

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA Facultad de Ciencias Exactas Departamento de Matemática

Fases geométricas en sistemas mecánicos

Alejandro Cabrera

Licenciado y Magister en Cs. Físicas (Instituto Balseiro) 2002 y 2003

TESIS DOCTORAL

Dirección: Profesor Jorge Solomin

Noviembre 2007

Resumen

Fases geométricas en sistemas mecánicos

por

ALEJANDRO CABRERA Doctor en Ciencias área Matemática Universidad Nacional de La Plata Profesor Jorge Solomin, Director

Esta tesis está dedicada al estudio de fases geométricas en sistemas mecánicos clásicos y cuánticos.

En primer lugar, estudiamos el movimiento de cuerpos que rotan con momento angular no nulo y que se auto-deforman, cuando la forma es una función conocida del tiempo. Como ocurre para un cuerpo rígido, el momento angular relativo al centro de masa, visto desde un sistema rotante, describe una curva en una esfera pero, en este caso, obedece una ecuación no-autónoma y más complicada. Mostramos que, cuando esta curva es cerrada y simple en un intervalo ΔT , la orientación espacial del cuerpo que se deforma queda completamente caracterizada por un ángulo o fase θ_M . Derivamos, además, una fórmula para este ángulo que generaliza la conocida fórmula de R. Montgomery para la fase del cuerpo rígido. Aplicamos, luego, estas técnicas a ejemplos concretos, obteniendo resultados analíticos sobre el movimiento de cuerpos que se deforman.

Seguidamente, se lleva a cabo un estudio detallado de sistemas mecánicos que generalizan el caso antes mencionado. Asumimos que el espacio de configuraciones es un fibrado principal $Q \longrightarrow Q/G$ y que los grados de libertad correspondientes a la base están siendo controlados. Consideramos, además, que el movimiento completo del sistema se induce desde el de la base debido a la presencia de vínculos no-holónomos. Mostramos que la solución puede ser factorizada en una parte dinámica y otra geométrica. En particular, en circunstancias cinemáticamente favorables, la parte dinámica admite una factorización adicional, ya que puede ser reconstruida a partir de una solución intermedia para el momento (referido al cuerpo), lo que da como resultado una fórmula de fases de reconstrucción. Los

resultados obtenidos son aplicados al estudio de sistemas mecánicos concretos.

En el último capítulo, establecemos un modo de identificar y construir los elementos geométrico-diferenciales que subyacen a las fases de Berry cuánticas. De esta manera, obtenemos una construcción genérica de los fibrados de Berry a partir de los datos físicos del sistema a estudiar. Aplicamos esta construcción a sistemas usuales y a otros recientemente investigados, y analizamos las características geométricas de las fases de Berry asociadas.

> Profesor Jorge Solomin Director

Abstract

GEOMETRIC PHASES IN MECHANICAL SYSTEMS

by

ALEJANDRO CABRERA Doctor of Science in Mathematics Universidad Nacional de La Plata

Profesor Jorge Solomin, Advisor

This thesis is dedicated to the study of geometric phases in classical and quantum mechanical systems.

First, we study the motion of self deforming bodies with non zero angular momentum when the changing shape is known as a function of time. The conserved angular momentum with respect to the center of mass, when seen from a rotating frame, describes a curve on a sphere as it happens for the rigid body motion, though obeying a more complicated non-autonomous equation. We observe that if, after time ΔT , this curve is simple and closed, the deforming body 's orientation in space is fully characterized by an angle or phase θ_M . We also give a reconstruction formula for this angle which generalizes R. Montgomery's well known formula for the rigid body phase. We also apply these techniques to obtain analytical results on the motion of deforming bodies in some concrete examples.

The main chapter of this thesis consists of a detailed study of mechanical systems generalizing the deforming body case. The configuration space is assumed to be $Q \longrightarrow Q/G$ for which the base Q/G variables are being controlled. The overall system's motion is considered to be induced from the base one due to the presence of general non-holonomic constraints. It is shown that the solution can be factorized into dynamical and geometrical parts. Moreover, under favorable kinematical circumstances, the dynamical part admits a further factorization since it can be reconstructed from an intermediate (body) momentum solution, yielding a reconstruction phase formula. At the end of this chapter, we apply this results to the study of concrete mechanical systems.

The last chapter is a short account on the identification and construction of the

differential geometric elements underlying quantum Berry's phase. Berry bundles are built generally from the physical data of the quantum system under study. We apply this construction to typical and recently investigated systems presenting Berry's phase to explore their geometric features.

> Profesor Jorge Solomin Director

Al lector interesado:

La física es matemática no porque sepamos mucho del mundo exterior sino porque lo que sabemos es demasiado poco. B. Russell

Contenidos

1	Sistemas mecánicos 1						
	1.1	Introducción	1				
		1.1.1 Vínculos holónomos y el principio de D'Alambert	2				
		1.1.2 Otros vínculos considerados en esta tesis	4				
	1.2	Mecánica Lagrangiana	5				
		1.2.1 Geometría simpléctica	7				
	1.3	$G-{ m simetr}$ ías	9				
		1.3.1 Acciones de grupos de Lie	0				
		1.3.2 La aplicación momento 1	1				
	1.4	Fases Geométricas 1	2				
2	Fases en el movimiento de cuerpos deformables 17						
	2.1	Introducción	7				
		2.1.1 Consideraciones preeliminares	7				
		2.1.2 Resultados principales	8				
	2.2	El planteo físico	0				
		2.2.1 Cuerpos deformables	0				
		2.2.2 Hipótesis del cuerpo auto-deformante	2				
		2.2.3 Ecuaciones de movimiento	4				
	2.3	Fases en el movimiento del cuerpo auto-deformante	8				
		2.3.1 Reconstrucción	8				
		2.3.2 La fórmula de Montgomery generalizada	0				
	2.4	Algunas aplicaciones	5				
		2.4.1 Soluciones en la esfera	5				
		2.4.2 Ejemplos	0				
3	Fas	Fases en sistemas controlados y sujetos a vínculos 44					
	3.1	Introducción	4				
	3.2	Sistemas controlados sujetos a vínculos no-holónomos	7				
		3.2.1 La cinemática de los sistemas controlados	7				
		3.2.2 Hipótesis dinámicas	0				
		3.2.3 El principio variacional	2				
		3.2.4 Las ecuaciones de movimiento	4				
		3.2.4 Las ecuaciones de movimiento $\ldots \ldots 5$	4				

	3.3	Casos	particulares	61			
		3.3.1	El caso del momento conservado	61			
		3.3.2	D-vínculos afines	65			
		3.3.3	El caso de un G abeliano $\ldots \ldots \ldots$	67			
		3.3.4	El caso de un fibrado trivial $Q = G \times B$	71			
	3.4	Recons	strucción y fases	74			
		3.4.1	Gauges y fases en $Q \longrightarrow Q/G$ para sistemas con D -vínculos	74			
		3.4.2	Fases de reconstrucción en sistemas con momento conservado	76			
		3.4.3	Fases para sistemas con D -vínculos puramente cinemáticos	77			
		3.4.4	Fases para sistemas con D -vínculos y simetrías horizontales \ldots	78			
		3.4.5	Fases para sistemas con vínculos afines tipo torque magnético dipolar	83			
	3.5	Ejemp	los	85			
		3.5.1	Disco vertical controlado	85			
		3.5.2	Una bola controlada sobre una mesa giratoria	87			
		3.5.3	Un cuerpo auto-deformante sujeto a D -vínculos no-holónomos	90			
		3.5.4	Cuerpo deformable con momento magnético dipolar en un campo				
			magnético externo	98			
4	Eler	nentos	geométricos en el estudio de las fases de Berry cuánticas	102			
Ŧ	4 1	Introd		102			
	4.2	Plante	∞ v notación	104			
4.3 Fibrados de Berry sobre el espacio de parámetros				105			
		4.3.1	Fibrado de Berry vectorial $E^m \longrightarrow B$	106			
		4.3.2	Fibrado de Berry $U(K_m)$ – principal sobre B	106			
		4.3.3	Geometrías local v global	107			
		4.3.4	La conexión de Berry que lleva a la fase	108			
		4.3.5	La geometría de los fibrados de Berry sobre $B \simeq S^{2,1}$	109			
	4.4	Ejemp	\log	109			
		4.4.1	Spin en un campo magnético	109			
		4.4.2	Fases no-abelianas en la computación cuántica holonómica	111			
		4.4.3	Fases topológicas	113			
	1		disionales	115			
А	Elei	nentos	adicionales	115			
	A.1	La ene	α ane trade α and α α α α	116			
A.2 Reconstruction en el horado G $\longrightarrow O_{\mu}$							
Bi	Bibliografía 119						

Bibliografía

iii

Agradecimientos

Agradezco, en primer lugar, a mis padres y a mi hermano ya que ellos nutren la sangre que impulsa todo lo que hago.

En segundo lugar, tengo el placer de agradecerle a mi director Jorgito Solomin, a Marcela Zuccalli y a toda la gente del departamento de matemáticas que me ha tratado tan bien desde que llegué.

Finalmente, estos agradecimientos no pueden dejar de mencionar a todos los nuevos amigos y amigas que encontré en La Plata y que compartieron conmigo mis años de doctorado que esta tesis, al menos parcialmente, permite recordar.

Capítulo 1

Sistemas mecánicos

El universo no puede ser leído hasta que no hayamos aprendido el lenguaje y nos hayamos familiarizado con los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuyo medio es humanamente imposible comprender una sola palabra. Galileo

1.1 Introducción

A continuación, daremos una breve introducción a la mecánica geométrica, a fin de fijar conceptos y notación. El objetivo de esta introducción es intentar mostrar que, del vasto lenguaje matemático al que Galileo hace referencia, la mecánica se expresa en un dialecto particular: el de la geometría diferencial. El lector interesado puede referirse a [1, 3, 16]; o a [11] en relación a la mecánica en general.

Un sistema mecánico puede modelarse como un sistema de i = 1...N partículas newtonianas puntuales que interactúan entre sí y con otros sistemas externos. Como es bien sabido, los cuerpos extendidos pueden ser modelados como un límite (en el que el número de partículas se hace infinito apropiadamente) de dichos sistemas. Este hecho otorga una generalidad notablemente grande a las consideraciones siguientes.

Desde un sistema de referencia inercial¹, la dinámica de una partícula etiquetada por i queda descripta por la segunda ley de Newton:

$$m_i \ddot{r}_i(t) = F_i^{Tot} \tag{1.1}$$

 $^{^1\}mathrm{Es}$ decir, des
de un sistema en el que las leyes de Newton son válidas. Otro sistema
que se mueve a velocidad constante con respecto a éste será también in
ercial

en donde m_i denota la masa de la partícula, $r_i(t) \in \mathbb{R}^3$ la posicición de la misma a tiempo t, cada punto · indica una derivada temporal y $F_i^{Tot} \in \mathbb{R}^3$ la fuerza (total) que está actuando sobre la partícula. Una parte (un sumando) de esta fuerza total está dada por la fuerza F_{ij} que hace otra partícula j sobre la i. Newton observó que esta descripción queda completa al introducir el principio de acción-reacción: la partícula j sufre una fuerza de igual magnitud F_{ji} que es causada por la partícula i. Estas fuerzas son llamadas *internas* al sistema.

Por otro lado, al considerar separadamente del resto del universo al sistema bajo estudio, éste puede interactuar con otros que se encuentran en su entorno. Esta interacción se tiene en cuenta al escribir

$$F_i^{Tot} = F_i^{Ext} + \sum_{j \neq i} F_{ij}$$

en donde F_i^{Ext} denota la fuerza resultante de todas las interacciones externas al sistema que sufre la partícula *i*. Por lo tanto, para inferir la evolución del sistema, es decir, para encontrar todas las aplicaciones $r_i(t)$ que describen las posiciones como funciones del tiempo *t*, debemos resolver el sistema de 3N ecuaciones (escalares, diferenciales, de segundo orden, acopladas) dado por las expresiones (1.1) para todos los índices i = 1...N.

Dado que los $r_i(t)$ representan 3N incógnitas, es claro que, para que el problema quede bien planteado, debemos contar con un modelo mecánico² de las fuerzas F_i^{Tot} que actúan sobre el sistema.

Observación 1.1.1. (Espacio de configuraciones) Una configuración de nuestro sistema de N partículas queda descripta por un punto (r_i) del espacio \mathbb{R}^{3N} . Luego, la evolución temporal del sistema corresponde a una curva $c(t) \equiv (r_1(t), r_2(t), r_3(t), ...)$ en este espacio de configuraciones \mathbb{R}^{3N} .

1.1.1 Vínculos holónomos y el principio de D'Alambert

Muchas veces, encontrar un modelo mecánico para todas las fuerzas que actúan sobre un sistema dado puede resultar complicado. Es más, a veces dicho modelo puede darse a posteriori, es decir, una vez conocidas las características de la evolución del sistema.

Sin embargo, muchos sistemas admiten un planteo simple que prescinde de tales modelos funcionales explícitos. De entre los sistemas que presentan esta característica,

²Es decir, expresiones funcionales para los vectores fuerzas en términos de las magnitudes mecánicas del problema.

nos interesa recordar, en esta introducción, aquellos en los que las fuerzas mecánicamente desconocidas son fuerzas asociadas a vínculos cinemáticos holónomos y D'Alambertianos.

En este caso, la información correspondiente a la descripción explícita de las fuerzas de vínculo queda reemplazada por:

- Vínculos cinemáticos: que consisten en el conocimiento, a priori, de ciertas características geométricas o analíticas del movimiento del sistema, es decir, propiedades de las curvas r_i(t) y r_i(t). Ej: ||r_i(t)|| = cte para todo t, i.e. la partícula i se mueve restringida a un círculo.
- Hipótesis sobre las fuerzas de vínculo: que consisten en suposiciones cualitativas sobre la geometría de las fuerzas³ F_i^{Vin} que implementan las anteriores restricciones cinemáticas. Ej: F_i^{Vin} es central, es decir, paralela al vector $r_i(t)$ a todo t.

Entre las varias combinaciones de vínculos cinemáticos y de las correspondientes hipótesis sobre las fuerzas de vínculo, citaremos la siguiente, que permite describir una vasta clase de sistemas mecánicos: los vínculos son holónomos y las fuerzas satisfacen el usualmente llamado principio de D'Alambert⁴. Un conjunto de vínculos cinemáticos se dice holónomo si éstos consisten en la restricción de la curva c(t), que describe la dinámica en \mathbb{R}^{3N} , a yacer en una subvariedad diferenciable $Q \hookrightarrow \mathbb{R}^{3N}$. Es decir, sabemos a priori que

$$c(t) \in Q \; \forall t.$$

Por otro lado, el principio de D'Alambert dice que las fuerzas de vínculo que hacen que el sistema se restrinja a Q, pensadas como campos en \mathbb{R}^3 y dispuestas una tras la otra a fin de formar un vector $(F_1^{Vin}(q), F_2^{Vin}(q), F_3^{Vin}(q), ...)$ de \mathbb{R}^{3N} , son ortogonales a los espacios tangentes $T_q Q \hookrightarrow \mathbb{R}^{3N}$ para todo $q \in Q$. En otras palabras, estas fuerzas no hacen trabajo virtual sobre el sistema. Explícitamente, si $(v_i) \in \mathbb{R}^{3N}$ es un vector tangente a Q en un punto q cualquiera

$$\sum_{i} F_i^{Vin}(q) \cdot v_i = 0.$$

³Estas fuerzas de vínculo pueden ser una combinación de fuerzas internas y externas al sistema.

⁴Es importante observar que, en otros contextos, el mismo nombre se utiliza para hacer referencia a otro principio más general.

Utilizando la propiedad cualitativa anterior, proyectando (ortogonalmente) sobre los tangentes $T_{c(t)}Q$, de (1.1) se obtiene que

$$(m_i \ddot{r}_i)^{TQ}(t) = (F_i)^{TQ}, \tag{1.2}$$

en donde $(m_i \ddot{r}_i)^{TQ}$ y $(F_i)^{TQ}$ denotan las proyecciones sobre $T_{c(t)}Q$ de los vectores $(m_i \ddot{r}_i)$ y (F_i) de \mathbb{R}^{3N} . Nótese que la proyección $(F_i)^{TQ}$ no incluye a las fuerzas de vínculo, con lo que hemos logrado dejar el problema bien planteado (suponiendo que sí contamos con un modelo mecánico para las restantes fuerzas): dimQ incógnitas dadas por las variables que quedan libres en $(r_i(t)) \in Q$ sumadas a las dimQ ecuaciones (escalares) proyectadas (1.2). Por otro lado, nótese que para llevar las ecuaciones anteriores a una forma diferencial, deberemos conmutar el orden de la proyección sobre TQ con el de las derivadas temporales. Al hacer esto, aparecerán términos que tienen en cuenta que el espacio tangente a Q cambia, dentro de \mathbb{R}^{3N} , a lo largo de c(t). La ecuación resultante presentará, luego, estos términos adicionales que vienen del uso de sistemas móviles adaptados a la geometría de Q, aunque todos quedarán expresados en términos de las coordenadas globales del espacio ambiente \mathbb{R}^{3N} .

Observación 1.1.2. (Espacio de configuraciones restringido) Dado que c(t) yace en Q a todo t, y teniendo en cuenta que la dimensión de Q puede resultar (mucho) menor que 3N, es natural intentar plantear el problema sólo en términos de los grados de libertad del nuevo espacio de configuraciones restringidas Q. Las ecuaciones proyectadas anteriores representan un primer paso en esta dirección, sin embargo, todavía no hemos logrado prescindir de todas las nociones ligadas al antiguo \mathbb{R}^{3N} : las expresiones dependen aún de los sistemas coordenados heredados de este espacio ambiente. En la sección 1.2, describiremos una formulación geométrica de tales sistemas mecánicos, en la que Q entra en calidad de variedad diferenciable y que, luego, logra prescindir de los sistemas de coordenadas de un espacio ambiente con dimensión mayor, alcanzando explícitamente el objetivo de trabajar con menos grados de libertad.

1.1.2 Otros vínculos considerados en esta tesis

En los capítulos centrales de esta tesis, consideraremos sistemas que, puede pensarse, están sujetos a vínculos cinemáticos dependientes del tiempo de un tipo particular. Explícitamente, supondremos que Algunos de los grados de libertad están siendo controlados: la evolución del sistema c(t) yace en una variedad Q y, además, todo punto de la trayectoria tiene un entorno coordenado, con coordenadas $\{b_l, g_k\}, l = 1...K_B$ y $k = 1...(dimQ - K_B)$, en el que

$$c(t) \equiv \{b_l^0(t), g_k(t)\},\$$

siendo $b_l^0(t)$ funciones dadas y conocidas a priori del tiempo.

La idea que subyace a este tipo de vínculos es la de que K_B de los grados de libertad del sistema, una vez restringido a Q, están siendo *controlados* de alguna manera tal que nos permite conocer el *resultado cinemático* de dicho control. El problema de encontrar la evolución completa de este sistema se reduce, entonces, al de encontrar la dinámica de las restantes variables $g_k(t)$.

En el espíritu de la sección anterior, desearíamos poder plantear completamente el problema sin necesidad de conocer cuantitativamente la mecánica de las fuerzas de vínculo (o control) que están implementando la parte conocida del movimiento. En otras palabras, deberemos incluir una hipótesis dinámica, análoga a la de D'Alambert, que complete la anterior información cinemática, a fin de trabajar con un problema bien planteado.

En los capítulos siguientes, asumiremos que Q tiene una estructura geométrica particular (la de fibrado G-principal) y que tanto la descomposición en grados de libertad controlados y no-controlados, como la geometría de las fuerzas de control, son *compatibles* con ella. Esto nos permitirá plantear completa y geométricamente el problema de encontrar los restantes $g_k(t)$ y, de este modo, el de encontrar la dinámica total del sistema bajo estudio. Es más, seremos capaces de caracterizar genéricamente las soluciones de un tal sistema al deducir fórmulas de fases de reconstrucción para los $g_k(t)$.

1.2 Mecánica Lagrangiana

Recordemos, en primer lugar, que si Q es una variedad diferencial de dimensión n, un sistema de coordenadas (q^i) definido en un entorno coordenado U de Q induce una base en cada espacio tangente T_qQ para cada $q \in U$. Esta base está formada por los vectores $\frac{\partial}{\partial q^i}$ tangentes a las curvas coordenadas.

Denotamos al fibrado tangente TQ, que es una variedad diferencial de dimensión 2n y tiene coordenadas (q^i, v^i) sobre entornos coordenados de la forma $T_UQ := \bigcup_{q \in U} T_qQ$, con U entorno coordenado de Q, definidas de la siguiente manera: si (q^i) son las coordenadas de $q \in U$ y $v = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_q Q$, al elemento $(q, v) \in T_U Q$ se le asignan las coordenadas (q^i, v^i) .

Siguiendo las ideas de la introducción anterior, en mecánica lagrangiana, Q denota la variedad cuyos puntos representan *las posibles configuraciones de un sistema mecánico*. Si dimQ = n, decimos que el sistema tiene *n grados de libertad*.

Las leyes de Newton para sistemas con vínculos (holónomos y D'Alambertianos) resultan equivalentes⁵ a la siguiente formulación lagrangiana variacional:

• Sea

$$L(q, v): TQ \to R,$$

la función lagrangiana o lagrangiano del sistema. Para sistemas simples,

$$L(q, v) = K(q, v) - V(q)$$

en donde K representa la energía cinética del sistema y V(q) los potenciales asociados a las fuerzas conservativas actuantes.

(Principio variacional) la curva c(t) ∈ Q que describe la dinámica del sistema es un extremo entre las curvas suaves c : I := [t₁, t₂] → Q, con extremos q₁, q₂ ∈ Q fijos, de la siguiente funcional acción

$$S_Q = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{c}) dt$$

es decir, $\delta S_Q = 0$, para deformaciones c(t, s) suaves que mantienen los extremos $q_1, q_2 \in Q$ fijos, i.e. $\delta c(t_i) = 0$ con i = 1, 2.

Observación 1.2.1. (Vínculos no-holónomos) Es interesante notar que, dado que tomamos a Q dentro de la categoría de las variedades diferenciables, el considerar vínculos holónmos no induce a considerar ningún ingrediente nuevo en la formulación: la formulación variacional es la misma al restringirnos a una subvariedad diferenciable $\tilde{Q} \subset Q^6$. Sin embargo, una modificación ([9]) al principio variacional anterior debe introducirse a fin de poder describir sistemas sujetos a vínculos no-holónomos. Vénase, también, los capítulos centrales.

⁵Es importante aclarar que, de ninguna manera, la mecánica lagrangiana está restringida a este tipo de sistemas. Por el contrario, esta descripción permite modelar gran cantidad de sistemas mecánicos diversos. Sin embargo, decidimos restringirnos a éstos en pos de la simplicidad de esta exposición introductoria.

⁶En otras palabras, se podría decir que el conjunto de sistemas lagrangianos es *cerrado* con respecto a la operación de *restricción* inducida por la presencia de vínculos holónomos. Nótese que esto no es cierto para las formulaciones en las que el espacio de configuraciones es \mathbb{R}^n .

Puede verse que, en un sistema coordenado local, las ecuaciones diferenciales para c(t) en Q que se deducen del principio variacional anterior son las *Ecuaciones de Euler Lagrange*: en cualquier sistema de coordenadas (q^i, v^i) ,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^{i}}(c(t),\dot{c}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q^{i}}(c(t),\dot{c}(t)), \quad i = 1,...,n.$$
(1.3)

Una vez fijado el sistema de coordenadas, estas ecuaciones equivalen a las ecuaciones proyectadas (1.2). Sin embargo, al ser geométrica, esta formulación permite trabajar con los dimQgrados de libertad de manera *covariante* con respecto a dichos sistemas coordenados.

1.2.1 Geometría simpléctica

A continuación, daremos la versión hamiltoniana de las ecuaciones anteriores. El paso de (1.3) a su análogo hamiltoniano equivale al procedimiento usual de añadir n nuevas variables (los momentos conjugados) a fin de transformar un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden (con derivadas temporales en las velocidades) en otro de primer orden. En este caso, es importante el hecho de que el procedimiento resulta compatible con la geometría global de la formulación.

Notación: Si M es una variedad diferencial, denotaremos con $\mathcal{X}(M)$ al espacio de campos vectoriales sobre M.

Recordemos que una forma simpléctica sobre una variedad M es una 2-forma diferencial ω tal que:

• es cerrada

$$d\omega = 0,$$

- y no-degenerada
 - $\forall x \in M, \ \forall v \in T_x M, \ v \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists u \in T_x M \quad \omega(u, v) \neq 0.$

Una variedad simpléctica es un par (M, ω) , con M una variedad diferencial y ω una forma simpléctica sobre M. Es fácil ver que la condición de no-degeneración de ω implica que dim M es par.

8

Ejemplo 1.2.2. (El cotangente) Un importante ejemplo de una variedad simpléctica está dado por el fibrado cotangente T^*Q , de cualquier variedad Q, munido de su forma simpléctica canónica. Recordemos que el fibrado cotangente a Q es el fibrado vectorial cuyas fibras son T_q^*Q , los espacios duales a T_qQ . Si (q^i) son las coordenadas de $q \in U$ y $\alpha = p_i dq^i \in T_q^*Q$, con (dq^i) la base dual de $(\frac{\partial}{\partial q^i})$, a $(q, \alpha) \in T_U^*Q$ se le asignan coordenadas (q^i, p_i) . La forma simpléctica canónica ω_c sobre T^*Q es la 2-forma diferencial que, en cualquier sistema de coordenadas (q^i, p_i) , se escribe

$$\omega_c(q^i, p_i) := dq^i \wedge dp_i.$$

Es fácil ver que esta expresión local es invariante ante cambios de coordenadas. Una manera sencilla de probarlo es escribir

$$\omega_c(q^i, p_i) = -d(p_i dq^i) \tag{1.4}$$

y mostrar que la expresión $p_i dq^i$ lo es.

Dado un lagrangiano $L: TQ \to \mathbb{R}$, la transformada de Legendre asociada a él es la función $FL: TQ \to T^*Q$ definida como

$$FL(q,v) := (q, \frac{\partial L}{\partial v}).$$
 (1.5)

La 2-forma

$$\omega_L := FL^*(\omega_c) \tag{1.6}$$

es llamada 2-forma lagrangiana asociada a L. De (1.4) y (1.5) se deduce que su expresión local es

$$\omega_L(q^i, v^i) = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i \wedge dv^j.$$
(1.7)

El lagrangiano L se dice **regular** si la forma ω_L es simpléctica en TQ. La ecuación (1.7) muestra que L es regular si y sólo si, $\forall (q.v) \in TQ$,

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right)(q,v) \neq 0.$$
(1.8)

Campos vectoriales hamiltonianos y las ecuaciones de Hamilton

Dada la no-degeneración de ω , en una variedad simpléctica (M, ω) podemos definir, para todo $x \in M$, un isomorfismo entre $T_x M$ y $T_x^* M$ asignando a cada vector $v \in T_x M$ el covector $\alpha_v \in T_x^* M$ tal que

$$\alpha_v = \omega(v, .).$$

$$\omega(X_H, .) = dH.$$

Por lo tanto, asociada a cualquier función H sobre M, tenemos las correspondientes ecuaciones de Hamilton: $m(t) \in M$ satisface estas ecuaciones (de primer orden sobre M) si es una curva integral del campo hamiltoniano X_H asociado a H, es decir, si

$$\dot{m}(t) = X_H(m(t)) \in T_{m(t)}M.$$

Por otra parte, recordemos que la función energía $E_L : TQ \to R$ asociada al lagrangiano L se define como

$$E_L(q, v) := FL(q, v)(v) - L(q, v).$$
(1.9)

Para sistemas simples, E_L coincide con la energía mecánica del sistema K(q, v) + V(q). La siguiente proposición establece la versión hamiltoniana de las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre la variedad simpléctica ($M = TQ, \omega_L$):

Proposición 1.2.3. Sea L un lagrangiano regular. La trayectoria c(t) en Q satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange si y sólo si $m(t) = (c(t), \dot{c}(t))$ satisface las ecuaciones de hamilton en $(M = TQ, \omega_L)$ correspondientes a la función energía E_L , es decir, sii es una curva integral del campo vectorial $X_L \in \mathcal{X}(TQ)$ definido por

$$\omega_L(X_L,.) = dE_L. \tag{1.10}$$

Para cualquier lagragiano regular, el campo vectorial X_L que satisface (1.10) es de la forma $X_L(q, v) = (v, Z(q, v))$ y representa una ecuación de segundo orden para $q(t) \in Q$ (ver [1]).

1.3 G-simetrías

Dentro de las formulaciones geométrico-diferenciales de la mecánica, el concepto de simetría viene ligado al de *grupo de Lie* y al de *acción* de estos grupos sobre una variedad simpléctica.

Recordemos que un grupo de Lie G, de dimensión n, es una variedad diferenciable de dimensión n munida de una estructura de grupo, tal que las operaciones de composición e inversión son diferenciables.

1.3.1 Acciones de grupos de Lie

Una **acción** a izquierda (a derecha) de un grupo de Lie G sobre una variedad diferencial Q es una aplicación diferenciable $\phi : G \times Q \rightarrow Q$ tal que

- 1. $\forall q \in Q, \phi(e,q) = q$ para e el neutro del grupo G.
- 2. $\forall g, h \in G y \forall q \in Q, \phi(g, \phi(h, q)) = \phi(gh, q) \ (= \phi(hg, q))$

Cuando no se aclare si la acción es a izquierda o a derecha, supondremos que es a izquierda. En el último capítulo sobre las fases de Berry cuánticas, trabajaremos con acciones a derecha.

Una acción ϕ es libre si

$$\begin{array}{rl} \phi_g: & Q \to Q \\ & q \mapsto \phi(g,q) \end{array}$$

no tiene puntos fijos. Es decir, si $\phi_g(q) = q$ entonces g = e. La acción es **propia** si $\tilde{\phi}: G \times Q \to Q \times Q$ dada por $\tilde{\phi}(g,q) = (q,\phi_g(q))$ es propia, es decir, $\forall K \subseteq Q \times Q$ compacto se tiene $\tilde{\phi}^{-1}(K)$ es compacto. Cuando una acción es libre y propia, se sabe que el espacio cociente Q/G tiene estructura de variedad diferenciable y que $\pi_G: Q \to Q/G$ es una submersión. Es decir, que $\pi_G: Q \to Q/G$ define un fibrado G-principal.

Consideremos la acción $\phi: G \times Q \to Q$. Para cualquier elemento ξ en el Algebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G, el **generador infinitesimal** en $q \in Q$ se denota $\xi_Q(q)$ y se define como

$$\left. \xi_Q(q) := \left. rac{d}{dt} \phi(exp \ t\xi \,, \, q) \right|_{t=t_0}$$

donde exp es la aplicación exponencial, $exp : \mathfrak{g} \to G$.

Ejemplo 1.3.1. (Acciones adjunta y coadjunta) La acción adjunta $Ad : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es definida como la derivada en el neutro e, $Ad_g(\eta) = T_e(c_g)(\eta)$ de la acción de G sobre sí mismo por conjugación $c_g(h) = ghg^{-1}$. Fijando $h \in G$, consideramos la aplicación lineal transpuesta $(Ad_h)^t : \mathfrak{g}^* \odot \mathfrak{y}$ se define la acción coadjunta (a izquierda) Ad^* de G sobre \mathfrak{g}^* como $Ad_g^* = (Ad_{g^{-1}})^t$. Para $\xi \in \mathfrak{g}$, el generador infinitesimal asociado a la acción adjunta da lugar, por definición, a la acción (de álgebras de Lie, a izquierda) *adjunta ad* de \mathfrak{g} sobre sí

$$\xi(q) := \left. \frac{d}{dt} A d_{exp \ t\xi}(\eta) \right|_{t=t_0} =: a d_{\xi} \eta = [\xi, \eta]$$

donde [,] es el corchete en el álgebra g. Análogamente, la acción (de álg. de Lie, a izquierda) coadjunta ad^{*} de g sobre g^{*} es

$$ad_{\xi}^* = -\left(ad_{\xi}\right)^t.$$

Ejemplo 1.3.2. (Acción levantada al tangente) Supongamos que tenemos la acción ϕ del grupo de Lie G sobre la variedad Q. Para cada $g \in G$ tenemos definida $\phi_g : Q \to Q$. Entonces, se induce una acción $T\phi_g$ sobre el espacio tangente TQ de la siguiente manera, $T\phi_g : TQ \to TQ$ tal que

$$T\phi_q(v) = d\phi_q(v)$$

donde $v \in T_q Q$ y d es el diferencial exterior. Análogamente, se puede levantar la acción al cotangente T^*Q .

1.3.2 La aplicación momento

Es bien sabida la relación que existe entre la *simetría de un sistema* y las *cantidades conservadas* asociadas a éste. En el contexto hamiltoniano (simpléctico) esta relación se vé plasmada en la existencia de la *aplicación momento*.

Si un grupo de Lie G actúa sobre una variedad simpléctica (M, ω) , se dice que esta acción es **simpléctica** si

$$\phi_{g}^{*}\left(\omega_{\phi(g,q)}\right) = \omega_{q} \; \forall g \in G, q \in Q$$

es decir, si la acción del grupo deja invariante a la forma simpléctica.

Una función $J_{\xi} : M \to \mathbb{R}$ es una función momento asociada a $\xi \in \mathfrak{g}$, si para todo $m \in M$ y para todo $u \in T_m M$ se verifica

$$\omega_m(\xi_Q(m), u_m) = dJ_{\xi}(m) \cdot (u_m), \qquad (1.11)$$

es decir, J_{ξ} es la función hamiltoniana que dá origen al campo generador infinitesimal ξ_Q .

Tomando en cuenta la linealidad de la apliación $\xi \to J_{\xi}$, podemos definir $J : M \to \mathfrak{g}^*$ tal que $J(m)(\xi) = J_{\xi}(m)$. Una tal $J : M \to \mathfrak{g}^*$ recive el nombre de **aplicación** momento.

Una G-acción sobre una variedad simpléctica (M, ω) se dice una G-simetría (o bien, que la G-acción es hamiltoniana) cuando G actúa simplécticamente sobre M y existe la aplicación momento $J: Q \to g^*$ asociada.

Proposición 1.3.3. (Teorema de Noether) Si (M, ω) tiene una G-simetría y $H : M \longrightarrow M$ es una función (hamiltoniano) G-invariante, entonces J se conserva sobre las curvas integrales c(t) del campo vectorial hamiltoniano X_H sobre M asociado a H:

$$\frac{d}{dt}J(c(t)) = 0.$$

En el caso de un sistema lagrangiano simple con simetría ([1]), el espacio de fases es la variedad simpléctica (TQ, ω_L) sobre la que G actúa mediante la acción levantada al tangente $T\phi_g$, descripta en la sección anterior. En este caso, $\omega_L = -d\theta_L = -d(FL^*\theta_c)$ siendo $\theta_c \equiv p_i dq^i$ la 1-forma canónica sobre T^*Q . Es fácil ver que

$$J_{\xi}(q) := \theta_L(\xi_Q(q))$$

es la aplicación momento asociada a esta G-simetría.

Ejemplo 1.3.4. (Momento angular de un sistema de partículas) Dentro del caso anterior, cuando $Q = \mathbb{R}^{3N}$ como en la introducción y considerando la acción de G = SO(3), el grupo de matrices de rotaciones en \mathbb{R}^3 , que consiste en rotar todas las posiciones de las partículas (r_i) de igual manera, es fácil ver que la aplicación momento asociada sobre (TQ, ω_L) es

$$J((r_i),(\dot{r}_i)) = \sum_i m_i r_i \times \dot{r}_i$$

en donde se ha hecho uso del isomorfismo ([16]) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong (R^3, \times)$. En otras palabras, la aplicación momento que corresponde a la simetría de rotación global para un sistema de partículas está dada por el *momento angular total* ([11]) de dicho sistema.

1.4 Fases Geométricas

We believe that the concept of a geometric phase, repeating the history of the group concept, will eventually find so many realizations and applications in physics that it will repay study for its own sake, and become a part of the 'lingua franca'. Shapere y Wilczek (1989). A partir del descubrimiento teórico de Sir M. Berry, publicado en [4], el concepto de fase geométrica fue utilizado en numerosas áreas de la física, tanto cuántica como clásica. Inicialmente, Berry contempló el caso en el que un sistema cuántico depende⁷ de parámetros externos que varían adiabáticamente con el tiempo y que, al transcurrir un tiempo T, retornan a su configuración inicial. Suponiendo que el estado inicial del sistema era un autoestado de una dada autoenergía a tiempo t = 0, y que los niveles de energía de este sistema cuántico se mantienen no-degenerados durante la evolución paramétrica, entonces el estado a tiempo T coincide con el inicial a menos de un factor de fase $e^{i\theta}$. Berry demostró que este ángulo o fase θ se puede escribir como suma de dos, uno de naturaleza dinámica involucrando la integral de la energía correspondiente, y otro que depende de la geometría de la curva que describen los parámetros al variar y no de la velocidad con la que ésta es recorrida. Como discutiremos en el capítulo 4, esta segunda contribución, llamada fase de Berry, puede ser descripta como una holonomía en un fibrado U(1)-principal sobre el espacio de parámetros.

Las fases de Berry cuánticas han sido detectadas experimentalmente y hacen su aparición en diversos sistemas físicos ([25]). Su naturaleza geométrica las convierte en objetos singularmente interesantes para el estudio teórico y para la descripción de los fenómenos naturales asociados. Siguiendo los resultados de Berry, Hannay encontró un efecto análogo pero en el contexto de sistemas mecánico-clásicos integrables. De hecho, el rol de las fases geométricas en sistemas mecánicos (clásicos) ha sido extensamente investigado, llevando a que: "Muchos problemas familiares que no son usualmente asociados a las fases geométricas admiten una descripción en términos de éstas. Por lo general, el resultado es un claro entendimiento de la estructura del problema y una expresión elegante de su solución" ([15, 25]). Por otro lado, la naturaleza geométrica de las fases asociadas a sistemas mecánicos las vuelve, también, un instrumento interesante dentro de la teoría de control (véase, por ejemplo, [20]).

Observación 1.4.1. (Esencia del concepto de fases geométricas) De la situación estudiada inicialmente por Berry, se abstrajo el siguiente esquema definiendo la idea de fase geométrica: de un cierto conjunto de magnitudes sujeto a una ley de evolución dada, un subconjunto varía de manera conocida describiendo una curva en un dado espacio de valores posibles que, eventualmente, se cierra retornando a una dada configuración inicial;

⁷Es decir, interactúa con otro sistema externo cuya evolución es conocida o controlada.

el conjunto restante de variables, usualmente identificado con las de un grupo, evoluciona inducido por el movimiento de las primeras a fin de cumplir con la ley de evolución total; cuando las variables conocidas retornan a su configuración inicial, las restantes también lo hacen pero a menos de un factor de fase, es decir, a menos de la acción de un elemento Δg del grupo; éste, a su vez, puede descomponerse en dos factores $\Delta g = \Delta g_D \cdot \Delta g_G$ de manera tal que el valor de la fase geométrica Δg_G depende sólamente de la geometría de la curva que siguen las variables conocidas y no de la velocidad con que ésta es recorrida. Esta fase puede pensarse como una memoria que el sistema guarda de la evolución cerrada

que efecúan las variables conocidas.

En general, el marco geométrico para los sistemas físicos que presentan fases geométricas está dado por un G-fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} P/G$ en el que las variables conocidas están asociadas a una curva cerrada $\tilde{c}(t)$ en la base P/G, $\tilde{c}(0) = \tilde{c}(T)$, y el conjunto total de magnitudes involucradas a una curva c(t) en P que se proyecta sobre $\tilde{c}(t)$, i.e., $\pi(c(t)) = \tilde{c}(t)$. En estas condiciones, siendo la curva en la base cerrada, existe un único elemento Δg del grupo G tal que $c(T) = \Delta g \cdot c(0)$. Finalmente, dada una conexión principal en $P \xrightarrow{\pi} P/G$, se puede descomponer esta fase total Δg en un producto $\Delta g_D \cdot \Delta g_G$, en donde la fase geométrica Δg_G se define como la holonomía asociada a dicha conexión y correspondiente a la curva base, mientras que la fase dinámica Δg_D queda, entonces, fijada por la ley de evolución total para $c(t) \in P$. Nos referiremos a la resultante factorización de la fase total como a una fórmula de fases para el correspondiente sistema mecánico.

Ejemplos de este tipo de investigaciones en mecánica clásica son el trabajo de Shapere y Wilczek sobre auto-propulsión en medios con número de Reynolds bajo [24] y la fórmula de fases para el cuerpo rígido de Montgomery [19] (véase el ejemplo 1.4.3 más abajo). Ambas pueden ser vistas como aplicaciones particulares del concepto de *fases de reconstrucción* introducido por Marsden, Montgomery y Ratiu en [15]. Es importante destacar que, en este contexto, a diferencia del caso cuántico, la hipótesis de adiabaticidad no siempre es necesaria. En los capítulos 2 y 3, nos dedicaremos al estudio de sistemas mecánicos que presentan dichas fases de reconstrucción.

Observación 1.4.2. (Contenido físico de las fases dinámicas) A pesar de que, una vez identificado el esquema geométrico mencionado más arriba, siempre se puede introducir una conexión principal en $P \xrightarrow{\pi} P/G$ a fin de descomponer la fase total Δg en un factor geométrico y otro dinámico, la correspondiente fórmula de fases no siempre resulta interesante o útil al estudio del sistema físico subyacente. Lo que vuelve relevante a una fórmula de fases no es sólo el hecho de que la fase geométrica no dependa de la velocidad con que la curva paramétrica sea recorrida sino, también, que la conexión encontrada sea tal que la *fase dinámica correspondiente* admita una expresión *simple y cerrada* en términos de (algunas de) las magnitudes físicas asociadas al sistema, tales como la energía y/o tiempos característicos. El ejemplo siguiente 1.4.3 ilustra claramente esta observación.

En los sistemas mecánicos que consideraremos en los capítulos 2 y 3, las fórmulas de fases de reconstrucción resultan relevantes al estudio de la dinámica de dichos sistemas al establecer relaciones analíticas entre la configuración total (la fase total) de éstos a ciertos tiempos dinámicamente definidos y la geometría de curvas soluciones intermedias y más simples (la fase geométrica) y la integral temporal de la energía cinética y/o de otras magnitudes cinemáticas del sistema (la fase dinámica).

Ejemplo 1.4.3. (Fase del cuerpo rígido [19]) Como es sabido ([11, 1, 3]), un cuerpo rígido libre rota alrededor de su centro de masa de manera que su momento angular (espacial) $J \in \mathbb{R}^3$ se mantiene constante. Si R(t) es la rotación que lleva al cuerpo desde su configuración inicial a la correspondiente al tiempo t, definiendo el momento angular relativo al cuerpo como $\Pi(t) = R^{-1}(t)J$, entonces la conservación del momento espacial se traduce en las ecuaciones de Euler para $\Pi(t)$. Las correspondientes soluciones son, típicamente, periódicas y describen curvas cerradas en una esfera en \mathbb{R}^3 . Una vez conocida esta solución $\Pi(t)$ para el momento angular referido al cuerpo, la rotación R(t) que describe la evolución espacial del cuerpo puede ser reconstruida ([15]) a partir de ésta. Los detalles de este proceso de reconstrucción pueden encontrarse en el capítulo 2. A continuación, identificamos los elementos inherentes a la presencia de fases geométricas mencionados más arriba dentro de este ejemplo en particular.

Cuando la curva $\Pi(t)$ completa un período (la curva base cerrada y conocida), transcurrido un tiempo T, la definición misma de Π en términos del momento conservado nos dice que la posición del cuerpo rígido (el total de las variables del sistema) debe ser la inicial *a menos de una rotación* alrededor de la dirección del momento constante (la fase total $\Delta g \in G = U(1)$). En [19], Montgomery deriva la siguiente fórmula de fases para el ángulo θ de dicha rotación o fase del cuerpo rígido

$$\theta = -\Omega + \frac{2ET}{\|J\|},$$

en donde Ω representa el ángulo sólido (orientado) barrido por la solución cerrada $\Pi(t)$ en la esfera y E es la energía cinética (conservada) del sistema. El primer término representa la *fase geométrica* dado que, claramente, depende de la geometría de la curva $\Pi(t)$ en la esfera y no de cómo ésta es recorrida. No es dificil ver ([15], véase también el capítulo 2) que esta fase puede obtenerse como una holonomía en un U(1)— fibrado sobre la esfera con respecto a una conexión principal tal que la correspondiente fase dinámica queda dada por el segundo término de la fórmula anterior. Esta bella fórmula relaciona la posición del cuerpo rígido a tiempo T con la energía cinética del sistema y con la geometría de la curva que describe el momento angular al ser visto desde un sistema que rota junto con el cuerpo. Generalizamos esta fórmula al caso de cuerpos que se auto-deforman y al de otros sistemas más generales en los capítulos siguientes.

Capítulo 2

Fases en el movimiento de cuerpos deformables

En este capítulo describimos la presencia de fases en el movimiento de cuerpos deformables y damos fórmulas de reconstrucción para ellas. Los contenidos que siguen están basados en el los del artículo [6].

2.1 Introducción

2.1.1 Consideraciones preeliminares

El problema que estudiaremos consiste en describir el movimiento de un cuerpo en rotación, mientras la *forma* de dicho cuerpo está cambiando (controladamente) de manera conocida con el tiempo. Un caso particular de este tipo de cuerpos es aquel en el cual la forma es constante en el tiempo, i.e. el de los *cuerpos rígidos*.

Como mencionamos en el capítulo anterior, un *cuerpo rígido libre* rota alrededor de su centro de masa de manera relativamente compleja, dependiendo de cómo es que su masa está distribuida en el espacio. Esta distribución de masa está representada por el correspondiente *tensor de inercia* mientras que el movimiento del cuerpo es tal que el *momento angular (espacial)*, con respecto al centro de masa, es una cantidad *conservada*.

Analíticamente, la orientación de un cuerpo rígido con respecto a un sistema de referencia inercial puede ser obtenida de la siguiente manera: resolviendo las ecuaciones de Euler para el momento angular (referido al cuerpo); y, finalmente, *reconstruyendo* la curva buscada en el espacio de las rotaciones a partir de la ya obtenida en el espacio de momentos. Cuando la curva correspondiente al momento completa un período, la orientación espacial del cuerpo coincide con la incial a menos de una rotación, en un cierto ángulo, alrededor de la dirección del momento angular espacial que es constante (recuérdese el ejemplo 1.4.3). Partiendo de un bello resultado de R. Montgomery ([19]), es posible saber que dicho ángulo, usualmente llamado *fase del cuerpo rígido*, puede ser expresado en términos de la *fórmula de reconstrucción* (ver [15]) dada en el ejemplo 1.4.3, la cual involucra una contribución *geométrica* (una holonomía) y una contribución *dinámica* (los valores de energía y período asociados).

Ahora, cuando un cuerpo en rotación es *libre de coacción externa*, pero no rígido debido a que su forma varía (internamente) con el tiempo de manera prefijada, la correspondiente distribución espacial de masa también cambia con el tiempo. ¿Cómo se mueve dicho cuerpo? O, dado que conocemos cómo es que la *forma* varía: ¿Cuál es la rotación, alrededor del centro de masa, que es inducida por la distribución de masa variable?

Para cuerpos auto-deformantes que rotan con momento angular *nulo*, esta pregunta fue respondida por Shapere y Wilczek en [24]. En tal caso, la reorientación inducida es de naturaleza puramente *geométrica*, dado que puede ser descripta mediante una *curva horizontal*, con respecto a la *conexión mecánica*, en un fibrado SO(3)-principal cuya base es el *espacio de las formas* (ver [24], [20] y las referencias que allí se encuentran).

Otro problema relacionado con el que estudiaremos es el que consiste en encontrar la secuencia óptima de deformaciones tales que induzcan una reorientación dada del cuerpo. Este es un problema de control óptimo que generaliza el conocido problema del gato en caida libre (ver [20]).

El problema que estudiaremos a continuación, es, en un cierto sentido, *ortogonal* al problema de control recién mencionado: suponemos *conocer* la secuencia de deformaciones y queremos *obtener* la reorientación que ésta induce.

2.1.2 Resultados principales

En lo que resta del capítulo, nos concentraremos en estudiar los casos que no fueron cubiertos por [24], i.e. los casos en los que un *cuerpo que se auto-deforma*, a su vez, rota con un momento angular (conservado) *distinto de cero*.

Nuestro resultado principal consiste en obtener una expresión para el ángulo o fase

que determina, en dados instantes específicos, la *orientación espacial exacta de este cuerpo que se auto-deforma y que rota con momento angular no-nulo*. Esta expresión generaliza la mencionada fórmula de R. Montgomery [19].

En lo que sigue, tendremos siempre en mente el ejemplo en el que alguien reacomoda los muebles dentro de una nave espacial¹ o, equivalentemente, el de un satélite en órbita que despliega una de sus antenas.

Obsérvese que, en los ejemplos mencionados, el cuerpo bajo estudio es afectado por fuerzas externas (v.g. la de gravedad). Sin embargo, nótese también que, para cuerpos *pequeños* como lo son los satélites puestos en órbita, el momento angular con respecto al centro de masa se mantiene aproximadamente constante. Dentro de esta aproximación, el movimiento total del cuerpo puede ser descripto por dos sistemas *desacoplados* de ecuaciones: el que corresponde al movimiento del centro de masa (un típico problema de *fuerzas centrales*) y el que detallaremos a continuación, correspondiente a la rotación del cuerpo alrededor de su centro de masa (un problema de *cuerpos auto-deformantes*).

Como veremos en las secciones siguientes, el movimiento de rotación de un cuerpo auto-deformante consta de dos contribuciones: la que es inducida por la deformación (de naturaleza *geométrica* [24]) y la que deviene de poseer un momento angular distinto de cero (de naturaleza *dinámica*, como lo es para un cuerpo rígido).

En la sección 2.2.2, definiremos qué clase de cuerpos deformables estudiaremos. Ésta es la que llamaremos de cuerpos *auto-deformantes*. Dichos cuerpos son definidos por medio de un vínculo puramente cinemático y mediante una *hipótesis dinámica*. En la sección 2.2.3, derivaremos las ecuaciones (de segundo orden, no autónomas) *de movimiento* para la rotación desconocida alrededor del centro de masa. Éstas corresponden a la *conservación del momento angular* medido desde un sistema de referencia con origen en el centro de masa y con ejes paralelos, a todo tiempo, a los de un sistema inercial. Nos referiremos a éste como al *momento angular espacial*.

También en 2.2.3, observaremos que, como en el problema del cuerpo rígido, la rotación buscada puede ser *reconstruida* a partir de la curva solución a las ecuaciones (de primer orden, no autónomas) para el momento angular referido al cuerpo. Éste último representa al momento angular espacial visto desde un sistema de referencia que está rotando junto con el cuerpo (ver [24]). En este punto, podemos volver a enunciar nuestro resultado

¹Este ejemplo fue sugerido como modelo de sistemas a estudiar por el profesor T. Ratiu durante el 20. encuentro de geometría diferencial, realizado en La Falda en el 2005.

principal: cuando, transcurrido un tiempo ΔT , la solución correspondiente al momento angular referido al cuerpo retorna a su valor inicial, la rotación reconstruida retorna, a su vez, a su valor inicial *a menos de* una rotación alrededor de la dirección del momento angular espacial (que es constante); más aún, en la sección 2.3, mostraremos que el ángulo de dicha rotación, o *fase del cuerpo auto-deformante*, puede expresarse (mod. 2π) a través de la fórmula de recostrucción (2.13), que involucra un término geométrico y otro dinámico. Este resultado puede ser visto como una generalización directa, al caso de cuerpos autodeformantes, de la fórmula de Montgomery para cuerpos rígidos.

Dicha fórmula relaciona la orientación del cuerpo bajo estudio con la *integral de su* energía cinética sobre ΔT y con la geometría de la curva solución en el espacio de momentos angulares referidos al cuerpo. El caso analizado en [24], en en el que el momento angular es cero, la fase mencionada en el párrafo anterior es trivial, en acuerdo con la naturaleza netamente geométrica del movimiento.

Análogamente al caso de un cuerpo rígido, nuestra fórmula puede ser aplicada cuando se tiene a mano una descrición geométrica de la correspondiente curva solución en el espacio de momentos angulares referidos al cuerpo. Por otro lado, la dependencia temporal explícita de las ecuaciones subyacentes implica que, en general, la *energía del sistema no es conservada* durante el movimiento de un tal cuerpo. A sí mismo, dado que las ecuaciones para el momento angular referido al cuerpo son no-lineales y presentan coeficientes con una dependencia temporal genérica, sus soluciones son difíciles de describir en el caso general.

En vista de las últimas observaciones, en la sección 2.4, completamos el estudio del movimiento de cuerpos auto-deformantes analizando tipos particulares de deformaciones. En cada caso, somos capaces de derivar resultados analíticos sobre el movimiento de los correspondientes cuerpos deformables: realizamos estimaciones simples sobre la geometría de la curva solución en el espacio de momentos angulares referidos al cuerpo para luego aplicar nuestra fórmula de Montgomery generalizada.

2.2 El planteo físico

2.2.1 Cuerpos deformables

En esta sección, recordamos el formalismo usado en [20] (ver también [24], [23]) para describir cuerpos deformables.

Llamemos Q al espacio de configuraciones, vistas desde un sistema de referencia con origen en el centro de masa, de un sistema de N-partículas o de un cuerpo extendido. En consecuencia, o bien $Q = \mathbb{R}^{3N-3}$, o bien Q es una subvariedad dentro del conjunto de embeddings $\mathbf{q} : B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo centro de masa $M\mathbf{r}_{CM} = \int_B dm(x) \mathbf{q}(x) = \mathbf{0}$ se encuentra en el orígen coordenado. En la expresión anterior, B denota una forma de referencia para el cuerpo extendido, dm(x), $x \in B$ la correspondiente densidad de masa y $M = \int_B dm(x)$ la masa total. En ambos casos, la acción usual de SO(3) sobre \mathbb{R}^3 da origen a una acción natural de SO(3) sobre Q. Dicha acción resulta ser *libre* sobre

$$Q_0 = Q - Q_{1D},$$

siendo Q_{1D} el conjunto de puntos de Q que representan configuraciones en las cuales todas las partículas del sistema, o bien, todo el cuerpo extendido, están contenidos en una recta. Por ende,

$$Q_0 \xrightarrow{\pi} Q_0 / SO(3)$$

define un fibrado SO(3)-principal cuya base $B = Q_0/SO(3)$ es llamada, usualmente, espacio de formas.

En ambos casos, el de un sistema de partículas y el de un cuerpo extendido, la variedad Q_0 (asi como Q) posee una *estructura Riemanniana* que es inducida por el producto escalar usual en \mathbb{R}^3 . Entonces, existe una *conexión principal* natural en el fibrado $Q_0 \xrightarrow{\pi} Q_0/SO(3)$, que queda definida al elegir, como subespacios horizontales del tangente, los complementos ortogonales de los subespacios verticales con respecto a esta métrica. Usualmente, dicha conexión en $Q_0 \xrightarrow{\pi} Q_0/SO(3)$ es llamada *conexión mecánica*.

Notación: De aquí en más,

- S denotará un sistema de referencia inercial dado,
- CM(t) denotrará un sistema de referencia con orígen en el centro de masa $r_{CM}(t)$ del cuerpo a cada t y con ejes constantemente paralelos a los de S,
- mediante $\widetilde{CM}(t)$ denotaremos cualquier sistema de referencia con orígen en el centro de masa y cuyos ejes estén (posiblemente) rotando con respecto a los de CM(t).

Observación 2.2.1. (Sistemas de referencia) Podemos pensar que un punto $q_0 \in Q_0$ sobre la forma (abstracta) $\pi(q_0) = b_0 \in Q_0/SO(3)$ representa la configuración de un cuerpo con forma b_0 visto desde un sistema de referencia CM. Otro punto \tilde{q}_0 tal que $\pi(\tilde{q}_0) = \pi(q_0)$ representa, entonces, la configuración de un cuerpo con la misma forma b_0 y también vista desde CM, pero, ahora, rotada con respecto a la representada por q_0 . Por otro lado, podemos interpretar también a \tilde{q}_0 como una descripción del mismo cuerpo pero vista desde un sistema de referencia rotado \widetilde{CM} . Esta última interpretación de los distintos puntos de una fibra $\pi^{-1}(b_0)$ es la que mantendremos en mente en lo que resta del capítulo. El lector interesado puede referirse a [24], en donde se discute el tema.

2.2.2 Hipótesis del cuerpo auto-deformante

Llamemos $\tilde{r}_{io}(t)$ a la posición, a tiempo t, de la partícula i-ésima con respecto a un sistema de referencia (posiblemente) móvil $\tilde{S}(t)$. Entonces, para cada tiempo t, existe una rotación global $R(t) \in SO(3)$ y una traslación $T(t) \in \mathbb{R}^3$ tales que la posición de cada partícula con respecto a un sistema de referencia inercial S puede escribirse como

$$r_i = R(t)\tilde{r}_{io}(t) + T(t).$$
 (2.1)

Definimos a un *cuerpo auto-deformante* como un sistema de partículas o un cuerpo extendido que satisface:

- i) Cinemática: existe un sistema de referencia S̃(t), no necesariamente inercial, desde el cual se conocen los movimientos r̃_{io}(t). Equivalentemente, se conoce una curva de referencia d₀(t) en Q₀ que representa a la deformación vista desde S̃(t). En consecuencia, también contamos con la correspondiente curva en el espacio de las formas c̃(t) = π(d₀(t)).
- ii) Dinámica (fuerzas): Las fuerzas de vínculo, que actúan sobre las partículas del cuerpo haciendo que éste se deforme en la manera dada por $\{\tilde{r}_{io}(t)\}$, son fuerzas internas que satisfacen el principio de acción-reacción fuerte. Esto significa que todas las fuerzas F_{ij}^{int} que actúan sobre la partícula i son causadas por las otras partículas js, que $F_{ij}^{int} = -F_{ji}^{int}$ y que el vector F_{ij}^{int} es paralelo al $r_{ij} = r_i r_j$.

La condición (i) puede ser vista como un conjunto de vínculos cinemáticos dependientes del tiempo que generalizan los usuales de rigidez: desde $\widetilde{S}(t)$ sabemos cómo es que el cuerpo se está deformando (ver también [24]). Ejemplo 2.2.2. (de la nave espacial) Para el cuerpo deformable dado por una nave espacial, el sistema de referencia $\tilde{S}(t)$ puede consistir en un sistema de ejes fijos a alguna parte de la nave o bien el que provee un astronauta que se encuentra dentro de la nave.

Observación 2.2.3. (Fuerzas mecánicas) Aunque algunas fuerzas de la naturaleza no satisfacen el principio de acción-reacción fuerte (v.g. las fuerzas electromagnéticas), la mayoría de las fuerzas mecánicas sí lo hacen.

Observación 2.2.4. (Referencia en el CM) Siempre podemos tomar el $\widetilde{S}(t) = \widetilde{CM}(t)$ (recordar nuestra notación 2.2.1) con origen en el centro de masa a todo tiempo. Consecuentemente, éste es el caso que consideraremos en lo que resta del capítulo. Ver también la discusión que cierra esta sección.

Observación 2.2.5. (Energía no conservada) El tipo de vínculos dependientes del tiempo que consideramos llevan a que, en general, la energía cinética no se conserve, ya que la deformación está implementada por fuerzas de vínculo que dependen de t y que pueden hacer trabajo sobre el sistema.

El problema del cuerpo auto-deformante consiste en encontrar la curva R(t) en SO(3) para la cual la configuración

$$c(t) = R(t) \cdot d_0(t) \tag{2.2}$$

en Q_0 satisface que el correspondiente momento angular espacial con respecto a CM(t) es conservado. Éste puede ser, también, visto como un problema de reconstrucción ([15]) para la rotación R(t) a partir del dato $\tilde{c}(t)$.

Cerramos esta sección con algunas observaciones sobre el significado y la medición de $d_0(t)$. En primer lugar, quisieramos resaltar el hecho de que la curva $d_0(t)$ es un dato inicial *físicamente natural* al problema. Para ilustrar este hecho, supongamos que queremos describir el movimiento de una nave espacial (o de un satélite) cuando alguien está reordenando los muebles desde dentro de la misma (o cuando el satélite está desplegando una antena). Previo al despegue, en el laboratorio, un ingeniero puede fijar el satélite al piso y ensayar la misma deformación que tendrá lugar en el espacio. El cuerpo, en esta situación, no rota por estar fijo al suelo, pero la posición de cada una de sus partes puede ser medida como función del tiempo t desde un sistema de referencia de laboratorio. Luego, la posición del centro de masa puede ser establecidad para todo t y, con ella, la posición de cada parte del cuerpo con respecto a un sistema $\widetilde{CM}(t)$ que, a cada t, está fijo al centro de masa. Este procedimiento nos provee de una curva $d_0(t)$ como la deseada: cuando el satélite está en órbita, ocurre la misma deformación, con lo cual, $d_0(t)$ y la curva física c(t) se proyectan sobre la misma curva en el espacio de formas. Obsérvese que, dado que el cuerpo en el espacio puede rotar libremente alrededor de su centro de masa, la posición con respecto a CM(t), representada por c(t), diferirá, en general y para cada t, en una rotación de la que representa $d_0(t)$. Dicha rotación es, precisamente, la solución R(t) al problema del cuerpo auto-deformante.

Ejemplo 2.2.6. (Cuerpo Rígido) El cuerpo rígido es un caso particular de cuerpo autodeformante: el caso en que $\tilde{r}_{io}(t)$ son constantes en el tiempo. Más generalmente, en el caso rígido, $d_0(t)$ está contenido, a todo t, en la fibra que se encuentra sobre el punto que representa la forma constante del cuerpo rgido.

2.2.3 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones que caracterizan a R(t), de acuerdo a nuestra definición del cuerpo auto-deformante, pueden ser derivadas de la *conservación* del momento angular espacial relativo a CM(t)

$$L_{CM} = 0.$$

Esto significa que la rotación debe ser tal que, desde el sistema CM(t), dicha cantidad permanezca constante aún cuando las partes del cuerpo, internamente, estén en movimiento.

Recordemos las siguientes (y bien conocidas) cantidades: para cualquier $R(t) \in$ $SO(3) \neq d(t) \equiv \{r_i(t)\} \in Q_0,$

- Velocidad angular referida al cuerpo: ω_B^{R(t)} ≃ R⁻¹R está definida por ω_B^{R(t)} × v = R⁻¹Rv para todo v ∈ ℝ³. Denotaremos, además, Ψ : (so(3), [,]) → (ℝ³, ×) al isomorfismo usual de algebras de Lie (ver por ej. [16]);
- Tensor de inercia (locked): $I : Q_0 \to S_{>0}^{3 \times 3} := \{ \text{matrices reales, simétricas y definidas positivas de } 3 \times 3 \}, v \cdot I(\{r_i\})w = \sum_i m_i (v \times r_i) \cdot (w \times r_i);$
- Momento angular (con respecto a un sistema del tipo $\widetilde{CM}(t)$): $L: TQ_0 \to \mathbb{R}^3$, $L(\{r_i, \dot{r}_i\}) = \sum_i m_i \ r_i \times \dot{r}_i$, cumpliendo

$$L(\frac{d}{dt}(R(t)d(t))) = R(t) I(d(t))\omega_B^{R(t)} + R(t) L(\frac{d}{dt}(d(t))).$$
(2.3)

Esta función representa la aplicación momento (o momentum map) correspondiente a la simetría SO(3) en TQ_0 (los detalles se encuentran en [15], [20]).

• Energía cinética: $T: TQ_0 \to \mathbb{R}, \ T(\{r_i, \dot{r}_i\}) = \sum_i m_i \ \dot{r}_i^2$, para la cual

$$T(\frac{d}{dt}(R(t)d(t))) = \frac{1}{2}\omega_B^{R(t)} \cdot I(d(t))\omega_B^{R(t)} + L(\frac{d}{dt}(d(t))) \cdot \omega_B^{R(t)} + T(\frac{d}{dt}(d(t))).$$
(2.4)

Utilizando estas definiciones, para la curva física c(t) en Q_0 , la siguiente cantidad es la que debe conservarse:

$$L_{CM} = L(\frac{d}{dt}c(t)) = L(\frac{d}{dt}(R(t)d(t))) = R(t) \ I(d_0(t))\omega_B^{R(t)} + R(t) \ L(\frac{d}{dt}(d_0(t))).$$

Aquí $I(d_0(t))$ se interpreta como el tensor de inercia medido desde el sistema de referencia $\tilde{S}(t) = \widetilde{CM}(t)$ y llamaremos a

$$L_o(t) := L(\frac{d}{dt}(d_0(t))) = \sum_i m_i \tilde{r}_{io}(t) \times \check{\tilde{r}}_{io}(t)$$

momento angular interno (o aparente [24]), dado que es el que se "vería" desde el sistema (no inercial) $\widetilde{CM}(t)$.

Las ecuaciones de movimiento (de segundo orden y no-autónomas) para R(t) son

$$\frac{d}{dt}L(R(t)d_0(t)) = 0$$

$$I(d_0(t))\dot{\omega}_B = I(d_0(t))\omega_B \times \omega_B + L_o(t) \times \omega_B - \frac{d}{dt}(I(d_0(t)))\omega_B - \frac{d}{dt}L_o(t)$$
(2.5)

cuando las expresamos en términos de la velocidad angular referida al cuerpo ω_B .

Las ecuaciones de reconstrucción para R(t), en base a una solución ω_B de las anteriores, son

$$R = R \ \hat{\omega}_B \tag{2.6}$$

donde $\hat{\omega}_B = \Psi^{-1}(\omega_B)$. El valor inicial $R(t_1)$ debe ser tal que $R(t_1)d_0(t_1) = c(t_1)$ coincida con la configuración inicial del cuerpo bajo estudio.

Ejemplo 2.2.7. (Cuerpo Rígido) Para un cuerpo rígido, recordemos que $d_0(t)$ debe estar contenido enteramente en la fibra que está sobre un punto dado del espacio de formas. Podemos, entonces, elegir que $d_0(t)$ (equiv. $\tilde{r}_{io}(t)$) sea constantemente un punto en dicha fibra. En este caso, $I(d_0(t)) = I$ es constante y $L_o = 0$, con lo que recuperamos las conocidas ecuaciones de Euler:

$$I\omega_B = I\omega_B \times \omega_B$$

como era esperable.

Siguiendo con la analogía al caso del cuerpo rígido, dado que $L(\frac{d}{dt}c(t)) \in \mathbb{R}^3$ es constante durante la evolución del sistema, si definimos la cantidad

$$\Pi(t) = I(d_0(t))\omega_B^{R(t)} + L(\frac{d}{dt}d_0), \qquad (2.7)$$

obtenemos, entonces, que $L(\frac{d}{dt}c(t)) = R(t)\Pi(t)$ y que, por lo tanto, la \mathbb{R}^3 -norma $\left\|L(\frac{d}{dt}c(t))\right\| = R(t)\Pi(t)$

 $\|\Pi(t)\|$ es constante $\forall t$. La cantidad $\Pi(t)$ representa el momento angular (físico) visto desde el sistema de referencia $\tilde{S}(t) = \widetilde{CM}(t)$ y lo llamaremos momento angular referido al cuerpo.

Observación 2.2.8. (Recuperando la velocidad angular) Dado que $I(d_0(t))$ es invertible para todo t, podemos recuperar la velocidad angular $\omega_B^{R(t)}$ partiendo de $\Pi(t) \in \mathbb{R}^3$ a cada t:

$$\omega_B^{R(t)} = I^{-1}(d_0(t))(\Pi(t) - L(\frac{d}{dt}d_0)), \quad \forall t.$$
(2.8)

La ecuación (de primer orden, no-autónoma) que le corresponde satisfacer a $\Pi(t)\in\mathbb{R}^3$ es

$$\frac{\dot{\Pi} = \Pi \times (I^{-1}(d_0(t))(\Pi - L(\frac{d}{dt}d_0(t))))}{\Pi(t_1) = R^{-1}(t_1)L_{CM}}$$
(2.9)

cuyas soluciones yacen completamente en la esfer
a $S^2_{\|\Pi\|} \subseteq \mathbb{R}^3$ de radio $\left\|L(\frac{d}{dt}c(t))\right\| = \|\Pi(t)\|.$

Utilizando (2.8), las ecuaciones de reconstrucción para R(t) pueden expresarse en términos de $\Pi(t)$

$$\dot{R} = R \ \Psi^{-1}(I^{-1}(d_0(t))(\Pi(t) - L(\frac{d}{dt}d_0))).$$
(2.10)

Si tomamos $R(t_1) = id$ por simplicidad, la solución formal a la ecuación anterior es

$$R(t) = Texp \int_{t_1}^{t_2} ds \ \Psi^{-1}(I^{-1}(d_0(s))(\Pi(s) - L(\frac{d}{dt}d_0(s))))$$

donde T indica que las integrales deben hacerse en orden temporal (ver [24]).

Observación 2.2.9. (No integrabilidad) En general, como lo observamos anteriormente, la dependencia temporal explícita en las ecuaciones del cuerpo auto-deformante implican que la energía no se conserva y, por ende, que no podemos reducir más (que 2) la dimensionalidad del problema. Contrastar con el caso particular de un cuerpo rígido [16].

Libertad de gauge

Por definición, contamos con una curva $d_0(t)$ en el espacio de configuraciones Q_0 pero, tal vez, queramos trabajar con otra curva $\tilde{d}_0(t)$ que defina un problema de cuerpo auto-deformante equivalente: $\pi(\tilde{d}_0(t)) = \pi(d_0(t)) = \tilde{c}(t) \in Q_0/SO(3)$. El paso de $d_0(t)$ a $\tilde{d}_0(t)$ significa describir el mismo cuerpo desde un nuevo sistema de referencia $\tilde{\tilde{S}}(t)$. Éste posse el mismo orígen coordenado y rota, de manera conocida, con respecto al inicial $\tilde{S}(t)$ desde el cual el movimiento $d_0(t)$ era originalmente dado.

Observación 2.2.10. (Transformaciones de gauge) Esta libertad en la elección de la curva $d_0(t)$, que describe la deformación prefijada, puede ser vista como una libertad de gauge (o de calibre). Por consiguiente, el pasaje $d_0(t) \rightsquigarrow \tilde{d}_0(t)$ puede ser pensado como una transformación de gauge. El lector interesado en esta analogía puede referirse a [20], [24] y a las referencias que allí se encuentran.

De entre todos los *levantamientos* posibles $d_0(t)$ de un dado $\tilde{c}(t)$, destacaremos dos:

- a) el levantamiento horizontal con respecto a la conexión mecánica en el fibrado $Q_0 \longrightarrow Q_0/SO(3)$. Encontrar dicho levantamiento equivale al problema de encontrar un $\tilde{d}_0(t)$ que cumpla que $L(\frac{d}{dt}\tilde{d}_0(t)) = 0 \ \forall t$ (ver también la obs. 2.2.11).
- b) un levantamiento $\tilde{d}_0(t)$ para el cual el tensor de inercia $I(\tilde{d}_0(t))$ sea diagonal a todo t. Encontrar una tal curva involucra encontrar un levantamiento de la curva base $I(d_0(t))$ a lo largo del mapeo

$$\mathfrak{A} \times SO(3) \longrightarrow S_{>0}^{3 \times 3}$$

 $(a, R) \longmapsto RaR^{-1}$

siendo $\mathfrak{A} := \{ \text{matrices diagonales de } 3 \times 3 \text{ definidas positivas} \}.$
Observación 2.2.11. (Cuerpos deformables con momento angular nulo) En la referencia [24] se muestra como, dada una curva en el espacio de las formas, el movimiento del correspondiente cuerpo auto-deformante está descripto por el levantamiento horizontal mencionado en (a). Este tipo de cálculos están también involucrados en el problema del gato en caida libre ([20][23]) y en otros interesantes problemas asociados a las fases (ver [24] y sus referencias). De hecho, también subyacen a las fases de Berry cuánticas (ver el capítulo 4).

Observación 2.2.12. (Simplificando las ecuaciones) La elección de un $d_0(t)$ diferente lleva a un cambio en la dependencia temporal de los coeficientes de la ecuación de movimiento (2.9). Por lo tanto, una elección apropiada puede convertir esta ecuación en otra más simple pero equivalente. Por ejemplo, la elección del levantamiento horizontal lleva a que el término $L(d_0(t))$ sea nulo por construcción. También es fácil ver que dicha ecuación se simplifica al elegir el levantamiento de manera que $I(d_0(t))$ se mantenga diagonal. Pero nótese que, en general, estas dos simplificaciones no pueden llevarse a cabo al mismo tiempo. Esto se debe a que, en general, el levantamiento horizontal no tiene por qué diagonalizar al tensor de inercia.

2.3 Fases en el movimiento del cuerpo auto-deformante

2.3.1 Reconstrucción

Por completitud, en la sección siguiente describiremos dos tipos de fases de reconstrucción ([15]) que hacen su aparición en el espacio de configuraciones durante el movimiento del cuerpo deformable. En el resto del capítulo, nos concentraremos solamente en el segundo (el abeliano).

Reconstruyendo c(t) a partir de $\tilde{c}(t)$ en el fibrado $Q_0 \xrightarrow{\pi} Q_0/SO(3)$:

Recordemos que, para cada t, $d_0(t)$ y c(t) se encuentran en la misma fibra sobre el punto $\tilde{c}(t)$ en el espacio de formas $Q_0/SO(3)$ (sección 2.2.2). Supongamos que la curva de formas $\tilde{c}(t)$ es cerrada en $[t_1, t_2]$ y sigamos el proceso de reconstrucción usual ([15]): elegimos el levantamiento horizontal $d_0(t)$ con respecto a la conexión mecánica a partir de $d_0(t_1) = c(t_1)$. Luego, $d_0(t_2) = R_G c(t_1)$ con R_G siendo la holonomía asociada a la curva base $\tilde{c}(t)$, medida desde $c(t_1)$, con respecto a dicha conexión (recordar la obs. 2.2.11 y la sec. 2.2.1). Esta holonomía es usualmente conocida como la *fase geométrica (no-abeliana)*. Finalmente, bajo estas hipótesis, la correspondiente *fórmula de reconstrucción es*

$$c(t_2) = R_D(t_2) R_G(t_1) c(t_1)$$

en donde $R_D(t_2)$ es llamada fase dinámica (no-abeliana). Ésta fase se obtiene resolviendo la ecuación (2.5) con el valor inicial $R_D(t_1) = Id$ y con la mencionada elección horizontal de $d_0(t)$, i.e. con $L(\dot{d}_0) = 0$. Sobre los detalles del proceso de reconstrucción general, referimos a [15]. El lector interesado en los detalles correspondientes al movimiento de cuerpos deformables con momento angular nulo puede encontrarlos en [24]. El estudio de las fases asociadas al sistema de 3 partículas (puntuales) puede encontrarse en [21].

Reconstruyedo R(t) a partir de $\Pi(t)$ en el fibrado $SO(3) \longrightarrow S^2_{||\Pi||}$:

Recordemos que, en general, la rotación buscada R(t) en la ecuación (2.2) puede ser reconstruida por medio de (2.10) una vez que hayamos resuelto la ecuación (2.9) en la esfera. Una situación especialmente interesante se da cuando esta solución $\Pi(t)$ es *cerrada* para el intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\Pi(t_1) = \Pi(t_2).$$

En este caso, existe un ángulo θ_M , unívocamente determinado por la solución Π y la condición inicial $R(t_1)$, tal que

$$R(t_2) = exp(\theta_M \ \frac{\hat{L}}{\|L\|}) \ R(t_1),$$

implicando que

$$c(t_2) = [exp(\theta_M \ \frac{\hat{L}}{\|L\|}) \ R(t_1)] \ d_0(t_2)$$

con $\hat{L} = \Psi^{-1}(L) \in so(3)$. Notemos que θ_M define una fase de reconstrucción abeliana que hace su aparición al reconstruir R(t) a partir de $\Pi(t)$ en el fibrado U(1)-principal $SO(3) \longrightarrow S^2_{||\Pi||}$ que describiremos en la sección siguiente.

Observación 2.3.1. (Interpretación de θ_M) Recordemos que R(t) es la rotación que transforma el sistema de referencia $\widetilde{CM}(t)$ en el CM(t). Esto implica que, en el instante t_2 descripto más arriba, la orientación del cuerpo, vista desde CM(t), puede obtenerse, exactamente, rotando, en un angulo θ_M , la configuración conocida $d_0(t_2)$ alrededor de la dirección (constante) del momento angular L_{CM} . De modo que esta fase θ_M caracteriza completamente la posición espacial del cuerpo bajo estudio en dichos instantes t_2 . En lo que resta del capítulo, nos concentraremos en este último proceso de reconstrucción. Nótese que, dado que esta última fase es abeliana, es más provable que podamos obtener fórmulas de reconstrucción simples y cerradas para ella. Finalmente, observaremos que el caso que es geométricamente más interesante es aquel en el que ambas, la solución $\Pi(t)$ de (2.9) y la curva de formas $\tilde{c}(t)$ en $Q_0/SO(3)$, son cerradas para el mismo intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\Pi(t_1) = \Pi(t_2)$$
$$\tilde{c}(t_1) = \tilde{c}(t_2).$$

En tal caso, hay una fase ΔR geométricamente definida en el fibrado $Q_0 \xrightarrow{\pi} Q_0/SO(3)$ por la condición

$$c(t_2) = \Delta R \cdot c(t_1),$$

que es independiente de la elección de $d_0(t)$ (depende, solamente, del valor inicial $c(t_1)$). Su expresión es

$$\Delta R = exp(\theta_M \frac{\hat{L}}{\|L\|}) R(t_1) \Delta R_0 R^{-1}(t_1),$$

en donde $\Delta R_0 = R_0(t_2)R_0^{-1}(t_1)$ y $R(t_1)$ son rotaciones fijadas por la condición inicial $c(t_1)$, mientras que el ángulo θ_M está, nuevamente, dado por la *fórmula de Montgomery* generalizada que presentaremos en la sección siguiente.

2.3.2 La fórmula de Montgomery generalizada

En esta sección, daremos una *fórmula de fases* que corresponde a la recconstrucción de la rotación R(t) a partir de una curva cerrada $\Pi(t)$ que es solución de (2.9). Esta fórmula generaliza la que obtuvo R. Montgomery en [19] para la fase del cuerpo rígido. En las correspondientes demostraciones, utilizaremos algunos resultados geométrico-diferenciales que repasamos en la sección siguiente.

Preeliminares

Recordemos el diagrama (ver, por ejemplo, [16] pp. 438)

$$so^*_{-}(3) \xleftarrow{\pi} T^*SO(3) \overset{Left}{\simeq} SO(3) \times so^*(3) \xrightarrow{J} so^*_{-}(3)$$

 $\xi \longleftarrow (R,\xi) \longrightarrow Ad^t_{R^{-1}}\xi$

en el cual: $so_{-}^{*}(3)$ denota la variedad de Poisson $so^{*}(3)$ munida de (menos) su corchete de Poisson natural; π y J son mapeos Poisson y anti-Poisson, respectivamente, y $Ad_{R^{-1}}^{t}$ denota la acción coadjunta (por derecha)² de SO(3) sobre $so^{*}(3)$ definida por $\langle Ad_{R}^{t}\xi, X \rangle =$ $\langle \xi, Ad_{R}X \rangle$ para $\xi \in so^{*}(3), X \in so(3)$. Como es bien sabido, el diagrama anterior define un par dual ([27]) de variedades de Poisson en el que J es la aplicación momento asociada a la acción simpléctica inducida por la multiplicación a izquierda de SO(3) sobre $T^{*}SO(3)$. La trivialización $T^{*}SO(3) \overset{Left}{\simeq} SO(3) \times so^{*}(3)$ por medio de traslaciones por izquierda se conoce como el paso a las coordenadas del cuerpo.

Si fijamos un elemento $L \in so_{-}^{*}(3) \simeq so(3) \simeq \mathbb{R}^{3}$ (los isomorfismos a nivel de variedades de Poisson), entonces

$$\Psi(Ad_{R^{-1}}^t\xi) = R \ \Psi(\xi)$$

por ende,

$$\pi(J^{-1}(L)) = S^2_{\|\Pi\|}.$$

La esfera $S^2_{\|\Pi\|}$ de radio $\|L\|$ define una *hoja simpléctica* dentro de $so^*_{-}(3) \simeq so(3) \simeq \mathbb{R}^3$ ([16]). Más aún, en este caso, se cumple que

$$J^{-1}(L) = \{ (R, \Pi); R \cdot \Pi = L \} \simeq SO(3) \xrightarrow{\pi} S^2_{\|\Pi\|}$$
$$(R, R^{-1}L) \longmapsto R^{-1}L$$

define un fibrado U(1)-principal ([15]).

Ahora, consideremos la inclusión $J^{-1}(L) \stackrel{i}{\hookrightarrow} SO(3) \times so^*(3) \stackrel{Left}{\simeq} T^*SO(3)$ y la siguiente 1-forma sobre $J^{-1}(L)$ con valores en u(1)

$$A := \frac{1}{\|L\|} i^* \Theta^L \tag{2.11}$$

siendo Θ^L la 1-forma canónica invariante por izquierda sobre $T^*SO(3)$ en coordenadas del cuerpo. Puede verse que A define una conexión principal en el fibrado U(1)-principal $J^{-1}(L) \xrightarrow{\pi} S^2_{||\Pi||}$ ([15]). Esta forma de conexión satisface

$$dA = -\frac{1}{\|L\|}i^*\omega^L$$

en donde $\omega^L = -d\Theta^L$ denota la 2-forma simpléctica canónica en $T^*SO(3)$ en coordenadas del cuerpo. El teorema de reducción ([18], y también [16]), implica que

$$i^*\omega^L = \pi^*\omega_\mu$$

²La acción coadjunta (por izquierda) Ad^* se define como $Ad_R^* = Ad_{R^{-1}}^t$.

para ω_{μ} la forma simpléctica reducida en $S^2_{\|\Pi\|}$. Finalmente, si dS representa la 2-forma de área usual en la esfera $S^2_{\|\Pi\|} \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces ([16])

$$\omega_{\mu} = -\frac{1}{\|L\|} dS$$

La fórmula

Utilizando el anterior marco geométrico, se puede probar fácilmente la siguiente

Proposición 2.3.2. R(t) es solución de la ecuación de movimiento de segundo orden (2.5) sii $(R(t), \Pi(t)) \in J^{-1}(L) \subset T^*SO(3)$ es una curva integral del siguiente campo vectorial dependiente del tiempo

$$X(R,\Pi,t) = (R \ \Psi^{-1}(I^{-1}(d_0(t))(\Pi - L(\dot{d}_0))), \ \Pi \times (I^{-1}(d_0(t))(\Pi - L(\dot{d}_0)))).$$

Observación 2.3.3. (Hamiltonización) Este resultado puede ser visto como el pasaje de TQ_0 a $T^*SO(3)$ por medio de la aplicación momento L y, además, como una posterior reducción a $J^{-1}(L)$, de las ecuaciones del problema (2.5). Comentarios similares sobre reducción en el caso de las fases para el problema del sistema de 3 cuerpos pueden encontrarse en [21].

Por lo tanto, reconstruir R(t) a partir de $\Pi(t)$ es lo mismo que encontrar una curva $(R(t), \Pi(t)) \in J^{-1}(L)$, dentro del fibrado U(1)-principal $J^{-1}(L) \simeq SO(3) \xrightarrow{\pi} S^2_{||\Pi||}$ arriba mencionado, que sea tal que su proyección $\Pi(t)$ en la base $S^2_{||\Pi||}$ sea solución de (2.9). Dado $\Pi(t)$, podemos aplicar el procedimiento usual de *reconstrucción* (véase también el apéndice A.2): se elije el levantamiento horizontal $R_0(t) \in J^{-1}(L)$ de $\Pi(t) \in S^2_{||\Pi||}$, a partir del valor inicial $R_0(t_1) = R(t_1)$, con respecto a la conexión A; se considera un ángulo $\theta(t) \in U(1)$ a ser determinado por la condición de que la curva

$$exp(\theta(t)\frac{\hat{L}}{\|L\|}) \cdot (R_0(t), R_0^{-1}(t)L) = (exp(\theta(t)\frac{\hat{L}}{\|L\|})R_0(t), R_0^{-1}(t)L) \in J^{-1}(L) \simeq SO(3)$$

coincida con la curva integral de $X(R,\Pi,t)$ que estabamos buscando. En la expresión anterior, \hat{L} es $\Psi^{-1}(L) \in so(3)$.

Se sigue que $\theta(t)$ debe obedecer la siguiente ecuación

$$\|L\| \dot{\theta}(t) = I^{-1}(d_0(t))\Pi(t) \cdot \Pi(t) - I^{-1}(d_0(t))L_0(t) \cdot \Pi(t)$$

$$\theta(t_1) = 0.$$
(2.12)

Nótese que si $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo de tiempo cerrado y si $\Pi : [t_1, t_2] \to S^2_{\|\Pi\|}$ es una curva (cualquiera) continua, entonces la imagen $Im(\Pi)$ es un conjunto compacto y, por ende, cerrado de la esfera $S^2_{\|\Pi\|}$. Luego, su complemento $Im(\Pi)^C$ es abierto en $S^2_{\|\Pi\|}$ y, entonces, existe un disco cerrado \bar{d} completamente contenido en $Im(\Pi)^C$. En consecuencia, $Im(\Pi) \subseteq \bar{d}^C$, con lo que hemos probado el siguiente

Lema 2.3.4. La imagen $Im(\Pi)$ de una curva continua $\Pi : [t_1, t_2] \to S^2_{\|\Pi\|}$ está completamente contenida en un disco abierto $D \subseteq S^2_{\|\Pi\|}$.

Ahora podemos enunciar nuestro principal resultado:

Proposición 2.3.5. (fórmula de Montgomery generalizada): Sea $\Pi(t)$ una solución de (2.9) para la cual $\Pi(t_1) = \Pi(t_2)$ en algun intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ y tal que la imagen de $\Pi : [t_1, t_2] \rightarrow S^2_{\|\Pi\|}$ es una curva cerrada simple (i.e. $Im(\Pi)$ es homeomorfa al círculo S^1) entonces $R(t_2) = exp(\theta_M \frac{\hat{L}}{\|L\|}) R(t_1)$ y el ángulo θ_M está dado (mod 2π) por la fórmula

$$\theta_M = (\mp) \frac{area(\tilde{D})}{\|L\|^2} + \frac{1}{\|L\|} \int_{t_1}^{t_2} dt \ (I^{-1}(d_0(t))\Pi(t) - I^{-1}(d_0(t))L(\dot{d}_0)) \cdot \Pi(t)$$
(2.13)

en la cual \tilde{D} representa una superficie en $S^2_{\|\Pi\|}$ cuyo borde es la imagen de Π . El signo – (resp. +) corresponde al caso en el que el ángulo sólido definido por \tilde{D} en la esfera, munido de su borde temporalmente orientado $\Pi(t)$, es un ángulo sólido orientado positivamente (resp. negativamente)

Observación 2.3.6. (Ángulos sólidos orientados) Como es usual, estamos considerando que un ángulo sólido subtendido en la esfera está positivamente, o negativamente, orientado según se deduzca de la aplicación de la *regla de la mano derecha* a su borde orientado (ver [19]). Nótese, además, que *mod.* 2π , la fórmula anterior mantiene la misma forma (i.e., con el signo menos) si reemplazamos $\frac{area(\tilde{D})}{\|L\|^2}$ por el correspondiente ángulo sólido orientado.

Observación 2.3.7. (*Relación con la energía*) El integrando del lado derecho en la fórmula anterior puede ser re-expresado en términos de la energía cinética total (ver ec. (2.4) y el apéndice A.1):

$$(I^{-1}(d_0)\Pi(t) - I^{-1}(d_0)L(\dot{d}_0)) \cdot \Pi(t) =$$

= $2T(\frac{d}{dt}c) - 2T(\frac{d}{dt}d_0) + I^{-1}(d_0)L(\dot{d}_0) \cdot L(\dot{d}_0) - I^{-1}(d_0)L(\dot{d}_0) \cdot \Pi(t)$

En el caso en el que d_0 es horizontal con respecto a la *conexión mecánica*, el integrando se reduce a

$$I^{-1}(d_0)\Pi(t) \cdot \Pi(t) = 2T(\frac{d}{dt}c) - 2T(\frac{d}{dt}d_0).$$

DEMOSTRACIÓN: (de la Proposición) Por el anteriormente mencionado procedimiento de reconstrucción y dado que U(1) es abeliano, sabemos que

$$R(t_2) = exp(\theta_D \ \frac{\hat{L}}{\|L\|}) \cdot exp(\theta_G \ \frac{\hat{L}}{\|L\|}) \cdot R(t_1)$$
$$= exp((\overbrace{\theta_D + \theta_G}^{\theta_M}) \ \frac{\hat{L}}{\|L\|}) \cdot R(t_1),$$

donde θ_D es la fase dinámica, que es solución de (2.12), y θ_G es la fase geométrica, dada por la holonomía de la curva base $\Pi(t)$ con respecto a la conexión A, medida desde $R(t_1)$. Luego, la contribución dinámica θ_D a θ_M coincide precisamente con el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.13).

Mostremos, entonces, que el término restante coincide con la contribución geométrica θ_G . De las hipótesis y del lema 2.3.4, se desprende que $Im(\Pi)$ está completamente contenido en un disco suave D en $S^2_{\|\Pi\|}$. Dado que D es contráctil, el fibrado U(1)-principal restringido $J^{-1}(L) \mid_D \longrightarrow D$ es trivial y, en consecuencia, debemos tener una sección suave $s: D \to J^{-1}(L)$. Una vez que hemos elegido y fijado el disco D que contiene a la curva $Im(\Pi)$, la existencia de una superficie $\tilde{D} \subseteq S^2_{\|\Pi\|}$ cuyo borde coincide con $\Pi(t)$ es obvia ya que D es difeomorfo a un disco abierto de \mathbb{R}^2 y $Im(\Pi)$ es homeomorfo a S^1 . Entonces, mod 2π , podemos escribir (ver [15])

$$\begin{aligned} \theta_G &= -\int \int_{\tilde{D}} s^*(dA) \\ &= -\frac{1}{\|L\|^2} \int \int_{\tilde{D}} dS = -\frac{area(\tilde{D})}{\|L\|^2} \end{aligned}$$

cuando el ángulo sólido definido por \tilde{D} está positivamente orientado con con respecto a su (temporalmente orientado) borde $\Pi(t)$. Las últimas dos igualdades siguen de los resultados que repasamos en la sección anterior. La fórmula (2.13) queda, entonces, demostrada.

Ejemplo 2.3.8. (Cuerpo Rígido) Para un cuerpo rígido, la energía cinética T es conservada y, como hemos visto anteriormente, $d_0(t)$ puede ser elegido como un punto constante en Q

para todo t. Luego, $L(\frac{d}{dt}d_0) = 0$ y el tensor de inercia $I(d_0) = I$ es constante. En este caso, las soluciones periódicas de las ecuaciones de Euler describen discos en la esfera, con lo cual, \tilde{D} define el ángulo sólido usual y nuestra fórmula se restringe a la conocida fórmula derivada por R. Montgomery en [19].

2.4 Algunas aplicaciones

2.4.1 Soluciones en la esfera

Describiremos, en esta sección, algunas de las herrmientas que pueden usarse para estudiar la geometría de las soluciones de la ecuación (2.9) en la esfera $S^2_{||\Pi||}$. Al hacer foco sobre algunos casos particulares, seremos capaces de aplicar esta caracterización geométrica de las soluciones a la obtención de resultados analíticos sobre el movimiento de cuerpos autodeformantes por medio de la correspondiente fórmula de fase tipo Montgomery generalizada para θ_M .

• Reconstrucción de R(t): Cuando, en un dado intervalo de tiempo $[t_{A}, t_{B}]$, la solución $\Pi(t)$ define un camino abierto, de acuerdo a lo anteriormente observado, la rotación R(t) puede expresarse de la siguiente manera

$$exp(\theta(t)\frac{\hat{L}}{\|L\|}) \cdot (R_0(t), R_0^{-1}(t)L),$$

con $(R_0(t), R_0^{-1}(t)L)$ denotando el levantamiento horizontal del camino base $\Pi(t)$ con respecto a la conexión (2.11) y $\theta(t)$ una solución de la ec. (2.12). Por otro lado, cuando el camino base $\Pi(t)$ es cerrado y simple para $[t_A, t_B]$, tenemos una fase unívocamente definida determinada por la fórmula (2.13). Luego, dada una solución en $[t_1, t_2]$, podemos hallar la *fase total* sumando las fases intermedias que corresponden a sub-intervalos temporales $[t_i, t_{i+1}]$ para los cuales la solución es un *arco abierto simple* o bien, una *curva cerrada simple* en $S_{\parallel\Pi\parallel}^2$. En el primer caso, la fase está definida por

$$R(t_{i+1}) = exp(\theta(t_{i+1})\frac{\hat{L}}{\|L\|})Par(R(t_i))$$

con $Par : \pi^{-1}(\Pi(t_i)) \longrightarrow \pi^{-1}(\Pi(t_{i+1}))$ denotando el transporte paralelo (ver [15]) en el fibrado U(1)-principal $J^{-1}(L) \xrightarrow{\pi} S^2_{||\Pi||}$ de la condición inicial $R(t_i)$ y $\theta(t)$ la correspondiente solución de (2.12) con $\theta(t_i) = 0$. En el segundo caso, una vez fijado el valor inicial $R(t_i)$, la fase está definida por $R(t_{i+1}) = exp(\theta_M \hat{L}) R(t_i) \operatorname{con} \theta_M$ dado por la fórmula (2.13).

 La energía: Como observamos anteriormente, en general, la energía cinética no es una cantidad conservada durante el movimiento de un cuerpo auto-deformante. Sin embargo, conocer la evolución temporal de la energía cinética T(d/dt(Rd₀)) nos permite especificar un subconjunto específico de S²_{||Π||} en el cual la correspondiente solución Π(t) vive. Esta afirmación puede ser formalizada como sigue: definamos, para cada t,

$$\begin{aligned} E_t &: \quad S^2_{\|\Pi\|} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: \quad \Pi \longmapsto \frac{1}{2} \Pi \cdot I^{-1}(d_0(t)) \ \Pi \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$E_t(\Pi(t)) = T(\frac{d}{dt}(Rd_0)(t)) - T(\frac{d}{dt}d_0(t)) + \frac{1}{2}L(\dot{d}_0(t)) \cdot I^{-1}(d_0(t))L(\dot{d}_0(t))$$

para $\Pi(t)$ una solución de (2.9). En este caso, la correspondiente solución $\Pi(t)$ en la esfera, a tiempo t, debe pertenecer al conjunto

$$E_t^{-1}(k(t)) \cap S_{\|\Pi\|}^2$$

donde

$$k(t) = T(\frac{d}{dt}(Rd_0)(t)) - T(\frac{d}{dt}d_0(t)) + \frac{1}{2}L(d_0(t)) \cdot I^{-1}(d_0(t))L(d_0(t)).$$

Los conjuntos de nivel $E_t^{-1}(k(t))$ son *elipsoides* (generalmente rotados) para cada $k \ge 0$ y cada t. Observemos también que, para un tiempo fijo t_i , la intersección $E_{t_i}^{-1}(k(t_i)) \cap S_{\|\Pi\|}^2$ define el conjunto al cual pertenecería el momento angular (referido al cuerpo) de un cuerpo rígido con tensor de inercia constate igual a $I(d_0(t_i))$ y con energía $k(t_i)$. Finalmente, la ecuación que rige la evolución de $E_t(\Pi(t))$ es

$$\frac{d}{dt}E_t(\Pi(t)) = [\Pi(t) \times I^{-1}(d_0(t))\Pi(t)] \cdot I^{-1}(d_0(t))L(d_0(t)) + \frac{1}{2}\Pi(t) \cdot \frac{d}{dt}[I^{-1}(d_0(t))]\Pi(t),$$

la cual está acoplada a la ecuación (2.9) para $\Pi(t)$.

• La longitud de arco: para un dado intervalo temporal cerrado $[t_1, t_2]$, daremos cotas para la longitud de la curva imagen $\Pi([t_1, t_2])$. Para ello, notamos que

$$\left\| \frac{d}{dt} \Pi(t) \right\| = \left\| \Pi \times (I^{-1}(d_0(t))(\Pi - L(\dot{d}_0(t)))) \right\|$$

$$\leq \|\Pi\| \left(\|I^{-1}(d_0(t))\Pi\| + \|I^{-1}(d_0(t))L(\dot{d}_0(t)))\| \right)$$

y que, si $||I^{-1}(d_0(t))v|| \le a^{-1}(t) ||v||$ para todo $v \in \mathbb{R}^3, t \in [t_1, t_2]$, entonces

$$\left\|\frac{d}{dt}\Pi(t)\right\| \le \|\Pi\|^2 a^{-1}(t) + \|\Pi\| a^{-1}(t) \left\| L(\dot{d}_0(t)) \right\|.$$

Dado que $\|\Pi\| = \|L\| = l$ es constante, obtenemos que

$$length(\Pi([t_1, t_2])) \le l \int_{t_1}^{t_2} a^{-1}(t)(l + \left\| L(\dot{d}_0(t)) \right\|) dt.$$

Cuando $a^{-1}(t)$ toma valores pequeños (comparados con $\frac{1}{l(t_1-t_2)}$), podemos deducir que $\Pi([t_1, t_2])$ está contenido en un *pequeño parche* en la esfera $S^2_{\parallel \Pi \parallel}$.

Manteniendo la generalidad en la dependencia temporal de los parámetros $I^{-1}(d_0(t))$ y $L(\dot{d}_0(t))$, no somos capaces de caracterizar la solución $\Pi(t)$ de (2.9). Entonces, nos concentraremos en algunos casos particulares para ilustrar cómo manejar problemas concretos utilizando las herramientas arriba mencionadas.

Casos con $I(t) = diag(I_1(t), I_2(t), I_3(t))$ y $L(\dot{d}_0(t)) = 0$ para todo t.

Denotemos (1,2,3) a los ejes cartesianos de $so^*(3) \simeq \mathbb{R}^3$ y, en consecuencia, $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \in \mathbb{R}^3$. En los casos especificados en el título, las intersecciones de cada eje con la esfera $S^2_{\parallel\Pi\parallel}$ dan lugar a soluciones constantes de (2.9), ya que, en tales puntos, Π es paralelo a $I^{-1}(t)\Pi$ haciendo que el lado derecho de la ecuación (2.9) se anule.

La ecuación que dá la evolución de la energía es, en estos casos,

$$\frac{d}{dt}E_t(\Pi(t)) = \frac{1}{2}\Pi(t) \cdot \frac{d}{dt}[I^{-1}(d_0(t))]\Pi(t)$$

y la longitud de arco puede ser acotada por

$$length(\Pi([t_1, t_2])) \le l^2 \int_{t_1}^{t_2} a^{-1}(t) dt.$$

De ahora en más, analizaremos el caso particular en el que

$$I_1(t) < I_2(t) < I_3(t)$$

para todo $t \in [t_1, t_2]$. Nótese que esto es lo que ocurre (a menos de re-numeraciones de los I_i 's) para intervalos de tiempo suficientemente pequeños $[t_1, t_2]$ (siempre que el cuerpo se mantenga asimétrico en dicho intervalo). Bajo estas hipótesis, los ejes principales de los elipsoides $E_t^{-1}(k(t))$ coinciden con los ejes cartesianos elegidos en \mathbb{R}^3 y la longitud de arco resulta acotada por

$$length(\Pi([t_1, t_2])) \le l^2 \int_{t_1}^{t_2} I_1^{-1}(t) dt.$$

Fijando un tiempo t, se tiene que por cada punto de $S^2_{||\Pi||}$ pasa una solución de las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido con tensor de inercia (cte) $diag(I_1(t), I_2(t), I_3(t))$. En consecuencia, para cada t tenemos definidas las correspondientes soluciones homoclínicas (ver, ej. [16]) que están dadas por la intersección de $S^2_{||\Pi||}$ con el elipsoide de energía $k_{hom}(t) = \frac{l^2}{I_2(t)}$.

Por otro lado, dada una solución $\Pi(t) = (\Pi_1(t), \Pi_2(t), \Pi_3(t))$ de (2.9) para el intervalo $[t_1, t_2]$, con valor inicial $\Pi(t_1)$, la función $f(t) = E_t(\Pi(t))$ alcanza un máximo y un mínimo en $[t_1, t_2]$, a los que denotaremos E_{max} y E_{min} , respectivamente. Lo mismo ocurre con los valores de los momentos principales de inercia $I_i(t)$. La solución $\Pi(t)$ resulta, luego, estar contenida en la región conexa *tipo corona* R, que es la componente conexa de $\sqcup_{t \in [t_1, t_2]} E_t^{-1}([E_{min}, E_{max}]) \cap S_{||\Pi||}^2$ que contiene al valor inicial $\Pi(t_1)$.

Podemos probar los siguientes resultados sobre el comportamiento cualitativo de $\Pi(t)$:

1. Si $E_{min} > \frac{l^2}{I_{2_{min}}}$, entonces, R está completamente contenido, o bien, en el semiespacio $\Pi_1 > 0$, o bien en $\Pi_1 < 0$. En este caso, $\Pi(t)$ en $S^2_{\parallel\Pi\parallel}$ orbita dando vueltas alrededor del eje cartesiano 1. Más precisamente, si el punto inicial pertenece a la componente (digamos) $\Pi_1 > 0$, entonces la solución permanecerá en la misma para todo t en $[t_1, t_2]$. Luego, si consideramos las coordenadas esféricas (θ, φ)

$$\Pi_{1} = l \cos\theta$$
$$\Pi_{2} = l \sin\theta \cos\varphi$$
$$\Pi_{3} = l \sin\theta \sin\varphi$$

con $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, se deduce que $\theta(t) < \frac{\pi}{2}$ para todo t en $[t_1, t_2]$. De la ecuación (2.9), se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\varphi = \cos\theta \left[I_2^{-1}(t) - I_1^{-1}(t) + (I_3^{-1}(t) - I_2^{-1}(t)) \sin^2\varphi\right]$$
(2.14)

con lo cual, siendo $I_1(t) < I_2(t) < I_3(t)$, $\varphi(t)$ resulta ser una función monótonamente decreciente del tiempo, demostrando que $\Pi(t)$ tiende a dar vueltas alrededor del eje 1.

- 2. Si $E_{max} < \frac{l^2}{I_{2max}}$, R está contenido en $\Pi_3 > 0$ o en $\Pi_3 < 0$. En este caso, $\Pi(t)$ en $S^2_{\|\Pi\|}$ tiende a orbitar alrededor del eje cartesiano 3, de manera análoga al caso anterior.
- 3. En cualquier otro caso, la solución puede pasar de orbitar alrededor de un eje a orbitar alrededor de otro. Para probar esto, supongamos que, inicialmente, $E_{t_1}(\Pi(t_1)) > \frac{l^2}{I_{2_{min}}}$ y que I_1 se mantiene constante. Luego, $length(\Pi([t_1, t_2])) \leq l^2 I_1^{-1}(t_2 - t_1)$ y, entonces, podemos elegir I_1 de manera que $\Pi([t_1, t_2])$ resulte estar contenido en un pequeño parche de $S^2_{||\Pi||}$. En el caso en que I_2 es también constante pero $I_3(t)$ crece (nótese que el orden de los momentos de inercia se mantiene en el tiempo), tenemos que

$$\frac{d}{dt}E_t(\Pi(t)) = \Pi_3^2(t)\frac{d}{dt}I_3^{-1}(t) < 0.$$

En consecuencia, podemos hacer que la energía decrezca tan rápido como queramos al hacer que $I_3(t)$ crezca suficientemente rápido. En esta situación, $E_{t_2}(\Pi(t_2))$ puede hacerse más pequeña que $\frac{l^2}{I_{2_{min}}}$, con lo cual, la solución es capaz de pasar del régimen (1) al (2), ambos descriptos arriba, cuando la energía cruza la línea de energía homoclínica $\frac{l^2}{I_{2_{min}}}$.

Observación 2.4.1. (Tiempo de retorno) En cualquiera de los casos (1) o (2), podemos dar una cota inferior al (primer) tiempo de retorno $\Delta T = t_2 - t_1$ para el cual $\Pi(t_1) = \Pi(t_2)$. Si suponemos que la solución que empieza en $\Pi(t_1)$ satisface las hipótesis de (1) y que retorna a dicho valor, por primera vez, en el tiempo t_2 , luego

$$\Delta T = t_2 - t_1 \ge \frac{2\pi \|\Pi(t_1) \times (1, 0, 0)\|}{l^2 I_{1_{max}}^{-1}}.$$

El caso que corresponde a (2) es análogo.

Ahora, supongamos que estamos en el caso descripto en (1) ((2) es análogo) y que, para algún intervalo $[t_i, t_{i+1}] \subseteq [t_1, t_2]$, la solución $\Pi(t)$ define una curva cerrada simple en $S^2_{||\Pi||}$. En estas condiciones, podemos aplicar la fórmula (2.13) para encontrar la fase correspondiente. Teniendo en cuenta la orientación temporal de la solución cerrada $\Pi(t)$ (fijada por (2.14)), cuando $\frac{area(\tilde{D})}{l^2} < 2\pi$ (resp. $> 2\pi$) se debe considerar el signo + (resp. -) en (2.13) y llegamos a que

$$\pm \frac{area(\tilde{D})}{l^2} + \frac{2}{l} E_{min} (t_{i+1} - t_i) \le \theta_M \le \pm \frac{area(\tilde{D})}{l^2} + \frac{2}{l} E_{max} (t_{i+1} - t_i).$$
(2.15)

Observación 2.4.2. (Acotando $\theta_M \mod 2\pi$) Nótese que, dado que θ_M está definido mod. 2π , las cotas de arriba contienen información no-trivial cuando $\frac{2}{l} (E_{max} - E_{min}) (t_{i+1} - t_i) < 2\pi$.

2.4.2 Ejemplos

En esta sección, aplicaremos las técnicas descriptas en la anterior a fin de obtener estimaciones sobre el movimiento de cuerpos deformables simples.

Ejemplo 2.4.3. (Expansión/contracción global de un cuerpo) En este caso, supondremos que el cuerpo se está achicando o expandiendo globalmente, esto es, que la posición de una partícula cualquiera desde el sistema de referencia \tilde{S} es

$$r_{i_0}(t) = a(t)r_{i_0}$$

donde r_{i_0} es un vector constante y a(t) un factor de escala siempre positivo. Esto implica que podemos escoger la curva $d_0(t)$ en Q de la siguiente manera

$$I(d_0(t)) = a^2(t)I_0$$

siendo I_0 el tensor de inercia que corresponde a la configuración constante de los $\{r_{i_0}\}$. Por medio de una rotación constante, podemos elegir el sistema de referencia \tilde{S} (equivalentemente, otra curva $d_0(t)$) de modo que I_0 resulte diagonal. Luego, la ec. (2.9) en la esfera se reduce a

$$\frac{d}{dt}\Pi = a^{-2}(t)(\Pi \times I_0^{-1}\Pi).$$

Dado un valor inicial $\Pi(t_1 = 0)$, esta ecuación (2.9) puede ser exactamente resuelta dando

$$\Pi(t) = \Pi_{RB}(\int_0^t a^{-2}(s) \ ds),$$

con Π_{RB} denotando la solución de cuerpo rígido a las ecuaciones de Euler $\dot{\Pi} = \Pi \times I_0^{-1} \Pi$ con condición inicial $\Pi(t_1 = 0)$. Ahora, es fácil ver que la función

$$f(\Pi) = \frac{1}{2}\Pi \cdot I_0^{-1}\Pi$$

es constante a lo largo de las soluciones. Nótese que $\Pi(t)$ describe una curva cerrada simple en la esfera para $t \in [0,T]$ cuando $\int_0^T a^{-2}(t) dt = T_{RB}$ coincide con el período de la solución de cuerpo rígido Π_{RB} . En tal caso, la correspondiente fase es

$$\theta_M = -\Lambda_{RB} + \frac{2}{\|L\|} f(\Pi) \int_0^T a^{-2}(t) dt$$

= $-\Lambda_{RB} + \frac{2}{\|L\|} f(\Pi) T_{RB}$

donde Λ_{RB} es el ángulo sólido (orientado) subtendido por la solución periódica de cuerpo rígido Π_{RB} que tiene energía asociada $f(\Pi)$. Obsérvese que esta fase coincide con la fase del cuerpo rígido ([19]) asociada a Π_{RB} . El movimiento de este tipo de cuerpos con tamaño variable es similar al movimiento de un cuerpo rígido a menos de una reparametrización temporal, la cual es inducida por la expansión/contracción.

Ejemplo 2.4.4. (Expansión/contracción de un cuerpo axialmente simétrico) Consideremos el caso de un cuerpo axialmente simétrico que se expande en la dirección de su eje de simetría, i.e., el caso en el cual la deformación puede ser descripta por una curva $d_0(t)$ en Q tal que

$$I(d_0(t)) = diag(I_1(t), I_2, I_3),$$

con $I_2 = I_3$. Tal como en el caso anterior, la ec. (2.9) puede ser exáctamente resuelta:

$$\Pi(t) = \Pi_{RB} \left(\int_0^t \frac{(I_1^{-1}(s) - I_3^{-1})}{I_1^{-1}(0) - I_2^{-1}} \, ds \right),$$

con Π_{RB} la solución de cuerpo rígido a las ecuaciones de Euler $\dot{\Pi} = \Pi \times I^{-1}(d_0(t_1 = 0))\Pi$ con valor inicial $\Pi(t_1 = 0)$. La función $f(\Pi) = \frac{1}{2}\Pi \cdot I^{-1}(0)\Pi$ resulta, nuevamente, constante a lo largo de la solución $\Pi(t)$, la cual define una curva cerrada simple para $t \in [0, T]$ cuando $\int_0^T \frac{(I_1^{-1}(s) - I_3^{-1})}{I_1^{-1}(0) - I_2^{-1}} ds$ coincide con el período T_{RB} asociado a una solución periódica de cuerpo rígido Π_{RB} . En tal caso, la fase asociada es

$$\theta_M = -\Lambda_{RB} + \frac{1}{\|L\|} \int_0^T \Pi(t) \cdot I^{-1}(d_0(t)) \ \Pi(t) dt,$$

siendo Λ_{RB} el ángulo sólido (orientado) subtendido por la solución periódica de cuerpo rígido Π_{RB} correspondiente a la energía $f(\Pi)$. Nótese que, en general, esta fase difiere de la fase de cuerpo rígido asociada a Π_{RB} .

Ejemplo 2.4.5. (Un satélite desplegando una antena a lo largo de su eje principal) Finalmente, consideramos el caso en que

$$I(d_0(t)) = diag(I_1(t), I_{2_0}, I_{3_0})$$

$$I(d_0(t)) = diag(I_{1_0}, I_{2_0}, I_3(t))$$

siendo $I_1(t)$ (o $I_3(t)$) una función creciente en el tiempo. Estos casos dan un modelo simplificado para la situación en la que una antena sale de un satélite en órbita a lo largo del eje principal de inercia 1 o 3. Nótese que el satélite en órbita es libre de rotar alrededor de su centro de masa y, por lo tanto, su movimiento puede ser descripto por medio de la ecuación (2.8). Supongamos que, inicialmente, $I_1 < I_2 < I_3$. Luego, en el primer caso, dado que $I_1(t)$ crece, esta relación de órden puede dejar de mantenerse pasado algún tiempo, llevando a que la solución en la esfera pase de orbitar alrededor de un eje a hacerlo alrededor de otro. En consecuencia, no tenemos control sobre este tipo de solución. Más precisamente, dado que

$$\frac{d}{dt}E_t(\Pi(t)) = \frac{1}{2}\Pi_1^2(t)\frac{d}{dt}[I_1^{-1}(t)]$$

es negativo, la energía decrece y la solución Π puede pasar del régimen (1) al (2) de la sección anterior describiendo una curva abierta en la esfera que no podemos caracterizar en general. En cambio, en el segundo caso, el orden se mantiene y

$$\frac{d}{dt}E_t(\Pi(t)) = \frac{1}{2}\Pi_3^2(t)\frac{d}{dt}[I_3^{-1}(t)]$$

es también negativo. Dado que la energía decrece, si la el valor inicial $\Pi(t_1)$ corresponde al caso (2) de la sección anterior, la solución se mantendrá en el régimen descripto por (2) y tendremos una buena caracterización de su comportamiento. En particular, si $\Pi([t_i, t_{i+1}])$ es una curva cerrada simple, sabemos que la correspondiente rotación reconstruida $R(t_{i+1})$ es $exp(\theta_M | \frac{\hat{L}}{\|L\|}) R(t_i)$ y que por (2.15),

$$\pm \frac{area(\tilde{D})}{\|L\|^2} + \frac{2}{\|L\|} E_{min} (t_{i+1} - t_i) \le \theta_M \le \pm \frac{area(\tilde{D})}{\|L\|^2} + \frac{2}{\|L\|} E_{initial} (t_{i+1} - t_i),$$

siendo $E_{initial}$ el valor inicial (y, por ende, máximo) de la energía E_t sobre $[t_i, t_{i+1}]$ y $E_{min} = E_{t_{i+1}}$. Concluimos que una mejor descripción del movimiento del satélite es posible cuando la antena es desplegada a lo largo del mayor eje principal de inercia.

Observación 2.4.6. (Deformaciones lentas) Intuitivamente, cuando la antena es desplegada muy lentamente, el movimiento del satélite debe ser próximo al de un cuerpo rígido. Este hecho se manifiesta en que, cuando $\frac{d}{dt}[I_3^{-1}(t)]$ es muy pequeño (comparado con $\frac{l^2 E_{initial}}{(t_{i+1}-t_i)}$), $E_{min} \sim E_{initial}$ y $\frac{area(\tilde{D})}{\|L\|^2} \sim \Lambda_{RB}$. Luego, la fase θ_M es aproximadamente la misma que la fase del cuerpo rígido asociada a un cuerpo rígido con $I = I(d_0(t_i))$ y momento inicial $\Pi(t_i)$. **Observación 2.4.7.** (Cuerpos pequeños en el campo gravitatorio) Para un cuerpo, v.g. un satélite orbitando la Tierra, que es pequeño con respecto a la distancia de interacción con otro cuerpo (v.g. la Tierra), es una muy buena aproximación el suponer que la fuerza gravitatoria que actúa sobre una partícula, de masa m_i , de las que componen este cuerpo es

$$F_i = m_i \; \frac{-G \; M}{(r_{CM} - P)^3} (r_{CM} - P)$$

donde r_{CM} denota la posición del centro de masa del cuerpo. P y M denotan la posición del centro de masa y la masa total del segundo cuerpo (e.g. la Tierra), respectivamente. Vemos, luego, que las ecuaciones de movimiento para la posición del centro de masa (un problema de *fuerzas centrales*) quedan totalmente desacopladas de las ecuaciones de movimiento para la rotación alrededor del centro de masa (un problema de *cuerpos auto-deformantes* como el del ejemplo 2.4.5).

Capítulo 3

Fases en sistemas controlados y sujetos a vínculos

Este capítulo está basado en el artículo [7].

3.1 Introducción

En este capítulo, describiremos un formalismo que permite estudiar sistemas mecánicoclásicos en los cuales algunos de los grados de libertad están siendo *controlados*, es decir, que son funciones conocidas del tiempo. Trabajaremos bajo la hipótesis (geométrico-diferencialcinemática) de que las variables controladas viven en la base B de un fibrado principal $Q \longrightarrow Q/G = B$, siendo Q un espacio de configuraciones total genérico. Puede pensarse, entonces, que las restantes variables corresponden a las del grupo de Lie G. Las ecuaciones de movimiento para estas incógnitas de las fibras serán derivadas asumiendo que el movimiento total debe respetar ciertos vínculos no-holónomos (generales) a los que el sistema está sometido.

Un caso particular de tales sistemas está dado por aquellos en los que la aplicación momento asociada a la G-simetría dá cantidades conservadas, incluso en presencia de las fuerzas de control que actúan sobre dichos sistemas. En tal caso, es claro que el movimiento dado en la base debe inducir movimiento en las fibras a fin de que el momento se mantenga constante durante la evolución total resultante. Un ejemplo concreto de estos sistemas está dado por un cuerpo auto-deformante cuya forma variable (variables de la base) es conocida y cuya reorientación en el espacio (incógnitas en G = SO(3)) es inducida por el cambio en la forma, de modo que el correspondiente momento angular (espacial) permanezca constante, como fue descripto en [6] y el capítulo anterior 2.

En este capítulo, consideraremos situaciones más generales, en las que el movimiento en las fibras puede ser inducido por el de la base debido a la presencia de vínculos noholónomos (lineales o afines). Estos vínculos son representados por medio de una distribución $D \subset TQ$ ([5, 9]), que no es integrable en general, y nos referiremos a ellos como a los D-vínculos. La evolución conocida de las variables de la base está representada por una curva base $\tilde{c}(t) \in B$ o, equivalentemente, por una curva $d_0(t) \in Q$ que se proyecta sobre \tilde{c} . La curva $c(t) = g(t) \cdot d_0(t) \in Q$ que describe la evolución total del sistema queda definida al requerir que se proyecte sobre \tilde{c} (i.e. que las variables de la base sigan la evolución conocida) y que cumpla con las correspondientes ecuaciones de movimiento y con los D-vínculos. Como en el capítulo anterior, la hipótesis de control sobre las variables de la base puede ser vista como un conjunto de vínculos (cinemáticos) dependientes del tiempo y $g(t) \in G$ como la incógnita en la fibra que es d_0 -dependiente (o, gauge-dependiente, ver la sección 3.2.4).

Las ecuaciones para la evolución de g(t) pueden ser derivadas al asumir ciertas hipótesis dinámicas (sec. 3.2.2), esto es, ciertas hipótesis sobre la naturaleza de las fuerzas que están actuando sobre el sistema. Por medio de técnicas variacionales, en la sección 3.2, derivaremos explícitamente dichas ecuaciones de movimiento. Éstas corresponden a las ecuaciones del momento no-holónomo de [5] con coeficientes que dependen del tiempo a través de $d_0(t)$. Haciendo uso de la estructura cinemática del sistema, en las secciones, 3.2.4 y 3.4.1, deduciremos que la solución c(t) puede factorizarse al considerar gauges $d_0(t)$ específicos. De los dos factores, uno tiene una definición puramente geométrica (cinemática) mientras que el otro una dinámica que involucra ecuaciones que son más simples que las que, a priori, corresponden al movimiento general en la fibra.

En la sección 3.3, llevaremos a cabo un análisis detallado de sistemas con una estructura cinemática especial, concentrándonos en la factorización geométrico-dinámica arriba mencionada. Más aún, en la sección 3.4, probaremos que, en circunstancias cinemáticamente favorables (v.g. en presencia de simetrías horizontales [5]), el factor dinámico g(t) de la solución $c(t) \in Q$ admite una nueva factorización. De hecho, escribiremos fórmulas asociadas a fases de reconstrucción [15] que presenta g(t). Estas fórmulas de fases relacionan la evolución total del sistema mecánico con la geometría y dinámica de soluciones intermedias que son más simples y viven en espacios más pequeños (órbitas coadjuntas). En este sentido, dichas fórmulas generalizan las ya obtenidas en [19] y [6] para cuerpos rígidos y cuerpos auto-deformantes, respectivamente, al campo de los sistemas cuyo movimiento es inducido por la presencia de D-vínculos.

Vale la pena observar que lo interesante (y la utilidad) de las fórmulas de fase radica en que la contribución dinámica a tal fase puede ser expresada en términos de algunas de las magnitudes dinámicas asociadas al sistema, como la energía y/o tiempos característicos (ver, por ejemplo, la fórmula de [19]). Esta meta es alcanzada en el marco general en la sección 3.4 y ejemplificada en 3.5.

El formalismo presentado en este capítulo para el estudio de sistemas controlados y sujetos a D-vínculos se aplica a una clase de sistemas mecánicos que es más grande que la que fue estudiada en [6] y el capítulo anterior. En primer lugar, se aplica a sistemas con un espacio de configuraciones general Q munido de una estructura de fibrado G-principal¹. En segundo lugar, permite que D-vínculos, y no sólo la conservación del momento, goviernen la dinámica del sistema. De hecho, en los ejemplos 3.5.3 y 3.5.4, seremos capaces de responder dos preguntas que, naturalmente, surgen de [6]: ¿qué sucede con las fórmulas de fase para un cuerpo que se deforma cuando éste se encuentra en presencia de fuerzas externas del tipo magnéticas y, por lo tanto, cuando el momento angular deja de conservarse?; ¿cómo es que un cuerpo auto-deformante se mueve cuando las variables correspondientes a la forma están sujetas a vínculos no-holónomos adicionales y, en consecuencia, dejan de ser arbitrariamente controlables?

Para concluir esta introducción, comentaremos sobre la relación entre los temas tratados en este capítulos y la teoría de control de sistemas mecánicos. Antes que nada, obsérvese que los problemas de control son, en cierto sentido, *ortogonales* a los que hemos descripto hasta ahora. En este capítulo, decimos *conocer* la evolución de las variables de la base y queremos *encontrar* el movimiento inducido en la fibra; mientras que, en la teoría de control, se *empieza* con una dinámica deseada en la fibra y se *busca encontrar* cuál es la curva base que la induce (y, luego, cómo implementar dicho movimiento en la base a través de fuerzas de control). Sin embargo, el espíritu de este capítulo es pensar que la dinámica conocida en la base proviene de la observación directa o de mediciones efectuadas sobre el sistema (el ejemplo 3.5.3 ilustra claramente este punto).

De hecho, una característica que vuelve interesante a esta clase de sistemas es $^{-1}$ Nótese que en [6], Q representaba exclusivamente el espacio de configuraciones de un cuerpo que se deforma.

que la evolución total c(t) puede ser deducida partiendo, solamente, de la cinemática en la base $\tilde{c}(t)$, sin necesidad de conocer cuantitativamente las fuerzas que están implementando tal movimiento contolado. Luego, los resultados que obtenemos en este capítulo sobre el movimiento inducido en la fibra pueden ser usados para la corrección teórica de una dinámica en la fibra predicha a priori, cuando la dinámica observada en la base se desvía de la deseada con respecto a la teoría de control. Por otro lado, las fórmulas de fase analíticas representan herramientas interesantes para someter a prueba diferentes métodos y estrategias de control.

3.2 Sistemas controlados sujetos a vínculos no-holónomos

3.2.1 La cinemática de los sistemas controlados

En lo que resta del capítulo, nos concentraremos en sistemas con vínculos noholónomos lineales (o afines, ver la sección 3.3.2). Nuestro punto de partida consiste en un sistema mecánico definido por los datos (Q, L, G, D):

- Sea Q el espacio de configuraciones y G un grupo de Lie de simetrías que actúa por izquierda sobre Q definiendo un fibrado G−principal Q → Q/G. Nos referiremos, como es usual, a B := Q/G como al espacio de formas ([20]). Denotaremos la G−acción mediante g · q y la G−acción infinitesimal como ρ_{g*} : TQ → TQ.
- Sea k_q(·, ·) una métrica Riemanniana G−invariante en Q y k_q(·) : T_qQ → T^{*}_qQ el isomorfismo de fibrados que ésta induce.
- Sea L: TQ → R un lagrangiano G-invariante (con respecto a la G-acción infinitesimal sobre TQ) dado por la (k_q-)energía cinética menos potenciales G-invariantes en Q (véase también A.1).
- Sea $D \subseteq TQ$ una distribución de vínculos.

Además, asumiremos:

(H1) D es G-invariante y $D_q + V_q = T_q Q$, para todo $q \in Q$ con $Ver_q = Ker(\pi_{*q})$ denotando el subespacio vertical de $T_q Q$. Este caso se conoce como el caso principal [5]. Ahora, supongamos que, en un tal sistema, las variables de la base están siendo controladas de manera conocida. Esto se traduce en que

(H2) conocemos una curva $d_0(t)$ en Q para $t \in I := [t_1, t_2]$ o, equivalentemente, una función $\tilde{c} : [t_1, t_2] \longrightarrow Q/G$ tal que $\pi(d_0(t)) = \tilde{c}(t)$. La evolución temporal del sistema controlado deberá estar descripta por una curva $c(t) \in Q$ tal que

$$\pi(c(t)) = \tilde{c}(t)$$

para cada $t \in [t_1, t_2]$.

Esto último implica que

$$c(t) = g(t) \cdot d_0(t) \tag{3.1}$$

para una curva $(d_0(t)$ -dependiente) g(t) en G a determinar.

Definición: Nos referiremos al conjunto de datos (Q, L, G, D, \tilde{c}) como a un sistema mecánico base-controlado sujeto a D-vínculos.

La curva g(t) es la *incógnita* de nuestro problema mecánico parcialmente controlado, tal como lo hemos planteado arriba. Nótese que, si dicho problema tiene una única solución para cada valor inicial $(c(t_1), \dot{c}(t_1)) \in T_{c(t_1)}\pi^{-1}(\tilde{c}(t_1))$, luego, para cada curva $d_0(t)$ en Q que se proyecta sobre $\tilde{c}(t) \in Q/G$, existe un único g(t) satisfaciendo (3.1). En este caso, la posición inicial de la incógnita en G debe satisfacer

$$c(t_1) = g(t_1) \cdot d_0(t_1). \tag{3.2}$$

La curva $d_0(t)$ será llamada elección de gauge o, simplemente, gauge. Esta terminología está motivada por la analogía que puede establecerse entre la libertad de elección de una tal curva que se proyecte sobre \tilde{c} en el espacio de las formas y la libertad de gauge en el contexto de las teorías de campos clásicas (ver [20], [24], sus referencias y la sección 3.2.4).

Observación 3.2.1. (Espacio de configuraciones restringido) Nótese que (H2) implica (pero no es equivalente a) el siguiente vínculo holónomo:

$$c(t)\in\pi^{-1}(\tilde{c}(I)).$$

En un problema específico en el que \tilde{c} fue fijado, es posible restringir el análisis a $\tilde{Q} = \pi^{-1}(\tilde{c}(I))$. Sin embargo, en lo que sigue, continuaremos con el estudio de \tilde{c} 's genéricos y, en consecuencia, expresaremos nuestros resultados en términos de la estructura cinemática del espacio total Q. Obsérvese que este proceder resulta ser el más conveniente a la hora de estudiar sistemas en los que \tilde{c} puede estar sujeto a *perturvaciones* (en el sentido dinámico).

Observación 3.2.2. (D-vinculos verticales) La hipótesis dimensional (H1) implica que los D-vinculos son verticales, en el sentido de que las ecuaciones de movimiento llevadas (localmente) a la base Q/G no presentan rastros de los D-vinculos. En otros términos, la curva base $\tilde{c}(t)$ puede ser elegida arbitrariamente dentro de Q/G. Por ejemplo, cuando la suma de subespacios es directa, i.e., $D_q \oplus V_q = T_q Q$, D define una conexión principal y nos encontramos en el caso puramente cinemático de [5] (ver sección 3.4.3), en el que c(t) es siempre el levantemiento horizontal de la curva arbitraria en la base. En el caso en que $D_q \cap V_q = 0$ pero $D_q \oplus V_q \neq T_q Q$, los vínculos también afectan el movimiento de las variables de la base y, entonces, dicha dinámica en la base puede dejar de ser arbitrariamente controlable.

Algunos ingredientes cinemáticos

En esta sección, recordaremos algunas definiciones y propiedades conocidas que usaremos luego a lo largo del capítulo.

En primer lugar, recordemos que para sistemas mecánicos simples con simetría ([1, 16]) como los que estamos considerando, la G-acción levantada a TQ siempre tiene una aplicación momento equivariante $J: TQ \longrightarrow g^*$ dada por

$$\langle J(v_q), X \rangle = \langle k_q(v_q), X_Q(q) \rangle,$$

para $X \in \mathfrak{g}$. Otros ingredientes a utilizar son (ver, por ejemplo, [20]):

• Tensor de inercia (locked) $I_q : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$,

$$I_q = \sigma_q^* \circ k_q \circ \sigma_q$$

donde $\sigma_q : \mathfrak{g} \longrightarrow T_q Q$ denota la aplicación que dá los generadores infinitesimales, $\sigma_q(X) = X_Q(q)$. Dado que la métrica k_q es *G*-invariante, *I* satisface la siguiente propiedad de equivarianza:

$$I_{g \cdot q} = Ad_g^* \circ I_q \circ Ad_{g^{-1}}.$$

• El momento J es Ad^* -equivariante, i.e.,

$$J(g \cdot m) = Ad_q^*J(m)$$

con $Ad_g^* = (Ad_{g^{-1}})^t$ denotando la *representación (izquierda) coadjunta* de G en \mathfrak{g}^* y ^t la transposición. Esto se deduce de la identidad

$$\sigma_{g \cdot q}(X) = \rho_{g_*q}(\sigma_q(Ad_{g^{-1}}X)).$$

Ahora, por (3.1) se tiene que

$$\frac{d}{dt}c(t) = \rho_{g(t)_*d_0(t)}(\sigma_{d_0(t)}(g^{-1}\frac{d}{dt}g(t))) + \rho_{g(t)_*d_0(t)}\frac{d}{dt}d_0(t)$$
(3.3)

y, luego,

$$J(\frac{d}{dt}c(t)) = Ad_{g(t)}^* I_{d_0(t)}(g^{-1}\frac{d}{dt}g(t)) + Ad_{g(t)}^* J(\frac{d}{dt}d_0(t)).$$
(3.4)

Siguiendo lo expuesto en el capítulo anterior, podemos pensar que $J_0(t) := J(\frac{d}{dt}d_0(t))$ es un momento *interno o aparente* evaluado sobre $d_0(t)$ y que $I_0(t) := I_{d_0(t)}$ es el tensor de inercia variable que se vería durante el movimiento representado por el gauge $d_0(t)$.

3.2.2 Hipótesis dinámicas

La hipótesis (H2) mencionada más arriba puede ser interpretada como un conjunto de vínculos cinemáticos dependientes del tiempo a los que el sistema original está sujeto, que se suman a los que están representados por la distribución $D \subseteq TQ$. Como fue discutido en 1.1.1, para poder determinar el movimiento de un tal sistema (sujeto a dos conjuntos de vínculos), es decir, para encontrar $c(t)^2$ en Q, es necesario incorporar información sobre la dinámica física del sistema. Esta información consiste en conocer la naturaleza de las fuerzas que están actuando sobre el sistema a fin de implementar los vínculos cinemáticos.

Para el conjunto de D-vínculos, asumiremos

(DH1) Principio de D 'alambert: Las fuerzas de D-vínculo hacen trabajo virtual nulo. En otros términos, pertenecen al espacio anulador de la distribución D.

Si denotamos $F^D : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ a estas D-fuerzas (vistas como 1-formas en Q) que están haciendo que el sistema cumpla los D-vínculos, (DH1) dice que

$$F^D(v) = 0$$

²Equivalentemente, una vez que fijamos el gauge $d_0(t)$, encontrar el correspondiente g(t) in G.

para todo desplazamiento virtual $v \in D \subset TQ$. Cuando las fuerzas que actúan sobre el sistema no satisfacen (DH1), debemos conocer las D-fuerzas³ para poder incluirlas en las ecuaciones de movimiento (ver la observación 3.2.4).

Para los vínculos *tipo control* representados por la curva base $\tilde{c}(t) \in Q/G$, la hipótesis toma una forma menos usual:

(DH2) Las fuerzas que hacen que c(t) cumpla $\pi(c(t)) = \tilde{c}(t)$ son de una clase que llamaremos propiamente internas. Las fuerzas propiamente internas, vistas como 1-formas en $Q, F_{int}^c : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$, deben satisfacer

$$F_{int}^c(\delta c) = 0$$

para toda variación vertical⁴ $\delta c = \frac{d}{ds}|_{s=0} (g(t,s) \cdot d_0(t))$ y todo gauge $d_0(t)$.

En otras palabras, las fuerzas propiamente internas son aquellas que no afectan dinámicamente (i.e. agregando términos adicionales) la parte *vertical* de las ecuaciones del sistema (Q, L, G, D). Esta idea puede encontrarse en [5], pero en términos de la validez de las ecuaciones del momento no-holónomo en presencia de fuerzas de control internas que actúan sobre las variables de la base.

Ejemplo 3.2.3. (La dinámica de cuerpos auto-deformantes) Sea $Q = \mathbb{R}^{3N-3}$ el espacio de configuraciones de un sistema de N partículas que sirve como modelo para un cuerpo que se deforma. En tal caso, las fuerzas internas usuales entre las partículas del sistema que, además, satisfacen el principio de acción-reacción fuerte ([11]) son fuerzas propiamente internas. Los detalles pueden encontrarse en [6] y en el capítulo anterior.

Observación 3.2.4. (Fuerzas no-propiamente internas) Si las fuerzas de vínculo actuando sobre las variables controladas de la base no son propiamente internas, debemos incluir la pieza extra de información faltante, ésta es, cómo hay que modificar las ecuaciones para incluir los términos no-nulos $F^{c}(\delta c)$ (ver la observación 3.2.4 más abajo). En el caso del ejemplo anterior, esta situación puede darse si, por ejemplo, hay fuerzas electromagnéticas actuando sobre el cuerpo que se deforma. Estas fuerzas pueden no satisfacer el principio de acción-reacción fuerte, con lo que debe conocerse el campo magnético subyacente a fin

³O bien, alguna otra información sobre ellas que nos permita llegar a las ecuaciones de movimiento.

⁴Si el sistema está sujeto a *D*-vínculos adicionales como es nuestro caso, sólo necesitamos que las fuerzas internas se anulen sobre las variaciones δc que son verticales y que además satisfacen los vínculos $\delta c \in D$.

de corregir, como es bien sabido, la ecuación de conservación del momento angular (ver e.g. [11], y las secciones 3.4.5 y 3.5.4).

Con vistas a la implementación del control sobre la base, las ecuaciones correspondientes a (DH1) y (DH2) para las variables $r \in B = Q/G$ pueden llevarse, localmente, a la forma (ver los detalles en [5])

$$M(r)\ddot{r} = -C(r,\dot{r}) + N(r,\dot{r},J(g,\dot{g})) + F^{pot} + F^{c}_{int}$$

donde g denota la parte vertical de las variables en la descomposición local $Q \simeq Q/G \times G$, J el momento (generalizado, no-holónomo), F^{pot} las fuerzas potenciales actuando sobre B y F_{int}^c las fuerzas de control mencionadas en (DH2). Además, M denota la matriz de masa del sistema, C el término de Coriolis (cuadrático en \dot{r}) y N un término que es cuadrático en \dot{r} y $\langle J, \xi \rangle$, siendo ξ un elemento q-dependiente de $\mathfrak{g} = Lie(G)$.

En lo que sigue, asumiremos que la base del sistema está siendo controlada, de manera que las fuerzas de control F_{int}^c (que no conocemos) están induciendo, por medio de la ecuación anterior, el movimiento prefijado $\tilde{c}(t) \equiv r(t)$. El problema consiste, luego, en encontrar la parte vertical del movimiento (i.e. g(t)), la cual es inducida por dinámica en la base debido a la presencia de los D-vínculos.

3.2.3 El principio variacional

Las ecuaciones de movimiento para nuestro sistema controlado y sujeto a D-vínculos, asumiendo (H1, 2) y (DH1, 2), pueden ser deducidas de un *principio variacional* adaptado.

Explícitamente, supondremos que la curva solución c(t) es un *extremo* de las funcional acción

$$S_Q = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{c}) dt$$

para deformaciones del siguiente tipo:

$$c(t,s) = g(s) \cdot c(t). \tag{3.5}$$

Este tipo de deformaciones puede ser llamado vertical, si seguimos las ideas de [9]. También siguiendo a [9] y por (DH1), restringimos las variaciones a las que satisfacen los D-vinculos, i.e., $\delta c \in D_{c(t)}$.

Sea $I := [t_1, t_2]$ y denotemos $\Omega(Q; \tilde{c}(t), q_1, q_2)$ al espacio de curvas suaves $c : I \longrightarrow Q$, con extremos $q_1, q_2 \in Q$ fijos, tales que $\pi(c(t)) = \tilde{c}(t)$. Nótese que, dada una elección de gauge $d_0(t)$, con $\pi(d_0(t)) = \tilde{c}(t)$, cualquier deformación vertical puede ser escrita como

$$c(t,s) = g(t,s) \cdot d_0(t),$$
 (3.6)

con lo que

$$\Omega(Q; \tilde{c}(t), q_1, q_2) \approx \Omega_{d_0}(G; g_1, g_2)$$

donde $\Omega_{d_0}(G; g_1, g_2)$ representa el espacio de curvas suaves $g: I \longrightarrow Q$ con extremos g_i fijos tales que $g_i \cdot d_0(t_i) = q_i$ para i = 1, 2.

En conclusión, nuestro problema puede ser formulado de la siguiente manera (invariante de gauge):

P1 (Formulación invariante de gauge) Debemos encontrar un extremo c(t) para la acción S_Q , i.e. $\delta S_Q = 0$, entre las curvas de $\Omega(Q; \tilde{c}(t), q_1, q_2)$ y para deformaciones verticales $\delta c(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} c(t,s)$, inducidas por (3.5), con extremos fijos, i.e. $\delta c(t_i) = 0$ para i = 1, 2, y con ambos $\dot{c}(t)$ y δc satisfaciendo los D-vínculos.

Una vez fijado el gauge, la acción S induce un sistema *lagrangiano no-autónomo*, equivalente, sobre G que puede ser formulado de la siguiente manera:

P2 (Formulación covariante de gauge) debemos encontrar un extremo g(t) entre las curvas $\Omega_{d_0}(G; g_1, g_2)$ para la acción

$$S_G[d_0] = \int_{t_1}^{t_2} L_{d_0}(g, \dot{g}, t) dt$$

i.e., un extremo tal que $\delta S_G[d_0] = 0$, satisfaciendo los D-vínculos inducidos

$$d_0(t) + (g^{-1}\dot{g})_Q(d_0(t)) \in D_{d_0(t)}$$
(3.7)

y para variaciones $\delta g(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g(t,s), \ \delta g(t_i) = 0, \ i = 1,2$ que también satisfacen los D-vínculos:

$$\left(g^{-1} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} g\right)_Q (d_0(t)) \in D_{d_0(t)}.$$
(3.8)

Obsérvese que, a pesar de que diferentes elecciones de gauge inducen una dependencia temporal distinta en las ecuaciones para g(t), la solución total c(t) es la misma para todo d_0 . En otras palabras, aunque las ecuaciones para g(t) (y, por ende, g(t) mismo) no son *invariantes de gauge*, la solución c(t) sí lo es. Por otro lado, g(t) puede ser visto como covariante de gauge (ver la observación 3.2.5).

En la formulación (P2), L_{d_0} es L(c) con c(t) dado por (3.1). Es fácil ver que este lagrangiano coincide con el siguiente, que es G-invariante (por izquierda) y no-autónomo,

$$L_{d_0}(g, \dot{g}, t) = \frac{1}{2} k_{d_0}(\dot{d_0}, \dot{d_0}) + \frac{1}{2} \langle I(d_0(t))\xi, \xi \rangle + \left\langle J(\dot{d_0})(t), \xi \right\rangle$$

siendo $\xi = g^{-1}\dot{g}, I(d_0(t)) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el tensor de inercia evaluado sobre $d_0, y J : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ la aplicación momento (recordemos la sección 3.2.1).

Finalmente, nótese que las variaciones $\delta \xi = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (g^{-1}g)$ inducidas por variaciones en $\delta g = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g(t,s)$ cumplen la siguiente (y útil) identidad:

$$\delta\xi - \frac{d}{dt} \left(g^{-1} \delta g \right) = [\xi, g^{-1} \delta g]$$
(3.9)

para [,] denotando el corchete de Lie en g.

Observación 3.2.5. (Covarianza de gauge) La ecuación (3.7) es dependiente de gauge, en el sentido de que es diferente para diferentes elecciones de la curva de gauge $d_0(t)$. Sin embargo, dado que D es G-invariante, ésta es covariante de gauge: si $\tilde{d}_0(t) = g_{cg}(t) \cdot d_0(t)$ es otro gauge, luego g(t) en (3.1) satisface los D-vínculos (3.7) para $d_0(t)$ sii $\tilde{g}(t) := g(t)g_{cg}^{-1}(t)$ satisface la ecuación análoga a (3.7) pero para el nuevo gauge $\tilde{d}_0(t)$.

3.2.4 Las ecuaciones de movimiento

Como reflejo de la segunda ley de Newton, las ecuaciones para la incógnita g(t)serán de segundo orden (en t). Por otro lado, el vínculo dependiente del tiempo que dice cómo es la dinámica en la base B lleva a que, en general, dichas ecuaciones sean noautónomas y dependientes de gague: los coeficientes de las ecuaciones dependerán del tiempo a través de $d_0(t)$.

Comencemos con la formulación invariante de gauge (P1). Teniendo en cuenta que las variaciones son de la forma (3.5),

$$\delta S_Q = 0$$

implica directamente que

$$i_{c(t)}^{*}(\frac{d}{dt}J(\dot{c})) = 0$$
(3.10)

con $i_{c(t)}:\mathfrak{g}^{c(t)}\hookrightarrow\mathfrak{g}$ denotando la inclusión de

$$\mathfrak{g}^{c(t)} := \{ X \in \mathfrak{g}, \ X_Q(c(t)) \in D_{c(t)} \}.$$

La anterior ecuación en términos de J es equivalente a la ecuación del momento no-holónomo de [5], evaluada sobre la curva controlada c(t) dada por (3.1).

Observación 3.2.6. (Prescindibilidad de (H1) y (H2)) La ecuación (3.10) es una de las ecuaciones de movimiento de cualquier sistema cuya cinemática coincide con la dada en 3.2.1, sin necesidad de asumir (H1, 2). La única hipótesis dinámica requerida es (DH1) sumada al hecho de que cualquier otra fuerza que actue sobre el sistema (vista como 1-forma sobre Q) se anule sobre las variaciones verticales. Lo que estas hipótesis (H1, 2) agregan es: que los D-vínculos no afectan a las variables de la base y que estas variables están siendo controladas, con lo cual, (3.10) es la única ecuación de movimiento (no de vínculo) que queda por resolver en el sistema.

La ec. (3.10) son $k := \dim \mathfrak{g}^{c(t)} = \dim \mathfrak{g}^{c(t_1)} = const.$ ecuaciones que están acopladas a las $(\dim \mathfrak{g}-k)$ ecuaciones de D-vínculos:

$$\dot{c}(t) \in D_{c(t)}$$

Dado que las variables de la base están siendo controladas, esto es, dado que (H2) nos deja con sólo dimg grados de libertad, la ecuación (3.10) sumada a las ecs. de D-vínculos de arriba determinan de manera única c(t) a causa de (H1).

En lo que sigue, daremos una forma más explícita a las ecuaciones para la incógnita g(t) al fijar la elección de gauge $d_0(t)$ y trabajar con la formulación covariante $(P2)^5$. A fin de ilustrar los cálculos subyacentes, derivaremos las ecuaciones partiendo, directamente, de (P2), a pesar de que pueden ser, también, derivadas desde (3.10) haciendo uso de la descomposición (3.1). Evaluemos, luego,

$$0 = \delta S_G[d_0] = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle I(d_0(t))\xi + J(\dot{d_0})(t), \delta\xi \right\rangle.$$

⁵Sí necesitamos (H1, 2) para (P2).

Utilizando la ec. (3.9) e integrando por partes, llegamos a

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{d}{dt} \left(I(d_0(t))\xi + J(\dot{d_0})(t) \right) + ad_{\xi}^* \left(I(d_0(t))\xi + J(\dot{d_0})(t) \right), g^{-1}\delta g \right\rangle$$

donde $ad_{\xi}^* = -(ad_{\xi})^t$ denota la acción co-adjunta (por izquierda). Nótese que $g^{-1}\delta g$ es arbitrario sólo entre aquellas variaciones que satisfacen los D-vínculos (3.8), i.e.

$$g^{-1}\delta g(t) \in \mathfrak{g}^{d_0(t)}.$$

En consecuencia, si denotamos $i^*_{d_0(t)}:\mathfrak{g}^* \hookrightarrow (\mathfrak{g}^{d_0(t)})^*$ a la proyección canónica, la ecuación

$$i_{d_0(t)}^* \left[\frac{d}{dt} \left(I(d_0(t))\xi + J(d_0)(t) \right) + ad_{\xi}^* \left(I(d_0(t))\xi + J(d_0)(t) \right) \right] = 0$$
(3.11)

debe cumplirse. Éstas son $k = \dim \mathfrak{g}^q$ (constante $\forall q \in Q$) ecuaciones escalares de movimiento para la velocidad angular referida al cuerpo $\xi(t) = g^{-1}\dot{g}(t)$, las cuales están acopladas a las $(\dim \mathfrak{g} - k)$ ecuaciones de vínculo no-holónomos (3.7), también para $\xi(t)$.

Antes de pasar a la sección siguiente, mencionaremos algunas de las propiedades que poseen los subespacios involucrados en (3.11). Éstas se deducen de la G-invarianza de D. Recordemos que, en general, $\mathfrak{g}^q := \{X \in \mathfrak{g}, X_Q(q) \in D_q\}$ y que $i_q : \mathfrak{g}^q \hookrightarrow \mathfrak{g}$ denota la inclusión.

Proposición 3.2.7. Se cumplen las siguientes propiedades:

- $g^{g \cdot q} = A d_q g^q$
- $Ad_g \circ i_q = i_{g \cdot q} \circ Ad_g$

Ejemplo 3.2.8. (El caso puramente cinemático de [5]) En tal caso, $D \cap TOrb_G(Q)$ es trivial y, luego, $\mathfrak{g}^q = \{0\}$ para todo $q \in Q$. La ecuación de movimiento (3.10) resulta entonces trivial y el movimiento del sistema está determinado por, solamente, la ecuación de vínculo $\dot{c} \in D$. Véase también la sección 3.4.3.

Ejemplo 3.2.9. (El caso de las simetrías horizontales completas [5]) En tal caso, existe un subgrupo $H \subset G$ tal que \mathfrak{g}^q es constantemente $\mathfrak{h} = Lie(H)$ para todo $q \in Q$. Luego, $i^*_{\mathfrak{h}}(J(c))$ es una cantidad conservada durante la evolución del sistema c(t). Véase la sección 3.4.4. Ejemplo 3.2.10. (El caso D = TQ y la conservación del momento) Cuando D = TQy, por lo tanto, los D-vínculos son triviales, la ecuación (3.10) (equivalentemente, (3.11)) implica que el momento J se mantiene conservado a lo largo de c(t). Este es el caso de, por ejemplo, un cuerpo auto-deformante que es libre de rotar alrededor de su centro de masa con momento angular conservado ([6, 24]), como fue descripto en el capítulo anterior.

Fuerzas aplicadas

En presencia de fuerzas externas adicionales $F : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$, las ecuaciones de movimiento correspondientes son

$$i_{c(t)}^{*}(\frac{d}{dt}J(c)) = i_{c(t)}^{*} \circ \sigma_{c(t)}^{*}(F_{c(t)})$$

recordando que $\sigma_{c(t)} : \mathfrak{g} \longrightarrow T_{c(t)}Q$ denota la G-acción infinitesimal sobre Q a lo largo de c(t).

Por otro lado, la ecuación (3.10) puede ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}J(\dot{c}) = \Gamma_c(t)$$

para una curva $\Gamma_c(t) \in Ker(i^*_{c(t)})$, i.e., en el anulador de $\mathfrak{g}^{c(t)}$. Esta $\Gamma_c(t)$ queda fijada por las ecuaciones de D-vínculo y puede interpretarse como un torque externo generalizado que es causado por las D-fuerzas de vínculo (véase ej. 3.5.4).

En la formulación covariante de gauge, las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt}\left(I(d_0(t))\xi + J(d_0)(t)\right) + ad_{\xi}^*\left(I(d_0(t))\xi + J(d_0)(t)\right) = \sigma_{d_0(t)}^*\left(\rho_{g*d_0(t)}^*F_{c(t)}\right) =: \Gamma_{d_0}(t).$$
(3.12)

Si asumimos que no hay fuerzas externas y que (DH1, 2) son válidas, llegamos a la ec. (3.12) pero con las fuerzas $F = F^D$ representando las D-fuerzas que actuan sobre el sistema para implementar los D-vínculos. Nótese que la ec. (3.11) puede deducirse de la anterior, utilizando (DH1) y proyectando con $i^*_{d_0(t)} : \mathfrak{g}^* \hookrightarrow (\mathfrak{g}^{d_0(t)})^*$ ambos miembros de la igualdad.

Si elegimos un *splitting* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{d_0(t)} \oplus \mathfrak{O}^{d_0(t)}$ con $P^{\mathfrak{O}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^{d_0(t)}$ el correspondiente proyector, obtenemos que el torque externo $\Gamma_{d_0}(t) \in Ker \ i^*_{d_0(t)}$, presente del lado derecho de (3.12), puede ser también expresado como⁶

$$\Gamma_{d_0}(t) = \left(1 - P^{\mathfrak{O}}\right)^* \circ \sigma_{d_0(t)}^* \left(\rho_{g*d_0(t)}^* F_{c(t)}^{D}\right).$$

⁶La expresión siguiente arroja el mismo $\Gamma_{d_0}(t)$ para cualquier elección de $P^{\mathfrak{O}}$ (equiv. para cualquier splitting) dado que $F_{c(t)}$ se anula sobre $D \subset TQ$ por (DH1).

La expresión (3.12) representa dim \mathfrak{g} ecuaciones que estan acopladas a las $(dim\mathfrak{g}-k)$ de D-vínculos. Sin embargo, nótese que en (3.12) tenemos $(dim\mathfrak{g}-k)$ nuevas incógnitas: las D-fuerzas F^D .

Formulación en términos de fibrados

Ambas formulaciones del problema, la invariante (P1) y la covariante (P2), tienen como G-fibrado subyacente a $Q_I \longrightarrow I$, el cual esta se define a partir de $Q \longrightarrow Q/G$ mediante el siguiente diagrama *pull-back*

$$\begin{array}{cccc} Q_I & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \stackrel{\tilde{c}}{\longrightarrow} & Q/G. \end{array}$$

Más aún, Q_I es un *G*-fibrado trivial y las correspondientes secciones globales son las curvas de gauge $d_0(t)$ que se proyectan sobre $\tilde{c}(t)$ en el espacio base *B*. Eligiendo una sección, como $Q_I \approx I \times G$, llegamos al sistema no-autónomos sobre *G* descripto en (*P*2).

Observación 3.2.11. (Relación con las teorías de campos en 1-d) La descripción anterior de nuestro problema dependiente del tiempo en términos de una teoría de campos de gauge en 1 dimensión. En ésta, los campos son las secciones $I \longrightarrow Q_I \approx I \times G$ y G es el grupo de gauge. Véanse [20] y sus referencias. Obsérvese que, en este contexto, la correspondiente teoría de campos no es invariante de gauge dado que, de hecho, el problema consiste en encontrar la transformación de gauge correcta que lleva d_0 a la solución buscada $c = g \cdot d_0$.

Hay otros fibrados que son relevantes a la formulación del problema y, más específicamente, para el estudio de las ecuaciones de movimiento. Éstos son los fibrados vectoriales \mathfrak{g}^D , \mathfrak{g}^D_I sobre Q, que se relacionan a través del siguiente pull-back

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{g}_{I}^{D} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \stackrel{\tilde{c}}{\longrightarrow} & Q \end{array}$$

siendo $\mathfrak{g}^D := \sqcup_{q \in Q} \mathfrak{g}^q$. El fibrado vectorial \mathfrak{g}^D puede ser también definido como $\sigma^{-1}(D)$, para el morfismo de fibrados vectoriales

$$\sigma : Q \times \mathfrak{g} \longrightarrow TQ$$
$$: (q, X) \longmapsto X_Q(q)$$

con $D \subseteq TQ$ visto como un sub-fibrado vectorial. Nótese que el fibrado \mathfrak{g}_I^D también es trivial dado que I es contractil. Para una dada elección de gauge $d_0(t)$, debe, luego, existir una curva suave $T(t) \in GL(\mathfrak{g})$ tal que el conjunto

$$\{T(t)X_i\}_{i=1}^{\dim g^{d(t_1)}}$$
(3.13)

defina una base de la fibra $\mathfrak{g}^{d_0(t)}$ cuando $\{X_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}^{d(t_1)}}$ sea una base del espacio vectorial $\mathfrak{g}^{d_0(t_1)} \subseteq \mathfrak{g}$.

Esta es la versión *pull-back* (a \mathfrak{g}_I^D) de la formulación en términos de *bases móviles* de [5, 9].

Observación 3.2.12. (Fibrados no triviales) El ejemplo 3.2.9 nos indica que la geometría del fibrado \mathfrak{g}^D juega un rol crucial en la forma de las ecuaciones de movimiento. En otras palabras, la gemetría de \mathfrak{g}^D entra en juego a la hora de conmutar $\frac{d}{dt}$ y $i_{c(t)}^*$ en la ec. (3.10). A pesar de que el fibrado \mathfrak{g}_I^D siempre es trivializable, cuando no es directamente trivial, debemos recurrir al uso de las secciones dependientes de tiempo T(t), las cuales entran de una manera no-trivial en las ecuaciones de movimiento. Véase también las secciones 3.3.4 y 3.3.3, en las que este efecto es aislado de otros.

Gauges no-holonómos

Recordemos las ecuaciones de vínculo (3.7), las cuales están acopladas a las de movimiento (3.11). Dado que son explícitamente dependientes del gauge, surge naturalmente la pregunta: ¿existe un gauge, i.e. una elección de $d_0(t)$, tal que simplifique dichas ecuaciones?

De la ec. (3.7) vemos que si $d_0(t)$ cumple que

$$\frac{d}{dt}d_0(t) \in D_{d_0(t)}, \ \forall t \in I$$
(3.14)

entonces, (3.7) se vuelve equivalente a la siguiente condición simplificada

$$\xi(t) \in \mathfrak{g}^{d_0(t)}.\tag{3.15}$$

Llamaremos a un gauge d_0 que satisface (3.14) gauge no-holónomo y lo denotaremos d_0^{NH} .

Siguiendo las ideas de [5], dada la curva base $\tilde{c}(t) \in Q/G$, un candidato geométrico a gauge no-holónomo d_0^{NH} que verifica (3.14) está dado por el *levantamiento horizontal* de $\tilde{c}(t)$ con respecto a la conexión no-holónoma. El gauge d_0^{NH} que así se obtiene queda definido por

$$\begin{pmatrix} i_{d_0^{NH}}^* I(d_0^{NH}(t)) i_{d_0^{NH}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{d_0^{NH}}^* J(\dot{d}_0^{NH}(t)) \end{pmatrix} = 0 \mathcal{A}_{d_0^{NH}}^{Kin} (d_0^{NH}(t)) = 0$$
 (3.16)

en donde $i_{d_0^{NH}}^*I(d_0^{NH}(t))i_{d_0^{NH}}: \mathfrak{g}^{d_0^{NH}} \longrightarrow \left(\mathfrak{g}^{d_0^{NH}}\right)^*$ y $\mathcal{A}^{Kin}: TQ \longrightarrow \mathfrak{U}$ denota la 1-forma \mathfrak{U} -valuada que proyecta \mathfrak{U}_q sobre si mismo y tiene a D_q por núcleo. El sub-fibrado $\mathfrak{U} \subset TQ$ puede ser difinido, punto a punto $q \in Q$, como el complemento ortogonal (respecto de la métrica de energía cinética) de $(\mathfrak{g}^q)_Q(q)$ dentro del subespacio vertical $T_q(Orb_G(q)) = (\mathfrak{g}^q)_Q(q) \stackrel{\perp}{\oplus} \mathfrak{U}_q$ (véanse los detalles en [5]).

En este caso, el factor de gauge $d_0^{NH}(t)$ de la solución c(t) queda cinemáticamente (geométricamente) determinado a partir de la dinámica en la base $\tilde{c}(t)$.

En un gauge no-holónomo, se tiene

Proposición 3.2.13. Sea $d_0^{NH}(t)$ un gauge no-holónomo y definamos el momento referido al cuerpo a lo largo de $d_0^{NH}(t)$ mediante

$$\Pi(t) := I(d_0^{NH}(t))(g^{-1}\dot{g}(t)) + J(d_0^{NH})(t).$$
(3.17)

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $J(c) = Ad_{g(t)}^* \Pi(t)$, luego $\Pi(t)$ representa al G-momento del sistema J pero visto desde el sistema de referencia móvil definido por g(t) en Q,
- los vínculos se vuelven $g^{-1}\dot{g}(t) \in \mathfrak{g}^{d_0^{NH}(t)}$,
- la reconstrucción⁷ de g(t) a partir de $i^*_{d_0^{NH}}\Pi(t)$ es:

$$\begin{split} g^{-1}\dot{g}(t) &= \left(i_{d_0^{NH}}^* \circ I(d_0^{NH}(t)) \circ i_{d_0^{NH}}\right)^{-1} \left(i_{d_0^{NH}}^* \Pi(t) - i_{d_0^{NH}}^* J(d_0^{NH})(t)\right) \\ &\stackrel{Eq.(3.16)}{=} \left(i_{d_0^{NH}}^* \circ I(d_0^{NH}(t)) \circ i_{d_0^{NH}}\right)^{-1} i_{d_0^{NH}}^* \Pi(t), \end{split}$$

• la ecuación de movimiento que corresponde a $\Pi(t)$ es

$$i_{d_0^{NH}(t)}^* \left(\frac{d}{dt} \Pi(t) + a d_{\left(i_{d_0^{NH}}^* \circ I(d_0^{NH}(t)) \circ i_{d_0^{NH}}\right)^{-1} \left(i_{d_0^{NH}}^* \Pi(t)\right)} \Pi(t) \right) = 0,$$

⁷Recuérdese el capítulo anterior.

la cual está acoplada a la siguiente ecuación de vínculo para $\Pi(t)$

$$I_0^{-1}(t)(\Pi(t) - J(d_0^{NH})) \in \mathfrak{g}^{d_0^{NH}(t)}.$$

Observación 3.2.14. (Ausencia de vínculos y el gauge mecánico) Cuando D = TQ, i.e., cuando no hay D-vínculos, la conexión no-holónoma coincide con la **conexión mecánica** (véanse [20], sus referencias y el capítulo anterior) y, por lo tanto, el gauge no-holónomo se reduce al **gauge mecánico** d_0^{Mech} que está definido por

$$J(d_0^{Mech}(t)) = 0. (3.18)$$

3.3 Casos particulares

3.3.1 El caso del momento conservado

En esta sección describiremos sistemas con base controlada que no están sujetos a ningún D-vínculo adicional, de modo que su movimiento está governado por la conservación del momento. Este caso representa a una clase importante de sistemas en los que el movimiento en las fibras es inducido por el de la base a fin de mantener el momento constante, por ello daremos una descripción detallada de la estructura hamiltoniana subyacente. En la sección 3.4.2, aplicaremos dicha descripción al estudio de las fases de reconstrucción para tales sistemas.

Hay dos maneras de entender este caso en el que el momento es conservado a partir del caso general que hemos descripto teniendo en cuenta D-vínculos. Una es pensar que D = TQ y que el momento J dá, luego, cantidades conservadas a causa de las simetrías horizontales generadas por todo G (ver [5] y la próxima sec. 3.4.4). Otra, es pensar

$$J(\dot{c}) = \mu = const.$$

como un vínculo afín sobre el sistema (véase 3.3.2). Ambas estrategias llevan a los mismos resultados, los cuales describiremos en lo que sigue de (la tercer posible) manera directa, estudiando las correspondientes ecuaciones de movimiento.

Dado que no hay D-vínculos, sólo necesitamos asumir (H2) y (DH2) de las secciones 3.2.1 y 3.2.2, respectivamente. A partir de ellas, por medio de las técnicas variacionales de 3.2.3, se encuentra que la aplicación momento J se conserva a lo largo de la

evolución física del sistema $c(t) \in Q$, i.e.

$$\frac{d}{dt}J(\dot{c}(t)) = 0, \ \forall t.$$
(3.19)

Las ecuaciones no-autónomas y de segundo orden de movimiento para g(t), que surgen de (3.19), son

$$0 = ad_{\xi(t)}^{*}(I_{0}(t)\xi(t) + J_{0}(t)) + I_{0}(t)\frac{d}{dt}(\xi(t)) + \frac{d}{dt}(I_{0}(t))\xi(t) + \frac{d}{dt}J_{0}(t)$$

$$(3.20)$$

en donde hemos denotado

$$\xi(t) = g^{-1} \frac{d}{dt} g(t) \in \mathfrak{g}$$

y los valores iniciales $(g(t_1), \dot{g}(t_1))$ deben cumplir que $g(t_1) \cdot d_0(t_1) = c(t_1), \frac{d}{dt}(g \cdot d_0)(t_1) = \dot{c}(t_1)$ sean los valores iniciales del problema mecánico en Q.

Nos concentraremos, ahora, en la estructura hamiltoniana de estas ecuaciones. En primer lugar, nótese que I_q define un isomorfismo lineal para cada $q \in Q$ ya que, más aún, determina un producto escalar simétrico (,) en g a través de $(X, Y) = \langle I_q X, Y \rangle$. Sea d_0 un gauge cualquiera. Si llamamos

$$\Pi = I_0(t)\xi + J_0(t), \tag{3.21}$$

la aplicación que manda $\xi \mapsto \Pi$, que puede ser vista como una transformada de Legendre dependiente del tiempo, es invertible para todo t:

$$\xi(t) = I_0^{-1}(t)(\Pi - J_0(t)).$$
(3.22)

También se tiene que

$$J(\frac{d}{dt}c(t)) = Ad_{g(t)}^*\Pi(t)$$

y, por lo tanto, (3.19) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = -ad^*_{I_0^{-1}(t)(\Pi(t) - J_0(t))}\Pi(t).$$
(3.23)

Ahora, transformaremos la ecuación (3.20) en una de primer órden sobre T^*G utilizando las estructuras geométricas subyacentes. Recuérdese que T^*G es isomorfo como fibrado vectorial a $G \times \mathfrak{g}^*$ via traslaciones por izquierda, i.e., tomando coordenadas referidas al cuerpo ([1, 16]). Además, recordemos las dos aplicaciones $G \times \mathfrak{g}^* \stackrel{L}{\xrightarrow{\pi}} \mathfrak{g}^*$ dadas por $L(g,\Pi) = Ad_g^*\Pi \ y \ \pi(g,\Pi) = \Pi$. Esto nos lleva a la **Proposición 3.3.1.** Sea g(t) una curva en $G y \Pi(t) = I_0(t)g^{-1}\frac{d}{dt}g(t) + J_0(t)$. La curva g(t) es solución de (3.20) sii la curva $(g(t), \Pi(t))$ es una curva integral del campo dependiente del tiempo⁸

$$X(g,\Pi,t) = (g(I_0^{-1}(t)(\Pi - J_0(t))), -ad_{I_0^{-1}(t)(\Pi - J_0(t))}^*\Pi)$$

sobre $G \times \mathfrak{g}^* (\sim T^*G)$. En tal caso, si $L(g(t_1), \Pi(t_1)) = \mu$, entonces $(g(t), \Pi(t)) \in L^{-1}(\mu) \approx G$ para todo $t \in I$.

Observación 3.3.2. (Reducción dependiente del tiempo) Recuérdese que comenzamos con un problema que, a priori, es $2 \times dimG$ dimensional y que está definido por la ecuación no-autónoma de segundo orden (3.20) para g(t). Ahora, dado que J se conserva, hemos logrado reducir la dimensionalidad a $dimG = dim(L^{-1}(\mu))$ porque $\Pi(t)$ debe ser $Ad_{g^{-1}(t)}^*\mu$. Véase también la siguiente sub-sección.

La proposición anterior (equiv. la ecuación (3.23)) implica que

$$\Pi(t) \in O_{\mu} \subset \mathfrak{g}^*$$

con O_{μ} denotando la $G-\acute{orbita}$ coadjunta a través de μ en \mathfrak{g}^* .

Finalmente, la solución $g(t) \in G$, puede ser obtenida:

- 1. resolviendo la ecuación no-autónoma de primer orden (3.23) sobre O_{μ} para obtener $\Pi(t)$ y, luego,
- 2. reconstruir g(t) a partir de $\Pi(t)$ en el G_{μ} -fibrado $L^{-1}(\mu) \approx G \longrightarrow O_{\mu}$.

Este último paso será estudiado en la sección 3.4.2 (véase también A.2 de este capítulo).

Estructura hamiltoniana del sistema dependiente del tiempo

En esta sección, añadimos variables de tiempo y energía al sistema no-autónomo en T^*G anterior a fin de obtener una estructura hamiltoniana usual.

Consideremos el espacio de fases extendido $P_E = T^*(G \times \mathbb{R}) \simeq T^*G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ munido de su estructura simpléctica standard Ω . Al tomar coordenadas referidas al cuerpo en T^*G , i.e., al trivializar por izquierda,

$$P_E \stackrel{L^*}{\simeq} G \times \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,$$

⁸Véase en [1] la definición de tales campos.
la 2-forma Ω se convierte en

$$\Omega^{L}_{(g,\Pi,t,E)} = -\left\langle d\Pi, g^{-1}dg \right\rangle + \left\langle \Pi, [g^{-1}dg, g^{-1}dg] \right\rangle + \left\langle dt, dE \right\rangle$$

para $(g, \Pi, t, E) \in G \times \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Observación 3.3.3. (La nueva variable E) El último término de la expresión anterior nos dice que E es el momento conjugado al tiempo t. Agregar este momento es la manera usual de hamiltonianizar sistemas dependientes del tiempo (ver [1]).

A continuación, consideramos la función hamiltoniana $H: P_E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_E(g,\Pi,t,E) = \frac{1}{2} \left\langle \Pi, I_0^{-1}(t)\Pi \right\rangle - \left\langle \Pi, I_0^{-1}(t)J_0(t) \right\rangle + E + T_0(t)$$

 con

$$T_0(t) = K_{int}(t) - \frac{1}{2} \left\langle I_0^{-1}(t)(J_0(t)), J_0(t) \right\rangle$$

y en donde K_{int} denota la energía cinética interna que se define en A.1.

Las ecuaciones de movimiento del sistema hamiltoniano (P_E, Ω^L, H_E) para la curva solución $\gamma(s) = (g, \Pi, t, E)(s) \in P_E$ son

$$\begin{cases} g^{-1} \frac{d}{ds} g = I_0^{-1}(t)(\Pi - J_0(t)) \\ \frac{d}{ds} \Pi = -a d_{I_0^{-1}(t)(\Pi - J_0(t))}^* \Pi \\ \frac{dt}{ds} = 1 \\ -\frac{dE}{ds} = \frac{1}{2} \left\langle \Pi, \frac{d}{ds} (I_0^{-1}(t)) \Pi \right\rangle - \left\langle \Pi, \frac{d}{ds} (I_0^{-1}(t) J_0(t)) \right\rangle + \frac{d}{ds} T_0(t). \end{cases}$$
(3.24)

La tercer ecuación nos dice que $\frac{d}{ds} = \frac{d}{dt}$ y que, si elegimos como valor inicial $t_1(s_1) = s_1$, luego s = t. En consecuencia, las primeras dos ecuaciones coinciden con (3.22) y (3.23), respectivamente. En otras palabras, éstas dicen que $(g, \Pi)(s = t)$ es una curva integral del campo dependiente del tiempo sobre T^*G dado en la proposición 3.3.1. La última ecuación para E confiere a este momento conjugado al tiempo un significado físico en términos de la energía cinética $K(\frac{d}{dt}c(t))$ del sistema mecánico en Q (véase A.1):

$$E = -K(\frac{d}{dt}c(t)) + \left\langle \Pi(t), I_0^{-1}(t)J_0(t) \right\rangle.$$

Observación 3.3.4. (No conservación de la energía cinética) A pesar de que el hamiltoniano H es una cantidad conservada a lo largo de las soluciones de (3.24) en P_E , éste no representa la energía del sistema mecánico original en Q. En general, la dependencia temporal explícita de las fuerzas de control que actuan sobre las variables de la base hace que la energía no se conserve. Obsérvese también que, en general, la variable E tampoco será constante, sino que obedecerá una dinámica no-trivial. Véase A.1 para más detalles.

Observación 3.3.5. (Gauge mecánico) En el gauge mecánico (3.18), i.e., cuando $d_0(t)$ es horizontal con respecto a la conexión mecánica en $Q \longrightarrow Q/G$, obtenemos

$$E = -K(\frac{d}{dt}c(t)).$$

Observación 3.3.6. (Simetrías de (P_E, Ω^L, H_E)) La G-acción sobre P_E dada por

$$(g,\Pi,t,E) \xrightarrow{h} (hg,\Pi,t,E)$$

es hamiltoniana. La correspondiente aplicación momento conservada es

$$L_E : P_E \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

: $(g, \Pi, t, E) \mapsto Ad_g^* \Pi.$

El correspondiente espacio reducido ([1]) es

$$L_E^{-1}(\mu)/G_\mu = O_\mu \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

el cual representa una estructura hamiltoniana para las ecuaciones no-autónomas (3.23) en O_{μ} que describimos arriba.

3.3.2 *D*-vínculos afines

En esta sección seguiremos las ideas de [5] y [9] para mostrar cómo tener en cuenta sistemas controlados sujetos a D-vínculos afines. Un D-vínculo afín es uno del tipo

$$\mathfrak{A}_{q}^{D}(\dot{q}) = \gamma(q, t) \tag{3.25}$$

en donde $\mathfrak{A}^D: TQ \longrightarrow TQ$ es un projector lineal fibra a fibra que define una conexión de Eheresmann con $Ker\mathfrak{A}^D =: D \subset TQ$. Denotaremos, como es usual, $V = Im\mathfrak{A}^D \subset TQ$ al fibrado vertical. El campo $\gamma(q,t)$ toma, luego, valores verticales: $\gamma(q,t) \in V_q \ \forall q, t$. Dado que nuestro sistema involucra la geometría del fibrado G-principal $Q \longrightarrow Q/G$, asumiremos las siguientes condiciones de *compatibilidad*:

- (i) \mathfrak{A}^D es G-invariante, esto significa que $\rho_{g*q} \circ \mathfrak{A}^D_q = \mathfrak{A}^D_{g\cdot q} \circ \rho_{g*q}$,
- (ii) γ es G-invariante, $\gamma(g \cdot q, t) = \rho_{g*q} \gamma(q, t)$.

De la G-invarianza de \mathfrak{A}^D se deduce la G-invarianza de D. Asumiremos, además, la condición dimensional sobre D dada por (H1) en la sección 3.2.1. Ahora, consideremos la versión afín del principio de Lagrange-D'Alambert presentada en [9]:

PAff La curva q(t) es solución del sistema sujeto a los vínculos afines descriptos arriba sii $\dot{q}(t)$ satisface dichos vínculos (3.25) y, para cualquier variación q(t,s) con extremos

fijos tal que $\delta q \in D_q$, se verifica que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0.$$

Como fue argumentado en 3.2.3, adaptamos esta formulación variacional al caso en que las variables de la base están siendo controladas al considerar sólo variaciones verticales $c(t,s) = g(t,s) \cdot d_0(t)$ para un gauge $d_0(t)$ cualquiera.

De este principio, se sigue:

Proposición 3.3.7. Las ecuaciones que debe satisfacer g(t) a fin de que $c(t) = g(t) \cdot d_0(t)$ sea solución del sistema controlado y sujeto a vínculos afines que satisfacen (i) y (ii) enunciados arriba son: las ecuaciones de movimiento

$$i_{d_0(t)}^* \left(\frac{d}{dt} \left(I(d_0(t))\xi + J(d_0)(t) \right) + ad_\xi^* \left(I(d_0(t))\xi + J(d_0)(t) \right) \right) = 0$$
(3.26)

para $\xi = g^{-1}\dot{g}$, las cuales coinciden con las ecs. (3.11) dadas para el caso de vínculos lineales; y las ecuaciones de vínculo

$$\mathfrak{A}_{d_0(t)}^D \left[\dot{d}_0(t) + (g^{-1}\dot{g})_Q(d_0(t)) \right] = \gamma(d_0(t), t).$$
(3.27)

El hecho de que las ecuaciones de movimiento para $g^{-1}\dot{g}$ sean las mismas en los casos afín y lineal fue comentado con anterioridad, pero en términos de la ecuación del momento no-holónomo, en [5] (ver pag 27).

Como antes, es posible simplificar la ecuación de vínculo eligiendo un gauge d_0 apropiado. En un gauge *no-holónomo* d_0^{NH} , la ec. (3.27) se transforma en

$$\mathfrak{A}^{D}_{d_{0}^{NH}(t)}\left[(g^{-1}\dot{g})_{Q}(d_{0}^{NH}(t))\right]=\gamma(d_{0}^{NH}(t),t)$$

dado que $\mathfrak{A}_{d_0^{NH}(t)}^D(\dot{d}_0^{NH}(t)) = 0$. Pero si definimos un gauge no-holónomo **afín** d_0^{Aff} como uno que cumpla con

$$\mathfrak{A}^{D}_{d_{0}^{Aff}(t)}(\dot{d}_{0}^{Aff}(t)) = \gamma(d_{0}^{Aff}(t), t)$$
(3.28)

entonces, la ecuación (3.27) se convierte en

$$g^{-1}\dot{g} \in \mathfrak{g}^{d_0^{Aff}(t)}$$

que es más simple de manejar. Nótese que (3.28) sumado al requerimiento de que $\pi \left(d_0^{Aff}(t) \right) = \tilde{c}(t)$ no determinan $d_0^{Aff}(t)$ de manera única dado que dimD puede ser mayor que la dimB. Por otro lado, cuando el campo $\gamma = 0$, un gague no-holónomo es un gauge afín.

En la sección 3.5.2, aplicaremos estas consideraciones generales al estudio del movimiento de una bola *controlada* rotando sobre una mesa giratoria.

3.3.3 El caso de un G abeliano

Analizaremos a continuación la estructura de las ecuaciones del sistema en el caso en que G es un grupo abeliano. Esta propiedad nos permitirá aislar la contribución que viene de la geometría no-trivial del fibrado vectorial g^D de la parte Lie-algebraica de las ecuaciones de movimiento (i.e. los términos que involucran el ad).

Cuando G es abeliano, Ad_g es la identidad para todo $g \in G$, y entonces

- g^{g·q} = g^q ∀g ∈ G, es decir, los subespacios g^q son verticalmente constantes en Q, con lo que g^{d₀(t)} = g^{c(t)} y i^{*}_{c(t)} = i^{*}_{d₀(t)},
- $I(g \cdot q) = I(q)$, luego $I(c(t)) = I(d_0(t))$,
- $J(\dot{c}) = I(d_0(t))g^{-1}\dot{g}(t) + J(\dot{d}_0) =: \Pi(t),$
- la ecuación de movimiento se transforma en

$$i_{d_0(t)}^*(\frac{d}{dt}J(c)) = i_{d_0(t)}^*\left[\frac{d}{dt}\left(I(d_0(t))g^{-1}\dot{g}(t) + J(d_0)\right)\right] = 0,$$
(3.29)

• la ecuación de vínculo en un gauge no-holónomo se mantiene como

$$g^{-1}\dot{g}(t) \in \mathfrak{g}^{d_0^{NH}(t)} = \mathfrak{g}^{c(t)}$$

Usando (3.16), ponemos la ecuación de vínculo en términos de J(c)

$$I^{-1}(d_0^{NH}(t))(J(\dot{c}) - J(d_0^{NH})) = \left(i_{d_0^{NH}}^* \circ I(d_0^{NH}) \circ i_{d_0^{NH}}\right)^{-1} \left(i_{d_0^{NH}}^* J(\dot{c})\right) \in \mathfrak{g}^{d_0^{NH}(t)}.$$
 (3.30)

Observación 3.3.8. (La base del fibrado \mathfrak{g}^D) Dado que $\mathfrak{g}^{g,q} = \mathfrak{g}^q$ cuando G es abeliano, el fibrado vectorial $\mathfrak{g}^D \longrightarrow Q$ desciende a un fibrado vectorial sobre el espacio base $\mathfrak{g}^D \longrightarrow Q/G$. En este contexto, los objetos $i^*_{c(t)} = i^*_{d_0(t)} = i^*_{\tilde{c}(t)}$ y $I(c(t)) = I(d_0(t)) = I(\tilde{c}(t))$ dependen, en realidad, de la curva base $\tilde{c}(t) \in Q/G$.

Seguidamente, desearíamos llevar la ecuación de movimiento para el momento J(c)a la forma de una ecuación diferencial de primer orden. Como en 3.2.4, consideremos el isomorfismo lineal⁹ $T_t : \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ que transforma la fibra inicial $(\mathfrak{g}^{d_0^{NH}(t_1)})^*$ en la fibra a tiempo $t, (\mathfrak{g}^{d_0^{NH}(t)})^*$,

$$i_{d_0^{NH}(t)}^* \circ T_t \cong T_t \circ i_{d_0^{NH}(t_1)}^*$$

La ecuación (3.29) se convierte entonces en

$$\frac{d}{dt} \left(i_{d_0^{NH}(t)}^* J(\dot{c}) \right) = \left[TT^{-1}, i_{d_0^{NH}(t)}^* \right] \left(J(\dot{c}) \right), \tag{3.31}$$

que es equivalente a las correspondientes expresiones en términos de bases móviles de [5].

La ecuación anterior demuestra cómo la no-trivialidad del fibrado $(g^D)^*$ afecta la evolución del momento proyectado $i_{d_0^{NH}(t)}^*J(c)$. Nótese que, incluso cuando dicho fibrado es trivializable, si no es directamente trivial, la ecuación correspondiente presentará un término con TT^{-1} no nulo.

Observación 3.3.9. (Fibrados \mathfrak{g}_I^D triviales) Recuérdese de la sec. 3.2.4 que el fibrado vectorial pull-back \mathfrak{g}_I^D siempre es trivializable. Pero, cuando es directamente trivial, la ecuación anterior es

$$\frac{d}{dt}\left(i^*_{d_0^{NH}(t)}J(\dot{c})\right) = 0,$$

es decir, una ley de conservación asociada a la curva base $\tilde{c}(t)$ dada.

Explicitemos las ecuaciones un poco más: sea $\{e_{d_0^{NH}(t)}^i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0^{d_0^{NH}(t)}}$ una base (móvil) de la fibra $\mathfrak{g}_0^{d_0^{NH}(t)}$ a lo largo de la curva de gauge $d_0^{NH}(t)$. Luego, los vínculos (3.31) para J(c) implican que

$$J(c) = \sum_{i=1}^{\dim g^{d_0^{NH}(t)}} \lambda_i(t) \ I(d_0^{NH}(t)) e^i_{d_0^{NH}(t)} + J(d_0^{NH})$$
(3.32)

para ciertos $\lambda_i(t) \in \mathbb{R}$ a determinar. De (3.29), se deduce que los $\lambda_i(t)$'s deben cumplir

$$A(t) \overrightarrow{\lambda}(t) = -B(t) \overrightarrow{\lambda}(t) - \overrightarrow{c}(t)$$

⁹Que no es dificil probar que siempre existe.

en donde la matrices A(t) y B(t) son reales, dependientes del tiempo, de tamaño $(dimg^{d_0^{NH}(t)} \times dimg^{d_0^{NH}(t)})$ y están definidas por

$$A_{ij}(t) = \left\langle I(d_0^{NH}(t))e_{d_0^{NH}(t)}^i, e_{d_0^{NH}(t)}^j \right\rangle =: I_{ij}^{\{e_{d_0^{NH}(t)}^i\}} \\ B_{ij}(t) = \left\langle \frac{d}{dt} \left(I(d_0^{NH}(t))e_{d_0^{NH}(t)}^j \right), e_{d_0^{NH}(t)}^i \right\rangle$$

mientras que el vector real $\overrightarrow{c}(t)$ tiene $\dim \mathfrak{g}_{0}^{d_{0}^{NH}(t)}$ componentes

$$c_j(t) = \left\langle \frac{d}{dt} J(d_0^{NH}), e_{d_0^{NH}(t)}^j \right\rangle$$

Nótese que A es simétrica e invertible. Si resolviéramos estas ecuaciones para J(c)(t), podríamos reconstruir facilmente g(t) a partir de dicha solución, ya que, siendo G abeliano, podemos hacer uso de la aplicación exponencial $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, llegando a

$$g(t) = exp\left(\int_{t_1}^t ds \ I(d_0^{NH})^{-1} \left(J(\dot{c})(s) - J(d_0^{NH})(s)\right)\right)$$

$$= exp\left(\int_{t_1}^t ds \ \left(i_{d_0^{NH}}^* \circ I(d_0^{NH}) \circ i_{d_0^{NH}}\right)_{(s)}^{-1} \left(i_{d_0^{NH}(s)}^* J(\dot{c})(s)\right)\right).$$
(3.33)

Observación 3.3.10. (Fase asociada a la conexión mecánica) Como G es abeliano, la expresión anterior implica que

$$c(t) = exp\left(\int_{t_1}^t ds \ I(d_0)_{(s)}^{-1} J(\dot{c})(s)\right) \cdot g_{Mech}(t) \cdot d_0(t_1)$$

 con

$$g_{Mech}(t) = exp\left(-\int_{t_1}^t ds \ I(d_0^{NH})^{-1} J(d_0^{NH})(s)\right)$$

definido tal que $g_{Mech}(t) \cdot d_0^{NH}(t) = Hor_{Mech}(\tilde{c})(t)$ sea el levantamiento horizontal de $\tilde{c}(t) \in B$ con respecto a la conexión mecánica (3.18) (recuérdese la sec. 3.4.1). Obsérvese que la ecuación de movimiento para J(c) (aunque no la de vínculo¹⁰) mantiene la misma forma en cualquier gauge $d_0(t)$.

 $^{^{10}}$ En un gauge general que no es *no-holónomo*, la ecuación de vínculo se transforma en la expresión covariante de gauge (3.7).

Finalmente, para entender mejor cómo es que la geometría de \mathfrak{g}^D entra en juego en las ecuaciones para J(c), nos restringiremos al interesante caso en el que el espacio horizontal de la *conexión no-holónoma* es ortogonal (con la métrica de la energía cinética) a todo el subespacio vertical $TOrb_G$ de TQ. En tal caso, un gauge mecánico $d_0(t)$, definido por $J(d_0) = 0$, es también un gauge no-holónomo y la ecuación (3.29) se puede llevar a la forma de una ecuación de transporte paralelo:

$$D_{\stackrel{}{d_0}}\overrightarrow{p} \equiv \frac{d}{dt}p^i - \sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{g}^{d_0(t)}}\gamma^i_j \ p^j = 0, \qquad \forall \ 1 \le i \le \dim \mathfrak{g}^{d_0(t)}$$
(3.34)

para

$$p^{i}(t) := \left\langle J(\dot{c}), e^{i}_{d_{0}(t)} \right\rangle = \sum_{j=1}^{\dim g^{d_{0}(t)}} \lambda_{j}(t) \left\langle I(d_{0}(t)) e^{j}_{d_{0}(t)}, e^{i}_{d_{0}(t)} \right\rangle$$

siendo las coordenadas de J(c) en una base de \mathfrak{g}^* que es dual a una $\{e_{d_0(t)}^k\}_1^{dim\mathfrak{g}}$ tal que

$$\left\langle I(d_0(t))e^i_{d_0(t)}, e^i_{d_0(t)} \right\rangle = 0 \ \forall \ 1 \le i \le \dim \mathfrak{g}^{d_0(t)}, \ \dim \mathfrak{g}^{d_0(t)} + 1 \le i \le \dim \mathfrak{g}.$$
 (3.35)

Nótese que en las expresiones anteriores, $p^{i} = 0$ cuando $\dim \mathfrak{g}^{d_{0}(t)} + 1 \leq i \leq \dim \mathfrak{g}$ debido a la condición de ortogonalidad (3.35) y a que los vínculos (3.32) se verifican. Los coeficientes de conexión lineal γ_{k}^{i} se definen como

$$D_{\binom{i}{d_0}} e^i_{d_0(t)} := \frac{d}{dt} e^i_{d_0(t)} = \sum_{k=1}^{\dim \mathfrak{g}} \gamma^i_k e^k_{d_0(t)}.$$

En consecuencia, en este caso, la evolución temporal de J(c) resulta geométricamente determinada, ya que éste debe moverse **paralelamente transportado** a lo largo de la curva base $\tilde{c}(t) \in Q/G$ en el fibrado $\mathfrak{g}^D \longrightarrow Q/G$ considerado en la observación 3.3.8 (véase también [5]).

Por otro lado, como lo observamos en 3.3.9, cuando la geometría implicada es trivial, i.e. cuando $\mathfrak{g}^D = Q \times V$ para un $V \subset \mathfrak{g}$ constante, se tiene que $i_V^*J(\dot{c})$ es una cantidad conservada. De hecho, dado que \mathfrak{g} es abeliano, V define una sub-álgebra y nos encontramos en la situación de las simetrás horizontales descripta en la sección 3.4.4.

En la sección 3.5.1, aplicaremos estas consideraciones generales al estudio del movimiento de un disco vertical que rota *controladamente*.

3.3.4 El caso de un fibrado trivial $Q = G \times B$

Para estudiar cómo es que las variables de la base inducen movimiento en las fibras, nos concentraremos ahora en el caso en que $Q = G \times B$, i.e., $Q \longrightarrow Q/G$ es un fibrado trivial. Recuérdese que estamos considerando la G-acción natural de multiplicación por izquierda sobre $G \times B$. En este caso,

$$TQ = TG \oplus TB$$

y luego, por la hipótesis (H1) de la sec. 3.2.1,

$$D_{(b,g)} = T_b B \oplus S_{(b,g)}$$

en donde $S_{(b,g)} = T_g G \cap D_{(b,g)}$ como es usual. Nótese que, dado que D es G-invariante, para cada $b \in B$, $S_{(b,g)}$ define una distribución G-invariante sobre TG la cual, además, queda determinada una vez elegido el subespacio $S_{(b,e)} \subset T_e G = \mathfrak{g}$. Por lo tanto, D queda caracterizado por una aplicación suave $B \longrightarrow Gr_{dimS}(\mathfrak{g}) := \{Grassmaniana de subespacios$ $de dimS de <math>\mathfrak{g}\}$ o, equivalentemente, por un fibrado vectorial

$$V = \bigcup_{b \in B} S_{(b,e)} \longrightarrow B.$$
(3.36)

Inversamente, si $V \longrightarrow B$ es un fibrado vectorial sobre la base B con fibras $V_b \subset \mathfrak{g}$, éste define una distribución G-invariante D sobre $G \times B$ al tomar $S_{(b,g)} = L_{g*e}V_b$. El fibrado vectorial $S \subset D$ corresponde, entonces, a la aplicación

$$\begin{array}{cccc} G imes B & \longrightarrow & Gr_{dimS}(\mathfrak{g}) \\ (b,g) & \longmapsto & L_{g st e} V_b. \end{array}$$

Ahora, el subespacio (recuérdese la prop. 3.2.7) $\mathfrak{g}^{(b,g)} := \{X \in \mathfrak{g}, X_Q(b,g) \in D_{(b,g)}\}$ está dado por

$$\mathfrak{g}^{(b,g)} = \{ X \in \mathfrak{g}, \exists Y \in S_{(b,e)}; X = Ad_g Y \}$$

luego,

$$\mathfrak{g}^{(b,g)} = Ad_g \mathfrak{g}^{(b,e)}$$
$$\mathfrak{g}^{(b,e)} = S_{(b,e)}.$$

En este punto, debemos hacer alguna suposición sobre la forma de la métrica en $Q = G \times B$:

(HM) Supongamos que tenemos una aplicación suave

$$\begin{array}{rcl} B & \longrightarrow & \{metricas \ invariantes \ por \ izquierda \ en \ G\} \simeq \{metricas \ en \ \mathfrak{g}\} \\ \\ b & \longmapsto & (,)_b \,. \end{array}$$

Asumiremos que la métrica $k^Q(,)$ en Q tiene la forma

$$k_{(b,g)}^{Q}(\left(\dot{b}_{1},\dot{g}_{1}\right),\left(\dot{b}_{2},\dot{g}_{2}\right)) = k_{b}^{B}(\dot{b}_{1},\dot{b}_{2}) + (g_{1}^{-1}\dot{g}_{1},g_{2}^{-1}\dot{g}_{2})_{b}$$

siendo $k^B(,)$ una métrica en B.

Observación 3.3.11. (Aplicabilidad) Este tipo de métricas en $Q = G \times B$ es el que presentan los ejemplos típicos ([5]). Véanse también los ejemplos de la sección 3.5.

Asumiendo (HM), la aplicación momento $J: TQ \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ para la G-acción por izquierda sobre Q es

$$J(b, g) = Ad_g^* \Psi_b(g^{-1}g)$$

con $\Psi_b : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ denotando el isomorfismo definido por la métrica $(,)_b$ en \mathfrak{g} . El tensor de inercia $I_{(b,g)} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ toma la forma de

$$I_{(b,g)} = Ad_g^* \circ \Psi_b \circ Ad_{g^{-1}}.$$

Nótese que tenemos a mano un levantamiento natural $d_0^{NH}(t) = (\tilde{c}(t), e) \in B \times G$ para la curva base $\tilde{c}(t) \in B$. Este gauge $d_0^{NH}(t)$ resulta ser uno *no-holónomo* en el sentido dado en 3.2.4. De hecho, este $d_0^{NH}(t)$ coincide con el levantamiento horizontal de $\tilde{c}(t)$, desde $(\tilde{c}(t_1), e)$, con respecto a la conexión no-holónoma de [5]. Y, lo que es más, coincide también con el gauge mecánico (3.18).

En este gauge, la inclusión

$$i_{d_0^{NH}(t)}:\mathfrak{g}^{d_0^{NH}(t)}=S_{(\tilde{c}(t),e)}\hookrightarrow\mathfrak{g}$$

depende solamente de la curva base $\tilde{c}(t) \in B$ y coincide con la inclusión

$$i_{\tilde{c}(t)}: V_{\tilde{c}(t)} \hookrightarrow \mathfrak{g}$$

en donde $V_{\tilde{c}(t)} = S_{(\tilde{c}(t),e)}$ representa la fibra del fibrado (3.36).

La curva c(t) que describe el movimiento del sistema controlado y sujeto a D-vínculos en Q será, entonces,

$$c(t) = (\tilde{c}(t), g(t)) = g(t) \cdot d_0^{NH}(t)$$

у

$$J(\dot{c}) = Ad_g^* \ I_{(\tilde{c},e)}(g^{-1}\dot{g}) = Ad_g^* \ \Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1}\dot{g}).$$

En tal caso, las ecuaciones de movimiento (3.10) son

$$i_{c(t)}^*\left(\frac{d}{dt}J(\dot{c})\right) = 0$$

o, equivalentemente,

$$i_{\tilde{c}(t)}^{*}\left(\frac{d}{dt}\left(\Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1}\dot{g})\right) + ad_{g^{-1}\dot{g}}^{*}\Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1}\dot{g})\right) = 0.$$
(3.37)

Los vínculos para g(t) son

$$g^{-1}\dot{g}(t) \in \mathfrak{g}^{(\tilde{c}(t),e)} = S_{(\tilde{c}(t),e)} = V_{\tilde{c}(t)}.$$
 (3.38)

Las ecs. (3.37) pueden ser reescritas considerando una base móvil en el fibrado $V \longrightarrow B$ tal y como fue hecho en la sección anterior, dando como resultado las expresiones locales de la ecuación del momento no-holónomo de [5], pero evaluadas a lo largo de la curva controlada $\tilde{c}(t)$.

Simplifiquemos la situación un poco más para intentar aislar la contribución al movimiento del sistema que es Lie-algebraica (vertical) de la que es g^D -geométrica (horizontal) y que fue estudiada en la sección anterior.

Consideremos el caso en que el fibrado $V \longrightarrow B$ es trivial, esto es que $S_{(b,e)} = S_0 \subset \mathfrak{g}$ para todo $b \in B$. Luego,

$$i^*_{\tilde{c}(t)} = i^*_0 \; \forall t$$

y la ec. (3.37) se convierte en

$$\frac{d}{dt}\left(i_{0}^{*}\Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1}g)\right) = -i_{0}^{*}\left(ad_{g^{-1}g}^{*}\Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1}g)\right)$$

la cual es una ecuación para $\Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1}g)$ que está acoplada a la de vínculo (3.38) para $g^{-1}g$. La estructura algebráica de esta ecuación es todavía dificil de manejar en general. Si quisieramos resolverla (manteniendo la generalidad) por medio de las propiedades Liealgebraicas usuales de g, necesitaríamos, entonces, asumir una hipótesis adicional que nos diga cómo es que cambia el subespacio S_0 al movernos verticalmente en la fibra ($\tilde{c}(t), e$) \rightsquigarrow ($\tilde{c}(t), g$).

Supongamos, luego, que S_0 es Ad_G -invariante. De esto se deduce que $\mathfrak{g}^{c(t)} = \mathfrak{g}^{\tilde{c}(t)} = S_0$ y que $S_0 \subset \mathfrak{g}$ es una sub-álgebra de Lie. Los vínculos aseguran que $g^{-1}g \in S_0$

y, por otro lado, las ecs. de movimiento (3.10) se tranducen en las *leyes de conservación* (como en la obs. 3.3.9)

$$\frac{d}{dt} \left(i_0^* J(\dot{c}) \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(i_0^* \Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1} \dot{g}) \right) = - \left(a d_{g^{-1} \dot{g}}^* i_0^* \Psi_{\tilde{c}(t)}(g^{-1} \dot{g}) \right).$$

A pesar de ser integrable (para ciertos G), esta ecuación es todavía dificil de resolver explícitamente manteniendo la generalidad (véase en [16] el caso del cuerpo rígido con $g = \mathfrak{so}(3)$). Sin embargo, en esta situación, el factor dinámico g(t) de c(t) puede ser siempre reconstruido a partir de una solución de las anteriores ecuaciones en S_0 , dando como resultado las correspondientes fórmulas de fase que describiremos en las secs. 3.4 y A.2.

El análisis llevado a cabo en esta sección nos permite ver que, incluso bajo hipótesis muy favorables sobre la geometría de Q y D, las ecuaciones de movimiento pueden resultar tan complicadas que no permitan continuar con el estudio genérico de c(t). A pesar de ello, requiriendo compatibilidades más profundas entre D y la G-acción, v.g. la presencia de simetrías horizontales, en 3.4.4 y 3.4.5 mostraremos que se pueden obtener fórmulas de fase que permiten avanzar¹¹ sobre la caracterización de la solución c(t).

3.4 Reconstrucción y fases

En las secciones siguientes, nos concentraremos en las fases de reconstrucción ([15]) para ambos, la solución completa c(t) y la incógnita vertical (dependiente de gauge) g(t). El lector interesado puede encontrar los variados tipos de fases de reconstrucción posibles en [17].

3.4.1 Gauges y fases en $Q \longrightarrow Q/G$ para sistemas con D-vínculos

Supongamos que la curva base $\tilde{c}(t) \in Q/G$ es cerrada, $\tilde{c}(t_1) = \tilde{c}(t_2)$. La elección (3.16) que constituye gauge no-holónomo $d_0^{NH}(t)$ conlleva a la presencia de una fase geométrica durante el movimiento del sistema en Q. Dado que este gauge es un levantamiento horizontal, $d_0^{NH}(t_2)$ coincide con la holonomía de la curva base $\tilde{c}(t)$, medida desde la condición

¹¹Como en el capítulo anterior, una vez estudiada la reconstrucción, la caracterización de c(t) quedaría completa al estudiar la dinámica reducida en las órbitas coadjuntas del subgrupo de simetrías horizontales.

inicial $d_0^{NH}(t_1) = c(t_1)$, con respecto a la conexión no-holónoma. Luego, la correspondiente fórmula de fase es

$$c(t_2) = g_{Dyn}(t_2) \cdot g_{NH} \cdot d_0^{NH}(t_1)$$

en donde g_{NH} queda univocamente definido por $d_0^{NH}(t_2) = g_{NH} \cdot d_0^{NH}(t_1)$ y $g_{Dyn}(t)$ es solución de (3.11) y (3.15), con $\xi(t) = g_{Dyn}^{-1} g_{Dyn}$ y los coeficientes dependientes del tiempo evaluados sobre este gauge $d_0^{NH}(t)$.

Otra fase geométrica g_{MP} hace su aparición cuando utilizamos el gauge mecánico. Sean el gauge $d_0^{NH}(t)$ como antes y $g_{Mech}(t)$ la curva que queda definida al requerir que $\tilde{d}_0(t) := g_{Mech}(t) \cdot d_0^{NH}(t)$ sea el levantamiento horizontal de $\tilde{c}(t)$ con respecto a la conexión mecánica (3.18) ([20]) en Q con $g_{Mech}(t_1) = e$. Si escribimos $g_{Dyn}(t) = g_{\tilde{D}}(t) \cdot g_{Mech}(t)$, las ecuaciones de movimiento para la contribución dinámica restante $g_{\tilde{D}}(t)$ resultan

$$i_{\tilde{d}_{0}(t)}^{*}\left(\frac{d}{dt}\left(I(\tilde{d}_{0}(t))g_{\tilde{D}}^{-1}g_{\tilde{D}}\right) + ad_{g_{\tilde{D}}^{-1}g_{\tilde{D}}}^{*}I(\tilde{d}_{0}(t))g_{\tilde{D}}^{-1}g_{\tilde{D}}\right) = 0$$
(3.39)

que son más simples que las originales (3.11) dado que el término con $J(\frac{d}{dt}(d_0))$ se anula por la definición (3.18). En cambio, las ecuaciones de vínculo (3.15) para $g_{\tilde{D}}$ son

$$g_{\tilde{D}}^{-1}\dot{g}_{\tilde{D}} + \dot{g}_{Mech}g_{Mech}^{-1} \in \mathfrak{g}^{\tilde{d}_{0}(t)}$$
(3.40)

que son más complicadas que las originales para g_{Dyn} .

La relación entre las dos fases de gauge es

$$\begin{aligned} c(t_2) &= g_{Dyn}(t_2) \cdot g_{NH} \cdot c(t_1) \\ &= g_{\tilde{D}}(t_2) \cdot g_{Mech}(t_2) \cdot g_{NH} \cdot c(t_1) \\ &= g_{\tilde{D}}(t_2) \cdot g_{MP} \cdot c(t_1). \end{aligned}$$

en donde la segunda fase geométrica es $g_{MP} = g_{Mech}(t_2) \cdot g_{NH}$.

Observación 3.4.1. (Simplificaciones diferentes en gauges diferentes) En el gauge noholónomo, los vínculos toman una forma más simple mientras que, en el gauge mecánico, son las ecuaciones de movimiento las que se simplifican. Es, entonces, natural tratar de obtener ambas simplificaciónes al mismo tiempo, pero esto no puede lograrse en general dado que el levantamiento horizontal con respecto a la conexión mecánica **no** resulta horizontal con respecto a la no-holónoma para un D genérico. Finalmente, observamos que, en algunas situaciones, tenemos información adicional sobre los D-vínculos (ej. simétrías horizontales) y el gauge no-holónomo se torna preferible a los fines de la reconstrucción (véanse las secciones siguientes).

3.4.2 Fases de reconstrucción en sistemas con momento conservado

Describiremos, ahora, el proceso de reconstrucción de g(t) a partir de una solución $\Pi(t)$ en $O_{\mu} \subset \mathfrak{g}^*$, como fue mencionado en 3.3.1 para el caso en el que no hay D-vínculos. Un ejemplo concreto de las *fórmulas de fase* que obtendremos en lo que sigue puede encontrarse en [6] y en el capítulo anterior, en el contexto del movimiento de cuerpos auto-deformantes.

Supongamos que tenemos una solución $\Pi(t) = Ad_{g^{-1}(t)}^* J(\dot{c}) \in O_{\mu}$ de la ec. (3.23) correspondiente a $\mu := J(\dot{c}) = const \neq 0$ y que hemos elegido un proyector lineal $P : \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_{\mu}$ con la propiedad

$$Ad_h \circ P = P \circ Ad_h. \tag{3.41}$$

De A.2, sabemos que podemos, entonces, escribir

$$g(t) = h_D(t) \cdot g_G(t)$$

con la fase geométrica g_G igual al levantamiento horizontal de $\Pi(t)$ con respecto a la conexión definida por P en el G_{μ} -fibrado $G \longrightarrow O_{\mu}$; y con la fase dinámica $h_D \in G_{\mu}$ satisfaciendo la ecuación

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = P\left(I_{c(t)}^{-1}(J(\dot{c}) - Ad_g^* J_0(t))\right)$$
(3.42)

con $h_D(t_1) = e$. El último paso se deduce de la ec. (3.22) para g(t) en donde $I_{c(t)}$ denota el tensor de inercia evaluado sobre la evolución física del sistema c(t).

Asumamos ahora que \mathfrak{g} admite un producto escalar Ad-invariante (,), como en A.2. Sea $u_1 := \frac{\Psi(\mu)}{\|\Psi(\mu)\|} y \{u_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\mu}}$ una base ortonormal, con respecto a (,), del subespacio vectorial $\mathfrak{g}_{\mu} \subset \mathfrak{g}$. En tal caso, la ecuación (3.42) se traduce en

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = \frac{1}{\|\Psi(\mu)\|^2} \left(2K(\dot{c}(t)) - 2K_{int}(t) + \left\langle J_0(t), I_0^{-1}(t)J_0(t) \right\rangle - \left\langle J_0(t), I_0^{-1}(t)\Pi(t) \right\rangle \right) \Psi(\mu) + \sum_{i=2}^{\dim \mathfrak{g}_{\mu}} \left[(u_i, I_{c(t)}^{-1}\mu) - (u_i, I_{c(t)}^{-1}Ad_g^*J_0(t)) \right] u_i$$
(3.43)

donde K representa la energía cinética del sistema controlado en Q (véase A.1).

Al elegir $d_0(t) = d_0^{Mec}(t)$ el gauge mecánico (3.18),

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = \frac{1}{\|\Psi(\mu)\|^2} (2K(\dot{c}(t)) - 2K_{int}(t))\Psi(\mu) + \sum_{i=2}^{\dim\mathfrak{g}_{\mu}} (u_i, I_{c(t)}^{-1}\mu) \ u_i.$$
(3.44)

Observación 3.4.2. (Tensor de inercia, energía y la información física en h_D) La fórmula de reconstrucción anterior, en el gauge mecánico, establece una relación entre la fase dinámica h_D y los datos del tensor de inercia (locked) $I_{c(t)}$, de la energía cinética K, ambos evaluados sobre la evolución física c(t) en Q, y de la energía cinética de gauge $K_{int}(\dot{d}_0^{Mec})$ (que puede deducirse de los datos del problema).

Observación 3.4.3. (El caso $J(\dot{c}) = 0$) En tal caso, el movimiento del sistema c(t) coincide con el del gauge mecánico $d_0^{Mech}(t)$ a causa de (3.18). Se puede decir, luego, que el movimiento c(t) es geométricamente inducido por el de la base $\tilde{c}(t)$ (véase también el ejemplo 3.4.6).

Observación 3.4.4. (El caso G_{μ} abeliano) En tal caso, $I_{c(t)} = I_{d_0^{Mec}(t)}$ y, en consecuencia, la única información dinámica (esto es, no cinemática) necesaria para evaluar la fórmula (3.44) es la evolución de la energía cinética del sistema $K(\dot{c}(t))$. También en este caso, $h_D(t)$ puede ser fácilmente integrado por medio de la aplicación exponencial $exp : \mathfrak{g}_{\mu} \longrightarrow G_{\mu}$.

3.4.3 Fases para sistemas con D-vínculos puramente cinemáticos

Tomamos de [5], la siguiente

Definition Un sistema (Q, L, G, D) se dice que posee vínculos **puramente cinemáticos** (**PK**) cuando $TQ = Ver \oplus D$.

Dado que D es G-invariante, éste define una conexión principal en $Q \longrightarrow Q/G$. Sea A^D la correspondiente 1-forma sobre Q con valores en g. La ecuación de D-vínculos para c(t) es

$$A^D(\dot{c}) = 0$$

mientras que las ecuaciones verticales de movimiento (3.11) son triviales ya que $g^q = 0$ para todo q. Obtenemos entonces

Proposición 3.4.5. El movimiento de un sistema controlado desde la base (Q, L, G, D, \tilde{c}) sujeto a D-vínculos puramente cinemáticos (PK), es de naturaleza geométrica con respecto a la curva base \tilde{c} controlada. En otras palabras, la solución c(t) está dada por el levantamiento horizontal de $\tilde{c}(t)$ con respecto a la conexión principal definida por D en $Q \longrightarrow Q/G$.

78

Corolario Si \tilde{c} es cerrada en $[t_1, t_2]$, tenemos una *fase geométrica* g_G en la dinámica del sistema, asociada al valor inicial $c(t_1)$ y definida por $g_G = Hol(\tilde{c})$:

$$c(t_2) = g_G \cdot c(t_1).$$

Ejemplo 3.4.6. (Cuerpos que se deforman con momento angular nulo) Si consideramos a $J(\dot{c}) = 0$ como un D-vínculo impuesto sobre el movimiento de un cuerpo auto-deformante, siendo J el momento angular, entonces D coincide con la distribución horizontal asociada a la conexión mecánica. La proposición anterior permite recuperar el hecho conocido ([24]) de que la reorientación espacial $g(t) \in SO(3)$ de tal cuerpo $g(t) \in SO(3)$ es geométrica con respecto a la deformación $\tilde{c}(t)$ (recuérdese también el capítulo anterior).

3.4.4 Fases para sistemas con D-vínculos y simetrías horizontales

Analizaremos, en esta sección, un caso geométrica/cinemáticamente favorable que lleva a la derivación de fórmulas de fase para el factor dinámico g(t) de c(t).

- **Definition** ([5]) Un sistema sujeto a D-vínculos (Q, L, G, D) se dice tener simetrías horizontales (completas) (HS) si existe un subgrupo $H \subset G$ tal que
 - 1. $\xi_Q(q) \in D_q \ \forall q \in Q \text{ cuando } \xi \in \mathfrak{h} := Lie(H) \subset \mathfrak{g},$
 - 2. (condición de *completitud*) $S_q := D_q \cap T_q(Orb_G(q)) = T_q(Orb_H(q)) \ \forall q \in Q.$

La condición (2) establece que las simetrías horizontales agotan la totalidad de la dinámica vertical. El análisis que llevaremos a cabo a continuación puede ser extendido al caso no-completo, i.e. asumiendo sólo (1), pero mantendremos la hipótesis (2) por simplicidad. El ejemplo 3.5.3 de la sección siguiente ilustra el caso no-completo.

En un sistema con **HS** (completas), el fibrado \mathfrak{g}^D es trivial e igual a $Q \times \mathfrak{h}$. Dado que la inclusión $i_q = i_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^q \hookrightarrow \mathfrak{g}$ es independiente del punto $q \in Q$, la ecuación (3.10) toma la forma

$$i_{\mathfrak{h}}^*\left(\frac{d}{dt}(J(\dot{c}))\right) = \frac{d}{dt}(i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c})) = 0.$$
(3.45)

En consecuencia, $i_{\mathfrak{h}}^*J(c)$ es una cantidad conservada durante el movimiento del sistema, como fue mencionado al final de la sec. 3.3.4. Esta proyección $i_{\mathfrak{h}}^*J(c)$ puede ser interpretada como la parte del momento total J que es compatible con los D-vínculos (véase también [5]).

79

A continuación, enunciamos algunos resultados que se deducen de la definición de un sistema con HS completas.

Proposición 3.4.7. Lo siguiente se cumple:

- $H \subset G$ es un subgrupo normal de G, con lo que \mathfrak{h} resulta G-invariante $Ad_g\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$,
- $i_{\mathfrak{h}} Ad_g = Ad_g i_{\mathfrak{h}},$
- Para cada $q \in Q$, sea $I_q^{\mathfrak{h}} = i_{\mathfrak{h}}^* \circ I_q \circ i_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ el tensor de inercia restringido, se tiene

$$I_{g \cdot q}^{\mathfrak{h}} = Ad_g^* I_q^{\mathfrak{h}} Ad_{g^{-1}}, \ \forall g \in H.$$

Describiremos ahora cómo derivar las fórmulas de fase para el factor dinámico g(t) de la evolución c(t) de un sistema con **HS**. En primer lugar, recordemos que en un gauge no-holónomo $d_0^{NH}(t)$ la ecuación de vínculo para la velocidad referida al cuerpo $\xi = g^{-1}g$ es (3.15) la que, en presencia de HS, se reduce a

$$g^{-1}\dot{g}(t) \in \mathfrak{h} \tag{3.46}$$

para todo t. Por otro lado, si consideramos el momento referido al cuerpo asociado a este gauge no-holónomo $\Pi(t) \in \mathfrak{g}^*$ dado por (3.17), a causa del vínculo (3.46), obtenemos que

$$g^{-1}\dot{g}(t) = \xi(t) = (I_0^{\mathfrak{h}})_{(t)}^{-1} \left(i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t) - i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{d}_0^{NH}(t)) \right).$$
(3.47)

Luego, la ec.(3.11), equiv. (3.45), se convierten en

$$\frac{d}{dt}(i_{\mathfrak{h}}^{*}\Pi(t)) = -ad_{g^{-1}g(t)}^{*}(i_{\mathfrak{h}}^{*}\Pi(t)) = -ad_{(I_{0}^{\mathfrak{h}})_{(t)}^{-1}(i_{\mathfrak{h}}^{*}\Pi(t) - i_{\mathfrak{h}}^{*}J(d_{0}^{NH}(t)))}^{*}i_{\mathfrak{h}}^{*}\Pi(t).$$
(3.48)

La expresión anterior es equivalente a

$$i_{h}^{*}\Pi(t) = Ad_{a^{-1}}^{*}(i_{h}^{*}J(\dot{c}))$$
(3.49)

ya que

$$i_{\mathfrak{h}}^*J(c) = i_{\mathfrak{h}}^*Ad_g^*(\Pi(t)) = Ad_g^*(i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t)),$$

por la proposición 3.4.7. La ecuación de vínculo (3.46) puede ser expresada en términos de $\Pi(t)$ como sigue

$$I_0^{-1}(t)(\Pi(t) - J(d_0^{NH}(t))) = (I_0^{\mathfrak{h}})_{(t)}^{-1} \left(i_{\mathfrak{h}}^* \Pi(t) - i_{\mathfrak{h}}^* J(d_0^{NH}(t)) \right) \in \mathfrak{h}.$$
(3.50)

Ambas ecs. (3.48) y (3.50), determinan la dinámica de $\Pi(t) \in \mathfrak{g}^*$ a partir del valor inicial $\Pi(t_1) = J(c) = \mu$.

Ahora, de (3.46) y cuando $g(t_1) = e$, se deduce que $g(t) \in H$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. Entonces, la ec. (3.49) implica que

$$i_{\mathfrak{h}}^{*}\Pi(t)\in O_{i_{\mathfrak{h}}^{*}J(\dot{c})}^{H}$$

siendo $O_{i_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{f}}J(c)}^{H}$ la $H-\acute{orbita}$ coadjunta en \mathfrak{h}^{*} a través del elemento constante $i_{\mathfrak{h}}^{*}J(c)$. El siguiente diagrama (conmutativo) resume la situación geométrica relevante

para las aplicaciones $L(g, \alpha) = Ad_g^* \alpha \ y \ \pi(g, \alpha) = \alpha, \ (g, \alpha) \in H \times \mathfrak{h}^*$. Recordemos que L es la aplicación momento asociada a la H-acción simpléctica por izquierda sobre $H \times \mathfrak{h}^* \simeq T^*H$ y que $H \simeq L^{-1}(i_{\mathfrak{h}}^*J(c)) \xrightarrow{\pi} O_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^H$ define un fibrado $H_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}$ -principal sobre el espacio reducido $O_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^H$, tal y como se describe en A.2.

Observación 3.4.8. (Condiciones iniciales) Cuando las condiciones iniciales son tales que $g(0) \neq e$ en G, con lo que $c(0) = g(0) \cdot d_0^{NH}(0)$, luego la ec. (3.46) implica que $g(t) = g(0) \cdot g_H(t)$ en donde $g_H(t) \in H$ es la solución que corresponde la condición inicial $g_H(0) = e$. Entonces, en lo que sigue, podemos restringirnos al caso en que g(0) = e.

Llegado este punto, estamos en condiciones de aplicar el procedimiento de reconstrucción usual de [15] para la incógnita $g(t) \in H$, a partir de una solución $i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t) \in O_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^H$. Sea $P: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)} = Lie\left(H_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}\right)$ un proyector lineal tal que

$$P \circ Ad_g = Ad_g \circ P$$

para todo $g \in H$. Como se describe en A.2, P define una conexión principal $A_P : TH \longrightarrow$ $\mathfrak{h}_{i,J(c)}$ y tenemos:

Proposición 3.4.9. Manteniendo la notación introducida más arriba, sea $\Pi(t) \in \mathfrak{g}^*$ una solución de las ecuaciones (3.48), (3.50) y sea $i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t)$ su proyección sobre \mathfrak{h}^* . Entonces,

la correspondiente solución g(t) de la ecuación de reconstrucción (3.47) que satisface los D-vinculos (3.46) con g(0) = e es tal que $g(t) \in H \ \forall t \in I \ y \ que$

$$g(t) = h_D(t) \ g_G(t).$$

En esta expressión, la fase geométrica $g_G(t)$ es el levantamiento horizontal de $i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t) \in O_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^H$, desde $g_G(0) = e$, con respecto a la conexión A_P en el fibrado $H_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^{-principal}$ $H \xrightarrow{\pi} O_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^H$ y la fase dinámica $h_D(t) \in H_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^{-principal}$ está definida por la ecuación

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = A_P(\frac{d}{dt}g)_g = P\left(Ad_{g(t)}(I_0^{\mathfrak{h}})_{(t)}^{-1}(i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t) - i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{d}_0^{NH}(t)))\right)$$
(3.51)

$$= P\left((I_{c(t)}^{\mathfrak{h}})^{-1} \left(i_{\mathfrak{h}}^{*} J(\dot{c}) - A d_{g(t)}^{*} i_{\mathfrak{h}}^{*} J(\dot{d}_{0}^{NH}(t)) \right) \right)$$
(3.52)

$$h_D(0) = e.$$
 (3.53)

Observación 3.4.10. (El contenido físico de h_D) La anterior fase dinámica h_D depende del tensor de inercia (restringido) $I_{c(t)}^{\mathfrak{h}}$ y del momento interno o de gauge $Ad_{g(t)}^{*}i_{\mathfrak{h}}^{*}J(\dot{d}_{0}^{NH}(t))$, ambos, como son vistos desde el sistema de referencia que se mueve siguiendo la evolución física del sistema $c(t) \in Q$. Además, cuando el gauge no-holónomo se elige de la manera horizontal (3.16), entonces

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = P\left((I_{c(t)}^{\mathfrak{h}})^{-1} i_{\mathfrak{h}}^* J(\dot{c}) \right)$$

depende sólo de $I_{c(t)}^{\mathfrak{h}}$.

Observación 3.4.11. (El caso $i_{\mathfrak{h}}^*J(c) = 0$) En tal caso, g(t) coincide con la fase dinámica y está dado por

$$g^{-1} \overset{\cdot}{g}(t) = - (I^{\mathfrak{h}}_{d_0^{NH}(t)})^{-1} i^*_{\mathfrak{h}} J(\dot{d}_0^{NH}(t))$$

ya que $i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t) = 0$ a causa de (3.49). Sin embargo, el movimiento completo c(t) resulta geométrico con respecto al de la base $\tilde{c}(t)$. La razón es que, en este caso, c(t) coincide con el levantamiento horizontal d_0^{NH} de \tilde{c} con respecto a la conexión no-holónoma ([5]) debido a la ec. (3.16). Nótese que esto es cierto cuando las simetrías horizontales son completas, i.e. cuando la conservación de $i_{\mathfrak{h}}^*J = 0$ agota la totalidad de las ecuaciones de movimiento verticales (véase también [5]). Este resultado generaliza el de [24] (véase el ej. 3.4.6) sobre la naturaleza geométrica del movimiento inducido desde la base en sistemas con momento nulo al contexto de sistemas sujetos a D-vínculos con simetrías horizontales completas. Cuando \mathfrak{h} admite un producto interno Ad-invariante, la fase dinámica puede ser relacionada a otras magnitudes mecánicas.

Proposición 3.4.12. Manteniendo la notación introducida más arriba, supongamos que \mathfrak{h} tiene un producto interno Ad-invariante (,) que induce el isomorfismo $\Psi : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h} y$ sea $P : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}_{i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c})}$ un proyector ortogonal sobre $\mathfrak{h}_{i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c})}$. Sea $\{u_i\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{h}_{i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c})}$ con $u_1 := \frac{\Psi(i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c}))}{\|\Psi(i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c}))\|}$. Además, consideremos el gauge no-holónomo d_0^{NH} definido por el levantamiento horizontal (3.16). Entonces, la ecuación para la correspondiente fase dinámica es

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = \left(2K(\frac{d}{dt}c(t)) - 2K_{int}(t)\right) \frac{\Psi(i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c}))}{\left\|\Psi(i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c}))\right\|^2} + \sum_{i=2}^{\dim\mathfrak{h}_{i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c})}} (u_i, (I_{c(t)}^{\mathfrak{h}})^{-1}(i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c}))) u_i \\ h_D(t_1) = e.$$

En la expresión anterior, $K(K_{int})$ denota la energía cinética (interna, de gauge) del sistema controlado en Q (véase A.1). Como antes, $I_{c(t)}^{\mathfrak{h}}$ representa el tensor de inercia (restringido) visto desde el sistema de referencia que se mueve junto con el sistema a lo largo de la evolución física $c(t) \in Q$. La fórmula anterior relaciona estas magnitudes físicas, las cuales están directamente implicadas en la dinámica del sistema, con las fases que aparecen durante el movimiento completa y H-horizontalmente simétrico (véase el corolario siguiente).

Corolario: Finalmente, cuando la solución¹² $\Pi(t) \in \mathfrak{g}^*$ es tal que $i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t_1) = i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t_2)$ se tiene:

- $g_G(t_2)$ es la holonomía del camino base $i_{\mathfrak{h}}^*\Pi(t)$ en el fibrado $H_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}$ -principal $H \xrightarrow{\pi} O_{i_{\mathfrak{h}}^*J(c)}^H$ con respecto a la conexión definida por P, medida desde $g_G(t_1) = e$.
- la solución c(t) ∈ Q para el sistema controlado y sujeto a D-vínculos satisface la siguiente fórmula de fases a tiempo t₂:

$$c(t_2) = h_D(t_2)g_G(t_2) \cdot d_0^{NH}(t_2)$$

 $^{^{12}}$ Queda abierto el problema de caracterizar, para un H general, estas propiedades geométricas de las soluciones en la órbita coadjunta. En los casos de cuerpos auto-deformantes particulares, el estudio dinámico correspondiente fue dado en el capítulo anterior, sección 2.4.1.

en donde $d_0^{NH}(t_2)$ es el levantamiento horizontal de $\tilde{c}(t)$ con respecto a la conexión no-holónoma ([5]), a partir de $d_0(t_1) = c(t_1)$.

• cuando, además, la curva base $\tilde{c}(t) \in Q/G$ es cerrada para $t \in [t_1, t_2]$, es decir $\tilde{c}(t_1) = \tilde{c}(t_2)$, entonces $d_0(t_2) = g_G^{NH} \cdot d_0(t_1)$ siendo g_G^{NH} la holonomía de la curva base \tilde{c} con respecto a la conexión no-holónoma en el fibrado $Q \longrightarrow Q/G$, medida desde la condición inicial $d_0(t_1) = c(t_1)$. Luego, en este caso,

$$c(t_2) = h_D(t_2)g_G(t_2) \cdot g_G^{NH} \cdot c(t_1).$$

3.4.5 Fases para sistemas con vínculos afines tipo torque magnético dipolar

Un caso particular de sistemas sujetos a vínculos afines que resulta particularmente interesante por presentar *fórmulas de fases de reconstrucción* asociadas es el siguiente. En tales sistemas, la hipótesis (ii) de la sección 3.3.2 no se satisface pero sí se cumple que

(ii) los vínculos afines son de tipo torque magnético dipolar externo, esto es,

$$\mathfrak{A}_{q(t)}^{Mech}(\dot{q}(t)) = I_{q(t)}^{-1} A d_{h_M(t)}^* \hat{L}_0$$

en donde \mathfrak{A}^{Mech} denota la 1-forma \mathfrak{g} -valuada de la *conexión mecánica* ([20]). Equivalentemente, el vínculo afín puede ser llevado a la forma

$$J(\dot{q}(t)) = Ad^*_{h_M(t)}\hat{L}_0$$

para alguna curva dada $h_M(t) \in G$, con $h_M(t_1) = id$ y con el momento inicial $\hat{L}_0 \neq 0 \in \mathfrak{g}^*$.

La derivada temporal de la ecuación anterior es equivalente a la siguiente *ecuación* de no-conservación del momento

$$\frac{d}{dt}J(\dot{q}(t)) = ad^*_{\dot{h}_M h_M^{-1}}J(\dot{q}(t))$$

en donde el lado derecho representa un torque generalizado de un tipo muy particular.

En la sección 3.5.4, estudiaremos el movimiento de un cuerpo con momento magnético dipolar en presencia de un campo magnético externo, el cual puede ser descripto mediante un sistema sujeto a vínculos afines tipo (*ii*). Esto justifica nuestra terminología. A continuación, asumimos (ii) y que la curva base $\tilde{c}(t)$ está siendo controlada como en los capítulos anteriores. Seguidamente, elegimos un gauge mecánico $d_0^{Mec}(t)$ (3.18) dado que la distribución D asociada la la conexión $\mathfrak{A}_{q(t)}^{Mech}$ anterior es exactamente el espacio horizontal con respecto a la conexión mecánica. Como los vínculo representan dimGecuaciones, éstas caracterizan completamente la dinámica de la incógnita vertical g(t) de $c(t) = g(t) \cdot d_0^{Mec}(t)$. De hecho, D define una conexión principal y, luego, $\mathfrak{g}^D = 0$ el fibrado nulo, con lo que las ecs. de movimiento (3.26) se vuelven triviales, i.e., 0 = 0. Las ecuaciones de vínculo en (ii) pueden ser llevadas a

$$Ad_{h_{M}^{-1}(t)}^{*}Ad_{g(t)}^{*}I_{d_{0}^{Mec}(t)}\left(g^{-1}\dot{g}\right) = \hat{L}_{0} = const.$$

De esta expresión, vemos que si llamamos $R_M(t) := h_M^{-1}(t)g(t) \in G \text{ y } \Pi(t) := I_{d_0^{Mec}(t)}(g^{-1}\dot{g}),$ se tiene

$$Ad_{R_{\mathcal{M}}(t)}^{*}\Pi(t) = \hat{L}_{0} \tag{3.54}$$

llevando a que $\Pi(t) \in O_{L_0} \subset \mathfrak{g}^*$, la órbita coadjunta a través de \hat{L}_0 , para todo t. La ecuación correspondiente a la dinámica de $\Pi(t)$ es

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = -ad^*_{R_M^{-1}\dot{R}_M}\Pi(t) = -ad^*_{\left(I_{d_0^{Mee}(t)}^{-1}\Pi(t) - Ad_{g^{-1}}\dot{h}_M h_M^{-1}\right)}\Pi(t)$$

Nótese que esta ecuación resulta acoplada a la que define a $\Pi(t)$ en términos de g(t). Sin embargo, recordando la aplicación

la ec. (3.54) implica que estamos en la situación descripta en A.2 y, luego, que podemos aplicar el procedimiento de reconstrucción ([15]) en el fibrado $G_{\hat{L}_0}$ -principal $G \simeq L^{-1}(\hat{L}_0) \longrightarrow O_{\hat{L}_0}$ para obtener $R_M(t)$ a partir de una solución $\Pi(t) \in O_{\hat{L}_0}$. Éste dá como resultado la fórmula de reconstrucción

$$R_M(t) = R_M^{Dyn}(t) R_M^{Geom}(t),$$

en donde la fase dinámica $R_M^{Dyn}(t)$ pertenece a $G_{\hat{L}_0}$ y la geométrica $R_M^{Geom}(t)$ es el levantamiento horizontal de $\Pi(t)$ con respecto a alguna P-conexión A_P que hayamos fijado en el $G_{\hat{L}_0}$ -fibrado $L^{-1}(\hat{L}_0) \simeq G \longrightarrow O_{\hat{L}_0}$ (véase A.2). En este caso, la ecuación para la fase dinámica, expresada en términos del g(t) original, es

$$\frac{d}{dt}R_{M}^{Dyn}R_{M}^{Dyn-1}(t) = A_{P}(\frac{d}{dt}R_{M}(t))_{g}$$
(3.55)

$$= P\left(Ad_{h_{M}^{-1}}\left(I_{c(t)}^{-1}J(\dot{c})_{(t)} - \dot{h}_{M}h_{M}^{-1}\right)\right)$$
(3.56)

$$R_M^{Dyn}(t_1) = id. (3.57)$$

En la sección 3.5.4, daremos los detalles de la fórmula de reconstrucción anterior en el ejemplo del dipolo magnético.

Finalmente, cuando $\Pi(t_1) = \Pi(t_2)$, la fórmula de fases siguiente caracteriza completamente la posición $c(t) \in Q$ del sistema a tiempo t_2 :

$$c(t_2) = h_M(t_2) \cdot R_M^{Dyn}(t_2) \cdot Hol_{\Pi(t_{1,2})}^P \cdot d_0^{Mec}(t_2)$$

en donde $d_0^{Mec}(t_2)$ es el transporte paralelo a lo largo de la curva base con respecto a la conexión mecánica en Q (sec. 3.4.1) y $Hol_{\Pi(t_{1,2})}^P$ la holonomía de la curva $\Pi(t)$ con respecto a la P-conexión en el fibrado $L^{-1}(\hat{L}_0) \simeq G \longrightarrow O_{\hat{L}_0}$, medida desde el valor inicial $e \in G$.

Observación 3.4.13. (Consecuencia del torque externo) Compárese la estructura de la fórmula de fases anterior con la que se encuentra en [6] y en el capítulo anterior, sección 3.4.2. La dependencia explícita en h_M es el reflejo de que, en el caso de esta sección, el momento no se conserva a causa del torque externo $ad^*_{\dot{h}_M h_M^{-1}}L(\dot{q}(t))$.

3.5 Ejemplos

Ilustramos, en las siguientes secciones, nuestras consideraciones generales aplicadas a ejemplos simples de sistemas *controlados desde la base y sujetos a D-vinculos*. Ejemplos de cuerpos auto-deformantes con momento angular conservado, cuya forma es controlada, pueden encontrarse en [6] o en el capítulo anterior.

3.5.1 Disco vertical controlado

Consideraremos el ejemplo del disco vertical de [5], pero asumiendo que las variables de la base están siendo *controladas*. Éste representa un ejemplo de los sistemas estudiados en la sec. 3.3.3. En este caso, $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1 \ni q = (x, y, \theta, \varphi)$ y consideraremos $G = \mathbb{R}^2 \times S^1 \ni g = (x, y, \theta)$ actuando (por izquierda) sobre sí mismo. El lagrangiano correspondiente es

$$L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2}) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^{2} + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^{2}$$

mientras que los vínculos no-holónomos de no-deslizamiento para el disco son

$$\dot{x} = Rcos\varphi\theta$$

 $\dot{y} = Rsin\varphi\theta$

siendo R el radio del disco. Para este ejemplo, la curva base controlada es $\tilde{c}(t) = \varphi(t)$ y

$$d_0^{NH}(t) = (x_0, y_0, \theta_0, \varphi(t))$$

representa un gauge no-holónomo (que, en este ejemplo, coincide también con un gauge mecánico). Además,

$$g^{q} = span\{(Rcos\varphi, Rsin\varphi, 1) \in Lie(G) = \mathbb{R}^{2} \oplus \mathfrak{s}(1)\}$$

y

$$J(\dot{c}) = (m\dot{x}, m\dot{y}, I\theta).$$

De la sección 3.3.3, sabemos que el D-vínculo en términos de J(c) en este gauge noholónomo es $I_0^{-1}J(c) \in \mathfrak{g}^q$, o, lo que es lo mismo,

$$J(\dot{c}) = \lambda(t)(mR\cos\varphi(t), mR\sin\varphi(t), I)$$

para algún $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ a determinar mediante la correspondiente ecuación de movimiento (3.29) para $J(\dot{c})$:

$$\left\langle i_{d_0(t)}^*\left(\frac{d}{dt}J(c)\right), (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 1)\right\rangle = 0$$

$$\dot{\lambda}(mR^2 + I) + \lambda \left[\frac{d}{dt}(mR\cos\varphi, mR\sin\varphi, I)\right] \cdot (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 1) = 0.$$

Nótese que el segundo término de la última ecuación es cero, dado que los dos vectores involucrados son ortogonales. Luego, ya que $\lambda(t) = \theta$ por la definición de J(c), obtenemos

$$\dot{\lambda}(mR^2 + I) = \ddot{\theta}(mR^2 + I) = 0$$

que coincide con la ecuación de movimiento vertical obtenida en [5]. Ésta es una ley de conservación que puede ser directamente obtenida a partir de la ecuación (3.34) dado que $\gamma_1^1 = 0$ (la conexión lineal subyacente en el fibrado vectorial unidimensional $g^D \longrightarrow Q/G =$

 S^1 es plana, véase la sec. 3.3.3). En consecuencia, θ es constante. Finalmente, dado que hemos resuelto la dinámica de J(c) por medio de las ecuaciones verticales de movimiento y de los D-vínculos, podemos aplicar la fórmula de reconstrucción (3.33) obteniendo

$$g(t) = \left(\stackrel{\cdot}{\theta} mR\left(\int_{t_1}^t ds \, \cos\varphi(s) \right), \stackrel{\cdot}{\theta} mR\left(\int_{t_1}^t ds \, \cos\varphi(s) \right), \stackrel{\cdot}{I\theta}(t-t_1) \right)$$

Nótese que $g_{Mech}(t) = (0, 0, 0)$ en este ejemplo. Por último, la solución completa $c(t) \in Q$ resulta

$$\begin{aligned} c(t) &= g(t) \cdot d_0(t) \\ &= \left(\stackrel{\cdot}{\theta} mR\left(\int_{t_1}^t ds \, \cos\varphi(s) \right), \stackrel{\cdot}{\theta} mR\left(\int_{t_1}^t ds \, \cos\varphi(s) \right), \stackrel{\cdot}{I\theta}(t-t_1) \right) \cdot (x_0, y_0, \theta_0, \varphi(t)) \\ &= \left(\stackrel{\cdot}{\theta} mR\left(\int_{t_1}^t ds \, \cos\varphi(s) \right) + x_0, \stackrel{\cdot}{\theta} mR\left(\int_{t_1}^t ds \, \cos\varphi(s) \right) + y_0, \stackrel{\cdot}{I\theta}(t-t_1) + \theta_0, \varphi(t) \right) \end{aligned}$$

de donde es fácil ver que la curva base controlada $\varphi(t)$ induce movimiento en las variables del grupo G debido a la presencia de los D-vinculos de no-deslizamiento.

3.5.2 Una bola controlada sobre una mesa giratoria

Tomamos el siguiente ejemplo también de [5] y asumimos que las variables de la base son controladas. Este sistema ejemplifica los que fueron considerados en las secciones 3.3.2 y 3.3.4. El correspondiente lagrangiano sobre $Q := \mathbb{R}^2 \times SO(3)$ es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}mk^2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2),$$

y los D-vínculos afines de no-deslizamiento entre la bola y la mesa giratoria son

$$\begin{aligned} -\dot{x} + a\omega_y &= \Omega y \\ \dot{y} + a\omega_x &= \Omega x \end{aligned}$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ denotando la posición (inercial) de la bola y $\dot{g} = \omega_x \xi_x^R(g) + \omega_y \xi_y^R(g) + \omega_z \xi_z^R(g)$ la velocidad angular de $g(t) \in SO(3)$, que representa la rotación de la bola alrededor de su centro de masa. Aquí, $\xi_i^R(g)$ denota el vector tangente invariante por derecha en $T_g SO(3)$ cuyo valor en e es $\xi_i \in \mathfrak{so}(3)$, el generador de las rotaciones alrededor del eje i. También en la expresión anterior, a es el radio de la bola, mk^2 cualquiera de sus momentos principales de inercia y Ω la velocidad angular dada de la mesa giratoria. Para llevar estas ecuaciones a la forma (3.25), definimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{D}_{(x,y,g)}(\dot{x},\dot{y},\dot{g}) &= \left((\dot{x},\dot{y},\dot{g}), v_{q}^{4} \right) \frac{v_{q}^{4}}{\left\| v_{q}^{4} \right\|^{2}} + \left((\dot{x},\dot{y},\dot{g}), v_{q}^{5} \right) \frac{v_{q}^{5}}{\left\| v_{q}^{5} \right\|^{2}} \\ \gamma(x,y,g) &= \Omega y \frac{v_{q}^{4}}{\left\| v_{q}^{4} \right\|^{2}} + \Omega x \frac{v_{q}^{5}}{\left\| v_{q}^{5} \right\|^{2}} \end{aligned}$$

en donde $(,) = (,)_{\mathbb{R}^2} + (,)_{\mathfrak{so}(3)}$ denota la métrica de la energía cinética sobre $Q = \mathbb{R}^2 \times G$ con G := SO(3) y $v_q^4 := -\frac{\partial}{\partial x} + a\xi_y^R(g), v^5 := \frac{\partial}{\partial y} + a\xi_x^R(g)$ en TQ. Nótese que ambos, $D := Ker(A^D) = Span\{a\frac{\partial}{\partial x} + \xi_y^R(g); -a\frac{\partial}{\partial y} + \xi_x^R(g); \xi_z^R(g)\}$ y γ , son G-invariantes para la G-acción natural inducida por la multiplicación a derecha de G sobre Q. Por otro lado, recuérdese, a su vez, que en las secciones previas hemos considerado, siempre, acciones *izquierdas* de G sobre Q. Por ello, convertiremos la acción natural derecha en una acción izquierda definiendola como $g \cdot (x, y, h) = (x, y, hg^{-1})$ en $\mathbb{R}^2 \times G$.

En este caso, dado que el espacio base B es \mathbb{R}^2 , la curva controlada $\tilde{c}(t) = (x(t), y(t))$ indica que la posición del punto de contacto entre la bola y la mesa sigue una trayectoria dada. El problema es, luego, encontrar cómo es que la bola rota (i.e. encontrar g(t)) debido a la presencia de los vínculos de no-deslizamiento y al hecho de que la bola se translada de manera conocida: (x(t), y(t)). De la sección 3.3.2, sabemos que las correspondientes ecuaciones para la incógnita vertical $g(t) \in G$ son las de movimiento (3.11) y las de D-vínculo (3.27). Además, sabemos que podemos simplificar los vínculo al considerar un gauge afín $d_0^{Aff}(t)$ que cumple con (3.28). En este ejemplo,

$$\mathfrak{g}^{(x,y,g)} = Span\{Ad_{g^{-1}}\xi_z\}$$

con $\xi_z \in \mathfrak{so}(\mathfrak{z})$ el generador de rotaciones alrededor del eje z y la aplicación momento asociada al lagrangiano G-simétrico es

$$J(\dot{x}, \dot{y}, \dot{g}) = -mk^2g^{-1}\dot{g} \in \mathfrak{so}(\mathfrak{z}) \simeq \mathfrak{so}^*(\mathfrak{z}).$$

Un posible elección de gauge afín es

$$d_0^{Aff}(t) = (x(t), y(t), g_{Aff}(t))$$

con $\dot{g}_{Aff}g_{Aff}^{-1} = \frac{1}{a}(-\dot{y} + \Omega x)\xi_x + \frac{1}{a}(\dot{x} + \Omega y)\xi_y$, i.e., teniendo una velocidad angular (espacial) con componente z nula. Entonces, la solución completa $c(t) = ((x(t), y(t), g_{tot}(t)))$

puede escribirse como

$$c(t) = g(t) \cdot d_0^{Aff}(t) = (x(t), y(t), g_{Aff}(t)g^{-1}(t))$$

con g(t) cumpliendo:

1. (Vínculos)
$$g^{-1}\dot{g} \in \mathfrak{g}^{d_0^{Aff}(t)} = Span\{Ad_{g_{Aff}(t)^{-1}}\xi_z\}$$

2. (Dinámica) $\left(\frac{d}{dt}J(\dot{x},\dot{y},\dot{g}), Ad_{(g_{Aff}(t)g^{-1}(t))^{-1}}\xi_z\right)_{\mathfrak{so}(3)} = 0.$

Es fácil ver que, llamando $g_{tot}(t) := g_{Aff}(t)g^{-1}(t)$, la condición anterior (2) se reduce a

$$J_z^S(\dot{c}) := mk^2 \left(\dot{g}_{tot} g_{tot}^{-1}, \xi_z \right)_{\mathfrak{so}(\mathfrak{z})} = const.$$

i.e. a la conservación de la componente z del momento angular (espacial), dado que

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}J(\dot{x},\dot{y},\dot{g}), Ad_{g_{tot}^{-1}}\xi_z \\ \mathfrak{so}_{(3)} \end{pmatrix}_{\mathfrak{so}(3)} = \frac{d}{dt} \left(J(\dot{x},\dot{y},\dot{g}), Ad_{g_{tot}^{-1}}\xi_z \right)_{\mathfrak{so}(3)} + \left(J(\dot{x},\dot{y},\dot{g}), Ad_{g_{tot}^{-1}}ad_{\dot{g}_{tot}}g_{tot}^{-1}\xi_z \right)_{\mathfrak{so}(3)} \\ = \frac{d}{dt} J_z^S(\dot{c}) + mk^2 \left(g_{tot}^{-1}\dot{g}_{tot}, Ad_{g_{tot}^{-1}}ad_{\dot{g}_{tot}}g_{tot}^{-1}\xi_z \right)_{\mathfrak{so}(3)}$$

y el segundo término del lado derecho se anula. Nótese que, a pesar de presentar una ley de conservación, ésta es *unidimensional* y, por lo tanto, no conlleva a ninguna fórmula de reconstrucción para g(t) que no resulte trivial.

Observación 3.5.1. (Conservación asociada a una simetría) Usando la observación 3.2.6 se puede ver facilmente que, pensando que el grupo G consiste sólo en las rotaciones alrededor del eje z y que éste actúa a través de la multiplicación por izquierda sobre Q, la ec. (3.10) se transforma directamente en la conservación anterior de la componente z del momento angular (espacial). Sin embargo, nótese que este planteo no nos brinda ninguna información sobre cómo la presencia de los D-vínculos induce el movimiento vertical g(t)desde la base.

Ahora, del punto (1) anterior, se obtiene

$$g^{-1}\dot{g} = Ad_{g_{Aff}^{-1}(t)}\omega_z\xi_z$$

mientras que de (2) se sigue que

 $\omega_z = const.$

En consecuencia, finalmente, obtuvimos que el movimiento vertical completo $g_{tot}(t)$ dentro de la dinámica completa del sistema c(t) puede ser calculado como el producto $g_{Aff}(t)g^{-1}(t)$ de los dos factores arriba descriptos y que son más simples de calcular.

En este ejemplo simple, el resultado anterior sobre la factorización de la solución, que obtuvimos siguiendo nuestras consideraciones generales, coincide con el que se obtiene al proponer $g_{tot}(t) = g_{Aff}(t)g^{-1}(t)$ como solución para las ecuaciones de vínculo más la de conservación expresadas como en [5]:

$$\dot{g}_{tot} = \frac{1}{a} \left(-\dot{y} + \Omega x \right) \xi_x^R(g_{tot}) + \frac{1}{a} \left(\dot{x} + \Omega y \right) \xi_y^R(g_{tot}) + (const) \xi_z^R(g_{tot}).$$

3.5.3 Un cuerpo auto-deformante sujeto a D-vínculos no-holónomos

Este es un ejemplo de un sistema controlado y sujeto a D-vínculos que presenta fórmulas de fase que se deducen de la existencia de simetrías horizontales (no-completas, sección 3.4.4, ref. [5]). El sistema está compuesto por dos esferas rígidas y homogéneas, dispuestas como lo muestra la figura 3.1. La bola pequeña está agarrada al interior de la grande (un vínculo holónomo) que, a su vez, puede moverse libremente. El ingrediente clave es que la bola pequeña rota sin deslizar con respecto a la segunda. Este último requerimiento se traduce en un D-vínculo no-holónomo al que el sistema total está sujeto y asumiremos, además, que sobre él no actúan fuerzas externas. Este ejemplo representa un modelo simplificado para la situación en la que un robot (la bola pequeña) se mueve en el interior de una nave espacial (la bola grande). Además, como veremos a continuación, este ejemplo permite generalizar el tratamiento llevado a cabo en [6] (el capítulo anterior) al permitir adentrarse en la dinámica interna del espacio de las formas y que sean vínculos no-holónomos los que inducen la reorientación espacial del cuerpo que se deforma controladamente¹³.

El espacio de configuraciones es $Q = SO(3) \times S_r^2 \times SO(3) \ni (R_1, r_2, R_3)$, cuyos puntos son tales que $r_i(t) = R_i(t)r_{io} \in \mathbb{R}^3$ representan la posición del punto *i* con respecto a un sistema de referencia con ejes paralelos a los de uno inercial y orígen en el centro de la bola correspondiente (véase la figura 3.1). Denotamos S_r^2 a la 2-esfera de radio $r = ||r_2(t)|| = const$. En estas coordenadas, el lagrangiano (igual a la energía cinética) del

¹³En otros términos, contemplar sistemas con D-vínculos permite estudiar el sistema partiendo de una dinámica interna al espacio de las formas Q/SO(3) que conocemos sólo en parte. La restante parte resultará inducida por ésta, por los vínculos y por las correspondientes ecuaciones de movimiento, acopladas, a su vez, a la rotación global en SO(3).



Figura 3.1: La rotación $R_1(t)$ de la bola mayor y la posición del centro de masa CM_2 de la bola pequeña, ambos vistos desde un sistema de referencia \tilde{S} , son descriptos por $r_1(t) = R_1(t)r_{10}$ y $r_2(t) = R_2(t)r_{20}$, respectivamente. \tilde{S} tiene su origen en el centro de masa CM_1 de la bola grande y ejes paralelos a los de un sistema inercial S. La rotación $R_3(t)$ de la bola menor alrededor de su centro CM_2 es descripta por el vector $r_3(t) = R_3(t)r_{30}$.

sistema toma la forma simple

$$L(\dot{R}_{i}) = T(\dot{R}_{i}) = \frac{1}{2} \left(R_{1}^{-1} \dot{R}_{1}, I_{1} R_{1}^{-1} \dot{R}_{1} \right)_{\mathfrak{so}(3)} + \frac{1}{2} \mu r^{2} \left(\dot{r}_{2} \cdot \dot{r}_{2} \right) + \frac{1}{2} \left(R_{3}^{-1} \dot{R}_{3}, I_{3} R_{3}^{-1} \dot{R}_{3} \right)_{\mathfrak{so}(3)}$$

mientras que las 2 ecuaciones de D-vínculo correspondientes a la condición de no-deslizamiento son (para $r_{20} = r \ \check{z}$)

$$-\frac{a}{r} \left(Ad_{R_2^{-1}} \left(-\dot{R}_1 R_1^{-1} + \dot{R}_3 R_3^{-1} \right), \xi_x \right)_{\mathfrak{so}(3)} = \left(Ad_{R_2^{-1}} \left(-\dot{R}_1 R_1^{-1} + \dot{R}_2 R_2^{-1} \right), \xi_x \right)_{\mathfrak{so}(3)} -\frac{a}{r} \left(Ad_{R_2^{-1}} \left(-\dot{R}_1 R_1^{-1} + \dot{R}_3 R_3^{-1} \right), \xi_y \right)_{\mathfrak{so}(3)} = \left(Ad_{R_2^{-1}} \left(-\dot{R}_1 R_1^{-1} + \dot{R}_2 R_2^{-1} \right), \xi_y \right)_{\mathfrak{so}(3)}.$$

$$(3.58)$$

Arriba, $I_1 = diag(\frac{2}{5}m_1(r+a)^2)$, $I_3 = diag(\frac{2}{5}m_2a^2)$, siendo *a* el radio de la bola pequeña, son los tensores de inercia de las bolas con respecto a sus centros, expresados en la base standard $\{\xi_i\}$ de $\mathfrak{so}(\mathfrak{z})$ que está conformada por los generadores de rotaciones alrededor del eje $i, i = x, y, z; y \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

Observación 3.5.2. (Expressiones con R_2) Es fácil ver que todas las expressiones, dadas dentro de este ejemplo, que dependen de R_2 (como las anteriores para los vínculos) son invariantes ante $R_2(t) \rightsquigarrow R_2(t)R_z(t)$, para $R_z(t)$ una rotación arbitraria alrededor del eje z. Esto significa que, en realidad, dependen de $r_2(t) = r R_2(t)\tilde{z}$. A pesar de ello, mantendremos la dependencia en la rotación por simplicidad. Dado $r_2(t) \in S_r^2$, una posible elección de $R_2(t)$ está dada por el levantamiento horizontal en el $U_z(1)$ -fibrado $SO(3) \longrightarrow S_r^2$ (véanse los detalles de la conexión involucrada en [6] o en el capítulo anterior).

La distribución $D \subset TQ$ de vectores tangentes que satisfacen las ecs. (3.58) tiene dimensión dimD = dimQ - 2 = 6.

Ahora, consideremos el grupo $G = SO(3)^2 \ni (R, g_3)$ actuando (a izquierda) sobre Q mediante

$$(R, g_3) \cdot (R_1, r_2, R_3) = (RR_1, Rr_2, RR_3g_3^{-1}).$$

Es fácil ver que ambos, $L \neq D$, resultan G-invariantes. El espacio base B = Q/G puede ser parametrizado por los elementos $r_{2,1} \in S_r^2 \neq I$ la hipótesis (H1) de la sec. 3.2.1 es satisfecha. Asumiremos, también, que vale (H2), es decir, que una parte del movimiento está siendo controlada y que ésta está representada por la curva de gauge $d_0(t) = (e, r_{2,1}(t), e)$. Si $c(t) = (R_1(t), R_2(t), R_3(t)) \in Q$ representa el movimiento total del sistema, luego $r_{2,1}(t) =$ $R_1^{-1}(t)r_2(t)$ representa la posición del CM_2 vista desde un sistema de referencia con orígen en CM_1 pero con ejes que rotan con R_1 , i.e. un sistema que rota junto con la bola grande. De hecho, el movimiento completo puede expresarse como $c(t) = (R_1(t), R_3^{-1}(t)R_1(t)) \cdot d_0(t)$ y nótese que la variable controlada $r_{2,1}$ no queda sujeta a ningún vínculo (puede ser elegida arbitrariamente en $B \simeq S_r^2$). Obsérvese, además, que de las dimQ = 8 variables, como 2 están siendo controladas, deberemos lidiar con 4 ecuaciones de movimiento sumadas a las 2 de los D - vínculos.

Más físicamente, el problema consiste en encontrar la reorientación global del sistema $R_1(t)$ inducida por el movimiento interior a la bola grande. Éste, a su vez, está generado por el movimiento de translación (conocido) $d_0(t)$ de la bola pequeña, que es acompañado por la rotación D-inducida $R_1^{-1}(t)R_3(t)$, ambos movimientos tal y como son vistos desde un sistema fijo a la bola grande, a causa de los vínculos de no-deslizamiento y satisfaciendo las correspondientes ecuaciones de movimiento asociadas al lagrangiano.

Observación 3.5.3. (Midiendo $r_{2,1}$) La curva $r_{2,1}(t)$ es la que mediría un astronauta que se encuantra parado dentro de la nave espacial, modelada por la bola grande, al observar cómo se mueve el centro de la bola pequeña (véase la figura 3.1). Por lo tanto, puede ser también medida en condiciones de laboratorio, cuando la nave está asegurada al piso (y no puede rotar), mientras la bola pequeña ensaya el mismo movimiento de translación $r_{2,1}$ que tendrá lugar en el espacio. Nótese que la (componente normal de la velocidad de) rotación de dicha bola *no* será la misma, en condiciones de laboratorio, que en el espacio (siempre y cuando allí no actúen controles adicionales) dado que las correspondientes ecuaciones de movimiento (3.59 más abajo) no son invariantes ante cambios a sistemas de referencia rotantes.

Ahora nos dedicaremos a las ecuaciones de movimiento. Consideremos el subgrupo $H := \{(R, e), R \in SO(3)\} \subset G$. Se puede chequear facilmente que $\mathfrak{h}_Q = (Lie(H))_Q \subset D$ y que, para un $q = (R_1, r_2, R_3) \in Q$,

$$\mathfrak{g}^q = \mathfrak{h} \oplus Span\{Ad_{R_2} \in \mathfrak{f}_z^3\}$$

considerando a ξ_z^3 como un elemento de la segunda copia de $\mathfrak{so}(\mathfrak{z})$ en $Lie(G) = \mathfrak{so}(\mathfrak{z}) \oplus \mathfrak{so}(\mathfrak{z})$. Ésto significa que estamos en presencia de \mathfrak{h} -simetrías horizontales no-completas ([5] y la sec. 3.4.4). En consecuencia,

$$i_{\mathfrak{h}}^{*}J(\dot{c}) = I_{1}\dot{R}_{1}R_{1}^{-1} + \mu r^{2} \left(r_{2} \times \dot{r}_{2}\right)^{\lambda} + I_{3}\dot{R}_{3}R_{3}^{-1} = I_{1}\dot{R}_{1}R_{1}^{-1} + Ad_{R_{2}}I_{20}R_{2}^{-1}\dot{R}_{2} + I_{3}\dot{R}_{3}R_{3}^{-1}$$

en $\mathfrak{so}(\mathfrak{z}) \stackrel{metric}{\simeq} \mathfrak{so}^*(\mathfrak{z}) = Lie(H)^*$ es una cantidad conservada. Arriba, \checkmark denota el isomorfismo (de álgebras de Lie) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{z})$ usual y

$$I_{2,0} = \mu r^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Este momento proyectado $i_{\mathfrak{h}}^* J(\dot{c})$ representa el momento angular total del sistema [11].

Observación 3.5.4. (Relevancia de nuestro enfoque a causa de los D-vinculos) Nos gustaría resaltar que, si considerásemos a H como el grupo de simetrías del problema, como se hace en el caso de cuerpos auto-deformantes no sujetos a vinculos ([6] y el cap. anterior), entonces los D-vincluos dejarían de ser verticales (obs. 3.2.2). En otras palabras, las correspondientes variables de la base Q/H estarían sujetas a vinculos y dejaría de tener sentido el pensarlas como arbitrariamente controladas. De hecho, $r_{1,2}$ y $R_{3,1}$ no pueden ser, ambas, arbitrarias dentro de Q/H ya que se debe cumplir el vínculo de no-deslizamiento. Al considerar el grupo G más grande, nos restringimos al espacio base más pequeño Q/G cuyas variables $r_{1,2}$ no resultan sujetas a los D-vinculos y, luego, pueden ser arbitrariamente controladas a priori.

Nótese que $dimg^q = 4$, con lo cual la *ley de conservación* anterior representa sólo 3 de las ecuaciones de movimiento (3.10). La ecuación faltante es

$$\left(\frac{d}{dt}\left(R_{3}^{-1}\dot{R}_{3}\right), Ad_{R_{3}^{-1}}Ad_{R_{2}}\xi_{z}\right)_{\mathfrak{so}(3)} = 0,$$
(3.59)

la cual implica que no hay aceleración angular de la bola pequeña en la dirección de CM_1 – CM_2 . Este mismo efecto se observa en el ejemplo de una bola sobre una mesa giratoria (véanse [5] y la sección anterior).

Finalmente, de la sección 3.4.4, sabemos que podremos escribir fórmulas de fases de reconstrucción para el movimiento del sistema utilizando las conservaciones \mathfrak{h} -horizontales. Seguidamente, resumiremos el proceso de Q-reconstrucción para obtener la solución c(t) a partir del movimiento en la base $\tilde{c}(t)$.

• Comenzamos con $d_0(t) = (e, r_{2,1}(t), e)$, y con $c(t) = (R_1(t), r_2(t), R_3(t)) \in Q$ representando la solución buscada.

• A fin de utilizar los resultados de las secciones previas, elegimos otro gauge que sea noholónomo d_0^{NH} . Definimos a éste mediante $d_0^{NH}(t) = (R_{1,NH}, R_{3,NH}^{-1} R_{1,NH})(t) \cdot d_0(t)$ con

$$\begin{bmatrix} D - vinc. + 1ec. \end{bmatrix} - \frac{a}{r} \left(-\dot{R}_{1,NH} R_{1,NH}^{-1} + \dot{R}_{3,NH} R_{3,NH}^{-1} \right) = Ad_{R_{1,NH}} \dot{R}_{2,1} R_{2,1}^{-1}$$
$$\begin{bmatrix} i_{\mathfrak{h}}^{*} J(\dot{d}_{0}^{NH}) = 0 \end{bmatrix} I_{3} \dot{R}_{3,NH} R_{3,NH}^{-1} + \left(I_{1} + Ad_{R_{1,NH}R_{2,1}} I_{20} Ad_{R_{2,1}^{-1}} \right) \dot{R}_{1,NH} R_{1,NH}^{-1} + Ad_{R_{1,NH}R_{2,1}} I_{20} R_{2,1}^{-1} \dot{R}_{2,1} = 0$$

para $r_{2,1}(t) = rR_{2,1}(t)\check{z}$ y condiciones iniciales triviales para $R_{i,NH}$, i = 1, 3. Equivalentemente, podríamos haber elegido el gauge no-holónomo horizontal (3.16), llevando a la misma ecuación $i_b^* J(\dot{d}_0^{NH}) = 0$ sumada a los 2 vínculos (3.58) y a una ecuación más (cuya expresión es un poco más complicada).

• Escribimos $c(t) = (R, g_3)(t) \cdot d_0^{NH}(t)$. Nótese que, dado que las simetrías horizontales son no-completas, la ec. (3.15) para $g(t) \equiv (R, g_3)(t)$ es no-trivial:

$$g_3^{-1}\dot{g}_3 = \lambda(t) \ Ad_{R_{3,NH}^{-1}} Ad_{R_{1,NH}R_{2,1}}\xi_z$$

con $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ a determinar (dinámicamente). Las ecuaciones verticales de movimiento para g(t) son

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{h}-conservation \end{bmatrix} i_{\mathfrak{h}}^{*}J(\dot{c}) = const = Ad_{R} \left(I_{d_{0}^{NH}}^{\mathfrak{h}}R^{-1}\dot{R} - \lambda I_{3}Ad_{R_{1,NH}R_{2,1}}\xi_{z} \right) =: Ad_{R}\Pi^{\mathfrak{h}}(t)(3.60)$$
$$\begin{bmatrix} Eq. (3.59) \end{bmatrix} \lambda = \left(\frac{d}{dt} \left[Ad_{R_{3,NH}^{-1}}R^{-1}\dot{R} + R_{3,NH}^{-1}\dot{R}_{3,NH} \right], Ad_{R_{3,NH}^{-1}}Ad_{R_{1,NH}R_{2,1}}\xi_{z} \right)_{\mathfrak{so}(3)}$$

siendo $I_{d_0^{NH}}^{\mathfrak{h}} = I_1 + Ad_{R_{1,NH}R_{2,1}}I_{2,0}Ad_{(R_{1,NH}R_{2,1})^{-1}} + I_3 : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{so}(\mathfrak{z})$ el correspondiente tensor de inercia restringido.

Arriba, g_3 es tal que $R_{1,NH}^{-1}R_{3,NH}g_3^{-1} = R_{3,1}(t) = R_1^{-1}(t)R_3(t)$ representa la rotación de la bola pequeña tal y como es vista desde un sistema de referencia con orígen en CM_2 y ejes rotando junto con la bola grande, es decir, es lo que un astronauta vería al estar parado en el interior de la nave (véase la obs. 3.5.3 y la figura 3.1). Además,

$$\lambda = \left(g_3^{-1}\dot{g}_3, Ad_{R_{3,NH}^{-1}}Ad_{R_{1,NH}R_{2,1}}\xi_z\right)_{\mathfrak{so}(3)} = \left(\dot{g}_3g_3^{-1}, Ad_{R_3^{-1}R_2}\xi_z\right)_{\mathfrak{so}(3)}$$

representa una corrección dinámica a la velocidad angular (espacial) de la bola pequeña en la dirección normal $CM_1 - CM_2$ que es necesaria para que (3.59) se cumpla desde el sistema de referencia inercial.

Nótese que las ecuaciones anteriores para R y λ están *acopladas*. A pesar de esto, en la factorización obtenida

$$c(t) = \left(R \ R_{1,NH}, R \ R_{1,NH} \ R_{2,1}, R \ R_{3,NH} \ g_3^{-1}\right)$$

cada factor definido más arriba representa una pieza más simple a partir de la cual el movimiento completo del sistema resulta inducido por el de la base $R_{2,1}(t)$. Esto muestra que se puede sacar ventaja (geométricamente) de la estructura cinemática del sistema a la hora de escribir la solución parcialmente controlada. Más aún, la reorientación global R admite una factorización posterior que es implementada por las fórmulas de fase que corresponden al proceso de reconstrucción asociado a las \mathfrak{h} -conservaciones (sec. 3.4.4).

La fórmula de fases para R Desde la sec. 3.4.4, sabemos que R(t) puede ser reconstruido a partir de una solución para el momento angular total referido al cuerpo $\Pi^{\mathfrak{h}}(t)$ que yace en $O_{i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c})} \simeq S^2_{radius=i_{\mathfrak{h}}^*J(\dot{c})} \subset Lie(H) = \mathfrak{so}(\mathfrak{z}) \simeq \mathbb{R}^3$, dentro del U(1)-fibrado $SO(\mathfrak{z}) \longrightarrow S^2_{radius=||i_{\mathfrak{h}}^*J||}$ (véanse los detalles sobre este fibrado en [6] y el capítulo anterior). En este caso, $\Pi^{\mathfrak{h}}(t)$ fue definido en la ec. (3.60) y, desde (3.48) usando el isomorfismo $\mathfrak{so}(\mathfrak{z}) \simeq \mathbb{R}^3$,

$$\dot{\Pi}^{\mathfrak{h}}(t) = \Pi^{\mathfrak{h}}(t) \times \left((I_{d_0^{NH}(t)}^{\mathfrak{h}})^{-1} \left[\Pi^{\mathfrak{h}}(t) + \lambda I_3 R_{1,NH} \frac{r_{2,1}}{r} \right] \right)$$

en donde × indica el producto vectorial usual de \mathbb{R}^3 . Esta ecuación coincide con la presentada genéricamente en [6] pero en un gauge muy preciso $\tilde{d}_0^{NH} = (e, g_3) \cdot d_0^{NH}$, que vuelve a todo el procedimiento compatible con los D-vínculos. También, en este caso, esta ecuación queda acoplada a otra, la que dá la dinámica de λ , dado que las simetrías horizontales son no-completas.

La fórmula de fase asociada a la reconstrucción descripta en la sec
. 3.4.4, cuando $i_{\rm h}^*J\neq 0,$ es

$$R(t) = exp\left(\theta^{Dyn}(t)\frac{i_{\mathfrak{h}}^{*}J}{\left\|i_{\mathfrak{h}}^{*}J\right\|}\right)R^{Geom}(t)$$

con el elemento constante $i_{\mathfrak{h}}^* J \in \mathfrak{so}(\mathfrak{z})$. La fase geométrica $\mathbb{R}^{Geom}(t)$ es el levantamiento horizontal del momento angular total referido al cuerpo $\Pi^{\mathfrak{h}}(t)$, en el U(1)-fibrado $SO(\mathfrak{z}) \longrightarrow S^2_{radius=\|i_{\mathfrak{h}}^* J\|}$, con respecto a la conexión $A_g(\dot{g}) = \left(\dot{g}g^{-1}, \frac{i_{\mathfrak{h}}^* J}{\|i_{\mathfrak{h}}^* J\|}\right)_{\mathfrak{so}(\mathfrak{z})}$ (los detalles se encuentran en [6] y en el capítulo anterior). La fase dinámica $\theta^{Dyn}(t) \in U(1) = H_{i_b^*J}$ que a definida por (recuérdese la sec.

3.4.4)

$$\begin{split} \theta^{Dyn}(t) &= \frac{1}{\left\|i_{\mathfrak{h}}^{*}J\right\|} \int_{t_{1}}^{t} ds \, \left[2K(\frac{d}{dt}c(s)) - 2K_{int}(s) + \lambda(s)\left(\frac{2}{5}m_{2}a^{2}\right)\left(\xi_{z}, \left(I_{e}^{\mathfrak{h}}\right)^{-1}Ad_{R_{2}^{-1}(s)}i_{\mathfrak{h}}^{*}J\right)_{\mathfrak{so}(3)} + \\ &+ \frac{\lambda(s)^{2}\left(\frac{2}{5}m_{2}a^{2}\right)^{2}}{\frac{2}{5}m_{1}(r+a)^{2} + \frac{2}{5}m_{2}a^{2}}] + \theta_{0}^{Dyn} \end{split}$$

en donde K representa la energía cinética del sistema total en Q, descripta en A.1 y $I_e^{\mathfrak{h}} = I_1 + I_{2,0} + I_3$. La rotación R_2 se define mediante $r_2(t) = rR_2(t)\check{z}$, y representa el movimiento físico de CM_2 en c(t). Nótese la ineludible dependencia (dinámica) en λ de la fórmula de la fase dinámica. Ésta se debe a que las simetrías horizontales son no-completas (comparar dicha fórmula con la del caso no sujeto a D-vínculos de [6] y del capítulo anterior).

Finalmente, vale la pena observar que, cuando la solución $\Pi^{\mathfrak{h}}(t)$ es una curva cerrada y simple para $t \in [t_1, t_2]$, entonces

$$R(t_2) = exp\left(\left(\theta^{Dyn}(t_2) + \theta^{Geom}\right)\frac{i_{\mathfrak{h}}^*J}{\left\|i_{\mathfrak{h}}^*J\right\|}\right)R_1(t_1)$$

con $\theta^{Dyn}(t_2)$ tal y como fue dado arriba y θ^{Geom} dado (mod. 2π) por menos el ángulo sólido (orientado) encerrado por $\Pi^{\mathfrak{h}}(t)$ en la 2-esfera de radio $\left\|i_{\mathfrak{h}}^*J\right\|$ que está dentro de $\mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)$. La fórmula anterior es un ejemplo de una fórmula de fase D-generalizada para cuerpos auto-deformantes que no fueron considerados en [6].

Observación 3.5.5. (Control) Las fórmulas anteriores pueden resultar útiles a los propósitos del control del sistema, esto es, cuando se quiere encontrar la curva $R_{2,1}(t)$ apropiada que induzca una dada reorientación global $R(t_2)$.

Observación 3.5.6. (El caso $i_{\mathfrak{h}}^*J = 0$) En tal caso, la ecuación para R es geométrica, ya que R debe ser horizontal, a lo largo de $\tilde{d}_0^{NH} = (e, g_3) \cdot d_0^{NH}$, con respecto a la \mathfrak{h} -conexión mecánica. Sin embargo, esta ecuación para R está acoplada a la de g_3 (equiv. λ) que no es de naturaleza geométrica. En consecuencia, el movimiento completo inducido desde la curva base controlada $\tilde{c}(t) = R_{2,1}(t) \in B$ no es totalmente geométrico con respecto a ésta. La causa se remonta a que las simetrías horizontales no son completas (comparar con la observación 3.4.11) y, por lo tanto, a que éstas no agotan la totalidad de la dinámica vertical (i.e. por la presencia de la ecuación dinámica adicional (3.59); comentarios similares pueden encontrarse en [5]).

3.5.4 Cuerpo deformable con momento magnético dipolar en un campo magnético externo

En este ejemplo, describiremos el movimiento de un cuerpo (deformable) que tiene momento magnético $M \in \mathbb{R}^3$ en presencia de un campo magnético externo B. Cuando la deformación es conocida como función del tiempo, este sistema puede¹⁴ modelarse como un sistema controlado y sujeto a D-vínculos afines para el que el momento no resulta conservado a causa del torque magnético externo y, por lo tanto, que no fue cubierto en [6] (el capítulo anterior). Asumiremos que valen las siguientes hipótesis sobre la naturaleza magnética del sistema:

• el momento magnético es proporcional al momento angular J del cuerpo, i.e.

$$M = \gamma J$$

en donde γ es el factor giromagnético ([11]).

• la interacción con el campo magnético externo B es del tipo dipolar ([11]), esto es

$$\frac{d}{dt}J = M \times B$$

en donde $M \times B$ representa al torque externo que actua sobre el dipolo y \times denota el producto vectorial usual en \mathbb{R}^3 .

• lo anterior sigue valiendo cuando la forma $c(t) \in Q$ (la definición de este espacio de configuraciones puede encontrarse en [20, 24] y en el capítulo anterior) del cuerpo subyacente y el campo B(t) varían con el tiempo¹⁵.

Las hipótesis anteriores permiten derivar la ecuación de movimiento para el momento angular del cuerpo deformable $J(\dot{c})$

$$\frac{d}{dt}J(\dot{c}) = \gamma J(\dot{c}) \times B(t).$$

Si definimos el vector-frecuencia de Larmor ([11]) como $\omega_l(t) := -\gamma B(t) \in \mathbb{R}^3$, entonces la ecuación anterior es equivalente a

$$J(\dot{c}) = h_M(t)L_0 \stackrel{\Psi}{\equiv} Ad^*_{h_M(t)}\hat{L}_0$$

¹⁴De hecho, las ecuaciones correspondientes no pueden obtenerse mediante los planteos hamiltonianos usuales.

¹⁵Nótese que estamos despreciando auto interacciones magnéticas del cuerpo con él mismo.

en donde $h_M(t) \in SO(3)$ está definido por

$$\dot{h}_M h_M^{-1}(t) = \hat{\omega}_l(t)$$

 $h_M(t_1) = Id$

y $\hat{\omega}_l = \Psi^{-1}(\omega_l) \in so(3)$, siendo $\Psi : (so(3), [,]) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \times)$ el isomorfismo usual (de álgebras de Lie). También arriba, \hat{L}_0 denota el valor inicial de $J(\dot{c}(t_1))$ visto como elemento de $so(3)^*$ a través de los isomorfismos usuales.

Las ecuaciones para el movimiento de un tal sistema pueden ser obtenidas como las que corresponden al sistema lagrangiano sujeto a vínculos afines $(TQ, \mathcal{L}, \mathcal{A}^D, \Gamma)$, en donde

- $Q \longrightarrow Q/G$ es el espacio de configuraciones del cuerpo deformable subyacente ([20, 6] y el capítulo anterior) con grupo de simetría G = SO(3),
- el lagrangiano está dado por la energía cinética $\mathcal{L}(\dot{q}) = \frac{1}{2}k_q(\dot{q}, \dot{q})$, en donde k_q es la métrica G-invariante en TQ inducida por la usual en \mathbb{R}^3 ([20]),
- \mathcal{A}^D es la 1-forma de conexión *mecánica* en $Q \longrightarrow Q/G$ dada por

$$\mathcal{A}^D(\dot{q}) = I_q^{-1} J(\dot{q})$$

para I_q denotando el tensor de inercia y $J: TQ \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el momento angular usual,

• $\Gamma: Q \longrightarrow \mathfrak{g}$ es la aplicación

$$\Gamma(q) = I_q^{-1}(Ad_{h_M(t)}^*\hat{L}_0).$$

Los vínculos afines para la curva física c(t) son, entonces,

$$\mathcal{A}^{D}(\dot{c}(t)) = \Gamma(c(t)). \tag{3.61}$$

Continuaremos con el análisis en el caso controlado, es decir que agregamos la hipótesis (H2) que dice que la curva base $\tilde{c}(t) \in Q/G$, que representa la forma cambiante del cuerpo, está dada.

Nótese que la distribución D asociada a la conexión mecánica \mathcal{A}^D es transversal a las órbitas del grupo G ya que define una conexión principal (véanse los detalles en [20]). Luego, los resultados de la sección 3.3.2, aplicados a este caso particular, dicen que las ecuaciones de movimiento (3.26) para g(t) son triviales (i.e. 0 = 0 porque $\mathfrak{g}^q = 0 \forall q$).
$$\begin{array}{lcl} Ad^{*}_{g(t)}I^{g}_{d^{Mec}_{0}(t)}\left(g^{-1}\dot{g}\right) &=& Ad^{*}_{h_{M}(t)}\hat{L}_{0}\\ g(0) &=& Id. \end{array}$$

Siguiendo lo expuesto en 3.4.5, llamamos

$$R_M(t) = h_M^{-1}(t)g(t) \in SO(3)$$

con lo que

$$Ad_{R_{M}(t)}^{*}I_{d_{0}^{Mec}(t)}\left(g^{-1}\dot{g}\right) = \hat{L}_{0}$$

resulta una cantidad conservada. El paso de g a R_M puede ser entendido como el pasar a describir el sistema desde un nuevo sistema de referencia que rota, a través de $h_M(t)$, con respecto al original (el inercial) con velocidad angular (espacial) $\omega_l(t)$ (véase [11] pp. 231).

La ecuación de conservación puede transformarse en

$$L(R_M(t),\Pi(t)) = \hat{L}_0 \in \mathfrak{g}^*$$

con $\Pi(t) := I_{d_0^{Mec}(t)} \left(g^{-1}\dot{g}\right)$ el momento angular referido al cuerpo y con $L: G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, $L(R_M, \Pi) = Ad_{R_M}^* \Pi$. Estamos, luego, en la situación descripta en A.2. La rotación $R_M(t)$ puede, entonces, ser reconstruida ([15]) a partir de $\Pi(t)$ en el U(1)-fibrado $L^{-1}(\hat{L}_0) \simeq$ $SO(3) \longrightarrow O_{\hat{L}_0}$. Obsérvese que $O_{\hat{L}_0} \simeq S^2$ cuando $\hat{L}_0 \neq 0$. El momento $\Pi(t)$ está destinado a la órbita coadjunta $O_{\hat{L}_0}$ y satisface

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = \Pi(t) \times \Psi\left(R_M^{-1}\dot{R}_M\right) = \Pi(t) \times \Psi\left(I_{d_0^{Mec}(t)}^{-1}\Pi(t) - Ad_{g^{-1}}\hat{\omega}_l(t)\right).$$
(3.62)

El proceso de reconstrucción sigue las lineas de [6], el capítulo anterior y la sec. 3.4.5. Supongamos que la solución $\Pi(t)$ describe una curva cerrada y simple en la esfera $S^2_{\parallel \hat{L}_0 \parallel} = O_{\hat{L}_0}, \Pi(t_1) = \Pi(t_2) = \hat{L}_0$; la reconstrucción arroja entonces

$$R_{M}(t_{2}) = exp\left((\theta^{Dyn}(t_{2}) + \theta^{Geom})\frac{\hat{L}_{0}}{\left\|\hat{L}_{0}\right\|}\right)$$

en donde la *fase geométrica* es el ángulo θ^{Geom} que coincide (mod 2π) con menos el ángulo sólido (orientado) encerrado por $\Pi(t)$ en la esfera (véase [6]), y la *fase dinámica* $\theta^{Dyn}(t)$ se

. e

calcula mediante

$$\theta^{Dyn}(t) = \frac{1}{\left\|\hat{L}_0\right\|} \int_{t_1}^t ds \left(\left\langle \Pi(s), I_{d_0^{Mec}(s)}^{-1} \Pi(s) \right\rangle - \left\langle \hat{J}(\dot{c}), \hat{\omega}_l(s) \right\rangle \right).$$

En la expresión anterior, el primer término dá $2K - 2K_{int}$, donde K representa la energía cinética de rotación (véase A.1) mientras que el segundo término es la energía potencial magnética del sistema ([11] pp. 230). Finalmente, la fórmula de fase para la curva física $c(t) \in Q$ resulta

$$c(t_2) = h_M(t_2) \cdot exp(\theta^{Dyn}(t_2) \frac{\hat{L}_0}{\left\|\hat{L}_0\right\|}) \cdot exp(\theta^{Geom} \frac{\hat{L}_0}{\left\|\hat{L}_0\right\|}) \cdot d_0^{Mec}(t_2)$$

que determina la posición exacta del sistema en el (dinámicamente definido) instante de tiempo t_2 para el que el momento angular referido al cuerpo $\Pi(t)$, solución de (3.62), retorna a su valor inicial. Ésta es la versión D-afín (magnética) del resultado obtenido en [6] y en el capítulo anterior.

Capítulo 4

Elementos geométricos en el estudio de las fases de Berry cuánticas

Este capítulo está basado en [8]. Nos desviamos, en este último capítulo, hacia el estudio de las fases geométricas en sistemas mecánico-cuánticos.

4.1 Introducción

El descubrimientode las fases de Berry [4] para sistemas cuánticos dependientes de parámetros externos puso en evidencia la existenca de características geométrico-diferenciales fundamentales en la física cuántica. De hecho, en la *naturaleza geométrica* de estas fases radican ambas, su importancia teórica y la capacidad de realizar exprerimentos en los que estas fases pueden ser detectadas [25]. En vista de este hecho, es importante tener una descripción apropiada de los datos físicos subyacentes al sistema en términos de los objetos geométricos que llevan al cambio de fase bajo estudio.

Usualmente [28], para fases no-abelianas, dicho planteo geométrico se implementa recurriendo al U(k)-fibrado universal sobre la grassmanniana $G_{K^m}(\mathcal{H})$ [12] de subespacios K^m -dimensionales del espacio de Hilbert total \mathcal{H} , munido de su conexión canónica. Cuando el parámetro b varía dentro de un espacio de parámetros \tilde{B} , el autoespacio K^m -dimensional $F_b^m \subset \mathcal{H}$ correspondiente a una dada energía $\epsilon^m(b)$ varía, también, describiendo una curva en la grassmanniana. El transporte paralelo a lo largo de dicha curva captura el efecto de la fase de Berry.

El propósito de este breve capítulo es el de resaltar el hecho de que la geometría que resulta directamente relevante al estudio del problema físico subyacente no es la del mencionado fibrado universal, sino la del fibrado *pull back* [12] a lo largo de la aplicación Espacio de Parámetros — Grassmanniana. De hecho, el espacio de *parámetros físicos* puede ser mucho más pequeño y/o tener una geometría bien diferente a la de la variedad grassmanniana. Observamos esto en el mismo sentido en que la geometría de una 2-esfera $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, a pesar de quedar definida por la de \mathbb{R}^3 , es *diferente* de la del espacio ambiente \mathbb{R}^3 y puede ser *independientemente* estudiada. Un ejemplo muy simple que refleja este hecho viene dado por el sistema que consiste en un spin s grande ($s \ge 1$) en un campo magnético externo. En tal caso, la dimensión de la grassmanninana puede resultar inmensa (igual a 4s) mientras que el espacio de autoespacios $F_b^m \subset \mathcal{H}$ físicamente accesibles a través de la manipulación del campo magnético externo es una subvariedad de dimensión no mayor a 3 para cualquier s (véanse los ejemplos más abajo).

Por otro lado, considerar el fibrado pull back trae la ventaja estratégica de permitir un estudio directo de cómo es que la geometría del espacio de parámetros físicos B influye sobre la fase de Berry resultante. Más aún, este fibrado pull back $U(E^m) \longrightarrow B$, al que nos referiremos como fibrado de Berry, puede ser directamente construido a partir de los datos naturales del sistema cuántico: el espacio de Hilbert de estados \mathcal{H} y el Hamiltonian H(b) parámetro-dependiente; sin necesidad de recurrir al fibrado universal. La construcción misma lleva a identificar la topología relevante del espacio de parámetros permitidos $B \subset \tilde{B}^1$. En las secciones siguientes, daremos los detalles de esta construcción básica y directa del fibrado de Berry, la cual captura las características geométricas escenciales de la dependencia paramétrica del sistema. En este contexto, el fibrado universal tiene una aparición a posteriori justificada únicamente por su propiedad universal [12].

Finalmente, resaltamos que esta construcción presenta, además, la ventaja de la computabilidad: en la mayoría de los casos, el fibrado de Berry puede ser concretamente construido y caracterizado, juto con la correspondiente conexión de Berry sobre él. La razón es que, típicamente, el espacio de parámetros permitidos B, que es la base del fibrado de Berry, es simplemente \mathbb{R}^n menos puntos singulares. En consecuencia, una caracterización

¹Berry [4] fue el primero en notar el rol crucial que juegan las singularidades del espacio de parametros en la fase geométrica resultante.

directa de dicho fibrado en términos de un cubrimiento por abiertos y de funciones de transición se torna plausible.

El lector puede, además, llegar a encontrar interesante el hecho de que los ingredientes básicos de la teoría de fibrados que mencionamos arriba, v.g. funciones de transición y expresiones locales para la conexión, parecerían haber sido creados *ad hoc* del estudio de las fases de Berry.

Al final del capítulo, como fue sugerido en [14], aplicaremos la mencionada construcción en sistemas cuánticos concretos, algunos de ellos típicos y otros recientemente investigados, obteniendo nuevos resultados sobre la geometría global subyacente.

4.2 Planteo y notación

Recordaremos algunos puntos bien conocidos sobre las fases de Berry (no-abelianas). Sea $(\mathcal{H}, H(b))$ un sistema cuántico, en el que el operador hamiltoniano $H(b) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ depende suavemente de parámetros externos $b \in \tilde{B}$, siendo \tilde{B} una variedad dentro de la que, a priori, los parametros pueden ser elegidos.

Para cada parámetro $b, P^m(b) : \mathcal{H} \longrightarrow F_b^m$ denota la correspondiente proyección ortogonal. Como es usual, el operador evolución $U_{t,t_0} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ consiste en un operador unitario tal que $\psi(t) = U_{t,t_0}\psi(t_0)$, con $\psi(t)$ denotando el estado cuántico del sistema a tiempo t. Consideremos $b(t) : I = [t_i, t_f] \longrightarrow \tilde{B}$, una curva suave a trozos dentro del espacio de parámetros \tilde{B} . Cuando la evolución temporal de los parámetros b(t) es lenta, podemos asumir que ésta es (aproximadamente) adiabática y, luego, resulta una buena aproximación el suponer que si $\psi(t_0) \in F_{b(t_0)}^m$ entonces $\psi(t) \in F_{b(t)}^m$ para cada $t \in I$. En consecuencia, el operador evolución puede escribirse como²

$$U_{t,t_0} = \sum_m U_{t,t_0}^m,$$

en donde los bloques son las aplicaciones lineales (unitarias)

$$U_{t,t_0}^m = P^m(b(t))U_{t,t_0}P^m(b(t_0)): F_{b(t_0)}^m \longrightarrow F_{b(t_0)}^m.$$

Consideremos, como es usual, una curva $R_{t,t_0}: I \longrightarrow U(\mathcal{H})$ de operadores unitarios

²Esta descomposición diagonal en bloques se apoya de manera fundamental en la hipótesis adiabática. En el contexto de las *fases abelianas*, i.e. para niveles de energía no-degenerados, la geometría de las fases *no-adiabáticas* puede ser capturada por el espacio (proyectivo) de rayos asociado a \mathcal{H} . Ver, por ejemplo, [2].

en \mathcal{H} que lleve al autoespacio a tiempo $t_0, F_{b(t_0)}^m$, al autoespacio a tiempo $t, F_{b(t)}^m$. Escribiendo

$$U_{t,t_0}^m = R_{t,t_0} \tilde{U}_{t,t_0}^m = R_{t,t_0} P^m(b(t_0)) \tilde{U}_{t,t_0}^m$$

en donde $\tilde{U}_{t,t_0}^m \in U(F_{b(t_0)}^m)$ es un endomorfismo unitario del subespacio $F_{b(t_0)}^m \subset \mathcal{H}$, y a partir de la ecuación de Schrodinger, puede deducirse que $\tilde{U}_{t,t_0}^m = U_{dyn}^m(t)U_{geom}^m(t)$, el producto de una parte dinámica por otra geométrica. La parte geométrica (no-abeliana) queda definida por

$$\frac{d}{dt}U_{geom}^{m}(t)U_{geom}^{m\dagger}(t) = -P^{m}(b(t_{0}))R_{t,t_{0}}^{-1}\frac{d}{dt}R_{t,t_{0}}P^{m}(b(t_{0})).$$
(4.1)

Cuando la curva en el espacio de parámetros b(t) es cerrada, i.e. $b(t_0) = b(t_f)$, entonces el operador unitario $U^m_{geom}(t_f)$ coincide con la (o el factor de) fase de Berry (no-abeliana) para el sistema cuántico parametro-dependiente subyacente.

En las secciones siguientes, la naturaleza geométrica de $U_{geom}(t_f)$ resultará clara.

4.3 Fibrados de Berry sobre el espacio de parámetros

Construiremos un fibrado vectorial E^m sobre el espacio de parámetros permitidos $B \subset \tilde{B}$, capturando la geometría escencial que subyace a la dependencia paramétrica del sistema cuántico. Esta construcción puede adaptarse fácilmente al caso de los operadores adiabáticos e invariantes, como fue sugerido en [26]. Dicho fibrado debe tener por fibra, sobre cada parámetro $b \in B$, al espacio vectorial de todos los posibles autoestados de H(b) con un dado autovalor $\epsilon^m(b)$. Requerimos esto ya que, cuando los parámetros varíen adiabáticamente b(t), la evolución del sistema quedará, entonces, descripta por una curva $\psi(t)$ en E^m que se proyecta sobre b(t) en la base B. En otras palabras, $\psi(t)$ será un levantamiento de la curva base b(t). Para comenzar con la construcción, asumimos las siguientes condiciones de suavidad sobre la dependencia de H en los parámetros externos:

- (i) los autovalores (o autoenergías) ε^m(b) de H(b) pueden ser elegidos de manera suave (en b), m = 1, 2, ... mediante funciones suaves B → ℝ llevando b → ε^m(b) de manera tal que det(H(b) ε^m(b)id_H) = 0 para todo b ∈ B.
- (ii) el grado de degeneración $K_m := \dim(F_b^m)$ del nivel de energía $\epsilon^m(b)$ es constante para todo $b \in B$.

El espacio de parámetros permitidos B resulta ser, entonces, \tilde{B} menos los puntos singulares en los que estas condiciones no se cumplen. Al remover tales puntos singulares se crean (n-)agujeros llevando a que B tenga una topología no-trivial³ y, en consecuencia, que admita fibrados no-triviales sobre él (estos fibrados son los que subyacen a las fases de Berry). Nótese que la topología de este espacio de parámetros surge naturalmente en nuestra construcción a partir de los datos físicos.

4.3.1 Fibrado de Berry vectorial $E^m \longrightarrow B$

Fijemos un nivel de energía etiquetado por m y consideremos la aplicación \mathfrak{F}^m : $B \times \mathcal{H} \longrightarrow B \times \mathcal{H}$ dada por $\mathfrak{F}^m(b, \alpha) := (b, H(b)\alpha - \epsilon^m(b)\alpha)$. Ésta es un morfismo de fibrados vectoriales y, dado que la dimensión de los autoespacios de H(b) es constante por hipótesis, el rango de \mathfrak{F} es el mismo en todas las fibras. Luego, $E^m := Ker(\mathfrak{F}^m)$ resulta ser un fibrado vectorial sobre B, al que nos referiremos como al fibrado de Berry vectorial. Como fue mencionado en la introducción, este fibrado puede obtenerse a partir del universal mediante el pull back a través de la aplicación $B \longrightarrow G_{K^m}(\mathcal{H})$. Nótese que, como queríamos, $E^m = Ker(\mathfrak{F}^m) = \bigsqcup_{b \in B} F_b^m$ y la proyacción queda dada por

$$\pi : E^m \longrightarrow B$$
$$: |m(b), i\rangle \longmapsto b$$

si $|m(b), i\rangle \in F_b^m$, $i = 1...K_m$. Además, el fibrado vectorial E^m viene munido de una **métrica en las fibras** que es inducida por la métrica del espacio de Hilbert total \mathcal{H} . Recalcamos que la geometría de este fibrado queda determinada *directamente* por los datos físicos que involucran la dependencia del hamiltoniano H(b) en los parámetros externos b.

4.3.2 Fibrado de Berry $U(K_m)$ -principal sobre B

Ahora, realizaremos el paso análogo al de cambiar la descripción del sistema desde los términos de los estados dependientes del tiempo en \mathcal{H} a los del operador evolución en $U(\mathcal{H})$. Más aún, la construcción siguiente puede aplicarse a cualquier fibrado vectorial hermítico E^m sobre una variedad diferenciable cualquiera B, lo que indica que la geometría intrínseca al problema ya estaba codificada en E^m . Consideremos el fibrado

³Berry [4] observó desde el comienzo el importante papel que juegan las singularidades en la descripción de las fases.

 $U(K_m)$ -principal de bases ortonormales $\{|m(b), i\rangle\}$ de E^m

$$\pi : U(E^m) \longrightarrow B$$
$$: \{|m(b), i\rangle\} \mapsto b$$

sobre el cual actua el grupo de Lie $U(K_m)^4$ por derecha mediante

$$\{|m(b),k\rangle\}\cdot (a_j^i)=\{|\widetilde{m(b),k}\rangle=\Sigma_j\ a_j^k\ |m(b),j\rangle\}.$$

Nos referiremos a este $U(E^m) \longrightarrow B$ como al fibrado de Berry sobre el espacio B de parametros permitidos. Como fue enunciado en la introducción, este fibrado principal $U(E^m)$ puede obtenerse del universal mediante el pull back a través de la aplicación $B \longrightarrow$ $G_{K^m}(\mathcal{H})$. Eligiendo un $b_0 \in B$ y haciendo uso de la biyección

$$U(E^m) \equiv \bigsqcup_{b} \{aplicaciones \ lineales \ \hat{u} : F_{b_0}^m \longrightarrow F_b^m \ tales \ que \ \langle \hat{u}v, \hat{u}w \rangle_{\mathcal{H}} = \langle v, w \rangle_{\mathcal{H}} \},$$

todo elemento $\{|m(b),k\rangle\} \in U(E^m)$ puede ser visto como una aplicación $\hat{u}: F_{b_0}^m \longrightarrow F_b^m$.

4.3.3 Geometrías local y global

Puede probarse [12] que, para todo $b_0 \in B$, existe un parche abierto $U_{b_0} \subseteq B$ alrededor de b_0 y una aplicación suave

$$R: U_{b_0} \longrightarrow Isom(F_{b_0}^m \longrightarrow \mathcal{H})$$

$$(4.2)$$

tal que, para cada $b \in U_{b_0}$, $\{R_b | m(b_0), i\rangle\}_{i=1}^{K_m}$ es una base ortonormal (móvil) del autoespacio $F_b^m \subseteq \mathcal{H}$ que yace sobre el parámetro b. Arriba, $\{|m(b_0), i\rangle\}_{i=1}^{K_m}$ indica una base ortonormal fija (cualquiera) de $F_{b_0}^m$ y $Isom(F_{b_0}^m \longrightarrow \mathcal{H})$ denota la variedad de isometrías lineales que van de F en \mathcal{H} . La aplicación R_b de la ec. (4.2) define secciones locales suaves para los fibrados de Berry E^m y $U(E^m)$ mediante $\sigma_i^R(b) = R_b | m(b_0), i\rangle$ and $\Sigma^R(b) = R_b P^m(b_0) : F_{b_0}^m \longrightarrow F_b^m$, respectivamente. Nótese, sin embargo, que dichos fibrados bien pueden no admitir secciones globales ya que, en la intersección de parches diferentes, bases móviles diferentes de la misma F_b^m pueden pegarse de manera no-trivial. Esta geometría global, determinada por la b-dependencia del hamiltoniano del sistema H(b), queda capturada por las funciones

⁴El grupo de transformaciones unitarias de \mathbb{C}^{K_m} .

de transición [13] asociadas al fibrado de Berry $\psi_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \subset B \longrightarrow U(K_m) \simeq U(F_{b_0}^m),$ dadas por

$$\psi_{\alpha\beta}(b) = \sum_{i,j=1}^{K_m} \left\langle w_{\beta}^j(b) | w_{\alpha}^i(b) \right\rangle \left(\left| w^j(b_0) \right\rangle \left\langle w^i(b_0) \right| \right)$$
(4.3)

en donde $|w_{\alpha,\beta}^{i}(b)\rangle = R_{b}^{\alpha,\beta} |w^{i}(b_{0})\rangle$ con $R_{b}^{\alpha,\beta} : U_{\alpha,\beta} \longrightarrow U(E^{m})$ siendo secciones locales sobre dos parches, $U_{\alpha} \neq U_{\beta}$, que se intersectan, $\neq \{|w^{i}(b_{0})\rangle\}$ una base ortonormal fija de la fibra $F_{b_{0}}^{m}$ que está sobre un parámetro elegido $b_{0} \in B$.

4.3.4 La conexión de Berry que lleva a la fase

De la ecuación (4.2), tomamos $R_{t,t_0}P^m(b_0)$ como el $R_{b(t)} \in U(E^m)$ de la sección 4.2 y mantenemos el $U^m_{geom}(t) \in U(F^m_{b_0}) \simeq U(\mathbb{C}^{K_m})$ a determinar. Puede ser fácilmente visto que existe una conexión principal [13] globalmente definida en el fibrado principal $U(E^m) \xrightarrow{\pi} B, A^m : TU(E^m) \longrightarrow u(K_m) = Lie(U(K_m))$, que llamaremos conección de Berry, tal que su expresión local a lo largo de la sección Σ^R es

$$(\Sigma^{R*}A^m)_b = P^m(b_0) R^{-1}(b) \Big|_{F_b^m} d_b R P^m(b_0)$$
$$= \sum_{k=1}^{\dim B} \sum_{i,j=1}^{K_m} \left\langle w^j(b) \Big| \frac{\partial}{\partial b_k} |w^i(b) \right\rangle \left(\left| w^j(b_0) \right\rangle \left\langle w^i(b_0) \right| \right) db_k, \tag{4.4}$$

en donde b_k denotan coordenadas locales sobre $U_{b_0} \subset B$.

Entonces, la ec. (4.1) para la fase geométrica resulta equivalente al requerimiento de que la curva dada por

$$R_{t,t_0}P^m(b_0)\cdot U^m_{geom}(t),$$

dentro del fibrado de Berry $U(E^m)$, sea horizontal con respecto a la anterior conexión de Berry. En consecuencia, $R_{t,t_0}P^m(b_0) \cdot U^m_{geom}(t)$ representa el transporte paralelo de la condición inicial $id_{\mathcal{H}}P^m(b_0) \cdot U^m_{geom}(t_0)$ a lo largo de $b(t) \in B$. Cuando la curva de parámetros es cerrada $b(t_0) = b(t_f)$, es decir, cuando los parámetros retornan en algún momento a su estado inicial, y suponiendo que $U^m_{geom}(t_0) = id_{F^m_{b_0}}$ por simplicidad, el transporte paralelo de parche en parche nos provee de una holonomía [13] $U^m_{geom}(t_f) \in U(F^m_{b_0})$, que está geométrica y globalmente definida, y que coincide precisamente con la fase de Berry [4] (no-abeliana si $K_m > 1$) para el sistema cuántico subyacente.

4.3.5 La geometría de los fibrados de Berry sobre $B \simeq S^{2,1}$

El enfoque de este capítulo sobre la geometría de las fases de Berry permite hacer uso de la información física del sistema bajo estudio que está codificada en la topología del espacio de parámetros permitidos B. De hecho, con sólo asumir que B es (suavemente) equivalente homotópico a una esfera $S^{k=1,2}$, somos capaces de inferir conclusiones sobre la geometría del fibrado de Berry para un H(b) genérico, mediante algunos resultados teóricos (simples) de la teoría de fibrados.

(I) Para k = 2 se cumple que, si $E^m \longrightarrow B$ es orientable como fibrado vectorial, entonces el fibrado $U(K_m)$ -principal $U(E^m) \longrightarrow B$ es trivializable⁵.

(II) Para $k = 1, U(E^m) \longrightarrow B$ siempre es trivializable.

Es claro que, cuando el fibrado de Berry es trivializable, las consideraciones locales se extienden a la totalidad (o globalidad) del espacio de parámetros B debido a la existencia de secciones globales suaves. Esto simplifica el análisis y pone en evidencia el hecho de que, en tal caso, no hay una contribución geométrica-topológicamente no-trivial a la fase (geométrica).

4.4 Ejemplos

4.4.1 Spin en un campo magnético

En esta sección, discutiremos la geometría global que subyace al ejemplo básico presentado por Berry [4]. Sea $\mathcal{H} = V_{spin(s)}$ el espacio de Hilbert correspondiente a una partícula con spin s. Para $b \in \tilde{B} := \mathbb{R}^3$, sea

$$H(b) = g \hbar b \cdot \hat{s}$$

el hamiltoniano que dá la interacción entre esta partícula y un campo magnético externo representado por b. Para un $b \in \mathbb{R}^3$ fijo, los (2s + 1) autovalores de H(b) son

$$\epsilon^m(b) = g \,\,\hbar \, \|b\| \, m,$$

todos ellos con degeneración 1, excepto cuando b = 0, en donde todos los autovalores colapsan en uno solo totalmente degenerado. Vemos luego que la sub-variedad más grande

⁵Es decir, es isomorfo a uno trivial.

 $B \subset \mathbb{R}^3$ que satisface la condición (*ii*) anterior es

$$B:=\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\},$$

que es topológicamente equivalente a una 2-esfera.

Pregunta: Cuál es el fibrado de Berry para este sistema de spin?

En lo que sigue responderemos esta pregunta.

Fijemos un m tal que $-s \leq m \leq s$. Dado que $B \approx \mathbb{R}_{>0} \times S^2$, podemos cubrir a B con dos abiertos $U^{\pm} := \mathbb{R}_{>0} \times (S^2 - \{b_0^{\pm}\})$ tales que los fibrados de Berry resultan triviales al restringirnos a ellos. De hecho, si $b_0^{\pm} = (0, 0, \pm 1) \in S^2$ denotan los polos de la esfera, cada $\frac{b}{\|b\|} \in U^{\pm}$ puede ser llevado mediante una rotación al polo. Esta rotación induce una rotación en el espacio de representación de spin $\hat{R}^{\pm}(b)$ que lleva el autovector $|b_0^{\pm}, m\rangle \in F_{b_0}^m$ al que está sobre $b: |b^{\pm}, m\rangle \in F_b^m$; además, esta rotación puede ser suavemente elegida para cada b, definiendo, entonces, dos secciones locales suaves⁶ sobre U^{\pm} como en (4.2).

La clase de isomorfismos [12] a la que pertenece el U(1)-fibrado de Berry $U(E^m)$ sobre B de este ejemplo queda, luego, determinada por la clase de homotopía de la función de transición restringida a donde los dos parches se intersectan, i.e. por la clase de homotopía de

$$\psi_{+-}: \mathbb{R}_{>0} \times \{ecuador \ de \ S^2\} \longrightarrow U(1) \simeq \pi^{-1}(b_0^+) = \{\hat{u}: E_{b_0^+}^m \circlearrowleft\}.$$

Un cálculo directo de dicha función de transición, definida por (4.3), sobre los parámetros ecuatoriales $b = ||b|| (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \in \mathbb{R}_{>0} \times \{ecuador \ de \ S^2\}$ dá como resultado

$$\psi_{+-}(b) = e^{i2m\varphi} \left\langle b_0^+, m | b_0^-, m \right\rangle \ \left| b_0^+, m \right\rangle \left\langle b_0^+, m \right|.$$

Ya que es posible elegir $|b_0^{\pm}, m\rangle = |\pm m\rangle$, definidos por $\hat{S}_z |\pm m\rangle = \pm m |\pm m\rangle$, y dado que $\langle b_0^+, m | b_0^-, m\rangle$ no se anula nunca, concluimos que la función de transición ψ_{+-} enrosca el ecuador de S^2 2*m*-veces en U(1) (que es un círculo).

Este número de vuletas 2m especifica la clase de isomorfismos, antes mencionada, a la que $U(E^m)$ pertenece. Nótese que la clase de homotopía de la función de transición anterior no depende de ||b||, como era de esperarse basándose en la intuición física del

⁶Dichas secciones no dependen de ||b|| como era de esperarse.

problema. Más aún, esta clase depende *solamente* del la proyección m del spin sobre el eje⁷ z, y no de cuál es el spin total s. De esto se desprende el resultado fundamental: cuando dos partículas con spin s y s' son tales que m es un valor permitido para ambas proyecciones sobre el eje z, entonces $E^{m,s} \simeq E^{m,s'}$ y $U(E^{m,s}) \simeq U(E^{m,s'})$.

Por ejemplo, cualquier fermión (bosón) tiene asociado el mismo $U(E^{m=\frac{1}{2}})$ $(U(E^{m=0}))$, módulo isomorfismos. Concretamente,

- si m = ¹/₂, la función de transición queda caracterizada por el número de vueltas 1 y, luego, el fibrado de Berry es isomorfo a la conocida *fibración de Hopf SU(2) ≈ S³ → S²* [12]. En este caso (y solo en este caso), además, el fibrado de Berry resulta isomorfo al fibrado universal sobre la grassmanniana mencionado en la introducción.
- Para m = 1, el número de vueltas es 2, y el fibrado de Berry resulta, entonces, isomorfo al fibrado

$$egin{array}{rll} SO(3) &\longrightarrow & S^2 \ & r &\longmapsto & r \cdot b_0^1 \end{array}$$

que está relacionado con las *fases clásicas* asociadas a cuerpos rígidos [19] y a cuerpos que se deforman [6, 7], descriptas en los capítulos 2 y 3.

De las expresiones locales (4.4) para la conexión de Berry sobre U^+ , puede verse fácilmente que la holonomía $Hol(\Gamma) \in U(1) \simeq \{\hat{u} : E_{b_0^+}^m \circlearrowleft\}$ asociada a cualquier camino cerrado y simple Γ en B (medida desde la identidad de U(1)) es

$$Hol(\Gamma) = exp(-im\Omega(\Gamma)) |b_0^+, m\rangle \langle b_0^+, m|,$$

en donde $\Omega(\Gamma)$ denota el ángulo sólido (orientado) que tiene a Γ como borde. Recuperamos, entonces, la expresión obtenida, por primera vez, por Berry [4].

4.4.2 Fases no-abelianas en la computación cuántica holonómica

Al ejemplo siguiente lo tomamos de [10], en el contexto de la *computación cuántica* holonómica. En ese contexto, las fases de Berry no-abelianas juegan un papel crucial en la

⁷En general, se deberá considerar la proyección sobre el eje \vec{n} tal que estado inicial resulta ser un autoestado de $\vec{n} \cdot \hat{s}$. En este caso, como es usual, estamos suponiendo que el estado inicial es autoestado de la proyección del spin sobre el eje z.

construcción (teórica) de compuertas cuánticas que sean a prueba de errores, debido a su *naturaleza geométrica*.

El sistema cuántico asociado se plantea de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}=Span\{\ket{0},\ket{1},\ket{a},\ket{e}\}$$

у

$$H(\overline{\Omega}) = |e\rangle \left(\Omega_0 \left\langle 0\right| + \Omega_1 \left\langle 1\right| + \Omega_a \left\langle a\right|\right) + h.c.$$

para $\overrightarrow{\Omega} = (\Omega_0, \Omega_1, \Omega_a) \in \mathbb{R}^3$ denotando las frecuencias de Rabi correspondientes.

Las autoenergías son $\epsilon^0(\vec{\Omega}) = 0$ y $\epsilon^{\pm}(\vec{\Omega}) = \pm \|\vec{\Omega}\|$. Vemos, luego, que para $\vec{\Omega} \neq 0$, las condiciones (i, ii) dadas en la sec. 4.3 se verifican y que $dim E_{\vec{\Omega}}^0 = 2 = const$. Entonces, tomamos

$$B = \mathbb{R}^3 - \{0\}$$

como en el ejemplo anterior. Sin embargo, a diferencia de aquel, dado que $dim E_{\overline{\Omega}}^0 = 2$, el grupo de estructura del fibrado de Berry $U(E^0) \longrightarrow B$ resulta ser U(2) y, en consecuencia, la fase de Berry correspondiente será *no-abeliana*.

Identificando las componentes vectoriales de \mathbb{R}^3 : $\check{1} \equiv \check{x}$, $\check{0} \equiv \check{y}$, $\check{a} \equiv \check{z}$; no es difícil encontrar secciones locales para el fibrado $E^0 \longrightarrow B$ sobre U^{\pm} , en analogía con el ejemplo anterior. También como antes, calculamos la función de transición

$$\psi_{+-}: \mathbb{R}_{>0} \times \{ecuador \ de \ S^2\} \longrightarrow U(2) \simeq \pi^{-1}(\vec{\Omega}_0^+) = \{\hat{u}: E^0_{\vec{\Omega}_0^+} \circlearrowleft\}$$

que determina (salvo isomorfismos) la geometría global del fibrado de Berry. Para $\overrightarrow{\Omega} = \|\overrightarrow{\Omega}\| \cdot (\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \in \mathbb{R}_{>0} \times \{ecuador \ de \ S^2\}$ se obtiene⁸

$$\psi_{+-}(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \in U(2)$$

con $\alpha \in S^1$ parametrizando el ecuador de S^2 . La matriz anterior de U(2) es el producto de una matriz constante por otra que es α -dependiente y que se mantiene en el subgrupo $SU(2) \subset U(2)$ para todo α . De esto se deduce que el fibrado de Berry vectorial $E^0 \longrightarrow B$ es orientable. Luego, por (I) de la sección 4.3.5, el U(2)-fibrado $U(E^0) \longrightarrow B$ resulta isomorfo al fibrado trivial $B \times U(2)$. De hecho, una vez sabido esto, no es difícil encontrar

⁸Esta matriz dá el valor de la función de transición en una base $|w_{+}^{j}(\vec{\Omega}_{0}^{+})\rangle$ particular de $E_{\vec{\Omega}_{0}^{+}}^{0}$ que elegimos a fin de realizar el calculo, siendo $\vec{\Omega}_{0}^{+}$ denotando el polo norte de S^{2} .

secciones globales. Éstas son *distintas* a las (locales) que se presentan en la ref. [10], en la que el análisis realizado no es, entonces, global. Este resultado podría contribuir a clarificar algunos aspectos de la existencia de los picos de fidelidad discutidos en [10].

4.4.3 Fases topológicas

Cuando la conexión de Berry A^m (4.4) sobre el fibrado de Berry $U(E^m) \xrightarrow{\pi} B$ es plana [13]

$$dA - [A, A] = 0,$$

entonces la fase de Berry se vuelve **topológica**. Esto significa que la fase u holonomía que adquiere el estado final depende sólo de la clase de homotopía de la curva del espacio de parámetros $b(t) \in B$, y ya no más de su geometría. Cuando el grupo de estructura es abeliano, la condición de que ésta sea plana es $dA = 0^9$. Las fases topológicas hacen su aparición en varias áreas bien distintas [29] y en lo que sigue, damos dos ejemplos simples.

Spin en un plano y el efecto Hall cuántico en el grafeno

Para J = 1, 2, consideramos el hamiltoniano

$$H_J(b) = \varepsilon \ \hat{s} \cdot \check{n}_b^J$$

siendo \hat{s} el vector formado por las matrices \hat{S}_i correspondientes al spin s, $\check{n}_b^J = -(\cos J \varphi_b, \sin J \varphi_b)$, con φ_b el ángulo que deterina la dirección del parámetro externo b en el plano $xy \ (\equiv \mathbb{R}^2)$ y ε una constante. Este ejemplo con J = 1 se puede resolver directamente de nuestro primer ejemplo (como se hace en [4]), sin embargo, lo estudiamos independientemente en lo que sigue para ilustrar nuestra construcción del fibrado $U(E^m)$.

En este caso, la sub-variedad más grande $B \subset \mathbb{R}^2$ que satisface (i, ii) de 4.3 es

$$B = \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$$

dado que, en b = 0, todos los autovalores colapsan en uno con degeneración máxima. Del resultado (II) de 4.3.5, se deduce que el fibrado $U(E^m)$ será trivializable¹⁰. Los autoestados

⁹Más aún, para U(1)-fibrados sobre $B \subset \mathbb{R}^3$ se tiene que la condición de que A sea plana toma la forma familiar $\nabla \times \vec{A} = 0$.

¹⁰De hecho, para un *m* fijo, la sección $|m(b)\rangle = exp(i\varphi_b s)exp\left(i\varphi_b \hat{S}_z\right)|b_0, m_y\rangle$ está globalmente definida sobre *B*.

$$A^m(b) = i \ J \ s \ d\varphi_b$$

para la cual, claramente, $dA^m = 0$. En consecuencia, la conexión de Berry es plana y la fase correspondiente, topológica. Explícitamente, para un camino b(t) en B, la fase es

$$U_{geom}^{m}(t_{f}) = exp\left(-i2\pi s \ WN(b(t))\right)$$

en donde WN(b(t)) denota el número de vueltas que dá b(t) alrededor (0,0) en el plano xy.

El caso J = 1 describe a un spin *s* interactuando con un campo magnético externo *b* que varía en el plano. Luego, cuando WN(b(t)) = +1, el factor de fase fermiónico (s semientero) es -1 mientras que el bosónico (s entero) es +1, independientemente del autovalor *m* de \hat{S}_i . Esto reproduce los resultados de [4].

Finalmente, las fases de Berry asociadas al $grafeno^{11}$ de una y dos capas corresponden, respectivamente, a J = 1, 2 [22]. En estos sistemas, el parámetro b representa el momento (lineal) de los portadores que se mueven dentro del grafeno bidimensional. Cuando hay un campo magnético aplicado, los portadores describen trayectorias cerradas en el plano, con lo que el parámetro b(t) describirá una curva cerrada simple alrededor del (0,0) en B al finalizar una revolución. Entonces, el factor de fase topológica de Berry asociado es

$$U_{geom}^{J,m}(t_f) = \exp\left(-i2J\pi s\right)$$

que, para $s = \frac{1}{2}$, se reduce a $(-1)^J$ como se explica en [22].

 $^{^{11}}$ El grafeno es un material que está siendo activamente investigado y que puede ser dispuesto en láminas de espesor 1, 2 o más átomos. En otras palabras, cada lámina puede considerarse como siendo realmente bi-dimensional.

Apéndice A

Elementos adicionales

A.1 La energía cinética de un sistema controlado

En esta sección, derivamos una expresión para la energía cinética de un sistema mecánico sobre Q, en terminos de la curva de las variables controladas $d_0(t)$ y de la incógnita en el grupo g(t).

Asumiremos que Q tiene es una variedad Riemanniana y que la energía cinética correspondiente al sistema mecánico simple (con o sin controles) está dada por la métrica en Q. Esto significa que, si $k : TQ \otimes TQ \longrightarrow TQ$ denota esta métrica, la energía cinética se escribe como

$$K : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$K(v_q) = \frac{1}{2}k_q(v_q, v_q).$$

Ahora, en nuestro sistema parcialmente *controlado*, la curva física $c(t) \in Q$ es de la forma (3.1) y, entonces, la velocidad $\dot{c}(t)$ está dada por (3.3). En consecuencia, la energía cinética evaluada en la curva controlada es

$$K(\dot{c}(t)) = K_{int}(t) + \frac{1}{2} \langle I_0(t)(\xi(t)), \xi(t) \rangle + \langle J_0(t), \xi(t) \rangle$$

en donde

$$K_{int}(t) = \frac{1}{2} k_{d_0(t)} \left(\dot{d}_0(t), \dot{d}_0(t) \right)$$

será llamada la energía cinética interna (o de gauge) mientras que $\xi(t) = g^{-1} \frac{d}{dt} g(t) \in \mathfrak{g}$, $I_0(t) = I_{d_0(t)}, J_0(t) := J(\dot{d}_0(t))$ como en la sección 3.3.1. En términos del momento referido al cuerpo $\Pi(t)$ definido por la ec. (3.21), la expresión toma la forma

$$K(\frac{d}{dt}c(t)) = K_{int}(t) + \frac{1}{2} \left\langle I_0^{-1}(t)(\Pi(t)), \Pi(t) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle I_0^{-1}(t)(J_0(t)), J_0(t) \right\rangle$$

en donde el último término puede interpretarse como una contribución de gauge a la energía que hace su aparición al considerar el sistema de referencia móvil representado por $d_0(t)$ en Q.

Observación A.1.1. (Energía mecánica) Cuando también hay fuerzas potenciales presentes en el sistema mecánico en Q, representadas por un potencial $V : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, la energía mecánica total es $E = K(\frac{d}{dt}c(t)) + V(g \cdot d_0(t))$. Si V es G-invariante, luego

$$E = K(\frac{d}{dt}c(t)) + V(d_0(t)).$$

Obsérvese que como, en general, las *fuerzas de control* no son potenciales pero sí son dependientes del tiempo, éstas *hacen trabajo* sobre el sistema. En consecuencia, la energía mecánica anterior **no** permanecerá conservada durante la evolución controlada.

Observación A.1.2. (Interacción con el campo de gauge) En términos de teorías de campos (en 1-d), el término $\langle J_0(t), \xi(t) \rangle$ puede ser visto como un acoplamiento entre el campo de gauge J_0 y las variables verticales ξ (véase también la obs. 3.2.11).

Recordemos la conexión mecánica en $Q \xrightarrow{\pi} Q/G$ ([20]). La curva de gauge $d_0(t)$ es horizontal con respecto a esta conexión sii $J_0(t) = 0$ para todo t. En un gauge mecánico, la energía resulta ser suma de dos contribuciones desacopladas:

$$K(\frac{d}{dt}c(t)) = K_{int}(t) + \frac{1}{2} \left\langle I_0(t)(\xi(t)), \xi(t) \right\rangle = K_{int}(t) + \frac{1}{2} \left\langle I_0^{-1}(t)(\Pi(t)), \Pi(t) \right\rangle.$$

A.2 Reconstrucción en el fibrado $G \longrightarrow O_{\mu}$

Consideremos las dos aplicaciones ([16]) $T^*G \overset{Body \ coord.}{\leftrightarrow} G \times \mathfrak{g}^* \overset{L}{\Rightarrow} \mathfrak{g}^*$ dadas por $L(g,\Pi) = Ad_g^*\Pi \ y \ \pi(g,\Pi) = \Pi$, y supongamos que tenemos una curva $(g(t),\Pi(t)) \in G \times \mathfrak{g}^*$ para la cual $L(g(t),\Pi(t)) = \mu = const$. La idea de esta sección es *reconstruir* g(t) a partir de $\Pi(t)$ haciendo uso del hecho de que $\Pi(t) = Ad_{g^{-1}(t)}^*\mu$. Nótese que $\Pi(t)$ yace en la G-órbita coadjunta $O_{\mu} \subset \mathfrak{g}^*$ a través de μ . Para reconstruir ([15]), necesitamos considerar una

conexión principal en el fibrado G_{μ} -principal $G \xrightarrow{\pi} O_{\mu}$, siendo $G_{\mu} := \{g \in G; Ad_g^* \mu = \mu\}$ el subgrupo estabilizador.

Recuérdese que este fibrado corresponde a la reducción $L^{-1}(\mu) \approx G \xrightarrow{\pi} O_{\mu}$, en donde la acción de G_{μ} sobre $L^{-1}(\mu) \subset G \times \mathfrak{g}^*$ es la inducida por la acción a izquierda usual (en coordenadas del cuerpo) de G sobre T^*G . Usando el isomorfismo de fibrados principales

:
$$L^{-1}(\mu) \xrightarrow{\approx} G$$

: $(g, Ad_{g^{-1}}^*\mu) \longmapsto g$

vemos que una conexión principal en $G \xrightarrow{\pi} O_{\mu}$ puede definirse mediante la elección de un complemento $HOR_e \subset \mathfrak{g}$ para el álgebra de Lie de isotropías $\mathfrak{g}_{\mu} = Lie(G_{\mu})$, i.e., $\mathfrak{g} =$ $HOR_e \oplus \mathfrak{g}_{\mu}$, y, luego, transladando por derecha dicho complemento a todo punto $g \in G$. En general, no hay una manera canónica de elegir HOR_e . Sea, entonces, $P : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mu}$ un proyector lineal sobre \mathfrak{g}_{μ} tal que

$$Ad_h \circ P = P \circ Ad_h \tag{A.1}$$

para todo $h \in G_{\mu}$ y definamos $HOR_e = Ker(P)$. La correspondiente 1-forma de conexión $A_P: TG \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mu}$ inducida por P resulta estar dada por

$$A_P(v_g)_g := P(v_g g^{-1})$$

para $v_g \in T_g G$ y $v_g g^{-1}$ denotando la derivada en g de la translación por derecha mediante g^{-1} en G.

Ejemplo A.2.1. (Métricas Ad-invariantes) Cuando el álgebra de Lie \mathfrak{g} viene equipada con un producto interno Ad-invariante (,), podemos elegir a P como el proyector ortogonal, con respecto a (,), sobre \mathfrak{g}_{μ} . Puede verse facilmente que este P satisface (A.1), induciendo una conexión principal en $G \xrightarrow{\pi} O_{\mu}$.

Ahora, usaremos esta conexión para reconstruir g(t) a partir de la curva $\Pi(t)$ que yace en la órbita coadjunta O_{μ} . Siguiendo a [15]:

- cosideramos el levantamiento horizontal g_G(t) ∈ G, desde g_G(t₁) = g(t₁), de la curva base Π(t) ∈ O_μ con respecto a la conexión A_P,
- encontramos la curva $h_D(t)$ en G_μ tal que

$$g(t) = h_D(t) \cdot g_G(t)$$

sea solución de la ecuación de reconstrucción $\Pi(t) = Ad_{g^{-1}(t)}^*\mu$, para el valor inicial $g(t_1)$.

Los factores de la descomposición anterior de g(t), $h_D(t)$ y $g_G(t)$, son usualmente llamados fase dinámica y fase geométrica, respectivamente. La curva $h_D(t)$ debe ser, entonces, solución de

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = A_P (\frac{d}{dt}g)_g \tag{A.2}$$

 $\operatorname{con} h_D(t_1) = e.$

Supongamos, ahora, que \mathfrak{g} tiene un producto interno Ad-invariante (,) como en el ejemplo A.2.1. Esta forma bilineal induce un isomorfismo lineal $\Psi: \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ que transforma la G-acción coadjunta en la adjunta. Sea $u_1 := \frac{\Psi(\mu)}{\|\Psi(\mu)\|} y \{u_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\mu}}$ una base ortonormal respecto a (,) del subespacio vectorial $\mathfrak{g}_{\mu} \subset \mathfrak{g}$. Nótese que una tal base siempre existe ya que $\Psi(\mu) \in \mathfrak{g}_{\mu}$. El proyector ortogonal puede ser expresado como

$$P(v) = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\mu}} (u_i, v) \ u_i$$

y, luego,

$$\frac{d}{dt}h_D h_D^{-1}(t) = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_{\mu}} (u_i, \frac{d}{dt}gg^{-1}) \ u_i.$$
(A.3)

Bibliografía

- ABRAHAM R. AND MARSDEN J.: Foundations of Mechanics. Second Edition, Addison-Wesley, Menlo Park, California.
- [2] AHARONOV Y. AND ANANDAN J.: Phys. Rev. Lett. 58, 1593 (1987).
- [3] ARNOL'D V.: Mathematical methods of classical mechanics. Springer-Verlag (1978).
- [4] BERRY M.V.: Proc. R. Soc. A 392, 45 (1984).
- [5] BLOCH, A. M., KRISHNAPRASAD P. S., MARSDEN J. E. AND MURRAY R.: Nonholonomic mechanical systems with symmetry. Arch. Rational Mech. Anal., 136, 21–99.
- [6] CABRERA A.: A generalized Montgomery phase formula for rotating self-deforming bodies. J. Geom. Phys. 57 (2007) 1405-1420.
- [7] CABRERA A.: Base-controlled mechanical systems and geometric phases. enviado para su publicación, preprint en arXiv:0706.1545v1 [math-ph].
- [8] CABRERA A.: Some geometric features of Berry's phase. enviado para su publicación, preprint en arXiv:0705.2257v2 [math-ph].
- CENDRA H., MARSDEN J.E., AND RATIU T.S.. Lagrangian reduction by stages. Mem. Amer. Math. Soc., 152 (722), 2001.
- [10] FLORIO G. ET AL: Phys. Rev. A 73, 022327 (2006). Una introducción al tema puede encontrarse en Zanardi P. and Rasetti M.: Phys. Lett. A 264, 94 (1999).
- [11] GOLDSTEIN H.: Classical Mechanics. Second ed., Spanish version, Editorial Reverte S.A., 1992.
- [12] HUSEMOLLER D.: Fibre Bundles, McGraw-Hill, New York, 1966.

- [13] KOBAYASHI S. AND NOMIZU K.: Foundations of Differential Geometry (John Wiley and Sons, New York, 1991), Vol. I.
- [14] LEVAY P.: Geometric Phases, To appear in the Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier 2006 (arXiv:math-ph/0509064).
- [15] MARSDEN, J.E., MONTGOMERY, R., RATIU, T.: Reduction, symmetry and phases in mechanics. Memoirs of the AMS 436.
- [16] MARSDEN, J.E., RATIU, T.: Introduction to Mechanics and Symmetry. Springer-Verlag, (1994).
- [17] MARSDEN, J.E., RATIU, T., SCHEURLE, J.: Reduction theory and the Lagrange-Routh equations. J. Math. Phys. 41, 3379 (2000).
- [18] MARSDEN, J.E., WEINSTEIN, A.: Reduction of symplectic manifolds with symmetries. Rep. Math. Phys.
 5, 121-130 (1974).
- [19] MONTGOMERY, R.: How much does the rigid body rotate? A Berrys phase from the 18th century. Am. J. Phys. 59 (5), May 1991, 394-398.
- [20] MONTGOMERY, R.: Optimal Control of Deformable Bodies and its Relation to Gauge Theory Proc. Geometry of Hamiltonian Systems Workshop (1988) ed T Ratiu (Berlin: Springer).
- [21] MONTGOMERY, R.: The geometric phase of the three-body problem. Nonlinearity 9 (1996) 1341-1360.
- [22] NOVOSELOV K. S. ET AL: Nature Physics 2, 177 180 (2006), doi:10.1038/nphys245.
- [23] REINSCH, M., LITTLEJOHN, R.: Gauge fields in the separation of rotations and internal motions in the n-body problem Rev. Mod. Phys. 69, 213 (1997).
- [24] SHAPERE, A., WILCZEK, F.: Gauge kinematics of deformable bodies Am. J. Phys. 57 (6), 514-518, June 1989.
- [25] SHAPERE A. AND WILCZEK F.: Geometric Phases in Physics (World Scientific, Singapore, 1989).
- [26] TEO J.C. Y., WANG Z. D.: Phys. Rev. Lett. 95, 050406 (2005).
- [27] WEINSTEIN, A.: The local structure of Poisson manifolds. J. Diff. Geom. 18 (1983), 523557.
- [28] WILCZEK F. AND ZEE A.: Phys. Rev. Lett. 52, 2111 (1984); BOHM A. AND MOSTAFAZADEH A.: J.
 Math. Phys. (N.Y.) 35, 1463 (1994).

[29] ZAK J.: Phys. Rev. Lett. 62, 2747 (1989); MIKITIK G. P., SHARLAI YU. V.: Phys. Rev. Lett. 82, 2147 (1999); Althorpe S.C.: J. Chem. Phys. 124, 084105 (2006); MILMAN P., MOSSERI R.: Phys. Rev. Lett. 90, 230403 (2003).