

Reconstrucción y Simulación de Diagramas de Fases a Partir de Muestras

Claudio Delrieux, Andrés Repetto y Gustavo Ramoscelli

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad Nacional del Sur

Alem 1253 — (8000) Bahía Blanca — ARGENTINA

e-mail: claudio@acm.org, repetto@uns.edu.ar, ramoscel@criba.edu.ar

Palabras Clave: COMPUTACIÓN GRÁFICA, VISUALIZACIÓN, SISTEMAS NO LINEALES Y CAÓTICOS.

Resumen

La representación gráfica de diagramas de fases es una técnica de visualización científica de gran aplicación en el estudio de la dinámica de sistemas no lineales y caóticos. En estos sistemas, normalmente la determinación analítica de puntos críticos, trayectorias, comportamiento oscilatorio, etc., es de difícil solución, si acaso posible. Por dicha razón es que se han desarrollado gran cantidad de técnicas para visualizar el comportamiento dinámico de sistemas a partir de sus ecuaciones diferenciales.

Un problema relacionado consiste en reconstruir o simular la dinámica de un sistema no lineal desconocido a partir de algunas muestras dispersas de su comportamiento. Al igual que en la situación anterior, el tratamiento analítico de este problema desafía las técnicas matemáticas. Sin embargo, como intentaremos mostrar en este trabajo, la solución gráfica es relativamente sencilla y los resultados son satisfactorios. Al mismo tiempo, se considerarán algunas aplicaciones en el procesamiento de imágenes y en la posproducción de fotografías.

1 Introducción

La Visualización Científica se basa en el empleo de técnicas derivadas de la Computación Gráfica para la representación de datos científicos de diverso tipo [2, 3, 9]. Los resultados producidos no son meramente una representación cuantitativa de los datos. Lo que se busca, en cambio, es un entendimiento global de determinadas propiedades del modelo o de la simulación que los produjo [7, 8] de manera de hacer comprensible o evidente alguna característica específica de los mismos.

Los métodos gráficos han sido extensamente utilizados para el estudio y análisis de sistemas lineales y no lineales de dos o más dimensiones, especialmente para el estudio de su comportamiento dinámico en el espacio de fases [5, 12]. Cuando por una u otra razón no pueden utilizarse técnicas más convencionales para la representación gráfica de datos, los métodos provistos por la Visualización Científica se constituyen en una excelente alternativa.

En este sentido, la herramienta gráfica es de gran utilidad en la caracterización del diagrama de fases de sistemas de gran complejidad, dado que permite localizar y caracterizar los puntos críticos, trayectorias, comportamiento oscilatorio, y sus estabilidades asociadas. Una reseña completa de las técnicas más destacadas puede consultarse en [4].

Sin embargo, en muchas circunstancias puede suceder que se tenga que estudiar la dinámica de un sistema como si fuese una “caja negra”, es decir, un bloque de estructura desconocida, para la cual es posible conocer su conocimiento diferencial en puntos determinados. Esta situación es mucho más común y mucho más sencilla de conseguir que la elaboración de un modelo diferencial. Por ejemplo, es de mayor facilidad recolectar datos poblacionales en un sistema ecológico, que identificar las variables y las ecuaciones diferenciales relevantes para constituir un modelo matemático con un sistema dinámico.

Además, al igual que en el análisis del comportamiento dinámico, el tratamiento analítico de la reconstrucción del comportamiento de un sistema dinámico a partir de muestreos desafía las técnicas matemáticas. Sin embargo, como intentaremos mostrar en este trabajo, la solución gráfica es relativamente sencilla y produce resultados satisfactorios. La estrategia utilizada consiste en elegir una adecuada representación de un campo vectorial, el cual es reconstruido por medio de la interpolación del conjunto de muestras. La representación elegida es la convolución lineal de texturas (LIC) [1], y la interpolación elegida es similar al método de sombreado de Phong [6, 13]. Ambos métodos son bastante bien conocidos en Computación Gráfica, restando solamente aplicarlos adecuadamente para la solución del problema planteado.

Esta técnica, al mismo tiempo, es aplicable para el procesamiento de imágenes y la postproducción de fotografías, como ya se propusiera en los trabajos originales de LIC. Simplemente es necesario utilizar una fotografía como textura de entrada para el algoritmo de LIC, el cual “arrastrará” distintas zonas de la misma según sea la ecuación diferencial elegida. Lamentablemente, encontrar un sistema dinámico adecuado para producir un efecto determinado (una mano que se mueve, por ejemplo) puede llegar a ser tremen-

damente difícil. Por eso hasta ahora la LIC no fue extensivamente utilizada en este tipo de aplicaciones. En nuestra propuesta, sin embargo, no es necesario encontrar un sistema dinámico adecuado, sino que simplemente hay que posicionar sobre puntos específicos de la fotografía las direcciones hacia las que la misma debe moverse.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en la sección que continúa presentamos los detalles esenciales de la representación de sistemas dinámicos por medio de la convolución de integral lineal (LIC). En la Sec. 3 se desarrolla la idea central del trabajo: la interpolación bilineal de muestras para obtener un campo vectorial en el cual realizar la advección de trayectorias en posiciones arbitrarias, tal cual lo requiere la LIC. Luego se discuten los resultados obtenidos, las conclusiones y la posibilidad de trabajos futuros.

2 La Convolución de Integral Lineal (LIC)

Los métodos basados en texturas son en general superiores para la representación de diagramas de fases, dado que la representación por medio de trayectorias (integrando numéricamente una semilla por medio del método de Euler, o de Runge-Kutta [12]) tiene varios problemas. Normalmente es necesario elegir cuidadosamente el conjunto de semillas de las trayectorias para evitar situaciones espúreas (por ejemplo, que dos trayectorias diferentes se junten gráficamente dando la impresión de formar una única trayectoria homoclínica donde no la hay). Usualmente las zonas del diagrama con bajo jacobiano tienden a apretar las trayectorias y viceversa. También es difícil encontrar valores adecuados para los parámetros de la evaluación (c.f. el diferencial finito), por lo que el método debe operarse con asistencia.

Por dicha razón es que la LIC ofrece prestaciones superiores. Siempre representa uniformemente el flujo vectorial al margen de los gradientes locales. No hay trayectorias definidas, por lo que no es posible que se produzcan superposiciones u otras graficaciones incorrectas. Por otra parte, su cómputo es local, sencillo, y en general es posible reutilizarlo por medio de algoritmos incrementales [1, 11]. La idea básica de la visualización de campos vectoriales basada en texturas consiste en efectuar una convolución local entre una textura y un segmento de trayectoria, para cada punto del mapa. Esto garantiza un muestreo uniforme del mapa y la rapidez del cómputo por medio de funciones altamente optimizadas en el procesamiento de señales.

Una convolución rectilínea se puede computar por medio un segmento de recta que pase tangente a la trayectoria en el punto de muestra. Para ello se utiliza una ventana de convolución con una función ponderadora y ancho predeterminado, en la dirección positiva y negativa de la tangente. Luego se recorre la textura a lo largo de dicho segmento efectuando la convolución, y se pinta el punto de muestra con el color resultante.

Esta implementación puede ser muy eficiente, pero es esencialmente incorrecta, dado que en la medida en que el radio local de curvatura de la trayectoria es comparable o menor a la longitud de la ventana de convolución, la aproximación de la trayectoria con un segmento de recta es más errónea.

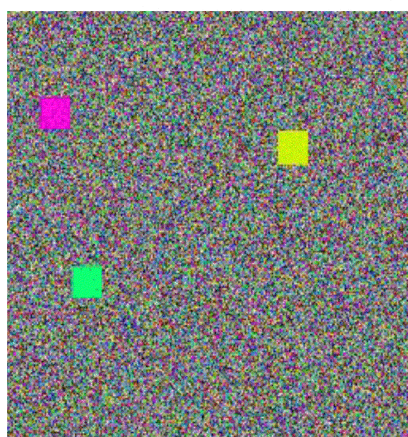
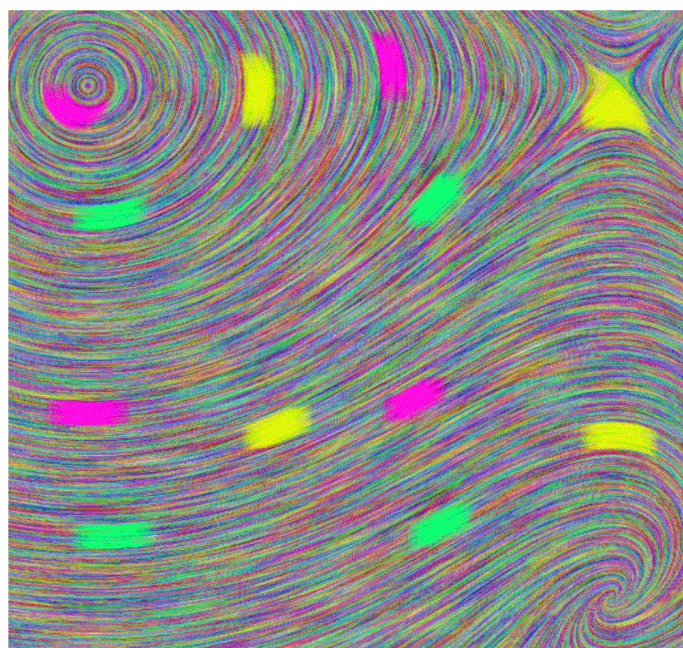
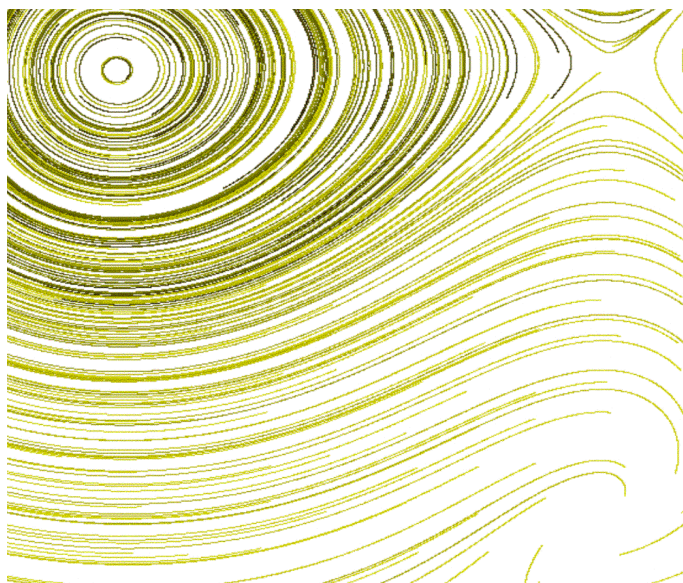


Figura 1: Trayectorias de un sistema bidimensional no lineal: (a) representado con trayectorias, (b) representado con LIC, (c) textura utilizada para obtener (b).

Esta aproximación puede ser fácilmente mejorada si se efectúa a lo largo de la trayectoria propiamente dicha. En esto consiste el algoritmo de convolución de integral lineal (LIC) propuesto por Cabral y Leedom [1]. De esa manera se corrigen las características insatisfactorias de la convolución rectilínea. Algunas optimizaciones a esta metodología se presentan en [4]. Así, por medio de un factor adaptativo, se consiguen mejoras que hacen tanto a la velocidad de cómputo como a la calidad de las visualizaciones.

En la Figura 1, por ejemplo, se observa el diagrama de fases del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \mu x + xy^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y - x^2,\end{aligned}$$

con $\mu = -0.01$ (ver [12]). En la primera representación se utilizaron trayectorias, con el agregado de perturbar las semillas y modificar el color a medida que evolucionan las trayectorias para distinguir la dirección, detectar ciclos límite y evitar la confusión por superposición. En la segunda representación se utilizó la LIC, convolucionando una textura constituida por ruido uniforme superpuesto a cuadrados de color plano, para poder evaluar el jacobiano local.

3 La LIC basada en Interpolaciones

Los métodos hasta ahora mencionados requieren de las ecuaciones diferenciales que modelan al sistema dinámico o caótico. A menudo se dispone de ellas, pero existen variadas situaciones en las que no se posee una representación matemática del sistema sino, más bien, un conjunto de muestras. En esas circunstancias, una representación cualitativa de los datos resultaría de gran utilidad para el análisis del comportamiento del sistema.

Para lograr una representación gráfica partiendo de un conjunto de muestras, es necesario obtener un campo vectorial a partir de las muestras. Dicho campo vectorial será utilizado para convolucionar la textura, en vez de las ecuaciones diferenciales utilizadas más arriba. Pueden encontrarse muchos métodos para interpolar o aproximar un campo vectorial a partir de muestras. En este trabajo se recurrió a establecer una partición del dominio en triángulos. El vértice de cada uno de ellos es la posición de cada una de las muestras. El valor del campo vectorial en cada punto dentro de un triángulo puede encontrarse por interpolación bilineal de los valores en los tres vértices, de una forma análoga a la interpolación de normales de Phong utilizada en Computación Gráfica para sombreado [6].

Las ventajas de esta estrategia son directas. En primer término, aunque las muestras estén no uniformemente distribuidas en el espacio de fases, siempre es posible separar el dominio por medio de algún método de triangulación [10]. Es decir, los lugares en los que se realizan las muestras son arbitrarios, lo cual es evidentemente conveniente. Tal vez la desventaja de esta forma de organizar el muestreo es que es necesario tomar muestras “periféricas” para completar el dominio alrededor de la zona de interés en el espacio de fases y tener muestras adicionales con las cuales interpolar.

Una vez fijados los vértices de cada triángulo, se estará en condiciones de calcular mediante interpolación la derivada en cada punto interior o en la frontera de ellos. Para lograrlo se realizan, en el peor caso, tres interpolaciones sucesivas. Las dos primeras se hacen en dos de los segmentos que constituyen las aristas del triángulo, y la restante, en el segmento de recta horizontal que pasa por el punto deseado y que corta a los otros dos segmentos señalados. Realizando una combinación de esta técnica con la LIC se logran adecuadas aproximaciones de diagramas de fase de sistema dinámicos a partir de muestras.

Una forma de evaluar la calidad del método consiste en generar un muestreo de un sistema dinámico conocido, y comparar los resultados gráficos de la reconstrucción con el sistema original. En la Fig. 2 vemos la LIC de un sistema dinámico, junto con un conjunto de muestras uniformemente obtenidas, y la LIC del campo vectorial obtenido por medio de la reconstrucción. En este caso, pese a que se tomaron solamente 27 muestras, la calidad del resultado es aceptable.

Es claro que la cantidad de muestras determina la calidad de la reconstrucción tanto como las características del sistema dinámico. Un diagrama de fases con pocos puntos críticos o con trayectorias topológicamente sencillas probablemente se pueda reconstruir con menos muestras. En la Fig. 3 se observa el efecto de modificar la cantidad de muestras en un mismo sistema.

4 Conclusiones y Trabajo Futuro

Se presentó un método para la reconstrucción del comportamiento de un sistema dinámico a partir de muestreos. La estrategia utilizada consiste en elegir una adecuada representación de un campo vectorial, el cual es reconstruido por medio de la interpolación del conjunto de muestras. El campo vectorial interpolado es utilizado para producir una Integral de Convolución Lineal con una textura, para mostrar el comportamiento del mismo. La técnica es relativamente sencilla de implementar y al mismo tiempo es directa e intuitiva para quien la usa. También se mostró que la cantidad de muestras necesarias para una reconstrucción aceptable es relativamente pequeña, dependiendo también de las características del diagrama de fases del sistema.

Entre las posibles aplicaciones y trabajo futuro, podemos mencionar el procesamiento de imágenes y la posproducción de fotografías. Simplemente es necesario utilizar una fotografía como textura, la cual es arrastrada en la dirección del campo vectorial. Por ejemplo, en la Fig. 4 se utiliza un campo vectorial para modificar la apariencia visual de un dibujo. En la Fig. 5, de acuerdo a lo aquí propuesto, en vez de encontrar una ecuación diferencial adecuada, simplemente es necesario proponer un conjunto de direcciones en determinados puntos de la imagen a procesar (en este caso la mano del jugador y la pelota). De esa manera, además de los efectos “artísticos” que pueden lograrse, es también posible la simulación de efectos fotográficos clásicos.

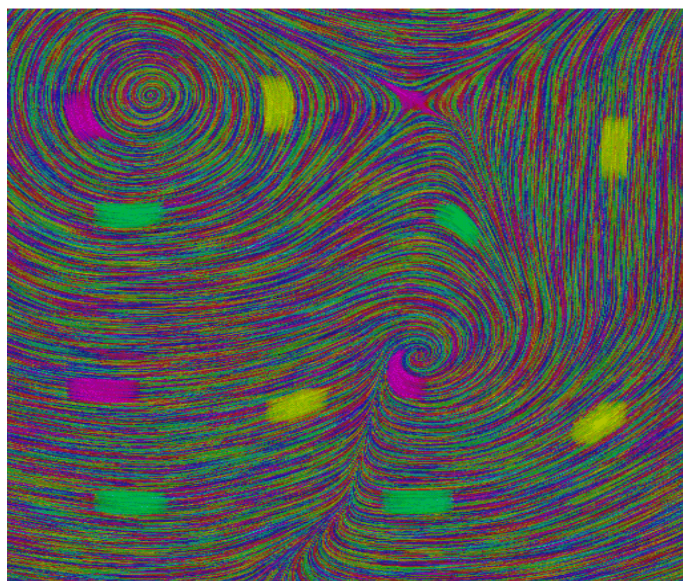
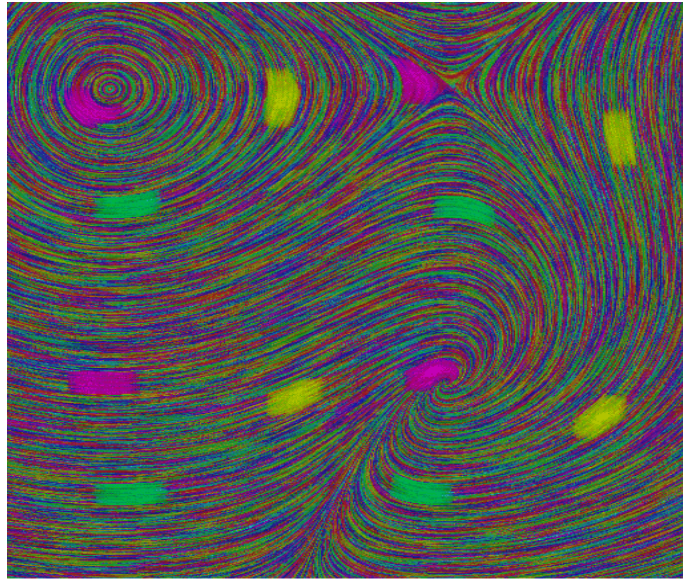


Figura 2: Reconstrucción de un diagrama de fases: (a) sistema original, (b) muestras tomadas, (c) reconstrucción resultante.

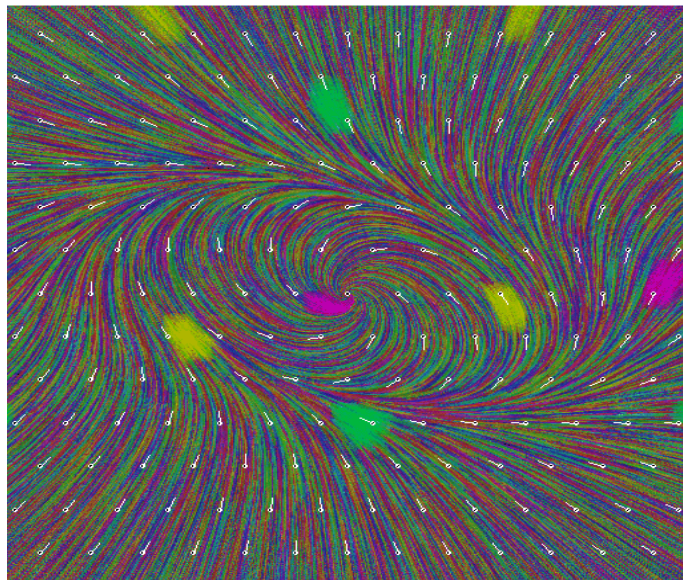
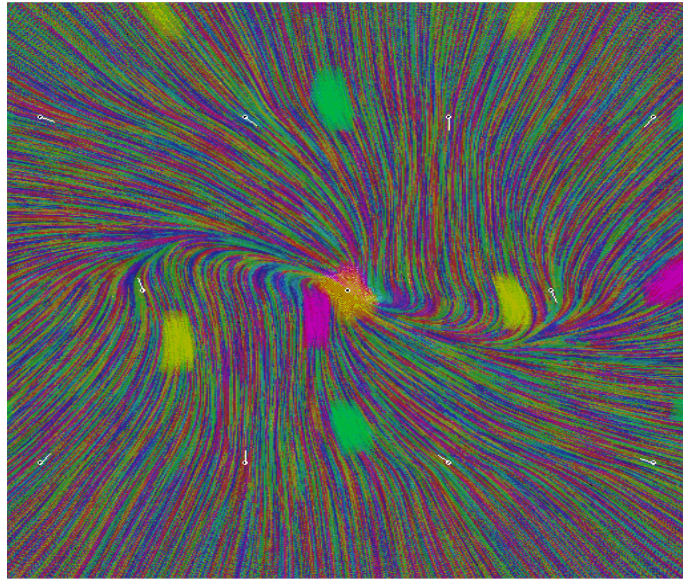
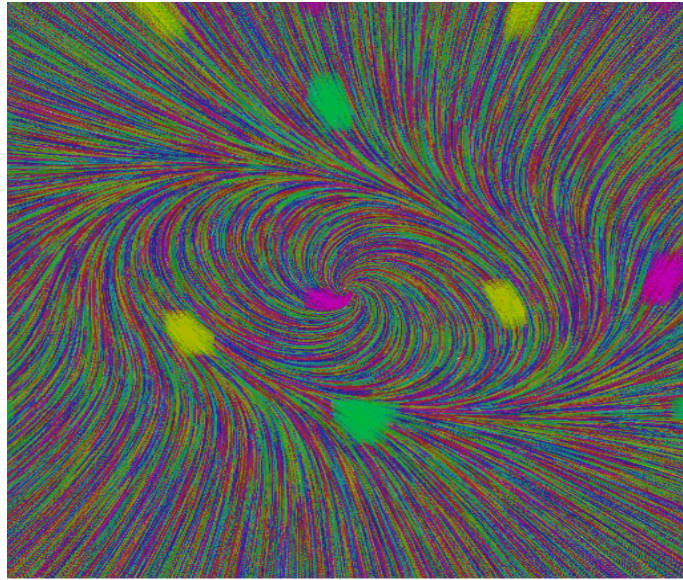


Figura 3: Efecto de la cantidad de muestras en la reconstrucción: (a) sistema original, (b) 44 muestras, (c) 273 muestras.



Figura 4: Procesamiento de imágenes con LIC.

Referencias

- [1] B. Cabral and L. Leedom. Imaging Vector Fields Using Line Integral Convolution. *ACM Computer Graphics (SIGGRAPH '93 Proceedings)*, 25(3):263–270, 1993.
- [2] S. Cunningham, J. R. Brown, and M. McGrath. Visualization in Science and Engineering Education. In G. M. Nielson and B. D. Shriver, editors, *Visualization in Scientific Computing*, pages 48–58. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- [3] T. A. Defanti, M. D. Brown, and B. H. McCormick. Visualization: Expanding Scientific and Engineering Research Opportunities. In G. M. Nielson and B. D. Shriver, editors, *Visualization in Scientific Computing*, pages 32–47. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- [4] C. Delrieux and A. Repetto. Visualización de Sistemas no Lineales y Caóticos. In *Memorias XXV Conferencia Latinoamericana de Informática, CLEI '99*.
- [5] R. Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley, Reading, MA, 1992.
- [6] J. Foley, A. Van Dam, S. Feiner, and J. Hughes. *Computer Graphics. Principles and Practice*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 1990.



Figura 5: Procesamiento de fotografías con LIC.

- [7] R. B. Haber and D. A. McNabb. Visualization Idioms: A Conceptual Model for Scientific Visualization Systems. In G. M. Nielson and B. D. Shriver, editors, *Visualization in Scientific Computing*, pages 74–93. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- [8] P. Keller and M. Keller. *Visual Cues: Practical Data Visualization*. IEEE Computer Society Press, Los Vaqueritos, CA, 1990.
- [9] G. M. Nielson and B. D. Shriver. *Visualization in Scientific Computing*. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- [10] F. Preparata and M. Shamos. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [11] D. Stalling and H.-C. Hege. Fast and Resolution Independent Line Integral Convolution. In *Computer Graphics Proceedings*, pages 249–256, Los Angeles, California, 1995. ACM SIGGRAPH.
- [12] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
- [13] A. Watt and M. Watt. *Advanced Animation and Rendering Techniques*. Addison-Wesley, London, 1992.