho}/K_{\rho} - \mu^{\sigma}/K_{\sigma}. \quad (6.59)$$

Estos son los nuevos exponentes, que retienen la misma estructura que en el caso de SO nulo, pero modificados por los factores

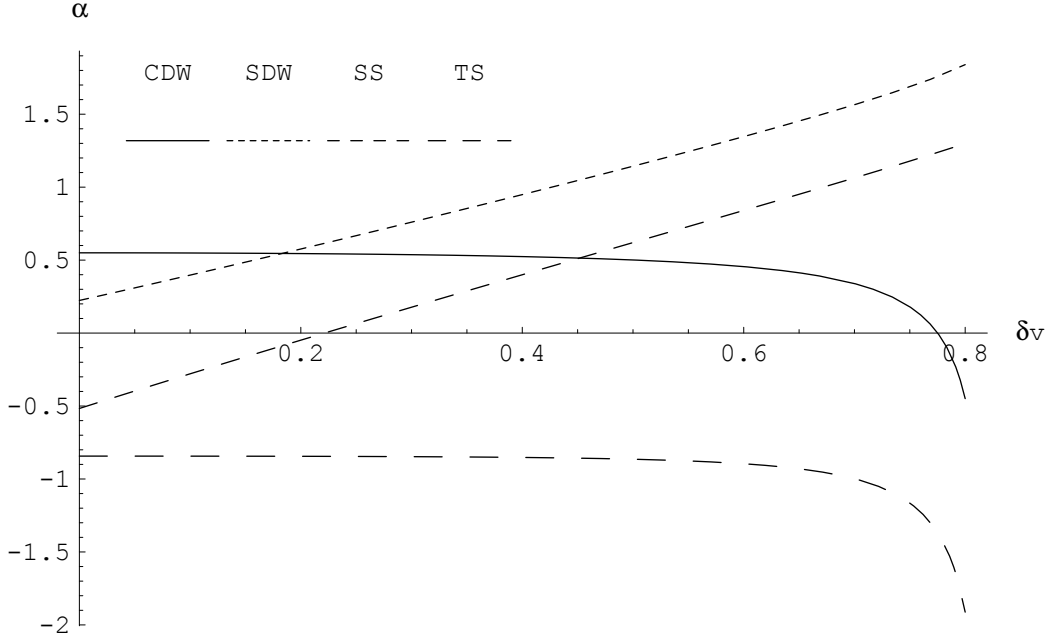


Figura 6.2: Comportamiento de los exponentes α'_i s como función de δv (en unidades de v_0). Para $v_\rho = 1.2v_0$, $v_\sigma = 0.8v_0$, $K_\rho = 0.6$ y $K_\sigma = 0.85$. Para $\delta v \gtrsim 0.16$ las fluctuaciones SDW, xy se vuelven dominantes, y para $\delta v \gtrsim 0.25$ α_{SS} se vuelve positivo, y χ_{SS} divergente para $T \rightarrow 0$.

$$\mu^\lambda = \mu_+^\lambda + \mu_-^\lambda \quad (6.60)$$

$$\nu^\lambda = \nu_+^\lambda + \nu_-^\lambda \quad (6.61)$$

$$\theta^\lambda = \theta_+^\lambda + \theta_-^\lambda. \quad (6.62)$$

Cuando $\delta v \rightarrow 0$, se verifica que $\theta^\lambda \rightarrow 0$, y $\mu^\lambda, \nu^\lambda \rightarrow 1$, de modo que reproducimos los resultados correctos para el caso SO nulo.

Para acoplamiento SO finito, δv es un parámetro que juega un rol en determinar cuál es la función de correlación que decae más lentamente y cuáles son las susceptibilidades divergentes. En la Fig. 6.2 observamos, a modo de ejemplo, el comportamiento de los exponentes como función de δv para $v_\rho = 1.2v_0$, $v_\sigma = 0.8v_0$, $K_\rho = 0.6$ y $K_\sigma = 0.85$. Para δv pequeño, las fluctuaciones CDW son dominantes, pero para $\delta v \gtrsim 0.16v_0$ las correlaciones SDW, xy decaen más lentamente. Para δv pequeño, las fluctuaciones CDW y SDW son las únicas fluctuaciones divergentes para $T \rightarrow 0$, pero para $\delta v \gtrsim 0.25v_0$, α_{SS} se vuelve positivo y χ_{SS} divergente para $T \rightarrow 0$. Cálculos de la estructura de bandas electrónicas modificadas

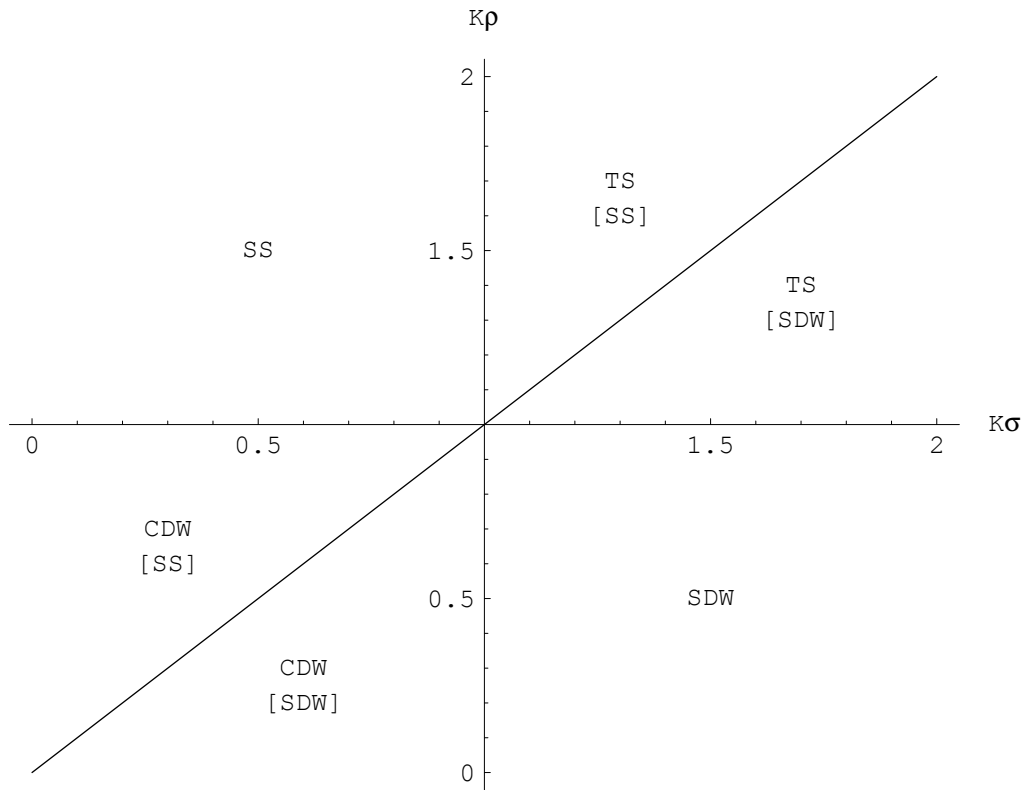


Figura 6.3: Diagrama de fases en el espacio $K_\rho - K_\sigma$. Las fases entre corchetes son subdominantes, que se vuelven dominantes para acoplamiento SO suficientemente fuerte.

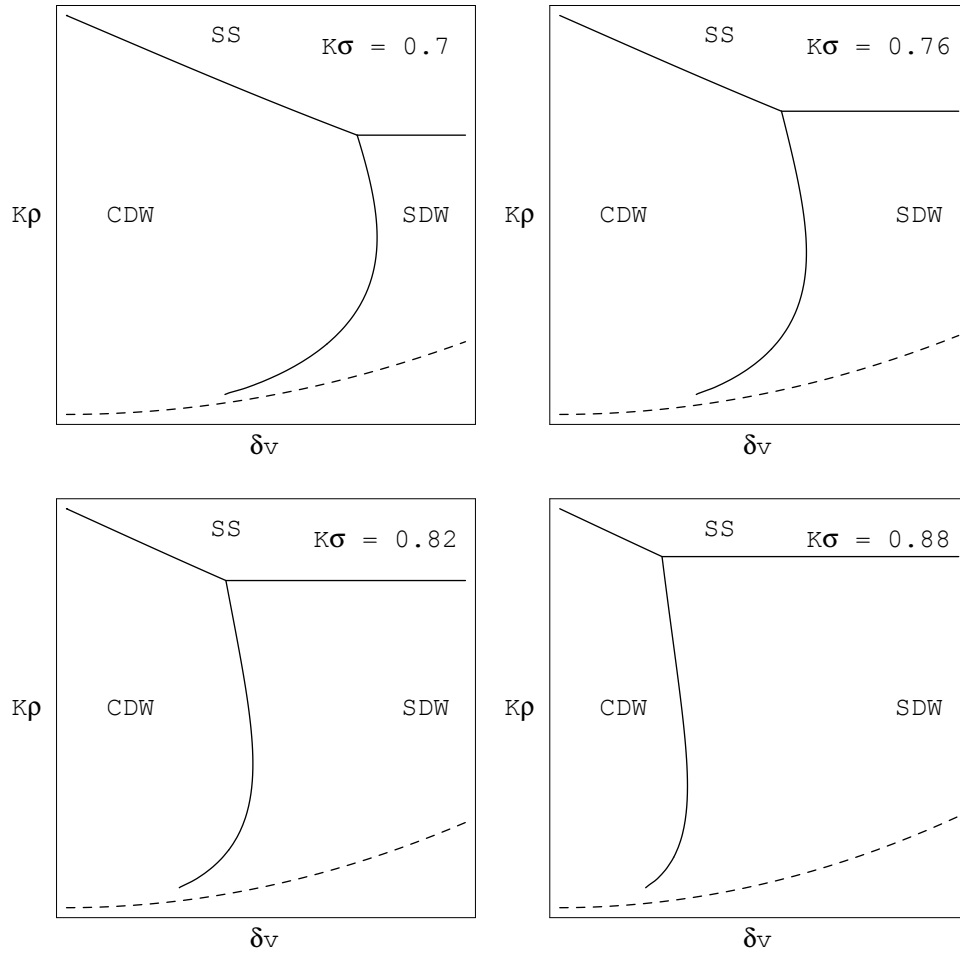


Figura 6.4: Diagrama de fases en el espacio $K_\rho - \delta v$ para $v_\rho = 1.2v_0$, $v_\sigma = 0.8v_0$ y diferentes valores de K_σ . $\delta v > \delta v_\sigma$ debajo de la línea punteada y ocurre el metamagnetismo.

por el acoplamiento SO muestran que estos valores de δv deberían corresponder a sistemas de electrones cuasi unidimensionales típicos.

Un análisis cuidadoso de los exponentes nos permite construir un diagrama de fases en el espacio $K_\rho - K_\sigma$. (Fig. 6.3). En cada región indicamos las fluctuaciones dominantes para δv pequeño, y entre corchetes las dominantes para δv mayores. Otras fluctuaciones subdominantes no están indicadas. En la Fig. 6.4 se observan cortes del diagrama de fases en el espacio $K_\rho - \delta v$ para $K_\rho < 1$ y diferentes valores de K_σ . Para δv pequeño las fluctuaciones CDW dominan, y para δv más grande, el sistema puede encontrarse en la fase SDW o SS dependiendo de los valores de K_ρ y K_σ . En la región debajo de la línea punteada, $\delta v < \delta v_\sigma$, la susceptibilidad estática de spin se vuelve negativa, y tiene lugar el metamagnetismo.

6.4 Conclusiones

En este capítulo hemos calculado funciones de correlación para operadores de fluctuaciones de ondas de densidad de carga y spin, y superconductividad singulete y triplete en un modelo de electrones altamente correlacionados en una dimensión con acoplamiento spin-órbita. El cálculo se realizó en función de la temperatura, y al final se estudiaron las funciones instantáneas y a temperatura cero. El acoplamiento spin-órbita destruye la separación spin-carga como se mostró en las Ref. 37, 38 y modifica los exponentes de los decaimientos de las correlaciones. Como consecuencia se modifica el diagrama de fases del sistema. Un acoplamiento spin-órbita suficientemente fuerte, es responsable de un cambio en las fluctuaciones dominantes y de promover que nuevas susceptibilidades se vuelvan divergentes para $T \rightarrow 0$.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado diversos aspectos teóricos de los sistemas de electrones altamente correlacionados en una dimensión espacial. En particular hicimos hincapié en el tratamiento del modelo de Tomonaga-Luttinger con spin y algunas de sus extensiones, mediante el procedimiento de la bosonización. Al aplicar este método a sistemas de materia condensada, el primer punto en el que hay que detenerse es en el cálculo del determinante fermiónico asociado a la teoría. Como el determinante está mal definido se debe implementar un mecanismo de regularización. El método elegido viene usualmente dictado por las simetrías que posea el modelo en cuestión. En teorías de materia condensada la ausencia de invarianza de Lorentz, otorga una libertad aún mayor para elegir el regulador. En el capítulo 3 mostramos que al utilizar el regulador usual que preserva la invarianza de Gauge y de Lorentz en teorías de campos relativistas se arriba a resultados que no concuerdan con los obtenidos mediante el camino usual de bosonización operacional en materia condensada, y encontramos la forma exacta que debe tener este regulador para reproducirlos. Como corolario obtenemos el jacobiano de las transformaciones quirales, base del desacople fermiónico mediante integrales funcionales [41]. Desafortunadamente, un principio físico que sirva de guía para elegir a priori el regulador todavía falta, aunque lo mismo ocurre en el enfoque operacional.

En el capítulo 4 empleamos el método de bosonización funcional, mejorado de acuerdo a lo dicho anteriormente, para estudiar el modelo de Thirring no local con interacciones que invierten el spin electrónico (los tratamientos previos de las interacciones de inversión de spin condujeron a un modelo no abeliano en el cual el análisis del contenido físico se vuelve engorroso). Restringiéndonos al caso de interacciones de inversión de spin locales, obtuvimos una acción bosónica efectiva cuyos grados de libertad de carga coinciden con los encontrados en el capítulo 3 al tratar el problema de dispersión hacia adelante sin spin. Respecto del sector de spin, que es el de mayor interés, hallamos que se corresponde con un modelo seno-Gordon no local, cuya integrabilidad, en contraste con el caso local, no ha sido demostrada hasta el momento. A pesar de este hecho, pudimos mostrar explícitamente que ambos sectores se desacoplan dando lugar a la separación spin-carga [42].

En el capítulo 5 revemos la aproximación armónica autoconsistente, y su aplicación a sistemas de materia condensada. En particular hacemos una extensión que permite atacar problemas no locales, y obtenemos una expresión para el gap del sector de spin del modelo introducido en el capítulo 4 como función de los potenciales de dispersión hacia adelante. Por otro lado, como una leve digresión con respecto a la línea principal de esta tesis, proponemos un camino diferente al usual para la determinación del parámetro asociado a la aproximación, basado en una consecuencia del teorema c de Zamolodchikov en teorías de campos conformes. Verificamos la validez de la nueva técnica en el modelo seno-Gordon, en el que obtenemos una mejora en los valores aproximados para la masa del soliton como función de la constante de acoplamiento β del modelo, con respecto a los predichos mediante el procedimiento usual. Por último aplicamos la nueva técnica al estudio de un problema no trivial, para el cual existen escasos resultados analíticos: el modelo de Ising bidimensional a $T \neq T_c$ y $h \neq 0$. Hallamos una expresión aproximada que relaciona la longitud de correlación ξ , $T - T_c$ y h y que resolvemos numéricamente para obtener ξ como función de $T - T_c$ y h . [43].

Finalmente en el capítulo 6 calculamos funciones de correlación en sistemas de electrones altamente correlacionados en una dimensión en los que los grados de libertad de carga y spin se encuentran acoplados a través de la interacción spin-órbita. Esta interacción rompe la separación spin-carga [37,38] y modifica los exponentes de los decaimientos de las correlaciones. Estudiamos fluctuaciones de tipo ondas de densidad de carga y spin, y de tipo superconductor singlete y triplete como función del espacio-tiempo euclídeo y de la temperatura. Además investigamos las funciones de correlación instantáneas a temperatura cero, que nos permiten extraer los exponentes críticos. Mostramos que la interacción spin-órbita modifica los exponentes del decaimiento de las funciones de correlación y el diagrama de fases del sistema. Además encontramos que susceptibilidades que eran finitas a bajas temperaturas, pueden ahora volverse divergentes a causa de la interacción spin-órbita [44].

Apéndice A

Propagador bosónico a temperatura finita

En este apéndice describiremos el cálculo del propagador [16, 39, 48]

$$\Delta^{-1}(x, \tau; \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-ikx - i\omega_n \tau}}{\omega_n^2 + v^2 k^2} \quad (\text{A.1})$$

donde $\omega_n = 2n\pi/\beta$ son las frecuencias de Matsubara y $\tau \in [0, \beta]$ ($\Delta^{-1}(x, \tau; \beta)$ es periódica en τ con período β). Esta función es divergente en el infrarojo, pero nosotros en realidad estamos interesados en la combinación

$$\Delta^{-1}(x, \tau; \beta) - \Delta^{-1}(0, 0; \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-\epsilon|k|} \frac{e^{-ikx - i\omega_n \tau} - 1}{\omega_n^2 + v^2 k^2} \quad (\text{A.2})$$

que es regular en esa región. El término sustraído, sin embargo, es divergente en el ultravioleta, razón por la cual hemos agregado un factor $e^{-\epsilon|k|}$ que regulariza dicha divergencia.

A continuación escribimos $e^{-i\omega_n \tau}$ en términos del seno y el coseno y nos quedamos únicamente con el término del coseno, ya que el del seno es nulo por simetría. La sumatoria resultante puede ser fácilmente evaluada mediante el método de los residuos, o consultada la Ref. 121:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \cosh a(\pi - x)}{2a \sinh a\pi} - \frac{1}{2a^2}. \quad (\text{A.3})$$

Utilizando este resultado, obtenemos entonces

$$\Delta^{-1}(x, \tau; \beta) - \Delta^{-1}(0, 0; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{4\pi v |k|} \frac{e^{-ikx} \cosh \frac{|k|v}{2}(\beta - 2\tau) - \cosh \frac{|k|v\beta}{2}}{\sinh \frac{|k|v\beta}{2}} e^{-\epsilon|k|}. \quad (\text{A.4})$$

Para calcular la integral antes debemos partir la integral en 0 y en el término integrado en la región negativa de k hacer el cambio $k \rightarrow -k$. Además reescribimos las funciones hiperbólicas en términos de exponenciales, obteniendo

$$\Delta^{-1}(x, \tau; \beta) - \Delta^{-1}(0, 0; \beta) = \int_0^\infty \frac{dk}{4\pi vk} e^{-\epsilon k} \frac{(e^{-ikx} + e^{ikx})(e^{-kv\tau} + e^{-kv(\beta-\tau)}) - 2(1 + e^{-kv\beta})}{1 - e^{-kv\beta}} \quad (\text{A.5})$$

$$= - \int_0^\infty \frac{dk}{4\pi vk} e^{-\epsilon k} \frac{(1 - e^{-sk})(1 - e^{(s-r)k})}{1 - e^{-rk}} + (s \rightarrow s^*) \quad (\text{A.6})$$

$$= - \int_0^\infty \frac{dk}{4\pi vk} e^{-\epsilon k/r} \frac{(1 - e^{-sk/r})(1 - e^{-(1-s/r)k})}{1 - e^{-k}} + (s \rightarrow s^*) \quad (\text{A.7})$$

donde $s = v\tau + ix$ y $r = v\beta$. Esta última integral tiene forma estandar, (3.413(.1)) en la Ref. 121. Con este resultado,

$$\Delta^{-1}(x, \tau; \beta) - \Delta^{-1}(0, 0; \beta) = \frac{1}{4\pi v} \ln \frac{\Gamma(\epsilon/r + s/r)\Gamma(1 + \epsilon/r - s/r)}{\Gamma(\epsilon/r)\Gamma(1 + \epsilon/r)} + (s \rightarrow s^*) \quad (\text{A.8})$$

donde Γ es la función gamma. Para simplificar este resultado reemplazamos en la ecuación anterior $1 + \epsilon/r$ por $1 - \epsilon/r$, cambio chico si ϵ es chico, además usamos que $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi / \sin \pi z$ para dar finalmente.

$$\Delta^{-1}(x, \tau; \beta) - \Delta^{-1}(0, 0; \beta) = \frac{1}{4\pi v} \ln \frac{\sin \pi \epsilon/r}{\sin \pi (\epsilon/r + s/r)} + (s \rightarrow s^*) \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{4\pi v} \ln \frac{\sin \frac{\pi \epsilon}{v\beta}}{\sin \frac{\pi}{v\beta}(\epsilon + v\tau + ix)} + (c.c.). \quad (\text{A.10})$$

Las restantes integrales (6.33)-(6.43) se evalúan utilizando el método de fracciones simples, seguido del procedimiento descrito en este apéndice. A continuación damos los resultados:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi\beta} \int_{-\infty}^\infty dk \sum_{n=-\infty}^\infty (1 - e^{-ikx - i\omega_n \tau}) e^{-\epsilon|k|} \frac{(\omega_n^2 + a^2 k^2)}{(\omega_n^2 + b^2 k^2)(\omega_n^2 + c^2 k^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi b} \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2} \right) \ln \frac{\sin \frac{\pi}{b\beta}(\epsilon + b\tau + ix)}{\sin \frac{\pi \epsilon}{b\beta}} + \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2} \right) \ln \frac{\sin \frac{\pi}{c\beta}(\epsilon + c\tau + ix)}{\sin \frac{\pi \epsilon}{c\beta}} + c.c. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-ikx - i\omega_n\tau}) e^{-\epsilon|k|} \frac{i\omega_n k}{(\omega_n^2 + b^2 k^2)(\omega_n^2 + c^2 k^2)} \\
&= \frac{\text{sign } x\tau}{2\pi} \left[\frac{1}{b^2 - c^2} \ln \sin \frac{\pi}{b\beta} (\epsilon + b\tau - ix) + \frac{1}{c^2 - b^2} \ln \sin \frac{\pi}{c\beta} (\epsilon + c\tau - ix) \right] + c.c. \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-ikx - i\omega_n\tau}) e^{-\epsilon|k|} \frac{i\omega_n}{k(\omega_n^2 + b^2 k^2)(\omega_n^2 + c^2 k^2)} \\
&= \frac{\text{sign } x\tau}{2\pi} \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2} \right) \ln \sin \frac{\pi}{b\beta} (\epsilon + b\tau - ix) + \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2} \right) \ln \sin \frac{\pi}{c\beta} (\epsilon + c\tau - ix) \right] + c.c. \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

Apéndice B

Diagonalización del Hamiltoniano bosónico

Supongamos por simplicidad, una versión de dos grados de libertad de nuestro Hamiltoniano bosónico 6.5 de la forma

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_2\omega_2^2}{2}q_2^2 + \delta(q_1p_2 + q_2p_1). \quad (\text{B.1})$$

Para diagonalizar este Hamiltoniano no podemos emplear una transformación de similitud porque resulta no canónica debido a los términos que mezclan coordenadas e impulsos. En su lugar emplearemos métodos simplécticos como se describen en la segunda edición del libro de Goldstein [122].

En forma general, tomamos un Hamiltoniano de n grados de libertad y construimos un vector ξ con $2n$ elementos compuesto por las n coordenadas q_i y los n momentos p_i . Las ecuaciones de Hamilton en notación simpléctica se escriben

$$\dot{\xi} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (\text{B.2})$$

donde \mathbf{J} , que es la matriz cuadrada de $2n \times 2n$ compuesta por las matrices de $n \times n$ nula e identidad, según el esquema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Mencionamos algunas propiedades de estas matrices. Su cuadrado es la identidad cambiada de signo

$$\mathbf{J}^2 = -1. \quad (\text{B.4})$$

Es también ortogonal:

$$\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{J} = \mathbf{1} \quad (\text{B.5})$$

con lo cual

$$\tilde{\mathbf{J}} = -\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}. \quad (\text{B.6})$$

De su ortogonalidad se deduce que el cuadrado de su determinante es 1, si bien se puede probar la afirmación más fuerte

$$\det \mathbf{J} = +1. \quad (\text{B.7})$$

Una transformación canónica es una transformación de las coordenadas y los impulsos de la forma

$$Q_i = Q_i(q, p), \quad P_i = P_i(p, q) \quad (\text{B.8})$$

donde P_i y Q_i son las nuevas coordenadas e impulsos, que preserva sus conmutadores cuánticos (o corchetes de Poisson en el caso clásico). En notación simpléctica, si definimos al vector η de las nuevas coordenadas e impulsos, la transformación resulta

$$\xi = \xi(\eta), \quad (\text{B.9})$$

y la condición para que la transformación resulte canónica (llamada condición simpléctica) se escribe

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{J} \quad (\text{B.10})$$

donde \mathbf{M} es la matriz jacobiana de la transformación y $\tilde{\mathbf{M}}$ su matriz traspuesta.

Sea H un Hamiltoniano cuadrático general de n grados de libertad

$$H = \frac{1}{2} \xi \mathbf{S} \xi \quad (\text{B.11})$$

donde \mathbf{S} es una matriz cuadrada simétrica constante. Para hallar la transformación canónica lineal que lo diagonaliza, apelaremos a las ecuaciones clásicas de movimiento. Las ecuaciones de Hamilton para este sistema resultan

$$\dot{\xi} = \mathbf{J}\mathbf{S}\xi. \quad (\text{B.12})$$

Para resolverlas se puede proponer el ansatz

$$\xi = a e^{i\omega t} \quad (\text{B.13})$$

donde a es un vector constante. La ecuación para a resultante de reemplazar este ansatz en (B.12) es

$$-i\mathbf{J}\mathbf{S}a = \omega a \quad (\text{B.14})$$

es una ecuación de autovectores, donde los autovalores ω resultan las frecuencias características del sistema. Sea \mathbf{U} una matriz de un conjunto posible de vectores propios de $-i\mathbf{J}\mathbf{S}$ ordenados en columnas tales que sólo sus direcciones están fijas, no sus módulos, y sea $\mathbf{D} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n, -\omega_1, \dots, -\omega_n)$ la matriz de los autovalores. La ecuación (B.14) se escribe en términos de \mathbf{U} y \mathbf{D} como

$$-i\mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{D}. \quad (\text{B.15})$$

Ahora bien, la matriz \mathbf{U} no es en general la matriz de ninguna transformación canónica, ya que no cumple la condición simpléctica (B.10). Mostraremos que es posible fijar condiciones sobre los módulos c_k de los autovectores de modo tal que la nueva matriz de autovectores cumpla con dicha condición. Para ello introducimos la matriz de los módulos $\mathbf{C} = \text{diag } c_k$, y definimos $\mathbf{M} = \mathbf{C}\mathbf{U}$ como una nueva matriz de autovectores, donde cada autovector está multiplicado por una constante c_k a determinar. Si le exigimos a \mathbf{M} que cumpla la condición simpléctica, entonces

$$\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{J}, \quad (\text{B.16})$$

y multiplicando por $\tilde{\mathbf{U}}^{-1}$ a izquierda y por \mathbf{U}^{-1} a derecha obtenemos

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{J}\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}^{-1} \quad (\text{B.17})$$

que resultan ecuaciones cuadráticas para los c_k .

Una vez obtenida la matriz de la transformación canónica, podemos transformar el Hamiltoniano reemplazando $\xi = \mathbf{M}\eta$, lo que resulta

$$H = \frac{1}{2}\xi\mathbf{S}\xi = \frac{1}{2}\eta\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{S}\mathbf{M}\eta. \quad (\text{B.18})$$

Por la propiedad (B.4), H se puede escribir

$$H = \frac{-i}{2}\eta\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{J}(-i\mathbf{J}\mathbf{S})\mathbf{M}\eta \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{-i}{2}\eta\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}\mathbf{D}\eta \quad (\text{B.20})$$

$$= \frac{-i}{2}\eta\mathbf{J}\mathbf{D}\eta, \quad (\text{B.21})$$

donde hemos usado la ecuación de autovectores (B.15), que también satisface \mathbf{M} , y la condición simpléctica para \mathbf{M} . Finalmente si empleamos la definición de \mathbf{D} y \mathbf{J} , en términos de las nuevas coordenadas e impulsos \tilde{q}_i y \tilde{p}_i (que componen η), el Hamiltoniano se escribe

$$H = i\omega_i \tilde{q}_i \tilde{p}_i \quad (\text{B.22})$$

Por último, mediante la transformación canónica

$$\tilde{q}_i = Q_i - i\frac{P_i}{\omega_i}, \quad (\text{B.23})$$

$$\tilde{p}_i = \frac{P_i}{2} - \frac{i\omega_i Q_i}{2}, \quad (\text{B.24})$$

H resulta diagonal:

$$H = P_i^2 + \frac{\omega_i^2}{2} Q_i^2. \quad (\text{B.25})$$

Apéndice C

Identidad útil para el cálculo de valores medios bosónicos

En este apéndice probaremos la identidad

$$\left\langle \exp \left\{ i \sum_k \beta_k [\varphi_k(x) - \varphi_k(0)] \right\} \right\rangle = \exp \left\{ \sum_{i,j} \beta_i \beta_j [\Delta_{ij}^{-1}(x) - \Delta_{ij}^{-1}(0)] \right\} \quad (\text{C.1})$$

donde φ es un campo bosónico y $\Delta_{ij}^{-1}(x)$ es el valor medio bosónico

$$\langle \varphi_i(x) \varphi_j(y) \rangle = \Delta_{ij}^{-1}(x - y). \quad (\text{C.2})$$

La identidad (C.1) es válida para valores medios calculados con acciones bosónicas cuadráticas en el campo φ . Sea S una acción de este tipo

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \varphi_i(x) \Delta_{ij} \varphi_j(x) \quad (\text{C.3})$$

donde Δ_{ij} es un operador simétrico en los índices i y j . La función $\Delta_{ij}^{-1}(x)$ resulta ser entonces la función de Green de este operador. El lado izquierdo de (C.1) se puede calcular mediante el siguiente procedimiento:

$$\left\langle \exp \left\{ i \sum_k \beta_k [\varphi_k(x) - \varphi_k(0)] \right\} \right\rangle = \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^2x' \varphi_i(x') \Delta_{ij} \varphi_j(x') + i \sum_k \beta_k [\varphi_k(x) - \varphi_k(0)] \right\} \quad (\text{C.5})$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^2x' \varphi_i(x') \Delta_{ij} \varphi_j(x') + \int d^2x' \varphi_k(x') i\beta_k [\delta(x' - x) - \delta(x')] \right\} \quad (\text{C.6})$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^2x' \varphi_i(x') \Delta_{ij} \varphi_j(x') - \int d^2x' \varphi_k(x') j_k(x', x) \right\} \quad (\text{C.7})$$

donde \mathcal{Z}_0 es la función de partición

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^2x' \varphi_i(x') \Delta_{ij} \varphi_j(x') \right\} \quad (\text{C.8})$$

y definimos

$$j_k(x', x) = -i\beta_k [\delta(x' - x) - \delta(x')]. \quad (\text{C.9})$$

que es independiente de los campos. A continuación hacemos una traslación en el campo φ

$$\varphi_i(x') \rightarrow \varphi_i(x') + \int d^2y \Delta_{ik}^{-1}(x' - y) j_k(y, x). \quad (\text{C.10})$$

Este es el único cambio en la integral funcional porque la medida de integración funcional es invariante frente a traslaciones. Finalmente, el valor medio queda

$$\left\langle \exp \left\{ i \sum_k \beta_k [\varphi_k(x) - \varphi_k(0)] \right\} \right\rangle \quad (\text{C.11})$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^2x' d^2y j_i(x', x) \Delta_{ij}^{-1}(x' - y) j_j(y, x) \right\} \quad (\text{C.12})$$

$$= \exp \left\{ \sum_{i,j} \beta_i \beta_j [\Delta_{ij}^{-1}(x) - \Delta_{ij}^{-1}(0)] \right\} \quad (\text{C.13})$$

donde en el último paso hemos reemplazado $j_k(x', x)$ por su definición (C.9), e integramos en x' e y .

Bibliografía

- [1] A. Sommerfeld, Z. Physik **47**, 1 (1928).
- [2] W. Pauli, Z. Physik **41**, 81 (1926).
- [3] F. Bloch, Z. Physik **57**, 545 (1929).
- [4] E. P. Wigner, Phys. Rev. **46**, 1002 (1934).
- [5] L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 1058 (1956).
- [6] L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32**, 59 (1957).
- [7] P. Nozières, *Interacting Fermi Systems*, W. A. Benjamin Inc., 1964.
- [8] M. Bockrath, D. H. Cobden, J. Lu, A. G. Rinzler, R. E. Smalley, T. Ballents, y P. L. McEuen, Nature **397**, 598 (1999).
- [9] X. G. Wen, Phys. Rev. B **41**, 12838 (1990).
- [10] X. G. Wen, Phys. Rev. Lett **64**, 2206 (1990).
- [11] W. Kang, H. L. Stomer, K. W. Baldwin, L. N. Pfeiffer, y K. W. West, Nature **403**, 59 (2000).
- [12] D. Jérôme y H. J. Schulz, Adv. Phys. **31**, 299 (1982).
- [13] S. Tarucha, T. Honda, y T. Saku, Solid State Comm. **94**, 413 (1995).
- [14] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).
- [15] J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
- [16] D. C. Mattis y E. H. Lieb, J. Math. Phys **6**, 304 (1963).
- [17] J. Voit, Rep. Prog. Phys. **58**, 977 (1995).
- [18] F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).

- [19] P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **64**, 1839 (1990).
- [20] P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **65**, 2306 (1990).
- [21] H. W. C. Postma, M. de Jonge, Z. Yao, y C. Dekker, Phys. Rev. B **62**, R10653 (2000).
- [22] B. Gao, A. Komnik, R. Egger, D. C. Glattli, y A. Bachtold, cond-mat/0311645 .
- [23] M. Hilke, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, y K. W. West, J. Phys. Soc. Jpn. **72**, 92 (2003).
- [24] Y. Tserkovnyak, B. I. Halperin, O. M. Auslaender, y A. Yacoby, cond-mat/0312159 .
- [25] D. C. Mattis, J. Math. Phys **15**, 609 (1974).
- [26] A. Luther y I. Peschel, Phys. Rev. B **9**, 2911 (1974).
- [27] B. Klaiber, en *Lectures in Theoretical Physics*, editado por A. Barut, Gordon and Reach, 1968.
- [28] S. Coleman, Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975).
- [29] S. Mandelstam, Phys. Rev. D **11**, 3026 (1975).
- [30] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979).
- [31] K. Furuya, R. E. G. Saraví, y F. A. Schaposnik, Nucl. Phys. B **208**, 159 (1982).
- [32] C. M. Naón, Phys. Rev. D **31**, 2035 (1985).
- [33] H. C. Fogebdy, J. Phys. C **9**, 3757 (1976).
- [34] D. K. K. Lee y Y. Chen, J. Phys. A **21**, 4155 (1988).
- [35] C. M. Naón, M. C. von Reichenbach, y M. L. Trobo, Nucl. Phys. B **435**[FS], 567 (1995).
- [36] A. Iucci y C. Naón, Phys. Rev. B **61**, 15530 (2000).
- [37] A. V. Moroz, K. V. Samokhin, y C. H. W. Barnes, Phys. Rev. Lett **84**, 4164 (2000).
- [38] A. V. Moroz, K. V. Samokhin, y C. H. W. Barnes, Phys. Rev. B **62**, 16900 (2000).
- [39] J. von Delft y H. Schoeller, Ann. Phys. (Leipzig) **7**, 225 (1998).
- [40] C. M. Varma, Z. Nussinov, y W. van Saarloos, Phys. Rep. **361**, 267 (2002).
- [41] A. Iucci y C. M. Naón, hep-th/0311128 .
- [42] A. Iucci, K. Li, y C. M. Naón, Nucl. Phys. B **601**[FS], 607 (2001).

- [43] A. Iucci y C. M. Naón, *J. Phys. A* **35**, 8005 (2002).
- [44] A. Iucci, *Phys. Rev. B* **68**, 075107 (2003).
- [45] V. I. Fernández, A. Iucci, y C. M. Naón, *Nucl. Phys. B* **636**[FS], 514 (2002).
- [46] V. I. Fernández, A. Iucci, y C. M. Naón, *Eur. Phys. J. B* **30**, 53 (2002).
- [47] J. W. Negele y H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, Addison-Wesley, 1988.
- [48] V. J. Emery, en *Highly Conducting One-Dimensional Solids*, editado por J. T. Devreese et al., page 247, Plenum, New York, 1979.
- [49] H. Bethe, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931).
- [50] J. Solyom, *Adv. Phys.* **28**, 209 (1979).
- [51] P. Ramond, *Field Theory, a modern premier*, Cambridge University Press, 1996.
- [52] K. Fujikawa, *Phys. Rev. D* **21**, 2848 (1980).
- [53] K. Fujikawa, *Phys. Rev. D* erratum **22**, 1499 (1980).
- [54] R. Roskies y F. Schaposnik, *Phys. Rev. D* **23**, 558 (1981).
- [55] R. E. G. Saraví, F. A. Schaposnik, y J. E. Solomin, *Nucl. Phys. B* **185**, 239 (1981).
- [56] M. Stone, *Bosonization*, World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd., 1994.
- [57] M. Rubin, *J. Phys. A* **19**, 2105 (1986).
- [58] D. Cabra y F. Schaposnik, *J. Math. Phys.* **30**, 816 (1989).
- [59] R. Jackiw y R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1219 (1985).
- [60] R. Jackiw y R. Rejaraman, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 224 (1985).
- [61] K. Fujikawa y H. Suzuki, hep-th/0305008 .
- [62] H. Schulz, G. Cuniberti, y P. Pieri, en *Field Theories for Low-Dimensional Condensed Matter Systems*, editado por G. Morandi et al., Springer, 2000.
- [63] S. Rao y D. Sen, en *Field Theories in Condensed Matter Systems*, editado por S. Rao, page 239, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2001.
- [64] R. E. G. Saraví, M. A. Muschietti, F. A. Schaposnik, y J. E. Solomin, *Ann. Phys. (NY)* **157**, 360 (1984).

- [65] T. Giamarchi, Phys. Rev. B **44**, 2905 (1991).
- [66] C. M. Naón, M. C. von Reichenbach, y M. L. Trobo, Nucl.Phys. B **485**[FS], 665 (1997).
- [67] M. V. Manías, C. M. Naón, y M. L. Trobo, Nucl. Phys. B **525**[FS], 721 (1998).
- [68] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, 1997.
- [69] G. Grinstein, P. Minnhagen, y A. Rosengren, J. Phys. C **12**, 1271 (1979).
- [70] K. Li y C. M. Naón, J. Phys. A **31**, 7929 (1998).
- [71] A. Luther y V. J. Emery, Phys. Rev. Lett. **33**, 589 (1974).
- [72] Y. Saito, Z. Phys. B **32**, 75 (1978).
- [73] M. P. A. Fisher y W. Zwerger, Phys. Rev. B **32**, 6190 (1985).
- [74] A. O. Gogolin, Phys. Rev. Lett. **71**, 2995 (1993).
- [75] N. V. Prokof'ev, Phys. Rev. B **49**, 2243 (1994).
- [76] R. Egger y H. Grabert, Phys. Rev. Lett. **75**, 3505 (1995).
- [77] B. W. Xu y Y. M. Zhang, J. Phys. A **29**, 7349 (1996).
- [78] M. Stevenson, Phys. Rev. D **30**, 1712 (1984).
- [79] M. Stevenson, Phys. Rev. D **32**, 1389 (1985).
- [80] R. Ingermanson, Nucl. Phys. B **266**, 620 (1986).
- [81] M. Stevenson, Phys. Rev. D **23**, 2916 (1981).
- [82] S. K. Kauffman y S. M. Perez, J. Phys. A **17**, 2027 (1984).
- [83] R. Dashen, B. Hasslacher, y A. Neveu, Phys. Rev. D **11**, 3424 (1975).
- [84] G. Delfino y G. Mussardo, Nucl. Phys. B **516**, 675 (1998).
- [85] J. Voit, Phys. Rev. B **45**, 4027 (1992).
- [86] H. J. Schulz, Phys. Rev. B **53**, R2959 (1996).
- [87] D. Boyanovsky y C. Naón, Riv. Nuovo Cimento **13**, 1 (1990).
- [88] P. D. Francesco, P. Mathieu, y D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1999.

- [89] A. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 1125 (1995).
- [90] B. M. McCoy y T. T. Wu, *Phys. Rev. D* **18**, 1259 (1978).
- [91] B. M. McCoy, en *Statistical Mechanics and Field Theory*, editado por V. V. Bazhanov y C. J. Burden, pages 26–128, World Scientific, Singapore, 1995.
- [92] G. Delfino, G. Mussardo, y P. Simonetti, *Nucl. Phys. B* **473**, 469 (1996).
- [93] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics - A set of Lectures*, W. A. Benjamin Inc., 1972.
- [94] A. B. Zamolodchikov, *JETP Lett.* **43**, 730 (1986).
- [95] J. L. Cardy, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2709 (1988).
- [96] J. L. Cardy, *J. Phys. A* **21**, L797 (1988).
- [97] R. Hecht, *Phys. Rev.* **158**, 557 (1967).
- [98] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, y E. Barouch, *Phys. Rev. D* **13**, 316 (1976).
- [99] A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **342**, 695 (1990).
- [100] V. A. Fateev, *Phys. Lett. B* **324**, 45 (1994).
- [101] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, y A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **241**, 333 (1984).
- [102] D. Friedan, Z. Qiu, y S. Shenker, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1575 (1984).
- [103] G. Dresselhaus, *Phys. Rev.* **100**, 580 (1955).
- [104] E. I. Rashba, *Fiz. Tverd. Tela (Leningrad)* **2**, 1224 (1960).
- [105] J. Nitta, T. Akazaki, H. Takayanagi, y T. Enoki, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1335 (1997).
- [106] T. Hassenkam, S. Pedersen, K. Baklanov, K. Kristensen, C. B. Sorensen, P. E. Lindelof, F. G. Pikus, y G. E. Pikus, *Phys. Rev. B* **55**, 9298 (1997).
- [107] G. Meier, T. Matsuyama, y U. Merkt, *Phys. Rev. B* **65**, 125327 (2002).
- [108] J. B. Miller, D. M. Zymbuhl, C. M. Marcus, Y. B. Lyanda-Geller, D. Goldhaber-Gordon, K. Campman, y A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 076807 (2003).
- [109] S. A. Wolf, *Science* **294**, 1488 (2001).
- [110] A. G. Aronov y Y. B. Lyanda-Geller, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 343 (1993).
- [111] T. Koga, J. Nitta, H. Takayanagi, y S. Datta, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 126601 (2002).

- [112] S. Datta y B. Das, Appl. Phys. Lett., **56**, 665 (1990).
- [113] A. Yacoby, H. L. Stormer, N. S. Wingreen, K. W. Baldwin, y K. W. West, Phys. Rev. Lett **77**, 4612 (1996).
- [114] A. V. Moroz y C. H. W. Barnes, Phys. Rev. B **60**, 14272 (1999).
- [115] T. Giamarchi y H. J. Schulz, Phys. Rev. B **39**, 4620 (1989).
- [116] J. Drut y D. Cabra, J. Phys.:Condens. Matter **15**, 1445 (2003).
- [117] K. Penc y F. Mila, Phys. Rev. B **49**, 9670 (1994).
- [118] M. Ogata, M. U. Luchini, S. Sorella, y F. F. Assaad, Phys. Rev. Lett. **66**, 2388 (1991).
- [119] D. Eckert, K. Ruck, M. Wolf, G. Krabbes, y K. H. Mütter, J. Appl. Phys. **83**, 7240 (1998).
- [120] C. Gerhardt, K. H. Mütter, y H. Kröger, Phys. Rev. B **57**, 11504 (1998).
- [121] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1994.
- [122] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Reverté, 1996.