

Simulação numérica da cuba eletrolítica

F. da Rosa Hollweg, D. Levis e J. Goedert

Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Computação Aplicada - PIPCA

Universidade do Vale do Rio dos Sinos – Unisinos

São Leopoldo, RS - Brazil

`fabiano@turing.unisinos.br`

`darcilevis@fisicashow.com`

`goedert@unisinos.br`

Resumo

Apresenta-se uma versão simulacional da cuba eletrolítica, um experimento usualmente realizado nos cursos introdutórios de eletricidade e magnetismo para mapear campos e potenciais elétricos. Na resolução da equação de Laplace para o potencial dentro da cuba, utiliza-se um método de relaxação de fácil compreensão por parte dos estudantes e didaticamente conveniente porque sugere a fase transiente da formação de cargas induzidas em condutores. Atenção especial é reservada ao estudo do potencial e cargas induzidas em condutores inseridos em um campo elétrico .

PALAVRAS-CHAVE: cuba eletrolítica, equação de Laplace, superfícies equipotenciais, método da relaxação.

Abstract

This paper presents a simulational version of the electrolytic tray, a laboratory experiment frequently proposed in introductory courses on electricity and magnetism to study electric field and equipotentials. Numerically the problem is tackled by solving Laplace's equation inside the tray through a relaxation procedure which is easily followed by the students and didactically convenient because it suggests the transient phase of charge induction in the conductors. Special attention is reserved to the study of the potential and charges induced on conductors inserted in the tray.

KEYWORDS: electrolytic tray, Laplace equation, equipotential surfaces, relaxation method.

1 Introdução

A determinação do potencial e campo elétrico devidos a uma distribuição conhecida de cargas é um processo simples, embora nem sempre de fácil execução. O mesmo não ocorre quando a

distribuição inclui condutores além de cargas. Teoricamente o problema é resolvido mediante a solução da equação de Laplace com condições de contorno adequadas, uma ferramenta com a qual o estudante dos cursos introdutórios de eletricidade e magnetismo normalmente não está familiarizado. Entretanto, é fundamental que o estudante considere este problema já nos cursos introdutórios. De uma perspectiva teórica, o instrutor normalmente se limita a mencionar o fato, dado que a abordagem, nesta altura do desenvolvimento, não contempla o estudo da equação de Laplace. Felizmente as considerações teóricas podem ser convincentemente embasadas em observação experimental, utilizando um arranjo de baixo custo e manejo fácil, conhecido como a cuba eletrolítica. O experimento da cuba eletrolítica, de fácil montagem e execução [1], aborda conceitos e sugere atividades importantes para o entendimento do conceito de equipotenciais e sua relação com o campo elétrico associado. Entre as vantagens deste experimento deve-se mencionar sua fácil montagem e execução, envolvendo materiais e equipamentos de fácil obtenção e manejo, conforme mostrado na Fig. 1a. Entretanto, freqüentemente o estudante encontra dificuldades na percepção completa do fenômeno em análise, sobretudo no que tange às fases transientes do processo de indução e equilíbrio eletrostático final de condutores isolados em presença de campos elétricos. Uma simulação numérica vem complementar o experimento, contribuindo para a fixação e aprofundamento dos conceitos explorados. Além disto, esta atividade oferece a oportunidade de um primeiro contacto com as ferramentas de cálculo analítico e numérico, necessárias no tratamento do problema.

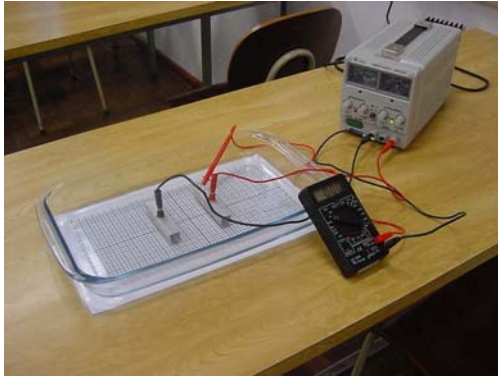
A aparelhagem utilizada na prática laboratorial, ilustrada na Fig. 1, consta de uma bandeja com água, papel milimetrado, uma fonte de tensão, eletrodos de diversas formas e um voltímetro de alta impedância. Uma diferença de potencial é estabelecida entre os eletrodos em contato com a água fracamente condutora. Uma das ponteiros do voltímetro é conectada a um dos eletrodos, enquanto a outra é utilizada como sonda para explorar o campo e mapear o potencial elétrico na bandeja. Linhas equipotenciais são levantadas a partir da localização de pontos com o mesmo valor do potencial. De posse de algumas equipotenciais, pode-se esboçar as linhas do campo elétrico correspondentes. O uso de um voltímetro de alta impedância garante que o campo não será influenciado pela presença da sonda.

Os eletrodos podem ser escolhidos de diferentes formas, o que permite simular configurações diversas como cargas pontuais, capacitores de placas paralelas e outras mais gerais. Além de eletrodos conectados aos terminais da fonte de tensão, pode-se utilizar também eletrodos livres com diferentes formas. Isto permite demonstrar o fato de que condutores em equilíbrio eletrostático estão a potenciais constantes. Este fato, facilmente constatado no experimento real, pode ser simulado numericamente, mediante um processo de relaxação de fácil implementação e compreensão por parte do estudante. A dificuldade com este algoritmo é sua lenta convergência, o que dificulta a obtenção de dados suficientemente precisos e convincentes. De qualquer forma produz resultados capazes de demonstrar o fenômeno da indução de cargas sobre condutores, um fenômeno de importância maior no entendimento dos mecanismos básicos de condução elétrica.

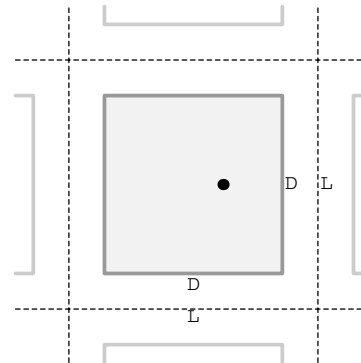
2 O algoritmo numérico

Na solução numérica da cuba eletrolítica o potencial é determinado pela solução numérica da equação de Laplace em duas dimensões, com condições de contorno apropriadas em cada condutor ou eletrodo. Estas condições são determinadas pelo valor do potencial ajustado em cada eletrodo. Para eletrodos livres, onde o potencial não é conhecido de antemão, utilizamos

um processo de relaxação no qual o potencial é sucessivamente substituído por valores que aproximam seu valor na região correspondente ao espaço ocupado pelo condutor no experimento real. Este processo de substituição por valores aproximados utiliza, como critério de escolha, a condição de que a carga total induzida no condutor tenda para zero. Basicamente utiliza-se a equação de Poisson para a determinação das cargas polarizadas para cada valor do potencial.



(a) Foto do equipamento



(b) Esquema numérico

Figura 1: Montagem experimental e esquema para representação numérica da cuba.

A medida que a soma algébrica das cargas polarizadas tende para zero o potencial no condutor isolado tende para seu valor de equilíbrio. A técnica produz os resultados esperados, mas, é numericamente dispendiosa e seu uso se justifica, sobretudo por seu valor didático e facilidade de implementação. Em verdade não encontramos na literatura nenhuma referência a alternativas para esta abordagem do problema. Ao que tudo indica, este problema deve mesmo ser resolvido via técnicas de relaxação.

Teoricamente a bandeja pode ser considerada, dentro de limites adequados, como um volume do espaço usual, onde os potenciais apresentam simetria de translação ao longo de um eixo perpendicular à superfície da cuba.

Para a maioria das configurações utilizadas na prática, a região de interesse dentro da cuba não está delimitada por condutores. Por esta razão o potencial estende-se radialmente até o infinito, uma situação que demanda tratamento numérico adequado. Resolvemos esta questão adotando simetria de translação no plano da bandeja. Consideramos uma cuba quadrada de lado D colocada no centro de uma região, também quadrada, de lado $L > D$ (Vide Fig. 1b). Para efeitos de simulação numérica, consideramos o plano da cuba como composto por infinitas repetições desta configuração. Este artifício leva a um problema bem definido em termos de condições de contornos e permite simular a cuba corretamente no limite onde $L \rightarrow \infty$, mantendo D constante.

A equação de Laplace discretizada no plano produz uma equação a diferenças finitas [2] que corresponde à substituição, em cada etapa de atualização, do potencial em uma dada célula pela médias dos potenciais nas suas quatro células vizinhas, conforme indicado na Fig. 2.

$$V_{ij} = 1/4 (V_{i-1,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1}). \quad (1)$$

Os pontos da cuba ocupados por condutores a potenciais pré fixados não sofrem atualização, mas servem como fontes a partir dos quais o potencial “se propaga”. Para condições de contorno suficientemente simples pode-se converter a equação (1) em uma equação matricial que pode,

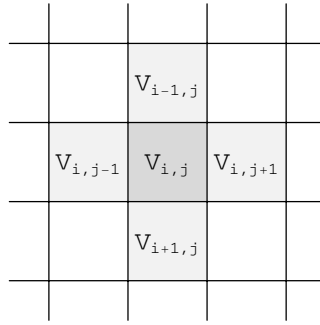


Figura 2: Esquema de cálculo do laplaciano.

por sua vez, ser resolvida para os potenciais V_{ij} . No caso mais geral onde as condições de contorno não apresentam as simetrias necessárias, pode-se recorrer a processos de relaxação que sempre levam a resultados corretos, ao custo de maior volume de cálculo, como já mencionado acima. Em nosso caso utilizamos sempre o método de relaxação, por sua generalidade e valor pedagógico.

Uma vez calculada a matriz de valores do potencial dentro da cuba determina-se, via interpolação, uma representação analítica do mesmo. De posse de um modelo analítico do potencial torna-se fácil obter o campo elétrico como o negativo do gradiente do potencial.

A determinação das densidades superficiais de cargas induzidas nos diversos condutores pode ser calculada via equação de Poisson. Em unidades genéricas, estas densidades de cargas, em sua forma discretizada, são fornecidas pela relação

$$\rho_{ij} = 4V_{ij} - V_{i-1,j} - V_{i+1,j} - V_{i,j-1} - V_{i,j+1}. \quad (2)$$

Este processo de cálculo é muito simples, produzindo resultados coerentes que apresentam todas as características esperadas. Um exemplo simples mas suficientemente interessante, é apresentado na Fig. 6, mais abaixo.

3 Resultados numéricos

Os resultados numéricos estão condensados nas Figs. 3 a 6 abaixo. Nestas figuras são apresentadas configurações de potenciais e campos na forma de linhas equipotenciais (Fig. 3), de superfícies equipotenciais (Fig. 4), de direções de campos elétricos (Fig. 5) e a densidade de cargas polarizadas (Fig. 6), em unidades genéricas.

Note-se que as equipotenciais não estão igualmente espaçadas nos casos onde foram inseridos condutores livres. O objetivo, nestes casos, foi realçar o fato de que as equipotenciais, próximas aos condutores, tendem a acompanhar o contorno do mesmo. Convém também esclarecer que na representação do campo elétrico mediante setas, indica-se apenas a direção do mesmo, sem atender à convenção usual de espaçamento proporcional a intensidade do campo. Finalmente na última das figuras, apresentamos algumas configurações de cargas acumuladas nos eletrodos e/ou induzidas em condutores livres, dispostos dentro da cuba. É contudo necessário esclarecer que os resultados para as cargas induzidas resultaram relativamente dispendiosos, do ponto de vista computacional, devido a baixa eficiência do algoritmo de relaxação e conseqüente

imprecisão associada. Um agravante a este fato foi a emprego de um sistema de processamento [3] utilizando linguagem interpretada.

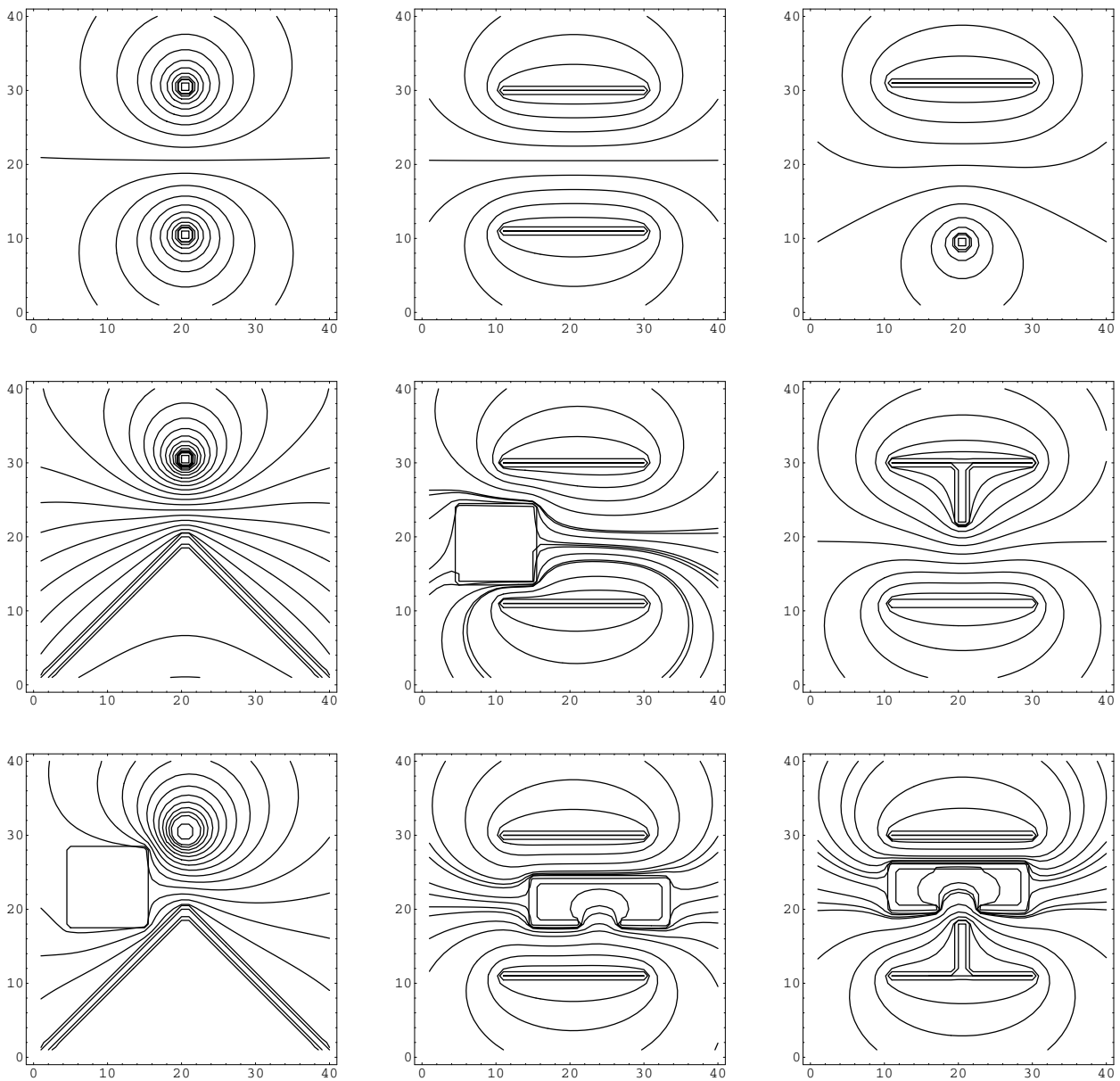


Figura 3: Diversas formas de equipotenciais dentro da cuba, em unidades genéricas. Foram simuladas situações com eletrodos simples como nos três quadros superiores e algumas situações menos frequentes em laboratório, como é facilmente identificável no restante dos quadros. Note-se as situações com eletrodos livres - maciço e cavidade - associados a eletrodos com potenciais fixos.

De qualquer forma, como mencionado acima, os resultados são suficientemente convincentes e fornecem um bom indicativo do que realmente acontece.

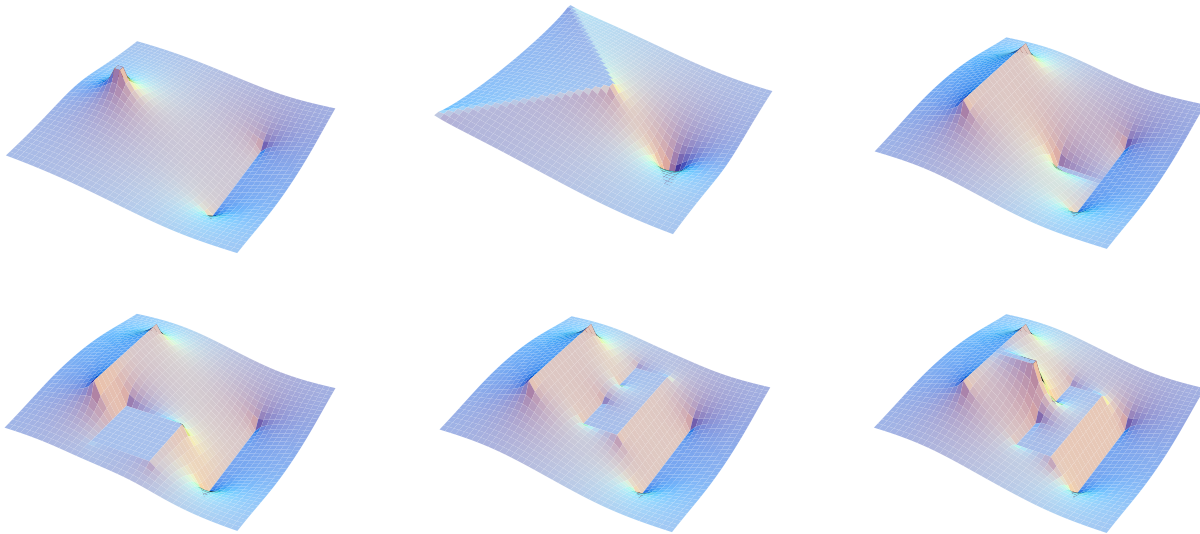


Figura 4: Superfícies equipotenciais para algumas das curvas de nível apresentadas na Fig. 3.

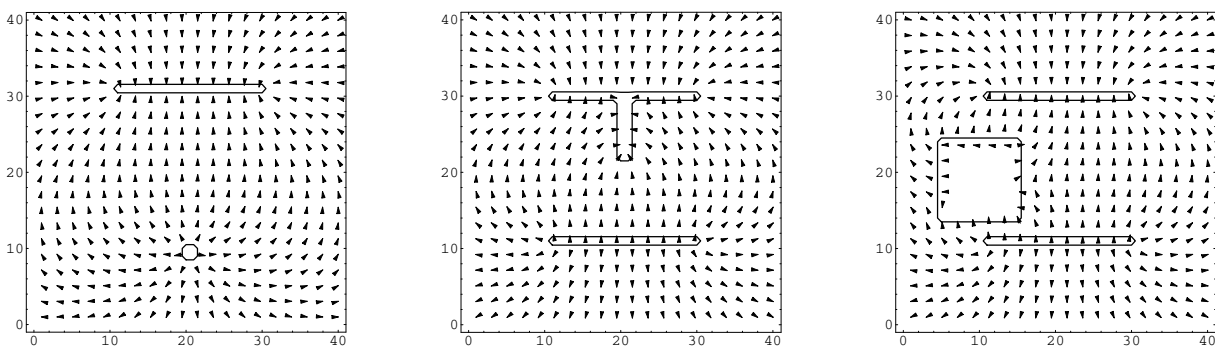


Figura 5: Configurações de campos para algumas das curvas de nível apresentadas na Fig. 3..

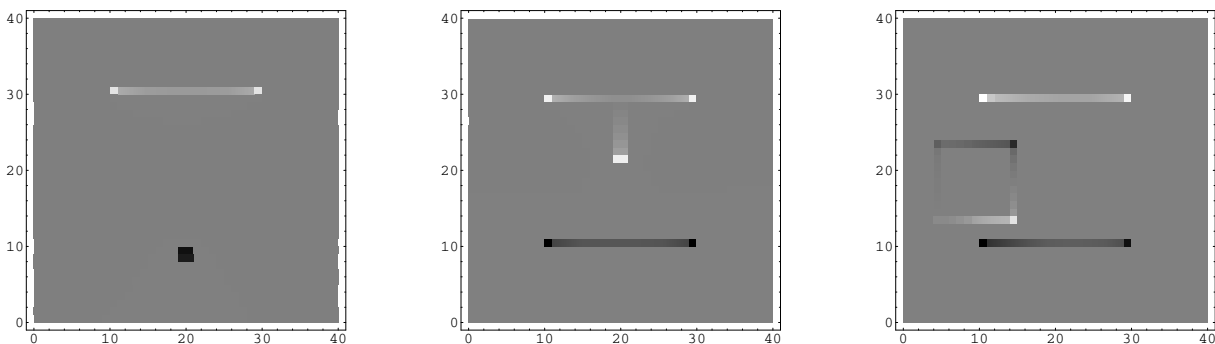


Figura 6: Cargas polarizadas para algumas configurações de eletrodos dentro da cuba. Cargas positivas são representadas por áreas escuras, cargas negativas por áreas claras. A grande área em tom cinza indica ausência de cargas polarizadas.

4 Conclusões

Apresentamos os resultados de uma simulação numérica do experimento da cuba eletrolítica, desenvolvida por estudantes de graduação, assistidos por um tutor. Neste estudo resolveu-se a equação de Laplace discretizada com condições de contorno apropriadas para representar eletrodos e condutores inseridos na cuba, utilizando um método de relaxação de fácil compreensão e implementação. A partir dos valores de potencial pode-se também calcular o campo elétrico e as densidades de cargas induzidas nos diversos condutores, conforme determinado pela equação de Poisson. Em particular o método da relaxação permitiu a construção de um algoritmo simples capaz de determinar o potencial de condutores livres colocados dentro da cuba, um problema não trivial e de grande interesse. A rotina utilizada, embora deixe a desejar quanto ao desempenho, é capaz de abordar situações genéricas, impossíveis de serem tratadas via inversão de matrizes ou técnicas de elementos finitos. As limitações de desempenho são sobretudo determinadas pela escolha do sistema de processamento, utilizado nesta fase.

Finalmente cabe mencionar que os resultados desta simulação podem constituir um subsídio importante para os estudantes de ciências exatas e tecnológicas que cursam as disciplinas introdutórias de eletricidade e magnetismo. Os dados obtidos na simulação ilustram e consolidam os resultados experimentais, possibilitando ao estudantes a visualização mais completa dos fenômenos abordados no experimento real. Particularmente interessante como complemento ao experimento real é a possibilidade de “visualizar” as cargas induzidas no condutor. Este é um aspecto que o estudante raramente concientiza no experimento da cuba, pela simples razão de que não é possível visualizar cargas.

Os resultados aqui obtidos sugerem que futuras implementações deste algoritmo em sistemas mais eficientes, possivelmente em linguagem compilada, possam gerar simulações onde o estudante tenha a oportunidade de interagir com o sistema e escolher as configurações que deseja visualizar.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente desenvolvido com o apoio do projeto ALFA Ceaticec II-0221-FI. Um dos autores (F. R. H.) agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) pela concessão de uma bolsa de Iniciação Científica, durante parte do período de estudos.

Referências

- [1] P. Rolnick and T. Edis. *College Physics II - Lab. 3: Equipotential Lines*, disponível em <http://www2.truman.edu/~edis/courses/186/lab3.pdf>
- [2] M. M. Woolfson and G. J. Pert. *An Introduction to Computer Simulation*, Oxford University Press, New York, 1999.
- [3] D. B. Wagner. *Power programming with Mathematica: the kernel*. McGraw Hill, New York, 1996.