UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Facultad de Ciencias Exactas

Tesis para obtener el grado de

Doctor en Ciencias
Área
Matemática

Geometría de los sistemas no holónomos generalizados

Paula Balseiro
Licenciada en Matemática (UNLP, 2003)

Dirección: Dr. Jorge Solomin.

La Plata,
Octubre, 2007

A mis abuelas

Agradecimientos

Quiero agradecer estos años de trabajo a mi director Jorge Solomin, por su paciencia dedicada durante largas tardes a escucharme frente al pizarrón, por enseñarme que la belleza de la matemática está en su simpleza, y sobre todo, por la calidez humana y el afecto que me brindó.

También quiero agradecer a Marcela Zuccalli por su apoyo incondicional durante estos años, estando siempre al lado mio tanto en el ámbito académico como en lo personal.

Les debo gracias a mis "viejos"que siempre supieron estar cerca a pesar de los miles de kilómetros que nos separan. Gracias también a mi hermano, Diego.

A mis amigos del alma, que son mi familia platense, por compartir conmigo cada alegría y tristeza vivida.

Le agradezco a cada profesor del que aprendí y a todos aquellas personas del Departamento de Matemática que han logrado hacer menos solitario el trabajo cotidiano.

Por último quiero compartir este momento con René, por su amor, su abrazo diario, su apoyo, y por respetar esta pasión.

....y a mi vieja, por aferrarse así a la vida!

Resumen.

Esta tesis está dedicada al estudio, desde el punto de vista lagrangiano, de la geometría de los sistemas mecánicos *no holónomos generalizados* y de los sistemas con *restricciones no ideales.*

En primer lugar, se estudian sistemas los *sistemas no holónomos generalizados*: sistemas mecánicos con restricciones en los cuales la fuerza ejercida por el vínculo hace trabajo nulo sobre vectores que no necesariamente coinciden los desplazamientos virtuales.

Consideraremos algunas propiedades de estos sistemas desde un punto de vista geométrico. Se utilizará una adecuada adaptación de la versión invariante de la mecánica lagrangiana presentada por L. Fadeev y A.M. Vershik en [26].

Como primer resultado, daremos una expresión simple del campo generador de la dinámica de estos sistemas en términos del de la dinámica de los sistemas sin restricciones. En particular, esta expresión brindará una sencilla prueba geométrica de la existencia y unicidad de dicho generador.

Definiremos productos internos en los espacios tangentes al espacio de configuración que nos permitirán presentar una versión del Principio de Gauss de mínima acción aplicable a los sistemas no holónomos generalizados. Como caso particular, se reobtendrá el resultado clásico de Chataev sobre los desplazamientos virtuales [7].

El Principio de D'Alembert [5] [16], la función de Gibbs-Appell [3] [17], la fórmula para el momento no holónomo [5] y el método de Kane [11], también serán extendidos al caso de sistemas no holónomos generalizados.

Posteriormente, se estudiarán dos casos de sistemas con vínculos *no ideales*, esto es, sistemas mecánicos restringidos en los que la fuerza F^c ejercida por el vínculo realiza un trabajo conocido, pero no necesariamente nulo, sobre los vectores de un espacio que puede ser distinto al del de los desplazamientos virtuales.

Los sistemas en los que el trabajo de la fuerza es conocido sobre el espacio de los desplazamientos virtuales, fueron sistemáticamente analizados por F.E. Udwadia y

R.E. Kalaba en [22] en el marco de la mecánica newtoniana, a partir de una adecuada descomposición de F^c.

Consideramos el método de Udwadia y Kalaba en el marco desarrollado en [25]. Este contexo nos permitirá dar una interpretación geométrica de algunos de sus resultados, en particular, de la versión del Principio de Gauss de mínima restricción introducido en [24], y del hecho importante de que, si se omite la aceleración producida por uno de los términos de la descomposición de F^c, se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema con restricciones ideales [23].

Por último veremos una extensión de estas propiedades al caso más general: la fuerza del vínculo realiza un trabajo conocido, sobre vectores de un espacio que puede ser distinto al del de los desplazamientos virtuales.

Cabe destacar que el marco geométrico que utilizaremos no involucra derivadas covariantes ni métricas sobre el espacio de fase de las velocidades.

Summary.

This thesis is dedicated to the study, from the lagrangian point of view, of the geometry of the *generalized non holonomic systems* and then *non ideal restricted* systems.

First, we will focus on a detailed study of *generalized non-holonomic systems*: restricted mechanical systems with the force exerted by the constraints doing a null work on vectors that non necessarily coincide with the usual virtual displacements.

We consider some properties of these systems from a geometric point of view by means of a suitable extension of the invariant setting of the lagrangian mechanics developed by L. Fadeev and A.M. Vershik in [26].

As a first result we will give a simple expression for the generator of the restricted dynamics in terms of the generator of the unrestricted one, yielding a geometric proof of existence and uniqueness of solutions.

The consideration of suitable inner products defined on the tangent spaces of the configuration manifold will allow us for giving an extension of the Gauss principle of minimal constraint encompassing the generalized non-holonomic systems. As a particular case, we will recover the classical Chataev's result about virtual displacements [7].

The D'Alembert principle [5] [16], the Gibbs-Appell function [3] [17], the formula for non-holonomic momentum [5] and the Kane Method [11], [2] will also be extended to the case of generalized non-holonomic systems.

Later, we study two cases with *non ideal* constraints, that is restricted mechanical systems with the constraining force doing a known work on a subspace which could be different of the virtual displacements one.

The systems which their constraining force does a known work on the virtual displacements, were analyzed by F.E.Udwadia and R.E.Kalaba in [22], in the Newtonian mechanics framework, by means of a suitable decomposition of the force F^c.

We consider Udwadia-Kalaba's method in the context presented in [25]. This approach will allow us to give a geometric interpretation of some of their results, in particular of the version of the Gauss principle of minimal constraint introduced in [24], and of the remarkable fact that if the acceleration yielded by one of the terms of the decomposition of F^c is omitted, it is obtained the motion equations for the restricted ideal system [23].

Finally, we will see an extension of these properties for the most general case: the constraint force doing a known work on vectors that could be different of the virtual displacements ones.

It is worth to remark that the geometric setting presented below involves neither covariant derivatives nor metrics on the phase space of velocities.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El análisis de sistemas con restricciones atrajo, desde los comienzos del desarrollo de la mecánica, la atención de los más ilustres cultores de la disciplina: una teoría general de sistemas con vínculos holónomos fue desarrollada, por J. L. Lagrange en su celebrada *Méchanique Analithique* [12]. D'Alembert, Euler, Poisson, Gauss y Dirac, entre otros, también se cuentan entre quienes contribuyeron de manera decisiva a esta teoría.

Los sistemas con vínculos no holónomos fueron intensamente estudiados en Rusia por la escuela de Chataev en la primera mitad del siglo veinte.

Las aplicaciones a la teoría de control y a la robótica de los sistemas mecánicos con vínculos, en especial en el caso no holónomo, generó un renacer del interés en el estudio de esos sistemas y los ha puesto en el foco de gran parte de los desarrollos actuales de la mecánica.

Un paso decisivo para la comprensión profunda de los mismos fue la incorporación de técnicas y conceptos de la geometría diferencial en su estudio [4] [1]. Este tipo de abordaje dio lugar a lo que hoy conocemos como *mecánica geométrica.*

Los sistemas que tradicionalmente han recibido mayor atención son los que presentan restricciones *ideales*, es decir, realizaciones de los vínculos en las que la fuerza ejercida por los mismos hace trabajo nulo sobre los desplazamientos virtuales.

Este caso no cubre un amplio número de ejemplos de interés, tanto desde el punto de vista teórico como desde el de las aplicaciones. Por una parte, no es es inusual que la fuerza F^c ejercida por los vínculos haga trabajo no nulo sobre los desplazamientos virtuales (restricciones *no ideales*); por otra, en una amplia gama de sistemas, como por ejemplo servo mecanismos u objetos elásticos que ruedan, esa fuerza hace trabajo nulo sobre direcciones que no coinciden con la de los deplazamientos virtuales (*sistemas no holónomos generalizados* [15]).

En esta tesis, situaremos ese análisis en un marco geométrico, basado en la versión invariante de la mecánica lagrangiana presentada por M. A Vershik y L. Fadeev en [26].

En lo que hace a sistemas no holónomos generalizados, la existencia y unicidad de soluciones fue probada, en el marco de la mecánica hamiltoniana, por C. M. Marle en [15], donde, además, se analiza su reducción cuando presentan simetrías. En el último capítulo de esta tesis, consideraremos esos sistemas en un marco análogo al que utilizaremos para el estudio del método de Udwadia-Kalaba. Una adaptación de la descomposición ortogonal de vectores tangentes a la que nos referimos más arriba nos permitirá, en primer lugar, interpretar las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de soluciones y una demostración geométrica muy simple de tal existencia y unicidad. Además, podremos dar una versión del principio de Gauss y de las ecuaciones de Gibbs-Appell para estos sistemas, así como una extensión de la ecuación para el momento no holónomo y del método de Kane, desarrollos no considerados en [15].

Por otro lado, también consideraremos el caso de restricciones no ideales. Esto es, sistemas en los que la fuerza ejercida por los vínculos realiza un trabajo conocido, no necesariamente nulo, sobre un espacio que podría ser distinto al de los desplazamientos virtules. Un análisis sistemático de estas restricciones, cuando este espacio es el de los desplazamientos virtuales, fue recientemente desarrollado por F.E. Udwadia y R.E. Kalaba en [22]. Este análisis fue llevado a cabo en el marco de la mecánica newtoniana y se basa en una adecuada descomposición de la fuerza F^c.

En el contexto geométrico desarrollado en esta tesis, veremos, en primer término, que la descomposición de F^c de [22] resulta ortogonal con respecto al producto interior inducido por la matriz de masa M sobre los covectores. Además, nuestro enfoque nos permitirá dar sencillas demostraciones e interpretaciones geométricas de importantes propiedades de tal descomposición. Posteriormente, inspirados en lo anterior, consideraremos el producto interno definido por la matriz M, pero sobre vectores tangentes. Esto nos permitirá dar sencillas demostraciones del principio de Gauss de minima restricción e interpretar geométricamente la relación entre las soluciones del sistema restrigindo y las del sistema sin restricciones.

No analizaremos la teoría de reducción para sistemas no holónomos generalizados.

Un resumen de los contenidos de esta tesis es el siguiente:

- en el capítulo dos, haremos una breve reseña de los resultados y definiciones que utilizaremos en los restantes capítulos de esta tesis;

- en el capítulo tres, presentaremos nuestro enfoque de los sistemas no holónomos generalizados; demostraremos geométricamente la existencia y unicidad de la dinámica restringida y exhibiremos un ejemplo ilustrativo.

-En el capítulo cuatro se darán las extensiones del principio de Gauss de restricción mínima, de las ecuaciones de Gibbs-Appell, la generalización del momento no holónomo y del método de Kane a estos sistemas.

- En el último capítulo se presentan dos casos de sistemas con restricciones no ideales. En la primera sección del capítulo, resumiremos el método de Udwadia-Kalaba [22], lo estudiaremos en el marco de la versión simpléctica de la mecánica lagrangiana, y presentaremos el análisis de los sistemas no holónomos clásicos al que hemos hecho referencia. En la segunda y última sección se desarrolla el análisis los sistemas mecánicos en los que la fuerza del vínculo realiza un trabajo conocido, pero no nulo, sobre un espacio que podría ser distinto al de los desplazamientos virtuales.

Cabe destacar que nuestro análisis de los sistemas no holónomos, tanto clásicos como generalizados, por estar basado en descomposiciones ortogonales con respecto a productos interiores definidos en los espacios tangentes a la variedad de configuraciones Q, no involucra ni conexiones ni métricas sobre el fibrado tangente TQ.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo, haremos una reseña de los resultados de la mecánica geométrica que serán utilizados en esta tesis. Nos interesa especialmente la versión simpléctica de la mecánica lagrangiana presentada por L. Fadeev y A.M. Vershik en [25] y [26], ya que la misma resulta muy conveniente para estudiar sistemas con restricciones. Para un estudio sistemático de la mayor parte de los resultados que expondremos puede consultarse [16].

2.1. Mecánica Lagrangiana

A lo largo de esta tesis, utilizaremos la llamada **notación de Einstein**: el símbolo de sumatoria sobre un índice será sobreentendido (y omitido) cada vez ese índice aparezca repetido en una expresión.

Para describir la versión simpléctica de la mecánica lagrangiana antes mencionada, comenzaremos recordando el concepto de fibrado tangente asociado a una variedad diferencial.

Si Q es una variedad diferencial de dimensión n, un sistema de coordenadas (q^i) definido en un entorno coordenado U de Q induce una base en cada espacio tangente T_qQ para cada $q \in U$. Esta base está formada por los vectores $\frac{\partial}{\partial q^i}$ tangentes a las curvas coordenadas.

El **fibrado tangente** TQ es la variedad diferencial de dimensión $2n$

$$TQ := \bigcup_{q \in Q} T_q Q,$$

con coordenadas (q^i, v^i) sobre entornos coordenados de la forma

$$T_U Q := \bigcup_{q \in U} T_q Q,$$

con U entorno coordenado de Q, definidas de la siguiente manera: si (q^i) son las coordenadas de $q \in U$ y $v = v^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} \in T_q Q$, al elemento $(q, v) \in T_U Q$ se le asignan las coordenadas (q^i, v^i).

Llamaremos $\pi : TQ \to Q$ a la proyección canónica, es decir, para $(q, v) \in TQ$, se tiene $\pi(q, v) = q$.

En mecánica lagrangiana, si las posibles configuraciones de un sistema mecánico están representadas por una variedad Q de dimensión n, es decir el sistema tiene n grados de libertad, la dinámica del mismo está determinada por una función

$$L(q, v) : TQ \to R,$$

llamada **función lagrangiana** o **lagrangiano** del sistema.

Más precisamente, las trayectorias del sistema son las curvas $q(t)$ en Q que satisfacen las ***Ecuaciones de Euler Lagrange***: en cualquier sistema de coordenadas (q^i, v^i),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.1}$$

Para describir la versión simpléctica de estas ecuaciones recordemos, en primer lugar, que una **forma simpléctica** sobre una variedad M es una 2-forma diferencial ω cerrada y no degenerada. Es decir, ω es una 2-forma diferencial en M tal que $d\omega = 0$ con la siguiente propiedad:

$$\forall x \in M, \ \forall v \in T_x M, \quad v \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists u \in T_x M \ \text{ t.q. } \ \omega(u, v) \neq 0.$$

Una **variedad simpléctica** es un par (M, ω), con M una variedad diferencial y ω una forma simpléctica sobre M.

Un importante ejemplo de forma simpléctica es la forma simpléctica canónica definida sobre el fibrado cotangente T^*Q de cualquier variedad Q. Recordemos que, si la dimensión de Q es n, su **fibrado cotangente** es la variedad de dimensión $2n$

$$T^*Q := \bigcup_{q\in Q} T^*_qQ,$$

donde T^*_qQ es el espacio dual de T_qQ. Los abiertos coordenados son de la forma

$$T^*_UQ := \bigcup_{q\in U} T^*_qQ$$

con U entorno coordenado en Q. Si (q^i) son las coordenadas de $q \in U$ y $\alpha = p_i dq^i \in T^*_qQ$, con (dq^i) la base dual de $(\frac{\partial}{\partial q^i})$, a $(q, \alpha) \in T^*_UQ$ se le asignan coordenadas (q^i, p_i).

La **forma simpléctica canónica** ω_c sobre T^*Q es la 2-forma diferencial que, en cualquier sistema de coordenadas (q^i, p_i), se escribe

$$\omega_c(q^i, p_i) := dq^i \wedge dp_i.$$

Es fácil ver que esta expresión local es invariante ante cambios de coordenadas [16]. Una manera sencilla de probarlo es escribir

$$\omega_c(q^i, p_i) = -d(p_i dq^i) \tag{2.2}$$

y mostrar que la expresión $p_i dq^i$ lo es.

Dado un lagrangiano $L : TQ \to R$, la **transformada de Legendre** asociada a él es la función $FL : TQ \to T^*Q$ definida como

$$FL(q, v) := (q, \frac{\partial L}{\partial v}). \tag{2.3}$$

La forma

$$\omega_L := -FL^*(\omega_c) \tag{2.4}$$

es llamada **2-forma lagrangiana** asociada a L. De (2.2) y (2.3) se deduce que su expresión local es

$$\omega_L(q^i, v^i) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} dq^i \wedge dq^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i \wedge dv^j. \tag{2.5}$$

El lagrangiano L se dice **regular** si la forma ω_L es simpléctica en TQ. La ecuación (2.5) muestra que L es regular si y sólo si, $\forall(q,v) \in TQ$,

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right)(q,v) \neq 0. \tag{2.6}$$

Observemos que la definición (2.4) de ω_L corresponde a la dada en [25] y [26]. En [16], ω_L es definida como $\omega_L = FL^*(\omega_c)$.

En una variedad simpléctica (M,ω) podemos definir, para todo $x \in M$, un isomorfismo entre T_xM y T_x^*M asignando a cada vector $v \in T_qQ$ el covector $\alpha_v \in T_x^*M$ tal que

$$\alpha_v = \omega(v,.).$$

En efecto, la no degeneración de ω equivale a la inyectividad de esta aplicación lineal. Dado que estamos considerando variedades de dimensión finita, la aplicación resulta ser un isomorfismo.

Por otra parte, recordemos que la función de **energía** asociada al lagrangiano L es la función $E_L : TQ \to R$ definida como

$$E_L(q,v) := FL(q,v)(v) - L(q,v). \tag{2.7}$$

Si M es una variedad diferencial, denotaremos con $\mathcal{X}(M)$ al espacio de campos vectoriales sobre M.

La siguiente proposición, cuya demostración se encuentra, por ejemplo, en [16], [25] o [26], establece la versión simpléctica de las ecuaciones de *Euler-Lagrange*:

Proposición 1 *(***Principio de D'Alembert***) Sea L un lagrangiano regular.*

La trayectoria $(q(t))$ en Q satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange si y sólo si $(q(t),\dot{q}(t))$ es una curva integral del campo vectorial $X_L \in \mathcal{X}(TQ)$ determinado por la propiedad

$$\omega_L(X_L,.) + dE_L = 0. \tag{2.8}$$

Para cualquier lagragiano regular, el campo vectorial X_L que satisface (2.8) es de la forma $X_L(q,v) = (v, Z(q,v))$ [16], [25] o [26]. Los campos de esta forma son llamados **especiales** y representan ecuaciones de segundo orden en el siguiente sentido: si $(q(t), v(t))$ es una curva integral de un campo especial $X(q,v) = (v, Z(q,v))$,

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= v(t) \text{ y} \\ \dot{v}(t) &= Z(q(t), v(t)) \end{aligned}$$

implican

$$\ddot{q}(t) = Z(q(t), v(t)).$$

Es decir, un campo X en TQ es especial si para cada $(q,v) \in TQ$ tenemos que $\pi_*(X(q,v)) = v$ donde $\pi : TQ \to Q$ es la proyección canónica y $\pi_* : TTQ \to TQ$ es su aplicación tangente.

Campos Verticales. Un vector $w \in T_{(q,v)}(TQ)$ se llama **vertical** si $\pi_* w = 0$ con π_* la aplicación tangente correspondiente a la proyección $\pi : TQ \to Q$; i.e, $w = (\mathbf{0}, \tilde{w})$ con $\tilde{w} \in T_v T_q Q$. Es decir, los vectores en $T_{(q,v)}(TQ)$ son verticales si son tangentes a la fibra $T_q Q$. Un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(TQ)$ es un **campo vertical** si, $\forall (q,v) \in TQ,\ X(q,v)$ es un vector vertical.

Denotaremos con $\mathcal{V}_{(q,v)}$ al espacio de vectores verticales en (q,v) y con $\mathcal{V}(TQ)$ al de los campos verticales sobre TQ.

Dado que $T_q Q$ es un espacio vectorial, $\forall v \in T_q Q$, $\mathcal{V}_{(q,v)}$ es isomorfo a $T_q Q$.

Para cada $(q,v) \in TQ$, denotaremos $\tau_{(q,v)} : \pi_*(T_{(q,v)}(TQ)) \to \mathcal{V}_{(q,v)}$ el isomorfismo canónico dado, en un sistema de coordenadas (q^i, v^i), por

$$\tau_{(q,v)}(u^i \frac{\partial}{\partial q^i}) = u^i \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

También anotaremos $\tau_{(q,v)}(u) = (\mathbf{0}, u)$.

Para $\mathcal{T}(Q) := \{Y : TQ \to TQ \text{ t.q. } Y(q,v) \in T_q Q\}$, también denotaremos por τ al isomorfismo de $\mathcal{T}(Q)$ en $\mathcal{V}(TQ)$ dado por

$$[\tau(X)](q,v) = \tau[(X)(q,v)].$$

Un elemento de $T^*_{(q,v)}(TQ)$ es **horizontal** si se anula sobre los vectores verticales. Una $1-$forma diferencial α sobre TQ es **horizontal** si, $\forall (q,v) \in TQ$, $\alpha(q,v) \in T^*_{(q,v)}(TQ)$ lo es.

Denotaremos

$$\mathcal{E}^1(TQ) := \{\text{1-formas diferenciales sobre } TQ\}.$$

y

$$\mathcal{H}^1(TQ) := \{\alpha \in \mathcal{E}^1(TQ) \text{ tal que } \alpha \text{ es horizontal}\}.$$

En coordenadas, si $\alpha \in \mathcal{H}^1(TQ)$, entonces $\alpha = \alpha_i dq^i$.

En este contexto, las fuerzas están representadas por 1-formas horizontales sobre TQ. Si F es una 1-forma horizontal sobre TQ, entonces $\forall (q,v) \in TQ$ $F(w) = F(\pi_* w)$, en este caso escribiremos, por abuso de notación $F(u)$ en lugar de $F(w)$ para $\pi_* w = u$.

Nos referiremos al trabajo que realiza la fuerza F sobre un vector u tangente a Q como $F(u)$.

Si una fuerza externa F^e actúa sobre el sistema, entonces hay que modificar (2.8) para tomar en consideración el trabajo que realiza F^e, [25] [5].

Principio de D'Alembert. *La dinámica de un sistema sin restricciones, cuando una fuerza externa F^e está actuando, está generada por un único $X_U \in \mathcal{X}(TQ)$ tal que*

$$\omega_L(q,v)(X_U(q,v),w)) = (-dE_L + F^e)(w), \quad \forall w \in T_{(q,v)}(TQ) \tag{2.9}$$

donde $E_L(q,v) = \dfrac{\partial L}{\partial v} . v - L(q,v)$ es la función energía asociada a L.

Veremos en el capítulo siguiente que X_U resulta ser un campo especial.

En coordenadas queda,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\tau_{(q(t),\dot{q}(t))}(u)) = \frac{\partial L}{\partial q}(u) + F^e(u), \quad \forall u \in T_{q(t)}Q. \tag{2.10}$$

2.2. Grupos y Algebras de Lie

Para la ecuación del momento no holónomo que presentaremos en el último capítulo de esta tesis, necesitaremos el concepto de acción de un grupo de Lie sobre una variedad simpléctica. A fin de recordar su definición, comenzaremos reseñando las de grupos y álgebras de Lie.

Un **Grupo de Lie** G de dimensión n, es una variedad diferenciable de dimensión n munida de una estructura de grupo, tal que las operaciones de composición e inversión son diferenciables.

En particular, $\forall g \in G$ la aplicación

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ L_g(h) &= gh \end{aligned} \tag{2.11}$$

es diferenciable.

Un ejemplo de grupo de Lie es el grupo $GL(n)$ de isomorfismos de R^n. Fijada una base de R^n, $GL(n)$ se identifica con el grupo de matrices $n \times n$ reales con determinante no nulo. La estructura de variedad diferencial es la que resulta de identificar este grupo de matrices con un abierto de R^{n^2}.

Se dice que H es un subgrupo de Lie de G si es un subgrupo (en el sentido algebraico) y una subvariedad de G.

Si G es un grupo de Lie y H es un subgrupo (en el sentido algebraico) cerrado como subconjunto de G, H resulta ser una subvariedad de G, y por lo tanto, un subgrupo de Lie de G [1]. De esta propiedad resulta, por ejemplo, que el grupo $O(n)$ de isomorfismos autoadjuntos de R^n es un subgrupo de Lie de $GL(n)$

Algebras de Lie

Un **Algebra de Lie** es un par $(V, [,])$, donde V es un espacio vectorial y $[,]$ es un corchete de Lie sobre V, es decir, $[,] : V \times V \to V$ es una aplicación bilineal y antisimétrica, que satisface la *identidad de Jacobi*:

$$\forall u, v, w \in V, \quad [[u,v]w] + [[w,u]v] + [[v,w]u] = 0.$$

Si G es un grupo de Lie y $e \in G$ el elemento neutro, el **álgebra de Lie de** G es $\mathbf{g} := (T_eG, [,])$, con $[,]$ definido de la siguiente manera:

$$\forall \xi, \eta \in T_eG, \quad [\xi, \eta] = [X_\xi, X_\eta](e),$$

donde el corchete del miembro de la derecha es el usual para campos vectoriales, $X_\xi(g) := (L_g)_*(\xi)$ y $X_\eta(g) := (L_g)_*(\eta)$.

Por ejemplo, el álgebra de Lie del grupo $G(n)$ es $L(R^n, R^n)$, el espacio vectorial de las transformaciones lineales en R^n, con el *conmutador*

$$[A, B] = AB - BA,$$

como el corchete definido sobre el álgebra.

Una **Acción** a izquierda (a derecha) de un grupo de Lie G sobre una variedad diferencial Q es una aplicación diferenciable $\phi : G \times Q \to Q$ tal que

1. $\forall\, q \in Q,\ \phi(e, q) = q$ para e el neutro del grupo G.
2. $\forall\, g,\ h \in G$ y $\forall\, q \in Q,\ \phi(g, \phi(h, q)) = \phi(gh, q) \quad (\phi(hg, q))$

Cuando no se aclare si la acción es a izquierda o a derecha, supondremos que es a izquierda.

Una acción ϕ es **libre** si

$$\begin{aligned} \phi_g: \ & Q \to Q \\ & q \mapsto \phi(g,q) \end{aligned}$$

no tiene puntos fijos. Es decir, si $\phi_g(q) = q$ entonces $g = e$.

La acción es **propia** si $\tilde{\phi} : G \times Q \to Q \times Q$ dada por $\tilde{\phi}(g,q) = (q, \phi_g(q))$ es propia, es decir, $\forall\ K \subseteq Q \times Q$ compacto se tiene $\tilde{\phi}^{-1}(K)$ es compacto.

Si una acción es libre y propia, se sabe que el espacio cociente Q/G tiene estructura de variedad diferenciable y que $\pi_G : Q \to Q/G$ es un fibrado principal.

Consideremos la acción $\phi : G \times Q \to Q$. Para cualquier elemento ξ en el Algebra de Lie $\mathbf{g}$ del grupo G, el **generador infinitesimal** en $q \in Q$ se denota $\xi_Q(q)$ y se define,

$$\xi(q) := \frac{d}{dt}\phi(exp\ t\xi\ ,\ q)\bigg|_{t=t_0}$$

donde exp es la aplicación exponencial, $exp : \mathbf{g} \to G$.

Consideremos la acción adjunta $Ad : G \times \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ definida como $Ad_g(\eta) = T_e(R_{g^{-1}} \circ L_g)(\eta)$ donde L_g y R_g son las acciones a izquierda y derecha respectivamente (como en (2.11)).

Para $\xi \in \mathbf{g}$ el generador infinitesimal es, por definición,

$$\xi(\eta) := \frac{d}{dt}Ad_{exp\ t\xi}(\eta)\bigg|_{t=t_0} = [\xi, \eta]$$

donde $[,]$ es el corchete en el álgebra $\mathbf{g}$.

Acciones levantadas al tangente

Supongamos que tenemos la acción ϕ del grupo de Lie G sobre la variedad Q. Para cada $g \in G$ tenemos definida $\phi_g : Q \to Q$. Entonces, se induce una acción $T\phi_g$ sobre el espacio tangente TQ de la siguiente manera, $T\phi_g : TQ \to TQ$ tal que

$$T\phi_g(v) = d\phi_g(v)$$

donde $v \in T_qQ$ y d es el diferencial exterior definido anteriormente.

En forma similar, también se tiene una acción inducida sobre el espacio cotangente T^*Q, dada por $T^*\phi_g : T^*Q \to T^*Q$ tal que,

$$T^*\phi_g(\alpha_{q_2})(v) = \alpha_{q_2}(T\phi_g(v))$$

donde $\alpha_{q_2} \in T^*_{q_2}Q$, $v \in T_{q_1}Q$ y $q_2 = \phi_g(q_1)$.

Supongamos que $G = G(n)$ actúa sobre R^n por multiplicación a izquierda, esto es, para $A \in G(n)$ y $q \in R^n$ tenemos $\phi_A(q) = Aq$. La acción levantada a T^*R^n está dada por

$$T^*\phi_A(q,p) = (Aq, (A^T)^{-1}p).$$

Entonces el generador infinitesimal para $\xi \in \mathbf{g} = L(R^n, R^n)$ está dado por

$$\xi_{T^*R^n}(q,p) = (\xi q, -\xi^T p).$$

Aplicación Momento

Sea una variedad simplética (Q, ω) con una acción libre y propia del grupo G. Decimos que una función $J_\xi : Q \to R$ es una **función momento** asociada a $\xi \in \mathbf{g}$, si para todo $q \in Q$ y para todo $u \in TQ$ se verifica

$$\omega(q)(\xi_Q(q), u) = dJ_\xi(q) \cdot (u). \tag{2.12}$$

Tomando en cuenta la linealidad de la apliación $\xi \to J_\xi$, podemos definir $J : Q \to \mathbf{g}^*$ tal que $J(q)(\xi) = J_\xi(q)$.

Como un ejemplo cásico de una aplicación momento en (TQ, ω_L) tenemos,

$$J_\xi(q) = \theta_L(\xi_Q(q))$$

donde se está suponiendo que θ_L es $G-$invariante. Entonces, se puede ver que J_ξ así definida verifica (2.12) para la 2-forma simpléctica ω_L.

Un ejemplo de una aplicación momento para $G = G(n)$ actuando sobre T^*R^n puede ser

$$J(\xi)(q,p) = (\xi q) \cdot p. \tag{2.13}$$

En el caso particuar en el que $n = 3$ y $G = SO(3)$, el grupo de matrices de rotaciones en R^3, con $\mathbf{g} = \mathbf{so}(3)$ ($\cong (R^3, \times)$), entonces (2.13) queda

$$J(q, p) = q \times p.$$

Ésta es la fórmula clásica para el momento angular.

Esta es la aplicación momento a la que nos referiremos en el capítulo 4.

Capítulo 3

Sistemas no holónomos generalizados

3.1. Mecánica lagrangiana en forma invariante

En esta sección, haremos un breve resumen del marco teórico desarrollado en [25] y [26] para la mecánica lagrangiana.

Consideraremos un sistema con una variedad de configuración Q de dimensión n y lagrangiano

$$L : TQ \to R.$$

Supondremos que la matriz simétrica

$$M = (m_{ij}) := \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}$$

es definida positiva en todo $(q, v) \in TQ$.

Para todo $(q, v) \in TQ$, la matriz M nos permite definir un producto interior $<,>_M$ sobre T_qQ, un producto $<,>_{M^{-1}}$ sobre T_q^*Q.

Como en el capítulo 2, denotaremos

$$\mathcal{X}(TQ) := \{\text{campos vectoriales sobre } TQ\}.$$

Como M se asume definida positiva en cada punto, ω_L es una 2-forma simpléctica y por lo tanto, ella da lugar al isomorfismo

$$\alpha \longrightarrow X_\alpha \tag{3.1}$$

del espacio de las 1-formas sobre TQ en $\mathcal{X}(TQ)$, siendo X_α el único campo vectorial sobre TQ tal que

$$\omega_L(X_\alpha, \cdot) = \alpha.$$

Veremos entonces que hay una estrecha relación entre la 2-forma simpléctica ω_L y el producto interno definido por la matriz M.

Consideremos $Z \in \mathcal{V}(TQ)$ y $w \in T_{(q,v)}(TQ)$. Entonces, teniendo en cuenta que $\mathcal{V}(TQ)$ es isomorfo a $\mathcal{T}(Q)$, existe $Y \in \mathcal{T}(Q)$ tal que $Z = \tau(Y)$. De esta manera, podemos escribir $Y(q,v) = Y^i(q,v)\dfrac{\partial}{\partial q^i} \in TQ$ para $(q,v) \in TQ$. Entonces, de la expresión local (2.5) de ω_L se tiene que,

$$\begin{aligned} \omega_L(Z(q,v),w) &= \left((\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j}) dq^i \wedge dq^j - (\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}) dq^j \wedge dv^i \right) (Z(q,v),w) \\ &= (\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j})(Y^i(q,v))(\pi_* w)^j. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\omega_L(Z(q,v),w) \ = < [\tau^{-1} Z](q,v), \pi_* w >_M, \tag{3.2}$$

$\forall\, Z \in \mathcal{V}(TQ)$ y $w \in T_{(q,v)}(TQ)$.

De aquí, se desprende directamente que

$$F \in \mathcal{H}^1(TQ) \ \Leftrightarrow\ X_F \in \mathcal{V}(TQ). \tag{3.3}$$

En efecto, dado un campo vertical Z, definimos la 1-forma F del siguiente modo:

$$F(w) := < [\tau^{-1} Z](q,v), \pi_* w >_M$$

es claro que F es una 1-forma horizontal y además, de resulta $X_F = Z$. Esto basta, pues en cada $(q,v) \in TQ$, la $dim\, \mathcal{H}^1(TQ) = dim\, \mathcal{V}(TQ)$.

Considerando X_L como en el capítulo anterior, el generador de la dinámica del sistema con lagrangiano L, libre de fuerzas externas y restricciones como en (2.8), se tiene

$$X_L := X_{-dE_L}.$$

Si una fuerza externa F^e actúa sobre el sistema, el Principio de D'Alembert (Ecuación (2.9)) afirma, entonces, que el generador de la dinámica es el campo vectorial especial

$$X_U := X_L + X_{F^e}. \tag{3.4}$$

Como $X_L \in \mathcal{S}(TQ)$, se sigue directamente de la ecuación (3.3) que para toda fuerza F, $X_L + X_F \in \mathcal{S}(TQ)$.

Los vínculos. Consideremos ahora, los sistemas con restricciones dadas por

$$(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathcal{C}, \tag{3.5}$$

con $\mathcal{C}$ una subvariedad de TQ localmente definida como los ceros de k funciones suaves

$$\phi^i(q, v) = 0, \quad i = 1, ..., k. \tag{3.6}$$

Como se hizo en [25], asumiremos que los vínculos son *admisibles*, es decir, para cada $(q, v) \in \mathcal{C}$,

$$dim \left(span \left\{ \frac{\partial \phi^i}{\partial v^j} dv^j (q, v) \right\} \right) = dim \left(span \left\{ d\phi^i (q, v) \right\} \right) = k. \tag{3.7}$$

Observación 1 *Durante este trabajo, consideramos lagragianos y vínculos independientes del tiempo, sólo por simplicidad: el análisis para sistemas dependientes del tiempo es completamente análogo.*

Desplazamientos virtuales. El conjunto de campos generadores de la dinámica que son compatibles con las restricciones es

$$\mathcal{S}(\mathcal{C}) := \{X \in \mathcal{S}(TQ) \text{ t.q. } d\phi^i(X) = 0 \text{ con } i = 1, ..., k\},$$

el conjunto de campos especiales pertenecientes a $\mathcal{X}(\mathcal{C})$. Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(TQ) &:= \{\text{campos especiales sobre } TQ\} & (3.8)\\ &:= \{X \in \mathcal{X}(TQ) \text{ t.q } \forall (q,v) \in TQ,\ X(q,v) = (v, Y(q,v))\}. & (3.9) \end{aligned}$$

Por otro lado, el espacio de *desplazamientos virtuales* está dado, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, por (ver, por ejemplo [20])

$$\mathcal{D}_{(q,v)} := \{u \in T_qQ \text{ t.q. } d\phi^i(q,v).\tau(u) = 0,\ i = 1, ..., k\}. \tag{3.10}$$

Escribiremos $\mathcal{D}_q$ en lugar de $\mathcal{D}_{(q,v)}$ cuando la dependencia sea sólo de $q \in Q$, y analogamente para otras distribuciones.

Observación 2 *$\mathcal{S}(TQ)$ es un subespacio afín de $\mathcal{X}(TQ)$ y $\mathcal{V}(TQ)$ es su subespacio vectorial asociado.*

Si el sistema mecánico a estudiar presenta restricciones será necesario, en este caso también, modificar la ecuación (2.9) para considerar las fuerzas del vínculo.

Si F^c es una fuerza ejercida por las restricciones para que los vínculos se satisfagan, y como antes, F^e es la fuerza externa del sistema, el sistema restricto puede ser pensado como el irrestricto, pero con $F^e + F^c$ en lugar de F^e. De esta manera, se obtiene

Principio de D'Alembert. *La dinámica de un sistema restringido, como en (3.5), está generada por un único campo vectorial $X_R \in \mathcal{X}(TQ)/_{\mathcal{C}}$ que satisface, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$,*

$$\omega_L(X_R(q,v), w) = (-dE_L + F^e + F^c)(w), \quad \forall w \in T_{(q,v)}(TQ). \tag{3.11}$$

Dado que F^e y F^c son 1-formas horizontales sobre TQ sólo dependen de la parte horizontal de w, es decir $F^e(w) = F^e(\pi_* w)$ (respectivamente con F^c). Con esta identificación podemos reescribir (3.11) como

$$\omega_L(X_R(q,v),w) + dE_L(w) = (F^e + F^c)(\pi_* w), \quad \forall w \in T_{(q,v)}(TQ). \tag{3.12}$$

En un sistema de coordenadas arbitrario, la ecuación (3.12) es equivalente a las ecuaciones de *Euler-Lagrange*

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)(u^i) = (F_i^e + F_i^c)(u^i) \quad \forall u \in T_q Q. \tag{3.13}$$

Las restricciones para las que F^c realiza trabajo nulo sobre los desplazamientos virtuales, son llamadas *ideales*.

Denotaremos, para cada $(q,v) \in \mathcal{C}$ y cualquier subespacio $S_{(q,v)}$ de $T_q Q$,

$$S^0 := \{F \in \mathcal{H}^1(TQ) \text{ t.q., en cada } (q,v) \in \mathcal{C},\ F(q,v).(u) = 0\ \forall u \in S_{(q,v)}\}.$$

Para sistemas ideales, se muestra en [26] que existe una única fuerza $F^c \in \mathcal{D}^0$ y, por lo tanto un único campo vectorial X_R solución de (3.11). En este caso, las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\omega_L(X_R(q,v),w) + dE_L(w) = F^e(\pi_* w), \qquad \forall\, w \in T_{(q,v)}(TQ) \text{ con } \pi_* w \in \mathcal{D}_{(q,v)}, \tag{3.14}$$

junto con

$$X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C}).$$

Equivalentemente, el generador de la dinánimca será el único campo $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ tal que

$$X_R := X_U + X_{F^c},$$

con $F^c \in \mathcal{D}^0$.

Mientras que si el sistema no es ideal, pero sabemos el trabajo que realiza F^c sobre los desplazamientos virtuales la ecuación (3.14) se reemplaza por

$$\omega_L(X_R(q,v),w) + dE_L(w) = (F^e + F^c)(\pi_* w), \quad \forall w \in T_{(q,v)}(TQ) \text{ t.q } \pi_* w \in \mathcal{D}_{(q,v)}. \tag{3.15}$$

En la siguiente sección, daremos una demostración muy simple de la existencia y unicidad del campo vectorial X_R cuando satisface (3.11).

3.2. Existencia y unicidad de la solución

Como fue mencionado en la introducción, el caso en que es sabido que la fuerza F^c ejercida por el vínculo realiza trabajo nulo sobre un espacio que puede ser distinto al de los desplazamientos virtuales también es de gran interés. Recordemos que estos sistemas son llamados *sistemas no holónomos generalizados* [15].

Para cada $(q,v) \in \mathcal{C}$ denotaremos con $\mathcal{W}_{(q,v)}$ al subespacio de T_qQ sobre el cual sabemos que la fuerza de vínculo F^c realiza trabajo nulo.

Es claro que este espacio $\mathcal{W}_{(q,v)}$ no se puede deducir de los vínculos cinemáticos como en el caso de los desplazamientos virtuales.

Probaremos en la sección 3.4 que la propiedad

$$T_qQ = \mathcal{D}_{(q,v)} \oplus \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}, \qquad \forall\, (q,v) \in \mathcal{C},$$

con $\mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$ el complemento $<,>_M$-ortogonal de $\mathcal{W}_{(q,v)}$ en T_qQ, es una condición suficiente para garantizar la existencia y unicidad de solución. Es claro que, en particular, esta propiedad se cumple en el caso clásico $\mathcal{W} = \mathcal{D}$. También será presentada una generalización del principio de D'Alembert.

Las pruebas presentadas en esta tesis estarán basadas en los siguientes dos lemas:

Lema 1 *Para restricciones admisibles, $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ es un subespacio afín no vacío de $\mathcal{S}(TQ)$. En cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, el subespacio lineal asociado de $\mathcal{S}(\mathcal{C})_{(q,v)}$ es $\tau(\mathcal{D}_{(q,v)})$.*

DEMOSTRACIÓN: Se muestra en [25] que, para restricciones admisibles, $\mathcal{S}(\mathcal{C})_{(q,v)}$ es no vacío.

Por otro lado, si $X, Y \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ entonces $d\phi^i X = d\phi^i Y = 0$ y además, $X - Y$ es un campo vertical. Entonces

$$d\phi^i[(X - Y)(q, v)] = 0, \quad i = 1, ...k \tag{3.16}$$

Por lo tanto de acuerdo con la definición (3.10), $\tau^{-1}[X - Y](q, v) \in \mathcal{D}_{(q,v)}$. De esta manera obtenemos

$$X, Y \in \mathcal{S}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \tau^{-1}(X - Y) \in \mathcal{D}. \tag{3.17}$$

$\triangle$

Lema 2 *Para cada $(q, v) \in \mathcal{C}$, y cualquier subespacio $S_{(q,v)}$ de T_qQ,*

$$F(q, v) \in S^0_{(q,v)} \Leftrightarrow \tau^{-1}(X_F(q, v)) \in S^\perp_{(q,v)}. \tag{3.18}$$

donde estamos considerando el complemento ortogonal con respecto a $<,>_M$.

DEMOSTRACIÓN: De la ecuación (3.3), se tiene que el campo X_F es vertical. Luego, para cada $w \in T_{(q,v)}TQ$ tal que $\pi_*(w) = u$,

$$F(q, v)(u) = \omega_L(X_F(q, v), w) =< \tau^{-1}(X_F(q, v)), u >_M .$$

$\triangle$

Como en la sección previa, X_U y X_R denotarán el generador de la dinámica del sistema irrestricto y del sistema restricto respectivamente, y $\mathcal{W}^\perp_{(q,v)}$ el complemento ortogonal de $\mathcal{W}_{(q,v)}$ en T_qQ con respecto a $<,>_M$.

De aquí en adelante, se asumirá que, para cada $(q, v) \in \mathcal{C}$,

$$T_qQ = \mathcal{D}_{(q,v)} \oplus \mathcal{W}^\perp_{(q,v)}. \tag{3.19}$$

Las proyecciones de T_qQ en $\mathcal{D}_{(q,v)}$ y en $\mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$ asociada a esta descomposición de T_qQ las denotaremos $\Pi_{\mathcal{D}}$ y $\Pi_{\mathcal{W}^{\perp}}$ respectivamente. Asociada a esta última tenemos la siguiente aplicación sobre vectores verticales:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mathcal{W}^{\perp}} &: \mathcal{V}_{(q,v)} \mapsto \mathcal{V}_{(q,v)} \\ \tilde{\Pi}_{\mathcal{W}^{\perp}} &:= \tau \circ \Pi_{\mathcal{W}^{\perp}} \circ \tau^{-1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Observación 3 *La condición (3.19) es equivalente a pedir que en cada* $(q,v) \in \mathcal{C}$ *la* $dim\mathcal{D}_{(q,v)} = dim\mathcal{W}_{(q,v)}$ *y* $\mathcal{D}_{(q,v)} \cap \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)} = \{0\}$. *De esta forma, se puede ver claramente que los espacios* $\mathcal{D}_{(q,v)}$ *y* $\mathcal{W}_{(q,v)}$ *son isomorfos.*

En este caso, la dinámica del sistema, también esta generada por la ecuación (3.12).

Consideremos el espacio

$$\mathcal{W}^0 = \{F \in \mathcal{H}^1(TQ) \text{ t.q., en cada } (q,v) \in \mathcal{C},\ F(q,v).(u) = 0\ \forall u \in \mathcal{W}_{(q,v)}\}. \tag{3.21}$$

Nosotros demostraremos que existe un único generador de la dinámica para los *sistemas no holónomos generalizados* si y sólo si existe una única fuerza $F^c \in \mathcal{W}^0$ tal que la solución de la ecuación (3.12) satisfaga las restricciones (i.e. $X_R \in \mathcal{X}(\mathcal{C})$)

De acuerdo con lo visto en el sección anterior, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, $X_U(q,v)$ y $X_R(q,v)$ pueden ser escritos como

$$X_U(q,v) = X_L(q,v) + X_{F^e}(q,v)$$

y

$$X_R(q,v) = X_U(q,v) + X_{F^c}(q,v). \tag{3.22}$$

Definimos

$$\mathcal{S}(TQ)/_{\mathcal{C}} = \{X \in \mathcal{S}(TQ) \text{ restringidos a } \mathcal{C}\}.$$

La diferencia entre $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{S}(TQ)/_{\mathcal{C}}$ radica en considerar campos X con aceleraciones permitidas ($X \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$) o simplemente campos con su dominio restringido a $\mathcal{C}$, ($X \in \mathcal{S}(TQ)/_{\mathcal{C}}$). Por ejemplo, para que (3.22) tenga sentido, hay que tomar $X_U \in \mathcal{S}(TQ)/_{\mathcal{C}}$, mientras que X_R siempre pertenecerá a $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ para que sea compatible con los vínculos.

Para mostrar que, bajo la suposición (3.19), existe un único X_R, primero mostraremos el siguiente resultado geométrico:

Proposición 2 *Si se verifica la condición (3.19), luego*

$$\forall X \in \mathcal{S}(TQ)/_{\mathcal{C}} \ \exists!\, F^X \in \mathcal{W}^0 \ t.q. \ X + X_{F^X} \in \mathcal{S}(\mathcal{C}).$$

Además, si $X = X_0 + Y$ con X_0 un campo fijo en $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$ se tiene

$$X_{F^X}(q,v) = -\tilde{\Pi}_{\mathcal{W}^\perp}(Y(q,v)), \tag{3.23}$$

con $\tilde{\Pi}_{\mathcal{W}^\perp}$ como en (3.20).

DEMOSTRACIÓN: Es claro que Y resulta ser un campo vertical. Para F^X caracterizada por (3.23) el Lema 2 implica $F^X \in \mathcal{W}^0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(X + X_{F^X})(q,v) &= X(q,v) - \tilde{\Pi}_{\mathcal{W}^\perp}(Y(q,v)) \\
&= X_0(q,v) + Y(q,v) - \tilde{\Pi}_{\mathcal{W}^\perp}(Y(q,v)) \\
&= X_0 + \tau[\tau^{-1}(Y(q,v)) - \Pi_{\mathcal{W}^\perp} \circ \tau^{-1}(Y(q,v))] \\
&= X_0 + \tilde{\Pi}_{\mathcal{D}}(Y(q,v)),
\end{aligned}$$

con $\tilde{\Pi}_{\mathcal{D}} := \tau \circ \Pi_{\mathcal{D}} \circ \tau^{-1}$.

Del Lema 1 se obtiene

$$X + X_{F^X} \in \mathcal{S}(\mathcal{C}).$$

Para probar la unicidad, supongamos $F \in \mathcal{W}^0$ tal que satisface $X + X_F \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$, entonces nuevamente del Lema 1 tenemos

$$\tau^{-1}[(X_{F^X} - X_{\tilde{F}})(q,v)] = \tau^{-1}[(X + X_{F^X})(q,v) - (X + X_F)(q,v)] \in \mathcal{D}_{(q,v)}.$$

Por otro lado, del Lema 2, $\tau^{-1}[(X_{F^X} - X_{\tilde{F}})(q,v)] \in \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$. De esta manera, $F = F^X$

Notemos que de la unicidad de F^X se deduce que la definición de esta fuerza F^X es independiente de la elección del $X_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$. $\triangle$

Como consecuencia directa de la Proposición 2 tenemos

Corolario 1 *Bajo las hipótesis de la Proposición anterior, X_R es el único campo vectorial especial sobre $\mathcal{C}$ tal que*

$$\tau^{-1}[(X_R - X_U)(q,v))] \in \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}, \quad \forall (q,v) \in \mathcal{C}. \tag{3.24}$$

DEMOSTRACIÓN: Si consideramos $F^X = F^c$ y $X = X_U$ en la Proposición 2, entonces X_R es el único campo especial tal que

$$X_R = X_U + X_{F^c} \in \mathcal{S}(\mathcal{C}).$$

Se sigue del Lema 2 que para cada $(q,v) \in \mathcal{C}$,

$$\tau^{-1}[(X_R - X_U)(q,v))] \in \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}.$$

$\triangle$

Corolario 2 *Bajo las hipótesis de la Proposición 2 se tiene que*

$$X_R - X_0 = \tilde{\Pi}_{\mathcal{D}}(X_U - X_0).$$

Esta es una observación interesante puesto que entonces, la aceleración del sistema restringido, se puede interpretar como la proyección de la aceleración del sistema sin restringir sobre los desplazamientos virtuales (sin tener en cuenta la parte afín de $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, por eso es que se resta X_0, Lema 1).

Observación 4 *En la versión hamiltoniana, vía la tranformada de Legendre, la condición (3.19) es la condición bajo la cual en [15], se demuestra existencia y unicidad de solución para sistemas no holónomos generalizados: la fuerza del vínculo tiene que pertenecer la complemento simpléctico en* $T_\xi(T^*Q)$ *con respecto a la forma canónica sobre* T^*Q, *de* $(\tilde{\pi}_*)^{-1}(\mathcal{D})$, *donde* $\tilde{\pi} : T^*Q \to Q$ *es la proyección canónica.*

De esta manera, la proposición anterior puede ser vista como la versión lagrangiana de este resultado de Marle.

Corolario 3 *Bajo la condición de la Proposición 2, para* $X \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$, $X = X_R$ *si y sólo si*

$$X = X_U + \tilde{\Pi}_{\mathcal{W}^\perp}(X - X_U), \tag{3.25}$$

Estos resutlados pueden ser reescritos del siguiente modo:

Proposición 3 (Principio de D'Alembert para sistemas no holónomos generalizados) *Si se verifica la condición (3.19) y* $F^c \in \mathcal{W}^0$, *luego el generador de la dinámica del sistema restringido es el único* $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ *tal que, en cada* $(q,v) \in \mathcal{C}$,

$$\omega_L(X_R, w) + dE_L(w) = F^e(\pi_* w), \ \forall w \in T_{(q,v)}(TQ) \ t.q. \ \pi_* w \in \mathcal{W}_{(q,v)}. \tag{3.26}$$

Demostración: Como, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, $F^c(u) = 0$ $\forall u \in \mathcal{W}_{(q,v)}$, es claro que si $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ satisface la ecuación (3.11), en particular satisface (3.26).

Recíprocamente, si un campo $X \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ verifica la ecuación (3.26), entonces $\forall w \in T_{(q,v)}(TQ)$ t.q. $\pi_* w \in \mathcal{W}_{(q,v)}$ se tiene

$$\begin{aligned} \omega_L(X - X_U, w) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \exists!\, F \in \mathcal{W}^0 \text{ t.q. } X_F = X - X_U \\ &\Rightarrow \quad F = F^{X_U} = F^c \in \mathcal{W}^0 \text{ t.q. } X = X_U + X_{F^c} \\ &\Rightarrow \quad X = X_U + X_{F^c} = X_R, \end{aligned}$$

donde esto último se sigue directamente del a Corolario 1. $\triangle$

Observación 5 *El Principio de D'Alembert nos permite entender la razón por la cual la matriz M está involucrada en la condición (3.19): en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, se necesitan n ecuaciones independientes para poder determinar el campo vectorial especial X_R generador de la dinámica; por esto, se necesitan n datos independientes referentes a los vínculos en cada punto; entonces tenemos $n-k$ datos independientes que provienen de F^c ($F^c_{(q,v)}(u) = 0\ \forall u \in \mathcal{W}_{(q,v)}$) generando la ecuación (3.26) y k que provienen de X_R ($X_R(q,v) \in T_{(q,v)}\mathcal{C}$); una condición para asegurar esta independencia tiene que involucrar a la matriz M.*

Observación 6 *En los sistemas no holónomos clásicos, los desplazamientos virtuales tiene un rol doble: por un lado, tienen un rol geométrico debido a su relación con los vínculos; y por otro lado, de ellos se obtiene la componente que se anula de la fuerza del vínculo. Es claro que, en el caso generalizado, los desplazamientos virtuales mantienen su rol geométrico, mientras que para determinar la fuerza del vínculo, es necesario conocer los vectores en los que ella se anula.*

Observación 7 *Si $\mathcal{W} = \mathcal{D}$ como en el caso ideal, tenemos las proyecciones $M-$ortogonales $\Pi^{id}_{\mathcal{D}}$ y $\Pi^{id}_{\mathcal{D}^\perp}$ asociadas a la descomposición*

$$T_qQ = \mathcal{D}_{(q,v)} \oplus \mathcal{D}^\perp_{(q,v)}. \tag{3.27}$$

De esta manera, las Proposiciones 2 y 3 y el Corolario 1 se pueden aplicar, en particular, al caso clásico.

En este caso queda por ejemplo,

$$\forall X \in \mathcal{S}(TQ)/_{\mathcal{C}}\ \exists!\, F^X \in \mathcal{D}^0 \text{ t.q. } X + X_{F^X} \in \mathcal{S}(\mathcal{C}),$$

o equivalentemente, X_R es el único campo vectorial especial sobre $\mathcal{C}$ tal que

$$\tau^{-1}[(X_R - X_U)(q,v))] \in \mathcal{D}^\perp_{(q,v)}, \quad \forall (q,v) \in \mathcal{C}.$$

Ejemplo 1. Para $\mathcal{W} = \mathcal{D}$, la condición (3.19) se verifica claramente, pues M es definida positiva en cada punto.

Ejemplo 2. Consideremos un sistema de dos partículas, con igual carga e, unidas por un resorte. La posición de las partículas la denotaremos, en cada tiempo t, $q^1(t)$ y $q^2(t)$ $(q^1 < q^2)$ y sus masas m_1 y m_2 respectivamente. Teniendo en cuenta el potencial del resorte lineal y la *Ley de Coulomb*, la energía potencial del sistema tiene la forma

$$U(q^1,q^2) = \frac{1}{2}\kappa(q^2 - q^1 - a) - \frac{k\,e^2}{q^2 - q^1}$$

donde k es la constante de Coulomb, a es el desplazamiento del resorte en equilibrio, y κ su constante de elasticidad.

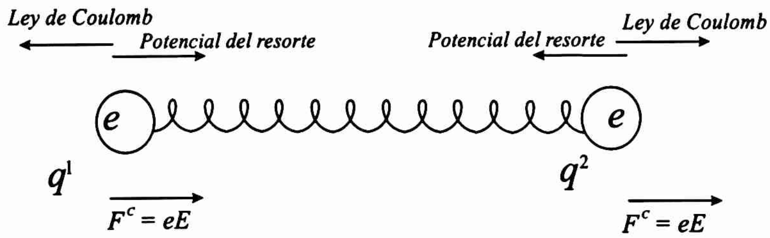

Figura 1.

Luego el lagragiano de este sistema es

$$L : R^2 \times R^2 \mapsto R$$

$$L(q^1,q^2;v^1,v^2) = \frac{1}{2}(m_1|v^1|^2 + m_2|v^2|^2) - U(q^1,q^2).$$

La restricción

$$A((q^1,q^2))\,\dot{q}^1 = \dot{q}^2,$$

con $A : R^2 \to R$ una función suave, es impuesta por un campo eléctrico $E(t)$, constante sobre R para cada t. Entonces tenemos

$$\mathcal{C} = \{(q^1,q^2;u,A(q^1,q^2)u)\},$$

y

$$F^c = eE(dq^1 + dq^2).$$

Siguiendo las ecuaciones de Maxwell se puede asumir que el campo magnético, generado a partir de la aplicación de un campo eléctrico sobre partículas en movimiento, es despreciable por estar multiplicado por $\frac{1}{c}$, siendo c la velocidad de la luz.

En cada $(q, v) \in \mathcal{C}$ se tiene

$$\mathcal{S}(\mathcal{C})_{(q,v)} = \{(v^1, v^2; w, A(q^1, q^2)w + b(q, v))\}, \tag{3.28}$$

con

$$b^i(q, v) = \frac{\partial A}{\partial q^1} v^1 v^1 + \frac{\partial A}{\partial q^2} v^2 v^1. \tag{3.29}$$

Es claro que esto viene de calcular las aceleraciones permitidas por los vínculos.

El espacio de desplazamientos virtuales está dado por

$$\mathcal{D}_{(q,v)} = \{(u, A(q^1, q^2)u) \text{ t.q } u \in R\},$$

y la fuerza del vínculo F^c hace trabajo nulo sobre

$$\mathcal{W}_{(q,v)} = \{(u, -u) \text{ t.q } u \in R\}.$$

En este caso, la matriz de masa es

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Luego el complemento $<,>_M$-ortogonal de $\mathcal{W}_{(q,v)}$ es

$$\mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)} = \{(u, \frac{m_1}{m_2} u)\}. \tag{3.30}$$

Es fácil ver que la condición (3.19) se verifica si y sólo si, para cada $(q, v) \in \mathcal{C}$,

$$\frac{m_1}{m_2} - A \neq 0.$$

Un cálculo directo muestra que las proyecciones $\Pi_{\mathcal{D}}$ y $\Pi_{\mathcal{W}^{\perp}}$ están dadas por

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{D}}(u^1, u^2) &= \left(\frac{m_2 u^2 - m_1 u^1}{m_2 A - m_1}, A \frac{m_2 u^2 - m_1 u^1}{m_2 A - m_1} \right) \\ \Pi_{\mathcal{W}^{\perp}}(u^1, u^2) &= \left(\frac{m_2 (A u^1 - u^2)}{m_2 A - m_1}, \frac{m_1 (A u^1 - u^2)}{m_2 A - m_1} \right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

De acuerdo con la Proposición 2, si X_0 es algún campo vectorial perteneciente a $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, luego

$$X_R = X_U + X_{F^c} = X_U - \Pi_{\mathcal{W}^\perp}(X_U - X_0). \tag{3.32}$$

con

$$X_U(q, v) = (v^1, v^2; Y_U^1, Y_U^2)$$

el campo generador del sistema sin restricciones.

Para

$$X_0(q, v) = (v^1, v^2; \mathbf{0}, b),$$

con b como en (3.29), tenemos

$$\tau^{-1}(X_U - X_0) = \left(Y_U^1, Y_U^2 - b\right). \tag{3.33}$$

Luego, de (3.31) y (3.32) se obtiene

$$\begin{aligned} X_{F^c} &= -\tau \circ \Pi_{\mathcal{W}^\perp} \circ \tau^{-1}(X_U - X_0) \\ &= -\tau \left(\frac{m_2(AY_U^1 - (Y_U^2 - b))}{m_2 A - m_1}, \frac{m_1(AY_U^1 - (Y_U^2 - b))}{m_2 A - m_1} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$X_R(q, v) = (v^1, v^2; Y_R(q, v), AY_R(q, v) + b(q, v))$$

con $Y_R = \dfrac{m_1 Y_U^1 + m_2(b - Y_U^2)}{m_1 - m_2 A}$.

Capítulo 4

Algunas propiedades

En este capítulo, generalizaremos distintos principios variacionales en el contexto de los sistemas no holónomos generalizados.

En la sección 4.1, daremos una versión del principio de Gauss de mínima restricción aplicable a dichos sistemas, mientras que en la sección 4.2 se analizarán dos posibles extensiones de las ecuaciones de Gibbs-Appell.

En la sección 4.3, se deducirá la ecuación del momento no holónomo generalizado para el caso de sistemas con simetrías. La sección 4.4 está dedicada al llamado método de Kane.

4.1. El principio de Gauss de mínima restricción

En un marco inercial, para $Q = R^n$, el *Principio de Gauss clásico* asegura que la norma $\|F^c\|_{M^{-1}}$ de la fuerza del vínculo F^c es la mínima del conjunto

$$\{\|G\|_{M^{-1}} \text{ t.q. } G \in C\},$$

con

$$C = \{G \in \mathcal{D}^0 \text{ t.q. el sistema con } \ddot{q}(t) = M^{-1}(F^L + F^e + G) \text{ satisface los vínculos}\},$$

donde F^L es la fuerza cuyo potencial está considerado en el lagrangiano y $\mathcal{D}^0 := \{\alpha \in R^{n*} \text{ t.q. } \alpha(u) = 0 \; \forall u \in \mathcal{D}\}$.

Notemos que $M^{-1}(F^L+F^e)$ es la aceleración del sistema sin restringir. Entonces, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, podemos ver que a_R es la aceleración del sistema restringido si y sólo si a_R es compatible con los vínculos y satisface

$$\|a_R(q,v) - M^{-1}(F^L + F^e)\|_M^2 = \min_{a:\, d\phi^i(v,a)=0} \|a(q,v) - M^{-1}(F^L + F^e)\|_M^2.$$

En nuestro contexto, el **Principio de Gauss** clásico tiene la siguiente forma: El campo generador de la dinámica es $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ tal que satisface

$$\|\tau^{-1}(X_R - X_U)\|_M = \min_{X \in \mathcal{S}(\mathcal{C})} \|\tau^{-1}(X - X_U)\|_M.$$

Para establecer un principio de Gauss de mínima restricción general que se pueda aplicar a los sistemas no holónomos generalizados, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$ consideraremos el producto interno $[,]_{(q,v)}$ sobre T_qQ tal que el subespacio $\mathcal{D}_{(q,v)}$ y $\mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$ sean $[,]_{(q,v)}$-ortogonales. La norma asociada la anotaremos, $\forall u \in T_qQ$,

$$\| u \|_{[,]} := ([u,u]_{(q,v)})^{\frac{1}{2}}.$$

Es claro que, si se verifica la condición (3.19), luego existen productos internos $[,]_{(q,v)}$ para los que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{W}^{\perp}$ son $[,]_{(q,v)}$-ortogonales. Por ejemplo, podríamos tomar, para $u, w \in T_qQ$,

$$[u,w]_{(q,v)} \;= < \Pi_{\mathcal{D}}\, u, \Pi_{\mathcal{D}}\, w >_M + < (1 - \Pi_{\mathcal{D}})u, (1-\Pi_{\mathcal{D}})w >_M . \qquad (4.1)$$

con $\Pi_{\mathcal{D}}$ la proyección definida en el capítulo 3. Las proyecciones $\Pi_{\mathcal{D}}$ y $\Pi_{\mathcal{W}^{\perp}}$ son ahora ortogonales para este producto interno.

Proposición 4 (Principio de Gauss Generalizado de mínima restricción) *Si se verifica la condición (3.19), el campo generador de la dinámica X_R está caracterizado por la propiedad*

$$\|\tau^{-1}(X_R - X_U)\|_{[,]} = \min_{X \in \mathcal{S}(\mathcal{C})} \|\tau^{-1}(X - X_U)\|_{[,]}. \qquad (4.2)$$

Demostración:

$$\tau^{-1}(X - X_U) = \tau^{-1}(X - X_R) + \tau^{-1}(X_R - X_U)$$

Ahora, como $X,\ X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$, luego $\tau^{-1}(X - X_R) \in \mathcal{D}$ (Lema 1).

Por otro lado, de la Corolario 1 tenemos $\tau^{-1}(X_R - X_U) \in \mathcal{W}^{\perp}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \|\tau^{-1}(X - X_U)\|^2_{[,]} &= \|\tau^{-1}(X - X_R)\|^2_{[,]} + \|\tau^{-1}(X_R - X_U)\|^2_{[,]} \\ &\geq \|\tau^{-1}(X_R - X_U)\|^2_{[,]}. \end{aligned}$$

Es claro que la igualdad sólo se verifica si $X = X_R$. △

Observación 8 *Notemos que se podría haber tomado* $[,] = <,>_M$ *si y sólo si* $\mathcal{W}_{(q,v)} = \mathcal{D}_{(q,v)}$ *en cada* $(q,v) \in \mathcal{C}$. *Por otro lado, se podría haber obtenido el Principio de Gauss de mínima restricción clásico [13] si se hubiera reemplazado* $[,]$ *por* $<,>_M$ *en la igualdad (4.2). Luego, directamente de la Proposición previa se puede recuperar el bien conocido resultado de Chataev: para que el Principio de Gauss (clásico) se verifique,* $\forall (q,v) \in \mathcal{C}$, *la fuerza del vínuclo debe hacer trabajo nulo sobre cada* $u \in \mathcal{D}_{(q,v)}$.

Ejemplo 2.1. En el ejemplo 2 del capítulo anterior, también se puede construir X_R en términos del Principio de Gauss:

Consideramos el producto interno

$$[u,w]_{(q,v)} = < \Pi_{\mathcal{D}}\, u, \Pi_{\mathcal{D}}\, w >_M + < \Pi_{\mathcal{W}^{\perp}} u, \Pi_{\mathcal{W}^{\perp}} w >_M,$$

donde las proyecciones son las calculadas en la sección anterior. Luego X_R es el único campo vectorial perteneciente $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ tal que

$$\|\tau^{-1}(X_R - X_U)\|_{[,]} = \inf_{X \in \mathcal{S}(\mathcal{C})} \|\tau^{-1}(X - X_U)\|_{[,]}. \tag{4.3}$$

Pero hemos visto que el mínimo de

$$\|\tau^{-1}(X - X_U)\|^2_{[,]} = \|\Pi_{\mathcal{D}}(\tau^{-1}(X - X_U))\|^2_M + \|\Pi_{\mathcal{W}^\perp}(\tau^{-1}(X - X_U))\|^2_M,$$

se alcanza cuando $\|\Pi_{\mathcal{D}}(\tau^{-1}(X - X_U))\|^2_M = 0$.

De esta manera, tenemos $X_R(q,v) = (v^1, v^2; Y_R(q,v), AY_R(q,v) + b(q,v))$ con $Y_R = \dfrac{m_1 Y_U^1 + m_2(b - Y_U^2)}{m_1 - m_2 A}$.

4.2. Las Ecuaciones de Gibbs-Appell.

Las ecuaciones de Gibbs-Appell fueron introducidas independientemente por M. P. Appell [3] and J. W. Gibbs [10] en el siglo XIX. En estos últimos años, estas ecuaciones tuvieron un renovado interés (véase, por ejemplo, [8], [14] or [17]).

En un marco inercial, para $Q = R^n$, la función de Gibbs-Appell [3] está definida, para cada posible aceleración a como

$$G(a)(q,v) = \frac{1}{2}\|a(q,v) - M^{-1}(F^L + F^e)\|^2_M,$$

con F^L es la fuerza cuyo potencial está considerado en el lagrangiano.

La aceleración del sistema sin restringir es la solución de la ecuación de Gibbs-Appell

$$D_a G(a) = 0.$$

En efecto, $D_a G(a).u =< a(q,v) - M^{-1}(F^L + F^e), u >_M = 0$, $\forall u \in T_{(q,v)}(R^n)$ si y sólo si $F = Ma$.

Para un sistema no-holónomo clásico, la función de Gibbs-Appell es

$$G(a)(q,v) = \frac{1}{2}\|a(q,v) - M^{-1}(F^L + F^e + F^c)\|^2_M. \tag{4.4}$$

Por supuesto, F^c no se conoce explícitamente, pero si $F^c(u) = 0$ $\forall u \in \mathcal{D}$, se puede calcular $D_a G(a).u$ para estos u:

$$D_a G(a).u =< a - M^{-1}(F^L + F^e), u >_M, \ \forall u \in \mathcal{D}.$$

En coincidencia con lo anterior, podemos ver que a_R es la aceleración del sistema restringido si y sólo si a_R es compatible con los vínculos y satisface

$$D_a G(a_R).u = 0, \ \forall u \in \mathcal{D}. \tag{4.5}$$

De acuerdo con el Principio de Gauss de mínima restricción, en cada $(q, v) \in \mathcal{C}$, a_R es la única aceleración compatible con las restricciones tal que

$$\|a_R(q,v) - M^{-1}(F^L + F^e)\|_M^2 = \min_{a:\, d\phi^i(v,a)=0} \|a(q,v) - M^{-1}(F^L + F^e)\|_M^2.$$

Por esta razón la ecuación (4.5) puede ser también obtenida del Principio de Gauss, simplemente minimizando $G(a)$.

Para sistemas no-holónomos generalizados, definimos dos extensiones naturales de la función de Gibbs-Appell.

Estas dos funciones son

$$G_{\mathcal{W}}, G_{\mathcal{D}} : \mathcal{S}(\mathcal{C}) \to C^\infty(\mathcal{C}),$$

$$G_{\mathcal{W}}(X)(q,v) = \frac{1}{2}\|\tau^{-1}(X(q,v) - X_U(q,v))\|_M^2, \tag{4.6}$$

$$G_{\mathcal{D}}(X)(q,v) = \frac{1}{2}\|\tau^{-1}(X(q,v) - X_U(q,v))\|_{[,]}^2. \tag{4.7}$$

Ambas funciones nos permiten escribir las ecuaciones de Gibbs-Appel que determinan X_R.

Proposición 5 *Asumamos que se satisface la condición (3.19).*

El campo vectorial X_R es el único campo en $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ que verifica

$$[D_X G_{\mathcal{W}}(X_R)(q,v)](u) = 0, \ \forall u \in \mathcal{W}_{(q,v)}, \ \forall (q,v) \in \mathcal{C}, \tag{4.8}$$

o equivalentemente

$$[D_X G_{\mathcal{D}}(X_R)(q,v)](u) = 0, \ \forall u \in \mathcal{D}_{(q,v)}, \ \forall (q,v) \in \mathcal{C}. \tag{4.9}$$

DEMOSTRACIÓN: $\forall u \in T_qQ$, y

$$\begin{aligned} D_X G_{\mathcal{W}}(X)(u) &= < \tau^{-1}(X - X_U), u >_M \\ &= \omega_L(X - X_U, w) \end{aligned}$$

con $\pi_*(w) = u$. Entonces concluímos que (4.8) es equivalente a que $\tau^{-1}[(X_R - X_U)(q,v)] \in \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$.

Por lo tanto, como consecuencia del Corolario 1, X_R es el generador de la dinámica restringida si y sólo si pertenece a $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ y satisface (4.8).

Por otro lado, como

$$[D_X G_{\mathcal{D}}(X)(q,v)](u) = [\tau^{-1}(X - X_U), u]_{(q,v)},$$

la condición (4.9) es equivalente a

$$\tau^{-1}((X_R - X_U)(q,v)) \in \mathcal{D}^{\perp [,]}_{(q,v)},$$

donde $\mathcal{D}^{\perp [,]}_{(q,v)}$ denota el complemento ortogonal en T_qQ de $\mathcal{D}_{(q,v)}$ con respecto a $[.,.]_{(q,v)}$.

Pero el producto interno $[.,.]_{(q,v)}$ fue elegido para que $\mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)} = \mathcal{D}^{\perp [,]}_{(q,v)}$. Luego, las condiciones (4.8) y (4.9) son equivalentes. $\triangle$

Observación 9 *Como $G_{\mathcal{W}}$ involucra la norma $\|\|_M$, pareciera estar más cerca de la función original de Gibbs-Appell que $G_{\mathcal{D}}$. Efectivamente, $G_{\mathcal{W}}$ coincide con la función de Gibbs-Appell definida en [14] para el caso no-holonómico clásico si $F^e = 0$.*

Por otro lado, $G_{\mathcal{D}}$ y la Propiedad (4.9) están relacionadas con el Principio de Gauss de mínima restricción generalizado.

Ejemplo 2.2: Ahora analizaremos las ecuaciones de Gibbs-Appell para el Ejemplo 2 del capítulo anterior.

Si $X_U(q,v) = (v_1, v_2; {Y_U}^1(q,v), {Y_U}^2(q,v))$ y $X(q,v) = (v_1, v_2; Y(q,v), AY(q,v) + b(q,v)) \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$, las funciones de Gibbs-Appell extendidas son

$$G_{\mathcal{W}}(X)(q,v) = \frac{1}{2}\, \|(Y(q,v) - Y_U^1(q,v)\, ,\, AY(q,v) + b(q,v) - Y_U^2(q,v)\|^2_M$$

y

$$G_{\mathcal{D}}(X)(q,v) = \frac{1}{2}\,\|(Y(q,v) - Y_U^1(q,v)\,,\,AY(q,v) + b(q,v) - Y_U^2(q,v)\|_{[,]}^2.$$

Un cálculo directo muestra que

$$D_X G_{\mathcal{W}}(X)(u) =< \tau^{-1}(X - X_U), u >_M$$

y

$$D_X G_{\mathcal{D}}(X)(u) = [\tau^{-1}(X - X_U), u]_{(q,v)}.$$

El único campo vectorial que satisface la Proposición 5, es

$$X = X_R(q,v) = (v_1, v_2; Y_R(q,v), AY_R(q,v) + b(q,v))$$

con Y_R como en el ejemplo anterior.

Observación 10 *Los resultados presentados pueden ser, en realidad, escritos en términos de cualquier métrica sobre* TQ *coincidente con* $[\tau^{-1}, \tau^{-1}]_{(q,v)}$ *cuando nos restringimos a* $\mathcal{V}_{(q,v)}$, $\forall (q,v) \in \mathcal{C}$.

Si se puede definir $[,]_{(q,v)}$ *dependiendo sólo de* q*, por ejemplo cuando* $\mathcal{W} = \mathcal{D}$ *y las restricciones son lineales en* v*, este producto interno genera una métrica* g *sobre* Q*. En este caso, podríamos tomar sobre* TQ *la extensión de Sasaki* g_S *[19] de* g.

4.3. El momento no-holónomo generalizado

Ahora consideraremos la acción de un grupo de Lie G sobre Q. La acción es tal que el lagrangiano L es invariante por su levantamiento al TQ. Veremos que, en este caso, se puede deducir una ecuación para la aplicación momento no-holónomo generalizada, similar a la obtenida en [5] para sistemas no-holonómicos con restricciones ideales.

Llamaremos g al algebra de Lie del grupo G y, para cada $(q,v) \in \mathcal{C}$,

$$g_{\mathcal{W}_{(q,v)}} := \{\xi \in g \ \text{ t.q. } \ \xi_Q(q) \in \mathcal{W}_{(q,v)}\},$$

donde $\xi_Q \in \mathcal{X}(Q)$ es el generador infinitesimal de la acción sobre Q asociada a ξ.

Para cada $(q,v) \in \mathcal{C}$ la **aplicación momento no-holónomo** J^{nh} está definida sobre $g_{\mathcal{W}_{(q,v)}}$ como [5]:

$$J^{nh}(\xi) := D_v L(\xi_Q(q)).$$

En coordenadas

$$J^{nh}(\xi) := \frac{\partial L}{\partial v^i}\xi_Q(q)^i.$$

Para restricciones no holónomas clásicas, está mostrado en [5] que, si $\xi^{q(t)} \in g_{\mathcal{W}(q(t),\dot{q}(t))}$ para cada t, la siguiente **ecuación de momento** se verifica sobre cada trayectoria del sistema restringido:

$$\frac{d}{dt}(J^{nh}(\xi^{q(t)})) = D_v L([\frac{d}{dt}(\xi^{q(t)})]_Q) \tag{4.10}$$

En nuestro caso general, tenemos el siguiente resultado análogo cuya prueba es una adaptación a nuestro contexto de la dada en [5]:

Proposición 6 *Supongamos que el lagrangiano L es invariante por el levantamiento al TQ de la acción del grupo de Lie G sobre Q. Luego, para cualquier trayectoria $(q(t),\dot{q}(t))$ del sistema restricto y para cualquier curva $\xi(t)$ en g tal que $\xi(t) \in g_{\mathcal{W}_{(q(t),\dot{q}(t))}}$ para cada t, se verifica*

$$\frac{d}{dt}[J^{nh}(\xi(t))] = D_v L([\frac{d}{dt}\xi(t)]_Q) + (F^e)([\xi(t)]_Q). \tag{4.11}$$

Demostración: Dada una trayectoria $(q(t),\dot{q}(t))$ del sistema restringido y una curva $\xi(t)$ en g, tomamos

$$(u(t),w(t)) := [\xi(t)]_{TQ}(q(t),\dot{q}(t)),$$

donde $[\xi(t)]_{TQ}$ es el generador infinitesimal asociado a $\xi(t)$ de la acción levantada.

Por un lado, para $u(t) = [\xi(t)]_Q(q(t)) \in \mathcal{W}_{(q(t),\dot{q}(t))}$, las ecuaciones de Euler-Lagrange generan

$$[\frac{d}{dt}D_vL](u) = D_qL(u) + F^e(u). \tag{4.12}$$

Por otro lado, como el levantamiento de la acción de G deja al lagrangiano invariante,

$$dL(u, w) = 0,$$

y entonces

$$D_qL(u) + D_vL(w) = 0. \tag{4.13}$$

De (4.12) y (4.13) obtenemos

$$[\frac{d}{dt}D_vL](u) = -D_vL(w) + F^e(u). \tag{4.14}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dt}(D_vL(u)) = [\frac{d}{dt}D_vL](u) + D_vL[(\dot{\xi}_Q) + w],$$

vemos

$$\frac{d}{dt}(D_vL(u)) = D_vL(\dot{\xi}_Q) + F^e(u).$$

Esto es,

$$\frac{d}{dt}[D_vL(\xi_Q)] = D_vL(\dot{\xi}_Q) + F^e(\xi_Q).$$

$\triangle$

Las principales aplicaciones de la fórmula del momento no holónomo aparecen en la teoría de reducción (mirar, por ejemplo, [5]). A pesar de no haber considerado esta teoría en esta tesis, hemos incluído la Proposición previa simplemente para mostrar otro caso más en el que, el espacio $\mathcal{W}$ juega el rol que antes lo jugaba el espacio de desplazamientos virtuales en los sistemas no-holónomos clásicos.

Ejemplo 2.3 Para sistemas restringidos como el considerado en el Ejemplo que venimos estudiando, analizaremos su ecuación del momento no holónomo.

Consideremos la acción de R sobre R^2 dada por

$$(u^1, u^2) \mapsto (u^1 + g, u^2 - g),$$

con $g \in R^2$.

El subspacio $\mathcal{W}$ y el lagrangiano son invariantes bajo esta acción. Los vínculos son invariantes si la función A lo es.

El espacio tangente a las órbitas, es decir, el espacio vertical, está dado por

$$T_q(Orb(q)) = \{(u, -u) \text{ t.q. } u \in R\}. \tag{4.15}$$

La intersección del espacio vertical con $\mathcal{W}$ es exactamente $\mathcal{W}$.

Consideremos una sección $\xi(t)$ en $g_{\mathcal{W}_{(q,v)}} = R$. Así, el campo vectorial $u := [\xi(t)]_Q = (\xi(t), -\xi(t)) \in \mathcal{W}_{(q,v)}$.

La aplicación momento no-holónomo, es en este caso

$$J^{nh}(\xi^{q(t)}) = m_1 v^1 \xi - m_2 v^2 \xi \tag{4.16}$$

y la *ecuación de momento* es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J^{nh}(\xi(t)) &= [\frac{d}{dt} D_v L][\xi(t)]_Q + D_v L(w) + m_1 v^1 \dot{\xi} - m_2 v^2 \dot{\xi} \\ &= D_v L([\frac{d}{dt}\xi(t)]_Q) \\ &= m_1 v^1 \dot{\xi} - m_2 v^2 \dot{\xi} \end{aligned}$$

de donde se deducen las ecuaciones de movimiento.

4.4. El método de Kane

Método de Kane clásico

El método de Kane clásico consiste en la elección de una base adecuada del espacio lineal $\mathcal{D}_{(q,v)}$ con el objetivo de escribir las ecuaciones de movimiento (3.14) de manera simple en términos de la misma. En primer lugar haremos un breve resumen del método propuesto en [2], [11].

Consideremos un conjunto de generadores (linealmente independientes)

$$\{e_1(q,v),...,e_{n-k}(q,v)\}$$

de $\mathcal{D}_{(q,v)}$ tal que completándolo se puede obtener una base $\mathcal{B}_{(q,v)}$ del T_qQ, i.e.,

$$T_qQ = span\{e_1(q,v),...,e_{n-k}(q,v),e_{n-k+1}(q,v),...,e_n(q,v)\}.$$

Luego, podemos denotar la base dual de $\mathcal{B}_{(q,v)}$

$$\mathcal{B}^*_{(q,v)} = \{e^1(q,v),...,e^{n-k}(q,v),e^{n-k+1}(q,v),...,e^n(q,v)\}.$$

Es claro que este conjunto genera las 1-formas horizontales sobre TQ. Es decir, para cada $(q,v) \in \mathcal{C}$ se tiene

$$\mathcal{H}^1(TQ)_{(q,v)} = span\, \mathcal{B}^*_{(q,v)}.$$

Si el sistema es ideal, las fuerzas del vínculo pueden ser escritas como

$$F^c(q,v) = \sum_{i=n-k+1}^{n} f_i^c(q,v)\, e^i(q,v), \tag{4.17}$$

con f_i^c funciones para $i = n-k+1,...,n$. Es más, es fácil ver que

$$\mathcal{D}^0_{(q,v)} = span\{e^{n-k+1}(q,v),...,e^n(q,v)\}.$$

Ahora, escribiremos las ecuaciones (3.14) en término de la base definida anteriormente.

La 1-forma horizontal sobre TQ

$$\Lambda(X(q,v))(\pi_* w) = \omega_L(X(q,v),w) + dE_L(w)$$

puede ser desarrollada como

$$\Lambda(X(q,v)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X(q,v))\, e^i(q,v), \tag{4.18}$$

y la fuerza externa

$$F^e(q,v) = \sum_{i=1}^{n} f_i^e(q,v)\, e^i(q,v), \tag{4.19}$$

con λ_i y f_i^e funciones a valores reales para $i = 1, ..., n$ y F^c, como ya fue descripta en (4.17).

Por lo tanto, la dinámica del sistema restringido está generada por un único campo vectorial $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ tal que satisface

$$\lambda_i(X_R(q,v)) - f_i^e(q,v) = 0 \quad \forall\, i = 1, ..., n-k \tag{4.20}$$

junto con los vínculos

$$d\phi^i(X_R) = 0, \quad i = 1, ..., k. \tag{4.21}$$

Estas, son las *Ecuaciones de Kane* para sistemas ideales.

Observación 11 *Aquí, podemos notar el número de ecuaciones que determinan el campo vectorial generador de la dinámica X_R. Hay $n-k$ ecuaciones dadas por la condición $F^c(u) = 0$ $\forall u \in \mathcal{D}_{(q,v)}$, y k ecuaciones producidas por los vínculos.*

Es importante notar que también podemos escribir las ecuaciones (4.21) en términos de la base $\mathcal{B}_{(q,v)}$. En efecto, tomemos $X_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ un campo vectorial fijo. Luego, $X_R - X_0$ es un campo vertical y, de acuerdo con el Lema 1,

$$Y_R(q,v) = \tau^{-1}[X_R - X_0](q,v) \in \mathcal{D}_{(q,v)}.$$

Entonces $Y_R \in \mathcal{T}(Q)$ está generado por $e_i(q,v)$ con $i = 1, ..., n-k$, esto es

$$Y_R(q,v) = \sum_{i=1}^{n-k} y^i\, e_i(q,v),$$

con $y^i = y^i(q,v)$ funciones a valores reales para $i = 1, ..., n-k$.

Método de Kane para sistemas no holónomos generalizados

En esta sección adaptaremos el método de Kane a sistemas no hólonomos generalizados.

Nuevamente, supondremos que la fuerza del vínculo realiza trabajo nulo sobre un cierto subespacio $\mathcal{W}_{(q,v)}$ que verifica (3.19).

Consideremos ahora, para cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, una base de T_qQ,

$$\bar{\mathcal{B}}_{(q,v)} := \{e_1(q,v), ..., e_{n-k}(q,v), e_{n-k+1}(q,v), ..., e_n(q,v)\} \tag{4.22}$$

tal que

$$\mathcal{W}_{(q,v)} = span\{e_1(q,v), ..., e_{n-k}(q,v)\}. \tag{4.23}$$

Como ya hemos hecho, tomamos la base dual con respecto a $\bar{\mathcal{B}}_{(q,v)}$,

$$\bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)} := \{e^1(q,v), ..., e^{n-k}(q,v), e^{n-k+1}(q,v), ..., e^n(q,v)\} \tag{4.24}$$

La fuerza del vínculo puede ser desarrollada en términos de $e^i(q,v) \in \bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$ y teniendo en cuenta que $F^c \in \mathcal{W}^0$, se obtiene

$$F^c(q,v) = \sum_{i=n-k+1}^{n} \bar{f}^c_i(q,v) e^i(q,v) \tag{4.25}$$

donde f^c_i son funciones a valores reales sobre TQ.

También, desarrollamos $\Lambda(X_R)$ y F^e en términos de la base $\bar{\mathcal{B}}^*$:

$$\Lambda(X(q,v)) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i(X(q,v))\, e^i(q,v), \tag{4.26}$$

$$F^e(q,v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}^e_i(q,v)\, e^i(q,v). \tag{4.27}$$

Después de un cálculo directo aplicando la Proposión 3 se obtiene el siguiente

Lema 3 *El campo vectorial generador de la dinámica es el único campo $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ que verifica*

$$\bar{\lambda}_i(X_R(q,v)) - \bar{f}^e_i(q,v) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n-k \tag{4.28}$$

junto con los vínculos

$$d\phi^i(X_R) = 0, \quad i = 1, ..., k, \tag{4.29}$$

donde $\bar{\lambda}_i(X_R(q,v))$ y $\bar{f}^e_i(q,v)$ son los coeficientes del desarrollo de $\Lambda(X_R(q,v))$ y de $F^e(q,v)$ en (4.26) y en (4.27) respectivamente.

Éstas son entonces ***Las ecuaciones de Kane para sistemas no holónomos generalizados***

Observación 12 *Si la base elegida $\bar{\mathcal{B}}_{(q,v)}$ es $M-$ortonormal, su correspondiente base dual $\bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$ es M^{-1}-ortonormal. Por esto, podemos escribir los coeficientes del desarrollo (4.26) como*

$$\bar{\lambda}_i(X(q,v)) =< \Lambda(q,v), e^i(q,v) >_{M^{-1}}= \Lambda(X(q,v))\left(\tau^{-1}(X_{e^i}(q,v))\right), \qquad (4.30)$$

y de manera análoga los coeficientes de F^c y F^e.

Es importante notar también que, dada la base $\bar{\mathcal{B}}_{(q,v)}$ $M-$ortogonal del espacio tangente T_qQ, se tiene que $e^j\left(\tau^{-1}(X_{e^i})\right) = \delta_{ij}$, donde $e^i = e^i(q,v) \in \bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$.

Siguiendo con el espíritu de las Proposiciones 2 y 3 definiremos Y_U y Y_R en $\mathcal{T}(Q)$ como sigue,

$$X_U = X_0 + \tau(Y_U) \qquad (4.31)$$

$$X_R = X_0 + \tau(Y_R) \qquad (4.32)$$

donde, de acuerdo con el Lema 1, $Y_R \in \mathcal{D}$. Observemos que en la Proposición 2, $Y = \tau(Y_U)$.

A partir de ahora, asumiremos que la base $\bar{\mathcal{B}}_{(q,v)}$ es $M-$ortogonal y por lo tanto su base dual $\bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$ es M^{-1}-ortogonal.

Lema 4 *Si tenemos Y_U y Y_R como (4.31) y (4.32) respectivamente, y además en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, Y_U puede ser escrito como*

$$Y_U(q,v) = \sum_{i=1}^{n} y^i\, e_i(q,v),$$

con $e_i(q,v) \in \bar{\mathcal{B}}_{(q,v)}$ y los $y^i = y^i(q,v)$ funciones a valores reales para $i = 1, ..., n$, entonces, Y_R se puede escribir del siguiente modo:

$$Y_R(q,v) = \sum_{i=1}^{n-k} y^i\, \Pi_{\mathcal{D}}(e_i(q,v)).$$

con $\Pi_{\mathcal{D}}$ la proyeccón $[,]-$ortogonal con respecto a la descomposición $\mathcal{D}_{(q,v)} \oplus \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$ definida en el capítulo 4.

DEMOSTRACIÓN: Por el Corolario 2,

$$Y_R = \Pi_{\mathcal{D}}(Y_U) = \sum_{i=1}^{n} y_i(q,v)\,\Pi_{\mathcal{D}}(e_i(q,v)) = \sum_{i=1}^{n-k} y_i(q,v)\,\Pi_{\mathcal{D}}(e_i(q,v)) \tag{4.33}$$

(recordemos que $e_i(q,v)$ para $i = n-k+1,...,n$ es un elemento de $\mathcal{W}^{\perp}$, y por lo tanto $\Pi_{\mathcal{D}}(e_i(q,v)) = 0$). $\triangle$

Observación 13 *$\tilde{\mathcal{B}}_{(q,v)} = \{\Pi_{\mathcal{D}}(e_1,(q,v)),...,\Pi_{\mathcal{D}}(e_{n-k}(q,v))\}$ es una base del subespacio $\mathcal{D}_{(q,v)}$ pues $\Pi_{\mathcal{D}}$ restringida a $\mathcal{W}_{(q,v)}$ es un isomorfismo sobre $\mathcal{D}_{(q,v)}$.*

En efecto, $dim\mathcal{D} = dim\mathcal{W}$ y, si $w \in \mathcal{W}$ y $\Pi_{\mathcal{D}}(w) = 0$, luego $w \in \mathcal{W}^{\perp}$, esto es $w = 0$.

Base $[,]$-ortogonal

El verdadero problema, cuando se trabaja con el Método de Kane, reside en elegir la base del T_qQ para lograr que el problema quede lo más simple posible. Acá, se propone una opción para elegir una base, que podría ser útil para escribir el campo generador del sistema X_R .

Sea

$$\mathcal{B}_{[,]} := \{b_1(q,v),...,b_{n-k}(q,v),b_{n-k+1}(q,v),...,b_n(q,v)\} \tag{4.34}$$

una base $[,]_{(q,v)}$-ortogonal T_qQ tal que el conjunto $\{b_1(q,v),...,b_{n-k}(q,v)\}$ genera $\mathcal{D}_{(q,v)}$. En cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, sea $\Pi_{\mathcal{D}}/_{\mathcal{W}}$ la restricción de $\Pi_{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{W}_{(q,v)}$. Ahora, de acuerdo con la Observación 13, podemos considerar el isomorfismo

$$\Gamma_{(q,v)} := \left(\Pi_{\mathcal{D}}/_{\mathcal{W}}\right)^{-1} : \mathcal{D}_{(q,v)} \to \mathcal{W}_{(q,v)}.$$

Este isomorfismo $\Gamma_{(q,v)}$ produce una base de $\mathcal{W}_{(q,v)}$:

$$\mathcal{W}_{(q,v)} = span\{\Gamma(b_1(q,v)),...,\Gamma(b_{n-k}(q,v))\}.$$

Completemos ahora esta base con elementos $\beta_i(q,v) \in \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$, con $i = 1,...,k$, de modo que

$$T_qQ = span\{\Gamma(b_1(q,v)),...,\Gamma(b_{n-k}(q,v)),\beta_1(q,v),...,\beta_k(q,v)\}. \tag{4.35}$$

Llamaremos a esta base $\tilde{\mathcal{B}}_{(q,v)}$.

Como siempre, denotamos con

$$\tilde{\mathcal{B}}^*_{(q,v)} := \{\Gamma(b_1(q,v))^*,...,\Gamma(b_{n-k}(q,v))^*,\beta_1(q,v)^*,...,\beta_k(q,v)^*\} \tag{4.36}$$

a su base dual.

Luego, resolvemos el sistema

$$\tilde{\lambda}_i(X_R(q,v)) - \tilde{f}^e_i(q,v) = 0 \quad \forall\, i = 1,...,n-k \tag{4.37}$$

junto con los vínculos

$$d\phi^i(X_R) = 0, \quad i = 1,...,k. \tag{4.38}$$

donde $\tilde{\lambda}_i(X_R(q,v))$ y $\tilde{f}^e_i(q,v)$ son los coeficientes de $\Lambda(X_R(q,v))$ y F^e respectivamente, en la base $\tilde{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$.

Hasta acá, nada más hemos resuelto el sistema y pareciera que es lo mismo considerar esta base o la propuesta anteriormente (una base $M-$ortogonal). Pero ahora, escribiremos el campo generador de la dinámica del sistema con restricciones en términos de esta base. Consideremos Y_U y Y_R en $\mathcal{T}(Q)$ como lo hemos hecho en (4.31) y (4.32). Y_U se puede obtener facilmente, teniendo en cuenta que el campo X_U es el que verifica que en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$,

$$\tilde{\lambda}_i(X_U(q,v)) - \tilde{f}^e_i(q,v) = 0 \quad \forall\, i = 1,...,n. \tag{4.39}$$

Consideramos a Y_U desarrollado en la base (4.35),

$$Y_U(q,v) = \sum_{i=1}^{n-k} \tilde{y}_i\, \Gamma\left(b_i(q,v)\right) + \sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i\, \beta_i(q,v),$$

donde, como siempre, $y_i = y_i(q,v)$ y $x_i = x_i(q,v)$ son funciones a valores reales.

De este modo, del Lema 4, se obtiene

$$Y_R(q,v) = \Pi_{\mathcal{D}}(Y_U)(q,v) = \sum_{i=1}^{n-k} \tilde{y}_i\, b_i(q,v).$$

Así, vemos que si elegimos una base en $\mathcal{D}_{(q,v)}$, se puede construir una base $\mathcal{W}_{(q,v)}$ usando el hecho que $\Pi_{\mathcal{D}}/_{\mathcal{W}}$ es un isomorfismo. Podemos escribir, de manera sencilla, el campo generador de la dinámica para el sistema no holónomo generalizado, en términos de la base original tomada en $\mathcal{D}_{(q,v)}$,

$$\begin{aligned} X_R &= X_0 + \tau\left(\sum_{i=1}^{n-k} \tilde{y}^i\, b_i(q,v)\right) \\ &= X_0 + \sum_{i=1}^{n-k} \tilde{y}^i\, \tau(b_i(q,v)). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Volviendo al ejemplo 2, analizaremos las ecuaciones de Kane en términos de la base $[,]$−ortogonal propuesta en esta sección.

En cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, consideremos las siguientes dos bases de $\mathcal{D}_{(q,v)}$ y $\mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}$ respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(q,v) &= \{(1, A(q))\} \\ \mathcal{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}(q,v) &:= \{(1, \frac{m_1}{m_2})\} \end{aligned}$$

donde $A(q) = A(q^1, q^2)$.

El isomorfismo $\Gamma_{(q,v)} = (\Pi_{\mathcal{D}}/_{\mathcal{W}})^{-1}$ de $\mathcal{D}_{(q,v)}$ sobre $\mathcal{W}_{(q,v)}$ está dado por

$$\Gamma_{(q,v)}(w, A(q)) = \left(\frac{m_1 - m_2 A(q)}{m_1 + m_2}\right)(w, -w). \tag{4.40}$$

En particular,

$$\Gamma_{(q,v)}(\,(1, A(q))\,) = \left(\frac{m_1 - m_2 A(q)}{m_1 + m_2}\right)(1, -1).$$

Podemos escribir al generador de la dinámica irrestricta X_U en términos de la base dada por $\{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}^{\perp}}\}$:

$$Y_U = y_U^1 \left(\frac{m_1 - m_2 A(q)}{m_1 + m_2}\right)(1, -1) + y_U^2\, (1, \frac{m_1}{m_2}). \tag{4.41}$$

Ahora, usando la proyección $\bar{\Pi}_{\mathcal{D}}$ queda

$$Y_R = y_U^1\,(1, A(q)).$$

Finalmente obtenemos

$$X_R(q,v) = (v^1, v^2\,;\, y_U^1, A(q)y_U^1 + b)$$

Capítulo 5

Restricciones no ideales

En este capítulo consideraremos, en primera instancia, el método propuesto por Udwadia F.E. y R.E. Kalaba para el análisis de sistemas no holónomos en los que la fuerza del vínculo, en cada $(q, v) \in \mathcal{C}$ hace un trabajo no nulo, pero conocido sobre $\mathcal{D}_{(q,v)}$.

En la sección 5.2 analizaremos el caso en el que el sistema presenta restricciones tales que la fuerza del vínculo, en cada $(q, v) \in \mathcal{C}$ hace un trabajo no nulo, pero conocido sobre el espacio $\mathcal{W}_{(q,v)}$.

5.1. Descomposición de Udwadia-Kalaba

En esta sección reseñaremos el método desarrollado por F.E. Udwadia y R.E. Kalaba en el marco de la mecánica newtoniana para el estudio de sistemas con restricciones cuya fuerza del vínculo realiza un trabajo no nulo sobre los desplazamientos virtuales [22].

Consideremos un sistema mecánico cuyas trayectorias están descriptas por

$$q(t) : R \longrightarrow R^m$$

Cuando el sistema mecánico no tiene restricciones, las ecuaciones de movimiento que describen la evolución del sistema son

$$M\ddot{q}(t) = F(q(t), \dot{q}(t), t), \tag{5.1}$$

donde M es la matriz de masa (simétrica y definida positiva) y F es la fuerza aplicada sobre el sistema.

Si el sistema está restringido por los vínculos

$$\phi^i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad i = 1, ..., r, \tag{5.2}$$

siendo ϕ^i 's funciones continuas tal que, en cada $(q, \dot{q}, t)$, k son independientes, Eq. (5.1) se modifica para tener en cuenta la fuerza F^c que proviene de la realización física de las restricciones:

$$M\ddot{q}(t) = F(q(t), \dot{q}(t), t) + F^c(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{5.3}$$

Asumiremos, para cada $(q, \dot{q}, t)$ que el rango de la matriz $(\frac{\partial \phi^i}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t))$ es igual a k.

Consideremos la matriz $A(q, \dot{q}, t)$ de $k \times m$ con entradas

$$A_{ij}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \phi^{l_i}}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t), \tag{5.4}$$

con $\phi^{l_1}, ..., \phi^{l_k}$ tal que $rank(A) \equiv k$.

En este contexto, el espacio de los **desplazamientos virtuales** en cada $(q, \dot{q}, t)$ es el subespacio de R^n

$$\mathcal{D}_{(q,\dot{q})} := \{u \in R^n \text{ t.q. } A(q, \dot{q}, t)u = \mathbf{0}\} \tag{5.5}$$

(ver, por ejemplo [21]).

Observemos que la definición (5.5)de Udwadia y Kalaba es totalmente análoga a la definición (3.10) .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{(q,v)} &:= \{u \in T_qQ \text{ t.q. } d\phi^i(q, v).\tau(u) = 0, \ i = 1, ..., k\} \\ &= \{u \in T_qQ \text{ t.q. } \frac{\partial \phi^i}{\partial \dot{q}_j}(q, v).u_j, \ i = 1, ..., k, \ j = 1, ..., n\} \\ &= \{u \in T_qQ \text{ t.q. } A(q, v)\, u = 0\}. \end{aligned}$$

Si el sistema presenta restricciones *ideales*, es decir, la fuerza del vínculo realiza trabajo nulo los desplazamientos virtuales, las ecuaciones de movimiento dan lugar a un sistema de n-ecuaciones diferenciales con solución única [25]

$$< M\ddot{q} - F \ , \ u >= 0 \ \ \forall u \in \mathcal{D}_{(q,\dot{q})} \tag{5.6}$$

$$\phi^i(q, \dot{q}, t) = 0 \quad i = 1, ..., k. \tag{5.7}$$

Es claro que (5.6) son, en total, $n - k$ ecuaciones (la dimensión de $\mathcal{D}_{(q,\dot{q})}$). Con las k ecuaciones dadas por los vínculos se completa el sistema de n ecuaciones independientes que dan las ecuaciones de movimiento.

Udwadia and Kalaba introdujeron en [22] un procedimiento para escribir las ecuaciones de movimiento para sistemas mecánicos con restricciones en el caso de restricciones no ideales. Este procedimiento está basado en la descomposición de la fuerza del vínculo F^c en dos componentes:

$$F^c = F^c_{id} + F^c_{ni}. \tag{5.8}$$

Para describir esta descomposición, comenzaremos definiendo la matriz B de $k \times m$ [22]:

$$B = AM^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.9}$$

Denotaremos con B^+ a su pseudo inversa de Moore-Penrose. La pseudo inversa de la matriz B se define como

$$B^+(y) = \begin{cases} B^{-1}(y) & \text{si } y \in Im\, B \\ 0 & \text{si } y \in (Im\, B)^{\perp} \end{cases}$$

donde el complemento ortogonal es tomado con respecto al producto interno usual de R^n.

Las fuerzas F^c_{id} and F^c_{ni} de la descomposición (5.8) están dadas por

$$F^c_{id} = M^{\frac{1}{2}} B^+ B (M^{-\frac{1}{2}} F^c), \tag{5.10}$$

y

$$F^c_{ni} = M^{\frac{1}{2}} (I - B^+ B)(M^{-\frac{1}{2}} F^c). \tag{5.11}$$

Observación 14 *En la definición de F^c_{ni}, F^c puede ser reemplazada por cualquier fuerza $\tilde{F}$ que realice el mismo trabajo que F^c sobre los desplazamientos virtuales. En realidad, F^c_{ni} está definida en términos de cualquiera de tales fuerzas en [22]. Así, la información acerca de F^c necesaria para determinar F^c_{ni} es el trabajo que realiza F^c sobre el espacio de desplazamientos virtuales.*

Propiedades de la descomposición $F^c = F^c_{id} + F^c_{ni}$

En esta sección, analizaremos algunas importantes propiedades de la descomposición (5.8) en términos del producto interior inducido por la matriz de masa sobre los covectores.

Utilizaremos la siguiente notación:

$$\mathcal{D}_{(q,\dot{q})} := KerA(q,\dot{q}) \text{ (espacio de desplazamientos virtuales)} \tag{5.12}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{(q,\dot{q})} := KerB(q,\dot{q}). \tag{5.13}$$

Es fácil ver que

$$\tilde{\mathcal{D}} = M^{1/2}\mathcal{D}, \tag{5.14}$$

y que, para complementos ortogonales tomados con respecto al producto usual de R^n,

$$\tilde{\mathcal{D}}^{\perp} = M^{-1/2}\mathcal{D}^{\perp}. \tag{5.15}$$

Recordemos que la pseudo inversa B^+ de B está determinada por las siguientes propiedades

$$1) \quad B^+(y) = \mathbf{0},\ \forall y \in [B(R^m)]^{\perp}, \tag{5.16}$$

$$2) \quad B^+(Bx) = \Pi_{\tilde{\mathcal{D}}^{\perp}} x, \tag{5.17}$$

con $\Pi_{\tilde{\mathcal{D}}^{\perp}}$ la proyección ortogonal en $\tilde{\mathcal{D}}^{\perp}$, con respecto a la métrica usual en R^n.

Como, por hipótesis, $rango(A) = k$, tenemos que $B(R^m) = R^k$. Luego, B^+ está caracterizada sólo por (5.17).

Entonces, de (5.17) se obtiene $(I - B^+B)x = \Pi_{\tilde{\mathcal{D}}} x$ pues $\Pi_{\tilde{\mathcal{D}}^\perp}$ es una proyección ortogonal.

De esta manera, $B^+B(M^{-1/2}F^c)$ y $(I - B^+B)(M^{-1/2}F^c)$ son las componentes de $M^{-1/2}F^c$ en cada uno de los espacios $\tilde{\mathcal{D}}^\perp$ y $\tilde{\mathcal{D}}$ respectivamente.

Observación 15 *Notemos que la pseudo inversa B^+ depende del producto interno que se esté considerando en (5.17). En este caso, B^+ es la pseudo inversa asociada al producto interno usual en R^n.*

Así, tomando en cuenta (5.10) y (5.11), se tiene:

$$F^c_{id} \in M^{1/2}\tilde{\mathcal{D}}^\perp = \mathcal{D}^\perp, \tag{5.18}$$

$$F^c_{ni} \in M^{1/2}\tilde{\mathcal{D}} = M\mathcal{D}. \tag{5.19}$$

De las Eq. (5.14) y (5.15), se obtiene que las Eq. (5.18) y (5.19) son equivalentes a

P1: Para la fuerza F^c, el trabajo de F^c_{id} se anula sobre los desplazamientos virtuales, mientras que la aceleración producida por F^c_{ni} pertenece a $\mathcal{D}$.

Denotaremos con $<,>_M$ al producto interno definido por la matriz de masa $M = (m_{ij})$ sobre los vectores de R^n: para u y v con componentes (u^i) y (v^j),

$$< u, v >_M := \sum m_{ij} u^i v^j.$$

El producto interno inducido por $<,>_M$ sobre los covectores (fuerzas) es la siguiente: para F y G con componentes F_i y G_j,

$$\begin{aligned} < F, G >_{\text{inducida por}<,>_M} &= < \beta(F), \beta(G) >_M & (5.20)\\ &= \sum m_{ij} \beta(F)^i \beta(G)^j, & (5.21)\end{aligned}$$

donde $\beta(F) = \sum \beta(F)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, con $\beta(F)^i = \sum m^{ij} F_j$, los m^{ij} son las entradas de la matriz M^{-1}, y analogamente para $\beta(G)$.

Observemos que las componentes del vector $\beta(F)$ son obtenidas "subiendo"los indices del covector F mediante la matriz M^{-1}. As, resulta claro que $\beta(F)$ representa la aceleración producida por F.

Retomando (5.21), vemos que

$$\begin{aligned} < F, G >_{\text{inducida por} <,>_M} &= \sum m^{ij} F_i G_j & (5.22)\\ &= < F, G >_{M^{-1}} & (5.23) \end{aligned}$$

y el trabajo que realiza la fuerza F sobre el vector v es

$$F(v) = < \beta(F), v >_M = \sum F_i v^i.$$

En particular, la norma asociada a este producto interno está dada por

$$\begin{aligned} \| F \|_{M^{-1}} &= (< F, F >_{M^{-1}})^{1/2} & (5.24)\\ &= (\sum \frac{F_i^2}{m_i})^{1/2} & (5.25)\\ &= \| \beta(F) \|_M . & (5.26) \end{aligned}$$

En este contexto, la propiedad **P1** puede ser reescrita como

$$< F^c_{id}, F^c_{ni} >_{M^{-1}} = < F^c_{id}, \beta(F^c_{ni}) > = < F^c_{id}, M^{-1} F^c_{ni} > = 0, \qquad (5.27)$$

con $<,>$ el producto interno usual en R^n.

Esto es,

P2: Las fuerzas F^c_{id} y F^c_{ni} son ortogonales para $< .,. >_{M^{-1}}$. Equivalentemente, las aceleraciones $\beta(F^c_{id})$ y $\beta(F^c_{ni})$ producidas por F^c_{id} y F^c_{ni} respectivamente, son ortogonales para $< .,. >_M$.

Observación 16 *Es importante notar que (5.10) y (5.11) representan una forma adecuada de expresar la proyección ortogonal con respecto a la métrica $<,>_{M^{-1}}$, en* *términos de la pseudo inversa de Moore-Penrose asociada al producto interno usual de R^n.*

Si A^{+_M} es la pseudo inversa de la matriz A asociada al producto interno $<,>_M$ en R^n, F^c_{id} y F^c_{ni} pueden ser escritas como

$$F^c_{id} = MA^{+_M}AM^{-1}(F^c), \tag{5.28}$$

$$F^c_{ni} = M(I - A^{+_M}AM^{-1})(F^c). \tag{5.29}$$

(Como antes, estamos asumiendo que $rank(A) = k$, por lo que la $m \times k$ matriz A^{+_M} está caracterizada por la propiedad

$$A^{+_M}(Ax) = \Pi_{\mathcal{D}^{\perp_M}}x, \tag{5.30}$$

con $\Pi_{\mathcal{D}^{\perp_M}}$ la proyección ortogonal en $\mathcal{D}^{\perp_M}$, el espacio ortogonal a $\mathcal{D}$ con respecto a $<,>_M$).

Sólo hay que observar que $M\mathcal{D}^{\perp_M} = \mathcal{D}^{\perp}$.

Otra importante propiedad, probada en [24], es el *Principio de Gauss de restricción mínima* adaptado al caso de restricciones noideales.

P3: La norma $\|F^c_{id}\|_{M^{-1}}$ es la mínima del conjunto

$$\{\|G\|_{M^{-1}} \text{ t.q. } G \in \tilde{C}\},$$

con

$$\tilde{C} = \{G \in \mathcal{D}^0 \text{ t.q. el sistema con } \ddot{q}(t) = M^{-1}(F + F^c_{ni} + G) \text{ satisface los vínculos}\}.$$

Observación 17 *Nuevamente, podemos ver que $\tilde{C}$ se puede definir reemplazando F^c_{ni} por cualquier fuerza que realiza el mismo trabajo sobre los desplazamientos virtuales.*

El método de Udwadia y Kalaba en forma invariante

En este contexo analizaremos el método propuesto por Udwadia y Kalaba para descomponer la fuerza del vínculo F^c.

La matriz M nos permite definir una aplicación β de covectores a vectores: β_q es ahora el isomorfismo de T_q^*Q en T_qQ definido a través de la igualdad

$$< u, \beta_q(\alpha) >_M = \alpha(u) \;\; \forall u \in T_qQ. \tag{5.31}$$

Observación 18 *Dado un subespacio S de T_qQ, denotaremos*

$$S^0 := \{\alpha \in T_q^*Q \;\; t.q. \;\; \alpha(u) = 0, \;\; \forall u \in \;\; S\}. \tag{5.32}$$

Es fácil ver que

$$\beta_q(S^0) = S^\perp, \tag{5.33}$$

donde el complemento ortogonal se toma con respecto al producto interno $<,>_M$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha \in S^0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha(w) = 0 \;\; \forall w \in S \\ &\Longleftrightarrow \quad < w, \beta_q(\alpha) >_M = 0 \;\; \forall w \in S \\ &\Longleftrightarrow \quad \beta_q(\alpha) \in S^\perp. \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que $\forall \; \alpha_1, \alpha_2 \in T_q^*Q$,

$$< \beta_q(\alpha_1), \beta_q(\alpha_2) >_M \; = \; < \alpha_1, \alpha_2 >_{M^{-1}} . \tag{5.34}$$

Denotaremos

$$\beta : \mathcal{H}^1(TQ) \to \mathcal{T}(Q)$$

al isomorfismo definido por $\beta(\alpha)(q, v) = \beta_q(\alpha(q, v))$.

Relacionando el isomorfismo (3.1) con β, obtenemos

$$X_F = \tau(\beta(F)). \tag{5.35}$$

Para cada $(q, v) \in \mathcal{C}$, llamaremos

$$P_{\beta^{-1}\mathcal{D}} : T_q^*Q \to \beta^{-1}(\mathcal{D}_{(q,v)})$$

la proyección ortogonal con respecto al producto interno inducido por M^{-1}.

Se sigue de la sección previa, que en la descomposición de Udwadia-Kalaba

$$F^c = F^c_{id} + F^c_{ni}, \tag{5.36}$$

F^c_{ni} es igual a $P_{\beta^{-1}\mathcal{D}}(F^c)$.

Como $F^c_{ni} \in (\mathcal{D}^{\perp})^0$, donde estamos considerando el espacio ortogonal con respecto a la métrica M, el Lema 2 implica

$$\tau^{-1}(X_{F^c_{ni}}) \in \mathcal{D}. \tag{5.37}$$

Por otro lado, también tenemos

$$X_R = X_U + X_{F^c} \in \mathcal{S}(\mathcal{C}).$$

Así, del Lema 1 , se sigue directamente

$$X_R - X_{F^c_{ni}} = X_U + X_{F^c_{id}} \in \mathcal{S}(\mathcal{C}). \tag{5.38}$$

De esta forma, obtenemos una importante propiedad de la descomposición (5.36), la cual está algo implícita en [22] o [24]:

Propiedad 1: La dinámica del sistema restringido está generada por el campo

$$X_R = X_R^{id} + X_{F^c_{ni}}, \tag{5.39}$$

donde $X_R^{id} = X_U + X_{F^c_{id}}$ es el campo que generaría la dinámica del sistema si éste fuera ideal.

Como $F^c_{ni} = P_{\beta^{-1}\mathcal{D}}(\tilde{F})$ para cualquier fuerza $\tilde{F}$ cuyo trabajo sobre el espacio de desplazamientos virtuales es el mismo al que hace F^c, de la Propiedad 1, tenemos,

Propiedad 2: La dinámica del sistema restringido está generada por el campo

$$X_R = X_R^{id} + X_{[P_{\beta^{-1}\mathcal{D}}(\tilde{F})]}, \tag{5.40}$$

para cualquier fuerza $\tilde{F}$ tal que $\tilde{F}(u) = F^c(u)\ \forall u \in \mathcal{D}$.

Ahora, como $X_R^{id} - X_U$ es vertical, podemos dar la siguiente versión del Principio de Gauss presentada en [24]:

Propiedad 3: Para cualquier $\tilde{F}$ tal que $\tilde{F}(u) = F^c(u)$ $\forall u \in \mathcal{D}$, el campo X_R puede ser escrito como

$$X_R = X_R^{id} + X_{[P_{\beta^{-1}\mathcal{D}}(\tilde{F})]},$$

con $X_R^{id} \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ verificando

$$\|\tau^{-1}(X_R^{id} - X_U)\|_M = \min_{X \in \mathcal{S}(\mathcal{C})} \|\tau^{-1}(X - X_U)\|_M.$$

En efecto, de acuerdo con el Principio de Gauss clásico, esta ecuación caracteriza el generador de la dinámica para el caso ideal, luego obtenemos que la Propiedad 3 se sigue de la Propiedad 2.

Observación 19 *Volviendo al sección anterior, podemos ver que la proyección* $\Pi_{\mathcal{D}}^{id}$*, asociada a la descomposición (3.27), está relacionada con* $P_{\beta^{-1}\mathcal{D}}$ *a través de la identidad*

$$\Pi_{\mathcal{D}}^{id}(\beta(\alpha)) = \beta(P_{\beta^{-1}\mathcal{D}}(\alpha)), \quad \forall \alpha \in T_q^*Q.$$

5.2. Restricciones no ideales generalizadas

En esta sección, analizaremos el caso en que el trabajo que realiza F^c sobre los vectores del espacio $\mathcal{W}$ es conocido, pero no necesariamente nulo.

Supongamos que, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$, este trabajo es conocido y lo podemos representar con una función W sobre $\mathcal{W}_{(q,v)}$. Es decir, $F^c(q,v)(w) = W(w)$ $\forall w \in \mathcal{W}_{(q,v)}$.

Definamos el espacio afín

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}} := \{F \in \mathcal{H}^1(\mathcal{C}) \text{ t.q., en cada } (q,v) \in \mathcal{C}, F(q,v)(u) = W(u)\ \forall u \in \mathcal{W}_{(q,v)}\}.$$

Para extender los resultados previos al este caso, elegimos una fuerza fija $F^0 \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}}$ y escribimos

$$F^c = F^0 + G^c.$$

Es claro que $G^c \in \mathcal{W}^0$ pues

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}} = \{F = F^0 + G,\ G \in \mathcal{W}^0\}.$$

Si consideramos $F^e + F^0$ en lugar de la fuerza externa F^e, y G^c como la fuerza del vínculo en $\mathcal{W}^0$ entonces el campo que genera el sistema sin restringir queda

$$X_{\tilde{U}} = X_U + X_{F^0}. \tag{5.41}$$

En la discusión previa, la Proposición 2 da lugar a la generalización del Corolario 1 para este caso:

Corolario 1'. *Bajo las hipótesis de la Proposición 2, si X_R es solución de (3.11) entonces X_R es el único campo vectorial especial sobre $\mathcal{C}$ tal que*

$$\tau^{-1}[X_R - X_U - X_{F^0}](q,v) \in \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}, \quad \forall (q,v) \in \mathcal{C}. \tag{5.42}$$

o equivalentemente

$$\tau^{-1}[X_R - X_{\tilde{U}}](q,v) \in \mathcal{W}^{\perp}_{(q,v)}, \quad \forall (q,v) \in \mathcal{C} \tag{5.43}$$

donde $X_{\tilde{U}}$ es como en (5.41).

Analogamente se puede probar el **Principio de D'Alembert para sistemas no holónomos generalizados con vínculos no ideales**

Proposición 3'. *Si se verifica la condición (3.19) y $F^c \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}}$, luego el campo vectorial generador de la dinámica del sistema restringido es el único $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ tal que, en cada $(q,v) \in \mathcal{C}$,*

$$\omega_L(X_R(q,v), w) = -dE_L(w) + F^e(u) + W(u), \tag{5.44}$$

$\forall w \in T_{(q,v)}(TQ)$ *t.q.* $\pi_* w = u \in \mathcal{W}_{(q,v)}$.

De las proposiciones vistas, hay algunas que se pueden generalizar teniendo en cuenta el trabajo que realiza la fuerza F^c sobre el espacio $\mathcal{W}$.

La razón por la cual algunas proposiciones son generalizables y otras no lo son, depende del rol que esté jugando el espacio $\mathcal{W}$.

Aquí, hay que tener en cuenta esta diferencia no tan sutil,

$$\begin{aligned} W(u) &= F^c(u) = <\beta(F^c), u>_M = <\tau^{-1}(X_{F^c}), u>_M \\ &\neq [\tau^{-1}(X_{F^c}), u]. \end{aligned}$$

Entonces si queremos usar el dato proporcionado por F^c, es decir el trabajo W que realiza la fuerza del vínculo sobre $\mathcal{W}$, tendremos que ver cómo quedan relacionados el subespacio $\mathcal{W}$ con la fuerza F^c.

Además, otro punto de conflicto con la generalización se da cuando queremos usar la misma línea de razonamiento que la propuesta por Udwadia y Kalaba, en la sección anterior. Es decir, hacemos que G^0 juegue aquí el rol de F^c_{id} la componenete ideal de la fuerza del vínculo, y F^0 el de F^c_{ni}, la componente que realiza trabajo sobre el espacio en cuestión. Si planteamos

$$\begin{aligned} X_R &= X_U + X_{F^c} \\ &= X_U + X_{G^c} + X_{F^0} \end{aligned}$$

y llamamos

$$X_R^{\mathcal{W}} = X_U + X_{G^c}$$

entonces queda

$$X_R = X_R^{\mathcal{W}} + X_{F^0}.$$

Pero el problema radica en que $X_R^{\mathcal{W}}$ no es el campo que generaría la dinámica si el sistema fuera *no holónomo generalizado* pues $X_R^{\mathcal{W}} \notin \mathcal{S}(\mathcal{C})$. Además la aceleración $\tau^{-1}(X_{F^0})$ proporcionada por la fuerza F^0 no pertenece a $\mathcal{D}$ (como sí lo hace $\tau^{-1}(X_{F^c_{ni}})$).

Por lo explicado anteriormente, el Principio de Gauss no es posible de generalizar porque usamos la métrica inducida por $[,]$. Obviamente, tampoco será posible para la extensión de la función de Gibbs-Appell definida en (4.7), teniendo en cuenta la Observación 9.

Por otro lado, si definimos la función de Gibbs-Appell como en (4.6) se obtiene:

Proposición 5' *Asumamos que se satisface la condición (3.19).*

El campo vectorial $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ está caracterizado por

$$[D_X G_{\mathcal{W}}(X_R)(q,v)](u) = W(u), \ \forall u \in \mathcal{W}_{(q,v)}, \ \forall (q,v) \in \mathcal{C}.$$

De la misma manera, se puede aplicar la fórmula del momento no holónomo generalizado para este caso.

Proposición 6'. *Supongamos que estamos bajo las hipótesis de la Proposición 6. Luego, para cualquier trayectoria $(q(t),\dot{q}(t))$ del sistema restricto y para cualquier curva $\xi(t)$ en g tal que $\xi(t) \in g_{\mathcal{W}_{(q(t),\dot{q}(t))}}$ para cada t, se verifica*

$$\frac{d}{dt}[J^{nh}(\xi(t))] = D_v L([\frac{d}{dt}\xi(t)]_Q) + (F^e)([\xi(t)]_Q) + W([\xi(t)]_Q). \qquad (5.45)$$

El Método de Kane también tiene una generalización directa a este caso. Sabemos que F^c se puede desarrollar en la base $\bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$ del espacio T^*Q definida en (4.24). Además supondremos que esta base es M^{-1}-ortogonal, entonces

$$F^c(q,v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i^c \, e^i(q,v) \qquad (5.46)$$

donde $f_i^c = f_i^c(q,v)$ son funciones a valores reales sobre el TQ y los $e^i(q,v)$ son los elementos de la base $\bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$.

Pero si la fuerza del vínculo F^c realiza un trabajo conocido sobre el subespacio $\mathcal{W}$, teniendo en cuenta la Proposición 3' es suficiente saber los coeficientes $\bar{f}_i^c(q,v)$

con $i = 1, ..., n-k$ en el desarrollo (5.46). De esta manera, se puede modificar la ecuación (4.28) para considerar el trabajo realizado por F^c sobre $\mathcal{W}$, esto es,

Lema 3'. *El campo generador generador de la dinámica del sistema, es el único campo $X_R \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$ que verifica*

$$\bar{\lambda}_i(X_R(q,v)) - \bar{f}_i^e(q,v) - \bar{f}_i^c(q,v) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n-k. \tag{5.47}$$

donde $\bar{\lambda}_i(X_R(q,v))$ y $\bar{f}_i^e(q,v)$ son los coeficientes del desarrollo de $\Lambda(X_R(q,v))$ y de $F^e(q,v)$ en la base $\bar{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$ respectivamente, y $\bar{f}_i^c(q,v)$ como se definió en (5.46).

Es importante notar que a la ecuación (4.37) también se la puede generalizar para este caso, simplemente desarrollando la fuerza del vínculo F^c en términos de la base $\tilde{\mathcal{B}}^*_{(q,v)}$ definida en (4.36). Sin embargo, el trabajo realizado por la fuerza F^c no puede ser considerado si se desarrollan las ecuaciones de Kane en términos de la base $\mathcal{B}_{[,]}$ definida en (4.34), pues deberíamos tener como dato el trabajo realizado por la fuerza del vínculo sobre los desplazamientos virtuales.

Bibliografía

[1] Abraham, R. and J.E. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, (1978).

[2] F.L.M. Amirouche. Computational methods in multibody dynamics. Prentice Hall. (1992)

[3] Appell, M.P. Sur un forme nouvelle des équations de la Dynamique. Comptes Rendus Acad. des Sciences, **129**, 459 (1899).

[4] Arnold V.I, Mathematical Methods in Classical Mechanics. Springer-Verlag (1978).

[5] Bloch A.M., P.S Krishnaprasad., J.E. Marsden, R.M. Murray, Nohnolonomic Mechanical Systems with Symmetry. Arch. Rational Mech. Anal., 136, 21-99 (1996).

[6] Cendra, H., Ibort A., de León M. and Martín de Diego, D. A generalization of Chataev's principle for a class of higher order nonholonomic constrainsts. Journal of Mathematical Physics, **45**, 2785 (2004).

[7] N.G. Cetaev, On Gauss' principle. Izv Fiz-Mat (3),7, 68-71 (1934).

[8] E.A. Desloges, The Gibbs-Appell equations of motion. Am. J. Phys. 56, 9 (1988).

[9] E.A. Desloges, Relationship between Kane's equations and the Gibbs-Appell equations. J. Guidance, Control, and Dynamics 1987, 10(1), 120-122 (1987).

[10] J.W. Gibbs, On the fundamental formulae of dynamics. Am. J. Math, 2,49 (1879).

[11] T.R. Kane, D.A. Levinson, *Dynamics:* Theory and Applications. McGraw-Hill Company. (1985)

[12] Lagrange J.L., Mećhanique Analytique,....

[13] Lanczos C., The variational principles of mechanics (third edition). University of Toronto Press, (1966).

[14] Lewis A.D., The geometry of the Gibbs-Appell equation and Gauss Principle of Least Constraint. Rep. Math. Phys., 38(1), 11-28, (1996).

[15] Marle C.M., Various approaches to conservative and non conservative nonholonomics systems. Rep. Math. Phys **42**, 211 (1998).

[16] Marsden J. and T. Ratiu, *Symmetry and Mechanics* Vol I y II. Springer-Verlag (1999).

[17] V.Mata, S. Provenzano, J.L. Cuadrado and F: Valero, *Inverse dynamic problem in robots using Gibbs-Appel equations.* Robotica, Vol 20 (59-67). Cambridge University Press (2002).

[18] Rosenberg R.M., Analytical Dynamics of Discrete Systems. Plenum Press N.Y., (1977).

[19] Sasaki S., On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. **10**, 338, (1958).

[20] J.E. Solomin and M. Zuccalli, A geometric approach to the extended D'Alembert principle of Udwadia-Kalaba-Hee-Chang. Quart. Appl. Math. **63**, 269 (2005).

[21] Udwadia F.E., R.E. Kalaba, E. Hee-Chang, Equations of motion for constrained mechanical systems and the extended D'Alembert principle, Quart. Appl. Math. (LV) 2, 321-331 (1997).

[22] Udwadia F.E. and R.E. Kalaba, On the foundations of analytical dynamics. Int. J. Non-linear Mech. **37**, 1079 (2002), y referencias contenidas en este trabajo.

[23] Udwadia F.E. and R.E. Kalaba, *What is the General Form of the Explicit Equations of Motion for Constained Mechanical Systems?* Journ. Applied Mechanics, **69**, 335-339 (2002).

[24] F.E. Udwadia, Fundamental principles and lagrangian dynamics: mechanical systems with non-ideal, holonomic, and nonholonomic constraints. J. Math. Anal. Appl. **251**, 341 (2000).

[25] Vershik A.M., Classical and non-classical dynamics with constraints. Lectures Notes in Mathematics **1108**, 278-301, Springer-Verlag (1984).

[26] Vershik A.M., L. Fadeev, Lagrangian mechanics in invariant form, Selecta Math. Soviet. **1**, 339 (1981).