

Wavelets definidas sobre grillas tetraédricas

Liliana B. Boscardín⁽¹⁾, Liliana R. Castro⁽¹⁾, Silvia M. Castro⁽²⁾

⁽¹⁾Departamento de Matemática,

⁽²⁾Departamento de Ciencias de la Computación

Univ. Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000-Bahía Blanca, Argentina.

{lboscar}@uns.edu.ar, {lcastro,uscastro}@criba.edu.ar

Abstract

En este trabajo se definen, en forma sistemática, wavelets sobre una grilla tetraédrica que se genera a partir de un método de subdivisión regular. Así construidas, estas waveletes forman una base incondicional para el espacio $L^p(T, \Sigma, \mu)$, $1 < p < \infty$, siendo μ la medida de Lebesgue y Σ la unión arbitraria de los tetraedros obtenidos por el método de subdivisión.

Keywords: Computación gráfica, modelamiento de volúmenes, waveletes.

1. Introducción

Dado que las waveletes son una herramienta matemática para la descomposición jerárquica de funciones, su uso se ha extendido a la resolución de distintos problemas en diversas áreas. La computación gráfica es una de las áreas que se ha beneficiado con su utilización, ya que la mayoría de los algoritmos involucrados son de orden lineal, lo que representa una gran ventaja dada la gran demanda computacional y de velocidad en este tipo de aplicaciones.

Los trabajos tradicionales sobre waveletes fueron los realizados por Mallat [9], Daubechies [6] y Chui [5] e introducen a las waveletes desde una perspectiva del procesamiento de señales. En ellos, éstas son definidas como traslaciones y dilataciones de una función particular, llamada *madre wavelet* y la herramienta básica para la construcción de las mismas es la transformada de Fourier. Estas se conocen como waveletes de primera generación. Sin embargo, en muchos casos se presenta la necesidad de contar con representaciones de funciones jerárquicas, en las que las waveletes no sean necesariamente trasladadas unas de otras. Los primeros trabajos relacionados con la introducción de waveletes de un modo totalmente diferente, basándose en una teoría de waveletes más general que permite construirlas en distintos tipos de dominios corresponden a Loundsbery [8] y a Stollnitz *et al.*[14]. Allí se introducen las waveletes mediante funciones de escalado utilizando la teoría del análisis multirresolución ya que en estos casos no son aplicables las técnicas de Fourier para su construcción. Las deficiencias de las técnicas de Fourier han conducido a los investigadores de varias disciplinas a desarrollar otras representaciones jerárquicas de funciones. Surgen así las waveletes de segunda generación. En este contexto, Loundsbery [8], construyó waveletes sobre dominios topológicos bidimensionales de tipo arbitrario. Para ello, extendió el análisis multirresolución para funciones definidas sobre superficies, basando esta extensión en la refinabilidad, es decir, en la creación de funciones de escalado refinables. Este enfoque fue posteriormente generalizado por Sweldens [16], quien reconoció la construcción de Loundsbery como una instancia más general de *lifting*. Schröder y Sweldens [13], continuaron su trabajo demostrando que la subdivisión y el *lifting* proveen métodos constructivos para la generación de waveletes definidas a conveniencia del usuario. Ellos deseaban representar funciones sobre una esfera usando una base de waveletes y para ello construyeron waveletes biortogonales sobre la esfera con propiedades que pueden elegirse según su uso. Posteriormente, Nielson *et al.* [12] define las waveletes de Haar sobre la esfera, que también son biortogonales pero que presentan ventajas sobre las de Sweldens y Schröder, ya que cuando el dominio se hace plano, las mismas convergen a waveletes ortogonales. Ambas construcciones usan la subdivisión como técnica tanto para generar superficies como para crear una sucesión de espacios anidados como los requeridos en un análisis de multirresolución. Las waveletes pueden construirse así sobre dominios topológicos bidimensionales arbitrarios partiendo de una red triangular y usando la subdivisión como base. Usando esta técnica de la subdivisión recursiva, comenzaron a estudiarse métodos de subdivisión de volúmenes para poder definir waveletes sobre subespacios de dimensión tres, [4]. Es necesario destacar que la necesidad de resolver problemas físicos planteados en más dimensiones hizo que se siguieran estudiando esquemas de subdivisión en subespacios de dimensión mayor que tres. Maubach [10] presenta un método de refinamiento basado en bisecciones que se aplica a grillas de n -símplices,

independientemente de la dimensión n .

Distintas alternativas han sido propuestas para representar volúmenes; sin embargo la mayoría de ellas puede clasificarse en dos tipos distintos:

- * Los que representan el volumen a través de su superficie o superficies y lo descomponen en constructores más simples tales como los triángulos.
- * Los que representan el volumen mediante constructores de volumen más simples (análogos a los triángulos).

Nosotros consideraremos el último caso y tomaremos como bloques constructores básicos a los tetraedros. Partiendo de esta red tetraédrica y usando la subdivisión como base, es posible construir waveletes sobre dominios topológicos arbitrarios. Para ello es necesario definir waveletes sobre un tetraedro y el conjunto de tetraedros que se obtienen a partir de éste por subdivisión.

En este trabajo nos concentraremos en esta problemática. El mismo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 describimos el método de refinamiento de grillas tetraédricas que utilizamos en la subdivisión; en la sección 3 definimos las waveletes sobre los tetraedros y finalmente en la sección 4 damos algunas conclusiones y delineamos el trabajo futuro.

2. Refinamiento de grillas tetraédricas.

Existen métodos de refinamiento con propiedades de anidamiento, estabilidad y consistencia para grillas triangulares en $2D$. Probablemente uno de los más conocidos es la combinación de refinamientos rojos y verdes propuesto por Bank *et al.* [2]. Un refinamiento rojo divide un triángulo dado en 4 triángulos congruentes conectando los puntos medios de sus lados y un refinamiento verde consiste en bisecciones simples que conectan el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

Otra clase importante de refinamientos en $2D$ está basado sólo en bisecciones que pueden distinguirse por la forma de preservar la estabilidad.

El refinamiento estable de grillas tetraédricas es más complejo, no existiendo una manera de dividir un tetraedro dado en ocho subtetraedros congruentes; sin embargo es posible extender las estrategias mencionadas de refinamiento regular en $2D$ a tres dimensiones. Con esta perspectiva, varios autores desarrollaron numerosos algoritmos en los últimos años. Métodos de bisección tridimensionales fueron presentados por Baensch [1] y Maubach [10].

Una estrategia de refinamiento para el caso $3D$ análoga a la de Bank para el caso $2D$, fue presentada independientemente por Zhang [17] y Bey [3].

Bey [3] presenta un método de subdivisión de tetraedros en ocho subtetraedros de igual volumen mediante el cual se obtienen tetraedrizaciones estables y consistentes, es decir un refinamiento regular. Más aún, los elementos generados pertenecen, a lo sumo, a tres clases de congruencia, independientemente del número de pasos realizados en el refinamiento. Se entiende que dos tetraedros T_1 y T_2 son congruentes si se pueden hacer coincidir por un movimiento rígido y una traslación, *i.e.* si existen una constante $c \neq 0$, un vector \mathbf{x} y una matriz ortogonal Q tal que:

$$T_1 = \mathbf{x} + cQT_2 \doteq \{\mathbf{x} + cQ\mathbf{x}' : \mathbf{x}' \in T_2\}$$

La figura 2.1 muestra un paso en este tipo de subdivisión.

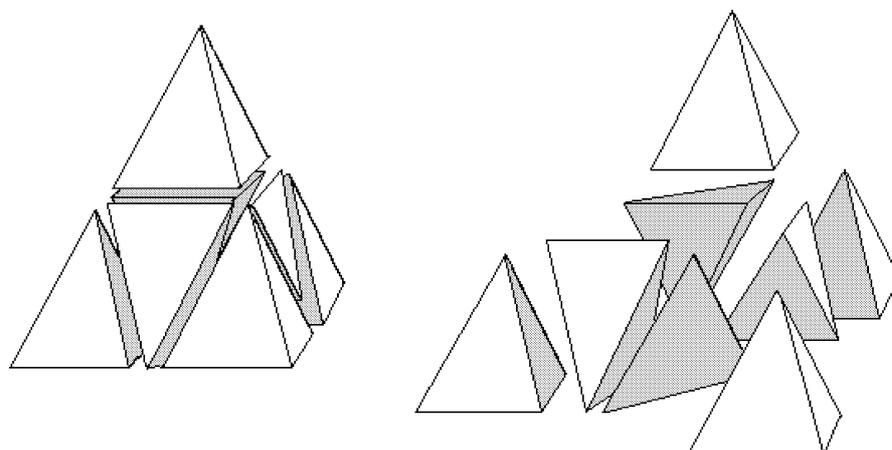


Figure 2.1: Un paso en la subdivisión tetraédrica

2.1. Descripción del método

El método de subdivisión de tetraedros que nosotros consideramos es el mencionado arriba. Para subdividir un tetraedro T se conectan los puntos medios de los lados de cada cara triangular del tetraedro y luego se cortan los cuatro tetraedros de las esquinas que son congruentes con T . En el octaedro interior quedan así determinados tres paralelogramos (ver figura 2.2); cortando el octaedro a lo largo de dos de estos paralelogramos obtendremos cuatro subtetraedros más. Cada elección de dos paralelogramos corresponde a una de las tres posibles diagonales, como muestra la figura 2.2. Los ocho subtetraedros tienen igual volumen pero los interiores no son en general congruentes con T .

Deseamos construir bases de waveletes sobre tetraedros siguiendo el procedimiento de Sweldens y Girardi [7]. Para ello en lo que sigue indicaremos con (T, Σ, μ) al espacio de medida para el cual: T es un tetraedro de volumen V , Σ es la unión arbitraria de subtetraedros obtenidos por el método de subdivisión arriba descrito y μ es la medida de Lebesgue.

Obtendremos así waveletes similares a las de Haar sobre el espacio de medida (T, Σ, μ) que forman una base incondicional para $L^p(T, \Sigma, \mu)$, $1 < p < \infty$.

3. Definición de las waveletes

3.1. Definiciones previas

Definición 1 ([7]): una foresta $(\mathcal{F}, g, p, C, <)$ consiste en un conjunto numerable \mathcal{F} que contiene un subconjunto \mathcal{R} , posiblemente vacío, de raíces elementales junto con una función generación $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$, una función padre $p : \mathcal{F} \setminus \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{F}$, una función hijo $C : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F})$, ($\mathcal{P}(\mathcal{F})$ es el conjunto partes de \mathcal{F}) y un ordenamiento parcial por edades sobre \mathcal{F} que satisfacen las siguientes propiedades:

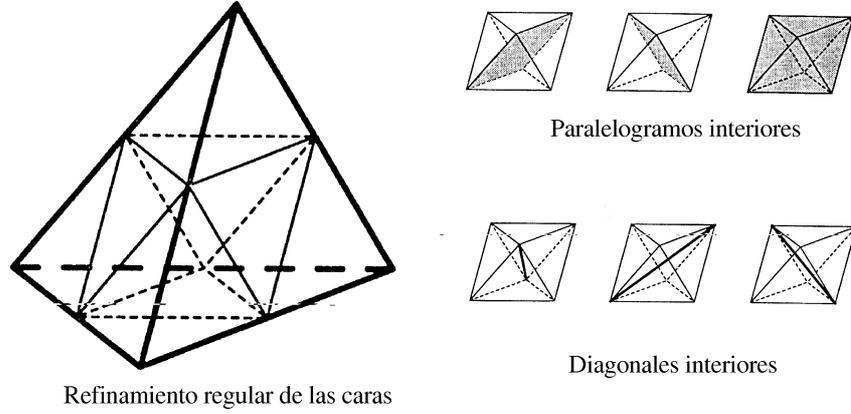


Figure 2.2: Subdivisión de un tetraedro según el método de Bey.

1. $C(\alpha) = \{\beta \in \mathcal{F} : p(\beta) = \alpha\}$.
2. $0 \leq \#C(\alpha) < \infty$, para cada $\alpha \in \mathcal{F}$.
3. Si $\beta \in C(\alpha)$, entonces $g(\beta) = 1 + g(\alpha)$.
4. El ordenamiento $<$ ordena linealmente $C(\alpha)$ para cada $\alpha \in \mathcal{F}$.
5. Si $g(\alpha) < g(\beta)$ y $p^n(\alpha) = p^m(\beta)$, para $n, m > 0$, entonces $\beta < \alpha$, donde la función potencia p^n de la función padre está definida así: p^0 es la identidad y $p^n(\alpha) = p(p^{n-1}(\alpha))$.

Es posible ampliar el ordenamiento parcial dado a toda la foresta, preservando 1) y 4), extendiéndolo linealmente a la k -ésima generación \mathcal{F}_k donde:

$$\mathcal{F}_k = \{\alpha \in \mathcal{F} : g(\alpha) = k\}.$$

De esta manera la foresta satisface la propiedad:

6) el ordenamiento $<$ ordena linealmente a toda la foresta.

Definición 2 ([7]): un árbol es una foresta que satisface la propiedad:

si $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ entonces existen $n, m > 0$ tales que: $p^n(\alpha) = p^m(\beta)$ y tiene a lo sumo un elemento raíz que se nota con ρ .

Definición 3 ([7]): una hoja es un elemento del árbol que no tiene hijos.

Definición 4 ([7]): sea $M = \{1, 2, \dots, m\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. El árbol logarítmico τ_{\log} sobre M está unívocamente determinado por la siguientes propiedades:

1. Tiene l generaciones $(0, \dots, l-1)$, donde $2^{l-2} < m \leq 2^{l-1}$.
2. Cada elemento de τ_{\log} es un subconjunto de M de enteros consecutivos.
3. Tiene un elemento raíz $\rho = M$ y $g(\rho) = 0$.

4. La generación $(l - 1)$ consiste en las hojas $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$.
5. Cada elemento de τ_{\log} con cardinalidad mayor que 1 tiene 2 hijos y la cardinalidad del menor de ellos es igual o de un orden menor que la del mayor.

3.2. Definición de las waveletes

Sea τ el árbol para el cual $\{T_\alpha : \alpha \in \tau\}$, son los subtetraedros obtenidos por el método de subdivisión considerado.

La colección $\{T_\alpha : \alpha \in \tau\}$, constituye una partición anidada para T y el árbol τ es tal que tiene un elemento raíz ρ para el cual $T_\rho = T$. Un subtetraedro T_α de la n -ésima generación tiene volumen $V/8^n$.

Los bloques constructores básicos de las waveletes serán las funciones de escalado $\{\varphi_\alpha : \alpha \in \tau\}$, donde:

$$\varphi_\alpha = \left(\frac{V}{8^n}\right)^{-1/p} \chi(T_\alpha),$$

siendo $\chi(T_\alpha)$ la función característica $\chi(T_\alpha)$ de T_α .

Las waveletes están indexadas por un conjunto G que consiste de un conjunto G^* y del índice $\rho \in \tau$ para el cual $T_\rho = T$. El conjunto G^* tiene la forma:

$$G^* = \cup_{\alpha \in \tau} G(\alpha),$$

donde G_α tiene siete elementos y se construye haciendo un mini-árbol $\tilde{\tau}$ lineal o logarítmico entre los hijos de α . Numeramos los hijos de α como $\beta_i, i = 1 \dots 8, \beta_i < \beta_{i+1}$ y elegimos la construcción logarítmica para el mini-árbol $\tilde{\tau}$ (Figura 3.1).

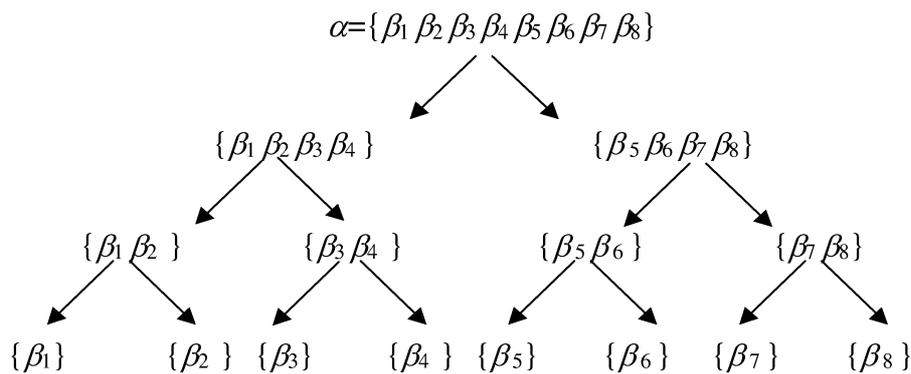


Figure 3.1: Mini árbol $\tilde{\tau}$

Sea $G(\alpha) = \{(\alpha, \zeta) \in \{\alpha\} \times \tilde{\tau} : \#C(\zeta) = 2\}$, donde $C(\zeta)$ es el conjunto de hijos de ζ . Los elementos $\zeta \in \tilde{\tau}$ tales que $\#C(\zeta) = 2$, los indicamos de la siguiente manera:

$$\zeta^1 = \alpha$$

$$\zeta^2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$$

$$\begin{aligned}
\zeta^3 &= \{\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8\} \\
\zeta^4 &= \{\beta_1, \beta_2\} \\
\zeta^5 &= \{\beta_3, \beta_4\} \\
\zeta^6 &= \{\beta_5, \beta_6\} \\
\zeta^7 &= \{\beta_7, \beta_8\}
\end{aligned}$$

Notemos que como el árbol considerado es logarítmico, $C(\zeta) = 2, \forall \zeta \in \tilde{\tau}$. Las waveletes ψ_{γ^i} generadas por los elementos $\gamma^i = (\alpha, \zeta^i) \in G(\alpha), i = 1 \dots 7$, donde ζ_1^i y ζ_2^i son los dos hijos de ζ^i , se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
\psi_{\gamma^1} &= 2^{-1/p} (\chi(P_{\gamma^1}) - \chi(N_{\gamma^1})) \frac{(4V)^{-1/p}}{(8^{n+1})^{-1/p}}, \\
&\begin{cases} P_{\gamma^1} = \cup_{j \in \zeta_1^1} T\beta_j \\ N_{\gamma^1} = \cup_{j \in \zeta_2^1} T\beta_j \end{cases} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\gamma^2} &= 2^{-1/p} (\chi(P_{\gamma^2}) - \chi(N_{\gamma^2})) \frac{(2V)^{-1/p}}{(8^{n+1})^{-1/p}}, \\
&\begin{cases} P_{\gamma^2} = \cup_{j \in \zeta_1^2} T\beta_j \\ N_{\gamma^2} = \cup_{j \in \zeta_2^2} T\beta_j \end{cases} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\gamma^3} &= 2^{-1/p} (\chi(P_{\gamma^3}) - \chi(N_{\gamma^3})) \frac{(2V)^{-1/p}}{(8^{n+1})^{-1/p}}, \\
&\begin{cases} P_{\gamma^3} = \cup_{j \in \zeta_1^3} T\beta_j \\ N_{\gamma^3} = \cup_{j \in \zeta_2^3} T\beta_j \end{cases} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\gamma^4} &= 2^{-1/p} (\chi(P_{\gamma^4}) - \chi(N_{\gamma^4})) \frac{V^{-1/p}}{(8^{n+1})^{-1/p}}, \\
&\begin{cases} P_{\gamma^4} = \cup_{j \in \zeta_1^4} T\beta_j \\ N_{\gamma^4} = \cup_{j \in \zeta_2^4} T\beta_j \end{cases} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\gamma^5} &= 2^{-1/p} (\chi(P_{\gamma^5}) - \chi(N_{\gamma^5})) \frac{V^{-1/p}}{(8^{n+1})^{-1/p}}, \\
&\begin{cases} P_{\gamma^5} = \cup_{j \in \zeta_1^5} T\beta_j \\ N_{\gamma^5} = \cup_{j \in \zeta_2^5} T\beta_j \end{cases} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\gamma^6} &= 2^{-1/p} (\chi(P_{\gamma^6}) - \chi(N_{\gamma^6})) \frac{V^{-1/p}}{(8^{n+1})^{-1/p}}, \\
&\begin{cases} P_{\gamma^6} = \cup_{j \in \zeta_1^6} T\beta_j \\ N_{\gamma^6} = \cup_{j \in \zeta_2^6} T\beta_j \end{cases} .
\end{aligned}$$

$$\psi_{\gamma^T} = 2^{-1/p} (\chi(P_{\gamma^T}) - \chi(N_{\gamma^T})) \frac{V^{-1/p}}{(8^{n+1})^{-1/p}},$$

$$\begin{cases} P_{\gamma^T} = \cup_{j \in \zeta_1^T} T_{\beta_j} \\ N_{\gamma^T} = \cup_{j \in \zeta_2^T} T_{\beta_j} \end{cases}.$$

Como se trata de un árbol con elemento raíz $\rho = T$, sólo resta definir la wavelet ψ_ρ correspondiente a dicho elemento. La misma se define de la siguiente manera:

$$\psi_\rho = (V)^{-1/p} \chi(T)$$

Finalmente, tomamos:

$$\Psi = \{\psi_\gamma : \gamma \in G\}$$

Así definida, Ψ tiene las siguientes propiedades:

1. Ψ está normalizada, i.e: $\|\Psi\|_p = 1, \forall \gamma \in G$.
2. $\int_T \psi_\gamma d\mu = 0, \forall \gamma \in G^*$.
3. Si $\gamma, \gamma' \in G$, $\int_T \psi_\gamma \psi_{\gamma'} d\mu = 0$
4. Ψ es una base incondicional normalizada de $L_p(T, \Sigma, \mu)$.

4. Conclusiones y trabajo futuro

La representación de objetos mediante su frontera, es una herramienta de modelamiento matemático muy poderosa, pero este esquema conlleva poca semejanza con los objetos sólidos del mundo real. Por otro lado el modelamiento de sólidos fue una realidad a partir de la geometría constructiva de sólidos (C.S.G). Si bien hoy en día ambas representaciones juegan aún un rol central en los sistemas de modelamiento, estos métodos no son ideales para modelar muchos objetos reales. Típicamente, el objeto volumétrico se representa como una grilla regular 3D de elementos volumétricos (voxels). Sin embargo los datos que representan un determinado objeto, están a menudo dispersos o irregularmente distribuidos, lo que requiere representaciones alternativas. En estos casos podríamos representar el objeto en un dominio tetraédrico sobre el que se definen los atributos (como color o densidad).

Debido a la gran cantidad de tetraedros que representan normalmente un objeto, los modelos multiresolución benefician sin duda, la representación de los mismos [11]. Este beneficio se manifiesta, por ejemplo, en mejoras que redundan, entre otras, en interactividad y compresión para transmisión. Así se presenta el desafío de desarrollar la teoría de waveletes y/o el análisis multiresolución para objetos representados mediante tetraedros. Un primer paso en esta dirección consiste entonces en definir las waveletes sobre tetraedros.

En este trabajo hemos definido waveletes sobre un tetraedro T que forman una base incondicional para $L^p(T, \Sigma, \mu), 1 < p < \infty$, y que permiten representar funciones de $L^2(T, \Sigma, \mu)$ en esta base. Si bien no son suaves y tienen sólo un momento nulo, el análisis multiresolución

que generan es adecuado para la aplicación del esquema de lifting [15],[16]. Mediante este procedimiento, es posible obtener, a partir de un análisis multirresolución inicial, uno nuevo con las ventajas de tener waveletes más suaves y con más momentos nulos, lo cual se hará en un trabajo futuro.

References

- [1] E. Baensch. Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. *Impact of Computing in Science and Engineering*, 3:181–191.
- [2] R. E. Bank, A. H. Sherman, and A. Weiser. Refinement algorithm and data structures for regular local mesh refinement. In e. R. Stepleman, editor, *Scientific Computing. IMACS/North Holland*, Amsterdam, 1983.
- [3] J. Bey. Tetrahedral grid refinement. *Computing*, 55(4):355–378, 1995.
- [4] S. Castro, L. Castro, and A. D. Giusti. Multiresolution volume rendering. In *IEEE XIX International Conference of the Chilean Computer Science Society*, Talca, Chile., 1999.
- [5] C. Chui. An introduction to wavelets. In S. E. Charles Chui, editor, *Wavelet Analysis and its Applications*. Academic Press, 1992.
- [6] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [7] M. Girardi and W. Sweldens. A new class of unbalanced Haar wavelets that form an unconditional basis for L_p on general measure spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3:457–474, 1997.
- [8] J. M. Lounsbery. *Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type*. PhD thesis, University of Washington, Washington, Seattle, 1994.
- [9] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 11:674–693, 1989.
- [10] J. M. Maubach. Local bisection refinement for n-simplicial grids generated by reflection. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16:210–227, 1995.
- [11] G. Nielson, P. Brunet, M. Gross, H. Hagen, and S. Klimenko. Research issues in data modeling for scientific visualization. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 70–73.
- [12] G. Nielson, I. H. Jung, and J. Sung. Haar wavelets over triangular domains with applications to multiresolution models for flow over a sphere. In *IEEE Visualization '97*, Phoenix, Arizona, 1997.
- [13] P. Schroeder and W. Sweldens. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *ACM Proceedings of SIGGRAPH'95*, pages 161–172, Aug. 1995.

- [14] E. Stollnitz, T. DeRose, and D. Salesin. *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc, 1996.
- [15] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Industrial Mathematics Initiative* 1994:7, 1994.
- [16] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3:186–200, 1996.
- [17] S. Zhang. *Multi-level iterative techniques*. PhD thesis, Dept. of Mathematics, Pennstate University, Reserach Report No. 88020, 1988.