

# Visualización de Bifurcaciones y Espacios de Fases en Sistemas no Lineales

Claudio Delrieux<sup>1,2</sup>, Gustavo Ramoscelli<sup>1</sup>, Mirta Padín<sup>2</sup> y Juan C. Dombrowski

<sup>1</sup>*U. Nac. del Sur, Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, ARGENTINA.*

<sup>2</sup>*U. Nac. de la Patagonia Austral, L. de la Torre 1070, (9300) Río Gallegos, ARGENTINA.*

*Voice: (54)(291)155710098 — Fax: (54)(291)4595154 — e-mail: claudio@acm.org*

**Palabras Clave:** Visualización Científica, Computación Gráfica, Sistemas Dinámicos no Lineales y Caóticos.

## Abstract

El estudio del comportamiento dinámico en sistemas no lineales y caóticos es un tema de creciente importancia, dado que se constituyen en los modelos más usuales para los fenómenos más diversos (electrónica, ecología, medicina, etc.) Predecir el comportamiento de estos sistemas por la vía formal es en general imposible, dado que su naturaleza no lineal impide encontrar soluciones analíticas cerradas, y los casos particulares son en general muy laboriosos y limitados. La visualización de una simulación computacional, entonces, representa el último recurso posible para predecir, explicar o controlar el comportamiento de estos sistemas.

Sin embargo, los métodos clásicos de representación, basados usualmente en generalizaciones del concepto de trayectoria, producen resultados insatisfactorios a la hora de representar la sensibilidad del sistema a cambios en algún parámetro. Por ejemplo, la ocurrencia de bifurcaciones y el inicio de un comportamiento oscilatorio queda generalmente fuera de las posibilidades. En este trabajo se proponen métodos para detectar y representar gráficamente las bifurcaciones y el comportamiento oscilatorio (y periódico en general) en el espacio de fases de sistemas no lineales y caóticos. Estos métodos se ilustran en un sistema bidimensional (oscilador con diodo túnel) y un sistema tridimensional (oscilador de Colpitts).

# 1 Introducción

Entre las aplicaciones de mayor importancia en la Visualización Científica podemos contar el análisis interactivo del comportamiento de sistemas dinámicos no lineales y caóticos. El problema esencial en estos sistemas es que, por simples que puedan parecer sus ecuaciones, el comportamiento dinámico exhibe características impredecibles (aunque determinísticas). Por dicha razón, conocer un conjunto de ecuaciones diferenciales que modela adecuadamente un sistema real puede ser de escasa utilidad a la hora de utilizar el modelo para predicciones, explicaciones, control, etc.

Sin embargo, una simulación adecuada del comportamiento dinámico de un sistema, por complejo que sea (dimensionalidad, cantidad de parámetros, interdependencia funcional de las variables, etc.), está siempre dentro de las posibilidades de un programa de cómputo numérico. Más aún, los resultados numéricos pueden ser utilizados para producir una representación gráfica del diagrama de fases. La manera más sencilla de lograrlo consiste en “sembrar” varios valores iniciales en el espacio de fases (valores llamados *semillas*), y para cada uno integrar la ecuación diferencial del sistema con un diferencial finito y algún método corrector de error sistemático (Runge-Kutta, entre otros). En esto consiste el *método gráfico* (ver [4, 11]).

Las razones por las que el método gráfico es especialmente útil se fundamentan en la especial capacidad del sistema cognitivo humano para razonar visualmente a partir de esquemas geométricos dados. Por lo tanto, este sencillo plan de trabajo permite representar el comportamiento de un sistema dinámico de complejidad arbitraria de manera tal que un “usuario” promedio, sin especial entrenamiento, es capaz de detectar y clasificar el comportamiento cualitativo del sistema, por ejemplo, cuál será su evolución futura dada una determinada condición inicial, dónde están localizados los puntos críticos y cuál es la naturaleza de cada uno de ellos, si existe comportamiento oscilatorio o periódico, etc. Un conjunto de técnicas que permite mejorar la visualización de determinadas propiedades de los sistemas dinámicos no lineales puede consultarse en [2, 3].

Desafortunadamente, esta forma de proceder es de escasa ayuda cuando se requiere conocer o controlar determinadas propiedades de un sistema por medio del cambio del valor de algún parámetro, por ejemplo, modificar el diagrama de fases para conseguir o evitar algún tipo de comportamiento cualitativo. Esto es particularmente importante en los sistemas oscilatorios, en los cuales el cambio en el valor de un parámetro de control (usualmente derivado de las condiciones electrónicas en las que funciona el circuito), produce la aparición o interrupción de las oscilaciones por medio de la introducción de una bifurcación en el diagrama de fases del sistema. De esa forma, un objetivo de control sencillo, como es poder conocer y controlar la amplitud de las oscilaciones, no puede ser representado visualmente en forma directa.

En este trabajo proponemos una solución a este tipo de problemas. La misma consiste en detectar y representar gráficamente las bifurcaciones en un espacio combinado entre el espacio de fases y el espacio de los parámetros, de manera de poder visualizar toda la información pertinente en un único gráfico tridimensional. Las ventajas de esta propuesta se ilustran en un sistema bidimensional (oscilador con diodo túnel) y un sistema tridimensional (oscilador de Colpitts).

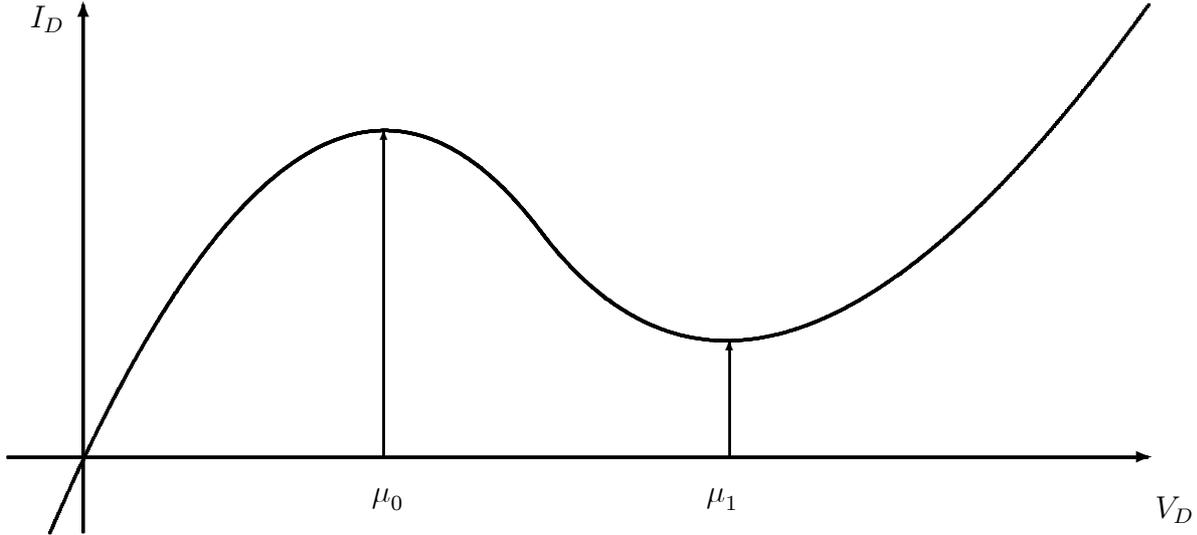


Figura 1: Una curva típica  $I_D$  vs.  $V_D$ .

## 2 Oscilador con diodo túnel

Un sistema de ecuaciones de estado adecuado para representar el comportamiento de un oscilador con diodo túnel es el siguiente: (ver [7]).

$$\begin{cases} I_L = \frac{1}{L}V_C \\ \dot{V}_C = \frac{1}{C}[g(V_B - V_C) - I_L] \end{cases} \quad (1)$$

La función  $g(\cdot)$  representa el comportamiento no lineal del diodo (ver Fig 1). En nuestro caso utilizamos  $g(e) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}e^2 + 2e$ , con lo cual  $\mu_0 = 1$ , y  $\mu_1 = 1$  (ver [9]).

El sistema de ecuaciones 1 puede transformarse a un sistema dinámico del siguiente modo, donde  $\mu$  representa la tensión de polarización:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g(\mu - y) - x \end{cases} \quad (2)$$

Es fácil ver que el sistema tiene un único punto crítico en cuando  $x = g(\mu)$  e  $y = 0$ . Si  $\mu \leq \mu_0$  entonces el punto crítico es un atractor. Cuando  $\mu$  llega a  $\mu_0$ , ocurre una bifurcación. El punto crítico se transforma en repelidor, y se origina un ciclo límite a su alrededor, es decir, el sistema se vuelve oscilatorio. Al aumentar la tensión de polarización, se incrementa la amplitud de la oscilación. Sin embargo, cuando  $\mu$  llega a  $\mu_1$ , entonces ocurre otra bifurcación, y la oscilación se extingue, dado que el punto crítico nuevamente se hace estable. Por lo tanto, debe ocurrir un máximo en la amplitud de la oscilación en algún lugar entre ambos valores del parámetro.

Este tipo de comportamiento es muy común en sistemas oscilatorios, debido a la raíz física del fenómeno. Una rama muy importante de la teoría de control consiste precisamente en investigar las características de bifurcación en los sistemas dinámicos oscilatorios [8]. El estudio de estas características permite establecer otros objetivos de control, como controlar la amplitud de las oscilaciones, relocalizar las bifurcaciones, etc.

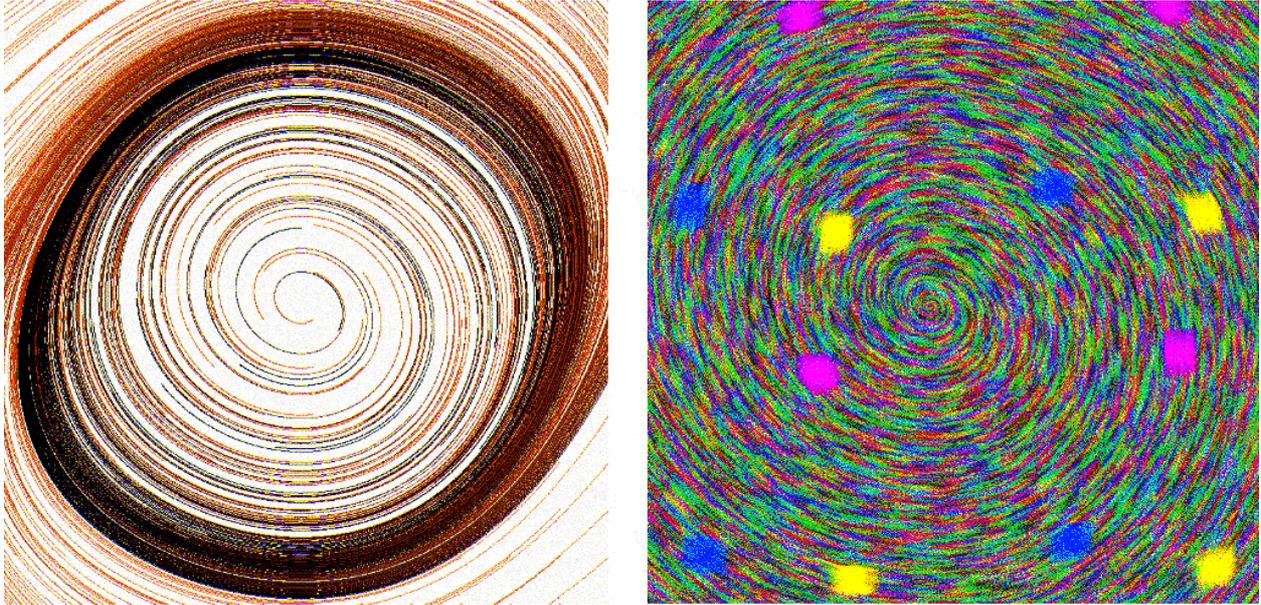


Figura 2: Diagrama de fases del sistema de ecuaciones 1 con  $\mu= 1.5$ . En (a) se utilizan trayectorias y en (b) se utiliza el algoritmo LIC.

Como ya mencionáramos en la Sección anterior, es muy difícil encontrar resultados analíticos acordes con estos objetivos, los cuales, además, son particulares para un único sistema. Por dicha razón es preferible la representación gráfica de una simulación numérica, dado que es aplicable en general a cualquier sistema dinámico, y los resultados que se producen son más fácilmente comprensibles. En general, un diagrama de fases bien representado permite visualizar el comportamiento cualitativo del sistema.

La forma más directa de graficar el diagrama de fases de un sistema es encontrando las trayectorias originadas a partir diversos estados iniciales o semillas. Usualmente, los parámetros de la evaluación numérica deben ser ajustados por prueba y error hasta encontrar resultados adecuados (por ejemplo, el valor del diferencial finito, la porción del espacio de fases a representar, la cantidad de iteraciones que se otorga a cada trayectoria, etc.). Por lo tanto, el método no es completamente automático. En la Fig. 2(a) se muestra el resultado de este procedimiento con el sistema dinámico de la Ecuación 1, con  $\mu= 1.5$ . En particular, hemos utilizado la técnica de disminuir la saturación del color de las trayectorias a medida que éstas evolucionan, para distinguir el comportamiento estacionario del transitorio.

Esta forma de proceder permite representar rápidamente el comportamiento de un sistema, pero tiene varios defectos. Por ejemplo, en la Figura mencionada se observa el desparejo cubrimiento que tiene el diagrama de fases en función del Jacobiano local. Los atractores, focos y ciclos límite atractivos están más cubiertos por trayectorias. No es sencillo determinar directamente si lo que tenemos es realmente un ciclo límite atractivo. Más bien, lo que se observa es que las trayectorias interiores espiralan hacia afuera y viceversa.

Una mejora notable fue propuesta por Cabral y Leedom (ver [1]) con la integral de convolución lineal (LIC). En la LIC se utiliza cada pixel de un mapa de textura como semilla de una trayectoria. Durante el recorrido de la trayectoria, se integra el color de cada otro pixel visitado en el mapa de texturas (tal vez utilizando una función ponderadora). El color resultante del pixel es asignado en función de dicha integral. Este procedimiento es

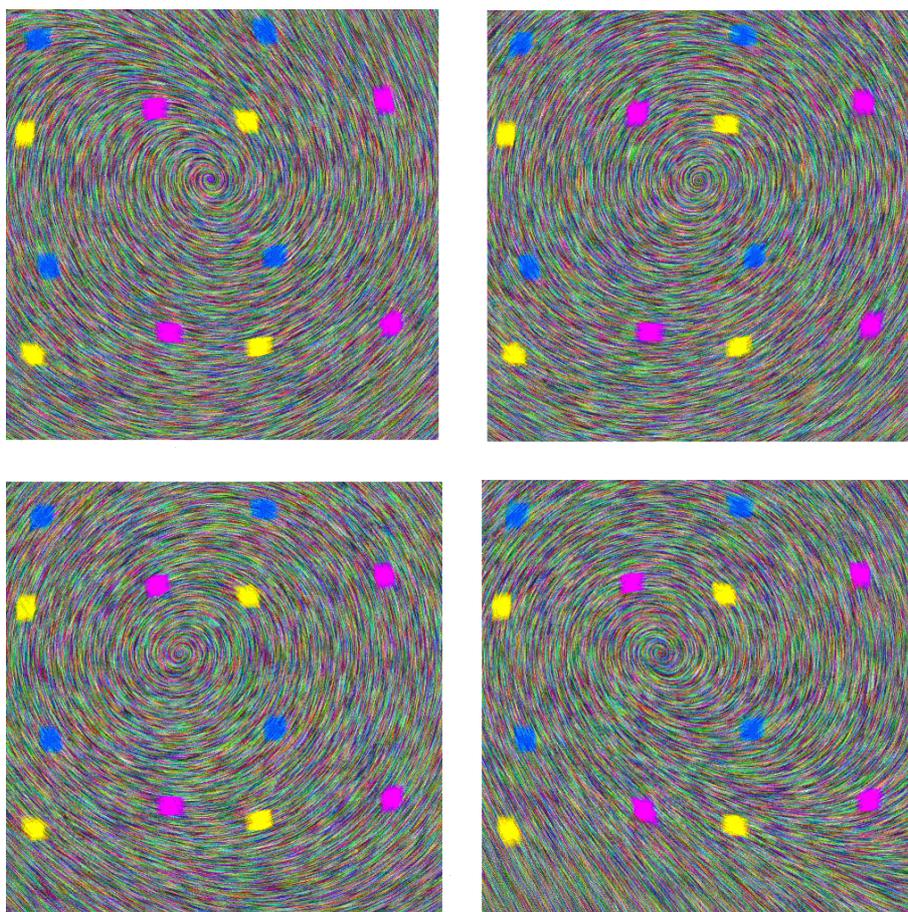


Figura 3: Diagramas de fase del diodo túnel con  $\mu= 0.7$ ,  $\mu= 1.2$ ,  $\mu= 1.8$ , y  $\mu= 2.2$ .

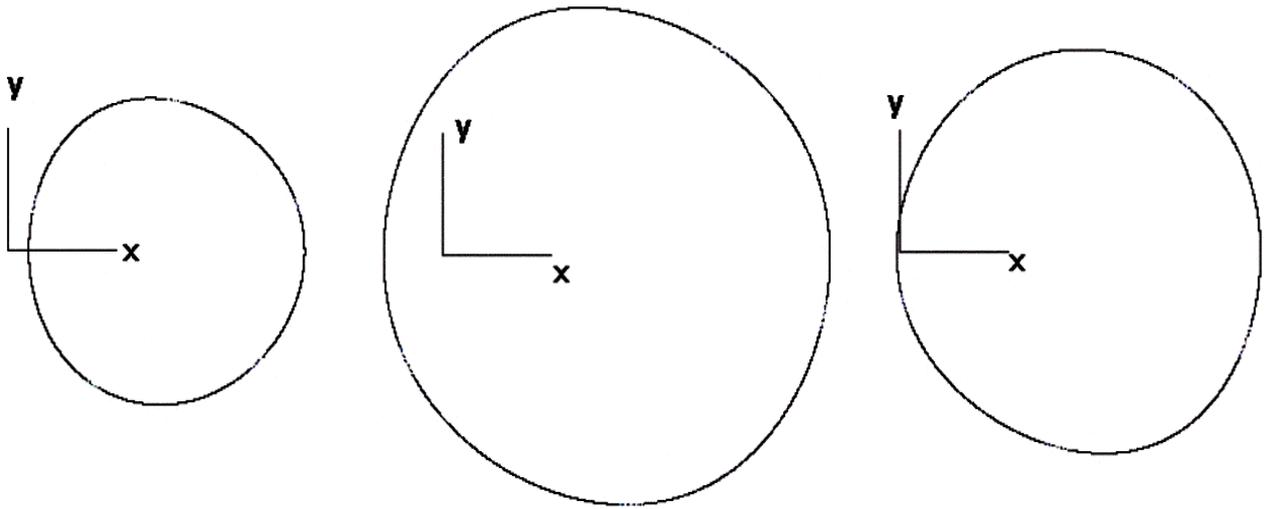


Figura 4: Trayectorias estacionarias en el diodo túnel una vez alcanzado el comportamiento estacionario, con  $\mu= 1.2$ ,  $\mu= 1.5$ , y  $\mu= 1.8$ .

más robusto con respecto a los parámetros de la integración numérica, y por lo tanto es más fácil de operar sin asistencia.

En la Fig. 2(b) se puede observar el mismo sistema dinámico que con la Fig. 2(a) pero representado con la LIC. Los resultados parecen de mejor calidad: el diagrama de fases está cubierto uniformemente y en cada punto es posible determinar visualmente la derivada local. Sin embargo, la representación del ciclo límite no es tan clara como se podría esperar. Por ejemplo, en la Fig. 3 se observan varios diagramas de fase para distintos valores de  $\mu$ , antes, durante y después del comportamiento oscilatorio. Esta circunstancia no es observable, y por lo tanto, la LIC no está permitiendo visualizar en forma adecuada las oscilaciones, y menos aún las bifurcaciones.

### 3 Representando el comportamiento global en el espacio de parámetros

Visualizar la evolución de los puntos críticos con respecto a la variación de parámetros puede ser una tarea difícil. Los puntos críticos atractivos pueden ser fáciles de encontrar analítica o numéricamente, pero los ciclos límite representan un desafío. Sin embargo, la dinámica de una trayectoria originada en la cuenca de un ciclo límite atractivo, eventualmente caerá dentro del mismo. En esta circunstancia diremos que el sistema, luego de un comportamiento transitorio –dependiente de su condición inicial–, alcanzó su estado estacionario, el cual depende solamente del sistema dinámico. En la Fig. 4 se observan los diagramas de fase del diodo túnel una vez alcanzado el comportamiento estacionario, con  $\mu= 1.2$ ,  $\mu= 1.5$ , y  $\mu= 1.8$ . Esto se puede determinar numéricamente de una forma sencilla, si el atractor es un punto crítico, puesto que la distancia entre sucesivas iteraciones decrece exponencialmente. Si se trata de un ciclo límite, la determinación es un poco más compleja (por ejemplo, analizar



Figura 5: El comportamiento oscilatorio completo del diodo túnel representado en el espacio del parámetro.

secuencias y comparar los puntos en los cuales una de las derivadas parciales se hace cero). Si se desea evaluar la evolución de repeladores, entonces hay que efectuar la iteración inversa del sistema, lo que se logra sencillamente cambiando el signo de las derivadas parciales.

Cuando llega el momento de representar la evolución de los puntos críticos, necesitamos relacionar distintos diagramas de fase entre sí. Una idea sencilla de expresar pero compleja de implementar consiste en “apilar” diversos espacios de fase para distintos valores del parámetro, en un espacio tridimensional en el cual el valor del parámetro  $\mu$  es la tercera coordenada. La dificultad aquí es cómo relacionar los distintos ciclos límite o puntos fijos en una única entidad geométrica.

Una estrategia posible consiste en considerar cada ciclo límite como una “feta” horizontal de un sólido, y luego utilizar algoritmos de *tracking* de isosuperficies como los sugeridos en [12]. Por ejemplo, podemos muestrear cada ciclo límite a intervalos angulares regulares, y utilizar los puntos obtenidos para construir polígonos, los cuales luego son representados

por medio de una función de iluminación y geometría 3D para realizar la visualización del sólido [5], o tal vez utilizar una librería de funciones gráficas 3D como OpenGL [10].

El resultado de este procedimiento se muestra en la Fig. 5. Aquí se observa que el punto fijo atractor evoluciona según una curva a valores bajos de  $\mu$ , hasta que se expande a un elipsoide cuando ocurre la bifurcación. Dicho elipsoide representa todo el comportamiento oscilatorio que puede experimentar el sistema en el espacio del parámetro. Por ejemplo, es fácil determinar visualmente algunas características importantes, como la zona en la cual la variación de la amplitud de la oscilación es aproximadamente lineal respecto de la variación del parámetro (si desamos hacer modulación AM).

## 4 Oscilador de Colpitts

Es importante poder constatar que la metodología presentada se adecua para representar y visualizar el comportamiento global de sistemas dinámicos de mayor complejidad estructural y comportamiento diverso. Por dicha razón desarrollamos aquí la representación del espacio de bifurcaciones del Oscilador de Colpitts, el cual es de tres variables, requiere tres parámetros, y exhibe un comportamiento dinámico bastante complejo. La transformación del circuito electrónico a ecuaciones diferenciales no es importante aquí (ver [6], por ejemplo). El sistema dinámico resultante es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{g^*}{Q(1-k)}[-n(x_2) + x_3] \\ \dot{x}_2 &= \frac{g^*}{Qk}x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g^*}[x_1 + x_2] - \frac{1}{Q}x_3 \end{cases} \quad (3)$$

donde  $n(x_2) = \exp(-x_2) - 1$ , y  $g^*, Q, k$  representan parámetros circuitales.

El comportamiento de este sistema dinámico es notablemente complejo pese a que la componente no lineal está localizada en un único término de una sola ecuación del sistema. Básicamente el mismo exhibe bifurcaciones por duplicación del período del ciclo límite (cascada de Feigenbaum, ver Fig. 6(a)), bifurcaciones homoclínicas donde el ciclo límite colisiona con un punto crítico (Fig. 6(b)), y también bifurcaciones por plegamiento, donde dos o más ciclos límite con diferentes estabilidades colisionan entre sí y desaparecen. Una forma sencilla de mejorar la calidad de la representación de trayectorias en 3D consiste en darles un determinado espesor, para lograr que la trayectoria interactúe con el modelo de iluminación y cara oculta, y se pueda visualizar la tercera dimensión con mejor fidelidad (ver Fig. 7).

Al observar estas trayectorias queda evidenciada la dificultad que puede surgir al tratar de aplicar al oscilador de Colpitts el mismo mecanismo para representar su comportamiento global que el visto en la Sección anterior. Por un lado es más difícil determinar en qué punto el sistema pasa del transitorio al estacionario, y por otro lado porque dos ciclos límite sucesivos con distinto parámetro pueden tener topologías muy diversas y difíciles de poner en concordancia.

La primer parte del programa permite obtener los ciclos límite que alcanza el sistema en el estacionario para valores determinados de los parámetros  $k, g^*$  y  $Q$ . Esto se logra básicamente con una herramienta numérica que analiza una curva de dos dimensiones. La misma es la proyección ortogonal del ciclo límite sobre un plano adecuadamente determinado. El método con el que se obtiene el estado estacionario puede verificarse numéricamente

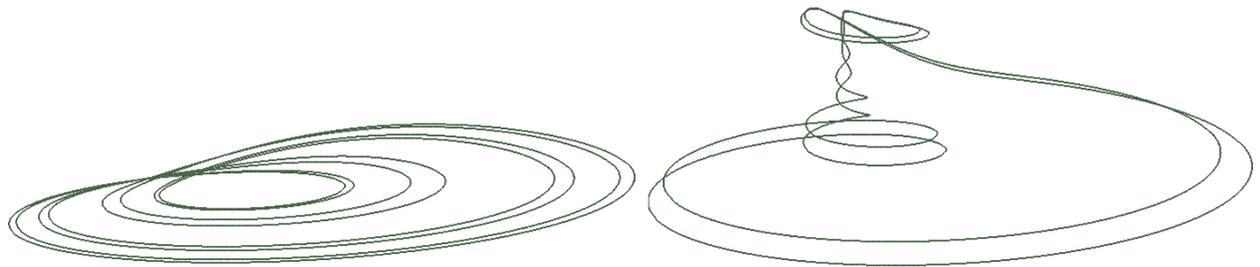


Figura 6: Trayectorias del oscilador de Colpitts donde se muestran dos tipos de bifurcaciones. (a) El ciclo límite se desdobla por sucesivas duplicaciones de período (cascada de Feigenbaum). (b) El ciclo límite se distorsiona al pasar cerca de otro punto crítico.

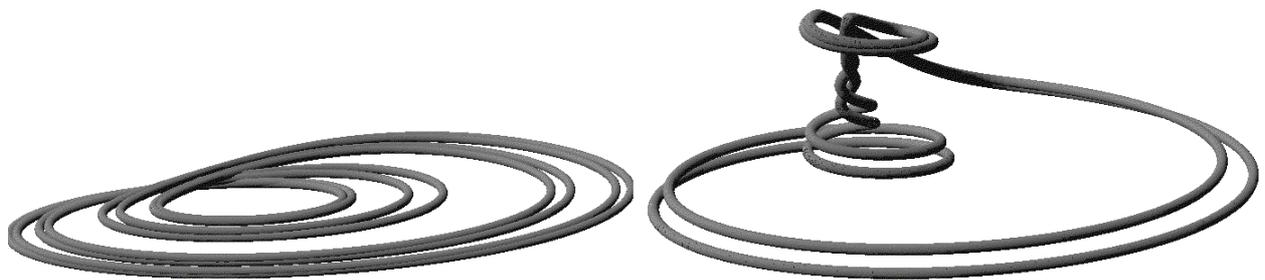


Figura 7: Las trayectorias de la Figura 6 con un algoritmo de visualización mejorado.

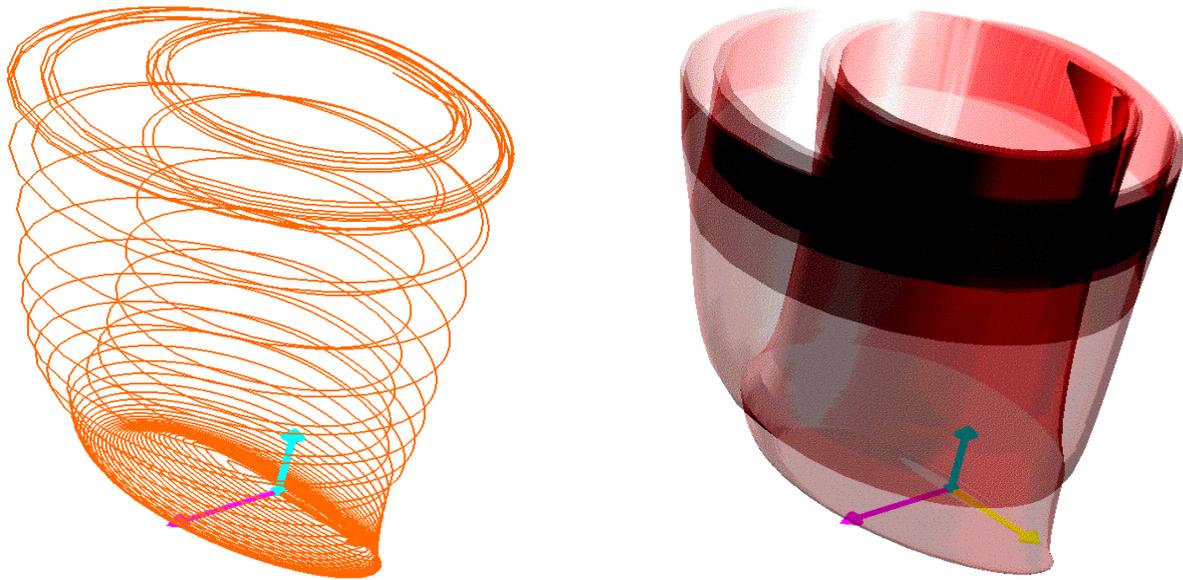


Figura 8: (a) Un conjunto de trayectorias del oscilador de Colpitts ilustrando una cascada de bifurcaciones por duplicación de período, y (b) el sólido resultante.

mediante la información del error que se obtiene al completar un ciclo completo, esto es, la diferencia numérica entre un primer punto (elegido arbitrariamente) y el final, el cual cierra el ciclo límite. Este proceso se repite varias veces para verificar que no haya error.

Una vez definida la parte del programa que detecta un ciclo límite, es necesario encontrar varios ciclos para distintos valores de los parámetros. En general, el parámetro más importante en este oscilador es la ganancia  $g^*$ , y por lo tanto se dejan constantes los valores de  $k$  y  $Q$ , y se hace variar  $g^*$  entre 1 y un valor suficientemente alto para evidenciar bifurcaciones de la complejidad deseada. Como la capacidad visual humana permite percibir en tres dimensiones, y el sistema tiene tres variables, es necesario descartar alguna de ellas para poder representar el espacio de bifurcaciones en tres dimensiones. La experiencia muestra que la proyección de los ciclos límite sobre el plano  $x_1 = 0$  es más adecuada visualmente que las otras dos posibilidades (algo también sugerido en [6]). Por lo tanto, nuestro espacio de representación tiene como ejes horizontales a las variables  $x_2$  y  $x_3$  del sistema, y como eje vertical al parámetro  $g^*$ , el cual es la ganancia. En dicho espacio se apilan las trayectorias obtenidas para distintos valores de  $g^*$  en la Fig. 8(a).

Una vez obtenido el conjunto de trayectorias, se muestrean para obtener vértices de polígonos. El muestreo en este caso es un poco más difícil que en el oscilador por diodo túnel, dado que –como es posible observar– los ciclos límite son topológicamente más complejos. De todas formas la idea subyacente es similar: se parte de un punto común a todas las trayectorias, y se buscan puntos congruentes a distintos ángulos. Los puntos recolectados conforman polígonos, los cuales en forma conjunta ensamblan una superficie que representa las bifurcaciones que atraviesa el sistema dinámico cuando se modifica la ganancia, a valores fijos de los demás parámetros. Para obtener una buena visualización del sólido, utilizamos la librería OpenGL, que permite manipular el modelo de iluminación utilizando transparencias (ver Fig. 8(b)).

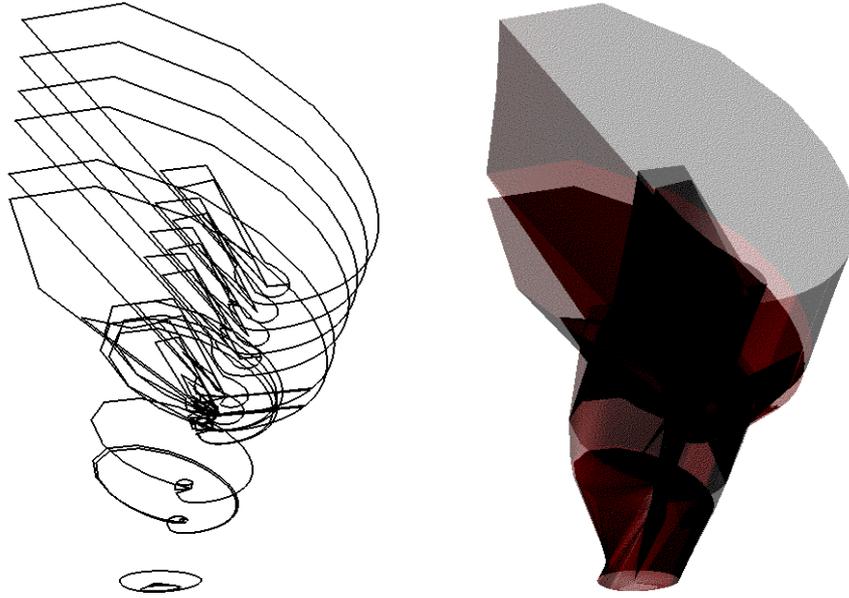


Figura 9: (a) Un conjunto de trayectorias del oscilador de Colpitts ilustrando bifurcaciones homoclínicas, y (b) el sólido resultante.

Para otros valores de los parámetros, en los que ocurren bifurcaciones homoclínicas y/o plegado cuando se modifica la ganancia, se dificulta la conformación de una superficie a partir de trayectorias sucesivas. Por lo tanto, el procedimiento puede dar resultados más difíciles de interpretar visualmente (ver Fig. 9).

## 5 Conclusiones

Se presentó un método para visualizar el comportamiento global de sistemas dinámicos no lineales en los que ocurren bifurcaciones y oscilaciones. Estos resultados mejoran las posibilidades de los métodos gráficos tradicionales, permitiendo representar la evolución de los puntos críticos y ciclos límite con respecto a la variación de los parámetros. Esta visualización puede ser de gran ayuda en el diseño de estrategias de control, como por ejemplo para modificar la amplitud de la oscilación, prevenir los subarmónicos, etc.

Se mostraron ejemplos en osciladores para los cuales los métodos gráficos usuales no brindan buenos resultados. El oscilador con diodo túnel es muy sencillo y se puede visualizar su comportamiento oscilatorio global en un único gráfico. El oscilador de Colpitts, en cambio, es más complejo, y solamente se pueden mostrar familias de bifurcaciones que ocurren cuando se varía un solo parámetro. Como se pudo observar, los resultados no son siempre tan adecuados como con el diodo túnel, y por lo tanto el trabajo futuro de mayor importancia consiste en mejorar la identificación de puntos sobre los ciclos límite y el *matching* de los mismos en dos trayectorias sucesivas para encontrar una poligonización adecuada.

## Referencias

- [1] B. Cabral and L. Leedom. Imaging Vector Fields Using Line Integral Convolution. *ACM Computer Graphics (SIGGRAPH Proceedings)*, 25(3):263–270, 1993.
- [2] Claudio Delrieux. Visualización de la Dinámica de Sistemas no Lineales. In *RPIC '97*, pages 151–157, San Juan, 1997.
- [3] Claudio Delrieux and Andrés Repetto. Visualización de Sistemas no Lineales y Caóticos. In *Memorias XXV Conferencia Latinoamericana de Informática CLEI '99*, pages 241–252, Asunción, Paraguay, 1999.
- [4] Robert Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley, Reading, MA, 1992.
- [5] J. Foley, A. Van Dam, S. Feiner, and J. Hughes. *Computer Graphics. Principles and Practice*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 1990.
- [6] G. M. Maggio, O. De Feo, and M. P. Kennedy. Nonlinear Analysis of the Colpitts Oscillator and Applications to Design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 46(9):1118–1130, 1999.
- [7] A. I. Mees. *Dynamics of Feedback Systems*. Wiley, New York, 1981.
- [8] J. Moiola and G. Chen. *Hopf Bifurcation Analysis – A Frequency Domain Approach*. Word Scientific, Singapore, 1996.
- [9] Jorge Moiola and Mirta Padín. Amplitude Control of Oscillations in Nonlinear Circuits. In *Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, pages 747–750, Hawaii, 1999. NOLTA '99.
- [10] Mark Segal and Kurt Akeley. The OpenGL Graphic System: A Specification.
- [11] Stefen H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
- [12] Alan Watt and Mark Watt. *Advanced Animation and Rendering Techniques*. Addison-Wesley, London, 1992.