

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

SOBRE GRAFOS CUBRIDORES DE LOS GRAFOS DE COMPARABILIDAD

Autor:

María Patricia Dobson

Director:

Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter

Co-Director:

Dra. Marisa Gutierrez

Tesis para obtener el título de
DOCTOR DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
Octubre de 2006

A mi esposo

Mario

mis hijos

Mario y Tomás,

y mi madre

María Leonor.

Agradecimientos

A *Jayme* por haber aceptado ser mi director y brindarme siempre su apoyo y su guía.

A *Marisa* por el tiempo y dedicación que me brindó, por los múltiples favores que me acortaron distancias y tiempos, y por su calidad humana.

A *Elisa* porque me acompañó en mi primer acercamiento a la Teoría de Grafos y a *Graciela* por su consejo de acercarme a La Plata.

Para la realización de esta Tesis contamos con una Beca financiada por la Universidad Nacional de La Plata.

Contenido

1	Introducción	1
2	Definiciones y Resultados Generales	4
2.1	Grafos	4
2.2	Digrafos	7
2.3	Descomposición Modular de grafos	8
2.3.1	Una propiedad de grafos primos	13
2.4	Grafos completamente separables	14
3	Grafos de Comparabilidad	18
3.1	Caracterización de Golumbic	19
3.2	Resultados de Gallai	22
4	Grafos Treelike	27
4.1	Relación con otras clases de grafos	28
4.2	Condiciones necesarias para ser Treelike	30
4.3	Treelike Primos	33
4.4	Descomposición modular de Treelike	36
4.5	Caracterización por prohibidos y $4CC$	41
4.6	Grafos Bouquet	43
4.7	Caracterización por orden de eliminación	47
4.8	Caracterización como Completamente separables	53
4.8.1	Caracterización de S. Cornealsen y G. Di Stefano	65
4.9	El Operador K^2 en los Grafos Treelike	66
4.9.1	Cómo encontrar un árbol clique del grafo $K(G)$	67
5	Cubrimientos y Restricciones	69
5.1	El problema y una aplicación	69
5.2	La descomposición	70

5.3 El algoritmo	77
6 Conclusiones	81
Bibliografía	83

Capítulo 1

Introducción

Un grafo es de *comparabilidad* si es posible orientar sus aristas en forma transitiva. Las primeras preguntas que surgen naturalmente son: el problema del reconocimiento, dado un grafo, *¿ es de comparabilidad ?*. Y si se tiene un grafo que es de comparabilidad, *¿cómo encontrar sus orientaciones transitivas?*.

La bibliografía sobre grafos de comparabilidad es muy vasta. Uno de los artículos de más vieja data, de P. C. Gilmore, A.J Hoffman [20], responde a la primera pregunta caracterizando a los grafos por una condición sobre sus circuitos. El artículo más clásico podría decirse que es el de T. Gallai [19], en el cual el autor se centra en la cuestión de encontrar todas las orientaciones transitivas de un grafo de comparabilidad. Además, Gallai desarrolla una descomposición para grafos en general, redescubierta por varios autores en muchas oportunidades, y es conocida como la *descomposición modular* de grafos.

Posteriormente, M. C. Golumbic [23] prueba una caracterización a partir de las llamadas clases de implicancia. Estas son las clases de una relación de equivalencia especial que se define sobre el conjunto de las aristas del grafo. En el mismo artículo se especifica un algoritmo de reconocimiento y otro que, en caso de tratarse de un grafo de comparabilidad, da una orientación transitiva.

Brevemente, podría decirse que el presente trabajo se ocupa de problemas mucho más específicos: dado un grafo de comparabilidad, *¿ existe una orientación que verifique*

una cierta propiedad dada? y en este contexto se estudian dos problemas.

Antes de entrar en el detalle de los mismos, digamos que dado un grafo de comparabilidad G y una orientación transitiva \vec{G} , el diagrama de esa orientación es el grafo orientado que se obtiene de eliminar en \vec{G} las aristas implícitas por transitividad. El grafo cubridor de una orientación es el grafo subyacente de su diagrama.

El primer problema tratado en este trabajo es saber cuáles grafos de comparabilidad admiten una orientación cuyo grafo cubridor es un árbol. A dicha clase de grafos la llamamos *treelike*.

En el inicio de nuestro estudio, los únicos resultados relacionados con el problema eran [24] y [36], los cuales tratan a los grafos *trivialmente perfectos*, es decir, a los grafos *treelike* cuyo diagrama es un árbol enraizado. Por otro lado, en el artículo [1] se presenta un algoritmo lineal para contar las extensiones lineales de un árbol. Posteriormente, se publicó el artículo [9] que también estudia a los grafos *treelike*.

El otro problema tratado en el presente trabajo es, dado un conjunto de aristas fijo en un grafo de comparabilidad, ¿ existe una orientación del grafo tal que su grafo cubridor contenga a dicho conjunto?. Este problema, que en cierto modo generaliza al anterior, tiene además aplicaciones en problemas de programación de tareas.

La Tesis está organizada de la siguiente forma:

En el *Capítulo 2* se dan las definiciones básicas sobre grafos, grafos orientados, descomposición modular de grafos y grafos completamente separables. En el *Capítulo 3* se presenta la caracterización de Golumbic sobre los grafos de comparabilidad y los algoritmos surgidos de la misma. Además, los resultado de Gallai para encontrar todas las posibles orientaciones transitivas de un grafo de comparabilidad. En éstos dos Capítulos no se presentan resultados originales pero se han incluido para facilitar la comprensión de los resultados obtenidos.

En el *Capítulo 4* se desarrolla el estudio de los grafos de comparabilidad *treelike* y se dan dos algoritmos de reconocimiento. Se prueba una caracterización para los grafos primos *treelike* y a partir de ella, se caracterizan los *treelike* en general, a través de la descomposición modular. También se encuentra una caracterización por subgrafos

prohibidos y una propiedad no hereditaria que deben cumplir los ciclos de cuatro vértices. A pesar de que la clase de los grafos treelike no es hereditaria; dado un grafo en la clase, la vecindad de un vértice induce un subgrafo que debe estar en la clase. Dichos grafos treelike, que tienen un vértice universal, se definen aquí como grafos *bouquet*. El estudio de los mismos nos permitió caracterizar a los treelike por un esquema de eliminación inspirado en el algoritmo análogo que existe para los grafos cordales.

Los grafos completamente separables [26, 13], fueron presentados en el Capítulo 2, donde se da también un algoritmo de reconocimiento. Se probó que todo grafo treelike es completamente separable y se hizo una modificación del algoritmo de reconocimiento dado en [26] que reconoce si un grafo es treelike y en caso afirmativo, da una tal orientación.

En la última sección de este capítulo se estudia la imagen por K^2 de los grafos treelike. Dado un grafo G , el grafo clique de G , $K(G)$, tiene un vértice por cada clique de G y dos vértices adyacentes si los correspondientes cliques tienen intersección no vacía. El grafo clique de $K(G)$ se denota usualmente $K^2(G)$. Se prueba que la clase de grafos treelike es fija por K^2 .

En el Capítulo 5 se estudia el otro problema descripto. Esto es, decidir si, fijadas ciertas aristas de un grafo de comparabilidad, existe alguna orientación cuyo grafo cubridor las contiene. Haciendo uso de la descomposición modular se prueban condiciones necesarias y suficientes para contestar esta pregunta y de las mismas se desprende un algoritmo que resuelve el problema en tiempo polinomial.

Los resultados presentados en esta Tesis fueron publicados en [14], [15], y [16].

Capítulo 2

Definiciones y Resultados Generales

En este capítulo se presentan definiciones básicas y resultados generales sobre grafos y descomposiciones de grafos en general, que serán utilizadas a lo largo de este trabajo y que son de uso corriente en Teoría de Grafos. El objetivo del mismo es presentar claramente, para comodidad del lector, la notación a utilizar y los resultados que se dan por conocidos. No se incluirán las demostraciones de éstos ya que figuran en la bibliografía citada.

2.1 Grafos

Un **grafo** G es un par $(V(G), E(G))$ siendo $V(G)$ un conjunto finito no vacío, cuyos elementos llamamos **vértices** de G y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados (conjuntos de dos elementos) de $V(G)$. Los elementos de $E(G)$ se llaman **aristas** de G . Si $e = \{u, v\}$ es una arista, se notará uv en lugar de $\{u, v\}$, u y v son los **vértices extremos** de la arista uv . Una arista e es **incidente** en un vértice u , si u es un vértice extremo de e . Si uv es una arista del grafo G , se dirá que u y v son **adyacentes** y se notará $u \sim v$. En cambio si dos vértices de G no son adyacentes se notará $u \not\sim v$.

Un grafo G' es un **subgrafo** de G si $V(G') \subseteq V(G)$ y $E(G') \subseteq E(G)$. Un subgrafo G' es un **subgrafo inducido** de G si $E(G') = \{uv \in E(G) | u, v \in V(G')\}$. Se dice también que G' es el subgrafo de G inducido por $V' = V(G')$ y se nota $G[V']$. Si $V' \subsetneq V(G)$, notaremos $G - V'$ al grafo $G[V(G)-V']$. Si $E' \subseteq E(G)$, notaremos $G - E'$ al grafo tal que $V(G - E') = V(G)$ y $E(G - E') = E(G) - E'$.

Se llama **grafo complemento** de G , notado \overline{G} , al grafo con $V(\overline{G}) = V(G)$ y $E(\overline{G}) = \{uv | u \not\sim v \text{ en } G\}$.

El **entorno** o **vecindad** de un vértice v , notado $N(v)$, es el conjunto de los vértices adyacentes a v . Es decir $N(v) = \{x \in V(G) | xv \in E(G)\}$. El **entorno cerrado** del vértice v es $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Un vértice v se dirá **universal** de G si $N[v] = V(G)$. La **valencia** o **grado** de un vértice v , notada $\delta(v)$, se define como $\delta(v) = |N(v)|$. Un vértice se dice **pendiente** si tiene valencia 1.

Un vértice v es **dominado** por un vértice w si $w \neq v$ y $N[v] \subseteq N[w]$. Dos vértices distintos v y w se dicen **gemelos verdaderos** si $N[v] = N[w]$, y **gemelos falsos** si $N(v) = N(w)$.

Un grafo es **reducido** si no tiene gemelos verdaderos y dado un grafo G el **grafo reducido** de G es el subgrafo de G inducido por un subconjunto, maximal sin gemelos verdaderos, de vértices de G .

Un **camino** (o camino simple) en el grafo G es una sucesión finita de vértices distintos de G : a_0, \dots, a_n , llamados **vértices del camino**, cumpliendo que $a_0a_1, a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n$ son aristas de G , llamadas **aristas del camino**. Se dice que n es la **longitud** del mismo y que éste **conecta** o **une** los vértices a_0 y a_n . Un camino es un **ciclo** si $a_n = a_0$. Una **cuerda** de un camino es una arista entre dos vértices del camino, pero que no es arista del mismo.

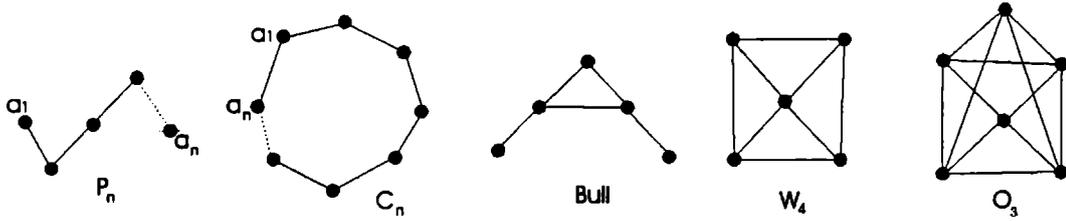


Figura 2.1: Grafos $P_n, C_n, Bull, W_4$ y O_3 .

Un grafo G se dice **conexo** si para todo par de vértices de G , existe un camino que los conecta. Si u y v son dos vértices de un grafo conexo G , la **distancia** entre u y v es la longitud de un camino de longitud mínima que los conecta. Una **componente conexa** de un grafo es un subgrafo conexo maximal.

Un **árbol** T es un grafo conexo sin ciclos. Una **hoja** de T es un vértice con valencia uno. Un **grafo completo** de r vértices, notado K_r , es aquel cuyos vértices son todos adyacentes.

Si G es un grafo, un **completo** de G es un conjunto de vértices que induce un subgrafo completo. Un **clique** de G es un completo maximal con respecto a la inclusión.

Un **conjunto independiente** de G es un subconjunto de vértices de G , tales que dos cualesquiera de ellos no son adyacentes entre sí.

Un grafo G es **bipartido** si $V(G)$ puede particionarse en dos conjuntos, V_1 y V_2 , independientes. El grafo es **bipartido completo** si para todo $u \in V_1$ y $v \in V_2$ se tiene que $uv \in E(G)$. Notaremos $K_{s,t}$ al grafo bipartido completo tal que V_1 posee s vértices y V_2 posee t vértices.

La Figura 2.1 muestra algunos grafos conocidos que necesitaremos: $C_n, P_n, W_n, Bull, O_3$.

El **grafo clique** de un grafo G es un grafo notado $K(G)$ cuyos vértices se corresponden con los cliques de G y dos vértices son adyacentes si y sólo si los respectivos cliques que representan tienen intersección no vacía. Notaremos $K^2(G)$ al grafo clique de

$K(G)$.

2.2 Digrafos

Un **digrafo** D es un par $(V(D), E(D))$ siendo $V(D)$ un conjunto finito no vacío, cuyos elementos son los **vértices** de D y $E(D) \subseteq V(D) \times V(D)$. A los elementos de $E(D)$ se los llama **arcos** o **aristas dirigidas** del digrafo D y se notará \vec{uv} al par ordenado (u, v) .

Para cada vértice $v \in V(D)$ se notará $U(v)$ al **conjunto upset** de v definido como $U(v) = \{x \in V(D) | \vec{vx}\}$ y llamaremos **conjunto downset** de v al conjunto $D(v) = \{x \in V(D) | \vec{xv}\}$. Notaremos $U[v] = U(v) \cup \{v\}$ y análogamente $D[v] = D(v) \cup \{v\}$. Un vértice v es **fuerza** del digrafo si $\delta^-(v) = 0$ y es **sumidero** si $\delta^+(v) = 0$.

Un **camino dirigido** del digrafo D es una sucesión finita de vértices distintos de D : a_0, \dots, a_n , tales que $\vec{a_0a_1}, \vec{a_1a_2}, \dots, \vec{a_{n-1}a_n}$ son arcos de D , llamados **arcos del camino**. Se dirá que n es la **longitud** del camino y que éste camino dirigido **conecta** a los vértices a_0 y a_n . Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido para el cual $a_0 = a_n$.

Una **orientación** de un grafo G es un digrafo que se obtiene al elegir, para cada arista xy de G , una orientación \vec{xy} o \vec{yx} . Notaremos \vec{G} a una orientación de G , diremos que \vec{G} es un **grafo orientado** de G y que G es el **grafo subyacente** de \vec{G} .

Una **orientación transitiva** de un grafo G es una orientación \vec{G} tal que $\vec{xy}, \vec{yz} \in E(\vec{G})$ entonces $\vec{xz} \in E(\vec{G})$.

Las orientaciones transitivas de un grafo revisten interés teórico y práctico en la Teoría de Grafos desde hace mucho tiempo. La primera pregunta que surgió naturalmente fue: cuáles son los grafos que admiten una orientación transitiva? A dichos grafos se los llamó **grafos de comparabilidad**. En el próximo capítulo se tratarán estos grafos.

Naturalmente, un **árbol orientado** es un digrafo cuyo grafo subyacente es un árbol. Un **árbol orientado enraizado** T es un árbol orientado tal que: posee un vértice r con $\delta^-(r) = 0$, llamado *raíz* de T ; para todo otro vértice v , $\delta^-(v) = 1$. Si T es un árbol orientado enraizado y v es un vértice de T , llamaremos **hijos o descendientes** de v al conjunto $U(v)$ y **padre** de v al conjunto $D(v)$, formado por a lo sumo un vértice. Las hojas de T serán sus sumideros.

2.3 Descomposición Modular de grafos

En esta sección daremos las definiciones necesarias en relación a la descomposición modular de un grafo. También expondremos algunos de los distintos algoritmos existentes para hallar el árbol de descomposición modular.

El concepto de módulo de un grafo fue redescubierto muchas veces con distintos nombres, como por ejemplo **conjunto homogéneo** o **autónomo**. Su definición es la siguiente, si G es un grafo, un conjunto $Y \subseteq V(G)$ es un **módulo** si y sólo si para todo $x, z \in Y$, $N(x) - Y = N(z) - Y$, es decir si x y z tienen los mismos vértices adyacentes en $G - Y$

Es claro que los conjuntos $Y = \{x\}$, para $x \in V(G)$, $Y = \emptyset$ o $Y = V(G)$ son módulos de G , se los llama **módulos triviales** de G . Se dice que G es un grafo **primo** si sus únicos módulos son los triviales.

Observar que ningún grafo de tres vértices es primo y que el grafo primo más pequeño es P_4 .

Si $Y \subset V(G)$ y $G[Y]$ es primo, se dirá que $G[Y]$ es un **subgrafo primo maximal** si para todo $Z \subseteq V(G)$ tal que $Y \subseteq Z \subseteq V(G)$ donde $G[Z]$ es primo, se tiene que $Z = Y$

Un módulo M es **fuerte** [19] si para todo módulo M' se verifica que $M \subseteq M'$ o $M' \subseteq M$ o $M = M'$. Un módulo M es **propio** si $V(G) \neq M$. Los módulos de un grafo tienen varias propiedades como se enuncia en la próxima proposición.

Proposición 2.3.1. Sean M y M' dos módulos de G . Entonces:

1. $M \cap M'$ es módulo de G .
2. Si $M' \not\subseteq M$ entonces $M - M'$ es módulo de G .
3. Si $M \cap M' \neq \emptyset$ entonces $M \cup M'$ es módulo de G .
4. $M \cap Y$ es un módulo de $G[Y]$ para todo $Y \subseteq V(G)$.

Estas propiedades ayudan a descomponer el conjunto de vértices de un grafo sin perder su estructura intrínseca. Haciendo uso de esta descomposición se pueden solucionar distintos problemas en forma efectiva.

Teorema 2.3.1. (Teorema de descomposición) Sea G un grafo con al menos dos vértices, entonces una y sólo una de las siguientes alternativas se verifica:

1. G es no conexo y sus módulos fuertes propios maximales son sus componentes conexas.
2. \overline{G} es no conexo y los módulos fuertes propios maximales de G son las componentes conexas de \overline{G} .
3. Existe $Y \subseteq V(G)$ y una única partición P de $V(G)$ tales que
 - (a) $|Y| \geq 4$
 - (b) $G[Y]$ es un subgrafo primo maximal de G .
 - (c) Para cada $S \in P$, S es un módulo fuerte propio maximal de G y $|S \cap Y| = 1$.

Es claro que el Teorema anterior define una partición de $V(G)$, en los dos primeros puntos, son los vértices de las componentes conexas de G y de \overline{G} , respectivamente; y en el tercero, P . Se suele llamar a dicha partición **partición canónica** de G .

Aplicando recursivamente el Teorema 2.3.1 hasta llegar a los $\{x\}$ para todo $x \in V(G)$, se obtiene una descomposición del grafo, llamada **descomposición modular**.

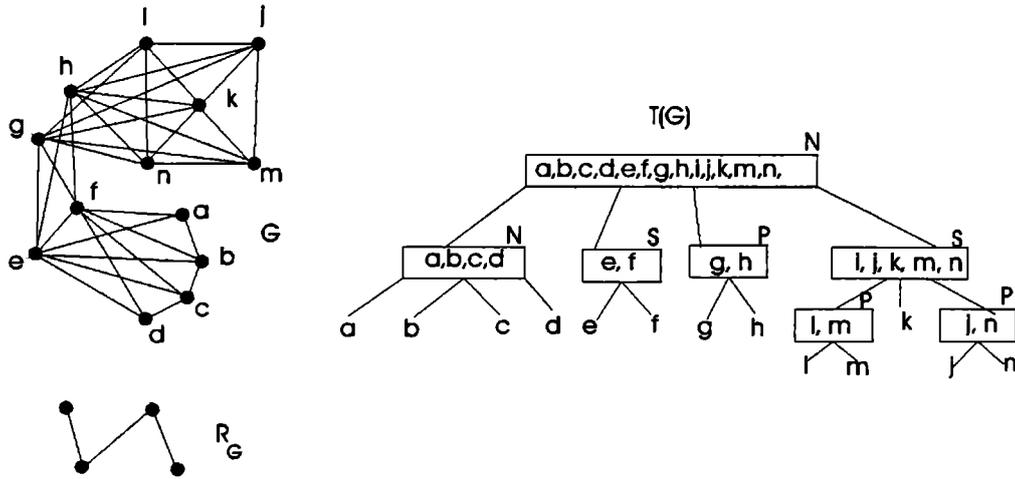


Figura 2.2: Grafo G y su árbol descomposición $T(G)$

La información de esta descomposición se suele representar en un árbol orientado enraizado, notado $T(G)$, llamado **árbol descomposición** del grafo G . La raíz de $T(G)$ es $V(G)$, los hijos de cada vértice M son los conjuntos de vértices de la partición canónica de $G[M]$ y las hojas son los singletons $\{x\}$ para todo $x \in V(G)$.

Los vértices del árbol descomposición se clasifican en tres tipos: M es un **vértice serie** si $G[M]$ es no conexo, es un **vértice paralelo** si $\overline{G[M]}$ es no conexo y es un **vértice neighborhood** si $G[M]$ y $\overline{G[M]}$ son conexos.

La Figura 2.2 muestra un grafo y su árbol de descomposición, donde se han etiquetado sus vértices según sean del tipo serie (S), paralelo (P) o neighborhood (N).

Recíprocamente, para reconstruir el grafo G a partir de su árbol descomposición $T(G)$, es necesario almacenar la información de las adyacencias entre los módulos hijos de los vértices internos de $T(G)$. Se define entonces para cada vértice M del árbol $T(G)$ el **grafo representante** R_M cuyo conjunto de vértices son los hijos de M en $T(G)$: $M_1 \dots M_l$ y dos vértices M_i, M_j con $i \neq j$ son adyacentes si existen $x \in M_i$ y $y \in M_j$ tales que $xy \in E(G)$. Sólo en el caso particular de $M = V(G)$ notaremos R_G en lugar

de R_M para evitar notaciones engorrosas.

Luego si $G[M]$ es un grafo no conexo, como se dijo anteriormente, los conjuntos de vértices de sus componentes conexas conforman la partición canónica de $G[M]$ y R_M es el grafo formado por vértices aislados, uno por cada componente conexa de $G[M]$. Análogamente, si $\overline{G[M]}$ es no conexo, los conjuntos de vértices de sus componentes conexas conforman la partición canónica de $G[M]$ y R_M es un completo.

En el caso en que M es vértice neighborhood, R_M tiene al menos 4 vértices y es un grafo primo.

Una descomposición modular muy particular tienen los llamados *cografos*. Se denomina *cografo* a un grafo que no posee a P_4 como subgrafo inducido. En este caso el árbol descomposición se llama *cotree*. Es claro que los *cotree* no tienen vértices internos del tipo neighborhood, sino que todos son del tipo serie o paralelo.

D. G. Corneil, Y. Perl y L. K. Stewart [8] idearon un algoritmo lineal que construye el árbol descomposición, si el grafo dado es *cografo*, o muestra un P_4 en caso contrario. La construcción del *cotree* presentada en [8] difiere morfológicamente del árbol de descomposición definido, en el siguiente sentido: si se trata de un vértice serie lo denota con un 1 y a un vértice paralelo con un 0. Las hojas del *cotree* son los vértices de G , todo vértice interno es 0 ó 1 y tiene al menos dos hijos, salvo tal vez, la raíz (cuando es no conexo); todo vértice interno es distinto a su padre.

El grafo G se puede reconstruir desde su *cotree* muy facilmente, sus vértices son las hojas y dos vértices de G son adyacentes si y sólo si su antecesor común más cercano en el *cotree* es un vértice 1. La Figura 2.3 muestra un *cografo* y el árbol descomposición con la notación del algoritmo de [10].

Un algoritmo recursivo para encontrar el árbol descomposición de un grafo cualquiera, usando el Teorema 2.3.1, se podría escribir así:

Algoritmo *Descomponer*

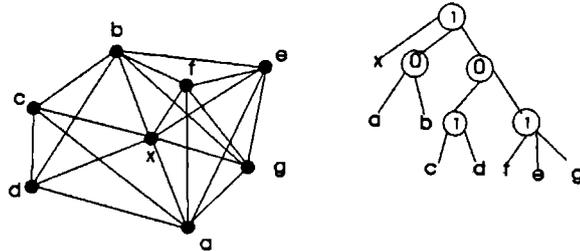


Figura 2.3: Cografo G y su árbol descomposición $T(G)$

Dato: G

Salida: T un árbol descomposición.

comienzo

Si G es cografo entonces $T \leftarrow$ el cotree del algoritmo de Corneil.

Si no:

Sea a, b, c, d un P_4 inducido en G

Encontrar un subgrafo primo maximal $G[Y]$ que contenga a, b, c, d

Encontrar la partición asociada P .

Para cada $S \in P$ **Descomponer**($G[S]$).

Crear el árbol T .

fin

Lamentablemente este algoritmo no es fácil de implementar ya que encontrar un subgrafo primo maximal $G[Y]$ que contenga a, b, c, d no es algo sencillo.

En vista de encontrar la descomposición modular de forma óptima, es decir en tiempo lineal, se ha desarrollado otro enfoque del problema donde se plantea para el caso de tener un grafo del tipo primo, es decir conexo con complemento conexo, cómo encontrar este subgrafo primo maximal o lo que es equivalente el grafo R_G . El problema central es el siguiente: si G no es cografo, tiene un P_4 inducido que el mismo algoritmo de Corneil proporciona. Cómo se puede extender este P_4 a otro subgrafo primo que

lo contenga como subgrafo?

Cornier y Habib [10] resuelven este problema y obtienen un algoritmo que encuentra la descomposición modular en tiempo lineal. El algoritmo es complejo y no se desarrollará en el presente trabajo.

2.3.1 Una propiedad de grafos primos

En relación a los grafos primos, encontramos una condición necesaria aunque no suficiente, que enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.2. *Sea G un grafo primo, entonces todo vértice está en un P_4 inducido de G o en un Bull inducido de G como el vértice de valencia dos.*

Demostración: Supongamos que el vértice a no verifica el teorema. Luego, por no estar en ningún camino de longitud 3, $d(a, x) \leq 2$ para todo $x \in V(G)$ y por ser G primo, a no es universal. Sea b tal que $d(a, b) = 2$ y $c \in N(a) \cap N(b)$.

Definimos los conjuntos disjuntos cuya unión es $V(G)$:

$$A = \{x | x \sim a, x \not\sim b\},$$

$$B = \{x | x \sim b, x \not\sim a\},$$

$$C = \{x | x \sim a, x \sim b\},$$

$$D = \{x | x \not\sim a, x \not\sim b, x \sim c \text{ para todo } c \in C\},$$

$$E = \{x | x \not\sim a, x \not\sim b, x \not\sim c', \text{ para algún } c' \in C\}.$$

Vamos a probar que $A \cup B \cup D \cup \{a, b\}$ es un módulo propio. Por las definiciones de los conjuntos, es claro que $E \cup D \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, $A \cup B \cup \{a, b\}$ sería un módulo no trivial de G .

$A \cup B \cup D \cup \{a, b\} \sim C$: por definición de C todos sus vértices son adyacentes a a , a b y a todo vértice de D . Si suponemos que existe $a_1 \in A$ que no es adyacente a un $c \in C$, se tiene que a_1, a, c, b induce un P_4 contradiciendo la suposición de que a no está en ningún P_4 . Luego $A \sim C$ y análogamente $B \sim C$.

$A \not\sim E$: Sea $e' \in E$ y $a' \in A$ tal que $a'e' \in E(G)$. Entonces existe un $c' \in C$ para el

cual $e'c' \notin E(G)$. Los vértices e', a', a, c', b inducen un *Bull* con a vértice de valencia dos, contradicción.

$B \not\sim E$: Sea $e' \in E$ y $b' \in B$ tal que $b'e' \in E(G)$. Entonces, si c' es un vértice de C para el cual $e'c' \notin E(G)$ los vértices a, c', b', e' inducen un P_4 , contradicción.

$D \not\sim E$: Sea $e' \in E$ y $d' \in D$ tal que $d'e' \in E(G)$. Entonces, si c' es un vértice de C para el cual $e'c' \notin E(G)$ los vértices a, c', d', e' inducen un P_4 , contradicción.

En consecuencia, $A \cup B \cup D \cup \{a, b\}$ es un módulo propio de G , contradicción. \square

Claramente esta propiedad no caracteriza a los grafos primos ya que la recíproca no es cierta, basta tomar un grafo primo y agregarle un gemelo a cualquiera de sus vértices para encontrar un contraejemplo.

2.4 Grafos completamente separables

En esta sección presentamos las definiciones y algunos teoremas del artículo [26] donde los autores introducen a los grafos completamente separables.

Estos serán necesarios para la comprensión de la Sección 4.8 del capítulo de grafos treelike.

Un grafo de al menos cuatro vértices es **separable** si su conjunto de vértices es la unión disjunta de cuatro subconjuntos, A', A'', B' y B'' con $|A' \cup A''| \geq 2$, $|B' \cup B''| \geq 2$ y tal que las únicas aristas que existen entre estos conjuntos son todas las aristas posibles entre A' y B' .

Observar que si el grafo G tiene un módulo A no trivial entonces es separable, tomando $A'' = \emptyset$, $B' = N(A)$ y $B'' = V(G) - A - N(A)$.

Un grafo es **completamente separable** si todo subgrafo inducido es separable.

Teorema 2.4.1. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. G es completamente separable.

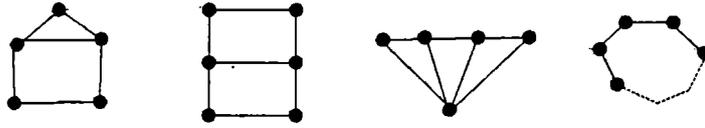


Figura 2.4: Subgrafos prohibidos para los completamente separables: grafo Casa, Dominó, 3-fan y C_n para $n \geq 5$

2. G no contiene a ningún subgrafo inducido de la Figura 2.4
3. Todo ciclo de al menos cinco vértices tiene dos cuerdas que se cruzan.
4. Todo subgrafo inducido tiene un vértice pendiente o dos vértices gemelos.
5. Dados dos vértices u, v todo camino sin cuerdas entre ellos tiene igual longitud.

Una consecuencia del punto (4) del Teorema 2.4.1 es que, dado un grafo completamente separable, podemos enumerar a sus vértices: $1, \dots, n$ y encontrar una secuencia de "palabras" (S_2, \dots, S_n) con $S_i \in \{F_j, T_j, P_j\}$ para $2 \leq n$ donde la palabra S_i le corresponde al vértice i y significa que i es un vértice gemelo falso del vértice j , un vértice gemelo verdadero de j o pendiente de j respectivamente, para un $j < i$. Luego, el subgrafo inducido por los vértices $1, \dots, i$ se obtiene del subgrafo inducido por $1, \dots, i - 1$ agregándole el i como un vértice gemelo falso, un vértice gemelo verdadero o pendiente de j , según sea S_i .

Es decir, un grafo es completamente separable si y sólo si tiene una secuencia como la descripta, llamada **secuencia pruning**.

En [13] se dan dos algoritmos lineales que proporcionan una secuencia pruning, si el grafo es completamente separable. El primer algoritmo, calcula una secuencia tratando al grafo como si fuera completamente separable. El segundo algoritmo, chequea si efectivamente la secuencia generada es pruning. En caso de no serlo, se puede asegurar que el grafo dado no es completamente separable.

Introducimos unas pocas definiciones más, que necesitaremos en la Sección 4.8.

Supongamos que G es conexo completamente separable. Si α es un vértice cualquiera fijo de G , los vértices de $G - \alpha$ pueden particionarse en conjuntos L_1, \dots, L_p donde L_i es el conjunto de vértices que están a distancia i de α . A estos conjuntos se los llama **niveles respecto al vértice α** .

Un camino de α a z , siendo $z \in L_j$, se dirá **compatible** con la partición si posee exactamente un vértice en cada nivel anterior a j .

Si x e y son vértices distintos de L_i , se dirá que x e y están **atados** si para algún $z \in L_j$, $j > i$, existen caminos entre α y z , compatibles con la partición, uno conteniendo a x y otro conteniendo a y .

Notaremos $N'(x) = N(x) \cap L_{i-1}$, $d(x) = |N'(x)|$, $N''(x) = N(x) \cap L_{i+1}$ para $x \in L_i$.

Se prueba que, dado que el grafo tratado es completamente separable:

1. Dos vértices adyacentes o atados de L_i tienen igual vecindad en L_{i-1} , es decir, $N'(x) = N'(y)$.
2. La relación definida en $V(G)$ por: $x \approx_\alpha y \Leftrightarrow x$ e y están en un mismo L_i y además, están en la misma componente conexa o están atados; es una relación de equivalencia en $V(G)$.
3. Si dos vértices $x, y \in L_i$ verifican $N'(x) \cap N'(y) \neq \emptyset$ entonces $N'(x) \subseteq N'(y)$ o $N'(y) \subseteq N'(x)$.
4. Si \leq_i es el orden en L_i definido por $x \leq_i y \Leftrightarrow N'(x) \subseteq N'(y)$; y x es un elemento minimal de (L_i, \leq_i) entonces $N'(x)$ es un módulo de G .
5. Las componentes conexas de L_p son módulos de G .

Observar que si G es un grafo completamente separable, los módulos mencionados en los items 4 y 5 deben inducir cografos en el grafo, ya que en caso contrario, tendrían 4 vértices induciendo un P_4 y por el item 1, G tendría un 3-*fan* inducido. Sabemos que un par de gemelos de un cografo que es un módulo del grafo, son gemelos de todo el grafo. Luego, en cualquier componente conexa no trivial de L_p se podrá encontrar

un par de gemelos del grafo. En caso de ser L_p un conjunto independiente, o bien se encontrará un par de gemelos en $N'(x)$ siendo x un minimal de (L_p, \leq_p) , o bien x será un vértice pendiente del grafo.

Por otro lado, se prueba que, x es un minimal de (L_i, \leq_i) si y sólo si $d'(x) = \min\{d'(z) | z \in L_i\}$.

Capítulo 3

Grafos de Comparabilidad

Un grafo simple $G = (V, E)$ es un **grafo de comparabilidad** si admite una **orientación transitiva**, es decir, si existe una orientación \vec{G} tal que $\vec{xy}, \vec{yz} \in E(\vec{G})$ entonces $\vec{xz} \in E(\vec{G})$.

Dado un grafo de comparabilidad G y \vec{G} una orientación transitiva de G , se llama **diagrama** de \vec{G} al digrafo que se obtiene al borrar los arcos implícitos por transitividad en \vec{G} . El **grafo cubridor** de \vec{G} es el grafo subyacente del diagrama de \vec{G} .

Más formalmente, puede definirse el grafo cubridor como sigue. Dada una orientación transitiva \vec{G} y un vértice x , se dice que x **cubre** a un vértice y si \vec{xy} y no existe $z \neq y$ tal que \vec{xz}, \vec{zy} . El grafo cubridor de G será entonces el subgrafo de G con x e y adyacentes si x cubre a y o viceversa.

Si G es un grafo de comparabilidad y \vec{G} es una orientación transitiva de G , se dice también que \vec{G} está **asociada** al grafo G .

Es claro que si G es un grafo de comparabilidad y \vec{G} está asociada al grafo G , también \overleftarrow{G} lo está. Siendo \overleftarrow{G} la orientación obtenida al invertir los arcos de \vec{G} , es decir, cambiando \vec{xy} por \overleftarrow{yx} . En el presente trabajo no distinguiremos entre estas dos orientaciones. Lo interesante es observar que, aún así, un grafo de comparabilidad

puede tener asociadas más de una orientación transitiva.

Es fácil ver que todo subgrafo inducido de un grafo de comparabilidad, también lo es. Es decir, esta clase es hereditaria.

Los problemas iniciales que surgen son, por un lado determinar si, dado un grafo, es o no de comparabilidad y por el otro, encontrar una orientación transitiva en caso de respuesta afirmativa al primer problema. La bibliografía existente sobre trabajos que resuelven estos problemas es muy extensa.

En relación al primer problema, uno de los primeros artículos es el de Gilmore y Hoffman [20] en el cual se caracterizan a los grafos de comparabilidad como aquellos para los cuales todo ciclo, no necesariamente simple (es decir, en el cual se pueden repetir aristas), tiene una cuerda triangular, donde cuerda triangular de un ciclo de vértices a_i con $1 \leq i \leq k$, es una arista del tipo $a_i a_{i+2}$. No nos ocuparemos de esta caracterización en el presente trabajo.

Golumbic también caracteriza los grafos de comparabilidad, a través de lo que llama *clases de implicancia* [23].

Por otro, Gallai en su artículo [19] relaciona la descomposición modular de G y sus posibles orientaciones transitivas. Además obtiene la familia de grafos prohibidos minimales que caracterizan a la clase de grafos de comparabilidad. En las siguientes dos secciones daremos las definiciones y teoremas relativos a estos dos últimos autores.

3.1 Caracterización de Golumbic

Sea G es un grafo de comparabilidad y \vec{G} una orientación transitiva de G . Si $xy, xw \in E(G)$ y $yw \notin E(G)$, la orientación de una de las aristas fuerza la orientación de la otra. Formalmente, si $yw \in E(\vec{G})$ entonces $\vec{xy}, \vec{xw} \in E(\vec{G})$ o $\vec{yx}, \vec{wx} \in E(\vec{G})$. A

partir de esta simple observación surge la definición de la relación **forzar** definida sobre el conjunto de aristas de G , grafo cualquiera:

$$xy\Gamma zw \Leftrightarrow \begin{cases} xz \notin E(G) & y = w \text{ o} \\ yw \notin E(G) & y = z \end{cases}$$

Esta relación binaria $(E(G), \Gamma)$ es reflexiva y simétrica, su clausura transitiva es una relación de equivalencia sobre las aristas de G . Las clases de esta relación se llaman **clases de implicancia** o, como las llamó Gallai, **edge classes**. La importancia de estas clases es que, si G es de comparabilidad, la orientación de una de sus aristas determina unívocamente la orientación de las restantes aristas de la clase.

Si F es una clase de implicancia de un grafo G , notaremos con I a una orientación de F , es decir, una orientación por arista de F . Naturalmente llamaremos I^{-1} a la orientación que se obtiene al invertir todas las direcciones de los arcos de I . Entonces, en toda orientación transitiva de G , las aristas de F tienen la orientación I o la orientación I^{-1} .

Golumbic caracterizó a los grafos de comparabilidad a través de una propiedad en las clases de implicancia que se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1. [23] G es un grafo de comparabilidad si y sólo si $I \cap I^{-1} = \emptyset$ para toda clase de implicancia F de G .

Basándose en el mismo, ideó un algoritmo de reconocimiento de tiempo $O(\Delta m)$, donde Δ es el grado máximo de un vértice de G y $m = |E(G)|$.

Algoritmo Reconocimiento de grafos de comparabilidad

Dato: G grafo

Salida: Si o No. Respuesta a la pregunta: es G de comparabilidad?

comienzo

$i = 1$ y $E_i = E(G)$

Paso 1: Elegir una arista arbitraria $ab \in E_i$

Paso 2: Enumerar la clase de implicancia F_i de E que contiene a ab .

Paso 3: Si $I_i \cap I_i^{-1} \neq \emptyset$, parar. G no es grafo de comparabilidad.

Paso 4: Definir a $E_{i+1} = E_i - F_i$.

Paso 5: Si $E_{i+1} = \emptyset$, parar. Si no $i := i + 1$ e ir al Paso 1.

fin

Es importante observar que no cualquier combinación de orientaciones de cada clase de implicancia genera una orientación transitiva de todo el grafo. Por ejemplo, en K_3 cada arista es una clase de implicancia, si cada una de ellas es orientada de manera tal que formen un ciclo dirigido, es claro que no se obtiene una orientación transitiva de K_3 .

Para resolver este problema, Golumbic [23] demuestra que si G es de comparabilidad, se puede particionar las aristas de G en conjuntos disjuntos $F_1 \dots F_k$ donde cada F_j es una clase de implicancia de $F_j \cup \dots \cup F_k$ para $j = 1, \dots, k$ y tomando una orientación para cada uno de estos conjuntos, se obtiene una orientación transitiva de G .

Entonces una modificación del paso 2, donde en la iteración i se toma una clase de implicancia de $G(E_i)$, nos lleva a un algoritmo que, no sólo reconoce un grafo de comparabilidad, sino que de serlo, nos proporciona una orientación transitiva, con la misma complejidad.

Algoritmo Reconocimiento y orientación de grafos de comparabilidad

Dato: G grafo

Salida: una orientación transitiva de G o una respuesta negativa a la pregunta es G de comparabilidad?

comienzo

$i = 1$ y $E_i = E(G)$

Paso 1: Elegir una arista arbitraria $ab \in E_i$
Paso 2: Enumerar la clase de implicancia F_i de E_i que contiene a ab .
Paso 3: Si $I_i \cap I_i^{-1} \neq \emptyset$, parar. G no es grafo de comparabilidad.
Paso 4: Definir a $E_{i+1} = E_i - F_i$.
Paso 5: Si $E_{i+1} \neq \emptyset$, $i := i + 1$ e ir al Paso 1.
Si no $k = i$ y $I_1 \cup \dots \cup I_k$ es una orientación transitiva de G
fin

3.2 Resultados de Gallai

En esta sección mostraremos la relación que hay entre la descomposición modular y las orientaciones transitivas de un grafo de comparabilidad.

Teorema 3.2.1. [19] *Sea G un grafo con al menos dos vértices y árbol descomposición $T(G)$ entonces una y solo una de las siguientes posibilidades vale:*

1. G es no conexo y las clases de implicancia de G son las clases de implicancia de sus componentes conexas.
2. \bar{G} es no conexo y las clases de implicancia de G son las clases de implicancia de las componentes conexas de \bar{G} .
3. G y \bar{G} son ambos conexos y existe una única partición $P = \{A_1, \dots, A_q\}$ de $V(G)$ tal que:
 - para todo $i \neq j$ si existe una arista entre A_i y A_j entonces todo vértice de A_i es adyacente a todo vértice de A_j .
 - las aristas que tienen extremos en distintos A_i forman una única clase de implicancia, y todo vértice de G es incidente en al menos una arista de esta clase.

- las restantes clases de implicancia son las que corresponden a las de $G[A_i]$ para $1 \leq i \leq q$
- la partición P es maximal con respecto a las tres condiciones anteriores.

Si se considera ya probado el Teorema de Descomposición modular del Capítulo 2, el resultado previo sería un corolario de dicho Teorema probando que: Si F es una clase de implicancia, el conjunto formado por los vértices que son extremos de las aristas de F es un módulo de G y que si una arista de una clase de implicancia F tiene ambos extremos en un módulo M entonces F es clase de implicancia del subgrafo $G[M]$.

La descomposición en módulos facilita un gran número de problemas algorítmicos, entre ellos la búsqueda de las orientaciones transitivas de un grafo de comparabilidad. Luego si $G[M]$ es un grafo no conexo, R_M es el grafo formado por vértices aislados, uno por cada componente conexa de $G[M]$.

En cambio, si $\overline{G[M]}$ es no conexo, cada arista de R_M es una clase de implicancia de R_M .

En el caso en que $G[M]$ y $\overline{G[M]}$ son ambos conexos, R_M tiene al menos 4 vértices y las aristas de R_M pertenecen todas a una única clase de implicancia. Es decir, en este caso R_M tiene una única orientación transitiva.

En el siguiente teorema Gallai expresa la estrecha relación entre las orientaciones transitivas de un grafo de comparabilidad y la descomposición modular del mismo.

Teorema 3.2.2. *Sea G un grafo no vacío con árbol descomposición $T(G)$ entonces*

1. *Si G es transitivamente orientable, en cada orientación transitiva de G , las aristas entre dos conjuntos A_i, A_j de la partición de G están todas igualmente orientadas. Si en R_G orientamos la arista $A_i A_j$ como lo están las aristas que tienen un extremo en A_i y el otro en A_j en G , obtenemos una orientación transitiva de R_G .*

2. Recíprocamente, si todo R_M correspondiente a un vértice de $T(G)$ es transitivamente orientable y asignamos a cada arista de G cuyos extremos son de A_i y A_j la orientación que la arista $A_i A_j$ tiene en R_M , se obtiene una orientación transitiva de todo G .

Luego las orientaciones transitivas de un grafo de comparabilidad están dadas por todas las posibles combinaciones de orientaciones transitivas de cada grafo R_M que corresponde a los vértices M del árbol descomposición y esto revela la importancia que tiene la descomposición modular en esta clase de grafos.

Por ello constituye una importante herramienta a la hora de caracterizar grafos de comparabilidad que tengan que cumplir una determinada condición en el grafo cubridor de alguna de sus orientaciones transitivas.

Es importante destacar que si G es un grafo de comparabilidad y primo tiene una única orientación transitiva y si $G = K_r$ tiene $r!$ orientaciones transitivas.

Möhring ideó un algoritmo para hallar el árbol de descomposición en tiempo $O(n^3)$, basado en la descomposición modular y aplicando también el concepto de clases de implicancias. Construye una matriz de adyacencias especial, $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ que expresa a cuál clase de implicancia pertenece cada arista de G :

$$m_{ij} = \begin{cases} k & \text{si } x_i x_j \in F_k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Si F es una clase de implicancia de G nota con C_F a los vértices extremos de las aristas de F y con G_F al grafo inducido por las aristas de F . Luego, la matriz $M_k = (m'_{ij})$ donde

$$m'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } m_{ij} = k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

corresponde al grafo G_F .

Las clases de adyacencia de G_F son los conjuntos maximales de vértices que son adyacentes a mismos vértices de G y en consecuencia, son conjuntos estables. Es claro

que son módulos y que se pueden calcular a través de esta matriz M mirando los renglones que son iguales. En el Teorema 4.4 de [2] prueba que las clases de implicancia de G_F son los módulos maximales de $G[C_F]$.

Algoritmo *Construcción de $T(G)$* [2]

Dato: G

Salida: T el árbol descomposición.

comienzo

1. Calcular las clases de implicancia de G y la matriz M .
2. $B := V(G)$
3. calcular las componentes conexas de $G[B]$.
Si $G(B)$ no es conexo
 - (a) Etiquetar como nodo P a B
 - (b) Las componentes conexas de $G[B]$ son los hijos de B en T
 - (c) Ir al paso 7
4. calcular las componentes conexas de $\overline{G[B]}$.
Si $\overline{G(B)}$ no es conexo
 - (a) Etiquetar como nodo S a B
 - (b) Las componentes conexas de $\overline{G[B]}$ son los hijos de B en T
 - (c) Ir al paso 7
5. Encontrar la clase de implicancia F tal que $C_F = B$.
6. (a) Computar las clases de adyacencias de G_F
 - (b) Etiquetar al nodo B como N
 - (c) Los hijos de B en T son las clases de adyacencias

7. Si existe una $|C| \geq 2$ sin etiqueta, $B := C$ e ir a 3.
Si no parar.

Para el paso 5 se puede implementar un procedimiento recorriendo las filas de la matriz de adyacencia modificada correspondiente a B .

Un algoritmo lineal para hallar el árbol descomposición se presenta en [31] el cual es una modificación al algoritmo presentado en ?? donde se halla un " P_4 -tree" definido en ese artículo. Lo importante de este algoritmo es que no sólo halla la descomposición modular sino que también soluciona en tiempo lineal el problema de hallar una orientación transitiva a un grafo de comparabilidad.

Capítulo 4

Grafos Treelike

Una orientación transitiva \vec{G} de un grafo de comparabilidad se dice **treelike** si su diagrama es un árbol orientado. En otras palabras, si su grafo cubridor es un árbol. En la literatura de conjuntos ordenados, se llama **poset treelike** a aquel que tiene como diagrama un árbol orientado [36].

Un grafo de comparabilidad se dirá que es de comparabilidad **treelike**, o simplemente **treelike**, si admite un orientación treelike.

Entonces, si un grafo de comparabilidad es treelike, tiene asociada una orientación cuyo diagrama es un árbol orientado y se dirá de éste, que es un árbol *asociado* a G . Observar que si G es un grafo de comparabilidad treelike y T un árbol asociado a G , entonces todo clique de G induce un camino dirigido maximal de T .

La Figura 4 muestra a la rueda 4, W_4 , junto con sus dos posibles grafos cubridores, uno de los cuales es un árbol, con lo cual W_4 es un grafo treelike.

La clase de los grafos treelike **no** es una clase hereditaria, ya que como fue mostrado W_4 es un grafo treelike, sin embargo es claro que C_4 no lo es.

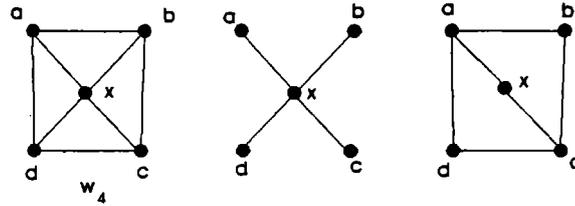


Figura 4

4.1 Relación con otras clases de grafos

En esta sección se describen las relaciones de inclusión de la clase de los grafos treelike con otras clases conocidas y su comportamiento en la primera aplicación del operador clique. Dichas observaciones, aunque inmediatas, son importantes para las secciones siguientes.

Un grafo es **trivialmente perfecto** si tiene una orientación transitiva cuyo diagrama es un árbol orientado enraizado, luego ésta es una subclase de los de la clase de los grafos treelike.

Estos grafos fueron caracterizados por Wolk [36] como aquellos que no contiene ciclos 4 ni caminos inducidos de longitud 3, es decir no contienen C_4 ni P_4 como subgrafos inducidos y por tanto, es una clase hereditaria.

Un grafo es **dualmente DV** si tiene un árbol generador que puede ser orientado, de modo que todo clique del grafo induce un camino dirigido de dicho árbol orientado.

Entonces la clase de los grafos de comparabilidad treelike está contenida en la clase de los dualmente DV, la cual tampoco es una clase hereditaria:

$$TRIVIALMENTE PERFECTO \subset TREELIKE \subset DUALMENTE DV$$

Es claro que dichas inclusiones son estrictas ya que por ejemplo, P_4 es un grafo treelike que no es trivialmente perfecto, mientras que C_4 es un grafo dualmente DV que no es treelike.

Un grafo es **DV** si es el grafo de intersección de caminos dirigidos de un árbol orientado

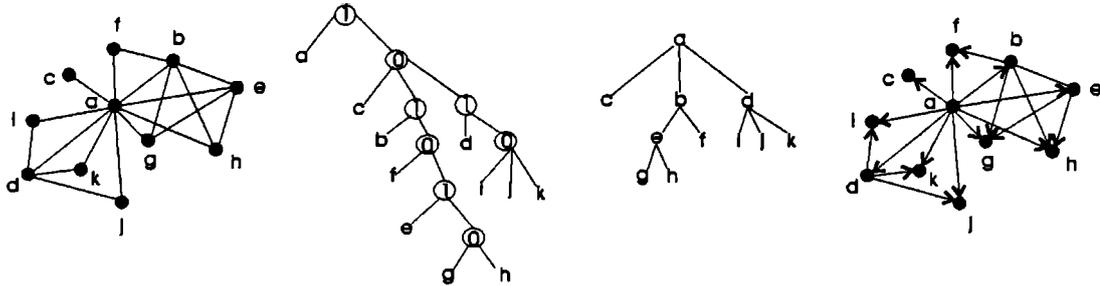


Figura 4.1: Grafo trivialmente perfecto

[32], DV es naturalmente una subclase de los grafos cordales. Recordar que un grafo es cordal si todo ciclo de 4 vértices o más posee una cuerda.

Es sabido que el operador clique alterna entre la clase $DUALLY\ DV$ y la clase DV . Es decir, $K(DUALLY\ DV) = DV$ y $K(DV) = DUALLY\ DV$ [22, 34, 5], con lo cual, $K(TREELIKE) \subset K(DUALLY\ DV) = DV \subset CORDAL$.

Para el caso de los grafos conexos trivialmente perfectos, el algoritmo de Corneil [8] nos da una forma efectiva de encontrar su orientación treelike. Primero observemos una caracterización de su árbol de descomposición $T(G)$: todo nodo **1**, sea la raíz o un nodo interno, tiene a lo sumo un hijo del tipo **0** (ya que de otra manera se tendría un ciclo 4) y en consecuencia, al menos un hijo que es un vértice de G (ya que todo nodo de $T(G)$ para G conexo, tiene al menos dos hijos).

Entonces, si x es un hijo de un nodo **1** e y un descendiente de este nodo, orientando la arista xy como \vec{xy} y si x_1, \dots, x_r son los vértices hijos de un nodo **1**, eligiendo la orientación $\vec{x_i x_j}$ o $\vec{x_j x_i}$ para todo $1 \leq i < j \leq r$, encontraremos la orientación treelike de este grafo trivialmente perfecto. En este caso la llamaremos **orientación de arborescencia**.

La Figura 4.1 nos muestra un grafo trivialmente perfecto, el árbol descomposición y la orientación treelike definida, con su grafo cubridor.

4.2 Condiciones necesarias para ser Treelike

Como hemos dicho anteriormente, C_4 no es un grafo treelike, sin embargo puede presentarse como subgrafo inducido de uno de ellos. El siguiente teorema nos muestra que la presencia de un C_4 , en un grafo treelike, obliga a la presencia de una rueda cuatro: W_4 .

Teorema 4.2.1. *Si G es un grafo treelike y x_1, \dots, x_4 inducen un ciclo en G , entonces existe $z \in \bigcap_{i=1,4} N(x_i)$.*

Demostración: Sea C_i un clique de G que contiene a la arista $x_i x_{i+1}$ (suma módulo 4). Dado que los vértices x_1, \dots, x_4 inducen un ciclo, se tiene que $C_i \neq C_j$ para $i \neq j$ y $1 < i, j < 4$. Naturalmente, C_1, \dots, C_4 forman un ciclo del grafo $K(G)$. Dado que $K(G)$ es cordal, existe una arista entre algún par de vértices no consecutivos en el ciclo, digamos, sin pérdida de generalidad, que existe una arista entre C_1 y C_3 . Luego estos dos cliques de G tienen un vértice en común en G , sea z . Luego $z \in \bigcap_{i=1,4} N(x_i)$. \square

El siguiente lema, aunque es una consecuencia elemental de la definición de grafo cubridor en grafos de comparabilidad, es esencial para las demostraciones de los resultados siguientes. La figura 4.2 facilita su entendimiento.

Lema 4.2.2. *Sea G un grafo de comparabilidad y H el grafo cubridor de una orientación transitiva \vec{G} . Si x_1, \dots, x_4 inducen un P_4 en G , existe un camino en H que conecta los vértices x_1 y x_4 , de longitud al menos 4, que tiene dos vértices, x e y verificando:*

1. x es adyacente a x_1, x_2 y a x_3 en G .
2. y es adyacente a x_2, x_3 y a x_4 en G .
3. y no es adyacente a x_1 en G .
4. x no es adyacente a x_4 en G .

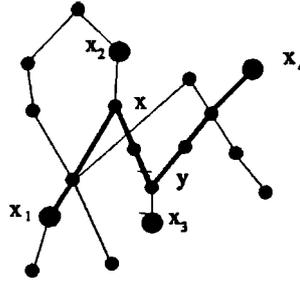


Figura 4.2: H , el grafo cubridor de una orientación transitiva de G .

5. $\overrightarrow{x_1x}, \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yx_4} \in \vec{G}$.

Este resultado puede naturalmente generalizarse para todo $P_n : x_1, \dots, x_n$ con $n \geq 4$, obteniéndose en H un camino de longitud al menos n entre x_1 y x_n que posee vértices $z_1 \dots z_{n-2}$ verificando las propiedades análogas.

El siguiente teorema nos muestra que, a pesar de que *TREELIKE* no es una clase hereditaria, hay algunos grafos que no pueden ser subgrafos inducidos de ningún grafo treelike.

Teorema 4.2.3. *Sea G un grafo treelike. Entonces G no tiene ni C_{2n} , con $n \geq 3$, ni $3 - fan$ como subgrafos inducidos.*

Demostración: Sea T el grafo cubridor de una orientación treelike de G . Supongamos que x_1, \dots, x_{2n} , $n \geq 3$ inducen un C_{2n} en G . Como $n \geq 3$, x_1, \dots, x_{2n-1} inducen un camino en G de longitud $2n - 1 \geq 4$, como la generalización del Lema 4.2.2 requiere. Entonces, si P es el camino de T que contiene x_1 y x_{2n-1} , contiene también a un vértice x , no adyacente a x_1 en G . Dado que los vértices x_{2n-1} y x_{2n} son adyacentes en G , podemos extender P a un camino P' en T que conecte x_1 y x_{2n} . Por el otro lado, como x_1x_{2n} es una arista de G , está en un clique y en consecuencia debe existir en el diagrama de \vec{G} un camino dirigido entre ellos, cuyos vértices son todos adyacentes en G . Encontramos así dos caminos en T entre x_1 y x_{2n} , uno de ellos contiene dos vértices no adyacentes de G y el otro con vértices que inducen un subgrafo completo

de G , contradicción.

Supongamos ahora que G tiene un $3 - fan$ inducido por un P_4 de vértices x_1, \dots, x_4 y z adyacente a los cuatro. Sean los vértices x, y en el camino P de H que une x_1 y x_4 que verifican el Lema 4.2.2, satisfaciendo $\overrightarrow{x_1x}, \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yx_4} \in \vec{G}$. Como x_1, x_2, z y x_2, x_3, z deberán estar en caminos dirigidos de la orientación transitiva, los caminos de H digamos, P_{12} y P_{23} que los contienen, contienen también al vértice x , teniendo entonces cada uno de ellos, tramos del camino P . El camino P_{34} de H que une z, x_3 y x_4 contendrá al vértice y (pero no al x). Luego se tendrá en H un ciclo, contradicción. \square

El resultado que sigue hace uso del hecho que una W_4 tiene una única orientación treelike. Dado un grafo treelike G en el cual a, b, c, d, x inducen una rueda W_4 con centro x (ver Figura 4), en toda orientación treelike de G , tendremos $\overrightarrow{ax}, \overrightarrow{cx}, \overrightarrow{xb}, \overrightarrow{xd}$. De otra manera, se generaría un ciclo en el grafo cubridor de la orientación. Entonces, podemos probar que un octaedro tampoco puede ser un subgrafo inducido de un grafo treelike, como dice el próximo teorema.

Teorema 4.2.4. *Sea G un grafo treelike. Entonces G no tiene a O_3 como subgrafo inducido.*

Demostración: Supongamos que los vértices x_1, \dots, x_6 inducen un O_3 en G , donde los pares de vértices no adyacentes son x_1 y x_2, x_3 y x_4, x_5 y x_6 . Podemos considerar dos W_4 inducidos, donde x_3, \dots, x_6 inducen un C_4 y x_1, x_2 son los centros. Por la observación anterior en toda orientación treelike de G , tendremos por ejemplo $\overrightarrow{x_3x_1}, \overrightarrow{x_4x_1}, \overrightarrow{x_1x_5}, \overrightarrow{x_1x_6}$ y $\overrightarrow{x_3x_2}, \overrightarrow{x_4x_2}, \overrightarrow{x_2x_5}, \overrightarrow{x_2x_6}$ y entonces existe un ciclo en el correspondiente grafo cubridor. \square

El resultado previo va a completar la condición necesaria en relación a la presencia de ciclos cuatro en un grafo treelike. En el teorema que sigue, probaremos que los vértices adyacentes a todos los vértices que inducen un ciclo 4 deben inducir un

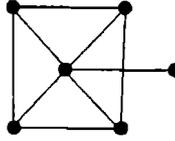


Figura 4.3: Grafo A.

subgrafo completo.

Teorema 4.2.5. *Sea G un grafo treelike con un ciclo 4 inducido por x_1, \dots, x_4 , entonces $\bigcap_{i=1,4} N(x_i)$ induce un subgrafo completo de G .*

Demostración: Supongamos que dos vértices $z_1, z_2 \in \bigcap_{i=1,4} N(x_i)$ son no adyacentes entre sí. Entonces el grafo inducido por los vértices del C_4 y z_1, z_2 forman un octaedro: O_3 . □

Definición 1. *Diremos que un grafo G de comparabilidad cumple la **condición de los ciclos cuatro**, que notamos $CC4$, si dados $\{x_1, \dots, x_4\}$ induciendo un ciclo de G , se verifica que $\bigcap_{i=1,4} N(x_i)$ induce un subgrafo completo de G .*

Las tres condiciones necesarias, presentadas anteriormente, no son suficientes. En la siguiente figura se muestra un grafo, que llamamos A , que verifica la condición $CC4$, no tiene a ninguno de los prohibidos como subgrafo inducido y sin embargo no es treelike.

La situación cambia si el grafo es de comparabilidad primo, como se prueba en la próxima sección.

4.3 Treelike Primos

Teorema 4.3.1. *Sea G un grafo de comparabilidad primo, sin 3 -fan, ni C_{2n} , con $n \geq 3$ como subgrafos inducidos, y que verifica $CC4$. Entonces G es treelike.*

Demostración: Como G es primo, tiene una única orientación transitiva \vec{G} , luego probaremos que su diagrama es un árbol orientado. Es decir, que su grafo cubridor no tiene ciclos. Obsérvese que los ciclos que podemos encontrar en el grafo cubridor de cualquier orientación, tienen la misma cantidad de fuentes que de sumideros, considerando la orientación inducida en el conjunto de vértices que lo conforman. Por hipótesis, el grafo no admite ciclos inducidos de longitud par mayor que cuatro, luego si el cubridor tiene ciclos, éstos tienen a lo sumo dos fuentes.

Analizaremos primero el caso en que el grafo cubridor tiene un ciclo con una única fuente. Sea C un ciclo con fuente a y sumidero b , y los dos caminos dirigidos que conforman el ciclo, con vértices u_1, \dots, u_n y v_1, \dots, v_m con la propiedad $u_i \not\sim v_j$ para todo $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Suponemos que $\overrightarrow{au_1}, \overrightarrow{u_1u_2}, \dots, \overrightarrow{u_nb}$ y que $\overrightarrow{av_1}, \overrightarrow{v_1v_2}, \dots, \overrightarrow{v_mb}$ son arcos de \vec{G} .

Consideremos el conjunto $W = \{x | \overrightarrow{ax}, \overrightarrow{xb} \in E(\vec{G})\}$. Dado que G es primo W no es módulo, luego sin pérdida de generalidad podemos decir que existe un $s \notin W$ tal que $\overrightarrow{sw_1} \in E(\vec{G})$ y $\overrightarrow{sw_2} \notin E(\vec{G})$, para $w_1, w_2 \in W$. Resulta entonces que $s \not\sim a$ pues como $\overrightarrow{sw_2} \notin E(\vec{G})$ entonces $\overrightarrow{sa} \notin E(\vec{G})$ y además $\overrightarrow{as} \notin E(\vec{G})$ ya que $s \notin W$. Por otro lado, $s \not\sim w_2$ pues por hipótesis $\overrightarrow{sw_2} \notin E(\vec{G})$ y si $\overrightarrow{w_2s} \in E(\vec{G})$ entonces, dado que además $\overrightarrow{sw_1} \in E(\vec{G})$, se tiene que $s \in W$, contradicción.

- Si $w_1 \not\sim w_2$. En este caso los vértices s, w_1, a, w_2 inducirían un P_4 y todos estos vértices son adyacentes a b , con lo que habría un 3-fan en G , contradicción.
- Si $\overrightarrow{w_2w_1} \in E(\vec{G})$. Sea $W_1 = \{w \in W | \overrightarrow{sw} \in E(\vec{G})\}$ y sea $W_2 = \{w \in W | w \not\sim s\}$. Observar que W_1, W_2 particionan a W pues si para algún $w \in W$, $\overrightarrow{ws} \in E(\vec{G})$ se tiene que $\overrightarrow{as} \in E(\vec{G})$, contradicción.

(i) Veamos que $\overrightarrow{W_2W_1}$, es decir que $\overrightarrow{x_2x_1} \in E(\vec{G})$ para todo $x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$.

Si $x_2 \in W_2$ entonces $\overrightarrow{w_1x_2} \notin E(\vec{G})$, ya que en este caso, como $\overrightarrow{sw_1} \in E(\vec{G})$, resulta $\overrightarrow{sx_2} \in E(\vec{G})$, contradicción. Por otro lado, $x_2 \sim w_1$ pues, en caso contrario, s, w_1, a, x_2 inducirían un P_4 que con b inducen un 3-fan, contradicción.

Se llega entonces a que $\overrightarrow{x_2w_1} \in E(\vec{G})$ para todo $x_2 \in W_2$. Es claro que el

razonamiento anterior puede hacerse para cualquier $x_1 \in W_1$. Con lo cual $\overrightarrow{W_2W_1}$.

(ii) Veamos ahora dónde están los vértices $\{u_i, v_j\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Como $u_i \not\sim v_j$, por lo probado en (i), deben estar todos en W_1 o todos en W_2 .

Si $\{u_i, v_j\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \subseteq W_2$, en particular se tiene $\overrightarrow{u_n w_1}, \overrightarrow{v_m w_1}, \overrightarrow{w_1 b} \in E(\vec{G})$.

Luego las aristas $u_n b$ y $v_m b$, no pueden estar en el grafo cubridor, contradicción.

Análogamente, si $\{u_i, v_j\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \subseteq W_1$, en particular se tiene $\overrightarrow{a w_2}, \overrightarrow{w_2 u_1}, \overrightarrow{w_2 v_1} \in E(\vec{G})$. Luego las aristas au_1 y av_1 no pueden estar en el grafo cubridor, contradicción.

Con este análisis concluimos que el diagrama no tiene ciclos con una única fuente.

Nos resta probar que el diagrama no tiene ciclos con dos fuentes en la orientación inducida en el conjunto de vértices del ciclo. Sea C un tal ciclo, con a, c sus fuentes y b, d sus sumideros. a, b, c, d inducen un ciclo 4 en G , luego, por hipótesis, existe un vértice z adyacente a todos ellos. Si $\overrightarrow{za}, \overrightarrow{zb}, \overrightarrow{zc}, \overrightarrow{zd} \in E(\vec{G})$ entonces hay un ciclo con un sumidero, por ejemplo b , y z como fuente, análogamente si $\overrightarrow{az}, \overrightarrow{bz}, \overrightarrow{cz}, \overrightarrow{dz} \in E(\vec{G})$. Por último, si $\overrightarrow{az}, \overrightarrow{zb} \in E(\vec{G})$, se forma también un ciclo con a fuente y b sumidero. En todos los casos se contradice lo probado anteriormente. \square

El próximo teorema nos dice que la distancia entre los vértices extremos de un P_4 inducido de un grafo de comparabilidad sin $3 - fan$ y que verifica $CC4$ es 3.

Teorema 4.3.2. *Sea G un grafo de comparabilidad, sin $3 - fan$ como subgrafo inducido, cumpliendo la condición de los ciclos cuatro. Si a, b, c, d inducen un P_4 en G , entonces la distancia entre a y d es tres.*

Demostración: Supongamos que la distancia entre a y d es dos, es decir, existe un vértice z adyacente a ambos: a, z, d es un camino de longitud 2. Como G es un grafo de comparabilidad, no tiene ciclos impares inducidos, con lo cual $zb \in E(G)$ o $zc \in E(G)$. Ambas condiciones no pueden ocurrir pues G no tiene $3 - fan$ inducidos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $zb \in E(G)$ y $zc \notin E(G)$. Luego se

tiene un C_4 inducido por los vértices b, c, d, z . Por la condición de los ciclos cuatro, existe un z' tal que con los vértices de este ciclo inducen una rueda cuatro. $z'a \notin E(G)$ pues no hay $3 - fan$, pero entonces a, b, z', d inducen un P_4 , y todos sus vértices son adyacentes a z , es decir inducen en G un $3 - fan$, contradicción.

Luego, $N(a) \cap N(d) = \emptyset$ y $dist(a, d) = 3$. □

Observar que ambas hipótesis son necesarias. Ni en $3 - fan$ ni en *Casa* el Teorema vale pues la distancia entre los extremos de un P_4 inducido es 2.

4.4 Descomposición modular de Treelike

En la sección anterior analizamos los grafos primos treelike, estudiaremos aquí algunas propiedades de sus módulos. Dichos resultados conducirán a una caracterización de los grafos treelike, haciendo uso de la descomposición modular.

El siguiente lema nos da una propiedad de los módulos de los grafos treelike relacionada con las fuentes (sumideros) de una orientación treelike.

Lema 4.4.1. *Si G es un grafo treelike y M un módulo de G conteniendo dos vértices no adyacentes, entonces M contiene dos fuentes o dos sumideros de toda orientación treelike de G .*

Demostración: Consideremos una orientación treelike \vec{G} de G . Sean $u, v \in M$ no adyacentes en G . Está claro que si $M = V(G)$ el resultado vale, supongamos que $M \neq V(G)$.

- Si ni u ni v son sumideros de \vec{G} existe un vértice $x \notin M$ adyacente a ambos y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\vec{v}x$ y $\vec{u}x$. Si u, v son fuentes, ya no hay nada que probar, de otro modo, sea x', x'' vértices fuentes de \vec{G} tales que $\vec{x}'u$ y $\vec{x}''v$, es claro que $x' \not\sim x''$ sino habría un ciclo en el grafo cubridor. Si $x' \notin M$, (respect. $x'' \notin M$) se tiene que $\vec{x}'v$, (respect. $\vec{x}''u$) y otra vez existe un ciclo en el grafo cubridor, contradicción. Luego $x', x'' \in M$.

- Si u es sumidero de \vec{G} y v no lo es, existe un vértice x' , sumidero de \vec{G} , con $\vec{vx'} \in E(\vec{G})$. Si $x' \notin M$ se tiene que $xu \in E(G)$ y como u se supuso sumidero $\vec{x'u}$, contradicción. Luego $x' \in M$.

□

De este último resultado, podemos probar que los módulos propios fuertes de un grafo treelike no pueden tener cuatro vértices que induzcan un ciclo.

Teorema 4.4.2. *Si G es un grafo de comparabilidad treelike conexo y M un módulo fuerte propio de G , entonces $G[M]$ no tiene C_4 inducido.*

Demostración: Sea \vec{G} una orientación treelike de G . Si x_1, \dots, x_4 inducen un C_4 en $G[M]$ con x_1x_3 y $x_2x_4 \notin E(G)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\vec{x_1x_2}, \vec{x_3x_2}, \vec{x_1x_4}, \vec{x_3x_4} \in \vec{G}$. Dado que M tiene vértices no adyacentes, debe tener dos fuentes o dos sumideros. Supongamos que M tiene dos sumideros de \vec{G} . Por el otro lado, como M es propio, existe $w \notin M$. Luego \vec{wm} para todo $m \in M$ ya que M es módulo, tiene sumideros y G es conexo. Existen entonces caminos dirigidos c_1, c_2 en el diagrama de \vec{G} tales que $\{w, x_1, x_2\} \subseteq c_1$ y $\{w, x_3, x_4\} \subseteq c_2$ y resulta haber un ciclo en el grafo cubridor de \vec{G} , contradicción. □

Tampoco el grafo P_4 puede aparecer en ningún módulo propio.

Teorema 4.4.3. *Si G es un grafo de comparabilidad treelike conexo y M un módulo propio de G , entonces $G[M]$ no tiene P_4 inducido.*

Demostración: Dado que M es un módulo propio de G y G es conexo, existe $w \notin M$ tal que $wm \in E(G)$, para todo m , vértice de M . Luego G tiene un 3-fan inducido y esto no es posible por el Teorema 4.2.3. □

Por los Teoremas 4.4.2 y 4.4.3, un módulo fuerte propio de un grafo treelike conexo induce un subgrafo trivialmente perfecto. Damos entonces la caracterización de los grafos treelike por medio de la descomposición modular.

Teorema 4.4.4. *Sea G un grafo de comparabilidad conexo, con descomposición $G = R_G[M_1, \dots, M_q]$. Entonces G es treelike si y sólo si*

(i) R_G es treelike.

(ii) Cada $G[M_i]$ es trivialmente perfecto.

(iii) Si $A = \{M_i | \exists u, v \in M_i \text{ tales que } uv \notin E(G)\}$, entonces existe una inyección entre A y el conjunto $S \cup F$ de la orientación de R_G .

(iv) $B = \{M_i | G[M_i] \text{ es no conexo}\}$ corresponde a vértices pendientes del cubridor de la orientación treelike de R_G .

(v) Si $|q| \leq 2$ entonces $|B| < 2$.

Demostración:

\Leftarrow) Caso 1: \vec{G} conexo, luego R_G es un grafo primo y su única orientación \vec{R}_G es treelike por hipótesis (i). A partir de ella vamos a construir una orientación de G y probar que su cubridor no tiene ciclos.

Notaremos con m_i al vértice de R_G correspondiente al módulo fuerte M_i de la descomposición. Por hipótesis (ii) cada M_i induce un subgrafo trivialmente perfecto y en consecuencia, admite una orientación de arborescencia que tiene uno o varios árboles enraizados como diagrama, según sea $G[M_i]$ conexo o no.

Si $M_i \in A$ se corresponde con una fuente m_i de \vec{R}_G tomamos la orientación de arborescencia cuyas raíces son sumideros y si se corresponde con un sumidero de \vec{R}_G tomamos la orientación de arborescencia cuyas raíces son fuentes.

Si $M_i \notin A$, $G[M_i]$ es un completo y toda orientación transitiva es de arborescencia cuyo cubridor es un camino, luego tomamos cualquiera de ellas. Obtenemos de esta manera \vec{G} , una orientación transitiva de G . Veamos que su cubridor es un árbol.

Sabemos que toda arista externa $e = xy$ del cubridor de una orientación es incidente en dos vértices pertenecientes a distintos módulos fuertes de la descomposición, digamos $x \in M_i$, $y \in M_j$ con $i \neq j$. Y en este caso particular, por como hemos definido

a la orientación de G , estos vértices son raíces del árbol diagrama de $\overrightarrow{G[M_i]}$ y $\overrightarrow{G[M_j]}$ respectivamente.

Supongamos C un ciclo en el cubridor de \overrightarrow{G} de aristas e_1, \dots, e_t , con $t \geq 3$. Estas aristas no pueden ser todas externas dado que si así fuera, habría un ciclo en el cubridor de $\overrightarrow{R_G}$ contradiciéndose la hipótesis (i).

Tampoco pueden ser todas internas de un mismo $G[M_i]$ pues $\overrightarrow{G[M_i]}$ es una orientación de arborescencia y su cubridor es uno o varios árboles enraizados.

Claramente entonces, las aristas de C son algunas internas y otras externas.

Supongamos e_1 externa y e_2 interna. Donde $e_1 = x_i x_j$ con $x_i \in M_i$, $x_j \in M_j$, $M_j \in \mathcal{A}$ y e_2 una arista del cubridor de la orientación de arborescencia de $G[M_j]$.

Como hemos definido a \overrightarrow{G} , x_j es raíz de uno de los árboles cubridores de $\overrightarrow{G[M_j]}$ correspondiente a una de sus componentes conexas. Recorriendo las aristas de C , sea e_k con $3 \leq k \leq n$ la próxima arista externa.

Dicha arista será entonces incidente en una raíz x'_j de la orientación de arborescencia de $G[M_j]$. Observar que si $x_j = x'_j$ habría un ciclo en $G[M_j]$, contradicción. Luego $x_j \neq x'_j$, entonces $G[M_j]$ tiene 2 raíces con lo cual es no conexo. Pero la porción de ciclo de x_j a x'_j los conecta y está contenida en $G[M_j]$, contradicción.

Caso 2: \overrightarrow{G} es no conexo y en consecuencia R_G es un grafo completo. Está claro que si $q \leq 2$ entonces $|\mathcal{B}| < 2$, de lo contrario se formaría un ciclo en R_G . Supongamos entonces que R_G tiene al menos tres vértices.

Las posibles orientaciones transitivas de R_G tienen como grafo cubridor un camino de longitud 3 o más, luego $|S \cup F| \leq 2$. Consecuentemente, G tiene a lo más dos módulos, sean M_1, M_2 , en \mathcal{A} . Dado que $G[M_1]$ y $G[M_2]$ son trivialmente perfectos, admiten orientaciones transitivas cuyo diagrama es un árbol enraizado o unión de árboles enraizados. Entonces G admite una orientación treelike.

\Rightarrow) Como G es treelike, por el Teorema 4.2.5, verifica la condición de los ciclos 4.

Supongamos que existen m_1, \dots, m_4 vértices de R_G que inducen un ciclo 4.

Entonces existe un ciclo 4 en G , $x_i \in M_i$ para $1 \leq i \leq 4$. Luego existe z adyacente a x_i para $1 \leq i \leq 4$ en G y en consecuencia un M_k $k \neq 1 \dots 4$ tal que $z \in M_k$. Luego

m_k adyacente a m_i para $1 \leq i \leq 4$ en R_G .

Por otro lado, como todos los v3rtices adyacentes a los cuatro v3rtices de un ciclo 4 inducen un completo, y en consecuencia lo mismo ocurre con los v3rtices m_i que representan a los m3dulos M_i a los que pertenecen.

El Teorema 4.2.3 nos dice que G no tiene a 3-fan ni a C_{2n} con $n \geq 3$ como subgrafos inducidos y en consecuencia R_G tampoco. R_G verifica entonces el primer item.

Por el Teorema 4.4.1, cada $M_i \in \mathcal{A}$, tiene al menos dos fuentes (o excluyentemente, al menos dos sumideros) en cada orientaci3n treelike de G . Luego, dichos m3dulos deben corresponder a fuentes sumideros de la orientaci3n de R_G . En el caso $M_i \in B$, la fuente o sumidero que le corresponde tiene valencia uno en el cubridor ya que en caso contrario, se tendr3a un ciclo 4 en G sin v3rtice adyacente a ellos. \square

Como hemos convenido en considerar como una sola a cada orientaci3n y su orientaci3n sim3trica, podemos enunciar el siguiente teorema,

Teorema 4.4.5. *Sea G un grafo treelike conexo reducido. Entonces G tiene una 3nica orientaci3n treelike.*

Demostraci3n: Sea $R_G[M_1, \dots, M_q]$ la descomposici3n de G , con $G_i = G(M_i)$ para $i = 1 \dots q$. Probaremos que existe una 3nica orientaci3n transitiva cuyo diagrama es un 3rbol enraizado asociada a cada G_i y por la caracterizaci3n anterior quedar3a probado el resultado.

Como G es reducido, G_i tambi3n lo es. Supongamos que \vec{G}^* y \vec{G}^\dagger son dos orientaciones distintas asociadas a un G_i . Sea u el v3rtice universal de G_i . Entonces $\vec{u}x^*$ y $\vec{u}x^\dagger$ para todo $x \in V(G_i) - u$. Como son orientaciones distintas, existen v3rtices z, y tales que $\vec{z}y^*$ y $\vec{y}z^\dagger$.

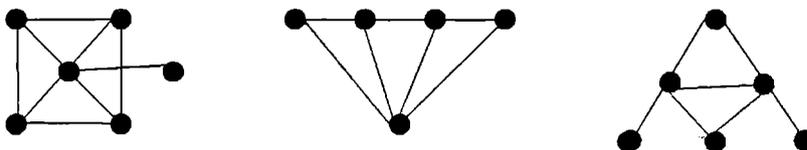
Por el otro lado, dado que z e y no son gemelos, existe un v3rtice $y' \in N_{G_i}(z)$ tal que $y|y'$ y en consecuencia $\vec{z}y'^*$ y $\vec{y}'z^\dagger$. Resulta $\vec{u}y'^\dagger, \vec{y}'z^\dagger$ y entonces \vec{G}^\dagger no es una orientaci3n transitiva cuyo diagrama es un 3rbol enraizado, contradicci3n. \square

4.5 Caracterización por prohibidos y 4CC

Observemos que dado un grafo treelike G y una orientación treelike \vec{G} , $\vec{G}(D[x])$ y $\vec{G}(U[x])$ son orientaciones de arborescencia, para todo x en $V(G)$. Luego $G(D[x])$ y $G(U[x])$ son subgrafos trivialmente perfectos para todo x de $V(G)$.

Esto nos permite mostrar, con otro argumento, que un 3-fan es un subgrafo prohibido para los grafos treelike. En efecto, supongamos que a, b, c, d inducen un P_4 y que todos estos vértices son adyacentes a otro vértice e en el grafo treelike G . Como en toda orientación transitiva cada vértice de $D[e]$ es adyacente a cada vértice de $U[e]$, a, b, c, d están todos en $D[e]$ o en $U[e]$. Esto significa que $\vec{G}(D[e])$ o $\vec{G}(U[e])$ no es orientación de arborescencia en cualquier orientación transitiva \vec{G} que consideremos. Contradicción.

Con este tipo de argumentos podemos concluir que todos los grafos de la Figura 4.5 son prohibidos para la clase de los grafos treelike.



Grafos A, 3-fan y 2B

Ya hemos probado que C_{2n} para $n \geq 3$ son subgrafos prohibidos para la clase de los grafos treelike, entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.5.1. *Si G es un grafo treelike, entonces G no tiene a C_{2n} ($n \geq 3$), 3-fan, 2B ni a A como subgrafos inducidos.*

Y obtenemos entonces la siguiente caracterización.

Teorema 4.5.2. *Sea G un grafo de comparabilidad. Entonces G es un grafo treelike si y sólo si no tiene como subgrafo inducido a ninguno de los siguientes: C_{2n} ($n \geq 3$), 3-fan, 2B, A y además verifica la condición 4CC.*

Demostración: Solo resta probar la recíproca. Sea $R_G[M_1, \dots, M_q]$ la descomposición modular de G , donde $G_i = G[M_i]$ para $i = 1 \dots q$. Usaremos la caracterización dada en el Teorema 4.4.4.

Por un lado, el Teorema 4.3.1 nos asegura que R_G es un grafo treelike (item (i) del Teorema 4.4.4). Por el otro, es claro que cada $G_i = G[M_i]$ no tiene un P_4 inducido ya que en ese caso habría un 3-fan inducido en G , contradiciéndose la hipótesis.

Probaremos primero que cada M_i que tenga al menos dos vértices no adyacentes, se corresponde con una fuente o con un sumidero de $\overrightarrow{R_G}$ ((iii) del Teorema 4.4.4).

Consideremos entonces x', x'' dos vértices no adyacentes de M_i , y x_i el vértice de R_G que representa a G_i .

Caso: R_G primo

Por el Teorema 2.3.2 sabemos que todo vértice de R_G o bien es el vértice de valencia dos de un Bull o está en un P_4 .

Si x_i no es ni fuente ni sumidero de $\overrightarrow{R_G}$, y x_i es un vértice de valencia 2 en un Bull inducido de R_G , existiría un $2B$ inducido en G , contradicción.

Si x_i no es ni fuente ni sumidero de $\overrightarrow{R_G}$, y x_i está en un P_4 de R_G , digamos a, x_i, c, d , sin pérdida de generalidad podemos suponer $\overrightarrow{ax_i}, \overrightarrow{cx_i}$ y \overrightarrow{cd} .

Sea x_k sumidero de $\overrightarrow{R_G}$ tal que $\overrightarrow{x_i x_k}$. Como R_G es primo, existe $e \in V(R_G)$ tal que, o bien $ex_i \in E(R_G)$ y $ex_k \notin E(R_G)$, pero en este caso por ser $x' \not\sim x''$ no se verificaría en G la condición $CC4$, o si en cambio, $ex_i \notin E(R_G)$ y $ex_k \in E(R_G)$ debemos analizar los siguientes casos.

Con abuso de notación y si no se presta a confusión, llamaremos de la misma manera a un vértice de M_i y al vértice que lo representa en R_G :

- $e \not\sim a, e \not\sim c$ se tiene que a, x', x'', c, x_k inducen una A en G .
- $ea \in E(G)$ y $e \not\sim c$, entonces c, x', a, e y x_k inducen un 3-fan en G .
- $ea, ec, ed \in E(G)$ y $x_k \not\sim d$ entonces a, x_k, c, d y e inducen un 3-fan en G .
- $ea, ec, ed, x_k d \in E(G)$ entonces a, x', c, d y x_k inducen un 3-fan en G .

- $ea, ec, x_k d \in E(G)$ y $e \not\sim d$ entonces a, x', c, d y x_k inducen un 3 – fan en G .
- $ea, ec \in E(G)$ y $e \not\sim d$ y $x_k \not\sim d$ entonces el grafo cubridor de $\overrightarrow{R_G}$ tiene un ciclo pues $\overrightarrow{ae}, \overrightarrow{ax'_i}$, contradiciéndose que R_G es treelike.

Caso: R_G completo

Si $q \geq 3$ y suponemos que se tienen M_i, M_j, M_k , con $i < j < k$, cada uno de ellos con al menos un para de vértices no adyacentes, no se verificaría en G la condición 4CC. Luego, en este caso $|\mathcal{A}| \leq 2$.

Si $q = 2$ y $|\mathcal{A}| = 2$ no pueden los dos conjuntos $M_i \in \mathcal{A}$ ser conjuntos de \mathcal{B} porque se contradicę la condición CC4. Luego se cumple el item (v) del Teorema 4.4.4.

Para probar que cada G_i es un grafo trivialmente perfecto, (item (ii) del Teorema 4.4.4), supongamos que a, b, c, d induce un C_4 en G_i , donde $a \not\sim b$ y $c \not\sim d$.

Si x_i es un sumidero de $\overrightarrow{R_G}$, se presentan dos posibilidades:

- x_i cubre en $\overrightarrow{R_G}$ al menos a dos vértices, digamos x_j, x_k . En este caso, G no verificará la condición 4CC, contradicción.
- x_i cubre sólo un vértice: x_j . Como R_G es primo, no hay vértices gemelos y existe un vértice $x_k, \overrightarrow{x_j x_k}$, x_i no adyacente a x_k . Entonces existe una A inducida en G , contradicción.

Concluimos así que cada G_i es un grafo trivialmente perfecto.

Por último, si M_i induce un grafo no conexo y se corresponde con x_i sumidero no pendiente de R_G , se tiene en G un ciclo 4 que no forma parte de una W_4 , contradiciéndose CC4. Es decir, el item (iv) del Teorema 4.4.4 se verifica. □

4.6 Grafos Bouquet

A pesar de que la clase de grafos treelike es no hereditaria, algunos subgrafos inducidos particulares de un grafo treelike son en efecto treelike.

Teorema 4.6.1. *Sea G un grafo treelike, entonces $G[V(G) - N[x]]$ y $G[N[x]]$ son treelike, para todo $x \in V(G)$.*

Demostración: Mostraremos que $G[V(G) - N[x]]$ verifica 4CC. Supongamos que a, b, c, d inducen un ciclo 4 en $G[V(G) - N[x]]$, con $a \not\sim b$ y $c \not\sim d$. Dado que G verifica la condición 4CC, existe un conjunto de vértices que inducen un completo y que son adyacentes a todos los vértices del ciclo 4 en G . Supongamos que este conjunto está contenido en $N[x]$, como G no tiene al grafo A , como subgrafo inducido, se tendría que a y b o que c y d son adyacentes a x , lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que $G[V(G) - N[x]]$ verifica la 4CC. Es claro $G[N[x]]$ verifica las condiciones para ser treelike. \square

Lamentablemente, el recíproco de esta proposición es falsa. Por ejemplo, 3-fan verifica la propiedad pero no es un grafo treelike.

Naturalmente si G es un grafo treelike y $x \in V(G)$, $G[N[x]]$ es un grafo treelike con vértice universal.

Definición 2. *Un grafo es un grafo bouquet si es treelike y tiene un vértice universal.*

El siguiente lema describe dichos grafos.

Lema 4.6.2. *G es un grafo bouquet si y sólo si \overline{G} es no conexo, con al menos tres componentes: dos de las cuales no tienen $2K_2$ ni P_4 como subgrafos inducidos y las otras componentes son singletons.*

La Figura 4.4 ejemplifica el Lema. G es un grafo bouquet y $x \in V(G)$ es un vértice universal. Notamos con A y B a los conjuntos disjuntos de vértices de las componentes conexas de \overline{G} y con S al conjunto de singletons. Observar que los conjuntos A o B pueden ser vacíos, mientras que S no, ya que $x \in S$. En el caso en que A (o B) no sea vacío, tienen al menos dos vértices no comparables.

0 que son la raíz de dos subárboles, digamos T_1 y T_2 .

Orientamos toda arista de G cuyos extremos están en distintos subárboles de la misma manera, por ejemplo, $\overrightarrow{aa'}$ para a hoja de T_1 y a' hoja de T_2 , \overrightarrow{ax} para todo vértice a hoja de T_1 y $\overrightarrow{xa'}$ para todo a' hoja de T_2 .

Para cada hoja a hijo de un nodo 0 de T_1 y para todo b hoja descendiente de todo nodo 1 que esté en el camino de ese nodo 0 hacia la raíz de T_1 , tomo la orientación \overrightarrow{ab} .

Luego para cada hoja a' hijo de un nodo 1 de T_2 y todo b' hoja descendiente de ese nodo 1, tomo la orientación $\overrightarrow{a'b'}$.

La figura 4.5 muestra un ejemplo.

El siguiente teorema utiliza a los grafos bouquet para describir grafos treelike primos.

Teorema 4.6.3. *Sea G un grafo de comparabilidad primo sin C_{2n} , para $n \geq 3$ como subgrafo inducido. Entonces G es un grafo treelike si y sólo si las condiciones (1) y (2) se satisfacen:*

1. *Para cada par de vértices x, y no adyacentes $G[N[x] \cap N[y]]$ es un conexo trivialmente perfecto o un grafo vacío.*
2. *Para cada par de vértices adyacentes x, y , $G[N[x] \cap N[y]]$ es un grafo bouquet.*

Demostración: \Leftarrow) Si G tiene 3-fan, existe un P_4 inducido en el entorno de un vértice e . Entonces $G[N[e]]$ no es un grafo bouquet, contradiciendo (2).

Supóngase que los vértices a, b, c, d inducen un C_4 , con $a \not\sim b$ y $c \not\sim d$. Por hipótesis 1, existe un camino que une c y d en $G[N[a] \cap N[b]]$. Si un camino más corto que los que tiene longitud tres o más, $G[N[a]]$ tendría un 3-fan inducido, contradiciendo la hipótesis 2. En el caso de que un camino más corto tenga longitud 2, existe un vértice x adyacente a todos los vértices del C_4 . Supongamos ahora que existe otro vértice x' adyacente a a, b, c, d y $x \not\sim x'$. Entonces $G[N[x] \cap N[x']]$ tiene un C_4 inducido contradiciendo 1. Luego G verifica 4CC y es por el Teorema 4.3.1 un grafo treelike.

\Rightarrow) Es trivial. □

Observemos que el teorema es falso si el grafo no es primo, C_4 es un contraejemplo.

4.7 Caracterización por orden de eliminación

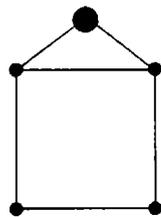
Algunas clases de grafos pueden caracterizarse por poseer un orden de eliminación de sus vértices cumpliendo una propiedad determinada. Por ejemplo, es sabido que todo grafo cordal posee un vértice simplicial (un vértice cuyo entorno es un completo del grafo). Luego si un grafo no tiene ningún vértice simplicial, entonces no es cordal. Pero, ¿qué ocurre si un grafo G tiene un vértice simplicial x ? Dado que *CORDAL* es una clase hereditaria, si G fuera cordal, entonces $G - x$ tiene que serlo, con lo cual debe tener un vértice simplicial. De este modo se obtiene lo que se llama un *orden de eliminación perfecto*. Recíprocamente se prueba que si $G - x$ es cordal y x es simplicial de G entonces G es cordal.

Luego, puede obtenerse fácilmente un algoritmo que busque un simplicial en el grafo y si no lo encuentra, el grafo no es cordal. Si lo encuentra, lo borra y testea un grafo menor. Si se llega a eliminar todos los vértices, el grafo dado es cordal.

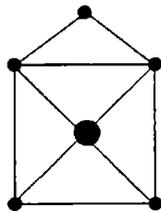
Basado en esta idea se desarrolla aquí un algoritmo que decide si un grafo es treelike: buscando un vértice especial, eliminándolo y continuando con la búsqueda en el grafo resultante. Obsérvese que, dado que la clase *TREELIKE* no es hereditaria, el vértice a eliminar no puede ser cualquiera.

Es claro que si un grafo es treelike, los vértices fuente o sumidero de la orientación treelike pueden ser eliminados, obteniéndose un subgrafo que es treelike.

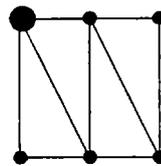
En [33] el autor caracteriza los vértices de un grafo de comparabilidad para los cuales existe una orientación en la cual el vértice considerado es fuente o sumidero. Define como vértice **regular** a aquellos vértices que no son los resaltados en alguno de los grafos F_i ($1 \leq i \leq 4$) o en el complemento de F_5 , ver Figura 4.7.



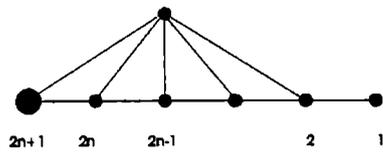
F_1



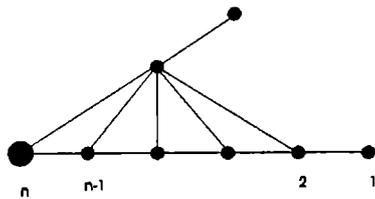
F_2



F_3



$F_4 \quad (n > 1)$



$\overline{F_6} \quad (n > 2)$

Se prueba entonces el siguiente teorema.

Teorema 4.7.1. [33] *Un vértice x de un grafo de comparabilidad G es fuente de alguna orientación transitiva de G si y sólo si x es regular.*

Observemos que F_2, F_3, F_4 y F_5 con $n \geq 4$ tienen un 3-fan inducido.

El vértice resaltado del grafo F_5 con $n = 3$ es el vértice de valencia 2 de un *Bull*.

Si F_1 es un subgrafo inducido de un grafo treelike, existe un vértice w adyacente a todos los vértices del 4-ciclo. El vértice resaltado puede o no ser adyacente a w , pero de cualquier modo, un subgrafo 3-fan inducido resulta en el grafo treelike, lo cual es una contradicción.

Del análisis previo se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.7.2. *Si G es un grafo treelike. Un vértice x es fuente o sumidero de una orientación treelike de G si y sólo si x no es el vértice de valencia 2 de un *Bull* inducido de G .*

Es claro esta propiedad sola no es suficiente para obtener este tipo de algoritmo.

Obsérvese por ejemplo, que cualquier vértice de un C_4 cumple con esta condición y sin embargo, el hecho que P_3 sea treelike, no conduce a que C_4 lo sea.

Buscando una propiedad más adecuada para los vértices a ser eliminados, surgió la siguiente definición:

Definición 3. *Un vértice x es superdominado por un vértice adyacente w en un grafo G , si*

1. $G[N[w]]$ es un grafo bouquet, con $N[w] = A \cup B \cup S$.
2. x y w son gemelos o $N(x) = B \cup S$ o $N(x) = A \cup S$

Observaciones

- Si $N(x) = B \cup S$ entonces $x \in A$ y x es un vértice universal en $\overline{G[A]}$
- Si $N(x) = A \cup S$ entonces $x \in B$ y x es un vértice universal en $\overline{G([B])}$

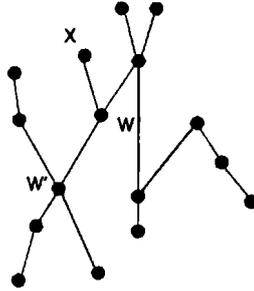


Figura 4.6: x es superdominado por w pero no por w'

- Si $N[x] = N[w]$ entonces $x \in S$

Lamentablemente esta propiedad aún no es suficiente. Obsérvese que si G es un 3-fan siendo $P_4 : a, b, c, d$ y u el vértice universal, entonces d está superdominado por c en G . $G - d$ es un grafo treelike, sin embargo G no lo es.

Finalmente, se logra un teorema que conduce a un orden de eliminación pero se necesita evitar los 3-fan.

Teorema 4.7.3. *Sea G un grafo de comparabilidad conexo sin 3-fan inducidos. Entonces G es un grafo treelike si y solo si existe un vértice x tal que*

1. x no es el vértice de valencia 2 de un Bull.
2. $G - x$ es un grafo treelike.
3. x es superdominado por algún vértice w .

Demostración: \Rightarrow) Consideremos \vec{G} la única (salvo existencia de gemelos) orientación transitiva treelike de G , H su grafo cubridor y x un vértice pendiente de H .

(1) Es claro que x no es el vértice de valencia dos de un Bull inducido en G , ya que es una fuente o un sumidero de \vec{G} .

(2) $G - x$ es un grafo treelike ya que la orientación \vec{G} inducida en $G-x$ tiene como grafo cubridor a $H - e$ donde e es la arista de H incidente en x .

(3) Por último, si w es el vértice adyacente a x en H es claro que x es superdominado por w .

\Leftrightarrow Como $G' = G - x$ es un grafo treelike entonces sea $\vec{G'}$ su orientación transitiva treelike y H' su grafo cubridor.

Como el vértice x es superdominado por un vértice w , esto implica que $G[N[w]]$ es un grafo bouquet con $N[w] = A \cup B \cup S$ (A y B son los conjuntos de vértices de las componentes conexas de $\overline{G[N[w]]}$ y S el conjunto de singletons) y además x y w son gemelos o $x \in B$ y $N(x) = A \cup S$ o $x \in A$ y $N(x) = B \cup S$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A - x = A' \subseteq D(w)$ y $B - x = B' \subseteq U(w)$ en la orientación $\vec{G'}$.

Extenderemos $\vec{G'}$ a todo G , esto es, definiremos la orientación de las aristas de G incidentes en x .

- Si $x \in S$ entonces $N[x] = N[w]$ y definimos $\vec{y\hat{x}}$ para todo $y \in D(w)$, $\vec{x\hat{s}}$ para todo $s \in U(w)$ y $\vec{x\hat{w}}$. El cubridor de \vec{G} se obtiene de reemplazar en H' las aristas $w'w$ por las aristas $w'x$ y agregar la arista xw .
- Si $x \in B$, (luego $A' = A$), $N(x) = A \cup S$ y $S = \{w\}$ definimos $\vec{w\hat{x}}$ y $\vec{y\hat{x}}$ para todo $y \in D(w)$. El grafo cubridor de esta orientación es el árbol $H \cup wx$.
- Si $x \in B$, ($A' = A$) $N(x) = A \cup S$ y $|S| > 1$ con $w_1 =$ fuente de $\overline{G'[S]}$ y $w_2 =$ sumidero de $\overline{G'[S]}$.
 1. Si $D[w_2] = S \cup A$ entonces definimos $\vec{w_2\hat{x}}$ y $\vec{y\hat{x}}$ para todo $y \in D(w_2)$ y el cubridor de esta orientación es el árbol $H' \cup w_2x$.
 2. Si $D[w_2] \neq S \cup A$ existe un vértice $z \in D(w_2) - S \cup A$, es claro que $z \not\sim w$

(ya que de otra manera z estaría en A o S), $z|x$ (esto es por la definición de $N(x)$).

- (a) En caso de ser $B' = \emptyset$ y $U(w_1) = S$. Definimos $\overrightarrow{w_1x}$, \overrightarrow{yx} para todo $y \in A$ y \overrightarrow{xy} para todo $y \in S$. El grafo cubridor se obtiene de reemplazar en H' la arista w_1w' por las aristas w_1x y xw' .
- (b) En caso de ser $B = \emptyset$ y $U(w_1) \neq S$, existe un vértice $z' \in U(w_1)$ tal que $z' \not\sim w$ (y en consecuencia $z' \not\sim x$). Podemos asegurar que $z \neq z'$ y $z \not\sim z'$ ya que de otra manera \overrightarrow{G} no resultaría un orientación transitiva treelike. Entonces z, w_2, x, w_1, z' induce un bull donde x es su vértice de valencia 2. Contradicción.
- (c) En caso de ser $|B'| \neq \emptyset$. Sean $d \in B'$. Entonces, $x \not\sim d$ y $z \sim d$. Tenemos que x, w, d, z induce un P_4 y todos sus vértices son adyacentes a w_2 , teniéndose en G un 3 - fan inducido, contradicción.

Luego la orientación transitiva descrita en cada caso posible es una orientación transitiva treelike para G . □

Entonces, para determinar si un dado grafo de comparabilidad conexo, sin 3 - fan inducido, es un treelike, podemos correr el siguiente algoritmo:

Algoritmo(G)

Existe un vértice superdominado de G que no sea un vértice de valencia dos de un Bull?

si la respuesta es SI: sea x un tal vértice,

entonces $G := G - x$

$|V(G)| = 1$?

|| SI entonces G es un grafo treelike PARAR

|| NO entonces correr el *Algoritmo(G)*

si la respuesta es NO, entonces G no es un grafo treelike. PARAR.

4.8 Caracterización como Completamente separables

Como se describió en el Capítulo 2 los grafos completamente separables son de reconocimiento lineal.

Los grafos treelike son un tipo especial de grafos completamente separable. En [9] se dan algunas características especiales de los mismos. En esta sección se presentan otras propiedades que los caracterizan.

Lema 4.8.1. *Sea G un grafo de comparabilidad treelike conexo, entonces G es completamente separable.*

Demostración: Por ser G un grafo treelike, no tiene $3-fan$ y ni C_n con $n \geq 5$ como subgrafos inducidos. Luego para probar que es completamente separable debemos mostrar que la casa y el dominó son subgrafos inducidos prohibidos para G . A partir de la propiedad de los ciclos 4 y de que $3-fan$ es prohibido para los grafos treelike, esto resulta ser inmediato. \square

Los próximos lemas tienen como hipótesis G , un grafo treelike conexo, α un vértice de G , y $L_1 \dots L_p$ los conjuntos niveles respecto a α .

Recordemos que en todo grafo completamente separable,

- (i) Si $x, y \in L_i$ y son adyacentes, $N'(x) = N'(y)$.
- (ii) Si $x, y \in L_i$ y están atados, existe $c \in L_{i+1}$ adyacente a ambos.

Lema 4.8.2. *Sea $x \in V(G) - \{\alpha\}$, entonces $N'(x)$ induce un subgrafo conexo.*

Demostración: Si $x \in L_1$, $N'(x) = \alpha$ y el resultado es claro. Luego sea $x \in L_i$ para $i \geq 2$ y $y, z \in N'(x)$ dos vértices no adyacentes entre sí. Como y, z resultan estar atados, existe un $p \in L_{i-2}$ (p podría incluso ser α), adyacente a y y a z . Entonces p, y, x, z inducen un ciclo 4 y por la propiedad $4CC$, existe u adyacente a los cuatro,

que necesariamente estará en L_{i-1} . Luego resulta $u \in N'(x)$ y en consecuencia, $N'(x)$ induce un conexo en G . \square

Como corolario del precedente Lema observemos que dos vértices atados de un L_i están en la misma componente conexa de L_i , para $i \geq 2$.

Lema 4.8.3. *Cada componente conexa de L_i para $i \geq 2$ induce un subgrafo trivialmente perfecto.*

Demostración: Por ser G completamente separable, una componente conexa de L_i , no tiene a un P_4 como subgrafo inducido pues en ese caso, (i) implicaría que hay un $3-fan$ inducido en G . Luego, cada componente conexa de L_i induce un cografo. Por lo tanto sólo nos resta probar que no tiene un ciclo 4 inducido. En efecto, si suponemos que existen cuatro vértices a, b, c, d que inducen un ciclo 4 en una componente de L_i , para $i \geq 2$ estos tendrán misma vecindad en L_{i-1} . Luego por ser $i \geq 2$ existe una A inducida en G . Contradicción. \square

Lema 4.8.4. *Si $x, y \in L_i$ vértices atados y adyacentes entonces, $N''(x) \subseteq N''(y)$ o $N''(y) \subseteq N''(x)$.*

Demostración: Si x, y están atados, por (ii) existe un vértice $p \in L_{i+1}$, adyacente a ambos y por (i) existe $t \in L_{i-1}$ tal que $t \in N'(x) = N'(y)$. Supongamos que existe un $z \in N''(x) - N''(y)$ y un $w \in N''(y) - N''(x)$. Si $zw \in E(G)$, x, y, z, w, t inducen una casa, luego z y w no son adyacentes. En el caso de que $zp \in E(G)$ tendremos que t, y, p, z inducen un P_4 cuyos vértices son todos adyacentes a x , es decir hay un $3-fan$ inducido y en el caso de ser w, z y p un conjunto independiente, hay un $2B$ inducido, llegándose entonces en los tres casos a una contradicción. \square

Lema 4.8.5. *Si x, y, z inducen un P_3 en L_i para $i \geq 2$, $y \in N'(c)$ para $c \in L_{i+1}$ entonces $x, z \in N'(c)$.*

Demostración: Supongamos que c no es adyacente a x ni a z . Por ser G completamente separable, por (i) existe $p \in L_{i-1}$ tal que $xp, yp, wp \in E(G)$. Como $i \geq 2$ existirá un $u \in L_{i-2}$ (u podría ser α) adyacente a p y en consecuencia se tiene un $2B$ inducido en G , contradicción. Tenemos entonces que cx o cz son aristas de G pero en el caso de existir sólo una de ellas, se tendría un $3 - fan$ inducido, luego c es adyacente a x y z . \square

Lema 4.8.6. *Si x, y, z, w inducen un ciclo 4 con $x, y, z \in L_i, w \in L_{i+1}, x \approx z, y \approx w$, entonces existe $c \in L_i$ adyacente a los cuatro vértices.*

Demostración: Por la propiedad $4CC$ existe un vértice u adyacente a los cuatro. Si $u \in L_{i+1}$, la observación (i) implica que $wy \in E(G)$, contradicción. Luego $u \in L_i$. \square

Como corolario de este Lema podemos inferir que todos los vértices adyacentes a los cuatro vértices de un ciclo 4 con tres de sus vértices en L_i y el cuarto en L_{i+1} , estarán en L_i .

Hemos probado que para todo $x \in L_{i+1}$, $N'(x)$ induce un subgrafo conexo en L_i . En lo que sigue, notaremos C_x a la componente conexa que contiene a $N'(x)$, T_x el árbol descomposición de $G[C_x]$ y R_x el nodo de T_x más cercano que tienen en común los vértices de $N'(x)$.

También se ha probado que si G es treelike cada componente conexa de L_i para $i \geq 2$ induce un subgrafo trivialmente perfecto y si $i = 1$, el Teorema 4.6.1 probó que $L_1 \cup \{\alpha\}$ induce un grafo bouquet.

Para el siguiente lema es necesario recordar que dado un grafo conexo trivialmente perfecto H , la raíz de su árbol descomposición tiene un único hijo 0 y al menos un hijo vértice. Mientras que si H es un grafo bouquet no trivialmente perfecto, la raíz de su árbol descomposición tiene al menos un hijo vértice y exactamente dos hijos 0. Los subárboles enraizados en estos nodos, que podemos notarlos R_A y R_B ,

son los árboles descomposición correspondientes a los subgrafos inducidos por las componentes conexas no triviales de \overline{H} : \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Lema 4.8.7. *Sea $x \in L_{i+1}$ para $i \geq 1$, con $|N'(x)| > 1$ entonces $N'(x)$ es el conjunto de hojas descendientes de un único hijo 0 de R_x unión un conjunto no vacío de hijos vértices de R_x .*

Demostración: Como $|N'(x)| > 1$ sabemos que R_x es un nodo 1 de T_x pues $N'(x)$ induce un subgrafo conexo.

1. Si $i \geq 2$ sabemos por el Lema 4.8.3 que $G[C_x]$ es un grafo trivialmente perfecto y en consecuencia R_x tiene a lo sumo un hijo tipo 0 , notémoslo S_x y además existe y hijo de R_x tal que $xy \in E(G)$.

Veamos que x debe ser adyacente a todo vértice hoja del subárbol T_{S_x} .

Supongamos z , hoja de T_{S_x} tal que $xz \notin E(G)$. Es claro que existe w descendiente de S_x tal que $wz \notin E(G)$ y también podemos decir que existen vértices p, q donde $p \in L_{i-1}$ adyacente a y, z y w ; y $q \in L_{i-2}$ adyacente a p ($q = \alpha$ si $i = 2$).

Si $xw \notin E(G)$, x, w, y, z, p, q inducen un $2B$ en G , contradicción. Si $xw \in E(G)$, z, p, w, x, y inducen un $3 - fan$, contradicción.

Luego x es adyacente a todo vértice hoja de T_{S_x} .

2. Si $i = 1$ y $G[N(\alpha)]$ es un grafo bouquet no trivialmente perfecto tendremos $C_x = L_1$.

La raíz de T , el árbol descomposición de $G[L_1]$, tiene un conjunto de hijos vértices y dos hijos 0 que notaremos $R_{\mathcal{A}}$ y $R_{\mathcal{B}}$ en relación a que los subárboles enraizados en ellos son los correspondientes a los subgrafos inducidos por las componentes conexas no triviales \mathcal{A} y \mathcal{B} de $\overline{G[N(\alpha)]}$.

Caso 1: R_x es la raíz del árbol T .

Probaremos primero que $N'(x) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ o $N'(x) \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Observemos que no se puede dar el caso $N'(x) \cap \mathcal{B} = N'(x) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ pues sería entonces x adyacente a al menos un vértice y , hijo de R_x y habría una A inducida en G .

Supongamos entonces que existen $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$ adyacentes a x . Luego existen $a' \in \mathcal{A}$, $b' \in \mathcal{B}$ tal que a, b, a', b' inducen un ciclo 4. Si $xa' \notin E(G)$ y $xb' \notin E(G)$, a, b, a', b', x inducen una casa; si $xa' \in E(G)$ y $xb' \notin E(G)$, x, b, a', b' y a inducen un 3 – fan; por último si $xa' \in E(G)$ y $xb' \in E(G)$, a, b, a', b' es un ciclo 4 con dos centros no adyacentes: x y a contradiciendo $CC4$. Podemos decir entonces que x tiene adyacencia con vértices correspondientes a hojas del sub-árbol enraizado en $R_{\mathcal{A}}$ y es no adyacente a ningún vértice de \mathcal{B} .

Si no existe y hijo de R_x tal que $yx \in E(G)$, como $N'(x) \geq 2$, x es adyacente al menos a dos vértices no adyacentes de \mathcal{A} (sino R_x hubiera sido un nodo interno de T), digamos a y a' . Como x es no adyacente a los vértices de \mathcal{B} , existe $b \in \mathcal{B}$ tal que a, b, a', x inducen un ciclo 4. Por la propiedad $CC4$ debe existir u adyacente a los cuatro vértices. Si $u \in L_2$, por la observación (i) sería $xb \in E(G)$, contradicción, entonces $u \in L_1$, hijo de R_x adyacente a x , contradicción.

Luego, x es adyacente a algún y , hijo de R_x y a al menos un vértice $a \in \mathcal{A}$.

Probaremos ahora que x es adyacente a todo vértice hoja de $T_{R_{\mathcal{A}}}$ es decir, a todo vértice de \mathcal{A} . Supongamos $a' \in \mathcal{A}$ tal que $xa' \notin E(G)$.

- (i) Si $a'a \notin E(G)$, como $ya, ya' \in E(G)$, a', a, a, x inducen un P_4 y todos sus vértices son adyacentes a y , es decir hay un 3 – fan inducido.
- (ii) Si $a'a \in E(G)$ existe un $a^* \in \mathcal{A}$ tal que $a^*a' \notin E(G)$ y sean $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ tal que a^*, b_1, a', b_2 inducen un ciclo 4 en G . Estos cuatro vértices son adyacentes a y y si $xa^* \notin E(G)$, con x inducen una A ; y en caso de $xa^* \in E(G)$, a', b_1, a^*, x inducen un P_4 y todos sus vértices son adyacentes a y , teniéndose un 3 – fan inducido.

Caso 2: R_x es un nodo interno de T .

En este caso, R_x tiene a lo sumo un hijo tipo 0, notémoslo S_x y el conjunto de vértices de G hojas del subárbol T_{S_x} está contenido en \mathcal{A} o en \mathcal{B} . La prueba que x debe ser adyacente a todo vértice hoja de T_{S_x} es análoga a la realizada para T_{R_A} .

3. Si $i = 1$ y $G[N(\alpha)]$ es un grafo trivialmente perfecto tendremos que C_x induce un grafo trivialmente perfecto y el análisis es el mismo al realizado en el caso 1.

□

Lema 4.8.8. *Si $N'(x) = \{y\}$, R_x es un nodo 0, o bien un nodo 1 cuyos hijos son todos vértices.*

Demostración:

Si $i \geq 2$, $N'(x) \in L_i$ y $G[C_x]$ es un grafo trivialmente perfecto. En caso de tener y un hermano 0, existen a, b tales que a, y, b inducen un P_3 en L_i , que como $i \geq 2$ podemos asegurar que habrá un $2B$ inducido en G , contradicción. Luego, el padre de y es un nodo 0 o un nodo 1 cuyos hijos son todos vértices.

Si $i = 1$ y un nodo 0 es hermano de y , si $L_1 \cup \{\alpha\}$ induce un trivialmente perfecto, como en el caso $i \geq 2$, se llega a una contradicción.

Si $L_1 \cup \{\alpha\}$ induce un bouquet no trivialmente perfecto, y será el centro de una rueda 4 en $G[L_1 \cup \{\alpha\}]$, y con x inducirán una A , contradicción. □

Teorema 4.8.9. *Sea G un grafo de comparabilidad conexo, α un vértice de G . Entonces G es freelike si y sólo si*

1. G es completamente separable.
2. Si $L_1 \dots L_p$ son los niveles respecto a α , vértice de G ,
 - (a) cada componente conexa de L_i para $i \geq 2$ induce un subgrafo trivialmente perfecto.

- (b) $L_1 \cup \{\alpha\}$ induce un subgrafo bouquet.
- (c) Si $x, y \in L_i$ vértices atados y adyacentes entonces, $N''(x) \subseteq N''(y)$ o $N''(y) \subseteq N''(x)$.
- (d) Si $x \in L_i$ con $|N'(x)| = 1$, $N'(x)$ verifica la propiedad del Lema 4.8.8
- (e) Si $x \in L_i$ con $|N'(x)| \geq 2$, $N'(x)$ verifica la propiedad del Lema 4.8.7

Demostración:

\Rightarrow) Ya fue demostrado en los Lemas precedentes.

\Leftarrow) Debemos demostrar que G verifica la condición de los ciclos 4 y que no tiene ni a $2B$ ni a A como subgrafo inducido.

Condición $CC4$: Supongamos que los vértices a, b, c, d inducen un ciclo 4 en G .

Si $a, b, c, d \in L_1$, $G[L_1 \cup \{\alpha\}]$ induce un grafo bouquet no trivialmente perfecto. Podemos asegurar entonces que, por ejemplo $a, c \in \mathcal{A}$ y $b, d \in \mathcal{B}$. Dado que $G[L_1 \cup \{\alpha\}]$ es bouquet, existe u es adyacente a los cuatro vértices del ciclo 4, u estará en $L_1 \cup \{\alpha\}$, ya que si $u \in L_2$ es adyacente a los cuatro, se contradice el item (e). Luego, se verifica $CC4$.

Por el item (a), a, b, c, d no estarán todos en un mismo conjunto L_i para $i \geq 2$.

Entonces se pueden presentar los siguientes casos:

- Si $a \in L_{i-1}$, (a podría ser α), $b, d \in L_i$ y $c \in L_{i+1}$. Como $|N'(c)| \geq 2$, por el item (e) sabemos que existe $y \in N'(c)$ tal que b, y, d induce un P_3 , luego y es adyacente a los cuatro vértices del C_4 . Supongamos ahora que $y' \in L_i$ también es adyacente a ellos pero no a y . Si $i \geq 2$, $G[C_x]$ es un grafo trivialmente perfecto, con lo que se llegaría a una contradicción, y si $i = 1$, c sería adyacente a vértices de \mathcal{A} y de \mathcal{B} , de nuevo contradicción. Se tiene entonces que $CC4$ es verificada en este caso.
- $a, c \in L_i$, $b, d \in L_{i+1}$ para $i \geq 2$. Como $|N'(b)| \geq 2$, existe un $e \in N'(b)$ tal que a, e, c inducen un P_3 . Veamos que $ed \in E(G)$: si no es así, como $N'(d) \geq 2$, también existe un $e' \in N'(d)$, $e' \neq e$ tal que a, e', c inducen un P_3 . Dado que

$i \geq 2$, no hay C_4 inducidos en L_i , con lo cual $ee' \in E(G)$ y $e'b \in E(G)$ ya que en caso contrario, d, e', e, b inducen un P_4 y con a un $3 - fan$. Se tiene entonces al menos un vértice adyacente a a, b, c, d . Si u y u' son adyacentes a a, b, c, d pero no adyacentes entre sí, habría un ciclo 4 inducido por a, u, c, u' en L_i , contradicción.

- $a, c \in L_1, b, d \in L_2$, como en el caso anterior, podemos decir que aplicando el item (e), existen y, y' tales que y es adyacente a a, c, b y y' es adyacente a a, c, d . Si $y \neq y'$, y $yy' \in E(G)$, b, y, y', d, a inducen un $3 - fan$, contradicción. Si $y \neq y'$, y $yy' \notin E(G)$, se tiene que $y, y' \in \mathcal{A}$ y $a, c \in \mathcal{B}$ y b, d contradicen el item (e). Concluimos que existe y adyacente a a, b, c, d .

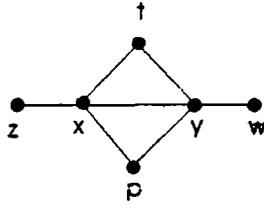
Si dos centros $y, y' \in L_1$ no son adyacentes, se contradice el item (e) y si $y \in L_1$ y $y' \in L_2$, por observación (i) serán adyacentes.

- $a, c, b \in L_i, d \in L_{i+1}$, podemos decir que aplicando el item (e), existe $y \in L_i$, tal que y es adyacente a a, b y d . Distinguimos el caso $i \geq 2$ del caso $i = 1$:

Si $i \geq 2$ se tiene que $cy \in E(G)$ pues no hay ciclos cuatro inducidos en L_i y resulta y ser un centro para a, b, c, d . Por la misma razón, el conjunto de vértices de L_i adyacentes a los cuatro, inducirán un completo.

Si $i = 1$ y $cy \notin E(G)$, c, α, y, d inducen un P_4 que con a inducen un $3 - fan$, contradicción. Luego $cy \in E(G)$ y existe un centro. Si $y' \in L_1$ es un centro no adyacente a y , el vértice d contradice el item (e). Si $y' \in L_2$, la observación (i) implica que $yy' \in E(G)$. Luego los centros son adyacentes y se verifica $CC4$.

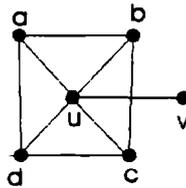
Veamos ahora que no tiene $2B$ como subgrafo inducido. Supongamos por el contrario que existe un $2B$ inducido por los vértices z, x, y, t, p, w como indica la siguiente figura, y veamos que todas las posibilidades nos lleva a una contradicción con alguna de las hipótesis.



Es claro que todos los vértices que induzcan un $2B$ no pueden estar en un mismo conjunto L_i , ya que $3 - fan$ es prohibido para los completamente separables.

Si p, t, x, y están todos en un L_i , ni z ni w pueden estar en L_{i-1} pues por la observación (i) sería p adyacente a también a él. Si alguno de ellos está en L_{i+1} el item (e) indica que es también adyacente a p (por ejemplo). Luego las posibilidades para estos cuatro vértices se reducen a:

- $t, p \in L_{i-1}$, $x, y \in L_i$ y $z, w \in L_{i+1}$. Como p, t están atados tienen un vértice adyacente común en L_{i-2} , digamos r (r puede ser α) y entonces r, t, x, y, z, w inducen un subgrafo prohibido para un grafo de comparabilidad.
- $t, p, w, z \in L_2$, $x, y \in L_1$, x, y están atados y contradicen el item (c).



Por último, si suponemos que a, b, c, d, u y v inducen una A como indica la figura, es claro por el item (a), que los vértices a, b, c, d no están todos en un mismo L_i para $i \geq 2$. Si $a, c \in L_i$ y $b, d \in L_{i+1}$, para $i \geq 2$ entonces se presentan seis casos distintos pero todos llegan a una contradicción:

1. $u \in L_i$ y $v \in L_{i+1}$ no podría ser pues el item (4) implicaría por ejemplo que $av \in E(G)$.
2. $u \in L_i$ y $v \in L_i$: Sea $t \in L_{i-1}$ adyacente a v, u, a, c (sabemos que existe pues $i \geq 1$). Luego v, t, c, d inducen un P_4 que con u forman un $3 - fan$.

3. $u \in L_{i+1}$ y $v \in L_i$ tenemos que $bv, dv \in E(G)$.
4. $u \in L_{i+1}$ y $v \in L_{i+1}$ se tiene que $av, cv \in E(G)$.
5. $u \in L_{i+1}$ y $v \in L_{i+2}$ el item (4) implica que $bv, dv \in E(G)$.
6. $u \in L_i$ y $v \in L_{i-1}$, se tiene por ejemplo que $av \in E(G)$.

En el caso de estar $a \in L_i$, $b, d \in L_{i+1}$ y $c \in L_{i+2}$, el centro u sólo puede estar en L_{i+1} . Entonces, $v \in L_i$ implicaría que $dv \in E(G)$, $v \in L_{i+1}$ implicaría que $av \in E(G)$ y $v \in L_{i+2}$ implicaría por el item (e) que $bv, dv \in E(G)$.

Resta probar el caso en que están a, b, c, d en L_1 . En este caso u y v no pueden estar ambos en L_1 pues $G[L_1 \cup \alpha]$ no sería bouquet. Si $u \in L_2$ se contradice el item (e): $N'(u)$ tendría vértices descendientes de los dos nodos 0 del árbol T_{R_e} correspondientes a los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} , luego $u \in L_1$ y $v \in L_2$. Pero entonces v contradice el item (d). □

Como corolario de esta caracterización podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.8.10. *Sea G un grafo treelike primo, entonces G tiene al menos un vértice de valencia uno.*

Demostración: Como G es treelike, es completamente separable y en consecuencia tiene o bien un par de vértices gemelos verdaderos o falsos o bien un vértice de valencia uno. Dado que G es primo, podemos asegurar que tiene un vértice de valencia uno. □

A partir del Teorema 4.8.9 se desprende un algoritmo que podemos desglosar en tres grandes fases, partiendo de la condición inicial de ser G de comparabilidad y completamente separable. La primera fase, consiste en recorrer los niveles $L_p \dots L_1$, desde atrás hacia adelante, verificando que cada componente conexa A de cada nivel induzca un trivialmente perfecto, para $i \geq 2$ o un bouquet para $i = 1$, y que todos los vértices de cada componente conexa A tengan mismos vecinos en L_{i-1} .

En una segunda fase, el objetivo es chequear que las condiciones de los Lemas 4.8.7 y 4.8.8 se verifiquen.

Al finalizar esta fase, se puede obtener el árbol cubridor de las orientaciones de arborescencia de cada componente conexa de L_i para $i \geq 2$ y el cubridor del bouquet inducido por L_1 .

En la tercera fase, se chequea que la condición (c) del Teorema 4.8.9 se verifique, y esto se hace recorriendo cada árbol cubridor con un algoritmo de búsqueda a lo ancho y chequeando la condición en cada vértice.

Más claramente podríamos escribir el algoritmo de la siguiente manera:

Comienzo:

Dado un grafo de comparabilidad, se chequea con el algoritmo de [13] que el grafo sea completamente separable. En caso de serlo, sea α un vértice y $L_1 \dots L_p$ los niveles respecto a α . Consideraremos $\alpha \in L_1$.

Primer paso:

Para $j = p, p - 1, \dots, 1$ hacer

1. Hallar las componentes conexas de L_j .
2. Para la componente conexa A con al menos dos vértices
 - a) Sea $x \in A$ (arbitrario) verificar que para cada $z \in A - x$, $N'(x) = N'(z)$
 - b) Primero se usa el algoritmo de [8] que da por resultado el árbol descomposición de $G[A]$ si es un cografo o un P_4 en caso contrario. Si se obtiene el $T(G[A])$:
 - Si $j \neq 1$ chequea que $G[A]$ sea trivialmente perfecto: cada nodo 1 tenga a lo sumo un hijo 0 (para verificar que no tenga ciclos 4).
 - Si $j = 1$ chequea si $G[A]$ es grafo bouquet: todo nodo interno 1 tiene a lo sumo un hijo del tipo 0 y la raíz tiene a lo sumo dos hijos del tipo 0.

Al finalizar el primer paso, cada componente conexa de L_i para $i \geq 1$ tiene asociado su árbol descomposición.

Segundo paso:

Para $j = p, p - 1, \dots, 2$ hacer

1. Elegir al azar un vértice x de cada componente conexa A de L_j .
2. Para cada componente conexa A de L_j sea C_x es la componente conexa de L_{j-1} para la cual $N'(x) \subseteq C_x$.
3. Buscar R_x : el antecesor común más cercano en $T(C_x)$ que tengan los vértices de $N'(x)$.
 - (i) Si es tipo 1, verificar que $N'(x) = \{ \text{vértices hojas descendientes de } R_x \text{ en } T(C_x) \}$.
 - (ii) Si es del tipo 0 el grafo no verifica CC4.
 - (iii) Si $d'(x) = 1$ verificar el la condición del Lema 4.8.8.

Al finalizar el segundo paso, cada componente conexa de L_i para $i \geq 1$ tiene asociado un árbol cubridor T de una orientación de arborescencia, si $i \geq 2$ (ver Figura 4.1) o si $i = 1$ y L_1 induce un bouquet no trivialmente perfecto y T es el cubridor de la orientación bouquet, consideramos dos subárboles de T , uno inducido por $\mathcal{A} \cup S$ y otro por $\mathcal{B} \cup S$, (ver Figuras 4.4 y 4.5).

Notamos $H(x)$ a los hijos del vértice x en T .

Tercer paso:

Para $j = 1, \dots, p$ hacer:

Para cada componente conexa A de L_j , si $T[A]$ es el cubridor de la orientación de arborescencia, lo recorro con un algoritmo de búsqueda a lo ancho. En cada vértice x que no sea hoja, se chequea la condición $\bigcap_{y \in H(x)} N''(y) = N''(x)$.

Si L_1 induce un bouquet no trivialmente conexo, chequeo como en el caso anterior, a cada uno de los dos subárboles definidos.

Fin.

En cada instancia del algoritmo, si la condición requerida no se verifica, el algoritmo termina y el grafo dado no es treelike.

Para hallar un orden treelike bastará con ir adecuando la orientación de arborescencia de cada componente conexa de L_i a la orientación de arborescencia de la componente conexa de L_{i-1} con la que tenga adyacencia, para todo $p \geq i \geq 2$. Finalmente para $i = 1$ se chequea que $G(L_1)$ sea grafo bouquet.

4.8.1 Caracterización de S. Cornealsen y G. Di Stefano

La caracterización de los grafos treelike probada por G. Di Stefano y S. Cornealsen [9] está basada en la descomposición split de un grafo, que definiremos a continuación.

Un **split** de un grafo G es una partición del conjunto de sus vértices en dos conjuntos A', B' cada uno con al menos dos vértices, tales que existen conjuntos $A'' \subseteq A'$ y $B'' \subseteq B'$ de manera tal que las aristas entre A' y B' son exactamente todas las aristas entre los vértices de A'' y B'' .

La descomposición split se define recursivamente: se define el grafo G_A (respec. G_B) como el grafo inducido por el conjunto A' (respec. B') y agregando un vértice especial w_A (w_B) cuya vecindad es A'' (B''). Se descompone entonces G_A (G_B).

La partición es guardada en la arista especial $w_A w_B$. Los grafos G_A de la descomposición se denominan **componentes split** y el **árbol split** asociado a la descomposición es el grafo que consiste en todas las componentes split con las aristas especiales.

Es claro que el split de un grafo coincide con la partición A', A'', B', B'' que definió a los grafos separables.

En [12] se prueba que un grafo es completamente separable si puede ser descompuesto de manera tal que sus componentes split son cliques o stars.

Entonces, la caracterización que proponen es la siguiente:

Teorema 4.8.11. [9] *Sea G un grafo conexo y H el árbol split de G con respecto a una*

descomposición split minimal. Entonces G es treelike si y sólo si G es completamente separable y existe una orientación treelike con grafo cubridor T de H que verifique la siguiente propiedad:

A lo sumo un vértice de una arista especial es incidente a más de dos aristas en T .

4.9 El Operador K^2 en los Grafos Treelike

El siguiente teorema debido a Escalante[17] caracteriza el grafo $K^2(G)$ como un subgrafo de G para todo G , grafo Helly.

Teorema 4.9.1. [17] *Sea G un grafo Helly. $K^2(G)$ es el grafo obtenido al borrar los vértices dominados del grafo reducido de G .*

Es decir, el grafo $K^2(G)$ es un subgrafo inducido de G que se obtiene a partir de dos operaciones, primero obtener el grafo reducido de G y luego borrarle los vértices dominados. Claramente si G es treelike, su imagen por K^2 será un grafo de comparabilidad, pero en este caso, podemos demostrar que es también treelike.

Teorema 4.9.2. $K^2(\text{Treelike}) = \text{Treelike}$

Demostración: \Rightarrow) Si G es un grafo treelike, todo subgrafo inducido no tiene a A , $2B$, C_{2n} para $n \geq 3$ ni a $3 - fan$ como subgrafos inducidos, luego $K^2(G)$ tampoco. Supongamos que a, b, c, d inducen un ciclo 4 en $K^2(G)$ y que no existe un vértice adyacente a los cuatro. Es claro que en G existía al menos un vértice que verifica esa propiedad, digamos x y si se borró es porque era dominado en el reducido de G por algún vértice, digamos z . Luego z es un vértice de $K^2(G)$ y es adyacente a a, b, c , y d .
 \Leftarrow) Sea \vec{G} una orientación treelike de G con diagrama T . Construiremos un grafo G'' , tal que si lo reducimos y luego le borramos los dominados obtenemos G . G'' se construirá agregándole a G vértices x', x'' determinados por ciertas condiciones que se hallarán en vértices de T . Paralelamente, manteniéndose la orientación \vec{G} , se determinará la orientación de cada arista agregada de forma tal que la orientación de

G'' sea treelike.

Si x verifica que $\delta^-(x) = 1$ en T , agregamos un vértice x' a G , adyacente a todo $y \in U[x]$ y orientamos las aristas $\overrightarrow{xx'}$. Cada x' agregado es una fuente de la orientación de $G' = G + \{x' | \delta^-(x) = 1\}$.

Análogamente, para cada vértice de T que verifique $\delta^+(x) = 1$ agregamos a G' un vértice x'' adyacente a todo $y \in D[x]$ y orientamos las aristas $\overrightarrow{yx''}$, siendo x'' un sumidero de la orientación definida para $G'' = G' + \{x'' | \delta^+_T(x) = 1\}$. El grafo así definido es treelike y su imagen por K^2 es G . \square

Corolario 4.9.3. *Sea H un grafo DV tal que $H \in K(\text{Treelike})$. Entonces $K(H) \in \text{Treelike}$.*

4.9.1 Cómo encontrar un árbol clique del grafo $K(G)$.

Ya fue mostrado que $K(\text{TREELIKE}) \subseteq \text{DV}$ Entonces una alternativa para hallar la imagen por K de un grafo treelike es dar el árbol clique de $K(G)$, o sea, un árbol dirigido y una familia de caminos dirigidos de él: \mathcal{F} tal que el grafo intersección de esta familia sea $K(G)$.

Dado G un grafo de comparabilidad treelike, si particionamos los vértices de G entre dominados y no dominados: $V(G) = D \cup \overline{D}$, se tiene que el conjunto de vértices de $K^2(G)$ es \overline{D} . La orientación inducida en $K^2(G)$ por una orientación treelike de G es también treelike y su diagrama T' se puede obtener a partir del diagrama T de \overrightarrow{G} : contrayendo los vértices gemelos a un sólo vértice y borrando los vértices fuentes de \overrightarrow{G} que verifiquen en T $\delta^+(x) = 1$ y los sumideros con $\delta^-(x) = 1$ en T .

Luego, veamos cómo encontrar una familia \mathcal{F} de caminos en T' tales que $L(\mathcal{F}) = K(G)$.

Sea $V(K(G)) = C(G) = \{c_1, \dots, c_r\}$ todos los caminos dirigidos maximales del árbol T .

Consideremos los conjuntos $P_i = \{v \in \overline{D} \mid v \in c_i\}$ para $i = 1 \dots r$, y veamos que inducen un camino dirigido en el árbol T' :

$P_i \neq \emptyset$ ya que si c_i tiene todos sus vértices dominados, y G no es un completo, entonces c_i no es un clique de G , contradicción.

$v, v' \in P_i \Leftrightarrow v, v' \in \overline{D}$ y $v, v' \in c_i \Leftrightarrow vv' \in E(G)$, y podemos suponer que en la orientación \overrightarrow{G} se tiene $\overrightarrow{vv'}$. Luego la misma orientación se tiene en $K^2(G)$ y en consecuencia, en T' se tiene que $v \in D[v']$, resultando ser P_i un camino dirigido de T' , como se requería.

Luego si $\mathcal{F} = \{P_i\}_{i=1 \dots r}$ es claro que, $L(\mathcal{F}) = K(G)$ y el par T', \mathcal{F} es una representación de $K(G)$.

Es importante observar que no todo árbol clique de un grafo $DV: H$ cuya imagen por K sea treelike es, necesariamente un árbol diagrama de una orientación treelike de $K(H)$.

Capítulo 5

Cubrimientos y Restricciones

5.1 El problema y una aplicación

En este capítulo consideraremos el problema de encontrar una orientación transitiva de un grafo de comparabilidad de manera tal que el grafo cubridor contenga un determinado conjunto de aristas dadas. Proponemos una solución basada en el árbol de descomposición modular [10, 19]. El método nos da un algoritmo eficiente para construir una tal orientación en caso de existir, o nos informa que no existe.

Este problema, independientemente del interés teórico que puede despertar, tiene también aplicación en el área de scheduling. Consideremos un problema de scheduling donde ciertos pares de tareas no pueden ser realizadas en el mismo momento. En este caso, decimos que estas tareas son *incompatibles*. El *grafo de incompatibilidad* G es un grafo cuyos vértices representan tareas y dos vértices son adyacentes cuando sus correspondientes tareas son incompatibles. Para estos problemas de scheduling es común que se consideren clases de grafos de incompatibilidad especiales [3]. En este caso, vamos a suponer que se trabaja con grafos que son de comparabilidad.

Si tenemos el requerimiento adicional de que ciertos pares de tareas son tales que una de esas tareas debe ser ejecutada inmediatamente después que la otra, claramente el conjunto de todos estos pares de tareas es un subconjunto E' de aristas de G . Para

obtener un schedule que satisfaga estos requerimientos, construimos una orientación transitiva \vec{G} , tal que toda arista de E' pertenezca al grafo cubridor de \vec{G} . Luego un scheduling factible es obtenido considerando el grafo cubridor de \vec{G} .

Aplicaremos la descomposición modular clásica, dado un grafo G , construimos el árbol dirigido D cuyos vértices son los módulos de G . La raíz de D es $V(G)$ y para cada vértice M de $V(D)$, los hijos de M se definen de acuerdo a si G_M o $\overline{G_M}$ es o no conexo.

Notaremos D_M al sub-árbol de D enraizado en M , para cualquier vértice M de D . Un árbol de descomposición ordenado es un árbol de descomposición modular en el cual los hijos de un vértice serie están linealmente ordenados.

Recordamos que notamos R_M al grafo representante de $M \in V(D)$.

Escribiremos $E_M = E(G_M)$ y si $E' \subseteq E(G)$, $E'_M = E_M \cap E'$. Finalmente, R'_M es el subgrafo de R_M que contiene exactamente las aristas $M_i M_j \in E(R_M)$ tales que existen vértices $v_p \in M_i$ y $v_q \in M_j$ donde $v_p v_q \in E'_M$.

5.2 La descomposición

Sea G un grafo y $E' \subseteq E(G)$. Describiremos teoremas de descomposición con el objetivo de encontrar una orientación transitiva de G que cubra las aristas de E' . Sea D un árbol descomposición de G , $M \in V(D)$ y $M_1 \dots M_l$ los hijos de M , si es que tiene alguno.

Primero clasificaremos las aristas de G_M . Sea $v_p v_q \in E(G_M)$. Luego $v_p \in M_i$ y $v_q \in M_j$ para algún i, j . Se dirá que $v_p v_q$ es una *arista interior* de G_M si $i = j$ y que es una *arista exterior* en caso contrario. Notaremos con I_M y O_M los conjuntos de aristas interiores y exteriores de G_M , respectivamente. Notaremos $I'_M = I_M \cap E'_M$ y $O'_M = O_M \cap E'_M$.

Luego, clasificaremos los vértices de G_M . Un trato especial daremos a los vértices de G_M que son incidentes a las aristas de O'_M . Definimos los conjuntos de vértices $C_{ij} = \{v_p \in M_i | \exists v_q \in M_j, v_p v_q \in O'_M\}$ para todo $1 \leq i, j \leq l$, y $C_i = \bigcup_j C_{ij}$. Notaremos $\overrightarrow{R'_M}$ la orientación de R'_M inducida por $\overrightarrow{R_M}$. Clasificaremos los vértices de C_i en dos tipos, en relación la orientación transitiva $\overrightarrow{R_M}$ de R_M . Sea $C_i^- = \{v \in C_{ij} | \overrightarrow{M_j M_i} \in E(\overrightarrow{R'_M})\}$ y $C_i^+ = \{v \in C_{ij} | \overrightarrow{M_i M_j} \in E(\overrightarrow{R'_M})\}$. Claramente C_i^+ y C_i^- pueden intersectarse o no.

En lo siguiente describiremos un orden especial para un árbol de descomposición modular. Diremos que un árbol de descomposición ordenado D de G es *compatible en relación a E'* cuando el orden $M_1 \dots M_l$ de los hijos de un vértice serie M satisface que $M_i M_j \in E(R'_M)$ implica $|i - j| = 1$. Entonces caracterizamos los del siguiente modo.

Lema 5.2.1. *Sea G un grafo, $E' \subseteq E(G)$ y D un árbol descomposición de G . Existe un árbol compatible de G en relación a E' si y solo si el grafo R'_M es un conjunto de caminos disjuntos por vértices, para todo vértice serie M de D .*

Nuestro problema inicial es encontrar una orientación transitiva de G que cubra a $E' \subseteq E(G)$. Proponemos una solución a un problema más amplio o general: dado un grafo G , subconjuntos $S, T \subseteq V(G)$ y $E' \subseteq E(G)$, el objetivo es decidir si existe una orientación transitiva de G : $\overrightarrow{G}(S, T, E')$ teniendo a S, T como par fuente-sumidero y cubriendo a E' . Claramente, $\overrightarrow{G}(\emptyset, \emptyset, E')$ es una solución de nuestro problema original.

Si D es el árbol descomposición de G buscaremos respondernos la pregunta hecha para G , respondiéndonos la pregunta para cada vértice M de D .

Definamos una función boolean w_M que represente la respuesta a la pregunta para

un vértice M de D .

$$w_M(S_M, T_M, E'_M) = \begin{cases} \text{true} & \text{si } G_M(S_M, T_M, E'_M) \text{ existe} \\ \text{false} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

El siguiente teorema describe cómo descomponer el cálculo de $w_M(S_M, T_M, E'_M)$ en los cálculos de estos en los hijos de M . La formulación estará dividida en tres partes de acuerdo a si el vértice M es del tipo neighborhood, paralelo o serie. Notemos $M_1 \dots M_l$ el orden de los hijos de M en D , si hay alguno.

Teorema 5.2.2. *Sea M un vértice neighborhood de D .*

Entonces $w_M(S_M, T_M, E'_M) = \text{true}$ si y sólo si R_M admite una orientación transitiva $\overrightarrow{R_M}$ tal que

$$(1.1) \ R_M \text{ cubre } E(R'_M)$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} &\bullet \text{ si } S_M \cap M_i \neq \emptyset \text{ entonces } M_i \text{ es una fuente de } \overrightarrow{R_M} \\ &\bullet \text{ si } T_M \cap M_i \neq \emptyset \text{ entonces } M_i \text{ es un sumidero de } \overrightarrow{R_M} \end{aligned}$$

$$(1.3) \ w_{M_i}((S_M \cap M_i) \cup C_i^-, (T_M \cap M_i) \cup C_i^+, E'_{M_i}) = \text{true para } 1 \leq i \leq l$$

Demostración: Demostraremos primero la suficiencia, construyendo una orientación para G_M como sigue: sea $v_p, v_q \in M$ tal que $v_p v_q \in E_M$. Entonces $v_p \in M_i, v_q \in M_j$ con M_i, M_j hijos de M en D .

Si $i \neq j$ entonces $M_i M_j$ es una arista de R_M . Sea $\overrightarrow{R_M}$ una orientación de R_M que satisface (1.1), la cual existe por hipótesis. Orientamos $v_p v_q$ como $\overrightarrow{v_p v_q} \in E(\overrightarrow{G_M})$ si y sólo si $\overrightarrow{M_i M_j} \in E(\overrightarrow{R_M})$.

Si $i = j$, sea $\overrightarrow{G_{M_i}}$ una orientación transitiva de G_{M_i} cubriendo E'_{M_i} y que tiene $(S_M \cap M_i) \cup C_i^-$ y $(T_M \cap M_i) \cup C_i^+$ como conjunto de fuente sumidero que existe pues (1.3) vale. Entonces direccionamos $v_p v_q$ desde v_p hacia v_q en $\overrightarrow{G_M}$ precisamente cuando es así en $\overrightarrow{G_{M_i}}$.

Como M_i y M_j son módulos de G_M , sabemos que la orientación construida $\overrightarrow{G_M}$ es transitiva.

Mostraremos ahora que S_M, T_M es un par de fuente-sumidero de \mathcal{E} . Sea $v \in S_M$ y M_i el hijo de M tal que $v \in M_i$. Luego $S_M \cap M_i \neq \emptyset$ y por (1.2), M_i es una fuente de $\overrightarrow{R_M}$. Mas aún, por (1.3) v es también una fuente de $\overrightarrow{G_{M_i}}$. En consecuencia, v es una fuente de $\overrightarrow{G_M}$ y por ello S_M es un conjunto de fuentes de $\overrightarrow{G_M}$. Similarmente, se puede mostrar que T_M es un conjunto de sumideros de $\overrightarrow{G_M}$.

Faltaría probar que $\overrightarrow{G_M}$ cubre a E'_M . Sea $v_p v_q \in E'_M$ y consideremos las siguientes dos alternativas:

Caso 1: $v_p v_q \in I'_M$. Vértices $v_p, v_q \in M_i$ para algún i . Sea $\overrightarrow{G_{M_i}}$ la orientación de G_{M_i} que satisface (1.3). Entonces $v_p v_q \in E(C(\overrightarrow{G_{M_i}}))$. Supongamos que $v_p v_q \notin E(C(\overrightarrow{G_M}))$ y sin pérdida de generalidad $\overrightarrow{v_p v_q} \in E(\overrightarrow{G_{M_i}})$. Entonces existe un vértice $v_t \in M$ que satisface $\overrightarrow{v_p v_t}, \overrightarrow{v_t v_q} \in E(\overrightarrow{G_M})$. sabemos que $v_t \notin M_i$, ya que si no, se contradice $v_p v_q \in E(C(\overrightarrow{G_{M_i}}))$. Sea $v_t \in M_j$ con $j \neq i$. por la construcción de $\overrightarrow{G_M}$, las aristas $v_p v_t, v_t v_q \in E_M$ son direccionadas como $\overrightarrow{v_t v_p}$ y $\overrightarrow{v_t v_q}$ o al revés, $\overrightarrow{v_p v_t}$ y $\overrightarrow{v_q v_t}$. En consecuencia un tal v_t no existe, lo cual nos dice que $v_p v_q \in E(C(\overrightarrow{G_M}))$.

Caso 2: $v_p v_q \in O'_M$. Sea $v_p \in M_i$ y $v_q \in M_j$. Entonces $i \neq j$ y $M_i M_j \in E(R'_M)$. Sin pérdida de generalidad, sea $\overrightarrow{v_p v_q} \in E(\overrightarrow{G_M})$. Supongamos que $v_p v_q \notin E(C(\overrightarrow{G_M}))$. Nuevamente, existe un vértice $v_t \in M$ que satisface $\overrightarrow{v_p v_t}, \overrightarrow{v_t v_q} \in E(\overrightarrow{G_M})$. Sea $v_t \in M_k$. Si $k \neq i, j$ entonces $M_i M_j \notin E(C(\overrightarrow{R_M}))$, contradiciendo (1.1). Examinemos la situación $k = i$. Se tiene $\overrightarrow{v_p v_t} \in E(\overrightarrow{G_{M_i}})$. Por el otro lado, $\overrightarrow{v_p v_q} \in E'(\overrightarrow{G_M})$ implica que $v_p \in C_i^+$. Por (1.3), v_p debe ser un sumidero de $\overrightarrow{G_{M_i}}$. Esto último contradice $\overrightarrow{v_p v_t} \in E(\overrightarrow{G_{M_i}})$, y en consecuencia $k = i$ no ocurre. Finalmente, cuando $k = j$ tenemos que $v_p \in C_i^-$, y nos lleva a una contradicción similar; con lo cual, un tal v_t no existe.

De acuerdo con los dos casos demostrados, concluimos que $\overrightarrow{G_M}$ cubre E'_M . En consecuencia, $\overrightarrow{G_M}$ cubre y tiene las fuentes y sumideros requeridos. Se tiene entonces, $w_M(S_M, T_M, E'_M) = \text{true}$.

Ahora probemos la necesidad. Por hipótesis, $w_M(S_M, T_M, E'_M) = \text{true}$, y sea $\overrightarrow{G_M}$ una

orientación de G_M que la realiza. Notemos $\overrightarrow{R_M}$ la orientación de R_M inducida by $\overrightarrow{G_M}$. Esto es $\overrightarrow{M_i M_j} \in E(\overrightarrow{R_M})$ si y solo si existe $v_p \in M_i$, $v_q \in M_j$ con $\overrightarrow{v_p v_q} \in E(\overrightarrow{G_M})$. Sabemos que $\overrightarrow{R_M}$ es unica. La prueba consiste en mostrar que se satisface (1.1), (1.2) y (1.3). Examinemos primero (1.2). Es claro que cuando $S_M \cap M_i \neq \emptyset$, M_i debe ser una fuente de R_M , ya que en caso contrario $v \in S_M \cap M_i$ no puede ser fuente de $\overrightarrow{G_M}$, contradiciendo la hipótesis. Similarmente $T_M \cap M_i \neq \emptyset$ implica que M_i es un sumidero de $\overrightarrow{R_M}$.

Ahora mostraremos que R_M cubre $E(R'_M)$. Sea $M_i M_j \in E(R'_M)$ y sin pérdida de generalidad, supongamos que $\overrightarrow{M_i M_j} \in E(\overrightarrow{R_M})$. Dado que $M_i M_j \in E(R'_M)$, existen vértices $v_p \in M_i$ y $v_q \in M_j$ tales que $v_p v_q \in E'_M$. Además, $\overrightarrow{M_i M_j} \in E(\overrightarrow{R_M})$ implica que $\overrightarrow{v_p v_q} \in E(\overrightarrow{G_M})$. Por el contrario, supongamos que $M_i M_j \notin E(C(\overrightarrow{R_M}))$. Luego existe k , $1 \leq k \leq l$ y $k \neq i, j$ tales que $\overrightarrow{M_i M_k}, \overrightarrow{M_k M_j} \in E(\overrightarrow{R_M})$. También existe $v_t \in M_k$ tal que $\overrightarrow{v_p v_t}$ y $\overrightarrow{v_t v_q}$ están en $E(\overrightarrow{G_M})$. esto significa que $\overrightarrow{v_p v_q}$ es implicada por transitividad en $E(\overrightarrow{G_M})$, contradiciendo que $\overrightarrow{G_M}$ cubre E'_M . En consecuencia, $M_i M_j \in E(C(\overrightarrow{R_M}))$, y (1.1) vale.

Nos falta probar que $w_{M_i}((S_M \cap M_i) \cup C_i^-, (T_M \cap M_i) \cup C_i^+, E'_M) = \text{true}$ para $1 \leq i \leq l$. Sea $\overrightarrow{G_{M_i}}$ la orientación de G_{M_i} inducida por $\overrightarrow{G_M}$. Sea $v_p \in C_i^-$, entonces existe un vértice $v_q \in M_j$ tal que $v_p v_q \in E'_M$ y $\overrightarrow{v_p v_q} \in E(\overrightarrow{G_M})$. Si v_p no es una fuente de $\overrightarrow{G_{M_i}}$ existe un vértice $v_t \in M_i$ tal que $\overrightarrow{v_t v_p} \in E(\overrightarrow{G_M})$. Esto implica que $v_q v_p \notin E(C(\overrightarrow{G_M}))$ contradiciendo el hecho de que $E(\overrightarrow{G_M})$ cubre E'_M . En consecuencia, C_i^- es un conjunto fuente de $\overrightarrow{G_{M_i}}$. Similarmente se muestra que C_i^+ es un conjunto sumidero de $\overrightarrow{G_{M_i}}$. Finalmente, como $\overrightarrow{G_{M_i}}$ es una orientación inducida por $\overrightarrow{G_M}$, toda arista implicada por transitividad en $\overrightarrow{G_{M_i}}$ es implicada por transitividad en $\overrightarrow{G_M}$. En consecuencia, $E'_M \subseteq E(C(\overrightarrow{G_M}))$ implica $E'_{M_i} \subseteq E(C(\overrightarrow{G_{M_i}}))$. Se verifica la condición (1.3) y la prueba está completa. \square

Teorema 5.2.3. *Sea M vértice serie. Entonces $w_M(S_M, T_M, E'_M) = \text{true}$ si y solo si*

(2.1) D_M es compatible

(2.2) $S_M \subseteq M_1$ y $T_M \subseteq M_l$

$$(2.3) \quad w_{M_1}(S_M, C_{1,2}, E'_{M_1}) = w_{M_2}(C_{2,1}, C_{2,3}, E'_{M_2}) = \dots = w_{M_{l-1}}(C_{l-1,l-2}, C_{l-1,l}, E'_{M_{l-1}}) \\ = w_{M_l}(C_{l,l-1}, T_M, E'_{M_l}) = \text{true}$$

Demostración:

\Leftarrow) Sea M un vértice serie de D . Por (2.3), notemos $w_1 = w_{M_1}(S_M, C_{1,2}, E'_{M_1})$, $w_i = w_{M_i}(C_{i,i-1}, C_{i,i+1}, E'_{M_i})$ para $1 < l < l$, y $w_l = w_{M_l}(C_{l,l-1}, T_M, E'_{M_l})$. Como $w_i = \text{true}$ existe una orientación transitiva $\overrightarrow{G_{M_i}}$ de G_{M_i} que realiza w_i para todo i . Esto es, $\overrightarrow{G_{M_i}}$ cubre E'_{M_i} y tiene las fuentes y sumideros requeridos. Observar que por (2.2) $S_M \subseteq M_1$ y $T_M \subseteq M_l$. Construiremos $\overrightarrow{G_M}$ a partir de las orientaciones $\overrightarrow{G_{M_i}}$ agregándole a esta última todas las aristas exteriores $v_p v_q$ de G_M y direccionándolas a cada una de ellas de v_p a v_q cada vez que $v_p \in M_i$, $v_q \in M_j$ y $i < j$.

Es claro que, $\overrightarrow{G_M}$ es una orientación transitiva de G_M . Además, siendo S_M un conjunto fuente de $\overrightarrow{G_{M_1}}$ y T_M un conjunto sumidero de $\overrightarrow{G_{M_l}}$ se tiene que S_M, T_M es un par sumidero-fuente de $\overrightarrow{G_M}$.

Ahora probaremos que $\overrightarrow{G_M}$ cubre E'_M . Sea $e \in E'_M$. Necesitamos probar que $e \in E(C(\overrightarrow{G_M}))$. supongamos que vale lo contrario. Sin pérdida de generalidad supongamos $e = v_p v_q$ dirigido $\overrightarrow{v_p v_q}$, dado que e es implicado por transitividad $\overrightarrow{G_M}$ contiene las aristas dirigidas $\overrightarrow{v_p v_t}$ y $\overrightarrow{v_t v_q}$ para algún $v_t \in M$. Veamos las alternativas para $v_p v_q$ en G_M .

Primero supongamos que $e \in O'_M$. Sea $v_p \in M_i$ y $v_q \in M_j$. Entonces $i \neq j$. Dado que las aristas exteriores, entre los hijos de M_i , están dirigidas desde las que tienen menor subíndice hacia las de mayor subíndice sabemos que $i < j$. Mas aun, $v_p v_q \in O'_M$ implica que $M_i M_j \in E(R'_M)$. por el otro lado, como vale (2.1), D_M es un árbol compatible y concluimos que $j = i + 1$. Además $v_p v_q \in E'_M$ implica que $v_p \in C_{ij}$ y $v_q \in C_{ji}$. Sea $v_t \in M_k$ y examinemos las alternativas para M_k . Claramente $k \geq i$ ya que de otra forma, la arista $v_p v_t$ sería dirigida como $\overrightarrow{v_t v_p}$. Similarmente para $k \leq j$. Como $i = j - 1$ solo tenemos dos alternativas: $k = i$ o $k = j$. Cuando $k = i$, $v_t \in M_i$ y $v_p, v_t \in C_{i,i+1}$. Por (2.3), v_p, v_t son ambos sumideros de $\overrightarrow{G_i}$. Esto contradice $v_p v_t \in E'_M$. El caso $k = j$ es similar. En consecuencia e no es una arista exterior de

G_M .

Finalmente sea $e \in I'_M$ una arista interior. Entonces $v_p, v_q \in M_i$ para algún i . Como $v_p v_q \notin E(C(\vec{G}_M))$, existe un vértice v_t tal que $\vec{v_p v_t}, \vec{v_t v_q} \in E(\vec{G}_M)$. Sea $v_t \in M_k$ para algún k . Entonces $k < i$ implica que $v_p v_t$ es dirigido como $\vec{v_t v_p}$, mientras que $k > i$ implica $\vec{v_q v_t}$. En consecuencia $k = i$. Sin embargo, en este caso $\vec{v_p v_q}$ también es implicado por transitividad en \vec{G}_{M_i} , esto último contradice que \vec{G}_{M_i} cubre E'_{M_i} . Luego e tampoco puede ser una arista interna y con esta contradicción se termina la prueba de suficiencia.

\Rightarrow) Como $w_M(S_M, T_M, E'_M) = \text{true}$ existe una orientación transitiva

$\vec{G}_M(S_M, T_M, E'_M)$ de G_M donde S_M, T_M es un par fuente-sumidero y cubre a E'_M . Sea $M_1 \dots M_l$ los hijos de M en el orden que es implicado por la orientación, es decir, para la arista $v_p v_q \in O_M$, la direccionamos $\vec{v_p v_q}$ cuando $v_p \in M_i, v_q \in M_j$ y $i < j$. Por el otro lado, $v_p v_q \in E'_M$ implica $j = i + 1$, ya que de otra manera $\vec{v_p v_q}$ es implicada por transitividad, contradiciéndose con que es una arista de $\vec{G}_M(S_M, T_M, E'_M)$. En consecuencia, $M_i M_j \in E(R'_M)$ si y solo si $|i - j| = 1$ y vale (2.1).

En lo que sigue, examinaremos las orientaciones \vec{G}_{M_i} inducidas por $\vec{G}(S_M, T_M, E'_M)$ en los hijos $M_1 \dots M_l$ de M . Las fuentes de $\vec{G}_M(S_M, T_M, E'_M)$ son exactamente las de \vec{G}_{M_1} , mientras que sus sumideros son los de \vec{G}_{M_l} . En consecuencia vale (2.2). Más aún, S_M es un conjunto fuente de \vec{G}_{M_1} y T_M es un conjunto sumidero de \vec{G}_{M_l} .

Examinemos ahora los conjuntos $C_{i,i+1}$ y sea $v_p \in C_{i,i+1}$. Entonces existe $v_q \in M_{i+1}$ tal que $v_p v_q \in O'_M$. Si v_p no es sumidero de \vec{G}_{M_i} existe $v_t \in M_i$ tal que $\vec{v_p v_t} \in E(\vec{G}_{M_i})$. En consecuencia, $v_t v_q \in E_M$ y está orientado $\vec{v_t v_q}$. Esto es, $\vec{v_p v_q}$ es implicado por transitividad en $\vec{G}_M(S_M, T_M, E'_M)$, contradiciendo el hecho de pertenecer al grafo cubridor. Luego, $C_{i,i+1}$ es un conjunto sumidero de \vec{G}_{M_i} , $i > 1$. Similarmente, se prueba que $C_{i,i-1}$ es un conjunto fuente de \vec{G}_{M_i} , $i < l$. En consecuencia, cada \vec{G}_{M_i} tiene las fuentes y sumideros requeridos.

Nos resta mostrar que cada G_{M_i} cubre E'_{M_i} . Comparemos el grafo cubridor de $\vec{G}_M(S_M, T_M, E'_M)$ con el de \vec{G}_{M_i} . Sea $v_p v_q \in E'_{M_i}$ una arista interna de G_{M_i} , con dirección $\vec{v_p v_q}$. Supongamos, por el absurdo que $v_p v_q \notin E(C(\vec{G}_{M_i}))$. Luego debe existir

$v_i \in M_i$ y aristas $\overrightarrow{v_p v_i}, \overrightarrow{v_i v_q} \in \overrightarrow{G_{M_i}}$. Entonces $\overrightarrow{v_p v_q}$ está también en $\overrightarrow{G}(S_M, T_M, E'_M)$ por transitividad, contradiciendo esto último que cubre a E'_M . Esto es, cada $\overrightarrow{G_{M_i}}$ cubre E'_{M_i} . Se tiene que $\overrightarrow{G_{M_i}}$ es una orientación de G_{M_i} con las fuentes y sumideros requeridos y que cubre el conjunto de aristas requerido. La prueba está ahora completa. \square

Finalmente,

Teorema 5.2.4. *Sea M un vértice paralelo. Entonces $w_M(S_M, T_M, E'_M) = \text{verdadero}$ si y solo si $w_{M_1}(S_M \cap M_1, T_M \cap M_1, E'_{M_1}) = \dots = w_{M_l}(S_M \cap M_l, T_M \cap M_l, E'_{M_l}) = \text{true}$.*

La prueba es clara.

5.3 El algoritmo

En esta sección describiremos el algoritmo propuesto para encontrar una orientación transitiva de un grafo de comparabilidad G que tenga un dado par fuente-sumidero $S - T$ con $S, T \subseteq V(G)$ y que cubra un conjunto de aristas $E' \subseteq E(G)$. El algoritmo exhibe la orientación requerida \overrightarrow{G} de G o informa que no existe tal. Está basado en los Teoremas 5.2.2, 5.2.3 y 5.2.4 de la sección previa. El algoritmo supone D , un árbol de descomposición de G y tiene dos fases.

En la primera fase, el objetivo es chequear si las condiciones (1.1)-(1.3) y (2.1)-(2.3) de los Teoremas 5.2.2 y 5.2.3, son verificadas para cada vértice M de D . En caso negativo, se reporta que la orientación \overrightarrow{G} pedida no existe. En el caso de que las condiciones se verifiquen, el algoritmo asigna a M un par de subconjuntos $S_M, T_M \subseteq M$ llamados los requerimientos fuente-sumidero de M .

En la fase dos, se asigna a G_M , para cada vértice M de D , una orientación transitiva $\overrightarrow{G_M}$, con S_M, T_M como par sumidero-fuente y cubriendo E'_M .

Dado G, S, T y E' , la fase uno construirá primero el árbol descomposición D de G . Entonces se recorre D de arriba hacia abajo. Si M es la raíz de D , definimos $S_M := S$ y $T_M := T$. En caso contrario, supongamos que S_M, T_M ya han sido asignado a M , y calculamos los requerimientos de fuente-sumidero de los hijos $M_1 \dots M_l$ de M , si es posible. Primero, construye R_M y R'_M . Examinemos las alternativas para M .

Si M es un vértice neighborhood, empezamos verificando si R_M cubre $E(R'_M)$. Si no lo cubre, la respuesta es NO y termina (la condición (1.1) falló). En caso contrario, encuentra una orientación transitiva $\overrightarrow{R_M}$ de R_M , chequea si algún $M_i \in V(R_M)$ que no sea fuente (sumidero) de $\overrightarrow{R_M}$, satisface $S_M \cap M_i \neq \emptyset$ ($T_M \cap M_i \neq \emptyset$). En el caso afirmativo reemplaza $\overrightarrow{R_M}$ por su reversal y repite el chequeo. Si el resultado es nuevamente afirmativo la respuesta es NO (la condición (1.2) no se verifica). En caso contrario, encuentra todos los conjuntos C_i^+, C_i^- , con $1 \leq i \leq l$ relativos a $\overrightarrow{R_M}$. Luego define $S_{M_i} := (S_M \cap M_i) \cup C_i^-$ y $T_{M_i} := (T_M \cap M_i) \cup C_i^+$

Si M es un vértice paralelo, define $S_{M_i} := (S_M \cap M_i)$ y $T_{M_i} := (T_M \cap M_i)$ para $1 \leq i \leq l$.

Si M es un vértice serie, empieza verificando si R'_M es una colección de caminos disjuntos por vértice. En caso negativo, responde NO y termina (la condición (2.1) no se verifica). En caso contrario, elige un orden $M_1 \dots M_l$ para los hijos de M , tal que vértices adyacentes en R'_M son consecutivos en el orden y adicionalmente $S_M \subseteq M_1$ y $T_M \subseteq M_l$. Si no existe tal par M_1, M_l la respuesta es NO y termina (la condición (2.2) falla). En otro caso construye $\overrightarrow{R_M}$ direccionando cada arista $M_i M_j \in E(R_M)$ desde M_i hacia M_j , precisamente cuando $i < j$. Finalmente define los requerimientos sobre el conjunto fuente-sumidero de los hijos de M de la siguiente manera: $S_{M_1} := S_M$, $T_{M_l} := T_M$, $S_{M_{i+1}} := C_{i+1, i}$ y $T_{M_i} := C_{i, i+1}$ for $1 \leq i < l - 1$.

La primera fase del algoritmo termina cuando se le asigna a cada vértice M de D un requerimiento de fuente-sumidero $S_M - T_M$, $S_M, T_M \subseteq M$.

La segunda fase consiste en construir una orientación transitiva $\overrightarrow{G_M}$ de G_M , con

$S_M - T_M$ como par fuente-sumidero, para cada vértice M de D . La construcción se realiza recorriendo D desde abajo hacia arriba. Si M es una hoja de D , entonces \vec{G}_M es the corresponding one-vertice digraph. En otro caso, sean $M_1 \dots M_i$ los hijos de M , como se obtuvieron en la fase uno. En general, asumimos que las orientaciones $\vec{G}_{M_1} \dots \vec{G}_{M_i}$ ya han sido construídas. Sea \vec{R}_M la orientación de R_M considerada en la fase uno para un vértice M de D . Entonces \vec{G}_M es construída direccionando cada arista exterior $v_p v_q \in O_M$, $v_p \in M_i$ y $v_q \in M_j$, tal que $\vec{v_p v_q} \in E(\vec{G}_M)$ precisamente cuando $\vec{M_i M_j} \in E(\vec{R}_M)$. Cuando el proceso llega a la raíz de D y \vec{G} es construído, el algoritmo responde SI y termina.

Para probar que el algoritmo es correcto, observemos que cada vez que responde NO, alguna de las condiciones (1.1), (1.2), (2.1) o (2.2) no es verificada. Por los Teoremas 5.2.2 y 5.2.3, no existe orientación de G con las requeridas propiedades, y el algoritmo es correcto. Ahora, supongamos que nos dio una respuesta SI. Para cada vértice M de D necesitamos mostrar que la orientación construída por el algoritmo cubre E'_M y admite como par fuente-sumidero, exactamente al requerimiento fuente-sumidero $S_M - T_M$ de M , como fue definido en la fase uno. Esto asegura la corrección del algoritmo. El argumento es por inducción en el tamaño de M . Si $|M| = 1$, \vec{G}_M es el grafo trivial, lo cual es correcto. Si $|M| > 1$ y $M_1 \dots M_i$ son sus hijos, etiquetados como despues del paso 1. Por hipótesis, G_{M_i} es una orientación transitiva de G_{M_i} que cubre E'_{M_i} y que tiene a $S_{M_i} - T_{M_i}$ como par fuente-sumidero. Luego la vuelta de los Teoremas 5.2.2, 5.2.3 o 5.2.4 se aplica y sigue la prueba .

Ahora evaluaremos su complejidad. el árbol de descomposición de un grafo dado G , $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$, puede ser construído en tiempo lineal $O(n + m)$ [10, 28]. La construcción de R_M , R'_M , como también la orientación transitiva \vec{R}_M de R_M y la construcción de C_{ij} 's, todas pueden ser hechas en tiempo lineal. Podemos emplear el algoritmo [29] de orientación transitiva. La construcción del grafo cubridor $C(G)$ requiere tiempo $O(n^{2.37})$ [7]. Sin embargo, en la fase uno, en vez de chequear si cada vértice neighborhood satisface (1.1), chequeamos sólo la orientación final construída

por el algoritmo. Esto es, reemplazamos la construcción del grafo cubridor correspondiente a cada vértice neighborhood, por la construcción del grafo cubridor de la orientación final. De esta forma, el algoritmo de reducción transitiva es aplicado sólo una vez.

Los cálculos de $S_M \cap M_i$ y $T_M \cap M_i$ pueden ser hechos en tiempo $O(|M_i|)$, significando un tiempo total de $O(n^2)$. Sin embargo, las uniones $(S_M \cap M_i) \cup C_i^-$ y $(T_M \cap M_i) \cup C_i^+$ se pueden calcular en tiempo lineal. Con la misma cota podemos verificar si el árbol es compatible. Sin embargo, chequear que $S_M \subseteq M_1$ y $T_M \subseteq M_i$, para un vértice serie M , se necesitarán $O(|S_M|)$ pasos, y respectivamente $O(|T_M|)$ pasos, dando $O(n^2)$ pasos en todo el proceso. Luego la complejidad del algoritmo es $O(n^{2,37})$.

Queremos destacar que el algoritmo descrito encuentra la orientación transitiva que cubre el subconjunto de aristas requerido y que tiene las fuentes y sumideros deseados, en un tiempo $O(n^2)$. El tiempo adicional corresponde a encontrar el grafo cubridor orientación final construída con el propósito de chequear se verifica los requerimientos. Entonces, si es que existe orientación requerida, el algoritmo la encontrará en tiempo $O(n^2)$. Sin embargo, para chequearla necesitaremos tiempo $O(n^{2,37})$. Un hecho similar ocurre con los grafos de comparabilidad. En este caso, una orientación transitiva se puede construir en tiempo lineal, mientras que el mejor algoritmo conocido para chequear si una dada orientación es en efecto transitiva requiere tiempo $O(n^{2,37})$.

Capítulo 6

Conclusiones

Hemos abordado dos problemas relacionados con los grafos cubridores de grafos de comparabilidad.

Por un lado caracterizamos los *grafos treelike*, es decir los grafos de comparabilidad que admiten una orientación cuyo grafo cubridor es un árbol.

Dimos cuatro caracterizaciones: la primera basada en la descomposición modular de grafos, la segunda por prohibidos y una condición no hereditaria, la tercera por propiedades de los subgrafos inducidos por las vecindades de sus vértices y por último, probamos que todo grafo treelike es completamente separable y los caracterizamos por condiciones en los niveles respecto a un vértice arbitrario.

Generamos un algoritmo de desmantelamiento y otro basado en propiedades de los grafos completamente separables.

Probamos que la doble aplicación del operador clique deja fija a la clase de los grafos treelike.

Por otro lado, hemos resuelto el problema de saber si dados un subconjunto de aristas E' de $E(G)$ y dos subconjuntos de vértices S', F' de $V(G)$, pueden ser aristas del cubridor y fuentes- sumideros de alguna orientación de G .

Encontramos condiciones necesarias y suficientes en las cuales se basa un algoritmo eficiente que construye una tal orientación, en caso de existir, o nos informa que no existe.

Siguiendo esta línea de investigación nos proponemos estudiar en el futuro, entre otros problemas, caracterizar y reconocer los grafos de comparabilidad para los cuales existe una orientación transitiva cuyo grafo cubridor es bipartito.

Sabemos que reconocer si un grafo es un grafo cubridor, de algún grafo de comparabilidad, es NP-completo [6]. Con lo cual tiene interés el preguntarse si este problema acotado a una clase particular de grafos, es de menor complejidad. Otros problemas interesantes serían estudiar los grafos cubridores de subclases especiales de los grafos de comparabilidad como por ejemplo, los cografos.

Bibliografía

- [1] M. D. Atkinson. On computing the number of linear extensions of a tree. *Order*, 7 (1990), pp. 23-25.
- [2] H. Bauer and R. H. Möhring. A fast algorithm for the decomposition of graphs and posets. *Mathematics of Operations Research*, 8 (1983), pp. 170-184.
- [3] M. Boudhar and G. Finke, Scheduling on batch processing machines with constraints of compatibility between jobs. *proc. 2nd. Conf. on Management and Control of production and Logistics-MCPL'2000* (2000), pp. 703-708.
- [4] C.F. Bornstein, J. L. Szwarcfiter Clique graphs of chordal and path graphs, *Order* 13, (1996), pp. 219-225.
- [5] A. Brandstädt, F. F. Dragan, V. D. Chepoi and V. I. Voloshin. Dually chordal graphs. *Proc. of the 19th. International workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer science Lecture Notes in Computer Science*, 790 (1994), pp. 237-251.
- [6] Brightwell (1999), pp. 12-17.
- [7] D. Coppersmith and S. Winograd, Matrix multiplication via arithmetic progressions, *Proceedings of the 19th ACM Symposium on Theory of Computing*, (1987), pp. 1-6.
- [8] D. G. Corneil, Y. Perl, L. K. Stewart A linear recognition algorithm for cographs, *SIAM J. Comp.* 14, (1985), pp. 926-934.

- [9] S. Cornelsen and G. Di Stefano Treelike graphs: characterization, recognition and applications, *Proc. 30th Intl. Workshop on Graph Algorithms...*
Computer Science - WG 2004 Lecture Notes in Computer Science 3353 (2004), pp. 46-57.
- [10] A. Cournier and M. Habib, A new linear algorithm for modular decomposition, S. Tison, ed., *CAAP'94 - 19th International Colloquium*, Lecture Notes in Computer Science 787 (1994), pp. 68-84.
- [11] E. Dahlhaus, J. Gustedt and R. M. McConnell, Efficient and practical algorithms for sequential modular decomposition, *Journal of Algorithms* 41 (2001), pp. 360-387.
- [12] E. Dahlhaus Efficient parallel and linear time sequential split decomposition, *Lecture Notes in Computer Science* 880 (1994), pp. 171-180.
- [13] G. Damiani, M. Habib, C. Paul A simple paradigm for graph recognition: application to cographs and distance hereditary graphs, *Theoretical Computer Science* 263 (2001), pp. 99-111.
- [14] M. P. Dobson, M. Gutierrez, J. L. Szwarcfiter. Treelike Comparability Graphs. *Electronics Notes in Discrete Mathematics*. 18 (2004), pp. 97-102.
- [15] M.P. Dobson, M. Gutierrez and J.L. Szwarcfiter. Characterizations for treelike graphs, *Congressus Numerantium*, en prensa.
- [16] M.P. Dobson, M. Gutierrez, M. Habib and J.L. Szwarcfiter. Comparability graphs with restricted covering graphs, *Inf. Proc. Letters*, en prensa.
- [17] F. Escalante, Uber iterierte Clique Graphen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 39, (1973), pp. 59-68.
- [18] C. M. H. Figueiredo, J. Gimbel, C. Mello and J. L. Szwarcfiter, Sources and sinks in comparability graphs, *Order* 14 (1997), pp. 75-83.

Bibliografía

- [1] M. D. Atkinson, On computing the number of linear extensions of a tree. *Order*, 7 (1990), pp. 23-25.
- [2] H. Bauer and R. H. Möhring, A fast algorithm for the decomposition of graphs and posets. *Mathematics of Operations Research*, 8 (1983), pp. 170-184.
- [3] M. Boudhar and G. Finke, Scheduling on batch processing machines with constraints of compatibility between jobs. *proc. 2nd. Conf. on Management and Control of production and Logistics-MCPL'2000* (2000), pp. 703-708.
- [4] C.F. Bornstein, J. L. Szwarcfiter, Clique graphs of chordal and path graphs, *Order* 13, (1996), pp. 219-225.
- [5] A. Brandstädt, F. F. Dragan, V. D. Chepoi and V. I. Voloshin, Dually chordal graphs. *Proc. of the 19th. International workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer science Lecture Notes in Computer Science*, 790 (1994), pp. 237-251.
- [6] G. Brightwell, On the complexity of diagram testing. *Order* 10 (1993), pp. 297-303.
- [7] D. Coppersmith and S. Winograd, Matrix multiplication via arithmetic progressions, *Proceedings of the 19th ACM Symposium on Theory of Computing*, (1987), pp. 1-6.

- [8] D. G. Corneil, Y. Perl, L. K. Stewart, A linear recognition algorithm for cographs, *SIAM J. Comp.* **14**, (1985), pp. 926-934.
- [9] S. Cornelsen and G. Di Stefano, Treelike graphs: characterization, recognition and applications, *Proc. 30th Intl. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - WG 2004* Lecture Notes in Computer Science 3353 (2004), pp. 46-57.
- [10] A. Cournier and M. Habib, A new linear algorithm for modular decomposition, S. Tison, ed., *CAAP'94 - 19th International Colloquium*, Lecture Notes in Computer Science 787 (1994), pp. 68-84.
- [11] E. Dahlhaus, J. Gustedt and R. M. McConnell, Efficient and practical algorithms for sequential modular decomposition, *Journal of Algorithms* **41** (2001), pp. 360-387.
- [12] E. Dahlhaus, Efficient parallel and linear time sequential split decomposition, *Lecture Notes in Computer Science* **880** (1994), pp. 171-180.
- [13] G. Damiand, M. Habib, C. Paul, A simple paradigm for graph recognition: application to cographs and distance hereditary graphs, *Theoretical Computer Science* **263** (2001), pp. 99-111.
- [14] M. P. Dobson, M. Gutierrez, J. L. Szwarcfiter, Treelike Comparability Graphs. *Electronics Notes in Discrete Mathematics.* **18** (2004), pp. 97-102.
- [15] M. P. Dobson, M. Gutierrez and J.L. Szwarcfiter, Characterizations for treelike graphs, *Congressus Numerantium*, en prensa.
- [16] M. P. Dobson, M. Gutierrez, M. Habib and J.L. Szwarcfiter, Comparability graphs with restricted covering graphs, *Inf. Proc. Letters*, en prensa.
- [17] F. Escalante, Uber iterierte Clique Graphen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **39**, (1973), pp. 59-68.

- [18] C. M. H. Figueiredo, J. Gimbel, C. Mello and J. L. Szwarcfiter, Sources and sinks in comparability graphs, *Order* **14** (1997), pp. 75-83.
- [19] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18** (1967), pp. 25-66.
- [20] P. C. Gilmore, A.J Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *IBM Research Center*,(1963), pp. 539-548.
- [21] J. Gimbel, sources in posets and comparability graphs, *Order***9** (1992), pp. 361-365.
- [22] M. Gutierrez, J. Meidanis, Algebraic theory for the clique operator, *Journal of the Brazilian Computer Society, Special issue dedicated to J.L. Szwarcfiter*, Number 3, 7, 2002.
- [23] M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York, 1980.
- [24] M. C. Golumbic, Trivially perfect graphs, *Discrete Math.* **24**, (1978), pp. 105-107.
- [25] R.C. Hamelink, A partial characterization of clique graphs, *Journal of Combinatorial Theory*, **5**, (1968), pp. 192-197.
- [26] P.L.Hammer, F. Maffray, Completely separable graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **27** (1990), pp. 85-99.
- [27] F. Maffray. M. Preismann, A translation of Tibor Gallai's article: Transitiv Orientierbare Graphen. *Perfect Graphs*. **Wiley Interscience** (2001) pp. 25-66.
- [28] R. M. McConnell and J. Spinrad, Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs, *Proceedings of the fifth ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1994, pp. 536-545.

- [29] R. M. McConnell and J. Spinrad, Linear-time transitive orientation, *Proceedings of the Eight ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1997, pp. 19-25.
- [30] R. H. Möhring. Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs, in I. Rival (ed.), *Graphs and Order*, D. Reidel, Dordrecht, 1985, pp. 41-102.
- [31] R. M. McConnell, J. P. Spinrad, Modular decomposition and transitive orientation *Discrete Math.* **201**, (1999) pp. 189-241.
- [32] C. L. Monma and V. K. Wei, Intersection graphs of paths in a tree. *Journal of combinatorial theory, Serie B* **41**, (1986) pp. 141-181.
- [33] S. Olariu, On sources in comparability graphs, with applications. *Discrete Math.* **110**, (1992) pp. 289-292.
- [34] E. Prisner, J. L. Szwarcfiter, Recognizing clique graphs of directed and rooted paths graphs. *Discrete Applied Maths.* **94**, (1999) pp. 321-328.
- [35] W.T.Trotter. Combinatorics and Partially Ordered sets: Dimension Theory. *The Johns Hopkins University Press*, 1992.
- [36] E. S. Wolk, A note on "The comparability graph of a tree" *Proc. Amer. Math. Soc.* **16**, (1965) pp. 17-20.