

CAPITULO I

INTRODUCCION

La meta de la Física Teórica consiste en describir el mayor número posible de fenómenos físicos por medio de una teoría simple y concisa. En la Física de las Partículas Elementales, esta meta se concreta en la formulación de un esquema unificado que combine a todas las partículas y sus interacciones en una teoría consistente.

Si concentramos nuestra atención en las interacciones propiamente dichas, encontramos que todas (excepto la gravitación) pueden ser interpretadas en el marco de las teorías de calibre⁽¹⁾ (o teorías de gauge). La gravitación queda excluida (aunque existen desarrollos formales que la aproximan a una teoría de gauge) por responder ésta a la estructura geométrica del propio espacio-tiempo (donde se definen los campos de calibre, responsables de las interacciones electromagnética, débil y fuerte). La supergravidad⁽²⁾ es un intento interesante para concretar en esa dirección un último paso en la unificación de todas las interacciones conocidas.

Sin embargo, es posible enfocar el problema de la unificación desde un ángulo diferente si atendemos al principio básico de la Relatividad General: las interacciones son manifestaciones de la geometría del espacio-tiempo.

¿Están los campos de gauge vinculados con la curvatura del espacio-tiempo?. Esta es una pregunta que se formuló y contestó Kaluza en los primeros años de vida de la Relatividad General. Kaluza⁽³⁾ mostró que en efecto, es posible incluir al potencial electromagnético en la métrica del espacio-tiempo, pero a un precio sin duda singular: debe aumentarse en uno el número de dimensiones espaciales. Sólo en un espacio-tiempo de 5 dimensiones los potenciales electromagnético y gravitatorio adquieren el carácter de ser componentes de un objeto geométrico común, el tensor métrico del espacio.

El resultado de Kaluza contiene los ingredientes típicos de una propuesta ingeniosa y desconcertante; es simple y elegante, presenta la unificación de las interacciones de manera natural y potente, sin embargo requiere que abandonemos la idea que somos simplemente seres tetradimensionales. Algo que no es trivial, si se piensa en el legado de nuestra propia historia.

La concepción de la naturaleza y el significado físico de las dimensiones extra se vio sujeta a cambios a lo largo de las diferentes etapas que esta teoría cumplió en su largo trayecto. El propio Kaluza fue muy escéptico en cuanto a atribuir algún significado físico a la dimensión extra que su formalismo contenía; para él la coordenada x^5 jugaba únicamente el papel de un vehículo matemático necesario para producir la unificación deseada, mientras que toda la física estaba contenida en un subespacio tetradimensional donde no quedaban restos de la quinta

dimensión. Toda la geometría elaborada por Kaluza está inspirada en esos principios.

La geometría de Kaluza resulta de hecho demasiado restrictiva en varios aspectos y no demoraron en aparecer otras propuestas donde se modifica sustancialmente el papel de la nueva dimensión. Así, tiene lugar la sugerencia de Klein^[4] de confinar el dominio de variación de la nueva coordenada a un intervalo acotado. Con esta hipótesis se asigna una topología diferente a la estructura geométrica básica del espacio-tiempo, la cual supone que la porción agregada es esencialmente compacta. Cálculos inmediatos muestran la existencia de un vínculo directo entre la longitud característica de dicho espacio y la constante de acoplamiento asociado con los campos de calibre. El resultado: la escala típica del espacio compacto se reduce a la escala de Planck (10^{-33} cm), colocándose totalmente fuera del alcance de nuestra detección experimental^[5].

Estos argumentos sugieren una participación más fundamental de las nuevas dimensiones en el esquema de unificación propuesto por Kaluza. Estas no serían ya simplemente mediadores matemáticos que deben ser necesariamente eliminados, sino que su presencia adquiere un significado particular (vinculado con el problema de la cuantificación de la carga). Dicho significado no debe atentar sin embargo contra el carácter indudablemente tetradimensional de nuestro espacio físico. En este contexto, Einstein y Bergmann^[6] muestran cómo es posible construir una geometría que contemple la

hipótesis de Klein y que mantenga las características básicas del espacio-tiempo de Kaluza; este nuevo espacio se supone periódico con respecto a la dimensión extra.

La idea de una realidad física asignable a las dimensiones extra resultó finalmente apoyada por la posibilidad de construir modelos cosmológicos^[7] que hacen compatibles la imagen de un universo efectivo tetradimensional con la evolución cósmica de un universo primitivo de $D = 4 + p$ dimensiones. En las etapas iniciales, todas las dimensiones espaciales serían comparables en tamaño. Su evolución sin embargo estaría caracterizada por la expansión de tres y la contracción de las restantes p dimensiones espaciales a una escala comparable a la longitud de Planck.

Tanto el desarrollo de las ideas básicas de Kaluza-Klein así como la implementación de modelos cosmológicos adolece de dificultades, algunas de ellas sin solución inmediata aparente. Así por ejemplo, existe una gran arbitrariedad en los modelos desarrollados de universos multidimensionales, no logrando dilucidarse la razón última del mecanismo de compactificación. También existen problemas típicos ligados con el mecanismo de acoplamiento con la materia. Por ejemplo, al acoplar una métrica 5-dimensional con un campo de materia, se produce una generación dinámica de masa por la compactificación de la quinta dimensión del orden de la masa de Planck^[8]. La partícula se vuelve superpesada, obligando a un ajuste extremadamente artificial de la constante de masa en el lagrangiano original a los efectos de

recuperar la descripción de una partícula liviana (problema del fine-tuning de las condiciones iniciales). Este problema se agrava cuando se incorpora un parámetro de evolución cósmica en la métrica 5-dimensional⁽⁹⁾. En este caso, el radio de la quinta dimensión es función del tiempo, lo que hace que las constantes fundamentales también dependan del tiempo. Así, aún fijando la masa desnuda del lagrangiano en un valor cercano a la masa de Planck a un tiempo dado, para valores anteriores a ese tiempo la partícula es un taquión y, en el futuro suficientemente lejano, será otra vez superpesada.

Un ingrediente singular de la teoría 5-dimensional de Kaluza-Klein es el coeficiente γ_{55} del tensor métrico. Este aparece como una función escalar en el espacio-tiempo efectivo y no posee una interpretación definitiva en término de magnitudes observables de nuestro espacio físico⁽¹⁰⁾. En muchos trabajos (sobre todo en el periodo de Kaluzá, Klein, Einstein y Bergmann) se lo elimina, tomando como condición de normalización $\gamma_{55} = 1$ (condición que simplifica la estructura geométrica del espacio-tiempo). En las ecuaciones de Einstein, este campo aparece como un campo de Brans-Dicke⁽¹¹⁾. Por este motivo, algunos autores lo han relacionado con una constante gravitatoria variable⁽¹²⁾.

Esta tesis se propone avanzar en la comprensión de distintos problemas que se plantean en la teoría de Kaluza-Klein, vinculados básicamente con la física que ven observadores impedidos de acceder a una parte de su universo.

Por un lado, nos proponemos mostrar que existe evidencia experimental directa de las dimensiones compactificadas a nivel del espacio-tiempo efectivo. Mostraremos que ciertos fenómenos cuánticos (pero de naturaleza esencialmente electromagnética) pueden ser interpretados clásicamente a través de la teoría de Kaluza-Klein (por su naturaleza electromagnética, estos fenómenos involucran únicamente a la quinta dimensión). Así, el efecto Aharonov-Bohm⁽¹³⁾ y el efecto Meissner-Ochsenfeld⁽¹⁴⁾ de la superconductividad son explicados correctamente por esta teoría, con consecuencias fundamentales ligadas tanto al significado de las dimensiones extra como al origen (sin duda controvertido) de dichos fenómenos⁽¹⁵⁾⁻⁽¹⁶⁾.

Otro aspecto desarrollado en este trabajo se refiere al papel del campo escalar γ_{55} en la física del espacio-tiempo tetradimensional. Analizando el caso de la QED escalar, mostramos que esta teoría presenta un carácter esencialmente local para esos observadores en la formulación de Kaluza-Klein. El carácter local se pone de manifiesto básicamente en un vínculo entre las constantes fundamentales y el campo γ_{55} , que nosotros generalizamos a cualquier métrica 5-dimensional. El acoplamiento campo-constantes fundamentales permite a los observadores tetradimensionales establecer cotas experimentales para el campo escalar a través del análisis del corrimiento gravitacional de la frecuencia de las líneas espectrales. Este resultado muestra además que el campo escalar introducido a nivel de los observadores tetradimensionales por la compactificación de la

quinta dimensión no agota sus propiedades como un campo de Brans-Dicke, ya que estos campos no alteran el corrimiento gravitacional en frecuencia de las señales⁽¹⁷⁾.

Finalmente, a partir de la formulación local de la QED y utilizando una métrica 5-dimensional tipo Kasner⁽¹⁸⁾, se propone un modelo para la variación temporal de las constantes fundamentales a escala cosmológica. Mostramos que la inclusión de las propiedades cuánticas del campo de materia (específicamente, a través de las ecuaciones del grupo de renormalización) permiten realizar un planteo novedoso sobre el comportamiento cosmológico de las constantes fundamentales. En este planteo se modifican sustancialmente los resultados clásicos relativos al problema de la generación dinámica de masa por la compactificación y al fine-tuning de las condiciones iniciales. Se muestra además cómo es posible definir correctamente un sistema de unidades donde la constante de estructura fina sea independiente de la expansión de universo y se respeten además las peculiares dependencias temporales que el formalismo de Kaluza-Klein asigna a las constantes fundamentales (análisis que no es satisfactorio si se limita a considerar únicamente las propiedades clásicas de los campos).

El plan de la tesis se desarrolla de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan las bases conceptuales de la teoría de Kaluza-Klein, atendiendo principalmente a la estructura geométrica del espacio-tiempo. Se analizan las contribuciones principales de

diferentes autores, siguiendo el orden cronológico que conforma la larga historia de esta teoría.

El capítulo 3 está dedicado a las ecuaciones del campo. Este tal vez sea el capítulo más "pesado" desde el punto de vista matemático. Se desarrolla la geometría diferencial necesaria para describir con suficiente rigor la estructura de fibrado implícita en el espacio-tiempo de Kaluza y se analiza en detalle la descomposición del escalar de curvatura multidimensional en término del escalar de curvatura de la Relatividad General y la curvatura de los campos de gauge. Este capítulo termina con el estudio de algunas soluciones de las ecuaciones del campo que tienen aplicación en cosmología (soluciones de Kasner).

El capítulo 4 se refiere al acoplamiento entre la métrica y los campos de materia. Se analiza el tema desde un punto de vista general y luego se estudian los dos mecanismos utilizados de reducción dimensional: invarianza derecha de la métrica y compactificación. En el primer caso se considera el efecto de renormalización clásica de la masa y la carga de la partícula, mientras que en el segundo se estudia específicamente la formulación de la QED escalar, el problema de la generación dinámica de masa y el fine-tuning de las condiciones iniciales.

Los capítulos 5, 6 y 7 contienen básicamente las contribuciones originales que sobre la teoría de Kaluza-Klein se han realizado en el desarrollo de esta tesis doctoral. Los puntos

tratados ya han sido comentados en la discusión de los objetivos propuestos, por lo que no repetiremos detalles. Así, en el capítulo 5 se analiza el problema de la realidad física de la quinta dimensión, en el capítulo 6 se estudia el papel del campo escalar en la teoría de Kaluza-Klein 5-dimensional y, finalmente, en el capítulo 7 se desarrolla un modelo para la variación temporal de las constantes fundamentales.

Ha pasado mucho tiempo desde las contribuciones de Kaluza, Klein, Einstein y Bergmann hasta nuestros días. En todo ese período la teoría de Kaluza-Klein ha sufrido los vaivenes propios de una propuesta válida (aunque no totalmente libre de dificultades) en un tema tan difícil y atractivo como lo es la unificación de todas las interacciones de la naturaleza. Sin embargo, hoy podemos afirmar que aunque el programa inicial de Kaluza y Klein (y sus posteriores extensiones) está aún lejos de ser realizado, los avances producidos en la comprensión del problema de la unificación y su relación actual con otras teorías (supercuerdas, supergravedad) justifican sin duda el esfuerzo dedicado por muchos físicos durante diferentes períodos, algunos pertenecientes a la historia, otros vigentes hoy día y participantes activos en la evolución de las ideas actuales sobre la estructura última de la naturaleza. Esperamos que nuestro trabajo contribuya al esfuerzo común realizado. Ese es nuestro deseo sincero.

REFERENCIAS

- 1 - E. Abers and B. Lee, *Gauge Theories*, Physics Reports 9C, No. 1 (1973).
- 2 - P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, Physics Report 68, 189 (1981).
- 3 - T. Kaluza, *Zum Unitatsproblem der Physik*, Sitzungsberg. Preuss. Akad. Wissen. Leipzig, 966 (1921).
- 4 - O. Klein, *Quantum theory and five dimensional theory of relativity*, Z. Phys. 37, 895 (1926).
- 5 - S. Weinberg, *Charges from extra dimensions*, Phys. Lett. 125B, 265 (1983).
- 6 - A. Einstein y P. Bergmann, *On a generalization of Kaluza's theory of electricity*, Ann. Math. 39, 683 (1938).
- 7 - A. Chodos and S. Detweiler, *Where has the fifth dimension gone?*, Phys. Rev. D. 21, 2167 (1980); P. Freund, *Kaluza-Klein cosmologies*, Nucl. Phys. B209, 146 (1982); T. Appelquist and A. Chodos, *Quantum dynamics of Kaluza-Klein theories*, Phys. Rev. D28, 772 (1983).
- 8 - C. F. Chyba, *Kaluza-Klein unified field theory and apparent four-dimensional space-time*, Am. J. Phys. 53, 863 (1985).
- 9 - A. Chodos and S. Detweiler, op. cit, pag. 2168.
- 10 - E. Leibowitz and N. Rosen, *Five-dimensional relativity theory*, General Rel. and Grav. 4, 494 (1973).
- 11 - C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. 124, 925 (1961).

- 12 - P. Jordan, *Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie*, Ann. der Phys. 1, 219 (1947); Y. Thiry, *Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire a quinze variables de champ*, Jour. de Math. 30, 275 (1951).
- 13 - Y. Aharonov and D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the Quantum Theory*, Pys. Rev. 115, 485 (1959).
- 14 - Ver por ejemplo J. Reitz, F. Milford y R. Christy, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Fondo Educativo Interamericano 3^o edición (1984), cap. 15.
- 15 - Ver por ejemplo, W. Furry and N. Ramsey, *Significance of potentials in Quantum Theory*, Pys. Rev. 118, 623 (1960). También P. Bocchieri and A. Loinger *Nonexistence of the Aharonov-Bohm effect*, Nuov. Cim. 47A, 475 (1978).
- 16 - W. F. Edwards, *Classical Derivation of the London equations*, Phys. Rev. Lett. 47, 1863 (1981).
- 17 - G. Brans and R. H. Dicke, op. cit., pag. 931.
- 18 - Las soluciones de Kasner constituyen soluciones exactas a las ecuaciones del campo dependientes de una única variable y tienen aplicación en cosmología. Ver por ejemplo, L. Landau y E. Lifshitz, *Teoría clásica de los campos*, Ed. Reverté (1971), sección 102.

CAPITULO II

RESEÑA HISTORICA DE LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN

2.1 - EL TRABAJO DE KALUZA (1921)

Kaluza⁽¹⁾⁻⁽⁹⁾ desarrolló las bases de un modelo unificado de la gravitación y el electromagnetismo. Encontró que la formulación de la Relatividad General en 5 dimensiones provee el marco adecuado para crear una geometría donde los potenciales electromagnético y gravitatorio determinen la estructura del espacio-tiempo.

Para Kaluza, el planteo de una estructura geométrica 5-dimensional constituye sólo un procedimiento formal, carente de contenido físico en sí. Los objetos geométricos que tienen correlato con el mundo físico están contenidos en su totalidad en una variedad de cuatro dimensiones, incluida de cierta manera en un espacio de mayor número de dimensiones. Esta estructura se construye sobre la base de la existencia de un campo vectorial que satisface ciertas propiedades definidas de simetría.

La idea central sobre la que descansa la estructura del espacio-tiempo de la teoría de Kaluza es el carácter "cilíndrico" que se atribuye al espacio con respecto a dicho campo vectorial. Con esta hipótesis se logra introducir un esquema adecuado de "proyección" del formalismo 5-dimensional a uno 4-dimensional y además se logra que los campos físicos posean la esperable

propiedad de ser independientes de la quinta dimensión.

Consideremos una variedad riemanniana 5-dimensional V_5 con las coordenadas ζ^α ($\alpha = 1, \dots, 5$) y tensor métrico $\gamma_{\mu\nu}$, tal que

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

es el elemento de línea en ese espacio. Introduzcamos además cuatro parámetros x^k ($k = 1, \dots, 4$) linealmente independientes, funciones en general de las coordenadas ζ^α . Esto siempre puede hacerse de tal modo que las curvas $x^k = \text{constante}$ definan en V_5 una estructura geométrica invariante frente a transformaciones arbitrarias de los parámetros

$$x'^k = f^k(x^j) \quad (2.2)$$

Para ver esto, consideremos las derivadas de los x^k con respecto a las coordenadas

$$\gamma^k_{\alpha} \equiv x^k_{,\alpha} \quad (2.3)$$

Con la ayuda de estas magnitudes es posible introducir un campo vectorial A^α , definido por los vectores tangentes a las curvas $x^k = \text{constante}$ y que satisface las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \gamma^k_{\alpha} A^\alpha &= 0 \\ \gamma_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta &= 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Estas cinco condiciones determinan el campo A completamente. Las magnitudes "recíprocas" γ^{α}_k pueden definirse a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma^k_{\alpha} \gamma^{\alpha}_j &= \delta^k_j \\ A_{\alpha} \gamma^{\alpha}_k &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Las cantidades γ^k_{α} (y sus inversas) mezclan los índices griegos y latinos y permiten, junto con el campo A^{α} , expresar toda relación tensorial "5-dimensional" en términos de relaciones 4-dimensionales y escalares. En efecto, es inmediato ver que la contracción del índice griego de las magnitudes mixtas con cualquier tensor definido en V_5 produce una cantidad que se transforma con respecto a (2.2) como un tensor 4-dimensional (que denominaremos abreviadamente un p-tensor). Así, es posible asociar a cada vector ordinario W^{α} un escalar y un p-vector en la forma

$$\begin{aligned} W^k &= \gamma^k_{\alpha} W^{\alpha} \\ W &= A_{\alpha} W^{\alpha} \end{aligned} \tag{2.6}$$

procediéndose de la misma manera con las componentes covariantes. Las propiedades proyectivas de las cantidades mixtas se ponen de manifiesto al introducir el tensor $\epsilon^{\alpha}_{\beta}$, definido por la contracción de sus p-índices

$$\gamma^k_{\alpha} \gamma^{\beta}_k = \epsilon^{\beta}_{\alpha} \tag{2.7}$$

Es inmediato ver que se verifican las siguientes relaciones

$$\epsilon^{\beta}_{\alpha} A_{\beta} = 0, \quad \epsilon^{\beta}_{\alpha} A^{\alpha} = 0, \quad \epsilon^{\beta}_{\alpha} \epsilon^{\delta}_{\beta} = \epsilon^{\delta}_{\alpha} \quad (2.8)$$

Una expresión conveniente para $\epsilon^{\alpha}_{\beta}$ que se deduce directamente de su definición es

$$\epsilon^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - A_{\beta} A^{\alpha} \quad (2.9)$$

donde se muestra claramente su función como proyector: al aplicarlo sobre cualquier vector obtenemos otro vector ortogonal a A. Todo vector ordinario W^{α} puede ser entonces representado por un p-vector y escalar asociados

$$W^{\alpha} = \gamma^{\alpha}_{k} W^k + A^{\alpha} W \quad (2.10)$$

El primer término da la componente de W^{α} ortogonal a A, mientras que el segundo su componente paralela.

En el espacio de parámetros, los p-tensores se comportan como tensores 4-dimensionales frente a transformaciones arbitrarias de los x^k . En el formalismo de Kaluza, las x^k son los candidatos a representar las coordenadas del espacio-tiempo físico y los p-tensores las entidades geométricas asociadas con objetos físicos. Es claro el papel de base que desempeña el campo A en la construcción de la p-estructura inmersa en V_5 .

Es posible definir una métrica en el espacio de parámetros a través del p-tensor asociado con $\gamma_{\mu\nu}$

$$\epsilon_{kl} = \gamma^{\mu}_k \gamma^{\nu}_l \gamma_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

El elemento de línea 5-dimensional admite una representación en términos de la p-métrica y la proyección del vector diferencial de las coordenadas en la dirección del campo A. Invirtiendo la (2.11) se obtiene

$$\gamma^k_{\alpha} \gamma^l_{\beta} \epsilon_{kl} = \gamma_{\alpha\beta} - A_{\alpha} A_{\beta} \quad (2.12)$$

de modo que resulta

$$ds^2 = (\gamma^k_{\alpha} \gamma^l_{\beta} \epsilon_{kl} + A_{\alpha} A_{\beta}) d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} = d\tau^2 + d\theta^2 \quad (2.13)$$

donde

$$d\tau^2 = \epsilon_{kl} \gamma^k_{\alpha} \gamma^l_{\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \quad (2.14)$$

es el elemento de línea en el espacio de parámetros y

$$d\theta^2 = (A_{\alpha} d\xi^{\alpha})^2 \quad (2.15)$$

es la componente del diferencial de las coordenadas en la dirección del campo A.

Una operación importante, y que es peculiar del formalismo que estamos desarrollando, resulta de la contracción de la derivada ordinaria de un p-tensor con A^α . El resultado es otro p-tensor del mismo tipo, que llamaremos su A-derivada. Si la A-derivada de un p-tensor se anula, diremos que se trata de un campo tensorial *cilíndrico* con respecto al campo A, o abreviadamente, *A-cilíndrico*.

A través de estas magnitudes es que se introduce la hipótesis de cilíndricidad en la teoría de Kaluza. En particular, Kaluza exigirá que la métrica 5-dimensional sea A-cilíndrica.

Para aclarar el significado y las consecuencias geométricas de esta hipótesis, comenzaremos por calcular la A-derivada de la p-métrica ϵ_{kl}

$$\epsilon_{kl,\alpha} A^\alpha = \gamma^{\rho}_k \gamma^{\sigma}_l \gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma \epsilon_{rs,\alpha} A^\alpha \quad (2.16)$$

El término a la derecha del punto puede expresarse, luego de un poco de álgebra, en función sólo de derivadas covariantes del campo A

$$\gamma^r_\rho \gamma^s_\sigma \epsilon_{rs,\alpha} A^\alpha = A_{\rho;\sigma} + A_{\sigma;\rho} - (B_\rho A_\sigma + B_\sigma A_\rho) \quad (2.17)$$

donde ; indica derivada covariante y B_ρ es el vector

$$B_\rho \equiv A_{\rho\sigma} A^\sigma, \quad A_{\rho\sigma} \equiv A_{\rho,\sigma} - A_{\sigma,\rho} \quad (2.18)$$

De (2.17) se obtiene inmediatamente

$$\epsilon_{kl,\alpha} A^\alpha = \gamma^{\rho}_k \gamma^{\sigma}_l (A_{\rho;\sigma} + A_{\sigma;\rho}) \quad (2.19)$$

Obsérvese que para que la p-métrica sea A-cilíndrica es suficiente que se anule el segundo miembro de (2.17).

Consideremos ahora una curva arbitraria C que une dos puntos cualesquiera del espacio 5-dimensional. Si esta curva es desplazada en la dirección del campo A (de tal modo que cada uno de sus puntos se traslada la misma distancia a lo largo de una A-curva), es claro que la longitud de C medida en el espacio de parámetros será la misma si la p-métrica es A-cilíndrica. La longitud medida en la dirección del campo A (dada a través de (2.15)) tampoco se modifica si exigimos que el vector B_ρ (que da la derivada cilíndrica del propio campo A y por tanto su rapidez de cambio sobre una A-curva) sea nulo. En estas condiciones (cilindricidad de la p-métrica y también de la "A-métrica"), las ecuaciones (2.17) y la (2.19) contendrán la misma información y por tanto, se verificarán las condiciones de Killing para el campo A

$$A_{\rho;\sigma} + A_{\sigma;\rho} = 0 \quad (2.20)$$

En este caso, la longitud (5-dimensional) de C se mantendrá también invariante frente a un desplazamiento en la dirección de A . La hipótesis de cilindricidad de la p-métrica junto con la cilindricidad de la A-métrica implican que el campo A defina una

isometría sobre la métrica 5-dimensional. Decimos entonces que la métrica 5-dimensional es también A-cilíndrica (estas condiciones son naturalmente recíprocas, dada la descomposición (2.13) del elemento de línea 5-dimensional).

Una consecuencia importante que se desprende del carácter A-cilíndrico de la métrica 5-dimensional es que las A-curvas son geodésicas de V_5 . Analíticamente esto significa que las curvas definidas por

$$\frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \lambda A^\alpha \quad (2.21)$$

(donde $1/\lambda^2$ es la norma de A) deben satisfacer la ecuación

$$\frac{d^2 \xi^\nu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} \frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = 0 \quad (2.22)$$

Sustituyendo obtenemos

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} A^\nu + \lambda^2 A^\nu_{;\rho} A^\rho + \lambda^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\nu A^\alpha A^\beta = 0$$

o sea

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial \xi^\alpha} A^\alpha A^\nu + A^\alpha A^\nu_{;\alpha} = 0 \quad (2.23)$$

El primer término se anula debido a que las condiciones de Killing aseguran que la norma de A se mantiene constante a lo largo de las curvas que tienen a A^μ por tangente (y λ es una función de la norma de A). En efecto, multiplicando (2.20) por $A^\rho A^\sigma$ se obtiene

$$A^\rho A^\sigma A_{\rho;\sigma} + A^\sigma A^\rho A_{\sigma;\rho} \equiv A^\sigma (A^\rho A_\rho)_{;\sigma} \equiv A^\sigma (A^\rho A_\rho)_{,\sigma} = 0 \quad (2.24)$$

Además, como el vector B_ρ es nulo, podemos escribir

$$A^\sigma A_{\rho;\sigma} = A^\sigma A_{\sigma;\rho} = \frac{1}{2} (A^\sigma A_\sigma)_{,\rho} \quad (2.25)$$

Pero, por las condiciones de Killing $A^\sigma A_{\rho;\sigma} = -A^\sigma A_{\sigma;\rho}$, de manera que necesariamente

$$A^\sigma A_{\rho;\sigma} = 0 \quad (2.26)$$

por lo que el segundo término de (2.23) también es nulo. Obsérvese que la anulación de (2.25) nos dice que la norma de A es constante no sólo a lo largo de las A -curvas, sino también en todo el espacio. Esta propiedad caracteriza la estructura del espacio-tiempo en la teoría de Kaluza.

La p -estructura construida como base de una teoría unificada de las interacciones incluye toda una serie de entidades geométricas (como la p -derivada o derivada respecto a los parámetros, la derivada covariante de p -tensores - con su estructura afin correspondiente -, etc.), que tendrán luego una interpretación en término de objetos físicos.

Sin embargo, existe un tipo de sistemas de coordenadas donde el p -formalismo tiene una aplicación especialmente simple y cuya interpretación física es más inmediata. Estos sistemas se definen

identificando las primeras cuatro coordenadas con los parámetros x^k . La quinta coordenada se introduce imponiendo condiciones sobre el campo A.

Sea entonces una superficie 4-dimensional que corta cada una de las A-líneas una y sólo una vez. Sobre esta superficie introducimos cuatro coordenadas $\xi^\alpha \equiv x^k$ ($\alpha = 1, \dots, 4$) y suponemos que $\xi^5 = 0$. A través de cada punto de la superficie pasa una A-curva con una cierta orientación (que tomamos la misma para todas las curvas). Definiremos la quinta coordenada como la distancia tomada a lo largo de una A-cúrva, es decir

$$\xi^5 = \int_0^{\xi^5} (\gamma_{55})^{1/2} d\xi^5 \quad (2.27)$$

Esto exige tomar, en todo el espacio

$$\gamma_{55} = 1 \quad (2.27)$$

Como el valor absoluto de A es siempre uno, tenemos

$$\gamma_{55} A^5 A^5 = 1$$

o sea

$$A^5 = 1 \quad (2.28)$$

puesto que, debido a nuestra elección del sistema de coordenadas,

$A^1 = A^2 = A^3 = A^4 = 0$. Llamaremos al sistema de coordenadas definido a través de estas condiciones, *sistema especial de coordenadas*.

Las condiciones de Killing (2.20) se escriben ahora con $\rho = \sigma = 5$, obteniéndose al desarrollar

$$\gamma_{\mu\nu,5} = 0 \quad (2.29)$$

En el sistema especial de coordenadas, la hipótesis de cilíndricidad es equivalente a pedir que las componentes del tensor métrico sean independientes de la quinta dimensión.

Obsérvese que las componentes covariantes $A_\mu = \gamma_{\mu\nu} A^\nu$ no son constantes en este sistema y se identifican con las componentes diagonales $\gamma_{\mu 5}$ del tensor métrico. Tendremos entonces

$$A_k = \gamma_{k5}, \quad A_5 = \gamma_{55} = 1 \quad (2.30)$$

Es interesante preguntarse si pueden admitirse en el p-formalismo transformaciones que mantengan el sistema especial de coordenadas. Por su construcción, las coordenadas x^k fueron elegidas arbitrariamente sobre una superficie 4-dimensional (con $\zeta^5 = 0$). Es evidente entonces que las siguientes transformaciones son todavía permitidas:

$$\begin{aligned} x'^k &= f^k(x^j) \\ \zeta'^5 &= \zeta^5 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Estas son naturalmente las transformaciones entre parámetros consideradas en (2.2). Además, la superficie 4-dimensional puede ser elegida arbitrariamente: ésta puede ser reemplazada por otra superficie (sin cambiar las coordenadas x^k) desplazándola sobre una A-curva. La transformación apropiada es:

$$\begin{aligned} x'^5 &= x^5 + f^5(x^k) \\ x'^k &= x^k \end{aligned} \tag{2.32}$$

Llamaremos a (2.32) transformación de corte. El hecho que todos los sistemas de referencia ligados por estas transformaciones puedan ser llevados a la forma de un sistema especial se deduce directamente de la invariancia de (2.29): es inmediato verificar que si $\gamma_{\mu\nu,5}$ (una magnitud no covariante) se anula en un sistema, se anulará en todos aquellos sistemas de coordenadas conectados entre sí por las transformaciones (2.31) y (2.32). Esta condición, como vimos, es equivalente a la condición de Killing escrita en el sistema especial de coordenadas.

Es importante observar que la representación del p-formalismo en el sistema especial admite transformaciones arbitrarias entre las x^k ; de otro modo no sería posible considerarlas coordenadas físicas. Necesitamos identificar ahora aquellos objetos geométricos que representarán objetos físicos en esta formulación.

En nuestro sistema especial de coordenadas la estructura del espacio es descrita por 10 funciones γ_{kl} y 4 funciones γ_{k5} ($= A_k$), que no dependen de ζ^5 . Los γ_{kl} se comportan como un tensor

4-dimensional y los γ_{k5} como un cuadvivector con respecto a las transformaciones 4-dimensionales (2.31). Con respecto a las transformaciones de corte tenemos

$$\gamma'_{k5} = \gamma_{k5} - \frac{\partial f^5}{\partial x^k} \quad (2.33)$$

(naturalmente γ_{55} es un escalar bajo (2.31) y (2.32)), y

$$\gamma'_{kl} = \gamma_{kl} - \gamma_{k5} \frac{\partial f^5}{\partial x^l} - \gamma_{l5} \frac{\partial f^5}{\partial x^k} + \frac{\partial f^5}{\partial x^k} \frac{\partial f^5}{\partial x^l} \quad (2.34)$$

El comportamiento de los γ_{kl} frente a traslaciones de la quinta dimensión indica que éstos no pueden considerarse como una entidad intrínseca del espacio-tiempo "efectivo" tetradimensional, representado en este esquema por las superficies $\xi^5 = \text{constante}$. Esto era esperable, ya que los γ_{kl} no son las componentes de un p-tensor. De acuerdo con (2.11), la p-métrica sobre esta superficie esta dada por

$$\epsilon_{kl} = \gamma_{kl} - \gamma_{k5} \gamma_{l5} \quad (2.35)$$

ya que, en este caso, los coeficientes mixtos toman la forma

$$\gamma^k_{\alpha} = \begin{cases} \delta^k_{\alpha} & \text{si } \alpha = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{si } \alpha = 5 \end{cases}, \quad \gamma^{\alpha}_k = \begin{cases} \delta^{\alpha}_k & \text{si } \alpha = 1,2,3,4 \\ -A_k & \text{si } \alpha = 5 \end{cases} \quad (2.36)$$

donde la segunda igualdad se sigue directamente de (2.8) y (2.9).

Dada su condición de p-métrica, ϵ_{kl} se comportará como un tensor 4-dimensional frente a (2.31) y además será invariante frente a (2.32). Es por esto conveniente elegir los campos ϵ_{kl} y A_k como variables para describir la estructura del espacio-tiempo en el sistema especial de coordenadas, tomando a los ϵ_{kl} como las componentes del tensor métrico físico. Por otro lado, vemos que traslaciones puras en la quinta dimensión inducen transformaciones de gauge sobre campos que son cuadvectores en el espacio-tiempo efectivo. Este es el comportamiento típico del potencial electromagnético, definido salvo términos aditivos que son el gradiente de una función escalar. En este contexto, la identificación de las componentes γ_{k5} con el potencial electromagnético parece natural, mostrándose que la simetría interna de los campos de gauge se originan en simetrías espaciotemporales que involucran transformaciones de la quinta dimensión (es decir, de aquella porción del espacio-tiempo que no vemos).

Como dijimos en la Introducción, ésta es la idea central sobre la que descansa el principio de unificación en la teoría de Kaluza. Parecería que en esta idea juegan un papel fundamental dos ingredientes independientes: la métrica 5-dimensional y el campo vectorial A , sobre el que se imponen restricciones en cierto grado arbitrarias. Podría cuestionarse entonces si la descripción unificada de los campos gravitatorio y electromagnético dada por Kaluza representa un avance real con respecto a la estructura original de un espacio tetradimensional más un cuadvector. En este sentido debe tenerse presente que la introducción del campo A

es una consecuencia necesaria una vez que se asume una estructura espacio-temporal 5-dimensional (única hipótesis arbitraria en la teoría de Kaluza), exigida por el carácter indudablemente 4-dimensional del espacio-tiempo físico. La representación del campo electromagnético por medio de un potencial vector lograda de esta manera es ciertamente un resultado no trivial.

Las ecuaciones del campo pueden obtenerse con la ayuda de un principio variacional. Es natural tomar como la acción del campo en el vacío la expresión

$$S = \int dx^5 (-\gamma)^{1/2} R_5 \quad (2.37)$$

donde R_5 es el escalar de curvatura 5-dimensional y $\gamma \equiv \det(\gamma_{\mu\nu})$. En el sistema especial de coordenadas, (2.37) admite una descomposición directa en términos del escalar de curvatura 4-dimensional (computado a través de la métrica g_{kl}) y el tensor de campo electromagnético $F_{kl} \equiv A_{k;l} - A_{l;k}$. De esta forma, las ecuaciones del campo derivadas de la teoría de Kaluza reproducen (y, en principio, no contendrían más información que) las ecuaciones de Einstein y Maxwell en cuatro dimensiones.

Dejaremos para más adelante el análisis detallado de la reducción dimensional de la acción en la teoría de Kaluza. Digamos para terminar que si bien la reproducción de las teorías de Einstein y Maxwell a nivel del espacio efectivo es un hecho indudablemente importante, también es cierto que el no obtener nuevos aspectos físicos para la gravitación y el electromagnetismo

como consecuencia de introducir una estructura de campos unitaria constituye un paso limitante para su aplicación y desarrollo. Veremos sin embargo que son posibles generalizaciones del planteo original de Kaluza (como la hipótesis de Klein sobre la periodicidad de la quinta dimensión o la eliminación de la restricción impuesta al coeficiente γ_{55} de la métrica 5-dimensional) que incluyen nuevos aspectos físicos, capaces en principio de darle a la teoría de Kaluza trascendencia respecto a las aceptadas teorías 4-dimensionales. Parte de nuestro trabajo consiste precisamente en mostrar que la teoría de Kaluza no sólo reproduce los fenómenos electromagnéticos convencionales, sino que incluye otros fenómenos "no-convencionales", ligados con la existencia de la quinta dimensión.

2.2 - LA HIPOTESIS DE O. KLEIN (1926)

Las ideas propuestas por Kaluza tuvieron diferentes repercusiones en el "ambiente" de la física de la época. Estas ideas entusiasmaron a muchos físicos, entusiasmo que se orientó principalmente en la búsqueda de conexiones entre las dos grandes teorías en desarrollo en ese tiempo: Relatividad y Mecánica Cuántica⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾.

Estos trabajos se caracterizaron además por la diferente posición asumida respecto a la naturaleza de la quinta dimensión. Algunos (siguiendo a Kaluza) tomaban la dimensión extra simplemente como un vehículo matemático con el que se podían desarrollar modelos de unificación de las interacciones (como en

las teorías proyectivas de Pauli y Velben⁽⁷⁾⁻⁽⁸⁾). Sin embargo, otros autores comenzaron a interesarse por las consecuencias que resultaban de asignar algún significado físico a la nueva dimensión, consideraciones que dieron cuerpo a la idea de una nueva dimensión existente pero inaccesible en el ámbito de nuestra experiencia usual.

Sin duda, la contribución más importante a este último programa fue la sugerencia de Klein acerca de las propiedades topológicas de la quinta dimensión. La idea de Klein⁽⁹⁾ surge de la relación que puede establecerse entre la mecánica ondulatoria y la relatividad en 5 dimensiones. Mediante un argumento muy sencillo puede derivarse un vínculo entre la carga y la quinta componente del momento lineal de una partícula material. La cuantización de la carga muestra que es posible introducir una nueva condición topológica sobre la quinta dimensión; en particular, que la coordenada x^5 está restringida a un intervalo de variación acotado. Aparece entonces una longitud característica asociada con esta coordenada y el hiperespacio definido por la dimensión extra resulta compactificado.

Para derivar el vínculo entre carga y momento, comencemos escribiendo el elemento de línea 5-dimensional en la forma

$$ds^2 = (\epsilon_{kl} + \beta^2 A_k A_l) dx^k dx^l + 2\beta A_k dx^k dx^5 + (dx^5)^2 \quad (2.38)$$

que resulta simplemente de expresar (2.13) en el sistema especial de coordenadas (coeficientes mixtos dados en (2.36)), y donde

hemos puesto

$$\gamma_{k5} \equiv \beta A_k \quad (2.39)$$

siendo ahora A_k el potencial electromagnético y β una constante dimensional. El lagrangiano 5-dimensional para una partícula de masa m y carga q es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 \quad (2.40)$$

donde $d\tau$ es el diferencial de tiempo propio. De (2.38) y (2.40) se obtiene la siguiente expresión para los momentos conjugados p_k

$$p_k = m \epsilon_{kl} \frac{dx^l}{d\tau} + \beta A_k p_5 \quad (2.41)$$

que se corresponde con la definición usual si identificamos

$$p_5 \equiv q/\beta = Ne/\beta \quad (2.42)$$

donde e es la carga electrónica y N un entero (es claro que esta última relación insinúa la unificación de la energía, el momento y la carga en un único "5-vector", idea ya sugerida por Kaluza). La cuantización de la carga implica que la quinta componente del momento para toda partícula cargada esté también cuantizado. Introduciendo ahora la relación de de Broglie $p = 2\pi/\lambda$, se encuentra que la longitud de onda en dirección de x^5 es siempre un múltiplo entero de $2\pi\beta/e$.

La generalidad de este resultado sugiere la idea de que el espacio-tiempo puede considerarse periódico en la quinta dimensión: el espacio-tiempo 5-dimensional debe verse como el producto directo entre el espacio-tiempo 4-dimensional y un círculo (S^1). Esta nueva topología permite introducir las condiciones de borde apropiadas para cuantizar la carga a través de p_5 : la condición de interferencia constructiva para las ondas de de Broglie en la nueva dirección exige que $N'\lambda_5 = 2\pi R_5$, siendo R_5 el radio de S^1 . Haciendo $N' = N$ se obtiene finalmente

$$R_5 = \beta/e, \quad 0 \leq x^5 < 2\pi R_5 \quad (2.43)$$

Más adelante veremos que la constante β es proporcional a $[G]^{1/2}$, siendo G la constante gravitatoria. La longitud característica asociada con la quinta dimensión resulta entonces escaleada por la longitud de Planck, presentando un "tamaño" no-observable en la escala de energías disponibles por nosotros ($R_5 \approx 10^{-31}$ cm).

La hipótesis de periodicidad del espacio en la quinta dimensión introduce algunas variantes en la estructura original de Kaluza. Analizaremos estas variantes en el marco de las contribuciones hechas por Einstein y Bergmann.

2.3 - LAS CONTRIBUCIONES DE EINSTEIN Y BERGMANN (1938)

El desarrollo que Einstein y Bergmann^[10] hicieron de la teoría de Kaluza estuvo motivado en principio en consideraciones físicas. Estos autores intentaron reconciliar la indeterminación subyacente en la Mecánica Cuántica (expresada a través del principio de Heisenberg) con el hecho que, en nuestra experiencia habitual, tendríamos acceso sólo a una parte del espacio-tiempo (el universo efectivo tetradimensional). Puesto que la descripción de un universo de 5 dimensiones dada a través de un formalismo 4-dimensional es necesariamente incompleta, puede esperarse que el indeterminismo mostrado por nuestras leyes 4-dimensionales sea consecuencia de la imposibilidad de "detectar" variaciones de las magnitudes físicas con la nueva dimensión.

Einstein y Bergmann muestran que es posible asignar significado físico a la quinta coordenada sin contradecir el carácter tetradimensional del espacio-tiempo. Para esto basan la estructura del espacio en las siguientes propiedades:

1. Suponen un espacio 5-dimensional con la métrica (2.1).
2. El espacio es cerrado con respecto a una dimensión espacial. Este espacio cerrado se representará por un espacio que es abierto y periódico con respecto a esa dimensión: un punto P del espacio físico se corresponderá por tanto con un número infinito de puntos P, P', P'', etc., todos equivalentes.
3. A través de todo punto del espacio pasa una línea geodésica cerrada en si misma y libre de singularidades.

Debemos recordar que, en el marco de la teoría de Kaluza, es esencial el hecho que el espacio sea cilíndrico no sólo con respecto a un campo vectorial A , sino que este campo sea la unidad; es decir, que sea constante y de norma unidad en todo el espacio. Por esta razón, las A -curvas de Kaluza son geodésicas y, en un sistema especial de coordenadas, γ_{55} es constante e igual a uno. En la extensión propuesta por Einstein y Bergmann, la condición de cilíndricidad es reemplazada por la hipótesis de un espacio cerrado (el espacio-tiempo 5-dimensional es homeomorfo a un "tubo", producto directo de V_4 con S^1). Además, se supone que aquellas geodésicas que conectan un punto con su equivalente al dar una vuelta alrededor del tubo se intersectan con ángulo cero (curvas cerradas continuas). Veremos que esta suposición toma el lugar de la condición de Kaluza de que el espacio sea cilíndrico con respecto a un campo vectorial unidad.

Comencemos mostrando que la "circunferencia" de un espacio cerrado, en el que todas las geodésicas que se cortan sobre sí mismas son líneas cerradas sin discontinuidades de dirección, es una característica constante de ese espacio. Sea una geodésica cerrada que pasa por el punto P . Su longitud es

$$l = \int_P^P \left[\gamma_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\rho} \frac{d\xi^\nu}{d\rho} \right]^{1/2} d\rho \quad (2.44)$$

siendo ρ una función arbitraria de las coordenadas. Si variamos las coordenadas de todo punto de la geodésica en las cantidades infinitesimales $\delta\xi^\rho$, obtendremos una nueva curva de longitud l'

(los "extremos" de la curva cerrada -punto P- no se mantienen fijos en esta variación). La diferencia en la longitud de estas dos curvas será

$$\delta l = \int_P^P \left[\gamma_{\mu\nu} \dot{\xi}^{\mu'} \dot{\xi}^{\nu'} \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu,0} \dot{\xi}^{\mu'} \dot{\xi}^{\nu'} \delta \xi^0 + \gamma_{\mu\nu} \dot{\xi}^{\mu'} \delta \dot{\xi}^{\nu'} \right] d\tau$$

o sea

$$\delta l = \int_P^P \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu,0} \dot{\xi}^{\mu} \dot{\xi}^{\nu} \delta \xi^0 + \gamma_{\mu\nu} \dot{\xi}^{\mu} \delta \dot{\xi}^{\nu} \right\} d\tau \quad (2.45)$$

donde la coma indica diferenciación respecto de τ y el punto respecto de τ , el parámetro de arco medido desde P. Integrando por partes obtenemos, luego de un poco de álgebra

$$\delta l = - \int_P^P \gamma_{\mu\nu} \left\{ \ddot{\xi}^{\mu} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \dot{\xi}^{\rho} \dot{\xi}^{\sigma} \right\} \delta \xi^{\nu} d\tau + \gamma_{\mu\nu} \dot{\xi}^{\mu} \delta \xi^{\nu} \Big|_P^P \quad (2.46)$$

El contenido del paréntesis se anula ya que la curva inicial es una geodésica. La variación de l depende pues sólo del producto escalar de los vectores $\dot{\xi}^{\mu}$ y $\delta \xi^{\nu}$, evaluado en el doble punto extremo P. Pero este escalar es nulo, ya que los valores de $\delta \xi^{\nu}$ y $\dot{\xi}^{\mu}$ dan contribuciones idénticas en "ambos" extremos P. La longitud de la curva geodésica cerrada que pasa por un punto arbitrario P no cambia pues al efectuar variaciones arbitrarias de las coordenadas. Si efectuamos sucesivas variaciones de una geodésica cerrada a otra, de manera que todas las curvas intermedias sean también geodésicas, l se mantendrá constante en este proceso. El

postulado 3 de la teoría de Einstein y Bergmann muestra entonces que la circunferencia del espacio cerrado es una constante.

Los vectores tangentes a las geodésicas cerradas $(d\xi^\alpha/d\tau)$ constituyen un campo de vectores unitarios, que desempeña en esta formulación el papel del campo A en la teoría de Kaluza. Por su característica de vectores tangentes a geodésicas se verifica naturalmente

$$A^\alpha{}_{;\rho} A^\rho = 0$$

lo que significa, de acuerdo con (2.20) y (2.26), que la A-métrica $d\theta = A_\alpha d\xi^\alpha$ es A-cilíndrica.

La hipótesis de periodicidad del espacio introduce algunas modificaciones en el p-formalismo desarrollado en la sección 2.1. En este caso puede definirse también un sistema especial de coordenadas, pero ahora los coeficientes γ_{kl} del tensor métrico 5-dimensional no son necesariamente independientes de la quinta dimensión. Este sistema especial se define, como sabemos, a través de las superficies 4-dimensionales ($x^5 = \text{constante}$) que cortan las A-curvas una y sólo una vez. La quinta coordenada verificará en este caso

$$x^5 = \mathcal{B}^{-1} \int_{P_0}^P d\sigma \quad (2.47)$$

donde \mathcal{B} se define como

$$\mathcal{B} = \int_P^{P'} d\sigma \quad (2.48)$$

siendo P, P' dos puntos correspondientes y consecutivos que están en la A-curva y P₀ el punto de intersección de esa curva con la superficie $x^5 = 0$. Naturalmente, $\gamma_{55} = \mathcal{B}^2$. También vemos que \mathcal{B} puede depender sólo de las coordenadas x^k (o sea, por construcción $\gamma_{55,5} = 0$). Las curvas $x^k = \text{constante}$ son geodésicas. Como para éstas se tiene

$$\frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{dx^2}{d\sigma} = \frac{dx^3}{d\sigma} = \frac{dx^4}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dx^5}{d\sigma} = \frac{1}{\mathcal{B}}, \quad \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dx^5}{d\sigma} \right) = 0$$

resulta la condición $\Gamma_{55}^\alpha = 0$, o sea

$$2 \gamma_{\alpha 5,5} - \gamma_{55,\alpha} = 0 \quad (2.49)$$

Integrando (2.49) sobre un periodo a lo largo de la A-curva se obtiene (el primer sumando da contribución nula debido a la periodicidad del espacio)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int_P^{P''} \gamma_{55} dx^5 = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \mathcal{B} \int_P^{P''} d\sigma \right\} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\mathcal{B}^2 \right) = 0 \quad (2.50)$$

De (2.50) se desprende que \mathcal{B} (y por tanto γ_{55}) son constantes en todo el espacio. Tomaremos naturalmente también aquí $\gamma_{55} = 1$. De (2.49) se sigue entonces

$$\gamma_{k5,5} = 0 \quad (2.51)$$

En la teoría generalizada de Einstein y Bergmann, los coeficientes γ_{k5} son, como para Kaluza, independientes de la quinta dimensión. Sin embargo, los γ_{kl} serán en general funciones periódicas de x^5 . Esta es la diferencia fundamental entre ambas formulaciones, y deriva del diferente significado que tiene la aplicación de la condición de cilindridad (ecuaciones (2.29) y (2.51)) en el sistema especial de coordenadas.

Einstein y Bergmann desarrollan el análisis tensorial en el sistema especial de coordenadas. Introducen la derivada covariante $(\partial/\partial x^\alpha - A_{\alpha}^{\beta} \partial/\partial x^\beta)$ con respecto a las transformaciones de corte (2.32) y la utilizan para definir magnitudes tensoriales con respecto a las transformaciones de coordenadas 4-dimensionales (2.31) e invariantes respecto a las de corte. Calculan entonces el tensor de curvatura apropiado para su espacio y lo utilizan para derivar las ecuaciones del campo por un principio variacional.

2.4 - LA TEORIA DE JORDAN Y THIRY (1948)

Diez años más tarde del trabajo presentado por Einstein y Bergmann, P. Jordan^[11] e independientemente Y. Thiry^[12] propusieron una nueva modificación en el planteo original de Kaluza. Esta modificación se basó en la eliminación de la condición de que el campo vectorial subyacente a la estructura geométrica del espacio de Kaluza y Einstein-Bergmann sea constante^[13].

Debe distinguirse claramente el significado de las dos condiciones que hasta ahora han jugado un papel determinante en la estructura geométrica del espacio-tiempo 5-dimensional: la hipótesis de cilíndricidad y la hipótesis de que las trayectorias del grupo de isometría sean geodésicas del espacio. En realidad, son hipótesis diferentes y tienen consecuencias diferentes en la determinación de las propiedades del espacio-tiempo.

En la sección 2.1 mostramos que la propiedad A-cilíndrica de la métrica 5-dimensional se expresa en el sistema especial de coordenadas por la condición que los coeficientes $\gamma_{\mu\nu}$ son independientes de la quinta dimensión. Jordan y Thiry toman a ésta como la condición definitoria del carácter cilíndrico del tensor métrico. Naturalmente, esta propiedad es invariante frente a transformaciones generales en V_4 y traslaciones en la quinta coordenada (condición que define al sistema especial de coordenadas). Sin embargo, esta hipótesis por sí sola no es suficiente para asegurar que las trayectorias del grupo de isometría (desplazamientos en la quinta dimensión) sean geodésicas del espacio. Para esto necesitamos la condición (más fuerte) que el campo escalar γ_{55} sea constante en todo el espacio.

En el lenguaje de Kaluza, la suposición que el campo A no sea constante en todo el espacio conduce a tomar como A-cilíndrica la p-métrica, pero no la A-métrica. En otras palabras, liberamos la condición que el vector B_ρ sea nulo (ver ecuaciones (2.17) a (2.20)). En este caso, todavía es posible definir el sistema especial de coordenadas (donde los $\gamma_{\mu\nu}$ son independientes de x^5),

pero las A-curvas (2.21) no son ya geodésicas de V_5 (en particular, no vale ya que $A^\sigma A_{\rho;\sigma} = 0$ - ec. (2.26) -).

Thiry⁽¹²⁾ justifica esta posición mostrando que la hipótesis de cilindridad (tomada como condición sobre los $\gamma_{\mu\nu}$) resulta sustentada por consideraciones físicas que determinan un tipo especial de problema de cálculo de variaciones, mientras que la condición $\gamma_{55} = \text{constante}$, si bien simplifica el planteo de las ecuaciones del campo, no puede ser introducida a priori y debe aceptarse o descartarse sólo por las consecuencias físicas que ésta pueda tener. En particular, Jordan y Thiry relacionan el campo escalar con la constante de la gravitación, de modo que la condición γ_{55} variable se traduce en una "constante" de acoplamiento para la interacción gravitatoria que es función de las coordenadas. En lo que sigue, analizaremos el planteo hecho por Thiry de este problema.

En principio, Thiry se propuso encontrar una representación paramétrica para el conjunto de las geodésicas de una partícula cargada. En Relatividad General, las trayectorias de una partícula de masa m y carga e se obtienen como las curvas que extreman la integral

$$\Psi = \int \left[(\epsilon_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l)^{1/2} + \frac{e}{m} A_k \dot{x}^k \right] du \quad (2.52)$$

donde A_k es el potencial vector y el punto indica derivación respecto a un parámetro de arco u adecuado. Estas trayectorias

aparecen pues como las geodésicas de un espacio de Finsler^[14] asociado al espacio-tiempo usual, donde la métrica está dada por la expresión

$$d\tau' = (\xi_{kl} dx^k dx^l)^{1/2} + \frac{e}{m} A_k dx^k \quad (2.53)$$

Como la relación carga/masa varía de una partícula a otra, uno de estos espacios de Finsler estará asociado con cada tipo de partícula que tengamos. Las trayectorias de todas las partículas cargadas determinan una familia de geodésicas G_χ , estando cada elemento de la familia caracterizado por un cierto valor del parámetro $\chi = e/m$.

Si una variedad diferenciable P admite un grupo conexo (G) de isometrías globales, es posible utilizar las trayectorias del grupo de isometría para definir una variedad M de dimensión menor (la variedad cociente de P por la relación de equivalencia definida por el grupo) de forma tal que se establezca un homomorfismo entre P y el producto topológico $M \otimes G$. La isometría induce una estructura de fibrado $P(M,G)$ en P , donde M es la variedad base y G da la estructura de grupo (discutiremos más en detalle las propiedades de los fibrados en la sección 3.2).

El espacio-tiempo de Kaluza muestra una estructura de este tipo: el campo vectorial A introducido en 2.1 define una isometría en V_g y, por tanto, el espacio-tiempo físico puede pensarse como el espacio cociente entre V_g y las trayectorias del grupo (que en este caso, es un grupo conexo a un parámetro). En este contexto,

Thiry se propone resolver el problema siguiente: ¿es posible dotar a la variedad cociente V_4 de una estructura finsleriana por medio de funciones L , de forma que las geodésicas de V_5 (determinadas por las curvas que extreman la integral $\int \mathcal{L} d\tau$) correspondan por proyección sobre V_4 a las curvas extremales de $\int L du$?

Para el caso de las geodésicas asociadas con partículas cargadas se encuentra la importante propiedad que el conjunto G_χ derivado de la métrica de Finsler (2.53) puede ser representado paramétricamente por las geodésicas de un espacio de Riemann 5-dimensional. Este resultado muestra el punto de contacto entre el enfoque de Thiry y la estructura unitaria de Kaluza-Klein.

Consideremos la función \mathcal{L} definida por la relación

$$\mathcal{L}^2 = \gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.54)$$

donde $\gamma_{\mu\nu}$ representa una métrica riemanniana. En el sistema especial de coordenadas (definido a través del grupo de isometría que opera en V_5), los coeficientes del tensor métrico son independientes de x^5 . Supondremos además que γ_{55} no se anula en ningún punto del dominio considerado.

Puesto que la coordenada x^5 es cíclica ($\partial_5 \mathcal{L} = 0$), el sistema admite la integral primera $p_5 \equiv h = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^5$. De este modo, resulta

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^5} \mathcal{L}^2 = \gamma_{55} \dot{x}^5 + \gamma_{k5} \dot{x}^k = \mathcal{L} h \quad (2.55)$$

La función $L \equiv \mathcal{L} - h \dot{x}^5$ no dependerá entonces de \dot{x}^5 (ni, naturalmente, de x^5). Para determinarla, expresemos \mathcal{L} en función de las variables (x^k, \dot{x}^k, h) . En primer lugar, podemos descomponer a \mathcal{L} en un suma de cuadrados a partir de la variable directriz \dot{x}^5

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\gamma_{55}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(\mathcal{L}^2)}{\partial \dot{x}^5} \right]^2 + \bar{\mathcal{L}}^2 \quad (2.56)$$

con

$$\bar{\mathcal{L}}^2 = \epsilon_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l, \quad \epsilon_{kl} = \gamma_{kl} - \gamma_{k5} \gamma_{l5} / \gamma_{55} \quad (2.57)$$

Si $\gamma_{55} \neq 0$ y siendo la forma \mathcal{L}^2 no degenerada, resulta $\bar{\mathcal{L}}^2$ no degenerada y $\epsilon \equiv \det(\epsilon_{kl}) \neq 0$. Recíprocamente, si $\gamma_{55} \neq 0$ y $\epsilon \neq 0$, resulta \mathcal{L}^2 no degenerada. De (2.55) y (2.56) se deduce entonces

$$\mathcal{L}^2 = \frac{h^2 \mathcal{L}^2}{\gamma_{55}} + \bar{\mathcal{L}}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{\mathcal{L}}^2 = \mathcal{L}^2 \left(1 - \frac{h^2}{\gamma_{55}}\right) \quad (2.58)$$

La última ecuación en (2.58) da la expresión de \mathcal{L} en función de las variables deseadas. A partir de (2.55) podemos expresar a \dot{x}^5 en función de las coordenadas (x^k, \dot{x}^k) y de \mathcal{L}

$$\dot{x}^5 = \frac{h}{\gamma_{55}} \mathcal{L} - \frac{\gamma_{5k} \dot{x}^k}{\gamma_{55}} \quad (2.59)$$

Resulta entonces para L la expresión

$$L = \mathcal{L} \left(1 - \frac{h^2}{\gamma_{55}}\right) + h \frac{\gamma_{k5}}{\gamma_{55}} \dot{x}^k$$

o, utilizando (2.58) y (2.57)

$$L = \left[1 - \frac{h^2}{\gamma_{55}} \right]^{1/2} (\epsilon_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l)^{1/2} + h \frac{\gamma_{k5}}{\gamma_{55}} \dot{x}^k \quad (2.60)$$

Recíprocamente, a toda función L del tipo (2.60) (con $\gamma_{55} \neq 0$ y $\epsilon \neq 0$) le corresponderá una métrica riemanniana no degenerada (2.54).

Es conveniente evaluar la variación de la coordenada x^5 a lo largo de la trayectoria de una partícula cargada en V_4 . En primer lugar, vemos que (2.59) puede expresarse en la forma

$$\dot{x}^5 = \frac{h}{\gamma_{55}} \left[1 - \frac{h^2}{\gamma_{55}} \right]^{-1/2} (\epsilon_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l)^{1/2} - \beta A_k \dot{x}^k$$

o sea

$$dx^5 = \frac{\chi}{\beta \gamma_{55}} d\sigma - \beta A_k dx^k \quad (2.61)$$

donde $d\sigma^2$ es el elemento de línea asociado a la trayectoria de una partícula libre en V_4 y hemos usado (2.63). Resulta entonces

$$x^5 = \frac{1}{\beta} \int_{u_0}^u \left(\frac{\chi}{\gamma_{55}} \right) d\sigma - \beta \int_{u_0}^u A_k dx^k + C \quad (2.62)$$

La elección de la constante C de una vez para siempre introduce una correspondencia biunívoca entre las trayectorias de una

partícula cargada en el espacio-tiempo efectivo y las geodésicas de un espacio riemanniano 5-dimensional. En efecto, dada la trayectoria de la partícula en V_4 , es posible evaluar $x^5(u)$ por medio de (2.62). Las funciones $x^5(u)$ y $x^k(u)$ correspondientes a este movimiento proveen una representación paramétrica de una geodésica en V_5 . Recíprocamente, las trayectorias de partículas cargadas se obtienen proyectando en V_4 las geodésicas de esa variedad riemanniana, para las cuales ds^2 es dado por (2.54) y se satisface la condición (2.61).

Para determinar el espacio de Riemman asociado al espacio de Finsler de una partícula cargada es suficiente identificar las expresiones (2.60) y (2.53). La solución más inmediata al problema consiste en tomar γ_{55} constante y realizar la identificación

$$\frac{e}{m} = \frac{\beta h}{[1 - h^2/\gamma_{55}]^{1/2}}, \quad A_k = \frac{\gamma_{k5}}{\beta \gamma_{55}} \quad (2.63)$$

siendo β una constante que nos permitirá poner $\gamma_{55} = 1$. Con estas hipótesis se reproduce la estructura geométrica de Kaluza y Einstein-Bergmann. Sin embargo, el requisito de tomar γ_{55} constante no es fundamental en este punto.

En la aproximación de Thiry, la diferente naturaleza de las hipótesis de cilindridad ($\gamma_{\mu\nu}$ independiente de x^5) y $\gamma_{55} =$ constante involucradas en la determinación de las propiedades del espacio-tiempo de Kaluza resultan pues bien diferenciadas. La primera es sugerida por la naturaleza misma del problema

variacional considerado y responde directamente a la exigencia de obtener una estructura geométrica independiente del factor $\chi = e/m$. La segunda aparece como el medio más sencillo de aplicar esa estructura al caso unitario de Kaluza-Klein.

El planteo de Jordan y Thiry muestra en definitiva que es posible mantener al campo escalar γ_{55} como un potencial de la teoría sin atentar contra el principio que confiere al espacio 5-dimensional de Kaluza su propiedad fundamental (i.e., que este espacio contenga una estructura tetradimensional que no "vea" a la quinta dimensión). La hipótesis de que este campo sea constante en todo el espacio sólo puede introducirse *a posteriori*, de acuerdo con las predicciones observacionales que de él se deriven. Además, como lo señala Thiry, el hecho que la teoría contenga 15 potenciales (y no 14 como en las formulaciones anteriores de Kaluza y Einstein-Bergmann) resulta más satisfactorio de acuerdo con el principio de unificación que se pretende establecer: las ecuaciones de Einstein en V_5 (implicadas por una teoría unitaria basada en una variedad 5-dimensional) contienen 15 (y no 14) ecuaciones del campo.

La introducción del campo escalar plantea como era de esperar dificultades adicionales. Una inmediata concierne precisamente a las trayectorias relativistas de partículas cargadas. Es claro que dichas curvas no se caracterizarán ya por poseer un valor único de la relación carga-masa (ver ecuación (2.63)). Estas curvas se obtienen ahora como las trayectorias que extreman el elemento de línea 5-dimensional ds^2 y que satisfacen (2.55), con h una

constante a determinar. La trayectoria espacio-temporal de una partícula cargada debe definirse en este caso como la proyección sobre V_4 de una geodésica de esa clase.

Naturalmente, para poder apreciar las consecuencias físicas de esta hipótesis debemos remitirnos a las ecuaciones del campo de la teoría. Sin embargo, nos parece conveniente realizar aquí una breve discusión sobre el comportamiento "anómalo" de una partícula cargada, tal como se deriva de la teoría de Jordan y Thiry.

El planteo de las ecuaciones del campo muestra inmediatamente la existencia de un vínculo entre la constante de la gravitación G y el campo escalar γ_{55} . En particular, es posible demostrar que vale la relación

$$G = \frac{\beta^2}{2} (\gamma_{55})^{-1/2} = G_0 (\gamma_{55})^{-1/2} \quad (2.64)$$

siendo G_0 el valor de dicha constante correspondiente a la solución $\gamma_{55} = 1$ (constante de la gravitación de Einstein). Obsérvese que el valor de β deducido de la ecuación anterior

$$\beta = [2G_0]^{1/2}$$

determina en (2.61) que la relación carga-masa adquiere su valor clásico cuando $\gamma_{55} = 1$. La constante h puede escribirse entonces en término de los valores clásicos de e/m y G , resultando

$$h = \left[1 + 2G_0 \frac{m_0^2}{e_0^2} \right]^{-1/2} \quad (2.65)$$

Es curioso notar que h depende únicamente de la relación entre las interacciones electromagnética y gravitatoria. Como $(e^2/2Gm^2)_0 \approx 10^{40}$, resulta esta constante prácticamente uno para las diferentes trayectorias de una partícula cargada.

Podemos estimar la variación relativa del cociente e/m y de G a lo largo de una de estas trayectorias tomando la derivada logarítmica en (2.61). Resulta entonces

$$\frac{\delta\chi}{\chi} = - \left(1 - \frac{h^2}{\phi} \right)^{-1} \left(\frac{h}{2} \right) \frac{\delta\phi}{\phi^2} \quad (2.66)$$

donde $\chi \equiv e/m$ y $\phi \equiv \gamma_{55}$. En condiciones normales (esto es, cuando la relación carga masa no se aparta "demasiado" de su valor clásico), el factor $(1 - h^2/\phi)^{-1}$ es un número muy grande (h^2/ϕ es prácticamente la unidad cuando $\phi \approx 1$). La variación relativa de la relación carga-masa de la partícula resulta entonces notablemente afectada por una variación del campo escalar ϕ . (2.66) puede expresarse en la forma

$$\frac{\delta\chi}{\chi} = - \frac{1}{4G_0} \frac{\delta\phi}{\phi^2} \quad (2.67)$$

y como

$$\frac{\delta G}{G} = - \frac{1}{2} \frac{\delta\phi}{\phi} \quad (2.68)$$

resulta

$$\frac{\delta\chi}{\chi^3} = \frac{1}{2G_0} \phi^{-1} \frac{\delta G}{G} \quad (2.69)$$

De acuerdo con (2.61) y (2.65) resulta además

$$\phi^{-1} = 1 + 2G_0 \left[\frac{\chi^2 - \chi_0^2}{(\chi\chi_0)^2} \right] \quad (2.70)$$

de modo que se obtiene la siguiente expresión para las variaciones relativas en la constante gravitatoria y la relación carga-masa de la partícula

$$\left[1 + 2G_0 (\chi^2 - \chi_0^2) / (\chi\chi_0)^2 \right]^{-1} \frac{\delta\chi}{\chi^3} = \frac{1}{2G_0} \frac{\delta G}{G} \quad (2.71)$$

Suponiendo que χ y G no se apartan significativamente de sus valores clásicos, podremos expresar (2.71) aproximadamente en la forma

$$\delta\chi \cong \frac{1}{2\chi_0} \left[\chi_0^2 / G_0 \right]^2 \delta G \quad (2.72)$$

Este resultado tiene varias consecuencias interesantes. En primer lugar, las variaciones relativas de χ y G son del mismo signo. Por lo tanto, a un crecimiento del factor de interacción gravitatoria le corresponderá una disminución de la masa (en

repose) de la partícula respecto a su carga. Además, nuevamente aparece como factor determinante del vínculo entre ambas variaciones la constante adimensional $(e^2/Gm^2)_0 \cong 10^{40}$. Esto produce una amplificación notable de las posibles variaciones espacio-temporales de la constante gravitatoria en la relación carga-masa de una partícula de prueba. Esta amplificación hace imposible pensar en detectar variación alguna de las magnitudes involucradas a nivel local (i.e., en la superficie de la tierra). Sin embargo, este vínculo es viable en una escala cosmológica. Este análisis induce pues a esperar que el campo escalar incluido por Jordan y Thiry en el esquema de unificación de Kaluza-Klein tenga una manifestación significativa (es decir, una solución que se aparte del valor constante $\gamma_{55} = 1$ con significado físico) sólo a escala cosmológica.

2.5 - LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN EN NUESTROS DIAS

En la actualidad existe el amplio reconocimiento que las teorías formuladas en espacios con dimensión mayor que cuatro, cuando son suplementadas con un mecanismo de reducción dimensional, proveen un marco válido donde es posible un más profundo entendimiento de la física a muy altas energías.

Son varios los motivos que impulsan a esta conclusión. En particular, el explosivo desarrollo de la teoría de cuerdas y de la supergravedad en las dos últimas décadas.

Aún hoy estamos lejos de poder asegurar el éxito de estos modelos en lograr finalmente la unificación de las partículas elementales y sus interacciones en una única teoría consistente. Sin embargo, es totalmente claro el vínculo existente entre estos nuevos planteos y el viejo programa de unificación de Kaluza y Klein. De hecho, tanto los modelos de supercuerdas como las teorías de supergravedad contienen los principios básicos de dicho programa.

No es sorprendente pues que el desarrollo de los primeros modelos de cuerdas reavivaran el interés sobre las ideas de Kaluza y Klein⁽¹⁵⁾⁻⁽¹⁶⁾. En supergravedad, los trabajos pioneros de J. Scherk y colaboradores⁽¹⁷⁾ sobre la obtención de supersimetrías extendidas por reducción dimensional de supersimetrías simples en espacios de dimensión superior mostraban claramente la

participación de mecanismos del tipo de Kaluza-Klein. En particular, Cremmer, Julia y Scherk⁽¹⁸⁾ fueron los primeros en utilizar el escenario 11-dimensional en la búsqueda de la supergravedad $N = 8$.

Resulta altamente significativa la coincidencia del número de dimensiones manejados por los modelos supersimétricos y por la teoría de Kaluza-Klein. Una teoría de campos supersimétrica no puede formularse consistentemente en un espacio-tiempo de dimensión arbitraria. El número máximo de dimensiones permitida para los modelos de supergravedad es precisamente once⁽¹⁹⁾. Once también es el número mínimo de dimensiones donde puede construirse una teoría realista de Kaluza-Klein, en la cual los campos de gauge asociados con el grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ surgen como componentes del campo gravitatorio (la variedad de mínima dimensión que contiene la simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ es $CP^2 \times S^2 \times S^1$, que posee $4 + 2 + 1 = 7$ dimensiones⁽²⁰⁾).

En el contexto de la supergravedad, el paso final hacia la teoría de Kaluza-Klein fue dado por Cremmer y Julia⁽¹⁷⁾, quienes lograron en 1979 resolver exactamente el modelo $D = 11$. Estos autores obtuvieron la solución exacta de las ecuaciones de los campos en $D = 11$ asignando al estado de vacío la topología $M_4 \otimes (7\text{-toro})$, expandiendo todos los campos en armónicos sobre el toro y manteniendo únicamente el modo cero del desarrollo de Fourier. Todo este procedimiento tiene un lenguaje natural en la teoría de Kaluza-Klein: la *compactificación espontánea* del espacio-tiempo

11-dimensional sobre un toro de siete dimensiones.

Hoy día la incorporación del programa de Kaluza-Klein en supergravedad es un hecho que registra una intensa actividad por parte de la comunidad científica. Referencias abundantes sobre el tema podrán encontrarse en los trabajos de revisión de P. Van Nieuwenhuizen⁽²¹⁾ y de Duff, Nilsson y Pope⁽²²⁾. La incidencia de las propuestas de Kaluza en nuestros días se manifiesta claramente en las siguientes palabras de Duff y colaboradores: "No conocemos aún si la supergravedad es una teoría del mundo real, o si el mundo real tiene más de cuatro dimensiones como es requerido por las teorías de Kaluza-Klein. Sin embargo, nuestra actividad de investigación en esta área nos ha convencido que la única manera de hacer supergravedad es via Kaluza-Klein y que la única teoría viable de Kaluza-Klein es la supergravedad".

REFERENCIAS

- 1 - T. Kaluza, *Zum Unitatsproblem der Physik*, Sitzungsberg. Preuss. Akad. Wissen. Leipzig, 966 (1921).
- 2 - P. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, New-York, Dover (1976), capitulos XVII y XVIII.
- 3 - W. Pauli, *Theory of Relativity*, New York, Pergamon Press (1958), Nota 23, pag. 224.
- 4 - L. de Broglie, *L'Univers a cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire*, J. Phys. 8, 63 (1927).
- 5 - Darrius, *Sur une forme remarquable des équations de Maxwell-Lorentz dans l'Univers a cinq dimensions*, J. Phys. 8, 444 (1927).
- 6 - Rosenfeld, *L'Univers a cinq dimensions et la Mécanique Ondulatoire*, Bull. Acad. Roy. Belgique 13, 304 (1927).
- 7 - W. Pauli, *Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten*, Ann. der Phys. 18, 305 (1933).
- 8 - O. Veblen, *Projektive Relativitätstheorie*, Berlin, J. Springer (1933).
- 9 - O. Klein, *Quantum theory and five dimensional theory of relativity*, Z. Phys. 37, 895 (1926).
- 10 - A. Einstein y P. Bergmann, *On a generalization of Kaluza's theory of electricity*, Ann. Math. 39, 683 (1938).
- 11 - P. Jordan, *Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie*, Ann. der Phys. 1, 219 (1947); *Zum gegenwertigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen*, Z. für Phys. 157, 112 (1959).

- 12 - Y. Thiry, *Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire a quinze variables de champ*, Jour. de Math. 30, 275 (1951); *Les équations de la théorie unitaire de Kaluza*, C. R. Acad. Sci. (Paris) 226, 216 (1948).
- 13 - P. Bergmann, *Unified field theory with fifteen field variables*, Ann. of Math. 49, 255 (1946).
- 14 - A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Paris, Masson (1955).
- 15 - L. N. Chang, K. I. Macrae and F. Mansouri, *Geometrical approach to local gauge and supergauge invariance: Local gauge theories and supersymmetric strings*, Phys. Rev. D13, 235 (1975).
- 16 - F. Ardalan and F. Mansouri, *Quantum theory of dual relativistic parastring models*, Phys. Rev. D9, 3341 (1974).
- 17 - F. Gliozzi, J. Scherk and D. Olive, Nucl. Phys. B122, 253 (1977); L. Brink, J. Schwarz and J. Scherk, Nucl. Phys. B121, 77 (1977).
- 18 - E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, Phys. Lett. 76B, 409 (1978).
- 19 - M. Sohnius, *Introducing supersymmetry*, Phys. Rep. 128, 39-204 (1985).
- 20 - E. Witten, *Search for a realistic Kaluza-Klein theory*, Nucl. Phys. B186, 412 (1981).
- 21 - P. Van Nieuwenhuizen, *An introduction to simple supergravity and the Kaluza-Klein program*, Course 8 in Relativité, Groupes et Topologie II, Les Houches 1983, North-Holland (1984).

22 - M. J. Duff, B. E. Nilsson and G. Pope, *Kaluza-Klein supergravity*, Phys. Rep. **130**, 1-142 (1986).

CAPITULO III

ECUACIONES DEL CAMPO

3.1 - INTRODUCCION

El programa de unificación de las interacciones realizado por Kaluza y Klein debe completarse con la formulación de las ecuaciones del campo. Naturalmente, el hecho que este programa funcione depende esencialmente de las propiedades de estas ecuaciones.

Es clara la idea acerca de la forma en que estas ecuaciones participan en el esquema de unificación planteado. En particular, un punto fundamental lo constituye la descomposición del escalar de curvatura multidimensional en términos del escalar de curvatura de la Relatividad General y de la curvatura del espacio interno asociado con los campos de gauge.

Las propiedades que se manifiestan a nivel de las ecuaciones del campo pasan naturalmente por el reconocimiento de una estructura geométrica particular del espacio-tiempo, de la cual nos hemos ocupado parcialmente en el capítulo anterior. El cálculo de la curvatura en una variedad riemanniana multidimensional exige un desarrollo más preciso de esta geometría; a saber, la descripción de una estructura de fibrado en $(4 + p)$ dimensiones, donde el espacio de Minkowski juega el papel de base y el espacio

de las dimensiones extra resulta determinado por un cierto grupo G de isometrías. En la teoría efectiva (luego de un proceso de reducción dimensional), G aparecerá como el grupo de las transformaciones de gauge sobre M^4 .

Comenzaremos este capítulo con un planteo más preciso de la geometría diferencial necesaria para la descripción de la estructura del espacio-tiempo de Kaluza-Klein. La próxima sección consiste en un resumen de las propiedades de los fibrados. En la sección 3.3 realizamos el cálculo explícito del tensor de curvatura y su reducción dimensional, limitándonos al caso γ_{55} constante. Los problemas que surgen al incorporar el campo escalar y su relación con la cosmología serán objeto de las secciones 3.4 y 3.5.

3.2 - LA GEOMETRIA DIFERENCIAL DEL ESPACIO DE KALUZA-KLEIN^[1]

Trabajaremos sobre una variedad diferenciable E de dimensión finita cualquiera D . En E tendremos definidos (sin necesidad de ninguna estructura adicional) campos vectoriales $v_x \in T_x(E)$ (espacio tangente en el punto $x \in E$) y campos de covectores definidos en el espacio dual $\omega_x \in T_x^*(E)$. $T_x(E)$ es isomorfo a \mathbb{R}^m ($\mathbb{R} \equiv$ eje real) y permite una linealización local de la variedad en un entorno del punto x . El dual $T_x^*(E)$ del espacio tangente es el espacio de las formas lineales definidas en $T_x(E)$. Por su definición, resulta $\omega_x(v_x) \in \mathbb{R}$ y $v_x(\omega_x) = \omega_x(v_x)$, esto último consecuencia de la relación $T_x^{**}(E) \cong T_x(E)$.

No existe un isomorfismo natural (canónico) entre un espacio y su dual. Sin embargo, dada una base (e_1, \dots, e_p) en T_x , podemos construir una base dual en T_x^* a través de la forma $\theta^\mu(v_x) \equiv v_x^\mu$, donde $v_x = v_x^\mu e_\mu$. Resulta entonces

$$\theta^\mu(e_\nu) \equiv \langle \theta^\mu, e_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu \quad (3.1)$$

Designaremos como es usual por (dx^μ) el dual de la base natural $(\partial/\partial x^\mu)$. Si $\omega_{x\mu}$ son las componentes de ω_x en la cobase natural (dx^1, \dots, dx^m) , se tendrá en general

$$\langle \omega_x, v_x \rangle = \langle \omega_{x\mu} dx^\mu, v^\nu \partial/\partial x^\nu \rangle = \omega_{x\mu} v_x^\mu \quad (3.2)$$

Consideremos el grupo de transformaciones (de dimensión finita) de la variedad en si misma $\{\sigma_g: g \text{ es un elemento de un grupo de Lie de dimensión } p\}$. El conjunto $\{\sigma_g\}$ es un grupo de Lie de transformaciones si la aplicación

$$\sigma: G \otimes E \rightarrow E \quad \text{por} \quad (g, x) \rightarrow \sigma(g, x)$$

es diferenciable y si el conjunto $\{\sigma_g: E \rightarrow E; \sigma_g(x) = \sigma(g, x)\}$ satisface la propiedad de grupo: $\sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h$ y σ_e es la transformación identidad si e es el elemento neutro del grupo.

G opera efectivamente sobre E si $\sigma_g(x) = x$ para todo $x \in E$ implica $g = e$. Las operaciones de traslación por la izquierda y derecha sobre G se definen a través de las aplicaciones

$$\begin{aligned}
L_g : G &\rightarrow G & L_g(h) &= gh \\
R_g : G &\rightarrow G & R_g(h) &= hg
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Un conjunto importante de campos vectoriales lo constituyen aquellos vectores invariantes bajo las operaciones L y R . Cada uno de estos conjuntos forma un espacio vectorial de la misma dimensión que G y, si se introducen los paréntesis de Lie (conmutadores), estos conjuntos definen sendas álgebras de Lie.

Un campo vectorial v en G es invariante L si

$$L'_g v(e) = v(g) \tag{3.4}$$

donde $L'_g(h) : T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G)$. Es posible demostrar sin mayor dificultad que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de vectores invariantes L [R] y el conjunto de vectores $T_e(G)$ tangentes a G en e .

Un subgrupo a un parámetro de un grupo de Lie es una curva diferenciable $\mathbb{R} \rightarrow G$ por $t \rightarrow g(t)$ tal que respeta la propiedad de grupo: $g(t)g(s) = g(t+s)$, $g(0) = e$. La curva generada por las transformaciones $\{\sigma_{g(t)}; t \in \mathbb{R}\}$ operando sobre x es la imagen del subgrupo uniparamétrico $\{g(t); t \in \mathbb{R}\}$ por $\sigma_x : G \rightarrow E$, donde $\sigma_x(g(t)) = \sigma(g(t), x) = \sigma_{g(t)}(x)$. El campo vectorial que genera el grupo de transformaciones $\sigma_{g(t)}$ constituye un *campo vectorial de Killing* sobre E relativo a la acción del grupo G . Estos están dados por las tangentes a las trayectorias $\sigma(t)$ que pasan por x

$$\begin{cases} d\sigma_x[g(t)]/dt = v(\sigma_x[g(t)]) \\ \sigma_x(e) = x \end{cases} \quad (3.5)$$

Un subgrupo uniparamétrico es definido por su vector tangente en e

$$\gamma \equiv \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.6)$$

En efecto, utilizando la traslación izquierda es posible escribir $L_{g(t)}g(s) = g(t+s)$, de modo que resulta

$$L'_{g(t)} \frac{dg}{ds}(s) = \frac{dg}{ds}(t+s) = \frac{dg}{dt}(t+s)$$

Evaluando la expresión anterior en $s = 0$, obtenemos

$$L'_{g(t)} \gamma = dg(t)/dt \quad (3.7)$$

Esta ecuación muestra que $g(t)$ es la curva integral del campo vectorial γ . Puede verse que este campo es invariante R frente a traslaciones del grupo.

Como el recíproco es también cierto, concluimos que un elemento $\gamma \in T_{\bullet}(G)$ define el generador $v^L [v^R]$ de un subgrupo a un parámetro de transformaciones $\{L_{g(t)}\} [\{R_{g(t)}\}]$. v^L es un vector invariante R, ya que

$$v^L(h) = dL_{g(t)}(h)/dt \Big|_{t=0} = dR_h(g(t))/dt \Big|_{t=0} = R'_h \gamma \quad (3.8)$$

En forma similar se demuestra que el generador v^R es invariante L.

Es claro que v^L y v^R son campos de Killing sobre G relativos a las operaciones de traslación izquierda y derecha. Resulta entonces que γ define también un campo v^K sobre E que genera el grupo de transformaciones $\{\sigma_{g(t)}\}$ según

$$v^K(x) = \sigma'_x(e) \gamma \quad (3.9)$$

donde $\sigma'_x(g): T_g(G) \rightarrow T_{\sigma_x(g)}(E)$. La dimensión del espacio $\langle v^K \rangle$ de vectores de Killing es igual al rango r de la aplicación $\sigma'_x(e)$; siendo $r \leq p$, $p = \dim(T_\bullet(G))$. Puede demostrarse que las siguientes cuatro proposiciones son equivalentes

- 1) $r = p$
- 2) $v^K = 0$ si y sólo si $\gamma = 0$
- 3) G actúa efectivamente sobre E
- 4) el espacio $\langle v^K \rangle$ de vectores de Killing sobre E es isomorfo a $T_\bullet(G)$.

Si en $\langle v^K \rangle$ se introducen los paréntesis de Lie se genera un álgebra de Lie. Resulta entonces que el álgebra de Lie de los vectores de Killing sobre E (definida por la acción efectiva izquierda [derecha] de G sobre E) es isomorfa al álgebra de Lie de los generadores de las operaciones izquierda [derecha] de G sobre G . Todas estas propiedades serán de utilidad en la caracterización de la geometría subyacente al espacio-tiempo en la teoría de Kaluza-Klein.

Introduciremos ahora el concepto de fibrado como estructura adicional sobre la variedad y discutiremos su utilidad en la generalización de algunas propiedades topológicas de E.

Llamaremos *envolvente vectorial* (vector bundle) de la variedad E a una aplicación $\pi: E \rightarrow B$ sobreyectiva ($\pi(E) = B$) de E sobre otra variedad B, llamada su base. Supondremos además que los espacios topológicos $\pi^{-1}(x) \subset E$ para todo $x \in B$ son homeomorfos a un espacio vectorial F. $\pi^{-1}(x)$ es denominada la *fibra en x* (denotada por F_x) y F se conoce como la *fibra estandar*.

Es posible que el espacio F posea una estructura adicional dada por un cierto grupo de transformaciones G. Además, es conveniente restringirnos al caso que B posea un recubrimiento dado por una familia $\{U_j; j \in J\}$ de conjuntos abiertos. Con estas hipótesis adicionales se determina sobre E la estructura de fibrado, definida específicamente como sigue:

- un *fibrado* (E, B, π, F) es una envolvente vectorial (E, B, π) junto con una fibra estandar F, un grupo de homeomorfismos de F en sí mismo y un recubrimiento de B por una familia de conjuntos abiertos U_j , tales que la envolvente es *localmente trivial* (para todo $x \in B$ existe un $U_j \subset B$ que contiene a x, tal que $\pi^{-1}(U_j)$ es isomorfo al producto topológico $U_j \otimes F$).

En primer lugar, debe observarse que la estructura de fibrado definida en E tiene por consecuencia que no todos los sistemas de

coordenadas apropiados para E como variedad son apropiados para E como fibrado. Sea un fibrado diferenciable (E, B, π) , con E y B variedades diferenciables de dimensiones $D = n + p$ y n respectivamente. Una carta (U, φ) sobre E define un sistema de coordenadas apropiado en el fibrado si la aplicación $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ ($U \subseteq E$) es un homeomorfismo que posee la estructura de producto cartesiano $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

No existe en general un isomorfismo canónico entre una fibra definida sobre un punto x de la base y la fibra estandar. No existirá por tanto tampoco un isomorfismo canónico entre fibras en diferentes puntos; para esto es necesario introducir nuevas estructuras en la variedad, como el transporte paralelo.

Un caso importante es cuando la fibra estandar F y el grupo estructural G son idénticos: en este caso tenemos un fibrado principal $(P, M, \pi, G) \equiv P(M, G)$. Necesitaremos definir la acción por la derecha del grupo G sobre el fibrado principal. Designaremos esta operación por $\tilde{R}_g: G \otimes P \rightarrow P$, tal que $(p, g) \rightarrow pg$ y $p(gg') = (pg)g'$ para todo $g, g' \in G$. Esta operación está relacionada naturalmente con la traslación derecha R_g sobre el grupo. Puede demostrarse que

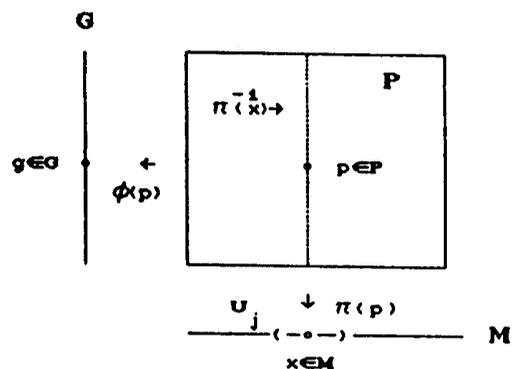
$$\tilde{R}_g(p) = \tilde{\varphi}_{i,x}^{-1} \cdot R_g \cdot \tilde{\varphi}_{i,x}(p), \quad x = \pi(p) \quad (3.10)$$

donde $\tilde{\varphi}_{i,x}(p) = g_i$ es el homeomorfismo de la fibra F_x sobre G . Debe observarse también que la aplicación diferencial define un

isomorfismo (canónico) del álgebra de Lie \mathfrak{G} del grupo estructural sobre el espacio tangente $T_p(F_x)$.

P es localmente trivial: para cualquier $x \in M$, existe un U_j abierto de M que lo contiene tal que el conjunto $\pi^{-1}(U_j)$ definido por $\pi(\pi^{-1}(U_j)) = U_j$ es isomorfo a $U_j \otimes \mathfrak{G}$. Esto significa naturalmente que existe un

difeomorfismo que aplica los puntos $p \in \pi^{-1}(U_j)$ sobre los puntos $(\pi(p), \phi(p)) \in U_j \otimes \mathfrak{G}$, tal que $\phi(pg) = \phi(p)g$ para todo $g \in \mathfrak{G}$ (ver la figura). Debe notarse que, en este caso, la fibra sobre x es isomorfa a \mathfrak{G} .



En la estructura descrita, el grado de libertad asociado con la fibra sobre x ($\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad suave) puede verse como una libertad local de gauge, y la operación de multiplicación por la derecha dada por \tilde{R}_g como una transformación local de gauge correspondiente al elemento g del grupo.

Debemos ahora introducir una estructura afin sobre la variedad, que permita consolidar un isomorfismo entre las diferentes fibras. Para esto definiremos una conexión sobre el fibrado. Una conexión Γ en $(P, M, \pi, \mathfrak{G})$ es una aplicación $\sigma_p: T_x(M) \rightarrow T_p(P)$, $x = \pi(p)$ para todo $p \in P$ tal que:

- a1) σ_p es lineal y suave en p
- b1) $\pi'_p \sigma_p$ es la aplicación idéntica en $T_x(M)$
- c1) para todo $g \in G$ y $p \in P$, $\sigma_{pg} = \tilde{R}_g \sigma_p$.

Puesto que σ_p es lineal, el espacio de vectores $H_p \equiv \sigma_p(T_x(M))$ es un subespacio de $T_p(P)$, que denominaremos subespacio tangente horizontal del fibrado. Además, por la propiedad (b1) resulta $\pi'_p H_p = T_x(M)$ de modo que H_p es isomorfo a $T_x(M)$ por la aplicación lineal π'_p . Dar una conexión en el fibrado consiste pues en definir un campo de espacios vectoriales $H_p \subset T_p(P)$ tales que:

- a2) $\pi'_p: H_p \rightarrow T_x(M)$, $x = \pi(p)$, es un isomorfismo
- b2) para todo $g \in G$ y $p \in P$, $H_{pg} = \tilde{R}_g H_p$
- c2) H_p es suave sobre P .

Obsérvese que la condición (b2) implica que dos subespacios horizontales definidos en dos puntos diferentes de la misma fibra difieren únicamente en una transformación de gauge. Los elementos de H_p son los vectores horizontales en p . Los elementos del espacio tangente $T_p(G_x) \equiv V_p$ a la fibra G_x en p son llamados vectores verticales. Puesto que $\pi'_p V_p = 0$ resulta

$$T_p(P) = H_p \oplus V_p$$

y, por tanto, cualquier vector $v \in T_p(P)$ puede ser escrito unívocamente en la forma $v = v_H + v_V$, con $v_H \equiv \text{hor } v \in H_p$ su componente horizontal y $v_V \equiv \text{ver } v \in V_p$ la correspondiente componente vertical.

Es fundamental en este punto reconocer la posibilidad de establecer un isomorfismo canónico entre el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G y los espacios verticales V_p . En primer lugar, puesto que G actúa efectivamente sobre P a través de \tilde{R}_g , existe un isomorfismo vectorial "natural" entre \mathfrak{g} y el espacio de vectores de Killing $\{v^K\}$, definidos en P relativos a la acción del grupo G . Si $\hat{v} \in \mathfrak{g}$ y $v^K \in \{v^K\}$, el isomorfismo $\hat{v} \leftrightarrow v^K$ es generado por el elemento $v(e) = dg(s)/ds|_{s=0} \in T_\bullet(G)$, pues

$$\hat{v} = L'_g(e) v(e) \quad \text{y} \quad v^K(p) = d(\tilde{R}_{g(e),p})/ds|_{s=0} \quad (3.11)$$

Ahora bien, $\tilde{R}_g p$ y p pertenecen a la misma fibra. Por tanto, cualquier vector de Killing $v^K(p)$ es un vector vertical. Además, un campo de Killing no se anula en ningún punto a no ser que corresponda al elemento nulo del álgebra. Puesto que la correspondencia es lineal resulta $\dim(\{v^K(p)\}) = \dim(\{v^K\})$ igual a la dimensión de G y de V_p . En conclusión, si $\hat{v} \in \mathfrak{g}$ corresponde a $dg(s)/ds|_{s=0} \in T_\bullet(G)$, la ecuación

$$v(p) = d(\tilde{R}_{g(e),p})/ds|_{s=0} \quad (3.12)$$

define un isomorfismo canónico entre \mathfrak{g} y V_p

$$v(p) \leftrightarrow \hat{v} \quad v(p) \in V_p$$

Dado un elemento $\gamma \in \mathfrak{g}$, el isomorfismo anterior induce sobre P un campo vectorial v_γ , llamado el *campo vectorial fundamental*.

Una conexión sobre la variedad define como sabemos un campo de subespacios horizontales H_p . Para cada $p \in P$ es posible establecer entonces una familia bien definida de aplicaciones lineales

$$T_p(P) \rightarrow \mathfrak{g} \quad \text{por} \quad v \rightarrow \hat{v}r v$$

Esta familia define una 1-forma ω sobre P con valores en \mathfrak{g}

$$\omega(v) \equiv \hat{v}r v \quad \rightarrow \quad \omega(\text{hor } v) = 0 \quad \text{para todo } v \in T_p(P) \quad (3.13)$$

No es difícil (aunque sí algo trabajoso) el observar que las propiedades que surgen de la definición de una conexión sobre el fibrado se transfieren a la 1-forma que resulta del isomorfismo entre el álgebra del grupo y el espacio vertical. De hecho, la propia conexión puede establecerse en términos de las propiedades que posee esta 1-forma^[2] (la llamaremos, por tanto, una conexión-forma).

Consideremos ahora la relación entre bases definidas en M y G y las correspondientes bases inducidas en el fibrado^{[3]-[4]}. Debido a la propiedad fundamental del fibrado, siempre es posible parametrizar localmente $p \in \pi^{-1}(U)$ por $(\pi(p), \phi(p)) = (x, g) \in U \otimes G$. Dadas dos bases cualquiera de U y G , uno siempre puede tomar como base sobre el fibrado el producto directo local de dichas bases.

Supongamos que sobre M tomamos la base coordenada $\xi_k = \partial_k$ ($k = 1, \dots, n$) y para el grupo estructural elegimos un conjunto $\{\xi_a\}$ de p campos vectoriales linealmente independientes invariantes por la izquierda sobre G . En general, tendremos

$$\begin{aligned} [\xi_k, \xi_l] &= 0 & k, l &= 1, \dots, n \\ [\xi_a, \xi_b] &= f_{ab}^c \xi_c & a, b, c &= n+1, \dots, n+p \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde f_{ab}^c son las constantes de estructura del grupo.

Designaremos por $\bar{\xi}_k$ y $\bar{\xi}_a$ las correspondientes bases inducidas por el difeomorfismo definido sobre el fibrado. Para estos dos conjuntos de vectores se verifican las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_l] &= 0 \\ [\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_a] &= 0 \\ [\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] &= f_{ab}^c \bar{\xi}_c \end{aligned} \quad (3.15)$$

La conexión hace posible introducir otras bases relacionadas con $\{\xi_k\}$ y $\{\xi_a\}$ que dan sobre $T_p(P)$ una descripción en términos de los subespacios horizontal y vertical. En efecto, el isomorfismo entre \mathfrak{g} y V_p induce una correspondencia $\xi_a \rightarrow \xi_a^*$, siendo éstos últimos vectores base de V_p . A su vez, la aplicación $\sigma_p: T_x(M) \rightarrow T_p(P)$ determina un conjunto $\{\tilde{\xi}_k\}$ de vectores base horizontales que generan a H_p ($\pi'(\tilde{\xi}_k) = \xi_k$).

En general, el conmutador de dos vectores horizontales posee una componente vertical. Esto es consecuencia de la relación

$$\pi'(\text{hor } v, \text{hor } u) = [v, u] \quad v, u \in T_x(M) \quad (3.16)$$

y naturalmente de la propiedad $\pi'(\text{ver } v) = 0$. Esto plantea una diferencia esencial entre las bases inducidas en el fibrado. En particular, las relaciones de conmutación para las bases inducidas por la conexión son ahora

$$\begin{aligned} [\xi_a^*, \xi_b^*] &= f_{ab}^c \xi_c^* \\ [\xi_a^*, \tilde{\xi}_k] &= 0 \\ [\tilde{\xi}_k, \tilde{\xi}_l] &= -F_{kl}^c \xi_c^* \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ahora bien, es a través de la conexión que se establece un mecanismo de transporte paralelo sobre el fibrado. Las fibras en diferentes puntos pueden orientarse unas respecto a otras en forma canónica (por medio del campo de subespacios horizontales). La base preferencial $(\xi_a^*, \tilde{\xi}_k)$ hace ese trabajo. Sin embargo, el cálculo de la curvatura (luego de introducir una métrica y de dotar a la variedad de una geometría riemanniana) es conveniente realizarlo en la base local producto directo. El vínculo entre ambas bases está dado por la 1-forma ω .

La acción de esta 1-forma sobre la base "paralela" está dada por las relaciones

La elección del gauge corresponde a la elección de una sección transversal particular en esta imagen.

$\rho_g(x)$, $g \in G$, representa pues la familia de secciones transversales vinculadas con la base $(\bar{\xi}_k)$. Podemos especificar sobre ésta los potenciales de gauge $B^{(\rho_g)}_k^a$ en la forma

$$B^{(\rho_g)}_k^a = \omega^a(\bar{\xi}_k(x, g)) \quad (3.22)$$

siendo naturalmente $\bar{\xi}_k(x, g) = \rho_g(x) \cdot \xi_k$. Estos gauges $\rho_g(x)$ resultan parametrizados por los elementos del grupo, de modo que para todo $g \in G$ corresponde una sección transversal trivial.

Ahora bien, sabemos que $\omega^a(\tilde{\xi}_k) = 0$ (ver ecuación (3.20)). Esto permite poner en general

$$\tilde{\xi}_k = \bar{\xi}_k - \bar{\xi}_a \omega^a(\bar{\xi}_k) \quad (3.23)$$

pues

$$\omega(\tilde{\xi}_k) = \omega(\bar{\xi}_k) - \omega(\bar{\xi}_a) \omega^a(\bar{\xi}_k) = \left[\omega^b(\bar{\xi}_k) - \omega^b(\bar{\xi}_a) \omega^a(\bar{\xi}_k) \right] \xi_b$$

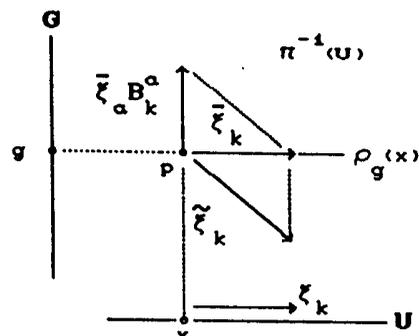
Es posible identificar $\bar{\xi}_a$ con ξ_a^* (ambas bases surgen de un difeomorfismo y satisfacen la misma álgebra). Entonces, por (3.20)

$$\omega^b(\bar{\xi}_a) = \omega^b(\xi_a^*) = \delta^b_a \quad (3.24)$$

y resulta finalmente

$$\omega(\tilde{\zeta}_k) = \left[\omega^b(\bar{\zeta}_k) - \omega^b(\bar{\zeta}_k) \right] \zeta_b = 0$$

Obsérvese que la ecuación (3.23) da la descomposición general de los vectores de la base horizontal en términos de la base local producto directo (lo que es detallado en la figura). Esta expresión define la derivada covariante D_k



$$\tilde{\zeta}_k = \partial_k - A_k^\alpha(x, \xi) \bar{\zeta}_\alpha \equiv D_k \quad (3.25)$$

donde $A_k^\alpha(x, \xi) \equiv B^{(\rho_g)_k^\alpha}(x, \xi)$ es una notación simplificada para los potenciales de gauge.

De acuerdo con las propiedades que la 1-forma ω tiene bajo transformaciones del grupo, es posible demostrar que los potenciales obedecen la siguiente relación

$$\bar{\partial}_\alpha A_k^b(x, \xi) = \partial_\alpha^* A_k^b = -f_{\alpha c}^b A_k^c(x, \xi) \quad (3.26)$$

A partir de estas dos últimas ecuaciones es posible reconfirmar las relaciones de conmutación (3.17)

$$\begin{aligned}
[\xi_a^*, \xi_b^*] &= [\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] = f^c_{ab} \bar{\xi}_c = f^c_{ab} \zeta_c^* \\
[\xi_a^*, \tilde{\xi}_k] &= [\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_k - \bar{\xi}_b A^b_k] = [\bar{\xi}_a, D_k] = 0 \\
[\tilde{\xi}_k, \tilde{\xi}_l] &= [\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_a A^a_k, \bar{\xi}_l - \bar{\xi}_b A^b_l] = [D_k, D_l] \\
&= -F^a_{kl} \bar{\xi}_a = -F^a_{kl} \zeta_a^*
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

Debe observarse que (3.27) determina que los F^a_{kl} se expresan en término de los potenciales A^a_k según la relación

$$F^a_{kl} = \partial_k A^a_l - \partial_l A^a_k + f^a_{bc} A^b_k A^c_l \tag{3.28}$$

Estas últimas expresiones muestran definitivamente el vínculo de las magnitudes geométricas características del espacio fibrado (la conexión-forma $\omega^a(\bar{\xi}_k)$ y los coeficientes verticales F^a_{kl} del conmutador $[\tilde{\xi}_k, \tilde{\xi}_l]$) con los potenciales y los campos en una teoría de Yang-Mills.

3.3 - LA CURVATURA DEL ESPACIO FIBRADO

Introduciremos ahora una métrica en el fibrado de modo de instalar allí una geometría riemanniana. Esto no es necesario a los efectos de calcular la curvatura del espacio (puede utilizarse el álgebra dada por la derivada covariante exterior construida en términos de la conexión-forma ω). Sin embargo, el introducir una métrica facilita los cálculos y sirve mejor a nuestros fines.

Supondremos que M es una variedad métrica con tensor métrico

ϵ_{kl} . Para el grupo estructural G tomaremos la métrica invariante ϵ_{ab}

$$\epsilon_{ab} = f^c_{ad} f^d_{cb} \quad (3.29)$$

Supondremos además que G es semisimple de modo que la métrica anterior pueda ser invertida.

Es posible definir sobre el fibrado una métrica $\gamma_{\mu\nu}$ compatible con las dadas en M y G si exigimos que $\gamma_{\mu\nu} \tilde{\xi}_k^\mu \tilde{\xi}_l^\nu = \epsilon_{kl}$ y $\gamma_{\mu\nu} \xi_a^*{}^\mu \xi_b^*{}^\nu = \epsilon_{ab}$. Si, además de la condición de compatibilidad, hacemos que la métrica mantenga la ortogonalidad de los subespacios horizontal y vertical, obtenemos una $\gamma_{\mu\nu}$ única. Esta métrica resulta definida pues por las relaciones

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} \tilde{\xi}_k^\mu \tilde{\xi}_l^\nu &= \epsilon_{kl} \\ \gamma_{\mu\nu} \tilde{\xi}_k^\mu \xi_a^*{}^\nu &= 0 \\ \gamma_{\mu\nu} \xi_a^*{}^\mu \xi_b^*{}^\nu &= \epsilon_{ab} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Debe notarse que esta definición es independiente de la elección de una base. Para el caso abeliano y con $\gamma_{55} = 1$ (en una variedad 5-dimensional), (3.30) se reduce a la expresión de la métrica considerada por Kaluza (ver sección 2.1, ecuación (2.11)). Ahora la tenemos escrita en su generalización al caso no-abeliano.

Una vez dotado de una geometría riemanniana y teniendo en cuenta las peculiaridades geométricas del espacio fibrado, es posible evaluar el escalar de curvatura en la forma usual. Supondremos que la dimensión de la variedad base es 4 (los índices k, l, \dots corren de 1 a 4). En la base local producto directo, utilizando la descomposición (3.23) de la base horizontal y la identificación de $\{\xi_a^*\}$ con $\{\bar{\xi}_a\}$, la métrica (3.30) puede escribirse explícitamente en la forma

$$\gamma_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ab} A_k^a A_l^b & A_k^a \epsilon_{ab} \\ \hline \epsilon_{ab} A_k^b & \epsilon_{ab} \end{array} \right) \quad (3.31)$$

y

$$\gamma^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \epsilon^{kl} & -\epsilon^{kl} A_l^a \\ \hline -A_k^a \epsilon^{kl} & \epsilon^{ab} + \epsilon^{kl} A_k^a A_l^b \end{array} \right) \quad (3.32)$$

donde

$$\epsilon^{km} \epsilon_{ml} = \delta^k_l, \quad \epsilon^{ac} \epsilon_{cb} = \delta^a_b$$

y

$$\gamma^{\mu\sigma} \gamma_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu$$

La base producto directo no es una base coordenada y, por tanto, deben tenerse en cuenta los conmutadores no nulos en el cálculo de la curvatura. Los símbolos de Christoffel y el tensor de curvatura en una teoría libre de torsión resultan dados (en una base de este tipo) por las expresiones

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \gamma^{\mu\sigma} (\partial_{\alpha} \gamma_{\beta\sigma} + \partial_{\beta} \gamma_{\alpha\sigma} - \partial_{\sigma} \gamma_{\alpha\beta} - C^{\nu}_{\alpha\sigma} \gamma_{\beta\nu} - C^{\nu}_{\beta\sigma} \gamma_{\alpha\nu}) \\ & + \frac{1}{2} C^{\mu}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = C^{\alpha}_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\alpha\rho} - \partial_{\mu} \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\rho} - \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\alpha} \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\rho} + \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\alpha} \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\rho}$$

donde ∂_{α} es la derivada en la dirección e_{α} , siendo

$$[e_{\alpha}, e_{\beta}] = C^{\sigma}_{\alpha\beta} e_{\sigma} \quad (3.34)$$

las relaciones de conmutación de una base no-coordenada (e_{α}). En la base local producto directo tendremos $e_{\alpha} = \bar{\xi}_{\alpha}$, con $\alpha = (k, a)$, $k = 1, \dots, 4$ y $a = 4 + 1, \dots, 4 + p$. De acuerdo con (3.15) resulta entonces

$$\begin{aligned} C^c_{ab} &= f^c_{ab} \\ C^k_{ab} &= C^a_{bk} = C^k_{al} = C^a_{kl} = C^k_{lm} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Usando las ecuaciones (3.31), (3.33) y (3.35) se obtiene, luego de un cálculo sencillo aunque trabajoso

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{bc}^a &= \frac{1}{2} f_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a \\
\bar{\Gamma}_{ab}^k &= 0 \\
\bar{\Gamma}_{bk}^a &= \frac{1}{2} (f_{cb}^a A^c_k + \epsilon_{bd} \epsilon^{lm} A^a_l F^d_{mk}) \\
\bar{\Gamma}_{la}^k &= \frac{1}{2} \epsilon^{km} \epsilon_{ad} F^d_{lm} \\
\bar{\Gamma}_{kl}^a &= \frac{1}{2} (\partial_k A^a_l + \partial_l A^a_k) + \frac{1}{2} \epsilon^{mn} \epsilon_{bc} A^a_m (F^b_{nk} A^c_l + F^b_{nl} A^c_k) \\
&\quad - \Gamma^m_{kl} A^a_m \\
\bar{\Gamma}_{lm}^k &= \Gamma^k_{lm} + \frac{1}{2} \epsilon^{kn} \epsilon_{ab} (A^a_l F^b_{mn} + A^a_m F^b_{ln})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

donde Γ_{bc}^a y Γ_{lm}^k son los coeficientes de Christoffel (libres de torsión) de G y M evaluados con las métricas ϵ_{ab} y ϵ_{kl} . El tensor de Ricci del espacio fibrado admite también la siguiente descomposición según los índices a,b,c,\dots y k,l,m,\dots

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{ab} &= R_{ab} + \frac{1}{4} \epsilon_{ac} \epsilon_{bd} \epsilon^{km} \epsilon^{ln} F^c_{kl} F^d_{mn} \\
\bar{R}_{ka} &= \frac{1}{4} \epsilon_{ab} A^b_k + \frac{1}{4} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} \epsilon^{lm} \epsilon^{pn} A^c_k F^d_{lp} F^b_{mn} \\
&\quad + \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \epsilon^{mn} \nabla_m F^b_{kn} \\
\bar{R}_{kl} &= R_{kl} + \frac{1}{4} \epsilon_{ab} A^a_k A^b_l + \frac{1}{4} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} \epsilon^{pm} \epsilon^{qn} A^a_k A^c_l F^b_{pq} F^d_{mn} \\
&\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{ac} \epsilon^{pq} F^a_{kp} F^c_{lq} + \frac{1}{2} \epsilon_{ac} \epsilon^{pq} (A^a_k \nabla_p F^c_{lq} + A^a_l \nabla_p F^c_{kq})
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde $R_{ab} = \frac{1}{4} \epsilon_{ab}$ y R_{kl} son los tensores de Ricci de G y M , y ∇_p es la derivada covariante general y de gauge; es decir

$$\nabla_p F^a_{kl} = \partial_p F^a_{kl} - \Gamma^m_{pk} F^a_{ml} - \Gamma^m_{pl} F^a_{mk} + f^a_{bc} A^b_p F^c_{kl} \quad (3.38)$$

Finalmente se obtiene para el escalar de curvatura la expresión

$$\bar{R} = \epsilon^{kl} R_{kl} + \epsilon^{ab} R_{ab} - \frac{1}{4} \epsilon_{ab} \epsilon^{km} \epsilon^{ln} F^a_{kl} F^b_{mn}$$

o sea

$$\bar{R} \equiv R_M + R_G - \frac{1}{4} F^2 \quad (3.39)$$

La acción de Einstein-Hilbert en el fibrado P se escribe entonces

$$S_{4+p} = \int [-\gamma]^{1/2} \bar{R} d^4x d^pG \quad (3.40)$$

Los grados de libertad correspondientes al grupo pueden ser integrados formalmente, obteniéndose la siguiente acción efectiva 4-dimensional

$$S_4 = V_G \times \int [-\epsilon_M]^{1/2} (R_M + R_G - \frac{1}{4} F^2) d^4x \quad (3.41)$$

donde V_G es el volumen (constante) de la variedad G compacta. Esta es la acción unificada de la teoría de Kaluza-Klein.

Obsérvese que si la variedad espacio-temporal M no es plana, la constante R_G desempeña el rol (no trivial) de una constante cosmológica. Esto plantea una situación particular en la teoría.

En efecto, las únicas constantes dimensionales de que se disponen son la constante de la gravitación universal G y una longitud característica en el espacio del grupo (esencialmente la magnitud de ξ_{ab}). En el sistema de unidades $\hbar = c = 1$, resultan las longitudes fundamentales de Planck $L_p = \sqrt{G}$ y la del espacio del grupo L_G . Si L_G se mantiene arbitrario, la teoría contiene una constante cosmológica indefinida. Sin embargo, no resulta claro que tipo de consideraciones dinámicas deben hacerse para determinarla. Si L_G fuera del orden de la longitud de Planck (de modo que resulta éste el único parámetro dimensional significativo), se obtiene una constante cosmológica prohibitivamente grande ($\approx 10^{120}$). En este caso, uno puede intentar trabajar con métricas para el grupo estructural que hagan $R_G = 0$, de modo de eliminar el término cosmológico. En otro caso, se deberá recurrir a un contratérmino cosmológico *ad hoc*.

Terminaremos esta sección con algunas consideraciones relativas al cálculo de la curvatura. Hemos probado la relación fundamental (3.39) haciendo uso explícito de una base local producto directo sobre el fibrado (lo que corresponde a una elección de una clase específica de gauge). Naturalmente, uno puede elegir diferentes bases y obtener el mismo resultado. En general, las componentes del tensor de Ricci tomarán una expresión más o menos complicada, dependiendo del gauge elegido. La curvatura R , siendo un escalar, no dependerá de estos cambios de base en la variedad.

Con respecto a esto podemos agregar que la base "horizontal" $\{\tilde{\xi}_k, \xi_a^*\}$ es especialmente útil a los efectos de realizar cálculos, por proveer de una expresión más simplificada de las diferentes magnitudes tensoriales. En este caso, los $\tilde{\xi}_k$ no son vectores base del espacio tangente de ninguna sección transversal $\rho(x)$ (éste conjunto no es cerrado bajo conmutación, ver ecuación (3.17)). Sin embargo, pueden introducirse aún potenciales $B_k^{(\rho)a}$, ya que éstos son definidos independientemente de la elección de una base en el espacio fibrado.

Digamos finalmente que las ecuaciones del campo de la teoría de Jordan y Thiry pueden deducirse como extensión directa de los resultados aquí obtenidos. Para esto debemos simplemente hacer

$$\gamma_{\mu\nu} \xi_a^*{}^\mu \xi_b^*{}^\nu = \phi_{ab}(x) \quad (3.42)$$

donde los $\phi_{ab}(x)$ representan ahora campos escalares. La generalización de las ecuaciones del campo producida por la versión de Jordan y Thiry de la teoría de Kaluza y su vinculación con la cosmología serán objeto de las secciones siguientes.

3.4 - LAS ECUACIONES DEL CAMPO EN LA TEORIA DE JORDAN-THIRY

En el planteo realizado hasta ahora un ingrediente básico lo constituye el suponer que las trayectorias del grupo de isometrías son también geodésicas del espacio. Esta es una propiedad que deriva de la métrica g_{ab} definida sobre el espacio del grupo y su modificación plantea algunas cuestiones interesantes vinculadas con la cosmología.

El vínculo existente entre las propiedades de las trayectorias del grupo de isometría y la geometría del espacio-tiempo de Kaluza-Klein ha sido discutida en las secciones 2.1 y 2.3. Analizaremos ahora nuevamente este punto.

En la sección 3.2 (especialmente ecuación (3.11)) mostramos que la acción del grupo G sobre el fibrado define un conjunto de vectores de Killing $\{v^K\}$ sobre P . El isomorfismo existente entre este conjunto y el álgebra del grupo \mathfrak{g} permite tomar como base $\{\bar{\xi}_a\}$ de los espacios verticales una constituida completamente por vectores de esa clase. Cada uno de estos vectores genera (al menos localmente) un *flujo*, dado por las trayectorias sobre P que tienen por tangente a un (y siempre el mismo) $v^K(p)$. Estos flujos generan como sabemos la variedad del grupo.

El cambio de las diferentes magnitudes tensoriales definidas sobre P y producidas por el flujo de un campo vectorial $v(p)$ está dado, en general, por la *derivada de Lie* \mathcal{L}_v de dicha magnitud⁽⁶⁾. La acción de este operador sobre otro campo vectorial $u(p)$ se

reduce a evaluar el conmutador de ambos campos

$$\mathcal{L}_v(u) = [v, u] \quad (3.43)$$

Interesa evaluar la derivada de Lie del tensor métrico en la dirección de los vectores de Killing. En la base horizontal tenemos $\gamma_{\mu\nu} \equiv \tilde{\xi}_\mu \cdot \tilde{\xi}_\nu$, donde $\tilde{\xi}_\mu = (\tilde{\xi}_k, \xi_a^*)$. Resulta entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_a}(\gamma_{\mu\nu}) &= \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_a}(\tilde{\xi}_\mu) \cdot \tilde{\xi}_\nu + \tilde{\xi}_\mu \cdot \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_a}(\tilde{\xi}_\nu) = \\ &[\tilde{\xi}_a, \tilde{\xi}_\mu] \cdot \tilde{\xi}_\nu + \tilde{\xi}_\mu \cdot [\tilde{\xi}_a, \tilde{\xi}_\nu] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Utilizando las relaciones de conmutación (3.17) (e identificando $\tilde{\xi}_a$ con ξ_a^*) obtenemos

$$\mathcal{L}_{\tilde{\xi}_a}(\gamma_{\mu\nu}) = f^c_{ab} \delta_\mu^b \xi_c^* \cdot \tilde{\xi}_\nu + f^c_{ab} \delta_\nu^b \tilde{\xi}_\mu \cdot \xi_c^* \quad (3.45)$$

o sea

$$\mathcal{L}_{\tilde{\xi}_a}(\gamma_{\mu\nu}) = f^c_{a\mu} \gamma_{c\nu} + f^c_{a\nu} \gamma_{c\mu} \quad (3.46)$$

Definamos ahora las cantidades

$$f^c_{a\mu} \gamma_{c\nu} \equiv f_{a\mu\nu} \quad (3.47)$$

Cuando μ y ν son índices del grupo, estas cantidades resultan completamente antisimétricas respecto a sus tres índices. Si no lo

son, las funciones delta en (3.45) anulan automáticamente esa expresión (pues δ corre en el espacio del grupo). En cualquier caso se verifica entonces

$$\xi_a^\alpha (\gamma_{\mu\nu}) = 0 \quad (3.48)$$

Esta ecuación expresa, como es sabido, la propiedad fundamental de los vectores de Killing: el grupo local a un parámetro de difeomorfismos dado por los ξ_a^α genera en P una isometría (es decir, transformaciones que dejan invariante la métrica del espacio).

En un espacio libre de torsión, la derivada de Lie se vincula directamente con la derivada covariante. El conmutador de dos campos vectoriales se expresa en este caso por

$$[v, u] = \nabla_v u - \nabla_u v \quad (3.49)$$

donde

$$(\nabla_v u)^\mu = u^\mu{}_{;\nu} v^\nu \quad (3.50)$$

siendo

$$u^\mu{}_{;\nu} \equiv \nabla_\nu u^\mu \quad (3.51)$$

y ∇_ν dado en (3.38). Debe observarse que la definición de la

derivada de Lie no depende de la existencia de una conexión en el espacio. Esta es una estructura previa, que resulta de las propiedades de los campos vectoriales definidos en la variedad. La relación (3.49) expresa básicamente la ausencia de torsión y permitirá vincular los flujos de los vectores de Killing con las geodésicas del espacio.

En efecto, de (3.44) y (3.49) vemos que es posible escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{\xi}_a}(\gamma_{\mu\nu}) &= (\nabla_{\bar{\xi}_a} \tilde{\xi}_\mu - \nabla_{\tilde{\xi}_\mu} \bar{\xi}_a) \cdot \tilde{\xi}_\nu + \tilde{\xi}_\mu \cdot (\nabla_{\bar{\xi}_a} \tilde{\xi}_\nu - \nabla_{\tilde{\xi}_\nu} \bar{\xi}_a) \\ &= \nabla_{\bar{\xi}_a} (\tilde{\xi}_\mu \cdot \tilde{\xi}_\nu) - \nabla_{\tilde{\xi}_\mu} \bar{\xi}_a \cdot \tilde{\xi}_\nu - \tilde{\xi}_\mu \cdot \nabla_{\tilde{\xi}_\nu} \bar{\xi}_a \end{aligned} \quad (3.52)$$

Como $\nabla_{\tilde{\xi}_a}(\gamma_{\mu\nu}) = 0$ (la métrica es covariantemente constante), resulta de (3.52) que $\bar{\xi}_a$ es un vector de Killing si, y sólo si

$$\nabla_{\tilde{\xi}_\mu} \bar{\xi}_a \cdot \tilde{\xi}_\nu + \tilde{\xi}_\mu \cdot \nabla_{\tilde{\xi}_\nu} \bar{\xi}_a = 0 \quad (3.53)$$

Obsérvese que (3.53) no es más que (2.20), escrita ahora en una base local general. De estas ecuaciones se deduce inmediatamente que

$$\frac{1}{2} \nabla_{\tilde{\xi}_\mu} (\bar{\xi}_a \cdot \bar{\xi}_a) = (\nabla_{\tilde{\xi}_\mu} \bar{\xi}_a) \cdot \bar{\xi}_a \stackrel{\text{Killing}}{=} - \tilde{\xi}_\mu \cdot (\nabla_{\bar{\xi}_a} \tilde{\xi}_a) \quad (3.54)$$

donde la segunda igualdad se deriva directamente de (3.53) tomando $\tilde{\xi}_\nu \equiv \bar{\xi}_a$. Esta última ecuación muestra un resultado ya conocido por

nosotros: un vector de Killing $\bar{\xi}_a$ es también un campo geodésico si, y sólo si, su longitud es constante

$$\nabla_{\bar{\xi}_a} \bar{\xi}_a = 0 \quad (\text{geodésica}) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \nabla_{\bar{\xi}_\mu} (\bar{\xi}_a \cdot \bar{\xi}_a) = 0 \quad (\text{norma constante})$$

Estos resultados no hacen más que reproducir los obtenidos en la sección 2.1 (ecuaciones (2.21) a (2.26)), y derivan directamente de la estructura de fibrado del espacio-tiempo en la teoría de Kaluza-Klein.

Es claro que la métrica invariante ξ_{ab} introducida en (3.29) posee esta propiedad. Como consecuencia y de acuerdo a lo visto en la sección 2.3 (ecuación (2.46)), la longitud de la circunferencia en las dimensiones extra (supuesto éstas topológicamente equivalentes a un círculo) es una constante del espacio.

La modificación de Jordan y Thiry

$$\xi_{ab} \equiv \phi_{ab}(x) \quad (\text{campos escalares})$$

implica que el "radio" del espacio interno no sea más una constante global sino una cantidad dinámica de la teoría. En la sección 2.4 hemos justificado esta posición tomando el punto de vista de Thiry y estudiamos algunas de sus consecuencias. Completaremos finalmente este análisis estudiando las ecuaciones del campo en esta versión⁽⁷⁾.

Para esto escribiremos la métrica del fibrado en la base local producto directo $\langle \bar{\xi}_a, \bar{\xi}_k \rangle$ (donde los $\bar{\xi}_a$ representan una base de Killing) en la forma

$$\gamma_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \xi_{kl} + e^2 \kappa^2 \phi_{ab} A_k^a A_l^b & e\kappa A_k^a \phi_{ab} \\ \hline e\kappa \phi_{ab} A_k^b & \phi_{ab} \end{array} \right) \quad (3.55)$$

donde κ es una constante dimensional (con dimensiones de longitud) que básicamente hace a las constantes de estructura f_{ab}^c números adimensionados (y puede ser interpretada como una escala de longitud típica del espacio interno)

$$[\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] = \kappa^{-1} f_{ab}^c \bar{\xi}_c \quad (3.56)$$

Esta constante se relacionará más adelante con la constante de la gravitación G . En (3.55) hemos introducido además la constante de acoplamiento e de Yang-Mills (adimensional en el sistema natural $\hbar = c = 1$). Con estas constantes, la ecuación (3.22) se expresa en la forma⁽⁸⁾

$$e\kappa A_k^a(x, g) = \omega^a(\bar{\xi}_k(x, g)) \quad (3.57)$$

La isometría (3.48) fija unívocamente la dependencia de la métrica respecto de las coordenadas internas. Es directo probar que esta condición se escribe en términos de las métricas inducidas por M y G en la forma

$$\partial_a \epsilon_{kl} = 0 \quad (A)$$

$$\partial_a A_k^c = -\kappa^{-1} f_{ab}^c A_k^b \quad (B) \quad (3.58)$$

$$\partial_a \phi_{bc} = \kappa^{-1} f_{ab}^d \phi_{dc} + \kappa^{-1} f_{ac}^d \phi_{bd} \quad (C)$$

donde ∂_a es la derivada direccional con respecto a $\bar{\xi}_a$. La ecuación (3.58A) expresa básicamente la independencia de la métrica ϵ_{kl} con respecto a las coordenadas del espacio interno. Esta resulta únicamente función de las coordenadas espacio-temporales x^k de M . En (3.58B) se reobtiene la (3.26), que da una fijación parcial del gauge. Finalmente, la (3.58C) muestra que ϕ_{bc} transforma como un tensor simétrico bajo el grupo G .

Cuando el grupo G es unimodular, puede demostrarse⁽⁷⁾ que el lagrangiano $(4 + p)$ -dimensional de la acción de Einstein-Hilbert para el fibrado resulta *explícitamente independiente* de las coordenadas internas. En este caso, la condición impuesta sobre G provee naturalmente de un mecanismo de reducción dimensional.

En estas condiciones, se obtiene el siguiente lagrangiano 4-dimensional

$$L = - (16\pi G)^{-1} \sqrt{g} \sqrt{\phi} (R_p + \Lambda) \quad (3.59)$$

donde $\xi = |\det \xi_{kl}|$, $\phi = |\det \phi_{ab}|$, R_p es el escalar de curvatura de $P(M, G)$ y Λ la constante cosmológica.

Repitiendo los cálculos realizados en la sección 3.3 para la curvatura del fibrado, se obtiene ahora (a menos de una divergencia) la siguiente descomposición para el escalar de curvatura

$$R_p = R_M + R_G + \frac{e^2 \kappa^2}{4} \phi_{ab} F^a_{kl} F^b_{kl} + \quad (3.60)$$

$$+ \frac{1}{4} \phi^{ab} \phi^{cd} \left[(D_k \phi_{ac})(D_k \phi_{bd}) - (D_k \phi_{ab})(D_k \phi_{cd}) \right]$$

donde F^a_{kl} representa como siempre el tensor de intensidad de campo asociado a A^a_k . Con la elección

$$e^2 \kappa^2 = 16\pi G \quad (3.61)$$

se obtiene nuevamente la unificación deseada.

Para $D = 5$, la expresión anterior se reduce a

$$R_p = R_M + \frac{e^2 \kappa^2}{4} \phi F_{kl} F^{kl} \quad (3.62)$$

El principio de mínima acción produce a partir de (3.59) y (3.62) las siguientes ecuaciones del campo

$$\begin{aligned}
R_{kl} - \frac{1}{2} \epsilon_{kl} R &= -8\pi G \phi^2 [F_{km} F_l^m - \frac{1}{4} \epsilon_{kl} F_{mn} F^{mn}] \\
&- [\phi^{-1} (D_k D_l \phi - \epsilon_{kl} D^m D_m \phi)] \\
R &= -12\pi G \phi^2 F_{kl} F^{kl} \\
D^k (\phi^3 F_{kl}) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.63}$$

donde R_{kl} indica ahora el tensor de Ricci de la variedad M .

Estas ecuaciones admiten la solución $\phi \equiv 1$. Pero existen casos en que la solución constante para el campo escalar resulta incompatible con la situación física planteada (como en el cálculo de los campos producidos por una distribución de cargas con simetría esférica). Es posible demostrar que, en el caso mencionado, el campo escalar produce modificaciones significativas (del orden del 1%) a la ley de fuerzas de Lorentz⁽⁹⁾.

3.5 - SOLUCIONES DE INTERES COSMOLOGICO

La dinámica que las ecuaciones del campo de Jordan y Thiry confieren al espacio interno depende esencialmente del comportamiento espacio-temporal de las funciones escalares $\phi_{ab}(x)$. Estos campos tienen en general sentido únicamente en una escala cosmológica.

Resulta interesante plantearse si son posibles soluciones de dichas ecuaciones que provean un modelo físicamente aceptable para la evolución cosmológica de un universo multidimensional (por físicamente aceptable entendemos un modelo que contenga un

subespacio efectivo tetradimensional que manifieste las características propias de nuestro universo en expansión).

Es posible buscar soluciones con estas características admitiendo que la métrica del espacio-tiempo dependa únicamente de la variable temporal $x^0 = t$. En este caso, diferentes tipos de soluciones se obtienen según sea o no posible elegir un sistema de referencia en el que todas las componentes γ_{0A} (A = coordenada espacial) sean nulas mientras, a la vez, todas las restantes componentes siguen dependiendo de una sola variable. Analizaremos dichas soluciones en el caso 5-dimensional⁽¹⁰⁾.

Consideremos transformaciones de coordenadas de la forma

$$x^A \rightarrow x'^A = x^A + f^A(t) \quad (3.64)$$

donde A = 1, 2, 3, 5 y las f^A son funciones arbitrarias de t. Este tipo de transformaciones son admitidas por los sistemas especiales de coordenadas introducidos en la sección 2.1. Bajo (3.64) tenemos que

$$\gamma_{0A} + \gamma'_{CA} = \gamma_{0A} + \gamma_{AB} (df^B/dt) \quad (3.65)$$

Si

$$\det (\gamma_{AB}) \neq 0 \quad (3.66)$$

el sistema de ecuaciones

$$\gamma_{OA} + \gamma_{AB} (df^B/dt) = 0 \quad (3.67)$$

determina funciones $f^A(t)$ que permiten el paso a un sistema de referencia en el que $\gamma_{OA} = 0$. Redefiniendo la variable t puede tomarse siempre $-\gamma_{OO}$ igual a la unidad, de manera que

$$\gamma_{OO} = -1, \quad \gamma_{OA} = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_{AB} = \gamma_{AB}(t) \quad (3.68)$$

son las condiciones que definen finalmente el sistema sincrónico 5-dimensional. Obsérvese que para esto resulta básico la no anulación del determinante (3.66).

Es inmediato reconocer las propiedades que establece este sistema en el espacio-tiempo efectivo. Por un lado, (3.68) implica $\gamma_{O5} \propto A_0 = 0$, de manera que el gauge resulta fijado en el gauge de Weyl. Además

$$\xi_{kl} = \gamma_{kl} + \beta^2 \phi A_k A_l \quad (k,l = 0,1,2,3) \quad (3.69)$$

por lo que

$$\xi_{OL} = \gamma_{OL} + \beta^2 \phi A_0 A_L \equiv 0 \quad (L = 1,2,3) \quad (3.70)$$

y el sistema de referencia de los observadores tetradimensionales es un sistema sincrónico en el sentido usual.

A partir de (3.33) y (3.68) (con $C^{\sigma}_{\alpha\beta} \equiv 0$ para todos los valores de los índices pentadimensionales) se obtienen las

siguientes expresiones para los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{00}^0 &= \bar{\Gamma}_{0A}^0 = \bar{\Gamma}_{00}^A = \bar{\Gamma}_{BC}^A = 0 \\ \bar{\Gamma}_{AB}^0 &= \frac{1}{2} \partial_0 \gamma_{AB} \equiv \frac{1}{2} \chi_{AB} \\ \bar{\Gamma}_{0B}^A &= \frac{1}{2} \gamma^{AC} \partial_0 \gamma_{BC} \equiv \frac{1}{2} \chi^A_B\end{aligned}\tag{3.71}$$

Vemos que las magnitudes relevantes son las derivadas temporales de los coeficientes de la métrica con índices únicamente espaciales. A estas cantidades la hemos designado por χ_{AB} y es posible considerarlas como entidades tensoriales que suben y bajan sus índices por medio de γ_{AB} .

Es inmediato ahora calcular las componentes no triviales del tensor de Ricci. Estas son

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\chi^A_A) + \frac{1}{4} \chi^A_C \chi^C_A \\ R_{AB} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\chi_{AB}) - \frac{1}{4} (\chi_{AB} \chi^C_C + 2\chi_{AC} \chi^C_B)\end{aligned}\tag{3.72}$$

Las componentes mixtas del tensor de Ricci adquieren una forma más apropiada para resolver las ecuaciones del campo en el vacío. Contrayendo con γ^{AC} y haciendo uso de la igualdad

$$\partial_0 \gamma^{AB} = -\gamma^{AC} \gamma^{BD} \partial_0 \gamma_{CD}$$

(lo que determina que $(\partial_0 \gamma^{AC}) \chi_{CB} = -\chi^A_C \chi^C_B$), se obtiene a

partir de la ecuación anterior

$$R^0_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\chi^A_A) - \frac{1}{4} \chi^A_C \chi^C_A$$

$$R^A_B = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\chi^A_B) - \frac{1}{4} \chi^A_B \chi^C_C$$
(3.73)

Ahora bien,

$$\chi^C_C \equiv \gamma^{CD} \partial_0 \gamma_{CD} = \frac{\partial}{\partial t} \ln(-\gamma)$$
(3.75)

pues, de la definición del determinante, $d\gamma = \gamma \gamma^{\mu\nu} d\gamma_{\mu\nu}$. La segunda ecuación en (3.73) puede escribirse entonces

$$R^A_B = -\frac{1}{2[-\gamma]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} ([-\gamma]^{1/2} \chi^A_B)$$
(3.76)

Las ecuaciones del campo en el vacío resultan de igualar la primera de las expresiones (3.73) y (3.76) a cero. De la condición $R^A_B = 0$ se obtiene inmediatamente

$$[-\gamma]^{1/2} \chi^A_B = 2 \lambda^A_B$$
(3.77)

donde las λ^A_B son constantes. Contrayendo respecto a los índices A y B resulta entonces

$$\chi^A_A = \frac{1}{\gamma} \partial_0 \gamma = \frac{2}{[-\gamma]^{1/2}} \lambda^A_A$$
(3.78)

de donde se deduce que $-\gamma = (\text{const.}) t^2$. Sin pérdida de

generalidad es posible igualar esa constante a uno (simplemente, con un cambio de escala de las coordenadas x^A). Entonces $\lambda^A_A = 1$, y la sustitución de (3.77) en la primera de las ecuaciones (3.73) produce la relación

$$\lambda^A_B \lambda^B_A = 1 \quad (3.79)$$

que liga entre sí a las constantes λ^A_B .

Si bajamos ahora el índice A en (3.77) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\partial_0 \gamma_{AB} = \frac{2}{t} \lambda^C_A \gamma_{CB} \quad (3.80)$$

El conjunto de coeficientes λ^C_A se puede considerar como la matriz de una cierta transformación lineal. Es posible en general reducir esta matriz a la forma diagonal mediante un cambio lineal adecuado de las coordenadas x^A . Representaremos sus valores principales por p_A ($A = 1, 2, 3, 5$) y supondremos que son reales y distintos (los otros casos no presentan interés cosmológico). Si los vectores unitarios correspondientes a los ejes principales son $n^{(A)}$, la solución de las ecuaciones (3.80) puede escribirse en la forma

$$\gamma_{AB} = t^{2p_1} n_A^{(1)} n_B^{(1)} + t^{2p_2} n_A^{(2)} n_B^{(2)} + t^{2p_3} n_A^{(3)} n_B^{(3)}$$

(donde los coeficientes de las potencias de t se han igualado a la

unidad mediante un nuevo cambio de escala de las coordenadas). Finalmente, eligiendo los vectores $n^{(A)}$ como los vectores unitarios de nuestros ejes coordenados, la métrica se reduce a la expresión

$$ds^2 = - dt^2 + \sum_A t^{2p_A} (dx^A)^2 \quad (3.81)$$

En ella p_1, p_2, p_3 y p_4 son cuatro números cualesquiera que satisfacen los vínculos

$$\sum_A p_A = 1 \quad \text{y} \quad \sum_A p_A^2 = 1 \quad (3.82)$$

(el primero se deduce de $-\gamma = t^2$ y el segundo de (3.79)). El primero en obtener esta solución fue E. Kasner en 1921⁽¹¹⁾.

Las relaciones anteriores requieren que al menos una de las cantidades p_A sea negativa. Así pues, en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones la solución de vacío de Kasner no se ajusta al comportamiento observado de la evolución del universo. Sin embargo, la predicción de la contracción de al menos una de las dimensiones espaciales es una propiedad deseable en un universo 5-dimensional.

A los efectos de garantizar la isotropía, una solución posible es $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$, $p_4 = -\frac{1}{2}$. Esta es la solución particular elegida por Chodos y Detweiler⁽¹²⁾. A pesar que estos autores no realizan el cálculo, sugieren que dicha elección podría

justificarse mediante un estudio de la estabilidad de las diferentes soluciones posibles.

La solución de Kasner puede extenderse directamente a espacios de dimensión mayor⁽¹³⁾. A pesar que ésta es una solución demasiado restrictiva para ser realista⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁵⁾, provee un modelo adecuado para la evolución de un universo multidimensional. Para los valores elegidos por Chodos y Detweiler

$$ds^2 = - dt^2 + (t/t_0)(dx^4)^2 + (t_0/t)(dx^5)^2 \quad (3.83)$$

el universo resulta espacialmente plano e isotrópico en el instante $t = t_0$ con cuatro dimensiones espaciales. Para $t \ll t_0$ el universo tiene esencialmente una única dimensión espacial, cuya longitud se hace infinita en la singularidad inicial $t = 0$. Para $t \gg t_0$, la distancia a lo largo de la quinta dimensión se reduce a $(t_0/t)^{1/2}L$ (si L es su longitud a t_0), mientras que las otras tres dimensiones espaciales aumentan a $(t/t_0)^{1/2}L$. Suponiendo que $(t_0/t)^{1/2}L$ es suficientemente pequeño (o sea, el universo es suficientemente viejo), el hecho que la quinta dimensión no es observada resulta una consecuencia de la dinámica de la evolución del cosmos.

REFERENCIAS

- 1 - Como referencia general puede tomarse Y. Choquet-Bruhat and G. DeWitt-Morette, *Analysis, manifolds and physics*, Revised Edition, North Holland (1987).
- 2 - Y. Choquet-Bruhat and G. DeWitt-Morette, op. cit., pag. 361.
- 3 - Y. M. Cho, *Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories*, Jour. Math. Phys. 16, 2029 (1975).
- 4 - Y. M. Cho and P. S. Yang, *Unified geometry of internal space with space-time*, Phys. Rev. D12, 3789 (1975).
- 5 - Y. Choquet-Bruhat and G. DeWitt-Morette, op. cit., pag. 364.
- 6 - Y. Choquet-Bruhat and G. DeWitt-Morette, op. cit., pag. 134.
- 7 - Ver por ejemplo, Y. M. Cho and P. G. Freund, *Non-Abelian gauge fields as Nambu-Goldstone fields*, Phys. Rev. D12, 1711 (1975).
- 8 - Y. M. Cho and P. G. Freund, op. cit., pag. 1715.
- 9 - J. A. Ferrari, *On an approximate solution for a charged object and the experimental evidence for the Kaluza-Klein theory*, General Rel. and Grav., en prensa.
- 10 - Ver por ejemplo, L. Landau y E. Lifshitz, *Teoría clásica de los campos*, Ed. Reverté (1971), secciones 99 y 102 (estos autores tratan el caso 4-dimensional).
- 11 - E. Kasner, Am. J. Math. 48, 217 (1921).
- 12 - A. Chodos and S. Detweiler, *Where has the fifth dimension gone?*, Phys. Rev. D. 21, 2167 (1980).
- 13 - P. Freund, *Kaluza-Klein cosmologies*, Nucl. Phys. B209, 146 (1982).

- 14 - En particular, no hay razón a priori para exigir la máxima simetría en las dimensiones extra. En este sentido, el ansatz propuesto (extendido a D dimensiones) no contempla la variedad 7-dimensional $CP_2 \times S^2 \times S^1$ considerada por Witten (Nucl. Phys. B186, 412 (1981)) como la apropiada para contener la simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.
- 15 - Se han estudiado numerosos ejemplos de modelos cosmológicos de Kaluza-Klein, resolviendo la ecuación de Einstein $D = 4 + p$ dimensional en diferentes situaciones: tensor energía-momento de un polvo puro D-dimensional (R. Bergamini and C. A. Orzalesi, Phys. Lett. B135, 38 (1984)), de un fluido perfecto (D. Sahdev, Phys. Lett. B137, 155 (1984)) y en el caso de una cosmología de Robertson-Walker-Friedman (S. Randjbar-Daemi, A. Salam and J. Strathdee, Phys. Lett. B135, 388 (1984)). Dichos modelos admiten soluciones en las cuales todas excepto tres de las dimensiones espaciales se contraen a un tamaño microscópico.

CAPITULO IV

ACOPLAMIENTO DE LOS CAMPOS DE MATERIA

4.1 - ASPECTOS GENERALES DEL PROBLEMA

Estudiaremos ahora la incorporación de la materia en el fibrado $(4 + p)$ -dimensional. Toda descripción realista de la naturaleza a través de una teoría de campos unificada se enfrenta necesariamente con este problema. No basta con tener los campos de gauge (que describen las interacciones entre partículas), sino que debemos tener también a los propios quarks y leptones.

Con respecto a esto debemos decir que la teoría de Kaluza-Klein está aún lejos de resolver este problema en forma completa⁽¹⁾. Se plantean algunas dificultades, en particular con la naturaleza del espectro de masas generado en el acoplamiento del fibrado con campos bosónicos y fermiónicos; e incluso con la propia definición de las constantes fundamentales asociadas con una partícula material⁽²⁾. Analizaremos esta situación primero desde un punto de vista general, dejando para las secciones siguientes el planteo específico del problema que a nosotros interesa -acoplamiento de un campo escalar con una métrica 5-dimensional tipo Kasner- y sobre el que volveremos en el capítulo VII.

Para comprender la idea básica, supongamos que en una teoría (4 + p)-dimensional tenemos un fermión de spin 1/2 no masivo. El campo ψ que lo representa satisface la ecuación de Dirac (4 + p)-dimensional

$$\Gamma^\mu D_\mu \psi = 0 \quad (4.1)$$

donde las Γ^μ constituyen una representación en ese espacio del álgebra de Clifford. El operador de Dirac admite la descomposición

$$\Gamma^k D_k^{(4)} \psi + \Gamma^a D_a^{(int)} \psi = 0 \quad (4.2)$$

donde $D^{(4)}$ representa el operador de Dirac usual 4-dimensional y $D^{(int)}$ el correspondiente al espacio interno de p dimensiones compactas.

La ecuación (4.2) muestra inmediatamente que los autovalores de $D^{(int)}$ juegan a nivel efectivo el papel de masas 4-dimensionales. Si $D^{(int)} \psi = m \psi$, entonces ψ será considerado por observadores 4-dimensionales (que no acceden a las coordenadas internas) como un fermión de masa $|m|$.

El operador $D^{(int)}$ actúa sobre un espacio compacto y, por tanto, el espectro de masas que genera es discreto. Se encuentra que sus valores propios son cero o del orden de $1/R$, siendo R el "radio" de las dimensiones extra. Puesto que $1/R$ es, en el esquema de Kaluza-Klein, presumiblemente del orden de la masa de Planck,

resulta que los valores propios no nulos de $D^{(int)}$ corresponden a fermiones extremadamente masivos, sin posibilidades ciertas de detección experimental.

Con respecto a esto, es usual tomar dos caminos diferentes: introducir masas a nivel del lagrangiano original del orden de la masa de Planck (a los efectos de recuperar la descripción de partículas livianas), o buscar a los quarks y leptones en los modos cero de $D^{(int)}$. La primera opción plantea un ajuste notable de las condiciones iniciales (problema del fine-tuning), y por tanto, es un argumento que se debilita por su propia artificialidad. La segunda posibilidad es más elaborada y busca la generación de masa de las partículas livianas mediante mecanismos de ruptura de simetría⁽³⁾. Los modelos desarrollados en supergravedad permiten avances significativos en este sentido.

Sin embargo, existe una razón básica que dificulta un planteo completamente satisfactorio del problema por esta vía, razón que se apoya en una de las propiedades fundamentales de las partículas elementales⁽⁴⁾: fermiones de diferente helicidad transforman diferente bajo la acción del grupo de gauge (por ejemplo, se encuentra que los tripletes de color de mano-izquierda son dobletes $SU(2)$, mientras que tripletes de color de mano-derecha son singletes $SU(2)$). Esta es la razón por la cual los quarks y leptones no presentan masas desnudas, sino que las adquieren a través de un mecanismo de Higgs. Este es un hecho muy importante desde el punto de vista teórico, puesto que es la base de nuestra

comprensión del porqué los quarks y leptones son extremadamente livianos ($1-10^9$ Mev) comparados con la escala de masas de la gran unificación (10^{15} Gev) o la masa de Planck (10^{19} Gev). Si los fermiones de mano-izquierda y derecha transformaran de la misma forma bajo el grupo de gauge, las masas desnudas de las partículas elementales estarían permitidas y éstas podrían ser arbitrariamente grandes.

Ahora bien, los modelos en supergravedad⁽⁵⁾ propuestos que buscan reproducir el espectro observado de las partículas elementales mediante mecanismos de ruptura de simetría, son incapaces de diferenciar la quiralidad de los fermiones involucrados: fermiones izquierdos y derechos transforman inevitablemente de la misma manera bajo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. La razón de esto reside en la suposición que los fermiones livianos surgen de los modos cero del operador de Rarita-Schwinger en las dimensiones extra.

En efecto, la formulación de la supergravedad en once dimensiones muestra que el único campo de Fermi fundamental es el campo de Rarita-Schwinger $\psi_{\mu\alpha}$ de espín $3/2$, donde μ es un índice vectorial y α uno espinorial (estos campos se comportan como campos efectivos de espín $1/2$ para $\mu = 5, \dots, 11$). El operador de Rarita-Schwinger en las siete dimensiones extra es incapaz de reconocer cuando un espinor es mano-izquierda o mano-derecha con respecto a las transformaciones de Lorentz 4-dimensionales. Resulta entonces que las masas desnudas son permitidas para todos

los fermiones, haciendo no-natural la obtención final de partículas de masa nula por este procedimiento.

A modo de conclusión de los comentarios anteriores podemos decir que, cualquiera sea el camino adoptado en la determinación del espectro de masas de una teoría multidimensional, parece existir siempre un paso no claramente fundamentado que debe introducirse a los efectos de obtener una descripción realista de las partículas contenidas en la teoría.

4.2 - RENORMALIZACION "CLASICA" DE LAS CONSTANTES FUNDAMENTALES

En la sección 3.4 vimos que el planteo de una métrica invariante derecha determina automáticamente un mecanismo de reducción dimensional. Cuando sobre esta métrica se establece un campo de materia, las constantes de acoplamiento del modelo resultan renormalizadas^{[6]-[7]} (ya a nivel clásico) por los campos escalares derivados de las dimensiones extra.

Tomemos en primer lugar la expresión (3.60) para el escalar de curvatura del espacio fibrado. Es conveniente normalizar la métrica del espacio interno en la forma

$$\phi_{ab} \equiv \phi^{1/p} \rho_{ab} \quad (4.3)$$

de modo que $\phi = \det(\phi_{ab})$ y $\det(\rho_{ab}) = 1$. Resulta entonces para R_p la expresión^[8]

$$\begin{aligned}
R_p = R_M + R_G + 4\pi G \phi^{1/p} \rho_{ab} F^a_{kl} F^b_{kl} - \frac{(p-1)}{4p} \frac{(\partial_k \phi)^2}{\phi^2} \\
+ \frac{1}{4} \rho^{ab} \rho^{cd} (D_k \rho_{ac}) (D_k \rho_{bd}) + \lambda (\det \rho_{ab} - 1)
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Obsérvese que (4.4) distingue claramente la contribución del campo escalar ϕ (único sobreviviente en el caso 5-dimensional). Este campo juega un papel importante tanto en la determinación de las propiedades geométricas del espacio-tiempo como en el proceso de acoplamiento de campos de materia.

En efecto, este campo presenta (excepto para el caso 5-dimensional ($p = 1$)) un término cinético esencialmente negativo. El lagrangiano (3.59) es pues inestable, y por tanto, resulta necesaria la realización de una transformación conforme sobre la métrica inducida en M

$$\epsilon_{kl} \rightarrow \phi^{1/2} \epsilon_{kl}
\tag{4.5}$$

a los efectos de eliminar esa anomalía. La transformación (4.5) permite expresar al lagrangiano (3.59) en la forma

$$\begin{aligned}
L_0 = & - (16\pi G)^{-1} \sqrt{\epsilon} \left\{ R_M + \exp\left[-\left(\frac{p+2}{p}\right)^{1/2} \sigma\right] \hat{R}_\sigma + \exp\left[-\left(\frac{p}{p+2}\right)^{1/2} \sigma\right] \Lambda \right. \\
& + 4\pi G \exp\left[\left(\frac{p+2}{p}\right)^{1/2} \sigma\right] \rho_{ab} F^a_{kl} F^b_{kl} + \frac{1}{2} (\partial_k \sigma)^2 \\
& \left. + \frac{1}{4} \rho^{ab} \rho^{cd} (D_k \rho_{ac}) (D_k \rho_{bd}) + \lambda (\det \rho_{ab} - 1) \right\} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

más un término que es una divergencia total. En la última ecuación, $\hat{R}_\sigma = R_\sigma(\rho_{ab})$ y además se introdujo el dilatón σ , definido como

$$\sigma \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{p+2}{p}\right)^{1/2} \ln \phi \quad (4.7)$$

Es interesante observar que, a este nivel, la dinámica de ρ_{ab} es determinada por un modelo sigma no-lineal acoplado mínimamente a B^a_k con un potencial de autointeracción especificado por $R_\sigma(\rho_{ab})$.

Los resultados anteriores sugieren que, para $p > 1$, debe considerarse a la nueva métrica $(\phi^{1/2}) \epsilon_{kl}$ (y no ϵ_{kl}) como la métrica del espacio-tiempo físico.

El acoplamiento de un campo fermiónico con la métrica anterior nos lleva a completar el lagrangiano (3.59) con el término

$$L_{\text{materia}} = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\phi} \left[\bar{\psi} (\not{\epsilon} \Gamma^\mu \nabla_\mu) \psi + m \bar{\psi} \psi \right] \quad (4.8)$$

La reducción dimensional del término de materia se realiza de acuerdo a la propiedad invariante-R de la métrica $\gamma_{\mu\nu}$. Es fácil probar que la invarianza derecha requiere que se satisfaga la condición⁽⁹⁾

$$\partial_a \psi = 0 \quad (4.9)$$

de manera que este procedimiento asegura nuevamente la eliminación automática de las coordenadas internas. La transformación (4.5) lleva al lagrangiano de materia a adoptar la expresión

$$\begin{aligned} L_{\text{materia}} = \sqrt{\epsilon} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p}{p+2} \right)^{1/2} \sigma \right] \bar{\psi} i \gamma^k \nabla_k \psi - \right. \\ \left. \exp \left[-\frac{p+1}{[p(p+2)]^{1/2}} \sigma \right] \bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi + \right. \\ \left. \frac{i}{4} \left(\frac{p}{p+2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p}{p+2} \right)^{1/2} \sigma \right] (\partial_k \sigma) \bar{\psi} \gamma^k \psi - \right. \\ \left. \frac{e\kappa}{4} \exp \left[\frac{1}{[p(p+2)]^{1/2}} \sigma \right] G^a_{kl} \bar{\psi} (S^{kl} \otimes \gamma_a) \psi + \right. \\ \left. \frac{1}{4\kappa} \exp \left[-\frac{p+1}{[p(p+2)]^{1/2}} \sigma \right] f^c_{ab} \bar{\psi} S^{ab} \gamma_c \psi + m \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p}{p+2} \right)^{1/2} \sigma \right] \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Los cálculos que llevan a (4.10) son directos aunque engorrosos, por lo que nos los incluiremos aquí. Las matrices γ dan una representación particular del álgebra de Clifford multidimensional:

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= \gamma_k \otimes \mathbb{1}_k \\ \Gamma_a &= \gamma_5 \otimes \gamma_a, \quad \{\gamma_a, \gamma_b\} = -2 \delta_{ab}\end{aligned}$$

y además

$$S_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b]$$

El acoplamiento mínimo de fermiones en una teoría de Einstein (4+p)-dimensional es descrito entonces por el lagrangiano

$$L = L_0 + L_{\text{materia}} \quad (4.11)$$

Puede hacerse a este lagrangiano físicamente más transparente normalizando apropiadamente a los campos. Con los cambios

$$B^a_k \rightarrow \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p+2}{p}\right)^{1/2} \sigma\right] B^a_k, \quad \psi \rightarrow \exp\left[\frac{1}{4} \left(\frac{p}{p+2}\right)^{1/2} \sigma\right] \psi \quad (4.12)$$

e introduciendo la constante de gauge efectiva

$$\bar{e} = e \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p+2}{p}\right)^{1/2} \sigma\right] \quad (4.13)$$

resulta en términos de estas nuevas variables la siguiente expresión para este lagrangiano

$$\begin{aligned}
L = & - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\sigma\pi G}} \left\{ R_M + \exp\left[-\left(\frac{p+2}{p}\right)^{1/2}\sigma\right] \hat{R}_\sigma + \right. \\
& \exp\left[-\left(\frac{p}{p+2}\right)^{1/2}\sigma\right] \Lambda + \frac{1}{2} (\partial_k \sigma)^2 + \\
& \left. \frac{1}{4} \rho^{ab} \rho^{cd} (D_k \rho_{ac}) (D_k \rho_{bd}) + \lambda (\det \rho_{ab} - 1) \right\} + \\
\sqrt{6} \left\{ - \frac{1}{4} \left[F^a_{kl} + \frac{1}{2} [p+2/p]^{1/2} (B^a_k \partial_l \sigma - B^a_l \partial_k \sigma) \right]^2 \right. & (4.14) \\
& + \bar{\psi} i \gamma^k \left(\nabla_k + \frac{1}{2} [p(p+2)]^{1/2} \partial_k \sigma \right) \psi - \\
\frac{\sqrt{4\sigma\pi G}}{4} \left[F^a_{kl} + \frac{1}{2} [p+2/p]^{1/2} (B^a_k \partial_l \sigma - B^a_l \partial_k \sigma) \right] \bar{\psi} s^{kl} \otimes \gamma_a \psi & \\
& \left. + \frac{1}{4\kappa} f^c_{ab} \bar{\psi} s^{ab} \gamma_c \psi + \bar{m} \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \right\}
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{\kappa} = \kappa \exp\left[\frac{1}{2} \left(\frac{p+2}{p}\right)^{1/2} \sigma\right] \quad \text{y} \quad \bar{m} = m \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p}{p+2}\right)^{1/2} \sigma\right] \quad (4.15)$$

Con las nuevas constantes de acoplamiento, el lagrangiano toma la forma estandar. La implicancia fisica de los resultados anteriores es clara: el campo σ se acopla con las constantes fundamentales del sistema considerado. Es interesante notar que no sólo la constante de acoplamiento y la escala de longitudes característica del espacio interno son renormalizadas por el

dilatón, sino también la masa resulta afectada de acuerdo con la expresión (4.15).

4.3 - APROXIMACION DEL "MODO CERO"

El proceso de reducción dimensional puede efectuarse también a partir de la compactificación de las dimensiones extra. De hecho, este método (basado en la hipótesis de Klein) es el que se aplica usualmente, tanto en la determinación del vacío de la teoría como en el acoplamiento con campos de materia^[10].

En el caso 5-dimensional, la compactificación implica la ruptura de simetría $M^5 \rightarrow M^4 \otimes S^1$ para el vacío de la teoría. Ambos M^5 y $M^4 \otimes S^1$ resuelven trivialmente las ecuaciones del campo 5-dimensionales. Clásicamente no es sencillo decidir cual de estos espacios es más apropiado para caracterizar el estado fundamental^[11] (ambos tienen energía "cero", aunque existen dificultades -propias de la relatividad general- en la definición y comparación de dicha energía). Además, existen problemas vinculados con la estabilidad del vacío de Kaluza-Klein^[12].

Las simetrías de $M^4 \otimes S^1$ son las del grupo de Poincaré actuando sobre M^4 y el grupo $U(1)$ de rotaciones del círculo S^1 . Pequeñas oscilaciones en torno al estado fundamental producen un número infinito de excitaciones masivas, cuyas masas resultan del orden de la inversa de la circunferencia de S^1 ^[13]. Se encuentra además un número finito de modos no masivos, los que constituyen

el límite de bajas energías de la teoría. Estos modos no masivos incluyen al gravitón y al fotón como las partículas de gauge de las simetrías de $M^4 \otimes S^1$, y un escalar de "Brans-Dicke", el coeficiente γ_{55} del elemento de línea 5-dimensional.

Suponiendo que la compactificación está establecida, es posible efectuar una expansión de los potenciales y los campos en término de los modos normales del espacio compacto^[14]. Las ecuaciones pueden ser integradas directamente en las coordenadas internas, resultando una acción efectiva dependiente únicamente de las coordenadas x^k . El modo cero de esta expansión provee de un esquema aproximado de reducción dimensional, donde uno pretende restringirse a la región de baja energía de la teoría.

Limitaremos la discusión de este punto al caso 5-dimensional y al tratamiento de un campo de materia escalar. La reducción dimensional por la compactificación de un campo mesónico en 5 dimensiones nos permitirá considerar en los capítulos VI y VII cuestiones interesantes relativas al significado físico del campo de "Brans-Dicke" γ_{55} y también (utilizando un modelo cosmológico simple de tipo Kasner) los problemas que surgen en la definición de las constantes fundamentales.

4.4 - QED ESCALAR A PARTIR DE LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN⁽¹⁵⁾

Consideremos un campo escalar real $\psi(x^\mu)$ en un espacio-tiempo 5-dimensional cuya acción es

$$S_5 = \int d^5x \sqrt{|\gamma|} \left\{ \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + m_0^2 \psi^2 \right\} \quad (4.16)$$

donde $\gamma = \det \gamma^{\mu\nu} = \phi \epsilon$, $\epsilon = \det \epsilon^{kl}$ y la métrica plana es, como siempre, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-,+,+,+,+)$. Tomando sobre el fibrado una base local producto directo, los elementos del tensor métrico resultan dados por las expresiones (3.31) y (3.32). En el caso 5-dimensional $\epsilon_{ab} \equiv \phi \delta_{ab}$ ($a, b = 1$), de modo que tenemos (eliminando el índice trivial correspondiente a las variables internas)

$$\begin{aligned} \gamma_{kl} &= \epsilon_{kl} + e^2 \kappa^2 \phi A_k A_l \\ \gamma_{k5} &= e\kappa \phi A_k \\ \gamma_{55} &= \phi \end{aligned} \quad (4.17)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma^{kl} &= \epsilon^{kl} \\ \gamma^{k5} &= -e\kappa \epsilon^{kl} A_l \\ \gamma^{55} &= \phi^{-1} + e^2 \kappa^2 \epsilon^{kl} A_k A_l \end{aligned} \quad (4.18)$$

En estas expresiones hemos introducido la constante dimensional κ y la carga electrónica en la definición del potencial de gauge A_k .

según hemos visto en (3.57). En el sistema de coordenadas considerado, la métrica 5-dimensional tiene la forma estandar

$$ds^2 = \phi (dx^5 + \beta A_k dx^k)^2 + \epsilon_{kl} dx^k dx^l \quad (4.19)$$

siendo

$$\beta \equiv e x = \sqrt{16\pi G} \quad (4.20)$$

de acuerdo con (3.61).

La compactificación de la quinta dimensión permite plantear el siguiente desarrollo de Fourier para el campo de materia

$$\psi(x^k, x^5) = \sum_n \psi_n(x^k) \exp\{i q_n x^5\} \quad (4.21)$$

donde

$$q_n = \frac{2\pi n}{R_5} \quad (4.22)$$

Introduciendo (4.21) en (4.16) y efectuando la integración sobre x^5 ($\gamma^{\mu\nu}$ se supone independiente de la coordenada x^5) se obtiene la siguiente expresión para la acción reducida tetradimensional

$$S_4 = \sum_n \int d^4x \sqrt{|\gamma|} \left[\gamma^{kl} \partial_k \psi_n^* \partial_l \psi_n + i q_n \gamma^{k5} (\psi_n \partial_k \psi_n^* - \psi_n^* \partial_k \psi_n) + q_n^2 \gamma^{55} \psi_n^* \psi_n + m_0^2 \psi_n^* \psi_n \right] \quad (4.23)$$

Utilizando las expresiones de $\gamma^{\mu\nu}$ dadas en (4.18), la acción puede escribirse en la forma

$$S_4 = \sum_n \int d^4x \sqrt{|\gamma|} \left[\epsilon^{kl} (D_k \psi_n)^* D_l \psi_n + (m_0^2 + q_n^2/\phi) \psi_n^* \psi_n \right] \quad (4.24)$$

donde

$$D_k = \partial_k - i q_n \beta A_k \quad (4.25)$$

es la derivada covariante de gauge. El principio de mínima acción, aplicado sobre cada componente S_{4n} de la suma (4.24), genera la siguiente ecuación de ondas para el campo $\psi_n(x^k)$

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} D_k (\sqrt{|\gamma|} \epsilon^{kl} D_l \psi_n) - m_n^2 \psi_n = 0 \quad (4.26)$$

donde

$$m_n^2 = m_0^2 + q_n^2/\phi \quad (4.27)$$

Es obvio que la presencia del campo escalar ϕ impide una interpretación física directa de este resultado. Sólo en el caso de Kaluza, donde $\phi = \text{constante} = 1$, (4.26) se reduce a la ecuación

de ondas de un campo de Klein-Gordon acoplado mínimamente con el potencial electromagnético A_k . Esta prescripción hace que identifiquemos la constante de acoplamiento para el campo ψ_n con la expresión

$$e_n = \beta q_n = \beta \frac{2\pi n}{R_5} \quad (\phi \equiv 1) \quad (4.28)$$

($\hbar = c = 1$). Este es naturalmente el resultado principal de la hipótesis de Klein, establecido ya en la ecuación (2.43).

La ecuación (4.27) muestra cómo la masa asociada con el campo ψ_n resulta afectada por la compactificación de la quinta dimensión. El proceso de compactificación genera un término de masa del orden de la masa de Planck, puesto que R_5 es del orden de la longitud de Planck. Por lo tanto, aún limitándonos al primer modo del desarrollo de Fourier (4.21), la (masa)² en el lagrangiano original debe ajustarse a un valor enorme y negativo de forma de recuperar una descripción realista de una partícula liviana. Este ajuste tan riguroso de las condiciones iniciales confiere a la descripción anterior un alto grado de artificialidad, constituyéndose en uno de los problemas típicos inherentes a toda formulación de Kaluza-Klein (problema del fine-tuning).

Los resultados obtenidos muestran pues como puede generarse la QED escalar en 4 dimensiones a partir de un campo de materia

neutro 5-dimensional. La QED escalar se obtiene rigurosamente en el caso más restrictivo de asumir una métrica 5-dimensional del tipo de Kaluza, con $\gamma_{55} = \text{constante}$. Los puntos característicos que surgen en esta aproximación lo constituyen la relación (ya establecida anteriormente) entre la carga eléctrica y el radio de la quinta dimensión, y la generación dinámica de masa producida por la compactificación.

4.5 - LA SOLUCION DE CHODOS Y DETWEILER⁽¹⁶⁾

Supongamos ahora que la métrica del espacio-tiempo 5-dimensional es de tipo Kasner

$$ds^2 = -dt^2 + (t/t_0) (dx^4)^2 + (t_0/t) (dx^5)^2 \quad (4.29)$$

Como sabemos, esta solución de las ecuaciones del campo trata de manera diferente a sus dimensiones espaciales, permitiendo describir un universo efectivo tetradimensional (para valores de t suficientemente grandes) a partir de un universo de 5 dimensiones.

A los efectos de vincular la coordenada temporal t con las constantes de la partícula, Chodos y Detweiler efectúan un reescalado de las coordenadas de manera que la métrica de Kasner adopte la forma

$$ds^2 = -dt^2 + (t/\tau)(dx^4)^2 + (\tau/t)(dx^5)^2 \quad (4.30)$$

con $t/\tau \approx 1$. Este cambio de escala hace que la nueva coordenada x^5 satisfaga la condición

$$0 \leq x^5 < R_5(t_0/\tau)^{1/2} \quad (4.31)$$

Sobre la métrica anterior se incluye ahora al potencial electromagnético $\gamma_{k5} = \beta A_k$ como una pequeña perturbación. Considerando entonces un campo cuántico $\psi(x^\mu)$ acoplado con esta métrica por la ecuación

$$\square_5 \psi + \alpha \psi = 0, \quad (4.32)$$

(donde \square_5 es el operador d'Alambertiano covariante 5-dimensional), suponiendo que ψ es periódica con periodo $R_5(t_0/\tau)^{1/2}$ en la coordenada x^5 e ignorando variaciones en la cantidad t/τ (supuesta igual a uno), Chodos y Detweiler obtienen la siguiente expresión a segundo orden en A_k

$$\begin{aligned} \square \psi - (q^2 - \alpha)\psi - 2iq(A^k \partial_k \psi) - iq(\partial_k A^k)\psi \\ - q^2 A^k A_k \psi - A_{k,5} \partial^k \psi + 2iq(A^k A_{k,5})\psi = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde resulta ahora

$$q = \frac{2\pi}{R_5(t_0/\tau)^{1/2}} \quad (4.34)$$

Como era de esperar, ψ es un campo de Klein-Gordon acoplado con el campo electromagnético (además de otras interacciones debidas a la posible variación de A_k en la quinta dirección). Se encuentra ahora que la unidad básica de carga obedece la relación

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \left(\frac{c^3}{16\pi^2 G \hbar} \right) = \frac{\tau}{t_0} \left(\frac{1}{R_5^2} \right) \quad (4.35)$$

donde se ha incluido explícitamente las constantes \hbar y c . El parámetro τ representa un tiempo característico de la edad actual del universo y t_0 es el tiempo para el cual las cuatro dimensiones espaciales son equivalentes. Utilizando los valores conocidos de las constantes en (4.35) se obtiene nuevamente

$$(t_0/\tau)^{1/2} R_5 = 2.38 \times 10^{-81} \text{ cm} \quad (4.36)$$

o sea, la quinta dimensión resulta restringida a un intervalo de variación sumamente pequeño (del orden de la longitud de Planck).

La ecuación (4.35) muestra que el cociente de las constantes de acoplamiento eléctrica y gravitatoria es proporcional a la edad del universo, resultado que está de acuerdo con la hipótesis de Dirac de los grandes números⁽¹⁷⁾. En particular, cuando $t \approx t_0$ (y suponiendo m constante) ambas interacciones resultan aproximadamente de la misma intensidad, y hoy el enorme valor de la razón entre la interacción eléctrica a la gravitatoria es una consecuencia de la edad del universo.

La *dinámica* (en una escala cosmológica) que adquieren las constantes fundamentales responde al comportamiento peculiar del campo escalar ϕ de Kaluza-Klein. Esta dinámica complica el problema del fine-tuning asociado con la masa del campo ψ . En efecto, vemos que en este modelo aún un ajuste (en un instante τ_0) extremadamente estricto de la constante α no resulta suficiente, ya que la partícula es un tachion para tiempos anteriores a τ_0 y se vuelve extremadamente masiva para valores de τ mucho mayores que τ_0 .

El análisis de Chodos y Detweiler plantea ciertas cuestiones sobre el comportamiento temporal de las constantes del sistema a partir de la relación fundamental (4.35). Estos autores suponen dos hipótesis sobre la dependencia temporal individual de estas constantes:

- 1- la constante de estructura fina $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ es constante sobre periodos cosmológicos.
- 2- la masa de la partícula (en unidades atómicas) es también independiente de τ .

La hipótesis (1) cuenta con un fuerte apoyo experimental, mientras que (2) "es una suposición extra, pero la más razonable que puede hacerse".

Sobre esta base (y tomando un sistema de unidades en que $c = 1$, lo que es siempre posible), resulta de (4.35) que $G\hbar \propto 1/\tau$. En unidades atómicas $\hbar = \text{constante}$, de manera que $G \propto 1/\tau$. La hipótesis (2) asegura entonces en esta situación el siguiente

comportamiento para la razón entre las interacciones eléctrica y gravitatoria

$$e^2/Gm^2 \propto \tau \quad (4.37)$$

en un todo de acuerdo con la hipótesis de Dirac. En unidades gravitacionales tenemos que $G = \text{constante}$, de modo que ahora $\hbar \propto 1/\tau$. Puesto que α es constante, resulta $e^2 \propto 1/\tau$ y, en orden de satisfacer (4.37), concluimos que $m \propto 1/\tau$ en unidades gravitacionales.

Un resultado interesante de este análisis lo constituye el comportamiento de las frecuencias atómicas ligadas con la emisión de señales por átomos. $E = mf(\alpha)$ representa la energía de un nivel atómico típico y $\nu = (1/\hbar)mf(\alpha)$ su frecuencia. Es inmediato ver entonces que, tanto en unidades atómicas como gravitacionales, el cociente m/\hbar es independiente de τ . La variación temporal de las constantes fundamentales no afecta pues, de acuerdo con este enfoque, el corrimiento al rojo de las líneas espectrales.

Es claro observar que las conclusiones anteriores se obtuvieron contemplando principalmente la validez de la hipótesis de Dirac (4.37). De hecho, todo lo razonable que puede atribuirse a la hipótesis (2) se apoya en este punto. Ahora bien, el modelo considerado provee específicamente de un vínculo entre la masa de la partícula y el parámetro de evolución del universo τ . Este vínculo es claramente patológico y resultaría deseable poder

ignorarlos en el análisis general del comportamiento de las constantes con respecto a la edad del universo. Sin embargo, la inclusión de dicha relación en el análisis de Chodos y Detweiler produce resultados que se apartan notablemente de la hipótesis de Dirac. Esto produce un divorcio importante entre el vínculo dado entre las constantes y la edad del universo por la teoría de Kaluza-Klein y el requisito que dichas constantes se ajusten a la hipótesis de Dirac. Veamos esto más en detalle.

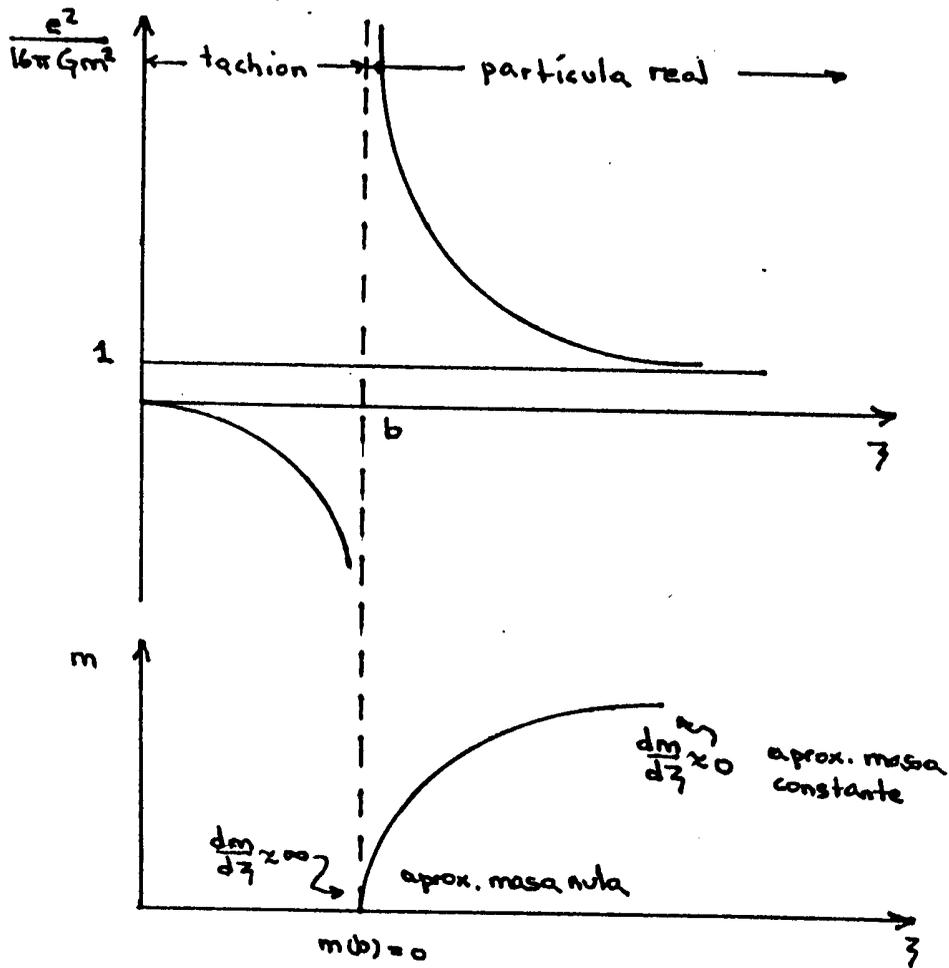
De acuerdo con (4.33) y (4.34) (ver también (4.27)), la variación de la masa con el parámetro τ viene dada por

$$m^2 = \frac{4\pi^2}{R_5^2} \left(\frac{\tau}{t_0} \right) - a \quad (a > 0) \quad (4.38)$$

La inclusión de (4.38) en la relación entre las interacciones eléctrica y gravitatoria escrita en el sistema atómico de unidades resulta en la expresión

$$\frac{e^2}{16\pi G m^2} = \frac{\tau}{\tau - b t_0}, \quad b \equiv a R_5^2 / 4\pi^2 \quad (4.39)$$

donde hemos utilizado el resultado (4.35) de Chodos y Detweiler. Las gráficas que siguen muestran el comportamiento de $e^2/16\pi G m^2$ y m en función del parámetro adimensionado $\xi = \tau/t_0$.



En las figuras anteriores se observa lo siguiente:

1- para valores de ζ mayores y próximos a b , $m(\zeta) \approx 0$ (zona de partícula liviana) y además $dm/d\zeta \approx \infty$ (crecimiento extremadamente rápido de la masa con τ). La razón de las fuerzas eléctricas y gravitatorias en esta situación es completamente anormal: se hace infinita cuando $\zeta = b$ y disminuye con rapidez a medida que crece τ .

2- cuando $\xi \gg b$ se hace válida la aproximación $dm/dr \approx 0$ (zona de masa constante). En esta situación, e^2/Gm^2 se aproxima asintóticamente (y disminuyendo con τ) a uno, en total desacuerdo con la hipótesis de Dirac.

Las conclusiones de este análisis elemental son claras: la generación dinámica de masa producida por la compactificación altera de tal modo el comportamiento de las constantes que no es posible asignarle un significado físico cierto. Estamos sin duda frente a una situación ambigua: por un lado el resultado de Chodos y Detweiler sobre el comportamiento cosmológico de e^2/G es significativo desde el punto de vista físico, no sólo a través de la posibilidad que ofrece - ya desde la época de Klein - de dar un marco teórico a un problema tan importante como la cuantificación de la carga, sino también por proveer de un modelo de evolución cosmológica de las constantes fundamentales. Este modelo - el propuesto por Chodos y Detweiler - ignora sin embargo conclusiones fundamentales provenientes de la compactificación de la quinta dimensión.

En realidad, el planteo de Chodos y Detweiler no es completo. Por ejemplo, no tiene en cuenta la alteración de la constante gravitatoria por el cambio de escala en la métrica de Kasner. Tampoco considera los efectos de la renormalización de la carga y la masa asociadas al campo cuántico ψ . En el capítulo VI haremos un planteo más preciso (y general) del comportamiento de un campo escalar de materia acoplado con una métrica 5-dimensional de

Kaluza-Klein, atendiendo especialmente el problema de las constantes asociadas a la partícula. Los resultados que se obtienen difieren notablemente con los de Chodos y Detweiler (veremos por ejemplo que es posible - dentro de ciertos límites - compatibilizar la hipótesis de Dirac con la función $m(r)$ de Kaluza-Klein). También, en el capítulo VII, veremos como la utilización de las técnicas del grupo de renormalización permite definir un sistema de unidades que contemple las peculiares dependencias cosmológicas que la teoría de Kaluza-Klein atribuye a las constantes fundamentales.

REFERENCIAS

- 1 - E. Witten, *Search for a realistic Kaluza-Klein theory*, Nucl. Phys. B186, 412 (1981).
- 2 - Ver por ejemplo J. Gegenberg and G. Kunstatter, *The motion of charged particles in Kaluza-Klein space-time*, Phys. Lett. 106A, 410 (1984). También A. O. Barut and M. Pavsic, *Kaluza-Klein approach to the classical model of the Dirac electron*, Preprint IC/87/326, Miramar-Trieste (1987).
- 3 - M. J. Duff and B. E. Nilsson, *Kaluza-Klein supergravity*, Phys. Rep. 130, 1-142 (1986); P. Van Nieuwenhuizen, *An introduction to simple supergravity and the Kaluza-Klein program*, Course 8 in Relativity, groups and topology II, Les Houches 1983, North-Holland (1984).
- 4 - E. Witten, op. cit., pag. 421.
- 5 - M. J. Duff and B. E. Nilsson, op. cit., pag. 79. Ver también P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, Phys. Rep. 68, 189-398 (1981).
- 6 - Y. M. Cho, *Internal gravity*, Phys. Rev. D35, 2628 (1987).
- 7 - Y. M. Cho, *Effective couplings in Kaluza-Klein unification*, Phys. Lett. B199, 358 (1987).
- 8 - Y. M. Cho, *Internal gravity*, op. cit., pag. 2629.
- 9 - Y. M. Cho, *Effective couplings in Kaluza-Klein unification*, op. cit., pag. 360.
- 10 - G. F. Chyba, *Kaluza-Klein unified field theory and apparent four-dimensional space-time*, Am. J. Phys. 53, 863 (1985). Ver también T. Appelquist and A. Chodos, *Quantum*

- dynamics of Kaluza-Klein theories*, Phys. Rev. D28, 772 (1983).
- 11 - E. Witten, op. cit., pag. 414.
 - 12 - E. Witten, *Instability of the Kaluza-Klein vacuum*, Nucl. Phys. B195, 481 (1982).
 - 13 - G. F. Chyba, op. cit., pag. 866. Ver también J. Rayski, *Unified field theory and Modern Physics*, Acta Phys. Pol. 27, 89 (1965).
 - 14 - A. Salam and J. Strathdee, *On Kaluza-Klein theory*, Ann. of Phys. 141, 316 (1982).
 - 15 - J. Souriau, *Five-dimensional relativity*, Nuov. Cim. 30, 565 (1963).
 - 16 - A. Chodos and S. Detweiler, *Where has the fifth dimension gone?*, Phys. Rev. D. 21, 2167 (1980)
 - 17 - P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A165, 199 (1938).

CAPITULO V

LA REALIDAD FISICA DE LA QUINTA DIMENSION

5.1 - INTRODUCCION

En los capítulos anteriores hemos considerado diferentes aspectos del programa de unificación de Kaluza-Klein. También hemos discutido su relación con otras teorías actualmente en desarrollo, como la supergravedad y la teoría de cuerdas.

Un punto importante entre los distintos ingredientes que conforman este programa lo constituye la propia interpretación del significado de las dimensiones extra. La evolución de las ideas en juego marcan, en este aspecto, una tendencia a dotar a estas dimensiones de una realidad física concreta. Según esta interpretación, nuestro universo contendría una parte oculta (ciertamente inaccesible en la escala de energías físicamente manejables) aunque muy importante en sus funciones, ya que determina todos los mecanismos de interacción de la parte visible, donde se manifiesta la naturaleza tal cual la percibimos hoy. En el capítulo II mostramos someramente la influencia de estas ideas en el desarrollo de la teoría de Kaluza-Klein.

Un aspecto fundamental vinculado con este punto lo constituye la posibilidad de manejar modelos cosmológicos consistentes con estas hipótesis. En la sección 3.5 mostramos como se obtienen a

partir de las ecuaciones del campo soluciones cosmológicas que modelan un universo como el que acabamos de describir. Este universo, por alguna razón que desconocemos, decide tratar en forma diferente a las dimensiones físicas que lo conforman, produciendo la expansión de 3 y la compactificación y contracción del resto de sus dimensiones espaciales.

Esta imagen presenta, a nuestro juicio, dos características contrapuestas: es atrayente pero débil. No deja de ser sugestiva la posibilidad de construir modelos del universo consistentes que permitan a las dimensiones extra existir pero no ser detectadas. Sin embargo, la no unicidad inherente de estos modelos (en realidad, podríamos vivir hoy en un universo completamente diferente, con un número arbitrario de dimensiones en expansión y otro tanto compactificadas), no deja abandonar en definitiva el terreno especulativo del problema.

Resulta pues interesante preguntarse si existe en el campo fenomenológico la posibilidad de encontrar evidencia adicional de la existencia de las dimensiones extra. En principio, no habría razón para que no existiesen vestigios de las dimensiones extra del universo de Kaluza-Klein que puedan manifestarse en la forma de fenómenos observables a nivel del espacio-tiempo tetradimensional.

Nuestro propósito es mostrar que existen ciertos fenómenos físicos de naturaleza cuántica (el efecto Aharonov-Bohm y el

efecto Meissner-Ochensfeld en superconductores) que pueden ser explicados satisfactoriamente en el marco de la teoría de Kaluza-Klein. En este sentido, dichos efectos pueden ser considerados como evidencia experimental sobre la existencia de la quinta dimensión (obsérvese que al involucrar éstos fenómenos esencialmente a la interacción electromagnética, sólo resulta afectada una dimensión extra en el formalismo de Kaluza-Klein).

Otro aspecto sugestivo ligado con los resultados que presentaremos lo constituye la posibilidad de dar un fundamento clásico a fenómenos de naturaleza cuántica. En la sección siguiente discutiremos en detalle este aspecto ligado al efecto Aharonov-Bohm. Con respecto al efecto Meissner-Ochsenfeld, el trabajo de W. Farrel Edwards⁽⁹⁾ constituye un antecedente sobre la derivación clásica de las ecuaciones de London.

5.2 - EL EFECTO AB Y LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN, MOTIVACIONES

Pocos fenómenos han producido en Física un debate tan intenso sobre sus fundamentos como lo ha hecho el efecto Aharonov-Bohm (o efecto AB).

En 1959 Aharonov y Bohm⁽¹⁾ mostraron que existen efectos físicos observables de naturaleza electromagnética sobre partículas cargadas que se mueven en regiones donde los campos son nulos. Los potenciales, considerados siempre como vehículos

matemáticos convenientes para expresar a los campos (carentes por tanto de toda vinculación con el mundo real), aparecen aquí como los responsables directos de un fenómeno experimental^[2].

Una intensa controversia^[3] sobre el significado de los potenciales electromagnéticos se planteó desde que este efecto fue predicho en 1959. Varios autores se esforzaron por hacer desaparecer a los potenciales del planteo inicial hecho por Aharonov y Bohm. También se discutía el propio diseño experimental, buscando la posibilidad de que el efecto (ya observado) se debiera a otras causas (por ejemplo, influencia de campos no previstos, etc.). Los intentos realizados para revertir estas consecuencias resultaron claramente insatisfactorios, y hoy hay consenso general sobre su interpretación en términos de los potenciales (más precisamente, en función de magnitudes invariantes gauge que se manifiestan aún en ausencia de campos).

A pesar de las diferentes reacciones producidas, no existió en principio desacuerdo sobre la existencia del efecto en sí mismo. Y esto fue así pues este fenómeno contaba con un apoyo fundamental: el de la mecánica cuántica. Sin embargo, en 1982 Bocchieri y Loinger^[4] mostraron que la explicación cuántica usualmente aceptada del efecto AB conduce a inconsistencias con principios básicos, sustentados por la propia mecánica cuántica. Si aceptamos estos argumentos, es claro que se involucra ahora al efecto mismo como carente de un marco teórico apropiado.

En este contexto, se vuelve necesaria una nueva interpretación teórica de todos aquellos experimentos que son considerados verificaciones del efecto AB. La teoría de Kaluza-Klein provee esta explicación, con las consecuencias (relativas tanto a dicho efecto como a la propia teoría de Kaluza-Klein) comentadas en la sección anterior.

5.3 - EL EFECTO AB Y LA MECANICA CUANTICA

El experimento de Aharonov y Bohm se refiere al desplazamiento del patrón de interferencia de las ondas de de Broglie en un dispositivo de doble rendija por causa de un solenoide infinito. El solenoide se ubica inmediatamente por detrás y entre las rendijas de una pantalla sobre la que se hace incidir un haz monoenergético y homogéneo de electrones (ver la figura).

El paquete de ondas que incide sobre las rendijas se descompone en dos paquetes coherentes (1) y (2), cuyos "centros" viajan por encima y por debajo del solenoide, respectivamente.

Sean $\varphi_1^{(0)}$ y $\varphi_2^{(0)}$ las funciones de onda asociadas a dichos paquetes en ausencia de campo magnético en el interior del solenoide. Las funciones de onda que describen la interferencia de los electrones cuando se establece un campo $B = \nabla \wedge A$ en el interior

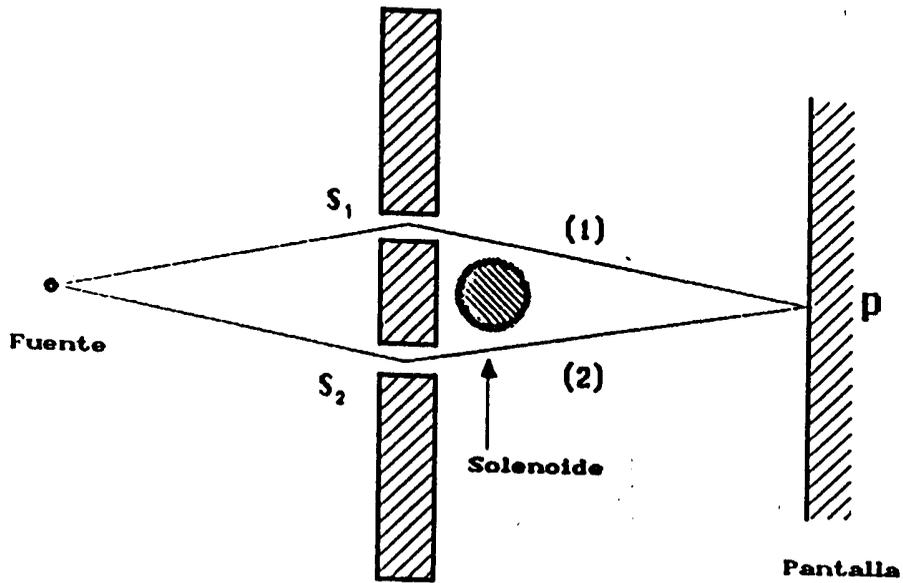


FIGURA: Un paquete de ondas emitido por la fuente se divide en dos paquetes coherentes al incidir sobre las rendijas. Ambos paquetes representan partículas cargadas que viajan a lo largo de las trayectorias (1) y (2) e interfieren en el punto P de la pantalla detectora.

del mismo son entonces, de acuerdo con Aharonov y Bohm

$$\psi(r,t) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int_{(1)} A \cdot dr\right] \psi_1^{(0)}(r,t) + \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int_{(2)} A \cdot dr\right] \psi_2^{(0)}(r,t)$$

donde e es la carga electrónica y las integrales son evaluadas sobre las trayectorias del centro de los correspondientes paquetes. La ecuación anterior puede ser escrita en la forma

$$\psi(r,t) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int_{(1)} A \cdot dr\right] \left\{ \psi_1^{(0)}(r,t) + \exp\left[\frac{ie\Phi}{\hbar}\right] \psi_2^{(0)}(r,t) \right\} \quad (5.1)$$

donde $\Phi \equiv \oint A \cdot dr$ representa el flujo magnético a través de la superficie encerrada por las trayectorias (1) y (2).

A partir de (5.1) puede obtenerse una expresión para el patrón de interferencia en función del flujo magnético Φ . Puede demostrarse fácilmente⁽⁵⁾ que esta función determina un desplazamiento global (θ) del patrón de dos rendijas en la magnitud

$$\text{sen } \theta = \frac{e \Phi}{d p} \quad (5.2)$$

siendo p la magnitud del momento lineal de los electrones y d la separación entre las rendijas.

Esta es la solución que la mecánica cuántica provee de la situación considerada. Para encontrarla, basta con resolver la ecuación de Schrödinger correspondiente. Lo peculiar de la situación resulta de la naturaleza de los campos presentes: al ser el solenoide infinitamente largo, $B \equiv 0$ en todos los puntos no interiores del mismo. Sin embargo, el potencial vector no se anula en toda la región exterior al solenoide (pues su integral de línea a lo largo de cualquier curva que rodee a la bobina es diferente de cero si $\Phi \neq 0$).

Si nos colocamos en la posición de un electrón en viaje al punto P de la pantalla detectora, vemos que éste sólo es capaz de interactuar *localmente* con los potenciales, pero no con los campos. La influencia de los campos sobre su movimiento es, a lo sumo, de naturaleza no local. Esta situación coloca en una posición comprometida al electromagnetismo clásico, construido básicamente sobre la hipótesis que sólo la *interacción local* de los campos posee significado físico. Por esto, la discusión sobre la interpretación de este efecto se centró principalmente en el significado de *localización* y de la *acción a distancia* de las diferentes magnitudes electromagnéticas.

Sin embargo, como ya lo señalamos, en 1982 Bocchieri y Loinger⁽⁴⁾ plantearon un nuevo enfoque de este problema, dando argumentos sobre la incompatibilidad del efecto AB con las leyes de la mecánica cuántica. Su intención es "probar que la concepción de Aharonov y Bohm conduce a inconsistencias con los principios fundamentales de la teoría cuántica. De acuerdo con esto la interpretación corriente de los experimentos concernientes al efecto AB resulta insostenible".

El argumento de Bocchieri es realmente simple y se refiere a la dependencia de las magnitudes observables (valores medios de operadores hermiticos) con el flujo del campo magnético. Si por \hat{F} representamos el operador correspondiente a un observable físico, el valor esperado de dicha magnitud en el estado superpuesto (5.1) es

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \hat{F}\varphi \rangle &= \langle \varphi_1^{(0)}, \hat{F}\varphi_1^{(0)} \rangle + \langle \varphi_2^{(0)}, \hat{F}\varphi_2^{(0)} \rangle \\
&+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \exp\left[-\frac{ie\mathfrak{E}}{\hbar}\right] \langle \varphi_1^{(0)}, \hat{F}\varphi_2^{(0)} \rangle \right\}
\end{aligned}
\tag{5.3}$$

Si $\hat{F} \equiv \hat{r}$, se produce de acuerdo con (5.3) un corrimiento - dependiente del flujo magnético \mathfrak{E} - del *baricentro* del sistema de anillos de interferencia de Young aún cuando no se efectúe trabajo alguno sobre el sistema. Este resultado es contrario, de acuerdo con Bocchieri y Loinger, con el principio de conservación de la energía (conclusiones similares se obtienen tomando simplemente $\hat{F} = \hat{H}$, el operador hamiltoniano del sistema).

5.4 - DERIVACION DEL EFECTO AB A PARTIR DE LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN⁽⁶⁾⁻⁽⁷⁾

Consideraremos primero la descripción de las trayectorias de partículas cargadas desde el punto de vista de la teoría de Kaluza-Klein. Como sabemos, éstas están dadas por la proyección de las geodésicas asociadas a una partícula material en 5 dimensiones. Estas últimas se obtienen a partir de la ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0
\tag{5.4}$$

siendo s el parámetro afin usual, proporcional al tiempo propio

$$d\tau^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^5 + \beta A_k dx^k)^2 + \epsilon_{kl} dx^k dx^l
\tag{5.5}$$

donde hemos tomado $\gamma_{55} = \text{constante} = 1$ y $\gamma_{k5} = \beta A_k$. Separando los índices $k = 1, \dots, 4$ y $a = 5$ en (5.4) y desarrollando los símbolos de Christoffel se obtienen las siguientes ecuaciones del movimiento

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{lm} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^m}{ds} = \mathcal{X} \beta F^k_l \frac{dx^l}{ds} \quad (5.6a)$$

$$\frac{dx^5}{ds} + \beta A_k \frac{dx^k}{ds} = \mathcal{X} \quad (\text{constante}) \quad (5.6b)$$

donde, como en la sección 3.3, Γ^k_{lm} representan los símbolos de Christoffel asociados con la métrica ξ_{kl} y F_{kl} es el tensor de campo electromagnético. Compárese (5.6b) con la ecuación (2.62) de la sección 2.4. Vemos que (5.6a) se vuelve idéntica a la expresión de la fuerza de Lorentz si tomamos

$$\mathcal{X} \beta \equiv e/m \quad (5.7)$$

siendo m la masa en reposo.

En el experimento de Aharonov-Bohm los efectos gravitatorios no son importantes. Los ξ_{kl} toman pues sus valores minkowskianos y (5.6a) adopta la forma

$$\frac{dv^k}{ds} = \mathcal{X} \beta F^k_l v^l \quad (v^k \equiv \frac{dx^k}{ds}) \quad (5.8)$$

Esta última ecuación indica claramente que

$$v_k v^k = \text{constante} \quad (5.9)$$

Obsérvese que si las geodésicas son parametrizadas por medio de τ (es decir, si tomamos $s = \tau$), se tiene $v_k v^k = \epsilon_{kl} (dx^k/d\tau)(dx^l/d\tau) = 1 - (dx^5/d\tau + \beta A_k dx^k/ds)^2 = 1 - \mathcal{X}^2$; de manera que, en la ecuación anterior, constante = $1 - \mathcal{X}^2$. Por otra parte, si el movimiento es parametrizado con el tiempo propio de las partículas (o sea, si $ds^2 = \epsilon_{kl} dx^k dx^l$), resulta simplemente constante = 1.

Ahora bien, a partir de (5.6b) y (5.5) puede obtenerse la siguiente expresión para el intervalo de tiempo propio

$$d\tau = \mathcal{X} (dx^5 + \beta A_k dx^k) + \epsilon_{kl} \frac{dx^k}{d\tau} dx^l \quad (5.10)$$

El tiempo propio de vuelo de los electrones entre los puntos S (fuente) y P (pantalla) se obtiene entonces integrando (5.10) sobre las trayectorias 4-dimensionales (1) y (2)

$$\tau_I = \frac{e}{m} \int_{S(I)}^P A_k dx^k + \int_{S(I)}^P \epsilon_{kl} \frac{dx^k}{d\tau} dx^l \quad (5.11)$$

donde (I) = 1 o 2. Es posible ver que la condición $x^5 = \text{constante}$, necesaria para la integración en (5.11), resulta de una fijación particular del gauge.

En efecto, supongamos por un momento que $x^5 = h(s) \neq$ constante y que describimos la situación utilizando un sistema de referencia tetradimensional en reposo con respecto a la partícula. En ese sistema, (5.9) nos dice que $x^4 \propto s$. Sabemos además que en una transformación de corte

$$x'^5 = x^5 + f(x^k) \quad \text{y} \quad \beta A'_k = \beta A_k - \partial_k f$$

donde f es una función arbitraria escalar bajo transformaciones 4-dimensionales. Si hacemos $f(x^k) \equiv -h(s)$ mediante una transformación de gauge resulta directamente $x'^5 = 0$. Vemos pues que, en cualquier situación, siempre es posible encontrar una transformación de gauge que satisfaga la suposición que x^5 es una constante del movimiento.

Volvamos ahora al experimento de Aharonov y Bohm. En primer lugar, resulta claro que cualquier intento por interpretar este efecto (aún sobre bases no-cuánticas) debe incluir el fenómeno (típicamente cuántico) de la interferencia de partículas materiales. Esto implica aceptar la naturaleza ondulatoria de la materia, contenida en el principio de dualidad onda-corpúsculo de de Broglie. También es claro que el aceptar este principio no es equivalente a convalidar toda la mecánica cuántica.

Aceptaremos pues la hipótesis de complementaridad onda-corpúsculo y la utilizaremos para explicar la formación de patrón de interferencia de los electrones, pero explicaremos el

corrimiento AB de ese patrón sin resolver la ecuación de Schrödinger; lo haremos únicamente a partir de la diferencia de fase en las ondas de de Broglie producido por la diferencia de tiempo propio de vuelo de los electrones que arriban al mismo punto de la pantalla detectora.

Las ondas de de Broglie pueden escribirse en forma covariante como

$$\varphi(x^k) = \varphi_0 \exp(ik_l x^l) \quad (5.12)$$

donde k_l es el cuadvivector número de onda de la partícula libre, definido a través de la relación

$$\frac{m}{\hbar} \frac{dx^l}{ds} = k^l \quad (5.13)$$

Escritas en forma covariante, (5.12) y (5.13) son naturalmente invariantes frente a las transformaciones de coordenadas usuales 4-dimensionales del espacio-tiempo. La covariancia de estas ecuaciones es físicamente significativa: reflejan el hecho que la forma de las ecuaciones físicas se mantienen invariantes cuando se conecta un campo gravitatorio.

Es posible extender dicha noción de covariancia al espacio-tiempo 5-dimensional. El concepto de covariancia general en 5 dimensiones es naturalmente un ingrediente esencial en la unificación geométrica de la gravitación y el electromagnetismo

lograda por Kaluza-Klein. En este contexto, todas las leyes de la física resultan invariantes también al conectar el campo electromagnético.

En el lenguaje de Kaluza esto significa que debe introducirse la quinta dimensión, sustituir ϵ_{kl} por $\gamma_{\mu\nu}$ y también las derivadas covariantes 4-dimensionales por derivadas covariantes 5-dimensionales, en todas las ecuaciones físicas. Este mecanismo permite introducir a los potenciales electromagnéticos (vía el tiempo propio) en la fase de las ondas de de Broglie.

En efecto, resulta directamente

$$\begin{aligned}
 k_l dx^l + k_\mu dx^\mu &= \frac{m}{\hbar} \frac{dx^\mu}{ds} dx^\mu = \\
 \frac{m}{\hbar} \left[\left(\frac{dx^5}{ds} + \beta A_k \frac{dx^k}{ds} \right) (dx^5 + \beta A_k dx^k)^2 + \epsilon_{kl} \frac{dx^k}{ds} dx^l \right] &= \\
 \frac{m}{\hbar} \left[\left(\mathcal{X} dx^5 + \frac{e}{m} A_k dx^k \right) + \epsilon_{kl} \frac{dx^k}{ds} dx^l \right] &= \\
 \frac{m}{\hbar} \mathcal{X} dx^5 + \frac{e}{\hbar} A_k dx^k + k_l dx^l & \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Obsérvese que los k_l son las componentes usuales del vector de ondas de de Broglie obtenidas por la proyección de k_μ sobre el espacio-tiempo 4-dimensional. Compárese además este resultado con la expresión (5.10) para el diferencial de tiempo propio en el espacio de 5 dimensiones. Dicha coincidencia no es nada sorprendente, pues $\{(m/\hbar)r\}$ no es otra cosa que la fase de la

función de onda (5.12) en el sistema propio de la partícula.

Integrando (5.14) a lo largo de las trayectorias (1) y (2) en el dispositivo de Aharonov-Bohm (por lo que debemos tomar $x^5 =$ constante, ver ecuación (5.11)) resulta

$$\Delta \int k_{\mu} dx^{\mu} = \frac{e}{\hbar} \Delta \int A_k dx^k + \Delta \int k_l dx^l \quad (5.15)$$

donde Δ indica la diferencia tomada entre las trayectorias. Introduciendo esta fase en la función de onda superpuesta (5.1) de Aharonov y Bohm (extendida naturalmente a 5 dimensiones a través de (5.12) y (5.14)) obtenemos finalmente

$$\psi = \psi_1^{(0)} + \psi_2^{(0)} \exp \left[i \left(\frac{e}{\hbar} \Delta \int A_k dx^k + \Delta \int k_l dx^l \right) \right] \quad (5.16)$$

En esta expresión, $\psi_2^{(0)} \exp (\Delta \int k_l dx^l)$ es responsable de la interferencia de los electrones sobre la pantalla detectora. El término que contiene el cuadvivector potencial $A_k = (\phi, A)$ produce un corrimiento de fase *global*

$$\frac{e}{\hbar} \Delta \int A_k dx^k = \frac{e}{\hbar} \oint A \cdot dr - \frac{e}{\hbar} \int (\Delta \phi) dt \quad (5.17)$$

en un todo de acuerdo con el efecto Aharonov-Bohm.

5.5 - DERIVACION CLASICA DE LAS ECUACIONES DE LONDON⁽⁷⁾

Consideremos un medio continuo constituido por partículas cargadas de naturaleza única (e. g. electrones), con tiempos de colisión grandes comparados con los tiempos de persistencia de los fenómenos de interés. Este requerimiento asegura que las pérdidas por disipación en dicho sistema sean despreciables (distribución de materia de "resistencia cero"). Este modelo constituye pues una versión simplificada (aunque suficiente para nuestros propósitos) de medio superconductor.

Supondremos que el campo de velocidades asociado con la distribución de materia varía con continuidad de un punto a otro. Es decir, si x^k representa las coordenadas de un elemento de materia, consideraremos al vector velocidad $v^k \equiv dx^k/ds$ como una función continua sobre la región en lugar de constituir una magnitud con significado sobre una única línea del mundo. Supondremos además que cada porción elemental de materia describe geodésicas en el espacio-tiempo 5-dimensional, de manera que el movimiento del fluido resulta determinado por las ecuaciones (5.4).

Para $\mu \equiv k = 1, \dots, 4$ se reobtiene en este caso (5.8)

$$\frac{dv^k}{ds} = \alpha \beta F^k_l v^l \quad (5.8')$$

pero con $v^k = v^k(x)$, de manera que (5.8') constituye ahora la

ecuación usual de movimiento de un fluido cargado, con

$$\kappa/\beta \equiv e/m = \rho_0/\rho_m \quad (5.18)$$

el cociente entre las densidades *propias* de carga y materia del medio, si éste está constituido por partículas de carga e y masa en reposo m .

Para $\mu = 5$ se obtiene (ver ecuación (5.6b))

$$A_k v^k = \kappa/\beta \quad (5.19)$$

donde hemos realizado una fijación de gauge que elimina a x^5 . El significado de (5.19) es nuevamente diferente al de (5.6b), ya que esta última se refiere a magnitudes definidas únicamente sobre una línea del mundo (partículas) mientras que (5.19) relaciona funciones de campo continuas.

La ecuación de movimiento (5.8') se deriva de un principio variacional. En el enfoque que estamos haciendo, esto significa que debemos considerar a los campos A_k y v^k como grados de libertad independientes. Entonces, en una variación virtual δv^i de las velocidades se cumple, de acuerdo con (5.19)

$$A_i \delta v^i = 0 \quad (5.20)$$

Ahora bien, es claro que no todas las v^i son independientes debido a la condición

$$v^i v_i = \text{constante}$$

que se deriva directamente de las ecuaciones del movimiento. En el proceso de variación debe introducirse un multiplicador de Lagrange, de manera que resulta

$$\langle A_i - \lambda v^i \rangle \delta v^i = 0 \quad (5.21)$$

donde λ es una constante a ser determinada.

El valor de dicha constante se determina fácilmente considerando la relación de fuerzas de Lorentz en su forma euleriana

$$v^j \partial_j v^i = \frac{\rho_0}{\rho_m} \langle \partial_i A_j - \partial_j A_i \rangle v^j \quad (5.22)$$

Usando el hecho que $v^j \partial_i v_j = \frac{1}{2} \partial_i (v^j v_j) = 0$ y que $\rho_0 / \rho_m = e/m$, obtenemos en (5.22)

$$v^j \partial_j \left(v_i + \frac{e}{m} A_i \right) = v^j \partial_i \left(v_j + \frac{e}{m} A_j \right) \quad (5.23)$$

Sustituyendo $A_i = \lambda v_i$, se obtiene de (5.23)

$$\left(1 + \frac{e\lambda}{m}\right) v^j \partial_j v_i = \left(1 + \frac{e\lambda}{m}\right) \frac{dv_i}{ds} = 0 \quad (5.24)$$

Este resultado muestra que

$$\lambda = - m/e \quad (5.25)$$

pues, en general, $dv^i/ds \neq 0$. Resulta pues la siguiente relación constitutiva entre el potencial y la velocidad

$$A_k = - \frac{m}{e} v_k \quad (5.26)$$

Esta ecuación es muy importante ya que determina las propiedades superconductoras del medio considerado (usualmente se la obtiene utilizando mecánica cuántica). A partir de (5.26) se deducen las ecuaciones de London de la superconductividad, eliminando los A_k de la expresión del tensor de campo electromagnético

$$F_{kl} = (m/e) (\partial_k v_l - \partial_l v_k) \quad (5.27)$$

Concluimos pues que las ecuaciones de London (5.27) y, consecuentemente, el efecto Meissner-Ochsenfeld encuentran una explicación simple dentro del contexto de las ideas de Kaluza-Klein.

5.6 - CONCLUSIONES

Lo desarrollado en este capítulo muestra un hecho singular: la teoría de Kaluza-Klein no sólo reproduce el electromagnetismo convencional de Maxwell-Lorentz, sino que también incluye fenómenos electromagnéticos no-convencionales bien conocidos, como el efecto de interferencia de Aharonov y Bohm y el efecto Meissner en superconductores.

El vínculo entre la teoría de Kaluza-Klein y el efecto de interferencia de ondas de materia (no así el fenómeno de la superconductividad) ha sido analizado por otros autores en forma simultánea al trabajo aquí presentado⁽⁸⁾. Sin embargo, el enfoque de estos trabajos difiere tanto en presentación como en espíritu del nuestro. En particular, nuestro punto de vista destaca el vínculo fenomenológico existente entre dichos experimentos y el espacio interno de la teoría de Kaluza-Klein: la existencia de más de cuatro dimensiones del espacio-tiempo tiene, de acuerdo con estos resultados, una influencia sensible y directa sobre nuestro ámbito experimental observable.

REFERENCIAS

- 1 - Y. Aharonov and D. Bohm, *Significance of the electromagnetic potentials in the quantum theory*, Phys. Rev. 115, 485 (1959).
- 2 - La literatura sobre la verificación experimental del efecto AB es abundante. Los primeros experimentos fueron llevados a cabo en los 60's por R. G. Chambers, Phys. Rev. Lett. 5, 3 (1960). Resultados más recientes pueden encontrarse en A. Tonomura et al., Phys. Rev. Lett. 48, 1443 (1982).
- 3 - Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. 123, 1511 (1961); 125, 192 (1962); F. J. Belinfante, Phys. Rev. 128, 2832 (1962); B. S. DeWitt, Phys. Rev. 125, 2189 (1962); S. M. Roy, Phys. Rev. Lett. 44, 111 (1980). Una revisión crítica del tema puede encontrarse en H. Erlichson, Am. J. Phys. 38, 162 (1970); también en T. Boyer, Am. J. Phys. 40, 56 (1972).
- 4 - P. Bocchieri and A. Loinger, *Nonexistence of the Aharonov-Bohm effect*, Nuov. Cim. 47A, 475 (1978).
- 5 - Ver por ejemplo, R. Feynman, R. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on Physics Vol. II*, Fondo Educativo Interamericano (1972), sección 15.5.
- 6 - J. A. Ferrari and J. Griego, *Kaluza-Klein theory and Aharonov-Bohm effect*, Nuov. Cim. 96B, 41 (1986).
- 7 - J. A. Ferrari, J. Griego and E. Falco, *The Kaluza-Klein theory and four-dimensional spacetime*, Gen. Rel. and Grav. 21, 69 (1989).
- 8 - R. Parathasarathy, G. Rajasekaran and R. Vasudevan, *Quantum*

interference effects in a five-dimensional theory, *Class. Quantum Grav.* **3**, 425 (1986); R. O. Weber, *Quantum interference effects in a five-dimensional Kaluza-Klein theory (comment)*, *Class. Quantum Grav.* **4**, 1473 (1987); R. O. Weber, *Quantum interference effects in non-abelian Kaluza-Klein theory*, *Mod. Phys. Lett.* **3A**, 187 (1988).

- 9 - W. Farrel Edwards, *Classical derivation of the London equations*, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1863 (1981).

CAPITULO VI

EL CAMPO ESCALAR EN LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN 5-DIMENSIONAL

En este capítulo consideraremos más en detalle las propiedades del campo escalar de la teoría de Kaluza-Klein. Nos restringiremos en primer lugar a los aspectos clásicos derivados de la existencia del campo escalar en la teoría efectiva 4-dimensional, poniendo especial énfasis en las propiedades de acoplamiento con los campos de materia y en los aspectos fenomenológicos que resultan de dicho acoplamiento.

En general, existen dos formas en que un campo asociado con la gravedad puede afectar a la materia⁽¹⁾. En primer lugar, puede acoplarse de manera indirecta con la materia al participar éste de las ecuaciones del campo que determinan la geometría del espacio-tiempo. En segundo lugar, puede acoplarse directamente con los campos de materia produciendo, por ejemplo, ligeras dependencias de las masas y cargas con las coordenadas espacio-temporales.

El protagonismo del campo ϕ es bien conocido con respecto a la primera posibilidad⁽²⁾: en los desarrollos usuales de la teoría de Kaluza-Klein se discute ampliamente su papel como un campo de Brans-Dicke en una teoría tensor-escalar de la gravitación. Como consecuencia, el campo ϕ se vincula con una "constante" de acoplamiento para la interacción gravitatoria que es función de

las coordenadas.

Sin embargo, este campo no agota de esta forma sus propiedades. Interviene también en otro tipo de acoplamientos con la materia, que no son posibles para campos de Brans-Dicke. En particular, la teoría de Brans-Dicke muestra que el campo escalar no afecta el corrimiento gravitacional de las líneas espectrales⁽³⁾, mientras que esto sí sucede para el campo ϕ de Kaluza-Klein.

6.1 - CARACTER LOCAL DE LA QED ESCALAR DERIVADA DE LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN⁽⁴⁾

En la sección 4.5 mostramos el acoplamiento de un campo escalar de materia con una métrica 5-dimensional del tipo Kasner. Vimos en ese caso como eran afectadas las constantes (m , e , G) por un parámetro temporal significativo únicamente a escala cosmológica.

En esta sección realizaremos una extensión de esos resultados, mostrando que son fácilmente generalizables a cualquier métrica 5-dimensional. Dicha extensión está de acuerdo con el efecto de renormalización que las constantes tienen ya a nivel clásico, según hemos visto en la sección 4.2. Sin embargo, nuestro enfoque es diferente del realizado en esa oportunidad (no utilizamos la invariancia derecha de la métrica sino la compactificación como mecanismo de reducción dimensional), y es

además simple y apropiado para derivar consecuencias fenomenológicas (obsérvese además que la renormalización de las constantes fundamentales *no se produce* por el método de la sección 4.2 en el caso 5-dimensional, que es el considerado en esta oportunidad).

Tomemos entonces un campo escalar real $\psi(x^\mu)$ en un espacio-tiempo 5-dimensional cuya acción este dada por (4.16)

$$S_5 = \int d^5x \sqrt{|\gamma|} \{ \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + m_0^2 \psi^2 \} \quad (6.1)$$

Antes de efectuar la reducción dimensional de (6.1), es conveniente realizar un *cambio de escala local* en las coordenadas a los efectos que la acción reducida adopte una forma más transparente desde el punto de vista físico. Dadas las coordenadas de un evento \mathcal{P}_0 del espacio-tiempo (escritas en el sistema x^μ), introducimos un nuevo sistema de coordenadas x'^μ definido por

$$\begin{aligned} x'^k &= x^k - x^k(\mathcal{P}_0) \\ x'^5 &= \left[\phi[x^k(\mathcal{P}_0)] \right]^{1/2} x^5 - x^5(\mathcal{P}_0) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si suponemos que el coeficiente de la métrica asociado con la quinta dimensión es una función suave de las coordenadas 4-dimensionales x^k , la condición

$$\phi_{,k} \approx 0 \quad (6.3)$$

será válida muy exactamente en alguna región alrededor del evento \mathcal{P}_0 . Esta hipótesis permite definir un sistema local de coordenadas en ese punto tal que, para alguna vecindad de \mathcal{P}_0 , el nuevo coeficiente γ'_{55} puede ser considerado constante y normalizado a uno

$$\gamma'_{55} \equiv \phi' = 1 \quad (6.4)$$

En este sistema, el tiempo propio toma la forma

$$d\tau^2 = (dx'^5 + \beta A'_k dx'^k)^2 + \epsilon'_{kl} dx'^k dx'^l \quad (6.5)$$

La covarianza de la acción (6.1) nos permite escribir

$$S_5 = \int d^5x' \sqrt{|\epsilon'|} \left\{ \gamma'^{\mu\nu} \partial'_\mu \psi' \partial'_\nu \psi' + m_0^2 \psi'^2 \right\} \quad (6.6)$$

como la acción local 5-dimensional para el campo de materia. Repitiendo sobre la acción (6.6) el procedimiento de reducción dimensional desarrollado en la sección 4.4, obtenemos la siguiente ecuación de ondas para la componente $\psi_n(x^k)$ de la expansión de Fourier (4.21)

$$\frac{1}{\sqrt{|\epsilon|}} D_k (\sqrt{|\epsilon|} \epsilon^{kl} D_l \psi_n) - m_n^2 \psi_n = 0 \quad (6.7)$$

donde hemos eliminado todas las primas a fin de facilitar la notación. Naturalmente, (6.7) no es más que (4.26) reducida al caso $\phi = \text{constante}$. Para nosotros, esta ecuación tiene sentido

solo localmente y se obtiene de la ecuación general via una transformación de escala local (los campos se transforman de acuerdo con (6.2)). Para esos observadores locales, (6.7) describe una secuencia de partículas cargadas, estando la carga básica y la masa del modo más bajo dados por las expresiones

$$e = \beta q_1 = \beta \frac{2\pi}{R_5 \phi_0^{1/2}} \quad (6.8)$$

y

$$m^2 = m_0^2 + \frac{4\pi^2}{R_5^2 \phi_0} \quad (6.9)$$

donde $\phi_0 \equiv \phi(x^k(\mathcal{P}_0))$. Obsérvese en estas ecuaciones el reescaleo del parámetro R_5 asociado con la quinta dimensión, necesario para preservar el carácter escalar de las componentes $\psi_n(x^k)$ bajo la transformación (6.2).

Es evidente el vínculo entre estos resultados y los obtenidos en las secciones 4.4 y 4.5. En primer lugar, vemos que la QED escalar derivada de la teoría de Kaluza-Klein conduce a una descripción esencialmente local de los campos. La localidad es determinada por el campo escalar de la métrica 5-dimensional. Además, el carácter local se transfiere también a las constantes asociadas con la partícula, de acuerdo con las expresiones (6.8) y (6.9). Obsérvese que si en estas ecuaciones ponemos $\phi_0 = t_0/\tau$

(magnitud que da el cambio de escala realizado en la sección 4.5 sobre la métrica de Kasner), se reobtienen los resultados de Chodos y Detweiler.

6.2 - VARIACION DE LAS CONSTANTES FUNDAMENTALES

Analizaremos ahora el comportamiento de las ecuaciones de Einstein desde el punto de vista de los sistemas de referencia locales. La acción de Einstein en 5 dimensiones se escribe en la forma

$$S_5 = - \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{|\gamma|} R_5 \quad (6.10)$$

donde G_5 es la constante gravitatoria 5-dimensional. De acuerdo con (3.62), el escalar de curvatura admite la siguiente descomposición en el espacio fibrado

$$R_5 = R_4 + (16\pi G) (\phi / 4) F_{kl} F^{kl} \quad (6.11)$$

donde la constante G proviene de la identificación $\beta = \sqrt{16\pi G}$ en la relación que vincula los coeficientes γ_{k5} con el cuadripotencial A_k (obsérvese que dicha constante no tiene por que coincidir con la constante gravitatoria 4-dimensional, la cual resulta definida por la expresión final de la acción efectiva tetradimensional).

En el sistema local de coordenadas, la ecuación anterior toma la forma

$$R_5 = R_4 + (16\pi G) (\phi_0/4) F_{kl} F^{kl} \quad (6.12)$$

Introduciendo (6.12) en (6.10) y efectuando la integración en x^5 se obtiene

$$S_4 = - \frac{1}{16\pi G_4} \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ R_4 + (16\pi G_4/4) F_{kl} F^{kl} \right\} \quad (6.13)$$

con

$$G_4 \equiv G \phi_0 = \frac{G_5}{2\pi R_5 [\phi_0]^{1/2}} \quad (6.14)$$

Esta expresión da la constante gravitatoria "medida" por los observadores locales 4-dimensionales. Vuelve a ser importante aquí el papel del campo ϕ como factor de escala asociado con el sistema de referencia local (debe observarse que el vínculo entre la constante gravitatoria 4-dimensional y el radio de la quinta dimensión es consecuencia de la compactificación del espacio interno y no del carácter local de nuestra descripción).

De (6.8) se deduce entonces que, en el sistema atómico de unidades, resulta válida la siguiente expresión para la constante de estructura fina en función del campo ϕ

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{8\pi G_5}{R_5^3} (\phi_0)^{-5/2} \quad (6.15)$$

Las ecuaciones (6.14), (6.15) y (6.9) muestran el comportamiento espacio-temporal de e , m y G_4 como resultado de una descripción local del acoplamiento entre materia y gravitación en la teoría de Kaluza-Klein. Como ya señalamos, este resultado está de acuerdo con la renormalización clásica de las constantes producida por el dilatón σ . Nuestro planteo muestra sin embargo de que manera este campo determina una variación de las constantes que es significativa (de acuerdo con la hipótesis (6.3) y el carácter local de la ecuación de ondas (6.7)) únicamente si los eventos considerados están suficientemente separados uno del otro en el espacio-tiempo. La información contenida en nuestros resultados es pues diferente a la ofrecida en el método anterior, ya que establece un rol especial para el campo ϕ en la determinación de escalas apropiadas para la definición de las constantes fundamentales.

Los resultados obtenidos para e , m y G_4 determinan el siguiente comportamiento local de la relación entre fuerzas electromagnéticas y gravitatorias

$$\frac{e^2}{16\pi G_4 m^2} = \frac{1}{\phi_0 (1 - b\phi_0)} \quad (6.16)$$

estando b definida en (4.39). Para $\phi_0 = t_0/\tau$ se obtiene la siguiente expresión en función del parámetro temporal τ

$$\frac{e^2}{16\pi G_4 m^2} = \frac{\tau^2}{t_0(\tau - bt_0)} \quad (6.17)$$

Para $\tau/t_0 \gg b$, esta relación se reduce a

$$\frac{e^2}{16\pi G_4 m^2} \approx \frac{\tau}{t_0} \quad (6.18)$$

en acuerdo con la hipótesis de Dirac. En esta situación $dm/dr \approx 0$, de manera que resulta pausable la hipótesis $m \approx$ constante para la masa de la partícula. La variación de las constantes predicha por el modelo de Kaluza-Klein y la hipótesis de Dirac son ahora concordantes para valores de τ del orden de la edad del universo.

La situación anterior no está libre de dificultades. En realidad, (6.18) se ajusta al comportamiento esperado sólo en el límite $\tau \rightarrow \infty$. Para valores de τ/t_0 del orden de b (zona de masas pequeñas), el cociente $e^2/G_4 m^2$ muestra la misma patología que aparece en el caso de Chodos y Detweiler. Además, el carácter local de G_4 dado por (6.14) complica un análisis al estilo del realizado en la sección 4.5. Veremos más adelante que es posible (utilizando específicamente las propiedades cuánticas del campo de materia) introducir un nuevo sistema de unidades (diferente al atómico o el gravitacional) donde puede definirse apropiadamente una constante de estructura fina independiente de la expansión del universo.

6.3 - COTAS EXPERIMENTALES PARA EL CAMPO ϕ

El análisis realizado hasta ahora permite establecer cotas experimentales para la variación espacio-temporal del campo escalar. Aunque éstas se refieren a propiedades clásicas de los campos, es claro que la obtención de información de carácter fenomenológico vinculada con este tipo de soluciones resulta importante para el esclarecimiento de la física subyacente a toda teoría de Kaluza-Klein. De hecho, el estudio de soluciones clásicas en la teoría de Kaluza-Klein es un área de intensa actividad, tanto por los aspectos vinculados con la relatividad general como a la teoría de campos propiamente dicha.

Anteriormente observamos el comportamiento peculiar de la masa asignada a la partícula con respecto al campo ϕ . El término correspondiente a la generación dinámica de masa "conecta" de manera particular las variaciones relativas de ambas magnitudes. En efecto, de (6.9) se obtiene directamente

$$\frac{\delta m}{m} = - \left[\frac{q^2}{2m^2} \right] \frac{\delta \phi}{\phi} \quad (6.19)$$

Sustituyendo el término entre paréntesis por los valores conocidos de las constantes (tomados para $\phi_0 = 1$ por simplicidad), se tiene

$$\frac{q^2}{2m^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^2}{hc} \right] \left[\frac{c^3}{hG} \right] \left[\frac{1}{16\pi m^2} \right] \approx 10^{86} \quad (6.20)$$

Este resultado muestra una amplificación notable de la variación relativa del campo escalar sobre la de la masa de la partícula. Por otra parte, las variaciones en la carga y la constante gravitatoria son del mismo orden que las del campo escalar

$$\frac{\delta e}{e} = -\frac{5}{4} \frac{\delta \phi}{\phi} \quad ; \quad \frac{\delta G_4}{G_4} = -\frac{1}{2} \frac{\delta \phi}{\phi} \quad (6.21)$$

Consideremos ahora un experimento típico de corrimiento al rojo de las líneas espectrales. Para ser específicos, tomaremos una fuente (\mathcal{J}) constituida por átomos de tipo hidrogenoide que emite fotones de frecuencia propia ν^* hacia un observador (\mathcal{O}) distante. Supondremos que la fuente y el observador están en reposo relativo.

A los efectos de calcular el corrimiento en frecuencia de la señal debemos comparar los intervalos de tiempo entre los frentes de onda que arriban al observador (descrito en términos de observadores localizados en \mathcal{J}) con los de una fuente idéntica localizada en $\mathcal{O}^{(5)}$. Estos eventos se describen en sistemas coordenados locales diferentes, de manera que todas las magnitudes resultan afectadas por el factor de escala $\phi[x^k(\mathcal{P})]$.

La frecuencia propia se relaciona con la frecuencia coordenada por la expresión

$$\nu = \nu^* \left[-\epsilon_{00}(x) \right]^{1/2} \quad (6.22)$$

donde x representa las coordenadas de la fuente. Como es usual al calcular el efecto gravitacional de dilatación del tiempo, supondremos que la métrica es independiente de la coordenada temporal x^0 . En estas condiciones (y al estar \mathcal{J} y \mathcal{O} en reposo relativo), el tiempo que demora una cresta de la onda en viajar de \mathcal{J} a \mathcal{O} es constante. Por tanto, el intervalo de tiempo entre crestas sucesivas que llegan al \mathcal{O} (y medidos por él) es el mismo que el registrado por \mathcal{J} en su emisión, o sea

$$\Delta t_{\mathcal{J}} = \Delta t_{\mathcal{O}} \quad (6.23)$$

En término de observadores locales en \mathcal{J} , este tiempo será igual a

$$\Delta t_{\mathcal{J}} = \Delta \tau_{\mathcal{J}}^* \left[-\bar{\epsilon}_{00}(\bar{x}_{\mathcal{J}}) \right]^{-1/2} \quad (6.24)$$

donde $\Delta \tau_{\mathcal{J}}^*$ es el tiempo propio entre crestas para una fuente ubicada en \mathcal{J} y $(\bar{x}_{\mathcal{J}})$ resulta definido, de acuerdo con (6.2), por

$$\bar{x}^k = x^k - x^k(\mathcal{J}) \quad (6.25)$$

$$\bar{x}^5 = \phi_{\mathcal{J}}^{1/2} x^5 - x^5(\mathcal{J})$$

Los observadores locales en \mathcal{O} deben comparar (6.23) con el tiempo entre crestas de una fuente idéntica localizada ahora en el punto de recepción. Este tiempo viene dado por

$$\Delta t'_{\mathcal{O}} = \Delta \tau_{\mathcal{O}}^* \left[-\hat{\epsilon}_{00}(\hat{x}_{\mathcal{O}}) \right]^{-1/2} \quad (6.26)$$

siendo (\hat{x}_0) el sistema de referencia local definido en 0. Es fácil demostrar que el coeficiente ϵ_{00} es invariante frente a transformaciones $x \rightarrow x'$ del tipo (6.2), es decir

$$\epsilon'_{00}(x') = \epsilon_{00}(x) \quad (6.27)$$

en general. De (6.23), (6.24), (6.26) y (6.27) se obtiene entonces

$$\frac{\nu_y}{\nu_0} = \frac{\nu_y^*}{\nu_0^*} \left[\frac{\epsilon_{00}(x_y)}{\epsilon_{00}(x_0)} \right]^{1/2} \quad (6.28)$$

donde los coeficientes de la métrica son ahora evaluados en el sistema de coordenadas "no local" x^μ . (6.28) se reduce a la expresión usual del corrimiento gravitacional en frecuencias para la emisión de líneas espectrales si $\nu_y^* = \nu_0^*$. En nuestro caso, la frecuencia propia de la fuente es una magnitud local. Como $\nu^* \propto R \propto me^4$ (R es la constante de Rydberg), ambas frecuencias estarán relacionadas, a primer orden en $\delta\phi = \phi_y - \phi_0$, en la forma

$$\nu_y^* = \nu_0^* \left[1 + \frac{\delta R}{R} \right] \quad (6.29)$$

donde

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta m}{m} + 4 \frac{\delta e}{e} \quad (6.30)$$

Resulta entonces

$$\frac{\nu_y}{\nu_0} = \left[\frac{\epsilon_{00}(x_y)}{\epsilon_{00}(x_0)} \right]^{1/2} \left[1 + \frac{\delta R}{R} \right] \quad (6.31)$$

En (6.31) aparece una contribución extra al corrimiento gravitacional debido a la variación espacio-temporal de la frecuencia propia de la fuente. Si por Z_g indicamos el corrimiento gravitacional usual, utilizando (6.19) y (6.21) es posible expresar este resultado en la forma

$$\frac{\Delta Z}{Z_g} = - \left(\frac{5}{4} + \frac{q^2}{2m^2} \right) \frac{\delta \phi}{\phi} \quad (6.32)$$

De (6.20) se sigue entonces

$$\left| \frac{\delta \phi}{\phi} \right| \approx \frac{2m^2}{q^2} \left| \frac{\Delta Z}{Z_g} \right| \approx 10^{-36} \left| \frac{\Delta Z}{Z_g} \right| \quad (6.33)$$

Esta ecuación establece un límite superior para la variación relativa del campo escalar. El enorme factor exponencial involucrado en (6.32) hace a este test extremadamente sensitivo: el redshift gravitacional es fuertemente afectado por cualquier variación relativa del campo ϕ .

De acuerdo a los datos observacionales reportados por Barut y Snider⁽⁶⁾ sobre el redshift gravitacional del espectro solar, podemos tomar

$$\left| \frac{\Delta Z}{Z_g} \right| \approx 6 \cdot 10^{-2} \quad (6.34)$$

Por tanto

$$\left| \frac{\delta\phi}{\phi} \right| \approx 6 \cdot 10^{-30} \quad (6.35)$$

La variación relativa del campo escalar es absolutamente despreciable y puede asumirse

$$\delta\phi_{(\text{clásico})} = 0 \quad (6.36)$$

dentro del sistema solar.

En nuestra galaxia, el redshift medido en enanas blancas muestra una desviación respecto al calculado por la teoría de Einstein de aproximadamente un 10%^[7]. Así pues, (6.36) parece ser válida también a esa escala. De hecho, la fuerte dependencia entre ambas magnitudes dada por (6.33) sugiere, con un alto grado de confianza, que puede tomarse $\phi_{(\text{clásico})}$ constante a escala cosmológica.

Dos apreciaciones deben hacerse aquí. Las correcciones cuánticas se calculan como una expansión en \hbar alrededor de la solución de "vacío clásico" de las ecuaciones del campo 5-dimensionales. En la literatura se toma usualmente esta solución como $(g_{kl} = \delta_{kl}, A_k = 0, \phi = \phi_c = \text{constante})$. Según Appelquist y Chodos^[8], "la cuestión de porqué la teoría 5-dimensional elige esta solución clásica sobre otras posibles permanece incontestada". Nuestros resultados proveen una respuesta a este

importante punto. En segundo lugar debe observarse que la dependencia de ϕ_c con respecto al tiempo fue eliminada como condición preliminar al cálculo. En realidad, nuestros resultados se refieren específicamente a la dependencia del campo escalar respecto a las coordenadas espaciales. Veremos más adelante como tratar específicamente el caso en que ϕ dependa del tiempo.

El requerimiento físico impuesto por (6.33) limita las soluciones posibles de las ecuaciones del campo. Por ejemplo, para un cuerpo macroscópico cargado con simetría esférica, Hsu y Yeung⁽⁹⁾ encontraron que las geodésicas reducidas 4-dimensionales describen correctamente el movimiento de partículas elementales si se toma la siguiente solución para el campo ϕ

$$\phi(r) = a \left[1 - \frac{2GM}{r} \right] = a \left[1 - 2\phi_g(r) \right] \quad (6.37)$$

donde a es una constante y M la masa del objeto. La variación de (6.37) muestra que, en este caso

$$\frac{\delta\phi}{\phi} = - \frac{2\delta\phi_g}{(1 - 2\phi_g)} \quad (6.38)$$

representa la variación relativa del campo escalar en término del potencial newtoniano ϕ_g . En el sistema solar, ϕ_g es despreciable frente a la unidad y $\delta\phi_g \approx 10^{-6}$. La solución de Hsu y Yeung da pues

$$\left| \frac{\delta\phi}{\phi} \right| \approx 10^{-6} \quad (6.39)$$

Esta solución de las ecuaciones del campo 5-dimensionales debe considerarse sin significado físico y por tanto descartarse dentro del sistema solar al no satisfacer la condición (6.33).

6.4 - CONCLUSIONES

A modo de conclusión y resumen de lo expuesto en este capítulo podemos decir lo siguiente:

1 - la QED escalar derivada de la teoría de Kaluza-Klein presenta un carácter esencialmente local, dado por el coeficiente γ_{55} de la métrica 5-dimensional. El carácter local del acoplamiento entre materia y gravitación se pone en evidencia fundamentalmente por el vínculo entre las constantes (e, m, G_4) y ϕ .

2 - existen efectos observacionales ligados directamente a este tipo de acoplamiento. El análisis del corrimiento gravitacional en frecuencia de las líneas espectrales muestra dos aspectos importantes: por un lado, distingue físicamente entre las diferentes soluciones clásicas posibles de las ecuaciones del campo 5-dimensional. Por otra parte, muestra que el campo ϕ contenido en la métrica 5-dimensional no se comporta exclusivamente como un campo de Brans-Dicke (en esta teoría, el campo escalar no afecta la frecuencia de las líneas espectrales).

3- finalmente, el comportamiento cosmológico de las constantes fundamentales difiere del expuesto en trabajos anteriores, como en

el caso de la solución de Chodos y Detweiler (sección 4.5).

REFERENCIAS

- 1 - C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1973), pag. 1063.
- 2 - De hecho, los trabajos de P. Jordan sobre la teoría de Kaluza-Klein motivaron en parte el desarrollo de la teoría tensor-escalar de la gravitación por G. Brans and R. Dicke (Phys. Rev. 124, 925 (1961)). Sin embargo, a pesar de la conexión formal entre ambos trabajos (reconocido explícitamente por Brans y Dicke, op. cit., pag. 928), "hay diferencias y la interpretación física es totalmente diferente".
- 3 - C. Brans and R. Dicke, op. cit.
- 4 - J. Griego and H. Vucetich, Preprint La Plata (1988).
- 5 - Un análisis completo del corrimiento al rojo gravitacional puede encontrarse por ejemplo en S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, New York, J. Wiley (1972), sección 3.5.
- 6 - J. W. Barult, *The gravitational redshift in the solar spectrum*, Doctoral Dissertation, Princeton Univ. (1962); J. L. Snider, Phys Rev. Lett. 28, 853 (1972); Solar Phys. 36, 233 (1974).
- 7 - S. Shapiro and S. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, New York, J. Wiley (1982), pag. 71.
- 8 - T. Appelquist and A. Chodos, *Quantum dynamics of Kaluza-Klein theories*, Phys. Rev. D28, 772 (1983).

- 9 - R. Hsu and W. B. Yeung, *Solution for the Five-Dimensional General Relativity that simulates a charged macroscopic object in four-dimensions*, *Lett. al Nuov. Cim.* 42, 352 (1985).

CAPITULO VII

UN MODELO PARA LA VARIACION TEMPORAL DE LAS CONSTANTES FUNDAMENTALES⁽¹⁾

Consideraremos ahora el problema del comportamiento cosmológico de las constantes fundamentales desde el punto de vista cuántico. De hecho, el análisis realizado en las secciones 4.5 y 6.2 se limita a manejar las propiedades clásicas de los campos y es por tanto incompleto.

La cuantización de la gravedad es hoy aún un problema abierto y no será incluida en este planteo. Nos limitaremos a utilizar específicamente las propiedades de renormalización del campo de materia acoplado con la gravitación. Veremos que el manejo de las constantes renormalizadas, así como las propiedades del grupo de renormalización, modifican sustancialmente las predicciones de la teoría respecto al comportamiento cosmológico de las constantes asociadas con la partícula material. Se obtienen además conclusiones novedosas respecto al problema del fine-tuning de las condiciones iniciales.

7.1 - DEFINICION DEL PARAMETRO DE TIEMPO COSMICO

Consideremos nuevamente un campo escalar de materia ψ acoplado con una métrica 5-dimensional de tipo Kasner

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{t}{t_0}\right) \left[\sum_A (dx^A)^2 \right] - \left(\frac{t_0}{t}\right) (dx^5)^2 \quad (7.1)$$

donde los índices latinos en mayúscula identifican las coordenadas espaciales usuales y hemos tomado ahora la signatura $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+,-,-,-,-)$. El campo ψ satisface la ecuación de ondas 5-dimensional

$$\square_5 \psi + m_p^2 \psi = 0 \quad (7.2)$$

donde m_p es la masa desnuda de la partícula.

En término de los observadores locales introducidos en la sección 6.2, es posible dar una descripción de la evolución de ψ en la que se "congela" los efectos de la expansión del universo. La definición de un tiempo local minkowskiano requiere de un cambio de escala ligeramente diferente del considerado en (6.2), dado por

$$\begin{aligned} t'^1 &= t^1 - \tau & x'^A &= \left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{1/2} x^A \\ x'^5 &= \left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{1/2} x^5 \end{aligned} \quad (7.3)$$

En este sistema

$$\begin{aligned} \gamma'_{11} &= \gamma_{11} & \gamma'_{AB} &= -\frac{t'+\tau}{\tau} \delta_{AB} \\ \gamma'_{55} &= -\frac{\tau}{t'} = -\frac{\tau}{t'+\tau} \end{aligned} \tag{7.4}$$

de manera que resulta

$$ds^2 = dt'^2 - \left(\frac{t'+\tau}{\tau}\right) \left[\sum_A (dx'^A)^2 \right] - \left(\frac{\tau}{t'+\tau}\right) (dx^5)^2 \tag{7.5}$$

más pequeñas perturbaciones γ'_{k5} . De (7.5) se observa que

$$\frac{\partial \gamma'_{55}}{\partial t'} = \frac{\tau}{(t'+\tau)^2} \approx \frac{1}{\tau} + 0$$

si $t' \ll \tau$ si $\tau \gg \tau_0$

(7.6)

donde τ_0 es un valor de referencia del parámetro τ . Si se restringe el dominio de variación de la nueva coordenada t' al intervalo $|t'| \ll \tau$, el espacio-tiempo descrito por la métrica (7.4) se vuelve esencialmente minkowskiano (aproximación que mejora a medida que τ crece). Este vínculo sobre la coordenada temporal (y que determina el carácter local de la descripción) implica que un sistema físico que evoluciona de acuerdo con t' no es afectado por la expansión del universo. Se distinguen en esta formulación dos escalas de tiempo: una escala local (t') y otra cosmológica (τ).

Obsérvese que la condición $t' \approx 0$ (es decir, $\tau \approx t$) no necesariamente implica $\tau \approx t_0$, ya que el factor t_0 ha sido transferido a las coordenadas espaciales (x^A, x^S) . De hecho, la transformación (7.3) permite recobrar la estructura minkowskiana del espacio-tiempo (que se tiene en la métrica de Kasner para $t = t_0$) para cualquier valor de t . Podemos imaginar un reloj que mide el tiempo τ controlado por algún fenómeno cosmológico (como el corrimiento al rojo de las galaxias lejanas); la aproximación (7.6) deja de ser válida cuando el redshift cosmológico comienza a ser detectable para un observador t' localizado en cierto valor de τ . Un reajuste del parámetro τ permite entonces recuperar la geometría minkowskiana para nuevos observadores t' . Este reajuste implica, como sabemos, un cambio en las constantes fundamentales del sistema. De ahora en adelante, llamaremos al tiempo τ tiempo cósmico.

De acuerdo con los resultados de la sección (6.1), los observadores locales 4-dimensionales describen a partir de (7.2) un meson cargado interactuando con el potencial electromagnético A_k . La masa y la carga desnudas de esta partícula medidas por los observadores t' , así como la constante gravitatoria efectiva G_4 introducida en (6.14), resultan depender del tiempo cósmico en la forma

$$e_B = \left[\frac{32\pi^2 G_5}{R_5^3} \right]^{1/2} \left(\frac{\tau}{t_0} \right)^{5/4} \equiv C \tau^{5/4} \quad (7.7)$$

$$G_4 = \frac{G_5}{2\pi R_5} \left(\frac{\tau}{t_0} \right)^{1/2} \equiv C' \tau^{1/2} \quad (7.8)$$

$$\bar{m}_B^2 \equiv m_B^2 + \frac{e_B^2}{16\pi G} = m_B^2 + \left(\frac{2\pi}{R_5} \right)^2 \left(\frac{\tau}{t_0} \right) \quad (7.9)$$

7.2 - COMENTARIOS SOBRE EL PROCEDIMIENTO DE RENORMALIZACION

El lagrangiano efectivo de la QED escalar que se obtiene en la teoría de Kaluza-Klein puede ser escrito en la forma

$$L = -\frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} + \frac{1}{2} \left[\partial_k \psi \partial^k \psi^* - \bar{m}_B^2 \psi \psi^* + ie_B A_k (\psi \partial^k \psi^* - \psi^* \partial^k \psi) + e_B^2 A_k A^k \psi \psi^* \right] \quad (7.10)$$

No estamos interesados en desarrollar aquí la renormalización detallada de (7.10). El obtener una teoría finita a partir de la QED es un problema bien conocido⁽²⁾, y el procedimiento general no se modifica esencialmente en el marco de Kaluza-Klein. Nos limitaremos a considerar el efecto de la generación dinámica de masa en el desplazamiento del polo del propagador del meson y la influencia de la dependencia de las constantes desnudas con el tiempo cósmico sobre la fijación del punto de renormalización.

Consideremos el método de renormalización independiente de la masa propuesto por Collins y Macfarlane⁽³⁾. Estos autores han mostrado que este esquema de renormalización (propuesto

inicialmente por Weinberg⁽⁴⁾ para campos fermiónicos) puede aplicarse también a campos escalares utilizando regularización dimensional (prescripción de t'Hooft).

En esta prescripción, las constantes desnudas se expresan en términos de las magnitudes renormalizadas en la forma

$$m_B^2 = m_R^2 \left[1 + \sum_D \frac{b_\nu(e_R)}{(n-4)^\nu} \right] \equiv Z_m m_R^2 \quad (7.11)$$

y

$$e_B \mu^{n/2-1} = e_R + \sum_D \frac{a_\nu(e_R)}{(n-4)^\nu} \quad (7.12)$$

Expresiones similares se plantean para las constantes renormalizadas Z_2 y Z_3 asociados con las amplitudes del campo de materia y del campo de gauge. μ es una constante dimensionada que introduce una cierta "unidad de masa" y que permite que la constante de acoplamiento renormalizada sea adimensional para todo n , siendo n la dimensionalidad del espacio-tiempo en regularización dimensional.

Tomaremos el lagrangiano libre del meson como

$$L_0 = -\frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} + \frac{1}{2} \left[\partial_k \psi \partial^k \psi^* - \bar{m}_R^2 \psi \psi^* \right] \quad (7.13)$$

El lagrangiano de interacción resulta ser entonces

$$L_I = \frac{1}{2} \left[i e_B A_k (\psi \partial^k \psi^* - \psi^* \partial^k \psi) + e_B^2 A_k A^k \psi \psi^* - \delta \bar{m}_R^2 \psi \psi^* \right] \quad (7.14)$$

donde $\delta \bar{m}_R^2 = (m_B^2 - m_R^2) + (e_B^2 - e_R^2)/16\pi G$ da el término de inserción de masa.

A orden e_R^2 es posible sustituir m_B^2 por \bar{m}_B^2 en (7.11) ya que todos los términos adicionales son $O(e_R^4)$

$$\begin{aligned} \bar{m}_B^2 &\equiv m_B^2 + \frac{e_B^2}{16\pi G} = m_R^2 \left[1 + \frac{b_{12} e_R^2}{n-4} \right] + \frac{e_R^2}{16\pi G} + O(e_R^4) = \quad (7.15) \\ &= \bar{m}_R^2 + \frac{b_{12} e_R^2 m_R^2}{n-4} + O(e_R^4) = \bar{m}_R^2 \left[1 + \frac{b_{12} e_R^2}{n-4} \right] + O(e_R^4) \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la expansión $b_{\nu} = \sum_{\rho} b_{\nu\rho} e_R^{\rho}$. Como era de esperar, el único efecto de la compactificación en la aproximación a un loop consiste en desplazar el polo del propagador del meson en una cantidad finita, dada por la generación dinámica de masa. Los infinitos introducidos por este término aparecerán en órdenes superiores de la expansión y deben ser compensados por el ajuste correspondiente de los coeficientes del desarrollo (7.11). Para nuestros propósitos, es suficiente mantenernos en este orden de la expansión perturbativa.

La definición de \bar{m}_B^2 y Z_2 es tal que $Z_2^{-1} S_T$ resulta finita para $n \rightarrow 4$, o, equivalentemente, que $Z_2(p^2 - \bar{m}_B^2 - \Sigma)$ es finita, siendo Σ la autoenergía y S_T el propagador total del meson.

A orden e_R^2 , la autoenergía del meson está dada por⁽⁵⁾

$$i\Sigma(p^2) = -i \frac{e_R^2}{8\pi^2} \frac{(2p^2 + \bar{m}_R^2)}{n-4} + i\Sigma_{\text{finito}}(p^2) \quad (7.16)$$

El término finito Σ_{finito} (libre de divergencias UV) contiene una constante indeterminada que puede utilizarse para fijar su valor para determinado valor del momento $p^{(d)}$. Si se ajusta esta constante de manera que Σ_{finito} sea cero para $p^2 = \bar{m}_R^2$ y se define

$$b_{12} = \left[\frac{3}{8\pi^2} \right] \frac{e_R^2 \bar{m}_R^2}{n-4} \quad (7.17)$$

resulta para el propagador total ($Z_2 = 1 + O(e_R^2)$) la expresión final

$$S_T^{-1} = p^2 - \bar{m}_R^2 \quad (7.18)$$

es decir, la masa física viene dada directamente por la masa renormalizada asignada a la partícula.

La renormalización de la carga y de los campos se realizan de la manera usual en esta prescripción.

Consideremos ahora la forma en que el parámetro de evolución cósmica puede ser incorporado en el esquema de renormalización. A partir del análisis de los aspectos clásicos vinculados con la formulación de Kaluza-Klein de la QED, se concluye que la

dependencia de las constantes desnudas con respecto al tiempo cósmico es dada a través de la constante G (una magnitud clásica, vinculada con la constante gravitatoria 4-dimensional) y e_B . Como en la aproximación a un loop, $e_B^2 = e_R^2 + O(e_R^4)$, la misma dependencia es transferida a la constante de acoplamiento y a la masa renormalizadas. Finalmente, para obtener la masa física (local) de la partícula, se ajustará la constante en (7.16) de manera que (7.18) sea válida para cada valor del parámetro τ .

7.3 - DEFINICION DE UN SISTEMA DE UNIDADES COSMICO

En la sección anterior mostramos que las constantes renormalizadas resultan parametrizadas por el tiempo cósmico en la forma

$$e_R = C \tau^{5/4} \quad (7.19)$$

$$\bar{m}_R^2 = m_R^2 + \left(\frac{2\pi}{R_S} \right)^2 \frac{\tau}{t_0} \quad (7.20)$$

para un punto de renormalización μ fijo.

Bajo un cambio en la escala de masas μ , la carga renormalizada varía de acuerdo con la ecuación del grupo de renormalización⁽⁷⁾

$$\mu \frac{\partial e_R}{\partial \mu} = \beta(e_R) \quad (7.21)$$

donde $\beta(e_R) = e_R^3/48\pi^2$ (ver por ejemplo, de Wit⁽³⁾). Integrando (7.21) se obtiene la siguiente expresión para la *running coupling constant*

$$e_R^2(\mu) = e_R^2(\mu_0) \left[1 - \frac{e_R^2(\mu_0)}{24\pi^2} \ln(\mu/\mu_0) \right]^{-1} \quad (7.22)$$

Es importante el observar aquí que (7.21) se mantiene válida aún cuando se permite a las constantes desnudas variar con el tiempo cósmico. En este caso tendremos $d(\text{constante desnuda})/d\tau \neq 0$, pero obviamente

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\text{constante desnuda}) \Big|_{\tau \text{ fijo}} = 0 \quad (7.23)$$

Esta propiedad permite extender la solución de la ecuación del grupo de renormalización al caso en que las constantes varíen con el tiempo cósmico en la forma

$$e_R^2[\mu;\tau] = e_R^2[\mu_0;\tau] \left[1 - \frac{e_R^2[\mu_0;\tau]}{24\pi^2} \ln(\mu/\mu_0) \right]^{-1} \quad (7.24)$$

donde $e_R^2[\mu_0;\tau]$ (que da la variación con τ de la carga renormalizada para cierta escala fija arbitraria de masa μ_0) viene dado por (7.19). La generalización de (7.22) para todo valor del parámetro τ constituye la ecuación básica de nuestro análisis. Obviamente, la expresión propuesta reproduce (7.19) para $\mu = \mu_0$. Tomaremos entonces a (7.24) como la solución general que determina

la carga renormalizada de la partícula con respecto a las variables independientes μ y τ .

Consideremos ahora el problema de la definición de un sistema de unidades que contemple las peculiares dependencias de las constantes fundamentales con el parámetro de evolución cósmica. Puesto que las constantes físicas (m , e y G_4) son funciones independientes del tiempo cósmico, es imposible la fijación arbitraria de una (o dos) de estas constantes. Resultan pues inadecuados en esta situación tanto el sistema de unidades atómico (e y m independientes de τ) o gravitacional (G_4 independiente de τ).

Como ya señalamos, la hipótesis de que la constante de estructura fina no es afectada por la expansión del universo cuenta con un fuerte apoyo experimental. Esta propiedad puede implementarse a través de (7.24) imponiendo la condición

$$\frac{de}{d\tau}^R[\mu;\tau] = \frac{\partial e}{\partial \tau}^R[\mu;\tau] + \frac{\partial e}{\partial \mu}^R[\mu;\tau] \frac{d\mu}{d\tau} = 0 \quad (7.25)$$

La solución de esta ecuación define la siguiente función $\mu = \mu(\tau)$

$$\ln \left[\frac{\mu(\tau)}{\mu_0} \right] = \frac{24\pi^2}{C^2 \tau_0^{5/2}} \left[(\tau_0/\tau)^{5/2} - 1 \right] \quad (7.26)$$

donde se han ajustado las condiciones iniciales de manera que $\mu(\tau_0) = \mu_0$ para $\tau = \tau_0$. En la escala cósmica dependiente del

tiempo (7.26), la carga renormalizada es de acuerdo con (7.25) una verdadera constante

$$e_R^2[\mu;\tau] = e_R^2[\mu_0;\tau_0] = C^2 \tau_0^{5/2} \quad (7.27)$$

Obviamente, tomaremos a este valor como la carga física de la partícula. Este resultado puede ser interpretado de la siguiente manera: el vínculo entre e_R y la escala de masas arbitraria μ que aparece en una teoría de campos renormalizable surge de la ambigüedad que existe a nivel de las constantes desnudas en el lagrangiano no-renormalizado. De hecho, en lugar de tratar con una única teoría definida por la constante e_R , tenemos una familia de teorías con un parámetro indefinido $e_R^{(0)}$. Dado que en nuestro planteo e_R es una función del tiempo cósmico, un miembro diferente de esta familia es seleccionado para cada valor de τ (el punto de renormalización cambia con τ y por tanto también la carga renormalizada). Sin embargo, si tenemos cuidado de ajustar nuestras reglas según cierta ley de transformación bajo cambios del parámetro τ (i. e., se selecciona una escala apropiada μ para cada valor de τ), es posible compensar el cambio del punto de renormalización de e_R , obteniendo un valor efectivo constante para la carga de la partícula.

Es claro que, en este planteo, la escala $\mu(\tau)$ adquiere significado físico y debe ser distinguida de la escala dada por la constante de masa introducida en el lagrangiano. Más aún, la masa de la partícula debe ser referida a dicha escala si se decide

asignar un valor constante a la carga de la partícula. Vemos pues que la ecuación general (7.24) junto con la condición que la constante de estructura fina sea insensible a la expansión del universo, define naturalmente un nuevo sistema de unidades $(e_R, \mu(\tau))$ ($\hbar = c = 1$), que llamaremos *sistema cósmico de unidades*.

Obsérvese que en este sistema $G_4 \propto \tau^{1/2}$, resultado que aparentemente contradice la hipótesis de Dirac. Sin embargo, la conjetura de Dirac sobre la variación de la constante gravitatoria se establece bajo la condición que tanto e como m no dependan del tiempo. En nuestro caso, la escala de masas del sistema de unidades utilizado es una función del tiempo cósmico. De esta forma, no hay contradicción entre el resultado (7.8) y la ley de los grandes números.

Debe observarse también que (7.26) provee únicamente la *relación relativa* entre las reglas que deben utilizarse en dos tiempos diferentes τ y τ_0 . La escala de referencia μ_0 puede elegirse libremente. De hecho, el valor seleccionado para la carga de la partícula en (7.27) no es afectado por cambios arbitrarios en μ_0 , como debe ser para una magnitud física.

Finalmente, vemos que de acuerdo con (7.26)

$$\begin{aligned} \mu(\tau) &\rightarrow \infty \text{ si } \tau \rightarrow 0 \\ \mu(\tau) &\rightarrow \text{const.} \approx 0 \text{ si } \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{7.28}$$

como podría esperarse desde un punto de físico.

7.4 - VARIACION TEMPORAL DE LA MASA EN EL SISTEMA COSMICO

De acuerdo con la prescripción dada en la sección 7.2, podemos expresar la masa física de la partícula en la forma

$$m_{física}^2(\tau) = \bar{m}_R^2(\tau) \quad (7.29)$$

Puesto que en el sistema cósmico de unidades, un cambio en τ implica un cambio de escala, la dependencia temporal total de $m_{física}$ se obtiene de (7.29) haciendo

$$m_{física}^2(\tau) = \bar{m}_R^2[\mu(\tau); \tau] \quad (7.30)$$

donde $\bar{m}_R^2[\mu(\tau); \tau]$ (para un τ fijo) es la *running mass*⁽⁹⁾. Esta se obtiene como solución de la correspondiente ecuación del grupo de renormalización

$$\mu \frac{\partial \bar{m}_R^2}{\partial \mu} = \gamma_m(e_R) \bar{m}_R^2 \quad (7.31)$$

El coeficiente $\gamma_m(e_R)$ toma en nuestro caso la forma⁽¹⁰⁾

$$\gamma_m(e_R) = (3/8\pi^2) e_R^2 \quad (7.32)$$

de manera que la integración de (7.31) provee la relación

$$\bar{m}_R^2[\mu;\tau] = \bar{m}_R^2[\mu_0;\tau] \left[\frac{e_R(\mu;\tau)}{e_R(\mu_0;\tau)} \right]^{48} \quad (7.33)$$

Usando (7.19), (7.20) y (7.27) se obtiene a partir de este resultado la expresión

$$\bar{m}_R^2(\tau) = \left[m_R^2 + \left(\frac{2\pi}{R_5} \right)^2 \frac{\tau}{t_0} \right] \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{48/2} \quad (7.34)$$

Definiendo $a \equiv (R_5/2\pi)^2(t_0/\tau_0)$ y $b \equiv a m_R^2$, podemos a partir de (7.34) escribir finalmente

$$\frac{m_{física}^2(\tau)}{m_{física}^2(\tau_0)} = \frac{[1 + b(\tau_0/\tau)]}{[1 + b]} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{48/2} \quad (7.35)$$

De acuerdo con (7.35), la masa física resulta ser una función monótonamente decreciente del tiempo cósmico. Este comportamiento se aparta notablemente del asignado a partir de consideraciones clásicas. Además, el enorme exponente incluido en esta expresión hace que el segundo miembro de (7.35) se aproxime al valor límite cero en forma prácticamente inmediata ante cualquier variación significativa de τ . Puede apreciarse que el valor de la masa de la partícula no es sensible al valor que toma la constante b para $\tau \gg \tau_0$, haciendo por tanto irrelevante el problema del fine-tuning de las condiciones iniciales.

El modelo considerado muestra que la hipótesis de una constante de estructura fina independiente de la evolución del universo impone severas restricciones al comportamiento temporal de la masa asignada a una partícula elemental. El término de masa (del orden de la masa de Planck) generado por la compactificación de la quinta dimensión se extingue rápidamente a medida que τ evoluciona. De hecho, de acuerdo con estos resultados, la QED escalar derivada de la teoría de Kaluza-Klein describe únicamente mesones *no masivos* en un universo en expansión *suficientemente viejo*.

7.5 - CONCLUSIONES

En este capítulo hemos mostrado de que forma se modifican algunos aspectos patológicos vinculados con el modelo clásico de Kaluza-Klein de un meson cargado al renormalizar los campos. El trabajar con magnitudes renormalizadas hace posible el uso de las ecuaciones del grupo de renormalización para fijar la dependencia temporal de una de las constantes del sistema. Esta es sin duda una interesante posibilidad, que permite compatibilizar el sistema de unidades utilizado con la hipótesis de una constante de estructura fina independiente de la expansión del universo y con la particular dependencia temporal que el modelo asigna a las otras constantes fundamentales.

Mostramos que dicho sistema de unidades contiene una escala de masas dependiente del tiempo cósmico y vinculamos dicha

dependencia con la fijación del punto de renormalización de la teoría para diferentes valores del parámetro τ . Esta escala provee las reglas que deben utilizarse (para un valor del parámetro τ asignado a los observadores locales minkowskianos) en la medida de todas las cantidades dimensionales.

Un resultado significativo del modelo lo representa el propio valor de la masa del meson. En el sistema de unidades cosmológico, la masa de la partícula resulta ser una función *rápidamente decreciente* del tiempo cósmico, en contraposición con el resultado clásico. De hecho, según los resultados de la sección anterior, para tiempos del orden de la edad del universo, la masa es esencialmente cero. Este resultado no depende del valor inicial del término de masa incluido en el lagrangiano, haciendo *irrelevante* el problema del *fine-tuning* en la teoría de Kaluza-Klein.

REFERENCIAS

- 1 - J. Griego and H. Vucetich, *Time-variation model of the fundamental constants in Kaluza-Klein theory*, Phys. Rev. D40, 1904 (1989).
- 2 - Ver por ejemplo, G. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory*, New York, MacGraw-Hill (1980), cap. 8.
- 3 - C. Collins and A. J. Macfarlane, Phys. Rev. D10, 1201 (1974); G. t'Hooft, Nucl. Phys. B61, 455 (1973).
- 4 - S. Weinberg, Phys. Rev. D8, 3497 (1973).
- 5 - B. de Wit and J. Smith, *Field Theory in Particle Physics Vol I*, Amsterdam, North-Holland (1986), pag. 358.
- 6 - C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, New York, Academic Press (1978), pag. 110.
- 7 - Ver por ejemplo, C. Nash, op. cit., cap. 5.
- 8 - P. M. Stevenson, Ann. Phys. (N. Y.) 132, 383 (1981).
- 9 - R. Coquereaux, Ann. Phys. (N. Y.) 125, 401 (1980).
- 10 - B. de Wit and J. Smith, op. cit., pag. 407.

1 23