

DUPLICADO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FISICA

TESIS DOCTORAL

VORTICES EN TEORIA DE CAMPOS Y EN COSMOLOGIA

MARIA V. MANIAS

Director de Tesis: Fidel A. Schaposnik.

- 1989 -

INDICE

CAPITULO 1: <u>INTRODUCCION</u>	pág. 1
CAPITULO 2: <u>VORTICES NEUTROS</u>	
2.1 Introducción	pág. 7
2.2 Rotura espontánea de la simetría	pág. 9
2.3 Vórtices Abelianos	pág. 16
2.4 Vórtices no Abelianos	pág. 28
CAPITULO 3: <u>VORTICES CARGADOS</u>	
3.1 Introducción	pág. 32
3.2 Vórtices cargados eléctricamente	pág. 34
3.3 El término de Chern-Simons	pág. 40
3.4 Vórtices cargados con término de Chern-Simons	pág. 50
CAPITULO 4: <u>SOLUCIONES DEL MODELO NO ABELIANO DE HIGGS CON TERMINO DE CHERN-SIMONS</u>	
4.1 Introducción	pág. 62
4.2 Solución de vórtice cargado	pág. 64
CAPITULO 5: <u>COSMOLOGIA</u>	
5.1 Introducción	pág. 80
5.2 Métrica de Robertson-Walker	pág. 84

5.3	El corrimiento al rojo	pág. 86
5.4	Ecuaciones de Einstein	pág. 90
5.5	Densidad y presión del presente Universo	pág. 96
5.6	La era dominada por materia	pág. 99
5.7	Historia térmica del Universo	pág.104

CAPITULO 6: CUERDAS COSMICAS

6.1	Introducción	pág.112
6.2	Transiciones de Fase en el Universo	pág.114
6.3	Cuerdas	pág.125
6.4	Efectos cosmológicos de las cuerdas	pág.142
6.5	Los vórtices cargados y la formación de galaxias	pág.157

CAPITULO 7: CONCLUSIONES

pág.163

APENDICE A

pág.166

APENDICE B

pág.172

REFERENCIAS

pág.182

CAPITULO 1

INTRODUCCION

En la década del 70 se produjeron importantes desarrollos en Teorías Cuánticas de Campos basados en aproximaciones semiclásicas. En particular, a partir de los trabajos de Dashen, Hasslascher y Neveu⁽¹⁾, se extendieron los métodos tipo WKB de la Mecánica Cuántica a sistemas con infinitos grados de libertad y se los aplicó a diversos sistemas.

De esta manera se pudo tener control de problemas que previamente parecían de dificultad insuperable, y se obtuvo una comprensión más acabada de la estructura de la Cromodinámica Cuántica, la candidata más segura para una Teoría de Campos de las interacciones fuertes.

Los métodos semiclásicos en Teoría Cuántica de Campos se basan en la utilización de configuraciones clásicas (por ejemplo, soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento⁽²⁾) con ciertas propiedades, entre las que se cuentan la de ser no singulares, no disipativas, y tener energía finita.

En algunas Teorías de Campos, en particular en aquellas que tienen una simetría de gauge espontáneamente rota, existen estas soluciones bajo la forma de paquetes de energía que no se disipa (Lumps o solitones). Es de esperar que a nivel cuántico tales teorías tengan una estructura muy rica; en particular los solitones clásicos podrían devenir partículas a nivel cuántico.

Fue con esta idea que Nielsen y Olesen⁽³⁾ en un trabajo pionero, aprovechando una analogía entre el modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau para describir la superconductividad de tipo II y el modelo Abelian de Higgs, analizaron soluciones clásicas del tipo de una cuerda con las propiedades de un vórtice con flujo magnético cuantificado (ya a nivel clásico). El origen de este hecho se encuentra en propiedades topológicas del espacio de las soluciones de teorías con rotura espontánea de la simetría.

En efecto, en teorías con rotura espontánea de la

simetría se pueden establecer "leyes de conservación" que aseguran que soluciones con distinto "número topológico" no pueden deformarse unas en otras de manera continua. Como la evolución temporal es continua, esto implica la estabilidad de la solución en el sentido de que si esa solución pertenece a una clase topológica dada en un dado instante, permanecerá en esa clase en todo otro instante.

Como dijimos los vórtices de Nielsen y Olesen aparecen como soluciones (estáticas y con simetría axial) de las ecuaciones de movimiento de una Teoría Abeliiana de Higgs. Inmediatamente después de su descubrimiento t'Hooft⁽⁴⁾ y Polyakov⁽⁵⁾ analizando una Teoría no Abeliiana (el modelo de Georgi-Glashow⁽⁶⁾) descubrieron soluciones estáticas de energía finita y con simetría esférica. Estas soluciones, al igual que los vórtices de Nielsen y Olesen, tenían asociado un flujo magnético cuantificado por razones topológicas, y sus propiedades a grandes distancias eran análogas a las de los monopolos de Dirac⁽⁷⁾. Sin embargo, en contraposición con estos últimos, los monopolos de t'Hooft y Polyakov no tienen singularidades debido a la no linealidad de las ecuaciones que reemplazan a las ecuaciones de Maxwell-Dirac en el caso no Abeliiano.

La idea de utilizar vórtices y monopolos para describir la dinámica de las interacciones fuertes tuvo gran auge en la segunda mitad de la década del 70⁽⁸⁾. Sin embargo, las dificultades para asociar configuraciones clásicas conectadas con acoplamientos débiles a la descripción de interacciones fuertes, impidieron realizar avances importantes.

Sin embargo el interés por estas soluciones no decayó. Ello se debió en parte a la propuesta de Polyakov⁽⁹⁾ relacionada con la utilización de soluciones con topología no trivial (instantones) en el análisis de las propiedades cuánticas de las Teorías de Gauge. Originariamente la propuesta de Polyakov correspondió a una Teoría de Gauge pura, sin campos de Higgs. En ella pueden encontrarse, trabajando en espacio euclídeo, soluciones de acción finita: los instantones. Estos podrían ser responsables de las propiedades básicas que se esperan en una teoría de las interacciones fuertes; en particular, del confinamiento de los quarks. Rápidamente se comprendió que

vórtices y monopolos podían ser tomados como soluciones del tipo instantón en espacios euclídeos de dos y tres dimensiones respectivamente. Utilizando refinadas técnicas de cuantificación pudo probarse en estos dos casos el confinamiento de los quarks^(10,11). Nuevamente serias dificultades computacionales impidieron extender estos resultados a un modelo realista en cuatro dimensiones⁽¹²⁾.

A pesar de todos estos problemas, el estudio de soluciones de Teorías de Gauge con propiedades topológicas sigue atrayendo a un gran número de investigadores. La riqueza de las estructuras matemáticas subyacente en estos estudios impulsó también el trabajo de matemáticos que como Atiyah, Singer y otros, se dedicaron a analizar el espacio de soluciones, su relación con las propiedades de operadores diferenciales elípticos, etcétera⁽⁸⁾. A la par, problemas físicos como el de la no existencia del noveno bosón de Goldstone, pudieron ser resueltos teniendo en cuenta la contribución de los instantones.⁽¹³⁾ Es realmente sorprendente cómo teoremas matemáticos muy sofisticados (por ejemplo el teorema del índice) se vieron así conectados, clarificando problemas concretos de la Física de Partículas como por ejemplo el que plantea la simetría quiral.

En los últimos dos años se produjo un "flujo" en sentido contrario, de la Física hacia la Matemática: utilizando técnicas de la Teoría Cuántica de Campos y usando las soluciones del tipo instantón se pudieron comprender propiedades topológicas de variedades de dimensión baja y calcular invariantes topológicos como los polinomios de Donaldson, Jones, etcétera.^(14,15)

En este campo de las llamadas Teorías Topológicas se han producido, en los últimos meses, grandes avances que revelan su interés, no sólo desde el punto de vista de la Matemática sino de la Física. Nuevamente, vórtices, monopolos e instantones, cumplen un rol central.^(14,15,16,17,18)

Una de las Teorías Topológicas más atractivas por su conexión con el álgebra conforme, y a través de ella con la Mecánica Estadística, es la de Chern-Simons. Los llamados términos de Chern-Simons relacionados con la topología de espacios de dimensión impar, fueron utilizados en los años 80 como alternativa para dar masa a los campos de gauge.^(19,20,21) Si bien

originariamente fueron introducidos en un espacio de tres dimensiones pueden jugar un rol en una teoría cuatridimensional, ya que ésta, a altas temperaturas, deviene una teoría efectiva euclídea en tres dimensiones.^(22,23,24)

Vórtices, monopolos e instantones juegan también un papel central en la creciente interacción entre la Física de Partículas y la Cosmología⁽²⁵⁾. La conexión entre estos dos campos de la física fue establecida por Kirzhnits⁽²⁶⁾, quien utilizando dos ingredientes básicos, la Gran Unificación y la Teoría del Big-Bang caliente, introdujo la noción de un Universo que sufre una serie de transiciones de fase en su historia temprana.

Las transiciones de fase en el Universo temprano pueden dar origen a estructuras topológicamente estables: paredes de dominio, vórtices, monopolos, y también a defectos topológicos híbridos (llamados "animales topológicos"), como por ejemplo paredes limitadas por cuerdas, monopolos conectados por vórtices. Las paredes de dominio tienen efectos cosmológicos desastrosos: llevarían a una anisotropía del fondo de microondas demasiado grande. Para que estén ausentes aparecen interesantes y muy fuertes restricciones a los modelos Gran Unificados. Por otra parte, los monopolos aparecen naturalmente en casi todas las Teorías Gran Unificadas. Según estas teorías, debería haberse creado un número muy grande de monopolos; surge entonces la necesidad de encontrar mecanismos que reduzcan ese número a un nivel compatible con la experiencia. En lo que respecta a los vórtices, no sólo no causan ninguna dificultad en los modelos cosmológicos sino que producen efectos bienvenidos. En particular, pueden generar fluctuaciones suficientes para explicar la formación de galaxias y producir efectos observacionales únicos. Para los vórtices formados en la escala de Gran Unificación ($\sim 10^{16}$ GeV) estos efectos podrían en algunos casos estar al alcance de la capacidad experimental de los próximos años. Por ejemplo, la formación de doble imagen de objetos ubicados detrás de un vórtice, que explicaría la existencia de cuasares dobles; discontinuidades en la temperatura del fondo de radiación por efecto de la formación de estelas tras las cuerdas en movimiento, la emisión de ondas gravitacionales por oscilación de vórtices, etcétera.

Creemos haber mostrado en la discusión anterior el

interés que en diversos campos de la Física y la Matemática tiene el estudio de estructuras con propiedades topológicas (Como vórtices y monopolos), y de sus efectos en la Física de Partículas y en la Cosmología.

Los trabajos originales recopilados en esta Tesis se inscriben en este dominio y constituyen un aporte a la comprensión de soluciones del tipo vórtice en Teorías de Gauge Abelianas y no Abelianas con rotura de simetría, y a su aplicación al problema de la formación de galaxias.

Para encuadrar los aportes de esta Tesis notemos que no bien fueron descubiertos los monopolos, se encontraron generalizaciones que además de carga magnética tenían carga eléctrica. Las propiedades físicas de tales soluciones son muy peculiares. Por ejemplo, si bien a nivel clásico sólo la carga magnética está cuantificada, cuánticamente también la carga eléctrica resulta un múltiplo de la carga unidad. La inclusión de un "término θ " que viola paridad en el Lagrangiano de la teoría produce el llamado efecto Witten,⁽²⁷⁾ por el cual, de existir, los monopolos deberían ser necesariamente cargados y su carga estaría relacionada con el coeficiente θ que mide la violación de la paridad. Finalmente, la presencia de monopolos cargados catalizaría el decaimiento de los protones predicho por los modelos Gran Unificados.^(28,29)

Sin preocuparse por analizar la existencia de vórtices cargados se realizaron trabajos tratando de extender los efectos señalados más arriba al caso de los vórtices. Uno de los resultados presentados en esta Tesis es la prueba de que tanto para modelos de Higgs Abelianos como no Abelianos es imposible tener soluciones estables de energía finita del tipo de un vórtice con carga eléctrica.

Sólo si se incluye un término de Chern-Simons en la teoría original, los vórtices adquieren carga eléctrica.

También analizamos en esta Tesis las propiedades de estas soluciones cargadas utilizando métodos numéricos, variacionales y analíticos. Finalmente aplicamos nuestros

resultados al análisis de las fluctuaciones en la densidad de materia provocadas por la aparición de vórtices cargados en la transición de fase de Gran Unificación. Mostramos que al igual que en el caso de los vórtices neutros, pueden originarse fluctuaciones capaces de actuar como semillas de galaxias.

La Tesis está organizada en siete capítulos. En el capítulo 2 discutimos las propiedades de los vórtices neutros en Teorías de Gauge con rotura de simetría, tanto en el caso Abeliiano como en el no Abeliiano. En el capítulo 3 extendemos este análisis al caso de vórtices cargados; en particular, mostramos que la energía de tales vórtices es necesariamente infinita salvo que se incluya un término de Chern-Simons.

En el capítulo 4 analizamos cuidadosamente las soluciones de vórtices cargados, utilizando diversos métodos. Luego de hacer una revisión del modelo del Big-Bang en el capítulo 5, utilizamos estas soluciones para analizar la evolución de las cuerdas cósmicas a partir de la transición de fase de Gran Unificación (Capítulo 6).

Luego de dar las conclusiones de nuestro trabajo en el capítulo 7, presentamos dos Apéndices con detalle de los cálculos utilizados en la Tesis.

CAPITULO 2

VORTICES NEUTROS

SECCION 2.1 : INTRODUCCION

Las Teorías de Gauge Abelianas y no Abelianas (con o sin ruptura de simetría) tienen ecuaciones clásicas de movimiento con soluciones muy interesantes para la Física de Partículas: vórtices, monopolos, instantones⁽⁸⁾ son soluciones estables de acción finita que aparecen sólo en Teorías de Campos no lineales.

Estas soluciones deben satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen del principio de mínima acción, $\delta S=0$. Una de las maneras de asegurar su estabilidad es requerir propiedades topológicas no triviales a las soluciones.

La importancia de estas soluciones en la Física de Partículas puede comprenderse si se observa que un objeto extendido clásico puede describir, en cierta aproximación, partículas como el protón o los mesones, funcionar como trampa de quarks y dar números cuánticos inesperados al vacío de una Teoría Cuántica de Campos.

De particular relevancia entre las soluciones que aparecen en las Teorías de Gauge son las del tipo vórtice, introducidas por H. Nielsen y P. Olesen en 1973⁽³⁾, a partir de una analogía entre el modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau para la superconductividad tipo II y el modelo (relativista) de una Teoría Abeliana de Higgs. El ansatz de Nielsen y Olesen conduce a una solución que corresponde a un tubo delgado, con un radio del orden de la inversa de la masa del campo de Higgs, dentro del cual existe un campo magnético, cuyo flujo está cuantificado (Esta es otra característica de interés: la cuantificación de parámetros físicos a nivel clásico). Fuera del tubo el campo de Higgs tiene prácticamente su valor de expectación de vacío, y el campo magnético es prácticamente nulo. Por todas estas características a

esta solución se la conoce como un **vórtice**.

Las configuraciones de vórtice existen siempre que la simetría de gauge sea espontáneamente rota vía campos de Higgs, dejando el vacío invariante bajo un subgrupo H del grupo de simetría de gauge G . Luego, para tener soluciones estáticas topológicamente estables, el grupo de homotopía relevante, $\pi_1(G/H)$, debe ser no trivial.

Para $G=SU(N)$ y los campos de Higgs en la representación adjunta es conveniente tener máxima rotura de la simetría de G de modo que el vacío sólo sea invariante bajo la matriz unidad en la representación adjunta. Entonces $H=Z_N$, $\pi_1(SU(N)/Z_N)=Z_N$, y tenemos $N-1$ clases de homotopía topológicamente no triviales además del vacío ordinario (La clase trivial).

En teorías no-Abelianas, además de las soluciones tipo vórtice, existen otras con simetría esférica y las características de los monopolos magnéticos propuestos por Dirac⁽⁷⁾, excepto que en este caso se trata de soluciones regulares. Descubiertos por 't Hooft⁽⁴⁾ y Polyakov⁽⁵⁾ en 1974, su generalización al caso cargado eléctricamente, "dión" según la terminología de Schwinger, fue casi inmediata⁽³⁰⁾.

En este capítulo describiremos ciertos resultados conocidos sobre los vórtices neutros (Es decir sin carga eléctrica). Para ello comenzaremos haciendo, en la Sección 2.2, una descripción de las Teorías de Gauge con rotura espontánea de la simetría. La Sección 2.3 estará dedicada a los vórtices neutros Abelianos, mientras que en la Sección 2.4 estudiaremos los vórtices neutros en el caso no-Abelianos.

SECCION 2.2: ROTURA ESPONTANEA DE LA SIMETRIA

En esta Sección estudiaremos qué ocurre en una Teoría de Gauge en la cual el vacío no es invariante bajo el grupo de transformaciones de gauge.

Una simetría que puede ser obtenida a partir de un Lagrangiano exactamente simétrico, siempre que el vacío físico no sea invariante bajo el grupo de simetrías, es llamada "simetría espontáneamente rota".

Consideremos entonces una teoría cuya dinámica está definida por un Lagrangiano, en $d=4$ dimensiones espacio-temporales, de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 + C_2 |\phi|^2 - C_4 |\phi|^4 - \frac{C_2^2}{4C_4} \quad (2.1)$$

siendo ϕ un campo escalar (cargado),

$$\phi = f(x) e^{i\Omega(x)} \quad (2.2)$$

A_μ un campo de gauge y $F_{\mu\nu}$ el tensor de campo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.3)$$

En (2.1) el potencial $V(\phi)$ de la forma:

$$V(\phi) = -C_2 |\phi|^2 + C_4 |\phi|^4 + \frac{C_2^2}{4C_4} \quad (2.4)$$

con C_2 y C_4 constantes reales.

El Lagrangiano (2.1) es invariante frente a las transformaciones de gauge:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{i\Lambda(x)} \phi \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{i}{e} \partial_\mu \Lambda(x)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Dada la teoría definida por el Lagrangiano (2.1) podemos preguntarnos cuáles son las configuraciones de campo estables. Para ello comenzamos por estudiar el potencial (2.4). El mínimo del mismo, como funcional de ϕ , está dado por la condición:

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = \phi^* (-C_2 + 2C_4 |\phi|^2) = 0\tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) tiene una solución trivial para todo C_2 y C_4 :

$$\phi_0^* = \phi_0 = 0\tag{2.7}$$

Mientras que si C_2 y C_4 son ambas positivas existe una segunda solución:

$$|\phi_0|^2 = \frac{C_2}{2C_4}\tag{2.8}$$

Dado que para que exista un estado de energía mínima finita C_4 debe ser siempre positiva, es el signo de C_2 el que decide que el potencial tenga o no un mínimo no trivial.

Analizaremos entonces los dos casos posibles:

CASO A) $C_2 < 0$

En este caso la forma del potencial es la dada por la Figura 2.1:

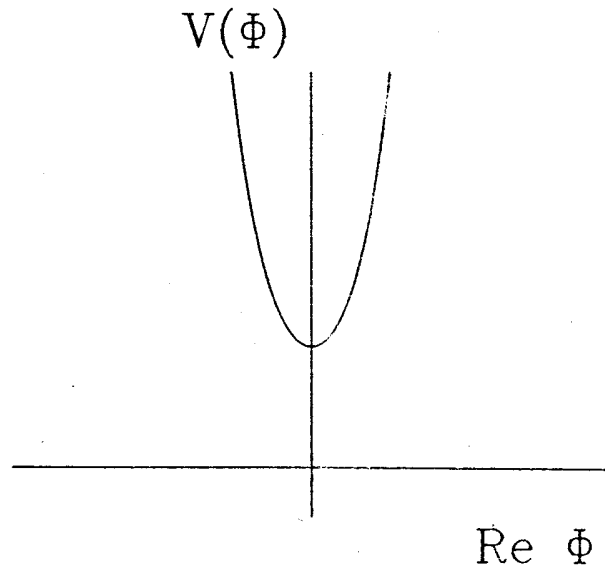


Figura 2.1

La única solución de (2.6) es $\phi_0 = 0$. Esta configuración que hace mínimo el potencial, minimiza el término de energía cinética (que es semidefinido positivo), y por ello se lo llama **estado fundamental** de la teoría, o, como es usual en Teoría Cuántica de Campos, **estado de vacío**.

Diremos entonces que la configuración

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0 \\ F_0^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

corresponde en este caso al vacío. Notemos que este estado de vacío es invariante frente a la transformación de gauge (2.5):

$$\begin{aligned} \phi'_0 &= \phi_0 = 0 \\ F_0'^{\mu\nu} &= F_0^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

es decir, el estado de vacío tiene la misma simetría que el Lagrangiano (2.1) con el que definimos la teoría. Esto resulta evidente a partir de la Figura 2.1.

CASO B)

En este caso la forma del potencial es la dada en la Figura 2.2:

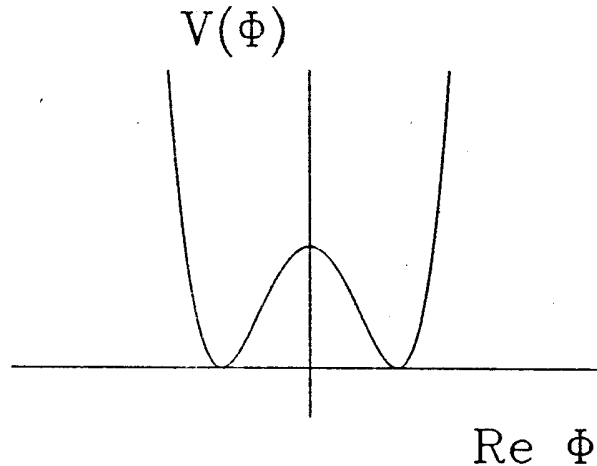


Figura 2.2

A partir de esta figura vemos que $\phi=0$ ya no es el mínimo de la teoría. Ahora dicho mínimo está dado por la condición:

$$|\phi_0|^2 = \frac{c_2}{2c_4} = f_0^2 \quad (2.11)$$

Por lo que tenemos una infinidad de posibles mínimos de la forma:

$$\phi_0 = f_0 e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.12)$$

A esta situación se la conoce como rotura espontánea de la simetría. En efecto, la elección de un posible valor de θ , $\theta = \bar{\theta}$, hace que el vacío correspondiente:

$$\bar{\phi}_0 = f_0 e^{i\bar{\theta}} \quad (2.13)$$

ya no sea invariante de gauge, pues su transformado, ϕ'_0 , estará dado por:

$$\phi'_0 = f_0 e^{i(\bar{\theta} + \lambda)} \quad (2.14)$$

Es decir, la simetría del Lagrangiano que define nuestra teoría no es compartida por el estado de vacío.

Consideremos ahora el caso de una teoría de gauge no-Abeliana descrita por la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi \cdot D^\mu \phi - U(\phi) \quad (2.15)$$

donde ϕ es un campo escalar de Higgs que pertenece a alguna representación (no necesariamente irreducible) de un grupo de gauge G , con generadores reales T_a antisimétricos normalizados de modo que

$$\text{tr} T_a T_b = -\frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (2.16)$$

La derivada covariante de es

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - e A_\mu \phi \quad (2.17)$$

siendo e la constante de acoplamiento de gauge.

El campo de gauge es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + e [A_\mu, A_\nu] \quad (2.18)$$

con

$$A_\mu = A_\mu^a T^a$$

El potencial $U(\phi)$ es un polinomio invariante bajo el grupo de transformaciones G , de grado 4 de modo de asegurar la renormalizabilidad. Tomemos por ejemplo $G=SO(N)$ y ϕ perteneciente a la representación vectorial fundamental de N dimensiones. El polinomio U es:

$$U = \frac{1}{8} g^2 (\phi \cdot \phi - \eta^2)^2 \quad (2.19)$$

siendo η una constante que define la escala de ϕ y g^2 la constante de acoplamiento. Hemos elegido el coeficiente del término cuadrático en U negativo, de modo que U tiene un máximo en $\phi=0$. Por lo tanto, ϕ adquiere un valor de expectación de vacío $\langle \phi \rangle$ no nulo. El mismo puede ser calculado minimizando el potencial efectivo $V(\phi)$ (que es la densidad de energía libre mínima para estados en los cuales $\langle \phi \rangle$ tiene un valor igual al argumento de V).

Eligiendo adecuadamente el gauge tenemos:

$$V(\phi) = U(\phi) + \hbar (\dots) \quad (2.20)$$

Es decir que en la aproximación árbol

$$\langle \phi \rangle^2 = \eta^2 \quad (2.21)$$

es el mínimo de $V(\phi)$.

La ecuación (2.21) no fija la dirección de $\langle \phi \rangle$, sólo su magnitud. De modo que tenemos un conjunto degenerado de estados de vacíos, rotulados por las $N-1$ variables angulares. La simetría es quebrada de $SO(N)$ a $SO(N-1)$.

En el caso general, si ϕ es un punto sobre la superficie M de mínimos de U y H es el correspondiente subgrupo isotrópico de G , es decir

$$H = \{ g \in G : g\phi = \phi \}$$

entonces M puede ser identificado con el espacio cociente G/H . Cada punto sobre M define una de las familias de estados de vacíos degenerados. El grupo de simetría G es espontáneamente quebrado, quedando H como el subgrupo de simetrías no rotas.

El caso $N=2$ del modelo $SO(N)$, corresponde al modelo Abelian de Higgs relacionado con el modelo de Landau-Ginzburg de la superconductividad.

Para cualquier $N>1$, al igual que en superconductividad, hay dos escalas de longitudes características, la longitud de correlación ξ y la profundidad de penetración δ dadas por:

$$\xi = (m_s)^{-1} = (g\eta)^{-1} \quad \delta = (m_v)^{-1} = (e\eta)^{-1} \quad (2.22)$$

Aquí m_s es la masa del escalar de Higgs, correspondiente a la componente radial de ϕ , mientras que m_v es la masa de cada uno de los $N-1$ bosones vectoriales correspondientes a los generadores quebrados de G . (Los bosones correspondientes a los generadores de H permanecen no masivos).

SECCION 2.3: VORTICES ABELIANOS

a) EL MODELO ABELIANO DE HIGGS

En 1973 Nielsen y Olesen⁽³⁾ investigaron un ejemplo de una Teoría de Campos con una solución de tipo vórtice considerando un campo de gauge Abeliano acoplado a un campo escalar cargado. Obtuvieron soluciones aproximadas de las ecuaciones de movimiento y las relacionaron con la cuerda de Nambu en el límite de acoplamiento fuerte. En 1976 de Vega y Schaposnik⁽³¹⁾ obtuvieron una solución exacta de este modelo y estudiaron detalladamente las propiedades de los campos escalares y vectoriales.

Comenzaremos aquí describiendo el modelo y calculando el tensor energía-momento del sistema. El mismo será importante para hacer un ansatz que simplifique considerablemente las ecuaciones de movimiento y será utilizado en nuestra generalización no Abeliana.

Consideremos la teoría cuya dinámica está definida por la densidad Lagrangiana dada en (2.1):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 + c_2 |\phi|^2 - c_4 |\phi|^4 - \frac{c_2^2}{4c_4} \quad (2.23)$$

Esta forma de escribir el potencial es totalmente análoga a la que usamos en la Sección 2.2:

$$V(\phi) = \frac{1}{8} g^2 (\phi \cdot \phi - \eta^2)^2$$

haciendo simplemente la identificación:

$$c_2 = \frac{1}{4} g^2 \eta^2 \quad (2.24)$$

$$c_4 = \frac{1}{8} g^2 \quad (2.25)$$

El Lagrangiano (2.23) es invariante frente a la transformación:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \quad (2.26)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Podemos ver fácilmente que asociada a esta transformación existe una corriente conservada (corriente de Noether) j_μ :

$$j_\mu = \frac{i}{2} (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi - 2ie A_\mu |\phi|^2) \quad (2.27)$$

tal que

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad (2.28)$$

A partir de esta ecuación podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \int j_0 d^3x + \text{div} \vec{j} d^3x = 0 \quad (2.29)$$

Para los campos que se anulan en el infinito el segundo término de (2.29) es nulo, de manera que obtenemos:

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (2.30)$$

siendo $q = \int j_0 d^3x$ la carga del campo ϕ .

Podemos ver que el Lagrangiano (2.23) es también invariante frente a la transformación de gauge:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\beta(x)} \phi \quad (2.31)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \beta(x) \quad (2.32)$$

La que puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\phi' &= g(x) \phi(x) \\ A'_\mu &= A_\mu + \frac{i}{e} g^{-1}(x) \partial_\mu g(x)\end{aligned}\tag{2.33}$$

donde $g(x)$ es un número complejo de módulo 1, es decir, un elemento del grupo $U(1)$.

La teoría descrita por el Lagrangiano (2.23) es conocida como la **Electrodinámica Escalar**; el campo $F_{\mu\nu}$ representa el campo electromagnético que se acopla en forma mínima al campo de materia representado por ϕ .

Como vimos en la Sección anterior, este modelo presenta rotura espontánea de la simetría, ya que el estado de vacío no comparte la simetría del Lagrangiano.

Para cualquier configuración de energía finita deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} D_\mu \phi = 0\tag{2.34}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(\phi) = 0\tag{2.35}$$

siendo $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ la derivada covariante.

Calculemos ahora el flujo del campo magnético a través de una superficie encerrada por una curva C :

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}\tag{2.36}$$

Supongamos que elegimos la curva C de tal modo que sobre ella valgan las condiciones (2.34) y (2.35), es decir:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \phi + ie A_\mu \phi &= 0 \\ \phi &= f_0 e^{i\beta}\end{aligned}\tag{2.37}$$

Esto conduce a que en dicha curva:

$$A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \beta \quad (2.38)$$

De modo que el flujo magnético resulta

$$\Phi = -\frac{1}{e} \oint_C \partial_\mu \beta = -\frac{1}{e} [\beta(2\pi) - \beta(0)] \quad (2.39)$$

Si pedimos que el campo sea monovaluado, tendremos $\beta(2\pi) - \beta(0) = 2\pi n$:

$$\Phi = -\frac{2\pi}{e} n \quad (2.40)$$

Este es un ejemplo de la existencia de magnitudes cuantificadas a nivel clásico.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir del Lagrangiano (2.23) son:

$$\begin{aligned} \square^2 A_\mu &= \frac{ie}{2} (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) - e^2 \phi^2 A_\mu \\ \square^2 \phi + 2ie A_\mu \partial^\mu \phi - e^2 A_\mu A^\mu \phi &= 2c_2 \phi - 4c_4 \phi^* \phi^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

(Hemos trabajado en el gauge de Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$).

Notemos que como consecuencia del término cuártico en el potencial y de la interacción $A-\phi$ vía la derivada covariante, las ecuaciones resultan no lineales.

Como fue primero notado por Nielsen y Olesen, en analogía con la teoría de Ginzburg-Landau de la superconductividad, este modelo tiene soluciones clásicas de tipo vórtice. Ya vimos que el flujo de los vórtice está cuantificado en unidades de $-2\pi/e$. Una solución correspondiente a n unidades de flujo es:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= e^{-in\varphi} f(\rho) & n &= 1, 2, 3, \dots \\ \vec{A}(\vec{r}) &= -\hat{e}_\varphi \frac{A(\rho)}{\rho} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Esta solución sólo depende de las coordenadas polares (ρ, φ) y es independiente de z . Las condiciones de contorno apropiadas para tener soluciones de tipo vórtice con energía finita son:

$$\begin{aligned} f(0) &= A(0) = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) &= \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} = \eta \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho) &= -\frac{n}{e} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para estas soluciones axialmente simétricas las ecuaciones (2.41) toman la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - e(n + eA(\rho))f(\rho) &= 0 \\ \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{(n + eA(\rho))^2}{\rho^2} f - 2c_2 f^2 + 4c_4 f^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como ya hemos señalado, existen dos escalas de masas distintas en las ecuaciones (2.44),

$$\begin{aligned} m_s &= 2\sqrt{c_2} \\ m_v &= \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} e \end{aligned} \quad (2.45)$$

que corresponden a la masa del campo escalar desplazado y al campo vectorial de gauge A_μ .

En el caso en que $e^2 = 8c_4$ ambas escalas de masa coinciden. La longitud de coherencia λ ,

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{C_2}} \quad (2.46)$$

proporciona la escala para las variaciones espaciales en el campo de Higgs, mientras que la profundidad de penetración δ ,

$$\delta = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{2C_4}{C_2}} \quad (2.47)$$

describe las variaciones espaciales en los efectos electromagnéticos.

La condición de energía finita (por unidad de longitud) implica que asintóticamente los campos del vórtice deben aproximarse a:

$$f(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \left(1 - \text{cte} \exp\left[-\frac{\rho}{\xi}\right]\right) \sqrt{\frac{C_2}{2C_4}} \quad (2.48)$$

$$A(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} -\frac{n}{e\rho} + \text{cte} \exp\left[-\frac{\rho}{\delta}\right]$$

Esta forma explícita demuestra que el campo magnético difiere apreciablemente de cero en una distancia δ a partir del centro del carozo del vórtice. Similarmente, el campo ϕ alcanza su valor de vacío $\sqrt{\frac{C_2}{2C_4}}$ a una distancia ξ . El cociente de estas dos longitudes fundamentales es llamado parámetro de Ginzburg-Landau:

$$\lambda \equiv \frac{\delta}{\xi} = \frac{m_s}{m_v} = \frac{2\sqrt{2C_4}}{e} \quad (2.49)$$

Este parámetro adimensional clasifica a los superconductores en dos categorías:

$$\lambda < 1 \text{ (tipo I)} \qquad \lambda > 1 \text{ (tipo II)} \quad (2.50)$$

Solamente los superconductores de tipo II exhiben vórtices; sin embargo, los vórtices de Nielsen y Olesen pueden potencialmente existir para λ arbitrarios.

Para tratar de encontrar soluciones exactas del sistema acoplado de ecuaciones (2.44) es conveniente considerar el tensor energía-momento del sistema:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + ie (A_\mu \phi \partial_\nu \phi^* - A_\nu \phi^* \partial_\mu \phi) + e^2 A_\mu A_\nu \phi \phi^* + F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.51)$$

Para la solución de vórtice (2.42) las únicas componentes no nulas son:

$$T_{\rho\rho} = \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 - \frac{f^2}{2\rho^2} (n+eA)^2 + C_2 f^2 - C_4 f^4 - \frac{C_2^2}{4C_4} \quad (2.51)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} f^2 (n+eA)^2 + \rho^2 \left[C_2 f^2 - C_4 f^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 - \frac{C_2^2}{4C_4} \right] \quad (2.52)$$

$$T_{00} = \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 + \frac{f^2}{\rho^2} (n+eA)^2 \right] - C_2 f^2 + C_4 f^4 + \frac{C_2^2}{4C_4} \quad (2.53)$$

(Hemos tomado ventaja de la libertad en la definición de $T_{\mu\nu}$ para tener $\lim_{\rho \rightarrow \infty} T_{\mu\nu} = 0$).

La ley de conservación para el $T_{\mu\nu}$ toma la forma:

$$\frac{d}{d\rho} (\rho T_{\rho\rho}) = \frac{T_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \quad (2.54)$$

b) SOLUCION EXACTA PARA EL MODELO ABELIANO DE HIGGS

Mostraremos aquí que es posible desacoplar el sistema de ecuaciones (2.44) siempre que se cumpla una relación particular entre las constantes de acoplamiento. En tal caso se pueden obtener soluciones exactas para el sistema⁽³⁴⁾.

Comenzamos haciendo el ansatz

$$T_{\rho\rho}(\rho) = T_{\gamma\gamma}(\rho) = 0 \quad (2.55)$$

que es consistente con las condiciones de contorno (2.43) y con la ley de conservación (2.54). A partir de la condición (2.55) y de las expresiones explícitas para el $T_{\rho\rho}$ y $T_{\gamma\gamma}$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{df}{d\rho}\right)^2 = \frac{f^2}{\rho^2} (n+eA)^2 \quad (2.56)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho}\right)^2 = 2C_4 f^4 - 2C_2 f^2 + \frac{C_2^2}{2C_4} \quad (2.57)$$

Integrando la ecuación (2.56) obtenemos:

$$f(\rho) = \sqrt{\frac{C_2}{2C_4}} \exp \left\{ + \int_{\infty}^{\rho} [n+eA(\rho')] \frac{d\rho'}{\rho'} \right\} \quad (2.58)$$

Para satisfacer las condiciones (2.43) debemos tomar el signo superior en (2.58). Haciendo ésto encontramos:

$$\frac{df}{d\rho} = (n+eA) \frac{f}{\rho} \quad (2.59)$$

Por lo tanto la ecuación (2.57) queda

$$\frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} = \pm \sqrt{2C_4} \left[f^2(\rho) - \frac{C_2}{2C_4} \right] \quad (2.60)$$

Se puede ver fácilmente que siempre que se cumpla la relación:

$$e^2 = 8C_4 \quad (2.61)$$

cualquier solución de las ecuaciones (2.59) y (2.60) verifica las ecuaciones de movimiento. Es decir que para la relación particular (2.61), las ecuaciones (2.59) y (2.60) son equivalentes a las ecuaciones (2.44).

El punto más importante ahora es que en este caso podemos desacoplar el sistema de ecuaciones no lineales. Realmente, a partir de (2.59) y (2.60) obtenemos:

$$\frac{d^2 A}{dp^2} - \frac{1}{f} \frac{dA}{dp} - 2(n+eA) \left(\frac{2C_2}{e} + \frac{1}{f} \frac{dA}{dp} \right) = 0 \quad (2.62)$$

$$f'(p) = \frac{4C_2}{e^2} + \frac{2}{e} \frac{1}{f} \frac{dA}{dp} \quad (2.63)$$

Vemos entonces que si la relación (2.61) es válida, el modelo depende sólo de dos parámetros: la masa m de la partícula vectorial, $m = 2\sqrt{C_2}$, que coincide con la masa de la partícula escalar, y la carga e .

Como ya dijimos antes, la solución estática del Lagrangiano de Higgs (2.23) fue identificada con la teoría de Ginzburg-Landau de la superconductividad tipo II. Cuando $e^2 < 8C_4$ el sistema presenta superconductividad de tipo II mientras que para $e^2 > 8C_4$ aparece un efecto Meissner completo, es decir hay superconductividad de tipo I.

Antes de estudiar las soluciones de las ecuaciones (2.62) y (2.63), encontraremos la energía del vórtice en el sistema en reposo, es decir, su masa.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.53), (2.56), (2.57) y (2.65) encontramos la siguiente expresión para T_{00} :

$$T_{00} = \frac{1}{f} \left(\frac{dA}{dp} \right)^2 + \frac{2}{e} \left(\frac{1}{f} \frac{dA}{dp} + \frac{2C_2}{e} \right) \left(\frac{n+eA}{f} \right)^2 \quad (2.64)$$

Se puede fácilmente integrar la expresión clásica para la densidad de energía, obteniendo

$$M_n = 2\pi \int_0^\infty p dp T_{00}(p) = \frac{2n\pi}{e} \left(-\frac{1}{p} \frac{dA}{dp} \right)_{p=0} = n \frac{\pi m^2}{e^2} \quad (2.65)$$

Buscaremos ahora una solución para el sistema de ecuaciones (2.62), (2.63). Para abreviar la escritura utilizaremos la notación:

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \sqrt{c_2} p = \frac{1}{2} m p \\ \chi_n(\zeta) &\equiv n + e A(p) \end{aligned} \quad (2.66)$$

de modo que las ecuaciones (2.62), (2.63) se transforman en:

$$\frac{d^2 \chi}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} - 4\chi = 2 \frac{\chi}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} \quad (2.67)$$

$$f^2(\zeta) = \frac{m^2}{e^2} \left(1 + \frac{1}{2\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} \right) \quad (2.68)$$

Las condiciones de contorno ahora resultan

$$\chi_n(0) = n \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \chi_n(\zeta) = 0 \quad (2.69)$$

Debido a que la ecuación (2.67) es invariante bajo la transformación $\zeta \rightarrow -\zeta$ (Y $\chi_n(0) \neq 0$) proponemos una expansión en potencias pares de ζ de la forma:

$$\chi_n(\zeta) = n + \sum_{s=1}^{\infty} D_n^s \zeta^{2s} \quad (2.70)$$

El índice n representa el número de cuanto de flujo.

A partir de la ecuación (2.67) encontramos la siguiente condición para los coeficientes de la expansión:

$$D_n' = -1 \dots \quad (2.71)$$

si $n \geq 2$

$$D_n^s = 0 \quad \text{para} \quad 2 \leq s \leq n \quad (2.72)$$

y una relación de recurrencia para $s \geq n+2$

$$D_n^s = \frac{1}{s(s-n-1)} \sum_{r=n+1}^{s-1} r D_n^r D_n^{s-r} \quad (2.73)$$

La relación (2.71) asegura que el campo de Higgs toma el valor cero para $f = 0$; la ecuación (2.72) muestra que dicho cero es de orden n . A partir de las ecuaciones (2.68) y (2.70), para $\zeta \rightarrow 0$ se obtiene:

$$f_n(\zeta) = \frac{m}{e} [(n+1) D_n^{n+1}]^{1/2} \zeta^n [1 + O(\zeta^2)] \quad (2.74)$$

La relación de recurrencia (2.73) fija todos los D_n^s en términos de D_n^1 y D_n^{n+1} . Ya conocemos el valor de $D_n^1 = -1$. El valor del coeficiente D_n^{n+1} queda fijado por las condiciones de contorno en el infinito. En la referencia (31) se calcula este coeficiente para el vórtice de menor energía, $n=1$, cuyo valor numérico resulta:

$$D_n^{n+1} = 0.72791 \quad \text{para } n=1 \quad (2.75)$$

El siguiente es un esquema cualitativo del comportamiento de los campos: el campo magnético decrece monótonamente con una longitud característica $1/m$, mientras que el campo escalar crece con la misma longitud desde cero en el origen hasta su valor de vacío en el infinito.

En la Figura 2.3 graficamos la solución exacta ($n=1$) para los módulos del campo escalar y del campo magnético.

En la Figura 2.4 presentamos la gráfica del potencial vector.

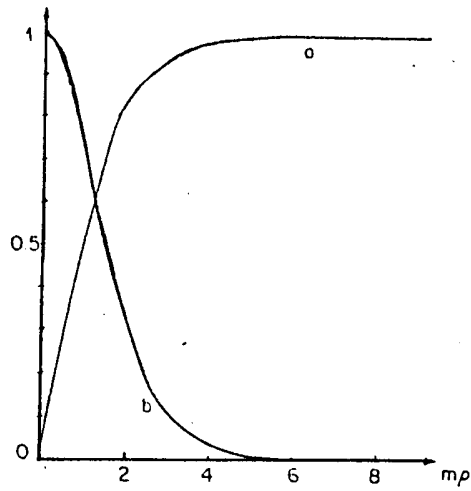


Figura 2.3: Las curvas a y b se refieren a $e/m |\phi(\vec{r})|$ y $ze/m^2 B_z(\rho)$ respectivamente para el caso $n=1$.

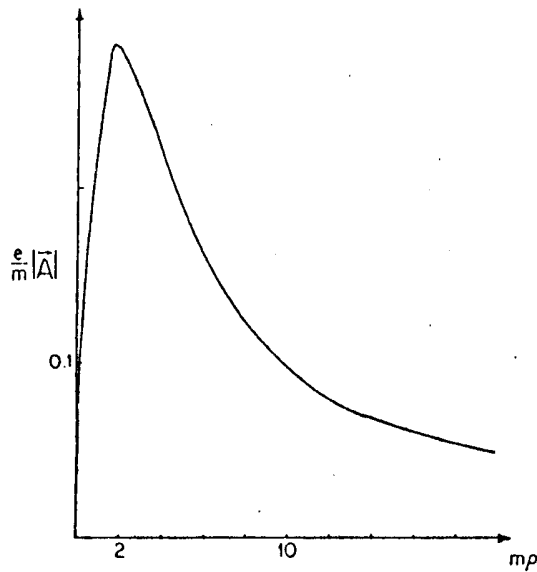


Figura 2.4: Gráfica de $e/m |\vec{A}|$ para el caso $n=1$.

SECCION 2.4: VORTICES NO ABELIANOS

En esta sección haremos la extensión del modelo estudiado en la sección anterior al caso de los vórtices no Abelianos.

Si bien los argumentos son generales y aplicables a teorías "realistas", tal como Teorías Gran Unificadas (Por ejemplo la teoría SU(5)), es útil comenzar considerando la teoría no Abeliana más simple que presenta soluciones de tipo vórtice. Es decir, estudiaremos una teoría con un campo de gauge A_μ que toma valores en el álgebra de Lie de $G=SU(2)$ acoplado a dos campos de Higgs en la representación adjunta, con una densidad Lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \vec{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \vec{\phi} D^\mu \vec{\phi} - V(\phi, \psi) \quad (2.76)$$

La derivada covariante de $\vec{\phi}$ es:

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} + e \vec{A}_\mu \wedge \vec{\phi}$$

y el tensor de campo $\vec{F}_{\mu\nu}$:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + e \vec{A}_\mu \wedge \vec{A}_\nu$$

siendo $\vec{\phi}$, $\vec{\psi}$ y \vec{A}_μ isovectores.

Los generadores del álgebra de Lie de SU(2), en la representación adjunta, verifican:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c = \varepsilon^{abc} t^c \quad (2.77)$$

Notemos que el primer término de la densidad Lagrangiana(2.76) corresponde a la energía cinética del campo de gauge.

Puede verse fácilmente que es necesario introducir al menos dos multipletes escalares para romper totalmente la simetría, de modo de asegurar la estabilidad topológica de la solución de vórtice. Entonces podemos tomar, por ejemplo, el potencial en la forma:

$$V(\phi, \psi) = \frac{g^2}{2} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - \eta^2)^2 + \frac{g'^2}{2} (\vec{\psi} \cdot \vec{\psi} - \eta'^2)^2 \quad (2.78)$$

eligiendo las soluciones de vacío, $\vec{\phi}_0$ y $\vec{\psi}_0$, no paralelas en el isoespacio. De este modo, como el subgrupo H que deja el vacío invariante se reduce al centro de SU(2), es decir Z_2 , el grupo de homotopía relevante, $\pi_1(G/H) = \pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2 \neq 0$. Por lo tanto, tendremos además del vórtice trivial, una solución de tipo vórtice topológicamente estable.

La ecuación de movimiento para el campo A_μ queda:

$$D_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = J^\nu \quad (2.79)$$

siendo

$$J^\nu = e [D^\nu \phi, \phi] + e [D^\nu \psi, \psi] \quad (2.80)$$

la corriente.

Un ansatz apropiado para tener una solución de tipo vórtice estática, puramente magnética y axialmente simétrica es el siguiente:

$$\vec{\phi} = f(\rho) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\psi} = \eta' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

de modo que $\vec{\phi} \cdot \vec{\psi} = 0$, y

$$A_\varphi^a = \frac{A(\rho)}{\rho} \delta^{a3} = \frac{A(\rho)}{\rho} \hat{e}_\varphi \quad (2.82)$$

mientras que las demás componentes de A_μ son nulas.

Para no tener singularidades en el origen elegimos:

$$A(0) = f(0) = 0 \quad (2.83)$$

Las condiciones en el infinito para tener energía finita son:

$$|f(\rho)|^2 \underset{\rho \rightarrow \infty}{\simeq} |\phi_0|^2$$

$$D_\mu \vec{\Phi}_\infty = 0 \Rightarrow \partial_\mu \vec{\Phi}_\infty + e \vec{A}_{\mu\infty} \wedge \vec{\Phi}_\infty = 0 \quad (2.84)$$

De manera que las condiciones de contorno resultantes son:

$$f(0) = A(0) = 0$$

$$f(\rho) = \eta \quad A(\rho) = -\frac{1}{e} \quad \text{para } \rho \rightarrow \infty \quad (2.85)$$

Estudiaremos ahora la circulación de A_μ para calcular el "flujo magnético":

$$\vec{\Phi}_{mag} = \oint \vec{A}_\mu dx^\mu \quad (2.86)$$

Notemos que como A_μ toma valores en el álgebra de Lie, el flujo tiene un índice de grupo; en este caso, por (2.82), sólo existe $\vec{\Phi} = \phi^3$.

Trabajamos en el plano $z=0$, alrededor de un círculo S_1 de radio R , siendo C_R la curva que lo encierra:

$$\Phi_{mag}^3 = \oint_{S_{1\infty}} A_\varphi^3 R_\infty d\varphi = \oint_{S_{1\infty}} \frac{A(\rho)_\infty}{R_\infty} R_\infty d\varphi = - \oint_{S_{1\infty}} \frac{1}{e} d\varphi \quad (2.87)$$

$$\therefore \vec{\Phi}_{mag}^3 = -\frac{2\pi}{e}$$

Nuestro vórtice corresponde entonces a la clase $n=1$.

Volviendo a las ecuaciones de movimiento, vemos que usando las ecuaciones (2.81) y (2.82) podemos trivialmente separar la dependencia angular. Las ecuaciones radiales no lineales son:

$$\frac{d^2 A(r)}{dr^2} - \frac{1}{f} \frac{dA(r)}{dr} - e^2 f(r) [1 + e A(r)] = 0$$

(2.88)

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dr} \left[f \frac{df}{dr} \right] - \frac{f(r)}{f^2} [1 + e A(r)]^2 + \frac{g^2}{2} f(r) [f^2(r) - \eta^2] = 0$$

que son idénticas al modelo Abelian, de modo que pueden ser resueltas numéricamente. La solución corresponde a un tensor de campo de gauge que decrece con una longitud característica $\delta = \frac{1}{m_V}$, siendo m_V la masa del mesón vectorial dada por la expresión:

$$m_V^2 = e^2 (\eta^2 + \eta'^2)$$

(2.89)

y un campo de Higgs $\vec{\phi}$ creciendo con una longitud característica $\zeta = \frac{1}{m_S}$ con m_S la masa del mesón escalar:

$$m_S^2 = g^2 \eta^2$$

(2.90)

desde el valor cero en el origen hasta su valor de vacío en el infinito.

Esta solución corresponde a una configuración de cuerda de ancho ζ y profundidad de penetración δ . Si ζ y δ son del mismo orden de magnitud ($m_V \sim m_S$), tendremos una línea de vórtice bien definida.

CAPITULO 3:

VORTICES CARGADOS

SECCION 3.1:INTRODUCCION

Como ya hemos señalado en el capítulo anterior, los vórtices y los monopolos aparecen en teorías de gauge espontáneamente rotas en dos y tres dimensiones espaciales. Para ambos tipos de soluciones estáticas el flujo magnético está cuantificado debido a sus propiedades topológicas.

Los monopolos magnéticos admiten una generalización cargada eléctricamente en 3+1 dimensiones espacio-temporales, llamados *diones*, que tienen energía finita⁽³⁰⁾. Su carga es clásicamente continua y sólo se cuantifica a nivel cuántico.

En este capítulo veremos que los vórtices tanto en modelos Abelianos como no Abelianos de Higgs no admiten generalizaciones cargadas eléctricamente en 2+1 dimensiones espacio-temporales que preserven finita la energía.^(32,33)

Este resultado constituye otro de los aportes originales de esta Tesis.

La adición de un término de Chern-Simons (C-S)⁽¹⁹⁻²¹⁾ tanto en el modelo Abeliano de Higgs como en el no Abeliano, en 2+1 dimensiones, cambia radicalmente esta situación. En presencia de un término C-S los vórtices adquieren carga eléctrica manteniendo finita la energía^(34,35).

Un vórtice Abeliano con k unidades de flujo magnético adquiere una carga eléctrica $\left(\frac{2\pi\mu}{e}\right)k$ donde μ es el coeficiente del término C-S, con unidades de masa, y e es la unidad de carga fundamental.

En el caso del modelo no Abeliano de Higgs con un término C-S, el carácter topológico de dicho término conduce a la cuantificación de la carga eléctrica del vórtice ya a nivel clásico, $Q = \left(\frac{e}{2}\right)n$, siendo n un entero. Como consecuencia de este hecho, el momento angular asociado al vórtice también toma valores discretos, $J = \frac{n}{4}$.

Por lo tanto vemos que las teorías de gauge en $2+1$ dimensiones con un término de Chern-Simons presentan una variedad de fenómenos interesantes. Puesto que a altas temperaturas una teoría de campos cuántica relativista se convierte efectivamente en una tridimensional⁽²²⁻²⁴⁾, concluimos que las teorías que estudiamos tienen aplicaciones físicas a altas temperaturas.

Este capítulo destinado al estudio de los vórtices cargados eléctricamente se estructura de la siguiente manera: en la primer Sección estudiaremos los vórtices Abelianos y no Abelianos mostrando que no existen generalizaciones, en $2+1$ dimensiones, cargadas eléctricamente que mantengan finita la energía; en la Sección 3.2 describiremos brevemente las características de un término de Chern-Simons para estudiar en la Sección 3.3 los modelos de Higgs Abeliano y no Abeliano en presencia de tal término.

SECCION 3.2: VORTICES CARGADOS ELECTRICAMENTE

En esta sección veremos que tanto los vórtices Abelianos como los no Abelianos no admiten generalizaciones cargadas eléctricamente con energía finita. Para ello comenzaremos analizando qué ocurre en el caso Abeliano.

a) VORTICES CARGADOS ABELIANOS

Nos preguntamos ahora si es posible encontrar soluciones de las ecuaciones de movimiento del modelo Abeliano de Higgs (ver ecs.(2.41)) compatibles, que correspondan a un campo eléctrico además del magnético.

Para ello consideraremos el campo A_μ con componentes:

$$A_\mu = (A_0, \vec{A}) \quad (3.1)$$

tales que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } A_0 \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}_\perp \vec{A} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nuevamente buscaremos soluciones estáticas, de modo que

$$\square^2 = \nabla^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2 = \nabla^2$$

Las ecuaciones de movimiento (2.41) ahora resultan:

$$\nabla^2 A_0 = -e^2 |\phi|^2 A_0 \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 A_i = \frac{ie}{2} (\phi^* \partial_i \phi - \phi \partial_i \phi^*) - e^2 |\phi|^2 A_i \quad (3.4)$$

$$\square^2 \phi + 2ie A_\mu \partial^\mu \phi - e^2 A_\mu A^\mu \phi = 2c_2 \phi - 4c_4 \phi^2 \phi^* \quad (3.5)$$

Notemos que la ecuación de movimiento para el campo de

Higgs no se modifica.

Hacemos el mismo ansatz para ϕ y \vec{A} que en el capítulo anterior, es decir:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= f(\rho) e^{-in\varphi} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= -\frac{A(\rho)}{\rho} \hat{e}_\varphi\end{aligned}\tag{3.6}$$

Proponemos la siguiente forma para $A_0(\rho, \varphi)$:

$$A_0(\rho, \varphi) = A_0(\rho) \tilde{A}_0(\varphi)\tag{3.7}$$

Para poder desacoplar las ecuaciones debemos considerar la parte angular

$$\tilde{A}_0(\varphi) = \text{cte} = 1$$

Notemos que este ansatz es similar al del campo de Higgs (ver ec(3.6)), con la condición de que $\tilde{A}_0(\varphi)$ debe ser real.

Aplicando el teorema de Gauss vemos que la carga eléctrica q por unidad de longitud viene dada por:

$$\frac{q}{L} = \int_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d^2x = \int_S \partial_i \partial^i A_0 d^2x\tag{3.8}$$

Si trabajamos en coordenadas cilíndricas e integramos sobre una superficie arbitraria, encontramos:

$$\frac{q}{L} = \int_S \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} A_0 \right) \rho d\rho d\varphi = 2\pi \rho \left. \frac{dA_0}{d\rho} \right|_0^\infty\tag{3.9}$$

Por otro lado podemos reescribir la ec.(3.3) en la forma:

$$\nabla^2 A_0 + e^2 |\phi|^2 A_0 = 0$$

Sabemos que cuando $\rho \rightarrow \infty$, el campo de Higgs $|\phi|$ tiende a su valor de vacío, es decir a una constante, por lo que si

llamamos

$$m^2 = e^2 |\phi|^2 = \text{cte}$$

resulta

$$\nabla^2 A_0 + m^2 A_0 = 0 \quad \text{cuando } \rho \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

La solución de esta ecuación es de la forma:

$$K_0(m\rho) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-m\rho} \quad \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty. \end{matrix} \quad (3.11)$$

Analicemos ahora qué ocurre cuando $\rho \rightarrow 0$. Para tener carga eléctrica q no nula, la única posibilidad es que en el origen el campo A_0 se comporte como:

$$A_0(\rho) \sim \log \rho \quad \text{cuando } \rho \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

de modo que:

$$\frac{q}{L} = -2\pi\rho \left. \frac{dA_0}{d\rho} \right|_{\rho=0}$$

Debido a la presencia de campo eléctrico \vec{E} , aparecerá en el Lagrangiano un término de energía de la forma:

$$\mathcal{E} = a \int E^2 d^3x = a \int \partial_i A_0 \partial^i A_0 \rho d\rho d\varphi \quad (3.13)$$

siendo a una constante.

Si llamamos $I(\rho)$ a

$$I(\rho) = \partial_i A_0 \partial^i A_0 \quad (3.14)$$

vemos que

$$\int I(\rho) \rho d\rho \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \int \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho \quad (3.15)$$

que diverge logarítmicamente en $\rho = 0$.

Es decir que la energía \mathcal{E} se hace infinita, por lo que concluimos que no es posible encontrar soluciones compatibles en presencia de campo eléctrico para el modelo Abeliano de Higgs. Este resultado que hemos hallado contradice otros análisis incorrectos⁽³⁶⁾, en los que la existencia de vórtices cargados era aceptada y se los utilizaba para estudiar fenómenos de catálisis del decaimiento del protón. Todos estos cálculos carecen de sentido a partir de nuestra prueba.

D) VORTICES CARGADOS NO ABELIANOS

Vamos ahora a demostrar que no es posible encontrar soluciones que correspondan a un campo eléctrico además del magnético de los vórtices no Abelianos estudiados en la Sección 2.4.

El término eléctrico tiene que ser aclarado ya que en el modelo que estamos considerando todos los mesones vectoriales son masivos y por lo tanto no hay carga eléctrica en el sentido usual. Sin embargo, podemos definir una carga y el momento angular en el modo usual partiendo del potencial escalar.

Adoptando el gauge $A_0 = 0$ podemos estudiar las excitaciones de los diones introduciendo una rotación de gauge dependiente del tiempo de la configuración de vórtice definida en el capítulo anterior en las ecuaciones (2.81) y (2.82). Es decir hacemos la transformación:

$$A_i^\Lambda = U_\Lambda A_i U_\Lambda^{-1} + \frac{i}{e} U_\Lambda \partial_i U_\Lambda^{-1} \quad (3.16)$$

con

$$U_\Lambda = \exp [i t_3 \Lambda(\rho, t)] \quad (3.17)$$

siendo $A_i = A_i^a t^a$ y $t^a = \frac{\sigma^a}{2}$ los generadores de SU(2). Hemos elegido de modo de mantener la simetría axial.

Como hacemos una rotación paralela a la dirección de $\vec{\psi}$ sólo transformamos al campo $\vec{\phi}$, es decir:

$$\phi^\lambda = U_\lambda \phi U_\lambda^{-1} \quad \phi = \phi^a t^a \quad (3.18)$$

Podemos definir una densidad de carga eléctrica, asociada con la transformación (3.17), que toma la forma:

$$J_0 = \partial^i F_{i0}^3 \quad (3.19)$$

Si en lugar de considerar una rotación como la (3.17) hubiésemos tomado una rotación paralela a la dirección de $\vec{\phi}$, la densidad de carga asociada a tal transformación sería:

$$J_0^\phi = \frac{1}{\eta} \partial^i (\vec{F}_{i0} \cdot \vec{\phi}) \quad (3.20)$$

Sin embargo en ambos casos la carga resultante es la misma.

Usando que

$$A_\varphi^a = \frac{A(\rho)}{\rho} \delta^{a3}$$

junto con las ecs. (3.16) y (3.20) obtenemos:

$$J_0 = \frac{1}{e} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial^2 \Lambda(\rho, t)}{\partial \rho \partial t} \right) \quad (3.21)$$

Si integramos la ecuación anterior obtenemos la siguiente expresión para la carga por unidad de longitud, q/L ,

$$q/L \equiv \int \rho d\rho d\varphi J_0 = \frac{2\pi}{e} \left(\rho \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial t} \right) \Big|_0^\infty \quad (3.22)$$

Vemos entonces que para tener $q/L \neq 0$ debe ser $\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \sim \log \rho$ tanto en el origen como en el infinito.

Supongamos que elegimos

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t}(\rho, t) = 0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t}(\rho, t) = \frac{1}{2\pi} e K \log \rho \quad \text{para } \rho \rightarrow \infty$$

siendo K una constante arbitraria. En este caso la carga por unidad de longitud se convierte en:

$$\frac{q}{L} = K \tag{3.24}$$

A nivel clásico, esta carga no presenta restricción alguna y sólo después de un detallado tratamiento cuántico es que uno puede ver si la carga total que tiene el vórtice es un múltiplo entero de la carga fundamental (Como lo es en el caso del monopolio).

Es evidente que el comportamiento (3.23) hace diverger la energía por unidad de longitud del vórtice, ya que la solución corresponde a un campo eléctrico radial, $E_\rho \sim 1/\rho$, en el infinito. Esto invalida el uso de los vórtices cargados como una configuración de solitón en el análisis semiclassical. En particular, la investigación a la Callan-Rubakov de un sistema fermiónico en presencia de monopolos magnéticos que conduce a la catálisis del decaimiento del protón, no puede ser extendida al caso de los vórtices cargados, como fuera propuesto en la Ref.(36).

Estos resultados sobre la no existencia de vórtices cargados en Teorías de Gauge forman parte del conjunto de aportes originales de esta Tesis.

Veremos sin embargo en el capítulo 6 que existe un campo donde este tipo de soluciones de energía divergente no introduce dificultades.

SECCION 3.3: EL TERMINO DE CHERN-SIMONS

Como ya hemos señalado, el estudio de Teorías de Gauge vectoriales y tensoriales tridimensionales está motivado por la conexión que tiene con el comportamiento a altas temperaturas de modelos en cuatro dimensiones⁽²²⁻²⁴⁾.

En esta sección discutiremos algunos de los aspectos más importantes que surgen de la topología en los espacios con dimensión impar, en los que términos invariantes de gauge, topológicamente no triviales, pueden dar masas a los campos de gauge^(19,20,21,37).

Los términos topológicos de masa están estrechamente relacionados con las llamadas clases características secundarias de Chern-Simons. Como veremos más adelante éstas son obtenidas a partir de los invariantes de Pontryagin cuadridimensionales, que violan paridad y que gobiernan la estructura topológica de las Teorías de Gauge en cuatro dimensiones⁽³⁸⁾.

Los aspectos topológicos de estos términos de masa son puestos en evidencia a través de una interesante analogía que existe entre la teoría Abelianas y las excitaciones de vórtice en el modelo Abelianas de Higgs.

Un efecto más dramático se presenta en los ejemplos no Abelianos: la invarianza de gauge implica que el término de masa, al hacer una combinación adimensional con la constante de acoplamiento, resulte cuantificado.

Comenzaremos estudiando qué ocurre en Teorías Abelianas de Gauge; luego pasaremos a analizar la Teoría de Yang-Mills y finalmente discutiremos, brevemente, los aspectos topológicos más importantes.

a) TEORIA DE GAUGE ABELIANA

La electrodinámica masiva topológica en tres dimensiones está gobernada por un Lagrangiano compuesto por términos para el campo de gauge, para el campo fermiónico y términos de interacción:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I \quad (3.25)$$

que son, respectivamente

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha \quad (3.26)$$

$$\mathcal{L}_F = i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (3.27)$$

$$\mathcal{L}_I = -J^\mu A_\mu \quad J^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.28)$$

La constante de acoplamiento e tiene dimensiones de $m^{1/2}$.

El segundo término en \mathcal{L}_G es el que se conoce como término de Chern-Simons.

Las ecuaciones de movimiento que resultan son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = J^\nu \quad (3.29)$$

$$(i \not{\partial} + e \not{A} - m) \psi = 0 \quad (3.30)$$

invariantes bajo las transformaciones

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Omega \\ \psi &\rightarrow e^{i\Omega} \psi \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por otro lado, ante las transformaciones (3.31) el Lagrangiano de gauge cambia en una derivada total:

$$\mathcal{L}_G \rightarrow \mathcal{L}_G + \partial_\alpha \left(\frac{\kappa}{4e} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} \Omega \right) \quad (3.32)$$

Como ya hemos dicho, el segundo término en (3.26) es el término de Chern-Simons y es el responsable de este cambio en el Lagrangiano bajo las transformaciones de gauge (3.31). (Por supuesto $\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I$ permanece invariante).

Puede verse fácilmente que la transformación de

conjugación de carga deja invariante las ecuaciones, mientras que los términos de masa tanto para los campos de gauge como de Fermi cambian de signo bajo las transformaciones de paridad y de inversión temporal. De modo que la combinación de invertir espacio y tiempo deja los términos de masa invariantes; la simetría CPT es válida.

Podemos ver, por lo tanto, que los términos de masa fermiónico y del campo de gauge violan P y T , y en teoría de perturbación uno puede ser generado a partir del otro.

Podemos escribir la ecuación (3.29) en función del campo dual ${}^*F^\mu$ definido como:

$$\begin{aligned} {}^*F^\mu &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \\ F^{\mu\nu} &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha} {}^*F_\alpha \end{aligned} \quad (3.33)$$

en la forma

$$\partial_\alpha {}^*F_\beta - \partial_\beta {}^*F_\alpha - \mu F_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\mu} J^\mu \quad (3.34)$$

cuya divergencia conduce a:

$$(\square + \mu^2) {}^*F^\mu = \mu \left(g^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \frac{\partial_\alpha}{\mu} \right) J_\nu \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) demuestra claramente que las excitaciones del campo de gauge son masivas. Vemos que en esta ecuación μ^2 aparece con el signo correcto para una partícula que se propaga. Si bien a priori no tenemos control sobre este signo (el Lagrangiano es lineal en μ), podemos entender que debe emerger en el modo en que lo hace considerando el tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$. Puesto que el término de masa es topológico no contribuye explícitamente a $T^{\mu\nu}$. (Al acoplar la teoría a una métrica externa $\frac{\mu}{4} \int dx \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha$ ya es invariante de coordenadas, sin factores adicionales de métrica, por lo que su variación con respecto a la métrica se anula). Como la energía tiene la forma positiva convencional las excitaciones del sistema no pueden ser taquiónicas.

Integrando la componente temporal de (3.29) a través de todo el espacio obtenemos:

$$-\int d\vec{r} B = \frac{Q}{\mu} \quad (3.36)$$

siendo B el campo magnético

$$B = -{}^*F^0 = \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \quad (3.37)$$

y Q la carga total

$$Q = \int d\vec{r} \rho \quad \rho \equiv J^0 \quad (3.38)$$

Vemos que el flujo que pasa a través del espacio bidimensional, $\int d\vec{r} B$, es independiente del tiempo (lo que se concluye a partir de la conservación de ${}^*F^\mu$), y proporcional a la carga total.

La ecuación (3.36) muestra que para campos clásicos el potencial magnético es de largo alcance, aún cuando el campo magnético sea de corto alcance:

$$\vec{A} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} -\frac{Q}{2\pi\mu} \vec{\nabla} \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (3.39)$$

Este comportamiento brinda una analogía entre la teoría presente y nuestro modelo Abelian de Higgs tridimensional. Ambos describen campos vectoriales masivos en un modo invariante de gauge. Ambos conducen a soluciones topológicamente no triviales para los potenciales de gauge. En el modelo de Higgs dichas soluciones están dadas por corrientes eléctricas estáticas construidas a partir del campo de Higgs (vórtice), mientras que la densidad de carga se anula. En el modelo presente, una densidad de carga estática no nula ρ , produce una corriente efectiva con componentes espaciales no nulas. En ambos casos, el flujo está relacionado con la carga. En el modelo de Higgs vimos que la inversa del flujo está cuantificada en unidades enteras de la carga del campo de Higgs, teniendo el vórtice carga neutra. Aquí el flujo es directamente proporcional a la carga, pero no vemos razón para cuantificar ninguno de los parámetros.

b) TEORIA DE GAUGE NO ABELIANA

El término topológico de masa puede ser generalizado a una teoría de gauge no Abeliana. El Lagrangiano para el campo de gauge en 2+1 dimensiones espacio-temporales es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\mu}{2e^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{tr} (F_{\mu\nu} A_\alpha - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\alpha) \quad (3.40)$$

siendo A_μ el campo de gauge que toma valores en el álgebra de Lie del grupo

$$A_\mu = e T^a A_\mu^a$$

$$F_{\mu\nu} = e T^a F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (3.41)$$

y usamos la representación vectorial del álgebra como

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

Con e denotamos la constante de acoplamiento; el cociente μ/e^2 es adimensional.

Las ecuaciones de campo que se obtienen a partir de (3.40) resultan covariantes de gauge:

$$D_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.42)$$

con

$$D_\mu = \partial_\mu + e [A_\mu,]$$

Nuevamente definimos el campo dual como:

$${}^*F^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (3.43)$$

satisface la identidad de Bianchi:

$$D_\mu {}^*F^\mu = 0 \quad (3.44)$$

El dual de la ecuación (3.42) es

$$D_\alpha^* F^\beta - D_\beta^* F^\alpha - \mu \bar{F}_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.45)$$

y tomando la divergencia covariante de esta ecuación, junto con la ayuda de la ec. (3.42) y de la identidad de Ricci $[D_\alpha, D_\beta] = \bar{F}_{\alpha\beta}$, la convertimos en:

$$(D_\mu D^\alpha + \mu^2)^* F_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\rho} [{}^*F^\alpha, {}^*F^\rho] \quad (3.46)$$

que es la versión no Abeliana de la ec. (3.35).

Nuevamente, podemos ver que el Lagrangiano (3.40) no es invariante ante transformaciones de gauge sino que cambia en una divergencia total. Consideremos una transformación finita:

$$A_\mu \longrightarrow U^{-1} A_\mu U + U^{-1} \partial_\mu U \quad (3.47)$$

La respuesta de la acción ante esta transformación de gauge es:

$$\begin{aligned} \int dx \mathcal{L}_G \longrightarrow & \int dx \mathcal{L}_G + \frac{\mu}{e^2} \int dx \epsilon^{\alpha\mu\nu} \bar{t}_\mu [A_\alpha \partial_\nu U U^{-1}] + \\ & + \frac{\mu}{3e^2} \int dx \epsilon^{\alpha\beta\delta} \bar{t}_\alpha [\partial_\beta U U^{-1} \partial_\delta U U^{-1}] \end{aligned} \quad (3.48)$$

El tercer término del lado derecho es el análogo al término Abeliano (3.32).

Consideremos solamente transformaciones de gauge que tiendan a la identidad en el infinito (espacial y temporal):

$$U(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} I \quad (3.49)$$

Hacemos esta restricción para evitar problemas de convergencia en la ec. (3.48).

Teniendo en cuenta la ec. (3.49) concluimos que la integral de superficie dependiente de A en (3.48) se anula.

Podemos reescribir el segundo término en (3.48) de modo de obtener:

$$\int dx \mathcal{L}_G \rightarrow \int dx \mathcal{L}_G + \mu \frac{8\pi^2}{e^2} w(U) \quad (3.50)$$

siendo

$$w(U) = \frac{1}{24\pi^2} \int dx \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{tr} [2\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1}] \quad (3.51)$$

$w(U)$ es el número de enrollamiento (winding number) de la transformación de gauge U . En consecuencia la integral de superficie no es nula sino que toma un valor entero que caracteriza la clase de equivalencia homotópica a la cual pertenece U . Solamente para las transformaciones U homotópicamente triviales, es decir aquellas deformables en la identidad, $w(U)$ se anula.

Estas consideraciones son familiares del análisis de la estructura topológica de la teoría de Yang-Mills en cuatro dimensiones. Más tarde veremos algunas conexiones matemáticas (topológicas) que muestran la relación entre dicha teoría y una tridimensional.

Concluimos entonces que la acción no es invariante de gauge sino que cambia en la cantidad $\mu \frac{8\pi^2}{e^2} w(U)$. Sin embargo, esto no representa un problema pues la exponencial de la acción $\exp i \int \mathcal{L} dx$ es invariante de gauge. De otro modo, el valor de expectación de un operador invariante de gauge θ sería indefinido, como puede ser visto a partir de la representación de la integral funcional:

$$\langle \theta \rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}A \theta(A) \exp i S(A)$$

con una medida $\mathcal{D}A$ invariante de gauge, y un factor de normalización Z^{-1} .

Al hacer el cambio de variables $A \rightarrow A^U$, siendo A^U el transformado de gauge de A , encontramos que:

$$\langle \theta \rangle = \exp \left[i \mu \left(\frac{8\pi^2}{e^2} \right) w(U) \right] \langle \theta \rangle$$

que sólo es aceptable cuando el cambio en la acción es un múltiplo entero de 2π . Esto nos conduce a una condición de cuantificación para el cociente adimensional $4\pi\mu/e^2$:

$$4\pi \frac{\mu}{e^2} = n \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (3.52)$$

Una formulación euclídea conduce a la misma conclusión. En ese caso, la integral funcional requiere que $\exp[-\int dx \mathcal{L}]$ sea invariante de gauge, pero la contribución a la acción del término de masa es puramente imaginaria, de modo que al hacer la continuación a tiempos imaginarios (espacio euclídeo) aparece el factor i .

La condición de cuantificación (3.52) se debe enteramente al grupo interno. Por lo tanto, podemos concluir que sólo en una teoría no Abeliana el parámetro está cuantificado.

Hemos mencionado en varias oportunidades que la masa invariante de gauge hace uso de estructuras topológicamente no triviales, y hemos exhibido ya algunos aspectos como por ejemplo S_{CS} , que es un término topológico de masa en la acción, es un escalar independiente de la métrica, invariante ante aquellas transformaciones de gauge que son homotópicas a la identidad, mientras que ante las que no lo son cambia en cantidades discretas. En efecto, S_{CS} es proporcional a una entidad topológica bien conocida, las clases características secundarias de Chern-Simons, que están relacionadas con la topología en cuatro dimensiones.

Veremos ahora brevemente estas ideas topológicas.

En dimensiones pares uno puede construir a partir de los campos de gauge una densidad de Pontryagin invariante de gauge, \mathcal{P}_{2n} , cuya integral a través del espacio de dimensión par es un invariante que mide el contenido topológico de los campos.

Por ejemplo, en dos y cuatro dimensiones tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 &= \frac{1}{2\pi} \star F = \frac{1}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ \mathcal{P}_4 &= -\frac{1}{16\pi^2} \star F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Estos objetos invariantes de gauge también pueden ser escritos como derivadas totales de cantidades que varían con el

gauge:

$$P_{2\mu} = \partial_\mu X_{2n}^\mu \quad (3.54)$$

Las expresiones en dos y cuatro dimensiones son

$$\begin{aligned} X_2^\mu &= \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} A_\nu \\ X_4^\mu &= -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{tr} \left(A_\alpha F_{\beta\gamma} - \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

La clase característica secundaria de Chern-Simons se obtiene integrando una componente de X_{2n}^μ a través del espacio $2n-1$ dimensional que no incluya tal componente. Se sabe que esta integral es invariante de gauge bajo transformaciones de gauge homotópicamente triviales; de otro modo, cambia en una cantidad que es el número de enrollamiento de la transformación.

Vemos, por lo tanto, que S_{CS} es precisamente la estructura de Chern-Simons, ya que es proporcional a $\int dx^0 dx^1 dx^2 X_4^3$.

Solamente en tres dimensiones un término topológico es bilineal y puede producir una masa. El caso unidimensional es trivial. En dos dimensiones la densidad de Pontryagin es la divergencia anómala de la corriente vectorial axial y es la responsable de la generación de masa en el modelo de Schwinger. En cuatro dimensiones la densidad de Pontryagin está relacionada con el vacío θ . En dimensiones mayores, aparecen expresiones con potencias más altas de los campos, como por ejemplo $\varepsilon F F F$ (dimensiones pares) o $\varepsilon A F F$ (dimensiones impares). Las expresiones topológicas bilineales requieren tensores antisimétricos de rango mayor.

Ya que una teoría tridimensional (euclídea) describe una teoría en cuatro dimensiones a altas temperaturas, la masa topológica podría corresponder a una descripción fenomenológica del apantallamiento magnético debido a las excitaciones topológicas en cuatro dimensiones. Notemos también que las partículas de gauge

masivas en dos y tres dimensiones emergen por razones topológicas.

Se podría entonces especular con un mecanismo de generación de masa topológica, todavía no descubierto, en cuatro dimensiones.

SECCION 3.4: VORTICES CARGADOS CON TERMINO DE CHERN-SIMONS

Como ya dijimos en la Introducción, esta Sección está dedicada al estudio de los modelos Abelianos y no Abelianos que presentan soluciones de tipo vórtice con carga eléctrica manteniendo finita la energía. Es justamente la adición de un término de Chern-Simons a tales modelos lo que nos permitirá encontrar dicho tipo de soluciones.^(34,35)

Como vimos, las ecuaciones de movimiento en presencia de este término resultan covariantes de gauge, si bien frente a transformaciones de gauge el Lagrangiano cambia en una derivada total y la simetría de paridad es violada.

El campo vectorial adquiere una masa en el espacio de tres dimensiones.⁽²⁰⁾ Si el término de masa estuviera presente en el Lagrangiano aparecerían dos estados del campo vectorial con masas diferentes.⁽³⁹⁾ Sin embargo en el siguiente capítulo, al estudiar detalladamente las soluciones, presentaremos argumentos que muestran que sólo sobrevive una única solución de vórtice cargado.

Comenzaremos entonces estudiando el caso Abeliano para luego pasar al no Abeliano.

a) VORTICES CARGADOS EN UN MODELO ABELIANO DE HIGGS CON TERMINO DE CHERN-SIMONS.

El modelo Abeliano de Higgs con término C-S en (2+1) dimensiones está descrito por un Lagrangiano de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu - ie A_\mu) \phi^* (\partial^\mu + ie A_\mu) \phi - G_4 \left(|\phi|^2 - \frac{C_2}{2G_4} \right)^2 + \frac{1}{4} \mu \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha \quad (3.56)$$

siendo μ la masa topológica del campo de gauge y e la unidad de carga fundamental.

Para un vórtice con n unidades de flujo magnético

(n-vórtice) hacemos el siguiente ansatz:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{A(\rho)}{\rho} \hat{e}_\varphi \quad A_0(\vec{r}) = A_0(\rho) \quad (3.57)$$

$$\phi(\vec{r}) = f(\rho) e^{-in\varphi}$$

siendo

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \varphi = \text{tg}^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

Si variamos la ec. (3.56) con respecto a A , f y A_0 obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - e f^2 (n + eA) = \mu \rho \frac{dA_0}{d\rho} \quad (3.58a)$$

$$\frac{d^2 A_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_0}{d\rho} - e^2 A_0 f = \frac{A}{\rho} \frac{dA}{d\rho} \quad (3.58b)$$

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{f}{\rho^2} (n + eA)^2 + e^2 A_0 f + 2C_2 f - 4C_4 f^3 = 0 \quad (3.58c)$$

Usando estas ecuaciones podemos encontrar la siguiente representación para la funcional energía:

$$\mathcal{E} = \int T_{00} d^2x$$

$$\mathcal{E} = \int d^2x \left[\frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 + \frac{f^2}{\rho^2} (n + eA)^2 + C_2 f^2 - C_4 f^4 - \frac{C_2^2}{4C_4} \right\} \right] \quad (3.59)$$

Las soluciones de las ecs. (3.58) que mantengan finita la energía deben satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = \sqrt{\frac{C_2}{2C_4}}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho) = -\frac{n}{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} A_0(\rho) = 0 \quad (3.60)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = 0 \quad (3.61)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_0(\rho) = C < \infty$$

Notemos que pedimos como condición que $A_0(\rho)$ sea acotada en el origen y no nula, como se impone en las referencias (31,32,40,41). Mas aún, en el Apéndice A demostraremos que no existen soluciones a las ecuaciones de movimiento con la condición de contorno $A_0(0)=0$.

Como era de esperar, en el límite $A_0 = 0$, $\mu = 0$, las ecs. (3.58) se reducen a las del modelo Abeliano de Higgs.⁽³⁾ A partir de la ec. (3.58b) es también claro que para $\mu \neq 0$, $A_0(\rho)$ debe ser distinto de cero.

En este modelo el flujo magnético nuevamente está cuantificado en unidades de $-2\pi/e$, es decir

$$\bar{\Phi} = \int d^2x \epsilon^{ij} \partial_i A_j = - \int d^2x \frac{1}{f} \frac{dA}{d\rho} = -\frac{2\pi}{e} n \quad (3.62)$$

Por otra parte, podemos encontrar la carga eléctrica total Q del vórtice integrando ambos lados de la ec. (3.58b):

$$Q = \int d^2x e^2 A_0 f^2 \quad (3.63)$$

De modo que obtenemos la siguiente relación entre la carga eléctrica y el flujo magnético:

$$Q = \mu \bar{\Phi} = -\frac{2\pi}{e} n \mu \quad (3.64)$$

Es decir que el cociente $\frac{Q}{\mu} = -\frac{2\pi}{e} n$ también está cuantificado en unidades de $-2\pi/e$.

Como veremos al considerar el modelo no Abeliano de Higgs con término C-S, las ecs. (3.58) obtenidas para el caso Abeliano (a partir del ansatz (3.57)) son las mismas que resultan para el caso no Abeliano (siempre que hagamos la identificación $C_2 = \frac{1}{4} g^2 \eta^2$, $C_4 = \frac{1}{8} g^2$). Por lo tanto pasaremos a estudiar éste último.

El siguiente capítulo está dedicado al análisis detallado de las soluciones de las ecs. de movimiento que resultan para ambos modelos.

b) VORTICES CARGADOS EN UN MODELO NO ABELIANO DE HIGGS CON TERMINO DE CHERN-SIMONS.

Consideremos la teoría más simple que admite vórtices no Abelianos, es decir, la teoría de un campo de gauge A_μ que toma valores en el álgebra de Lie de $SU(2)$ (con generadores t^a), acoplado a dos campos de Higgs (de modo de tener rotura máxima de la simetría) en la representación adjunta.

La densidad Lagrangiana en 2+1 dimensiones espacio-temporales que describe tal modelo está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{tr} D_\mu \phi D^\mu \phi + \text{tr} D_\mu \psi D^\mu \psi - \\ & - V(\phi, \psi) + \frac{k}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{tr} (F^{\alpha\beta} A^\gamma - \frac{2}{3} e A^\alpha A^\beta A^\gamma) \end{aligned} \quad (3.65)$$

siendo $A_\mu = A_\mu^a t^a$ el campo de gauge. Los generadores t^a de $SU(2)$ están normalizados de acuerdo a

$$\text{tr} (t^a t^b) = \frac{\delta^{ab}}{2} \quad [t^a, t^b] = i \epsilon^{abc} t^c \quad (3.66)$$

ϕ y ψ son los dos campos de Higgs en la representación adjunta. (En el caso de $SU(N)$ necesitaríamos N campos de Higgs en la representación adjunta para romper totalmente la simetría).

Definimos la derivada covariante y el tensor de campo $F_{\mu\nu}$ de acuerdo a

$$D_\mu = \partial_\mu + e [A_\mu,] \quad (3.67)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + e [A_\mu, A_\nu] \quad (3.68)$$

Como ya hemos dicho, las soluciones de vórtice están asociadas con roturas espontáneas de las simetrías de gauge vía campos de Higgs. Para tener vórtices topológicamente estables el grupo de homotopías relevante $\Pi_1(G/H)$ debe ser no trivial, siendo G el grupo de gauge y H el subgrupo de invarianzas del vacío. Para $G=SU(N)$ y los campos de Higgs en la representación adjunta es

conveniente tener máxima rotura de la simetría de G de modo que el vacío sea sólo invariante bajo la matriz unidad en la representación adjunta. Entonces $H=Z_N$, $\Pi_1(SU(N)/Z_N)=Z_N$ y tenemos $N-1$ clases de homotopías topológicamente no triviales. Esto conduce a Z_2 vórtices para $G=SU(2)$.

La máxima rotura de simetría en el caso de $SU(2)$ es obtenida con dos campos de Higgs en la representación adjunta y un potencial de la forma:

$$V(\phi, \psi) = \frac{1}{8} g^2 (\phi^a \phi^a - \eta^2)^2 + \frac{1}{8} g'^2 (\psi^a \psi^a - \eta'^2)^2 + \frac{1}{2} g''^2 (\phi^a \psi^a)^2 \quad (3.69)$$

El último término en (3.65) es el término de Chern-Simons. Como vimos en la Sección anterior, si bien conduce a ecuaciones de movimiento covariantes de gauge, no resulta invariante de gauge sino que cambia en una derivada total.

Bajo una transformación de gauge U la acción cambia en:

$$S = \int d^3x \mathcal{L} \longrightarrow \int d^3x \mathcal{L} + \mu \frac{8\pi^2}{e^2} W(U) \quad (3.70)$$

siendo $W(U)$ el número de enrollamiento de la transformación

$$W(U) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr} [U^{-1} \partial_\mu U U^{-1} \partial_\nu U U^{-1} \partial_\lambda U] \quad (3.71)$$

que toma un valor entero que caracteriza la clase de equivalencia homotópica a la cual U pertenece. Solamente para las transformaciones homotópicamente triviales es que $W(U)$ se anula.

Veremos también que el requerimiento de invarianza de gauge de $\exp(iS)$ fuerza una condición de cuantificación de los parámetros de la teoría:

$$\frac{4\pi\mu}{e^2} = n \quad (3.72)$$

La cuantificación de μ , como ya hemos dicho, es una característica exclusiva de los modelos no Abelianos, ya que en un modelo Abeliano todas las transformaciones son triviales (es decir, su número de enrollamiento es nulo en S^3).

La presencia de un término G-S en el Lagrangiano (3.65) modifica las ecuaciones clásicas de movimiento, las que en este caso resultan:

$$D_\mu D^\mu \vec{\phi} = -\frac{\delta V}{\delta \vec{\phi}} \quad D_\mu D^\mu \vec{\psi} = -\frac{\delta V}{\delta \vec{\psi}} \quad (3.73a)$$

$$D_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mu \varepsilon^{\nu\alpha\beta} \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{j}^\nu \quad (3.73b)$$

$$\vec{j}^\nu = ie [D^\nu \vec{\phi} \wedge \vec{\phi} + D^\nu \vec{\psi} \wedge \vec{\psi}] \quad (3.73c)$$

Elegimos un ansatz simple de modo de separar las ecs. de movimiento en partes radial y angular:

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= f(\rho) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{\psi} &= \eta' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta' \hat{e}_3 \\ \vec{A}_\varphi &= A_\varphi(\rho) \hat{e}_3 & \vec{A}_0 &= A_0(\rho) \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Notemos que este ansatz conduce a las mismas ecs. de movimiento que las del modelo Abelian con G-S (ver ecs. (3.58)), si bien los modelos difieren en cuanto a sus características topológicas. Pero a su vez el modelo Abelian con G-S, al hacer $\mu = 0$, se reduce al modelo Abelian propuesto por Nielsen y Olesen del cual conocemos una solución exacta. Esto nos permitirá tomar como punto de referencia dichas soluciones para el estudio de las ecs. de movimiento de nuestro modelo. Las mismas resultan:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_0}{d\rho} - e^2 f^2 A_0 &= \frac{\mu}{\rho} \frac{dA}{d\rho} \\ \frac{d^2 A}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - e^2 f^2 (1 + eA) &= \mu \rho \frac{dA_0}{d\rho} \\ \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} (1 + eA)^2 f + e^2 A_0^2 f &= \frac{1}{2} g^2 (f^2 - \eta^2) f \end{aligned} \quad (3.75)$$

Para reducir al mínimo el número de parámetros vamos a redefinir las variables del sistema en la forma:

$$y(\tau) = \frac{A_0(\tau)}{\eta} \quad (3.76a)$$

$$X(\tau) = 1 + e A(\tau) \quad (3.76b)$$

$$Z(\tau) = \frac{f(\tau)}{\eta} \quad (3.76c)$$

con

$$\tau = \int e \eta \quad (3.76)$$

Definimos también dos parámetros adimensionales

$$\delta = \mu / e \eta \quad \tilde{\lambda} = g / e \quad (3.77)$$

De modo que el sistema de ecs. (3.75) se transforma en:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{dX}{d\tau} - X Z^2 = \delta \frac{dY}{d\tau} \tau \quad (3.78a)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dY}{d\tau} - Y Z^2 = \frac{\delta}{\tau} \frac{dX}{d\tau} \quad (3.78b)$$

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dZ}{d\tau} - \frac{X^2 Z}{\tau^2} + Y^2 Z + \frac{\tilde{\lambda}}{2} Z (1 - Z^2) = 0 \quad (3.78c)$$

Vimos que en el sistema aparecen explícitamente dos parámetros adimensionales δ y $\tilde{\lambda}$. El último coincide con el parámetro adimensional $\lambda = 2 \frac{\sqrt{2G_4}}{e} = g/e$ del modelo de Nielsen y Olesen, definido en el capítulo anterior. El nuevo parámetro δ contiene la información del término de Chern-Simons, y si tomamos $\delta = 0$ recuperamos las ecs. de movimiento del modelo Abelian sin C-S. (Ver ecs. (2.36)).

Debemos establecer ahora las condiciones de contorno que deben satisfacer los campos en el infinito y en el origen.

i) Condiciones en el infinito

Las condiciones para obtener energía finita son:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\phi(r), \psi(r)) = 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} D_\mu \vec{\phi} = 0 \quad (3.79)$$

De la expresión del potencial es fácil ver que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\phi|^2 = \eta^2$$

o sea que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \eta \quad (3.80)$$

A partir de la segunda condición (3.79) vemos que en el límite $r \rightarrow \infty$:

$$\partial_\varphi \vec{\phi} + e \vec{A}_\varphi \wedge \vec{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1(r) = -1/e \quad (3.81)$$

$$\partial_0 \vec{\phi} + e \vec{A}_0 \wedge \vec{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0(r) = 0 \quad (3.82)$$

(Ya que en este último caso es $e \vec{A}_0 \wedge \vec{\phi}$ y A_0 es perpendicular a $\vec{\phi}$ pero $|\vec{\phi}|$ no tiende a cero).

Luego, tenemos las siguientes condiciones en el infinito:

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \eta \\ A_1(\infty) &= -1/e \\ A_0(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

que en función de las nuevas variables resultan:

$$\begin{aligned} Z(\infty) &= 1 \\ X(\infty) &= 0 \\ Y(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

ii) Condiciones en el origen

Al imponer la condición de energía finita podemos ver que surge $A(0)=0$ y $f(0)=0$. Sin embargo, como ya dijimos al tratar el caso Abelian, debemos señalar que la condición impuesta en las ref.(7,8,23,24) para el potencial A_0 ($A_0(0)=0$) no es correcta ni necesaria. Solamente es necesario que A_0 sea acotada en el origen. En el Apéndice A demostramos que no existen soluciones a las ecs. de movimiento con la condición $A_0(0)=0$. Por lo que las condiciones en el origen resultan:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ A(0) &= 0 \\ A_0(0) &= C < \infty \end{aligned} \tag{3.85}$$

y en función de las nuevas variables

$$\begin{aligned} Z(0) &= 0 \\ X(0) &= 1 \\ Y(0) &= C < \infty \end{aligned} \tag{3.86}$$

Definimos ahora un "campo electromagnético" $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ invariante de gauge, a partir de los campos de Higgs y del tensor de campo $\vec{F}_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\vec{\Psi} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}}{|\Psi|} = \frac{\Psi^a F_{\mu\nu}^a}{\Psi^a \Psi^a} = F_{\mu\nu}^3 \tag{3.87}$$

A partir de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ podemos definir los campos eléctrico y magnético del siguiente modo:

$$\vec{E}_i = \mathcal{F}_{0i} \qquad \vec{B} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \mathcal{F}^{ij} \tag{3.88}$$

El flujo magnético del vórtice está dado por

$$\Phi = \int d^2x \cdot \vec{B} \tag{3.89}$$

y a partir del teorema de Stokes y de las condiciones de contorno obtenemos:

$$\oint \vec{A} = -\frac{2\pi}{e} \quad (3.90)$$

El flujo magnético está relacionado con el número topológico k asociado a las clases de homotopías de G/H :

$$k = -\frac{e \oint \vec{A}}{2\pi} \quad (3.91)$$

El presente ansatz de $SU(2)$ corresponde al valor $k = 1 \cdot (\pi_1(G/H) = \pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2)$.

Veamos qué ocurre con la carga eléctrica del vórtice. Si tomamos la componente $\nu = 0$ en la ec. de mov. (3.73b) podemos reescribirla en la siguiente forma:

$$\partial_i E^i - \mu B = \sigma \quad (3.92)$$

siendo σ la densidad de carga:

$$\sigma \equiv \hat{e}_3 \cdot J_0 = e^2 f^2 A_0 \quad (3.93)$$

Como el $\lim_{\rho \rightarrow \infty} E_i = 0$, a partir de la ec. (3.78b) vemos que existe una relación entre la carga eléctrica

$$Q = \int d^3x \sigma \quad (3.94)$$

y el flujo magnético

$$Q = -\mu \oint \vec{A} \quad (3.95)$$

Esta importante relación obtenida en la ref.(12) implica una condición de cuantificación para Q , ya que a partir de las ecs. (3.72), (3.91) y (3.95) obtenemos:

$$Q = \frac{n}{2} e \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.96)$$

La cuantificación de la carga está conectada con el momento angular del vórtice:

$$J = \int d^3x \varepsilon^{ij} x_j T_{0i} \quad (3.97)$$

Para el ansatz del vórtice tenemos que:

$$J = \frac{Q}{ze} = \frac{\eta}{4} \quad (3.98)$$

Podemos ver fácilmente que la energía por unidad de longitud de la solución de vórtice toma la forma:

$$E = \int T_{00} d^2x = \pi \eta^2 \int_0^\infty \bar{\rho} d\bar{\rho} \left[\frac{1}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{dx}{d\bar{\rho}} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\bar{\rho}} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\bar{\rho}} \right)^2 + y^2 z^2 + \frac{x^2 z^2}{\bar{\rho}^2} + \frac{\lambda^2}{4} (1 - z^2)^2 \right] \quad (3.99)$$

Notemos que esta expresión es la misma para el modelo no Abelian con C-S y para los modelos Abelianos y no Abelianos sin C-S, ya que el término de C-S no modifica explícitamente la energía. Esto se debe a que el tensor energía-impulso $T_{\mu\nu}$ se puede calcular mediante la expresión $T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$ y, como dijimos antes, el término C-S no depende de la métrica.

Obviamente, esto no implica que en todos los modelos la energía sea la misma, puesto que las ecuaciones de movimiento con y sin Chern-Simons son diferentes.

Podemos comparar la expresión para la energía (3.99) con la correspondiente a la acción, que en términos de x, y, z , queda

$$S = -E + \pi \eta^2 \int_0^\infty \bar{\rho} d\bar{\rho} \left[2 \left(\frac{dy}{d\bar{\rho}} \right)^2 + 2y^2 z^2 + 2 \frac{\delta}{\bar{\rho}} y \left(\frac{dx}{d\bar{\rho}} \right)^2 \right] \quad (3.100)$$

Hasta aquí hemos hecho una descripción de los modelos Abelianos y no Abelianos en presencia de un término de Chern-Simons. Pasaremos a estudiar en el siguiente capítulo las soluciones que dichos modelos presentan.

CAPITULO 4:

SOLUCIONES DEL MODELO NO ABELIANO DE HIGGS CON TERMINO DE CHERN-SIMONS

SECCION 4.1: INTRODUCCION

Como hemos visto en el capítulo anterior, el agregar un término de Chern-Simons a teorías de gauge espontáneamente rotas hace posible tener soluciones topológicamente estables tanto con carga eléctrica como magnética. (Comprobamos también que sin término C-S los vórtices de Nielsen y Olesen no admiten una generalización cargada eléctricamente). En particular, ha sido mostrado en las ref. (35,40) que solamente los vórtices cargados son admisibles cuando hay un término de C-S presente.

Vimos también que no sólo el flujo magnético de la solución de vórtice está cuantificado a nivel clásico sino también su carga eléctrica y su momento angular.

Si bien varios ansätze han sido propuestos para estos vórtices cargados^(34,35,40,41), todavía no se ha presentado ningún análisis detallado de la correspondiente solución.

Es el propósito de este capítulo hacer un estudio detallado de la solución de vórtice cargado para el caso del modelo presentado en el capítulo anterior, es decir, una teoría de gauge SU(2) espontáneamente rota con la adición de un término de Chern-Simons⁽⁴²⁾.

Comenzaremos estudiando las ecuaciones de movimiento radiales resultantes. Si bien cuando un término C-S está presente son posibles, en principio, dos masas diferentes para el mesón vectorial, mostramos que solamente una solución de vórtice cargado sobrevive, aquella correspondiente a la de mayor masa (que llamaremos m_+).

Para analizar las propiedades de la solución haremos primero una comparación con la del vórtice neutro, ya que para

esta última (como ya hemos dicho) se conoce una solución exacta para una relación particular entre las constantes de acoplamiento⁽³¹⁾ (correspondiente al parámetro de Ginzburg-Landau $\lambda = 1$) y también existen cálculos numéricos muy precisos para varios valores de λ ⁽⁴³⁾. En particular, obtendremos una expansión perturbativa para la energía del vórtice cargado utilizando como parámetro de expansión el coeficiente de Chern-Simons.

Estudiaremos también el comportamiento de la solución expresada como una expansión en potencias de la variable radial, mostrando que corresponde a una línea de vórtice bien definida cuando la masa del mesón vectorial y la del mesón escalar son del mismo orden. Tal vórtice presenta campos eléctrico y magnético ambos decreciendo monótonamente con una longitud característica $1/m_+$, mientras que el campo escalar crece con la misma longitud característica desde el valor cero en el origen hasta su valor de vacío en el infinito.

Finalmente presentaremos una solución variacional utilizando el método desarrollado en la ref. (44), el cual reduce significativamente el número de grados de libertad y permite hacer un análisis para valores arbitrarios de los parámetros físicos del modelo.

Como una aplicación de la solución hallada en el presente capítulo, discutiremos en el cap. 6 la posible relevancia de dicha solución de vórtice cargado cuando es considerada como una cuerda cósmica formada en la transición de fase de Gran Unificación.

SECCION 4.2: SOLUCION DE VORTICE CARGADO

a) FORMAS ASINTOTICAS PARA GRANDES ζ .

Comenzaremos reescribiendo las ecuaciones de movimiento radiales resultantes que encontramos en el capítulo anterior (ver ecs.(3.78)):

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{dx}{d\zeta} - xz^2 = \delta \frac{dy}{d\zeta} \zeta \quad (4.1a)$$

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dy}{d\zeta} - yz^2 = \frac{\delta}{\zeta} \frac{dx}{d\zeta} \quad (4.1b)$$

$$\frac{d^2z}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dz}{d\zeta} - \frac{x^2z}{\zeta^2} + y^2z + \frac{\tilde{\lambda}}{2} z(1-z^2) = 0 \quad (4.1c)$$

siendo

$$y(\zeta) = \frac{A_0(\zeta)}{\eta} \quad (4.2a)$$

$$x(\zeta) = 1 + \epsilon A(\zeta) \quad (4.2b)$$

$$z(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\eta} \quad (4.2c)$$

$$\zeta = \rho e^{\eta} \quad (4.2d)$$

y

$$\delta = \frac{\mu}{e\eta} \quad \tilde{\lambda} = g/e \quad (4.3)$$

son los parámetros adimensionales de la teoría.

Las condiciones de contorno que surgen de pedir energía finita son:

$$\begin{aligned} z(0) &= 0 & z(\infty) &= 1 \\ x(0) &= 1 & x(\infty) &= 0 \\ y(0) &= C < \infty & y(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para encontrar una solución a las ecuaciones de vórtice

(4.1) comenzaremos analizando su comportamiento asintótico.

En principio existen dos comportamientos posibles para grandes \tilde{z} ; sin embargo veremos que sólo uno de ellos corresponde a una solución.

Proponemos las siguientes formas para grandes \tilde{z} :

$$x(\tilde{z}) = c_1 \tilde{z} K_1(\beta \tilde{z}) [1 + O(e^{-\beta \tilde{z}})] = c_1 \sqrt{\tilde{z}} e^{-\beta \tilde{z}} \quad (4.5a)$$

$$y(\tilde{z}) = c_2 K_0(\gamma \tilde{z}) [1 + O(e^{-\gamma \tilde{z}})] = \frac{c_2 e^{-\gamma \tilde{z}}}{\sqrt{\tilde{z}}} \quad (4.5b)$$

$$z(\tilde{z}) = 1 + c_3 K_0(\alpha \tilde{z}) + O(e^{-2\alpha \tilde{z}}) = 1 + c_3 e^{-\alpha \tilde{z}} \quad (4.5c)$$

Introduciendo estas formas en las ecs. (4.1) es fácil ver las siguientes relaciones:

$$\alpha = \tilde{\lambda} = g/e \quad (4.6)$$

$$\beta = \delta' \quad (4.7)$$

Al reemplazar en la ec. correspondiente a encontramos que:

$$c_1 (\beta^2 - 1) = -\delta c_2 \beta \quad (4.8a)$$

mientras que al reemplazar en la correspondiente a $y(\tilde{z})$:

$$c_2 (\beta^2 - 1) = -\delta c_1 \beta \quad (4.8b)$$

Las relaciones (4.8) sólo son consistentes si una de las siguientes condiciones es válida

$$a) c_1 = c_2 \quad (4.9a)$$

$$b) c_1 = -c_2 \quad (4.9b)$$

En el caso a) tendremos:

$$\beta_+ = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4}}{2} \quad (4.10)$$

En el caso b):

$$\beta_- = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4}}{2} \quad (4.11)$$

Podemos escribir las ecuaciones equivalentes a las (4.10) y (4.11) en términos de los parámetros originales del modelo y ver que estos decaimientos están asociados a dos masas diferentes del campo A_μ :

$$m_\pm = \left(\frac{1}{4} \mu^2 + e^2 \eta^2 \right)^{1/2} \pm |\mu| \quad (4.12)$$

La posibilidad de tener dos masas diferentes para el mesón vectorial en teorías de gauge espontáneamente rotas cuando está presente un término de Chern-Simons, se debe al hecho de que tal término viola paridad.

La existencia de dos formas asintóticas podría asociarse a la existencia de dos soluciones al problema. Sin embargo a continuación demostramos que no existen soluciones que tiendan monótonamente a cero con el comportamiento (4.5a) con $\beta = \beta_-$ dada por (4.11).

Como vimos las soluciones con m_- imponen que $c_1 = -c_2$. Esto implica que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0^+ \quad \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = 0^- \quad (4.13)$$

o bien que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0^- \quad \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = 0^+ \quad (4.14)$$

Consideremos la posibilidad (4.13). Se puede ver que necesariamente $y(0) > 0$, de lo contrario podemos seguir los argumentos del Apéndice A y ver que no hay solución. Por lo tanto

$y(z)$ tendrá al menos un mínimo negativo. Como $y \rightarrow 0^-$ monotonamente podemos elegir el mayor z_1 donde $y(z)$ presente un mínimo negativo. Sea z_1 dicho punto, de manera que en $[z_1, \infty)$ es $dy/dz > 0$ e $y < 0$.

A partir de la ecuación (4.1a) podemos ver que $x(z)$ es una función creciente en z_1 . Ahora, debido a la condición (4.13), $x(z)$ debe presentar un máximo positivo en $[z_1, \infty)$. Sin embargo, esto no es posible como puede verse a partir de (4.1a). Por lo que concluimos que no existe solución si la condición (4.13) es válida.

Un razonamiento análogo puede seguirse para el caso en que valga la condición (4.14).

Luego, existe una sola solución de vórtice que es la correspondiente a m_+ . Cabe notar que esta masa m_+ es mayor que la del vórtice neutro, que corresponde a la ec. (4.120) con $\mu = 0$.

b) SOLUCION NUMERICA Y ESTIMACION DE LA ENERGIA DEL VORTICE CARGADO.

Antes de proceder con el estudio numérico del vórtice cargado, comenzaremos por comparar esta solución con la del vórtice neutro. Sabemos que para esta última se conoce una solución exacta para $\lambda = 1^{(31)}$, descrita en el capítulo 2. También se cuenta con cálculos numéricos muy precisos para varios valores de $\lambda^{(43)}$. Como para el caso $\delta = 0$ las ecs. (4.1) se convierten en las del vórtice neutro, desde un punto de vista físico es natural esperar que para pequeños valores de δ las soluciones de las ecs.(4.1), $\{x, y, z\}$, sean cercanas a las soluciones $\{\tilde{x}, 0, \tilde{z}\}$ para el vórtice neutro. Por lo tanto proponemos la siguiente expansión para la solución cargada:

$$\begin{aligned} x(z, \delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(z) \delta^n \\ y(z, \delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(z) \delta^n \\ z(z, \delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n(z) \delta^n \end{aligned} \tag{4.15}$$

siendo $X_0(\bar{z}) = \tilde{X}$ y $Z_0(\bar{z}) = \tilde{Z}$ la solución para el vórtice neutro. $\{ \dot{y}(\bar{z}, 0) = 0 \}$.

La invarianza de las ecs. de movimiento (4.1) frente a las transformaciones $\delta \rightarrow -\delta$ e $y \rightarrow -y$ implica que:

$$\begin{aligned} X_{2k+1}(\bar{z}) &= Z_{2k+1}(\bar{z}) = 0 \\ y_{2k}(\bar{z}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por lo que la expansión (4.15) resulta:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n}(\bar{z}) \delta^{2n} \\ y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\bar{z}) \delta^{(2n-1)} \\ Z &= \sum_{n=0}^{\infty} Z_{2n}(\bar{z}) \delta^{2n} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Podemos encontrar las formas explícitas de las funciones $X_2(\bar{z})$, $y_1(\bar{z})$ y $Z_2(\bar{z})$, para lo cual sustituimos las expresiones (4.17), obteniendo un sistema de ecuaciones lineales para dichas funciones:

$$\frac{d^2 X_2}{d\bar{z}^2} - \frac{1}{\bar{z}} \frac{dX_2}{d\bar{z}} - 2X_0 Z_0 Z_2 + X_2 Z_0^2 = \bar{z} \frac{dy_1}{d\bar{z}} \tag{4.18a}$$

$$\frac{d^2 Z_2}{d\bar{z}^2} + \frac{1}{\bar{z}} \frac{dZ_2}{d\bar{z}} - \frac{1}{\bar{z}^2} (X_0^2 Z_2 + 2X_0 X_2 Z_0) + y_1^2 Z_0 + \frac{1}{2} (Z_2 - 3Z_0^2 Z_2) = 0 \tag{4.18b}$$

$$\frac{d^2 y_1}{d\bar{z}^2} + \frac{1}{\bar{z}} \frac{dy_1}{d\bar{z}} - y_1 Z_0^2 = \frac{1}{\bar{z}} \frac{dX_0}{d\bar{z}} \tag{4.18c}$$

Existe una solución particular de la ec. (4.18c) que obedece las condiciones de contorno (4.4):

$$y_1(z) = \frac{1}{2} X_0(z) \quad (4.19)$$

Es fácil mostrar que las soluciones $\{\tilde{y}_i(z)\}$ de la ec. homogénea (4.18c) con condiciones de contorno del tipo (4.4) satisfacen las relaciones:

$$\int_0^{\infty} \tilde{y}_1'^2 d\phi = 0 \quad \int_0^{\infty} \tilde{z} z_0^2 \tilde{y}_1'^2 d\phi = 0 \quad (4.20)$$

A partir de (4.20) se sigue que $\tilde{y}_1'(z) = 0$ y por lo tanto la solución (4.19) es única. Una vez que se obtiene la solución (4.19) es posible encontrar también una solución particular del sistema de ecs. (4.18a-b) con las condiciones de contorno (4.4):

$$x_2(z) = \frac{1}{8} z^2 X_0(z) \quad z_2(z) = 0 \quad (4.21)$$

La solución (4.21) es válida únicamente en el caso $\lambda = 1$.

Por lo tanto la expansión resultante para las funciones $x(z)$, $y(z)$ y $z(z)$ es:

$$x(z) = X_0(z) + \frac{z^2}{8} X_0(z) \delta^2 + O(\delta^4)$$

$$y(z) = \frac{1}{2} X_0(z) \delta + O(\delta^3) \quad (4.22)$$

$$z(z) = z_0 \delta^2 + O(\delta^4)$$

Recordemos la forma que tiene la energía del vórtice por unidad de longitud (ver ec.(3.99))

$$E = \pi \eta^2 \int_0^{\infty} \tilde{z} d\phi \left[\frac{1}{\tilde{z}^2} \left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi} \right)^2 + y^2 z^2 + \frac{x^2 z^2}{\tilde{z}^2} + \frac{\lambda^2}{4} (1-z^2)^2 \right] \quad (4.23)$$

Si insertamos las expansiones (4.22) en esta expresión para la energía obtenemos:

$$\mathcal{E} = \frac{E}{\pi\eta^2} = \mathcal{E}_0(\lambda) + \mathcal{E}_2 \delta^2 + \dots \quad (4.24)$$

siendo $\mathcal{E}_0(\lambda)$ la energía para el vórtice neutro dada por:

$$\mathcal{E}_0(\lambda) = \int_0^\infty \zeta d\zeta \left[\frac{1}{\zeta^2} \left(\frac{dX_0}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{dZ_0}{d\zeta} \right)^2 + \frac{X_0^2 Z_0^2}{2} + \frac{\lambda^2}{4} (1 - Z_0^2)^2 \right] \quad (4.25)$$

En particular, para la solución exacta ($\lambda=1$) se tiene que

$$\mathcal{E}_0(\lambda) = 1 \quad (4.26)$$

Por otra parte \mathcal{E}_2 viene dada por:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \zeta d\zeta \left[\left(\frac{dX_0}{d\zeta} \right)^2 + \frac{1}{\zeta} \left(\frac{dX_0}{d\zeta} \right) X_0 + X_0^2 Z_0^2 \right] \quad (4.27)$$

y se puede demostrar fácilmente, teniendo en cuenta las condiciones de contorno, que \mathcal{E}_2 no depende de λ y que toma el valor:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{4} \quad (4.28)$$

Por lo tanto hemos encontrado una expresión para la energía del vórtice cargado que es válida para pequeños valores de $\delta = \mu/e\eta$

$$\mathcal{E} = \frac{E}{\pi\eta^2} = \mathcal{E}_0(\lambda) + \frac{\delta^2}{4} \quad (4.29)$$

Pasaremos ahora a estudiar el comportamiento del vórtice cargado para arbitrarios. Siguiendo la ref.(31) proponemos una expansión de la forma

$$\begin{aligned}
 X(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \\
 y(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \\
 Z(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

es decir, funciones analíticas en el origen. Notemos a partir de la definición de $X(\zeta)$ (ec.(3.76b)) y de la condición de contorno en el origen que:

$$a_0 = 1 \tag{4.31}$$

Introduciendo (4.30) en las ecuaciones de movimiento (4.1) es fácil ver que

$$\begin{aligned}
 a_1 &= b_1 = 0 \\
 b_2 &= \frac{\delta}{2} a_2
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

con a_2 y c_1 arbitrarios.

Por lo que la expansión (4.30) queda en la forma:

$$\begin{aligned}
 X(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \zeta^{2n} \\
 y(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} \zeta^{2n} \\
 Z(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \zeta^{2n+1}
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

Se puede entonces establecer una relación recursiva que de todos los a_{2n} , b_{2n} y c_{2n+1} en términos de a_2 , $b_0 = c$ y c_1 , por lo que las soluciones del sistema dependerán de estas tres condiciones en el origen. Esto define una función

$$\vec{F}(a_2, b_0, c_1) = \begin{pmatrix} x_{\infty}(a_2, b_0, c_1) \\ y_{\infty}(a_2, b_0, c_1) \\ z_{\infty}(a_2, b_0, c_1) \end{pmatrix}
 \tag{4.34}$$

y debemos encontrar a_2 , b_0 y c_1 tales que

$$\vec{F}(a_2, b_0, c_1) = \vec{0}
 \tag{4.35}$$

Como se trata de un cálculo numérico debemos reemplazar el infinito por algún valor finito de ζ , por lo tanto la validez del método numérico está basada en la validez de la siguiente suposición:

Consideremos el sistema de ecuaciones (4.1) con las condiciones

$$\begin{aligned} X(0) &= 1 & X(\infty) &= 0 \\ y(0) &< \infty & y(\infty) &= 0 \\ Z(0) &= 0 & Z(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

y sean $X(\zeta)$, $y(\zeta)$, $Z(\zeta)$ las soluciones del sistema.

Tomemos ahora el mismo sistema (4.1) pero con las condiciones

$$\begin{aligned} \tilde{X}(0) &= 1 & \tilde{X}(\infty) &= \varepsilon_1 \\ \tilde{y}(0) &< \infty & \tilde{y}(\infty) &= \varepsilon_2 \\ \tilde{Z}(0) &= 0 & \tilde{Z}(\infty) &= 1 + \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.36)$$

y sean $\tilde{X}(\zeta)$, $\tilde{y}(\zeta)$, $\tilde{Z}(\zeta)$ las soluciones de dicho sistema.

Supondremos que para M suficientemente grande, ε_1 , ε_2 y ε_3 son lo suficientemente pequeños de modo que:

$$\int_0^M |X(\zeta) - \tilde{X}(\zeta)|^2 d\zeta < \varepsilon \quad (4.37)$$

Para estimar el error que cometemos calculamos el valor de δ integrando la ecuación diferencial (4.1b):

$$\delta = \int_0^\infty y z^2 \zeta d\zeta \quad (4.38)$$

Hemos resuelto este problema numéricamente para el caso $\lambda = 1$ de modo de poder comparar nuestra solución con la exacta del vórtice neutro. Este último corresponde a $\delta = 0$ y los valores

para los coeficientes son⁽³¹⁾:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -0.25 \\
 b_0 &= 0 \\
 c_1 &= 0.60328
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

A partir de (4.33), junto con las condiciones (4.32), vemos que las expansiones resultan de la forma:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= 1 + a_2 z^2 + O(z^4) \\
 y(z) &= b_0 + \frac{d}{z} a_2 z^2 + O(z^4) \\
 Z(z) &= c_1 z + O(z^3)
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

de modo que los coeficientes se obtienen haciendo

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} \frac{dx}{dz} \Big|_{z=0} \\
 b_0 &= c = y(0) \\
 c_1 &= \frac{dz}{dz} \Big|_{z=0}
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

Los procedimientos seguidos para integrar el sistema fueron los siguientes:

- a) Ingresamos condiciones iniciales a_2 , b_0 y c_1 .
- b) Aproximamos las funciones en el entorno de cero con polinomios, cuyos coeficientes surgen de las relaciones de recurrencia impuestas por las ecuaciones.
- c) Evaluamos las funciones y sus derivadas en un punto cercano a cero.
- d) A partir de dicho punto integramos el sistema con una rutina hasta el punto elegido como infinito. (Método por extrapolación sucesiva de Richardson; gentileza del Dr. R. Rodriguez)

Daremos los valores obtenidos para a_2 , b_0 y c_1 cuando $\delta = 0.05$, un caso que también puede ser

comparado con la expansión en potencias de δ :

$$\begin{aligned} a_2 &= -0.2495 \\ b_0 &= 0.0250 \\ c_1 &= 0.6030 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Hemos calculado la energía de la solución de vórtice para estos valores, obteniendo:

$$E = 1.0006 \tag{4.43}$$

que puede ser escrita en la forma (4.24) con $E_2 = 0.24$.

Recordemos que $Z(z)$ no es otra cosa que el módulo del campo de Higgs dividido por su valor de vacío:

$$Z(z) = \frac{f(z)}{\eta} = \frac{|\phi|}{\eta} \tag{4.44}$$

Mientras que $X(z) = 1 + eA(z)$

$$y(z) = \frac{A_0(z)}{\eta}$$

de modo que:

$$-\frac{1}{\epsilon} \frac{dx}{dz} = -\frac{e}{\epsilon} \frac{dA}{dz} = \frac{1}{e\eta^2} B \tag{4.45}$$

$$-\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\eta} \frac{dA_0}{dz} = \frac{1}{e\eta^2} F \tag{4.46}$$

siendo

$$B = -\frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} \tag{4.47}$$

$$E = -\frac{dA_0}{d\rho} \tag{4.48}$$

los campos magnético y eléctrico, respectivamente, del vórtice.

En la Figura 4.1 graficamos el módulo del campo escalar

y los campos magnético y eléctrico como una función de ζ , para los valores de los parámetros $\delta=0.05$ y $\lambda=1$.

A partir de la gráfica podemos ver que si la masa escalar $m=g\eta$ es del mismo orden que la masa vectorial m_v ($\lambda \sim \beta$) entonces tenemos una línea de vórtice bien definida.

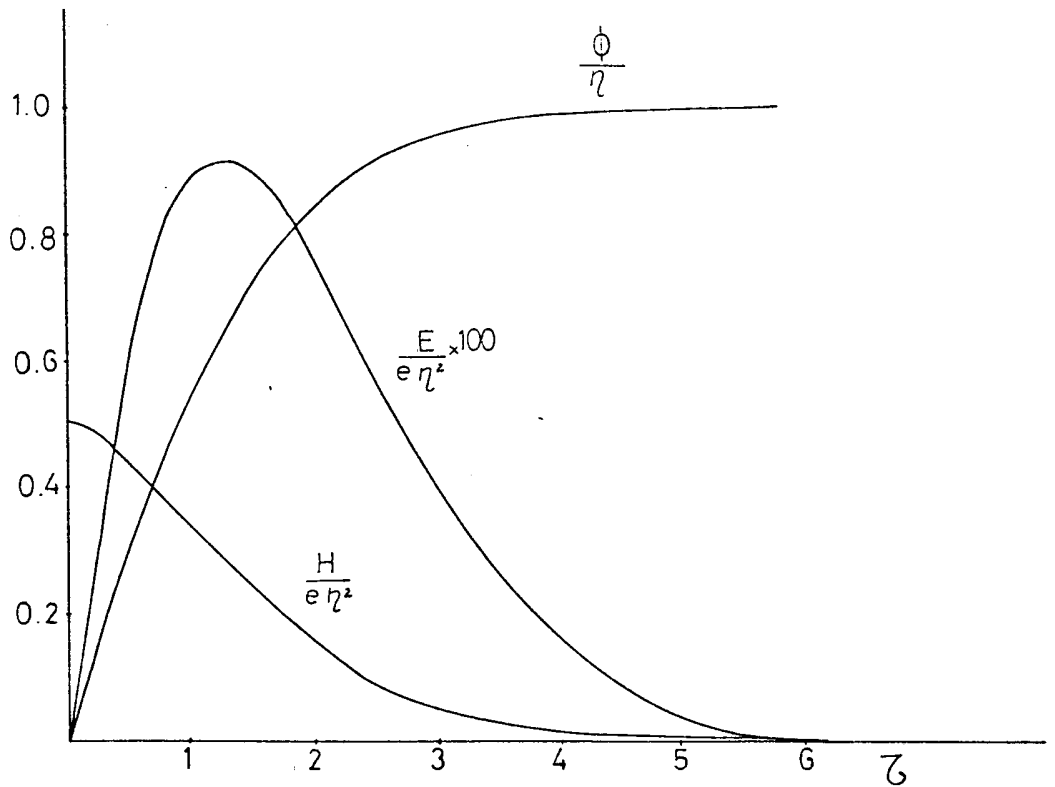


Figura 4.1: En esta figura graficamos la dependencia radial del campo magnético B , el campo eléctrico radial E_r (multiplicado por un factor de 100) y la norma del campo de Higgs. La variable es $\zeta = \rho e \eta$ definida en (4.2d).

Los parámetros son $\delta=0.05$ y $\lambda=1$.

El procedimiento que acabamos de describir se torna tedioso cuando uno trata de determinar la solución para grandes δ ya que en ese caso no podemos usar como guía los parámetros del vórtice neutro para elegir inicialmente los valores de a_2 y c_1 .

Describiremos entonces un método alternativo variacional que fue desarrollado en la referencia (44) y que muestra estar en excelente acuerdo con los casos en que se tiene comparación directa con los resultados analíticos o bien numéricos muy precisos.

Siguiendo entonces a Hill et al, usaremos una combinación de potencias de exponenciales de modo de construir funciones que tengan los comportamientos a cortas y largas distancias dados por las condiciones (4.4). Por lo tanto proponemos:

$$\begin{aligned} X(z) &= [1 - (1 - e^{-az})^2] \\ Y(z) &= c [1 - (1 - e^{-bz})^2] \\ Z(z) &= 1 - e^{-dz} \end{aligned} \quad (4.49)$$

siendo a , b , c y d cuatro parámetros variacionales.

El ansatz (4.49) corresponde físicamente a tener un tubo de flujo magnético de ancho $\sim a^{-1}$ y un vórtice de ancho $\sim d^{-1}$, siendo el parámetro d del orden de la masa del campo de Higgs (asociado con la variable Z).

Los parámetros variacionales a , b , c , d , deben ser determinados minimizando la acción (ver ec. (3.100))

$$\begin{aligned} S = -\pi\eta^2 \int_0^\infty z d\tilde{z} & \left[\frac{1}{\tilde{c}z} \left(\frac{dX}{d\tilde{z}} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tilde{z}} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tilde{z}} \right)^2 + y^2 Z^2 + \frac{X^2 Z^2}{\tilde{c}z^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{4} (1 - Z^2)^2 - 2 \left(\frac{dY}{d\tilde{z}} \right)^2 - 2y^2 Z^2 - 2 \frac{d}{\tilde{c}} y \left(\frac{dX}{d\tilde{z}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Introducimos las formas (4.49) en (4.50) y calculamos explícitamente cada uno de los términos que aparecen en la acción, obteniendo:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 d\sigma = 4a^2 \ln \frac{9}{8}$$

$$\int_0^{\infty} \sigma \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 d\sigma = \frac{13}{36} c^2$$

$$\int_0^{\infty} y \left(\frac{dx}{d\sigma} \right) d\sigma = -2c \left[-\frac{2}{\sigma+2} - \frac{1}{\sigma+1} + \frac{5}{2(\sigma+1)} \right] = c N_3(\sigma)$$

$$\int_0^{\infty} y^2 z^2 \sigma d\sigma = \frac{c^2}{d^2} \left[\frac{89}{144\theta^2} + \frac{8}{(3\theta+1)^2} - \frac{31}{4(2\theta+1)^2} - \frac{2}{(4\theta+1)^2} + \frac{1}{(\theta+1)^2} - \frac{4}{(4\theta+2)^2} \right] = \frac{c^2}{d^2} N_4(\theta)$$

$$\int_0^{\infty} \sigma \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 d\sigma = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\infty} (1-z^2)^2 \sigma d\sigma = \frac{89}{144 d^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 z^2}{\sigma} d\sigma = 4 \ln \frac{3}{2} + 8 \ln \frac{2+s}{3+s} + 4 \ln \frac{3+2s}{2(1+s)} + \ln \frac{4+s}{4} + \ln \frac{4+s}{2(4+s)} = N_2(s)$$

Variando entonces la expresión resultante para la acción con respecto a los parámetros variacionales encontramos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\delta S}{\delta a} = 0 \Rightarrow -4a^2 \ln \frac{9}{8} - \delta \sigma c \frac{\partial N_3}{\partial \sigma} + \frac{s}{2} \frac{\partial N_2}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta b} = 0 \Rightarrow 2 \delta a^2 s^3 \frac{\partial N_3}{\partial \sigma} + c \frac{\partial N_4}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta c} = 0 \Rightarrow \frac{13}{36} c a^2 s^2 + \delta a^2 s^2 N_3 + c N_4 = 0$$

(4.51)

$$\frac{\delta S}{\delta d} = 0 \Rightarrow c^2 N_4 + \frac{c^2 \theta}{2} \frac{\partial N_4}{\partial \theta} - \frac{\lambda^2 89}{576} + \frac{a^2 s^3}{2} \frac{\partial N_2}{\partial s} = 0$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto eligiendo valores para dos de los parámetros variacionales, por ejemplo θ y σ , y luego determinando a partir de ellos los otros dos, así como los dos parámetros libres del modelo, λ y δ .

En esta forma pudimos calcular de manera muy simple la energía del vórtice. En la Tabla 4.1 damos los valores de la energía para diferentes valores de λ y δ . En la Figura 4.2 presentamos una gráfica de \mathcal{E} como función del parámetro δ . Vemos que para pequeños valores de δ estos resultados concuerdan con los obtenidos a partir de la expansión (4.29).

Estos cálculos variacionales forman parte de los aportes originales de esta Tesis.⁽⁴²⁾

$\delta \backslash \lambda$	0.5	1.0	1.5
0.7	0.87	1.12	1.31
1.3	1.02	1.30	1.50
3.0	1.39	1.74	2.01
8.0	1.96	2.43	2.76
12.6	2.26	2.81	3.16
17.7	2.51	3.11	3.47

Tabla 4.1: Energías del vórtice cargado (normalizada de acuerdo a la ec. (4.24)) como función de δ y λ , obtenidas a partir del cálculo variacional.

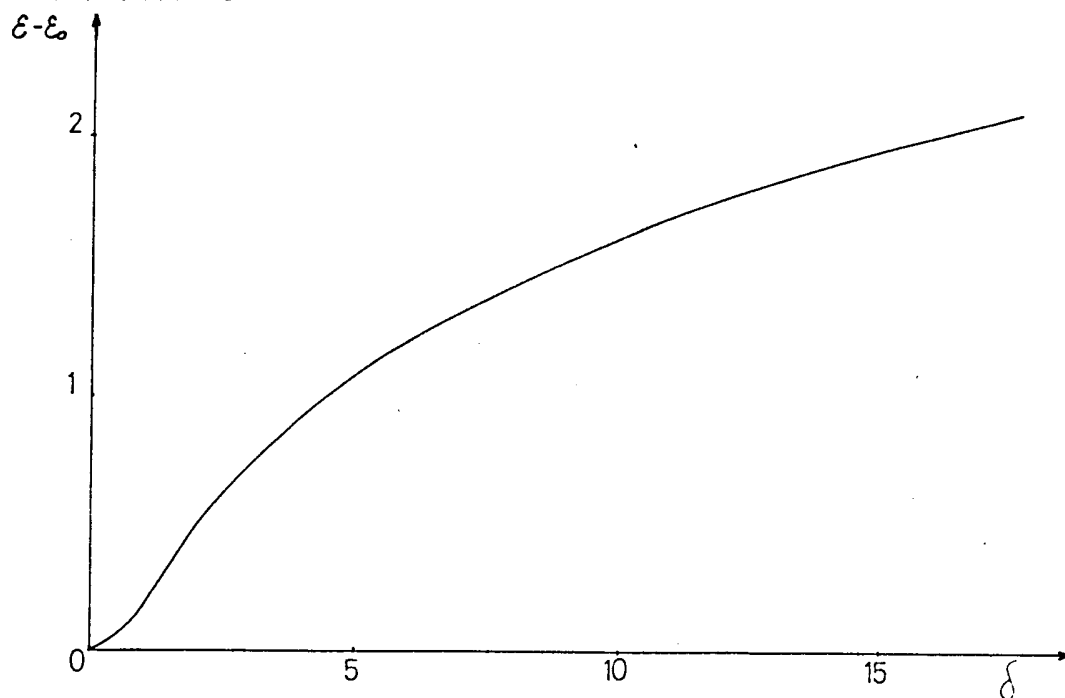


Figura 4.2: Graficamos la dependencia de $E(\lambda, \delta) - E_0(\lambda)$ como función de δ para $\lambda = 1$.

CAPITULO 5:

COSMOLOGIA

SECCION 5.1: INTRODUCCION

En este capítulo estudiaremos los conceptos básicos de la Teoría del Big Bang del Universo temprano.⁽⁴⁵⁾ Los mismos serán aplicados en el capítulo siguiente cuando demos una posible teoría de la formación de galaxias a partir de las perturbaciones en la densidad del Universo que producen las cuerdas cósmicas.

Comenzaremos discutiendo brevemente el llamado **principio cosmológico**, a partir del cual podemos especificar la métrica cósmica.

La ciencia moderna quedó marcada por el descubrimiento de que la Tierra no está en el centro del Universo. Actualmente nadie sugeriría que la Tierra, o el sistema solar, o nuestra galaxia, o nuestro grupo local de galaxias, ocupen alguna posición especialmente favorecida en el Cosmos. Por el contrario, las ideas actuales van en dirección opuesta.

Gran parte de la teoría cosmológica moderna está construida basándose en el **principio cosmológico**, una hipótesis de que todas las posiciones en el Universo son esencialmente equivalentes. Por supuesto la **homogeneidad** del Universo tiene que ser entendida en el mismo sentido que la homogeneidad de un gas: no es aplicable al Universo en detalle, sino solamente a un Universo promediado a través de celdas de diámetro de unos 10^8 a 10^9 años luz, que son suficientemente grandes como para incluir muchos cúmulos de galaxias.

El Universo también aparece esféricamente simétrico alrededor nuestro, de modo que en el **principio cosmológico** está incluida la suposición de que el Universo es isotrópico alrededor de cada punto.

Todavía queda por determinar si el Universo es esféricamente simétrico y homogéneo para todo tiempo, o simplemente en alguna fase temporaria presente de su historia. Ha habido, por ejemplo, una sugerencia interesante de que el Universo

haya sido altamente anisotrópico durante alguna fase temprana densa, pero que esas anisotropías han sido suavizadas por la acción de la viscosidad de los neutrinos y por otros efectos disipativos.

Sin embargo, aún en tales teorías, el Universo ha sido altamente isotrópico y homogéneo durante toda la parte de su historia que es directamente accesible a la observación astronómica.

El principio cosmológico permite la especificación de la métrica cósmica enteramente en términos de un "radio" $\bar{R}(t)$ y de una constante k . Para calcular $\bar{R}(t)$ necesitamos hacer alguna suposición acerca del contenido material del Universo, y luego derivar la dependencia temporal de la métrica como una solución de las ecuaciones de campo de Einstein, como fue hecho por primera vez por Alexander Friedman en 1922.

Supondremos entonces que el Universo es isótropo y homogéneo, teniendo en cuenta ahora las ecuaciones de campo de Einstein.

El modelo cosmológico standar que adoptaremos (llamado del Big Bang caliente) parte de la suposición de que el Universo comienza en un estado de equilibrio térmico local a muy alta temperatura y luego se va enfriando en el curso de su expansión cosmológica.

La suposición de isotropía y homogeneidad y de que en los tiempos tempranos el Universo era prácticamente "chato" lleva a que la métrica que lo describe sea una métrica de Robertson-Walker.

Un punto importante es que el futuro del Universo depende críticamente de su curvatura: si el Universo es abierto se expandirá para siempre, mientras que si es cerrado su actual expansión cesará y le sucederá una contracción general. Veremos luego que la curvatura depende críticamente de la densidad de energía presente ρ_0 . El Universo es abierto o cerrado de acuerdo a si ρ_0 es menor o mayor que un cierto valor crítico ρ_c , del orden de 10^{-29} g/cm³. Fundamentalmente, ρ_0 está dado por la masa en reposo de la materia ordinaria, es decir neutrones y protones.

Existen dos evidencias observacionales cruciales para aceptar el modelo del Big Bang caliente.

La primera es el corrimiento al rojo cósmico, la observación de que las líneas espectrales de galaxias distantes son corridas hacia el rojo. Si interpretamos ésto como un corrimiento Doppler, significa que están alejándose de nosotros con una velocidad $v = Hr$, siendo r la distancia y H la constante de Hubble, $H \sim 100 \text{ km.seg}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$.

Mirando hacia atrás en el tiempo se encuentra que cualquier Universo isótropo y homogéneo, gobernado por las ecuaciones de Einstein, debe haber comenzado con una singularidad de densidad infinita. Partiendo de esa singularidad, la edad del Universo debe ser menor que $H_0^{-1} \sim 10^{10}$ años.

La segunda observación, que es la reliquia más importante del Universo caliente, es el fondo de radiación de microondas cósmico, predicho en 1950 por Alpher, Bethe y Gamow y observado en 1965 por Penzias y Wilson. Esta radiación tiene aproximadamente un espectro de cuerpo negro correspondiente a una temperatura de 2.7 K. A medida que el Universo se expande, dicha radiación es enfriada adiabáticamente de modo que en tiempos tempranos el Universo era mucho más caliente y mas denso de lo que es ahora (Actualmente el Universo es transparente).

La radiación que observamos es el remanente, corrido hacia el rojo, de la radiación térmica emitida cuando la temperatura era aproximadamente de 4000 °K.

Conociendo la temperatura de radiación presente podemos trazar la historia térmica del Universo hasta unos pocos primeros minutos, y calcular la producción de núcleos complejos. En los primeros segundos de la historia cósmica era suficientemente alta como para producir mesones, bariones y antibariones en gran cantidad.

Estructuraremos este capítulo de la siguiente manera:

En la Sección 5.2 veremos que la métrica que describe la geometría de un Universo isótropo y homogéneo es la métrica de Robertson-Walker.

En la Sección 5.3 haremos un cálculo detallado de cómo

se obtiene el parámetro z de corrimiento al rojo que será importante para calcular, en el capítulo siguiente, el crecimiento $d\rho/\rho$ de la densidad de energía del Universo en la era dominada por materia.

En la Sección 5.4 estudiamos la ecuación que resulta para el factor de escala cósmico $R(t)$ a partir de las ecuaciones de Einstein en un Universo homogéneo e isótropo. Veremos qué dependencia tiene la densidad de energía del Universo con $R(t)$ en las distintas eras.

En la Sección 5.5 encontramos expresiones para la densidad y la presión en el Universo presente, mientras que en la Sección 5.6 estudiamos cómo se comporta el Universo en la era dominada por materia para tres casos especiales del valor actual de la densidad.

Finalmente, daremos una breve descripción de la historia temprana del Universo, para luego estudiar con más detalle la dependencia de la densidad del Universo con la temperatura en las diferentes eras.

SECCION 5.2: METRICA DE ROBERTSON-WALKER

En esta Sección veremos cuál es la métrica que describe la geometría de un Universo que se supone homogéneo e isótropo.

La homogeneidad y la isotropía de este modelo cosmológico implican que todas las variables físicas pueden ser expresadas como funciones del tiempo cósmico propio t medido por un observador en reposo en una porción del fluido, tomando como convención el hecho de que $t=0$ corresponde a la época singular del Big Bang. La distancia propia entre dos partículas elegidas en este modelo, calculada a lo largo de una hipersuperficie de tiempo fijo t , debe cambiar sólo en un factor de escala con el tiempo:

$$\vec{X}(t) = R(t) \vec{r} \quad (5.1)$$

siendo \vec{r} una constante para el par de partículas y el parámetro de expansión $R(t)$ una función universal del tiempo propio.

Cualquier espacio-tiempo homogéneo e isótropo puede ser descrito por una métrica en la cual la longitud invariante ds esté dada por:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right\} \quad (5.2)$$

Las coordenadas r, θ, ϕ proveen una parametrización de las tres dimensiones espaciales. La función $R(t)$, llamada **factor de escala**, es una función desconocida del tiempo.

Por otra parte, k es una constante que, eligiendo adecuadamente las unidades para r , puede tomar los valores 1, 0 y -1.

La métrica (2.5) es conocida en cosmología como **métrica de Robertson-Walker**. Puede ser derivada directamente a partir de suponer homogeneidad e isotropía sin necesidad de usar las ecuaciones de campo de Einstein.

Para los valores de $k = -1$ o $k = 0$ el espacio es infinito, mientras que para $k = 1$ es finito con una circunferencia propia dada por

$$L = 2\pi R(t)$$

y volumen propio dado por:

$$V = 2\pi \bar{R}^3(t)$$

Para $k = 1$ el Universo espacial puede considerarse como la superficie de una esfera de radio \bar{R} en un espacio euclídeo de 4 dimensiones y $\bar{R}(t)$ es justamente el llamado "radio del Universo".

Para $k = -1$ o $k = 0$ no es posible hacer una interpretación en esta forma; sin embargo, $\bar{R}(t)$ todavía da la escala de la geometría del espacio. De modo que en cualquier caso, $\bar{R}(t)$ puede llamarse factor de escala cósmico.

SECCION 5.3: EL CORRIMIENTO AL ROJO

En esta Sección estudiaremos cómo las líneas espectrales de las galaxias distantes son corridas hacia el rojo. Como ya dijimos, el resultado será importante para calcular en el capítulo siguiente el crecimiento de las perturbaciones en la densidad del Universo producidas por las cuerdas cósmicas.

La información mas importante acerca del factor de escala cósmico $R(t)$ viene de la observación del corrimiento en frecuencia de la luz emitida por fuentes distantes. Para calcular tales corrimientos en frecuencia supondremos que nos encontramos en el origen de coordenadas $r = 0$, y consideraremos una onda electromagnética que viaja hacia nosotros en la dirección $-r$, con θ y ϕ fijos.

La ecuación de movimiento de una dada cresta de onda es:

$$0 = ds^2 = dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad \theta, \phi \text{ fijos}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{R(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Por lo tanto, si la onda deja una galaxia típica, localizada en r_1, θ_1, ϕ_1 , al tiempo t_1 , nos alcanzará en un tiempo t_0 dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) \quad (5.3)$$

siendo

$$f(r_1) \equiv \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \text{sen}^{-1} r_1 & \text{si } k=1 \\ r_1 & \text{si } k=0 \\ \text{senh}^{-1} r_1 & \text{si } k=-1 \end{cases}$$

Como las galaxias típicas tienen coordenadas r_1, θ_1, ϕ_1 constantes concluimos que $f(r_1)$ es independiente del tiempo.

Entonces si la siguiente cresta de onda abandona r_1 en el tiempo $t_1 + \delta t$, llegará a nosotros al tiempo $t_0 + \delta t_0$, que nuevamente

está dada por una relación como la (5.3):

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) \quad (5.4)$$

Restando la ec.(5.3) de la (5.4) obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)}$$

Ya que el tiempo que transcurre entre que las dos crestas de onda abandonan la galaxia es del orden de 10^{-4} seg., despreciable frente a los tiempos que entran en juego, podemos pensar que $R(t)$ no cambia durante el período de la señal de luz típica, y por lo tanto encontramos que:

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)} \quad (5.5)$$

Por lo tanto, la frecuencia ν_0 que nosotros observamos, en el tiempo actual t_0 , está relacionada con la frecuencia ν_1 de cuando fue emitida la señal mediante:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \quad (5.6)$$

Esto es convencionalmente expresado en términos de un parámetro de corrimiento al rojo Z , definido como el incremento fraccional en la longitud de onda:

$$Z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (5.7)$$

y como $\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0}$:

$$Z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \quad (5.8)$$

Para evitar confusiones debemos tener en cuenta que ν_1 y λ_1 son la frecuencia y la longitud de onda de la luz cuando es observada cerca del lugar y el tiempo en que es emitida, y por lo tanto presumiblemente serán los valores medidos cuando la misma transición atómica se realice en los laboratorios terrestres. Por otra parte, ν_0 y λ_0 son la frecuencia y la longitud de onda de la luz observadas después de su largo viaje hacia nosotros.

A partir de la ec. (5.7) concluimos que si $Z > 0$, $\lambda_0 > \lambda_1$ y por lo tanto tenemos un corrimiento hacia el rojo, mientras que si $Z < 0$, entonces $\lambda_0 < \lambda_1$ y tendremos un corrimiento hacia el azul.

Dicho de otra forma, podemos ver a partir de (5.8) que si el Universo se expande de modo que $R(t_0) > R(t_1)$ tendremos que $Z > 0$ y por lo tanto corrimiento hacia el rojo; si el Universo se contrae $R(t_0) < R(t_1)$ lo que implica que $Z < 0$ y en consecuencia un corrimiento hacia el azul.

Existen muchas evidencias observacionales que indican un corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales emitidas por objetos distantes. Hay también razones teóricas para pensar que el Universo es prácticamente chato, de modo que se trata de un Universo en expansión. Por lo tanto $R(t_0) > R(t_1)$ y estamos en presencia de un corrimiento hacia el rojo.

Si consideramos el caso en que $t_0 - t_1$ y r_1 son pequeños, el factor de escala cósmico $R(t)$ puede ser expresado como una serie de potencias:

$$R(t) = R(t_0) \left[1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 (t - t_0)^2 + \dots \right] \quad (5.9)$$

siendo t_0 el tiempo presente, y H_0 y q_0 parámetros conocidos como constante de Hubble y parámetro de desaceleración, respectivamente:

$$H_0 \equiv \dot{R}(t_0) / R(t_0) \quad (5.10)$$

$$q_0 \equiv -\ddot{R}(t_0) R(t_0) / \dot{R}^2(t_0) \quad (5.11)$$

Aquí el punto significa derivar con respecto al tiempo.

Más adelante veremos que la función $R(t)$ completa puede ser calculada usando las ecuaciones de Einstein, si conocemos los valores H_0 y q_0 , con $k > 0$ si $q_0 > 1/2$ y $k < 0$ si $q_0 < 1/2$. Veremos también que si el parámetro de desaceleración $q_0 < 1/2$ entonces $\rho_0 < \rho_c$ y por lo tanto el Universo es abierto, mientras que si $q_0 > 1/2$, $\rho_0 > \rho_c$ y el universo es cerrado.

Ya hemos dicho que cualquier Universo homogéneo e isótropo gobernado por las ecuaciones de Einstein debe haber comenzado con una singularidad de densidad infinita. Partiendo de esa singularidad la edad del Universo debe ser menor que $\frac{2}{3} H_0^{-1}$ si $q_0 > 1/2$.

SECCION 5.4: ECUACIONES DE EINSTEIN

En esta Sección obtendremos la ecuación que nos da la rapidez de cambio del factor de escala $R(t)$ a partir de las ecs. de Einstein. Por medio de ella y de la ecuación de conservación de la energía podremos deducir el comportamiento de la densidad de energía del Universo en las diferentes épocas que atraviesa.

Las ecuaciones de Einstein en un Universo isótropo y homogéneo imponen condiciones sobre la métrica. El resultado es que estas ecuaciones toman la forma:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu} \quad (5.12)$$

siendo $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci cuyos elementos son:

$$R_{tt} = 3 \frac{\ddot{R}}{R} \quad (5.13)$$

$$R_{ti} = 0 \quad (5.14)$$

$$R_{ij} = -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k) \tilde{g}_{ij} \quad (5.15)$$

donde \tilde{g}_{ij} es la métrica tridimensional que satisface que

$$\tilde{g}_{rr} = (1 - kr^2)^{-1} \quad \tilde{g}_{\theta\theta} = 1 \quad \tilde{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \quad \tilde{g}_{ij} = 0 \text{ con } i \neq j$$

con $k = 1, -1, 0$.

La métrica para un Universo isótropo y homogéneo general es la de Robertson-Walker:

$$g_{tt} = 1 \quad g_{it} = 0 \quad g_{kj} = -R^2(t) \tilde{g}_{kj}(x) \quad (5.16)$$

$S_{\mu\nu}$ que aparece en la ec. (5.12), es el término de fuente definido a partir del tensor energía-momento como:

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \quad (5.17)$$

El tensor energía-momento en un Universo homogéneo e isótropo necesariamente toma la misma forma que para un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} \quad (5.18)$$

siendo ρ y p funciones solamente del tiempo y U_{μ} el cuadvivector velocidad cuyas componentes son $U^t=1$ y $U^i=0$.

La componente tiempo-tiempo de la ec. (5.12) es:

$$3\ddot{R} = -4\pi G (\rho + 3p)R \quad (5.19)$$

Las componentes espacio-espacio dan una única ecuación:

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G (\rho - p)R^2 \quad (5.20)$$

mientras que las componentes espacio-tiempo son idénticamente triviales.

Eliminando \ddot{R} entre (5.19) y (5.20) encontramos una ecuación diferencial de primer orden para $R(t)$:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \quad (5.21)$$

Por otro lado tenemos la ecuación de conservación de la energía:

$$\dot{\rho}R^3 = \frac{d}{dt} \left\{ R^3 [\rho + p] \right\}$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dR} (\rho R^3) = -3pR^2 \quad (5.22)$$

Entonces si damos una ecuación de estado $p=p(\rho)$ podemos usar esta ecuación para determinar ρ como función de R .

Por ejemplo si la densidad de energía del Universo está dominada por materia no relativista con presión despreciable, $p \sim 0$, la ec. (5.22) da:

$$\rho \propto R^{-3} \quad \text{para} \quad p \ll \rho \quad (5.23)$$

Mientras que si la densidad de energía está dominada por partículas relativistas, tales como fotones, entonces se puede ver que $p = \rho/3$, y la ec. (5.22) da:

$$\rho \propto R^{-4} \quad \text{para} \quad p = \rho/3 \quad (5.24)$$

Entonces, conociendo ρ como función de R podemos determinar $R(t)$ para todos los tiempos resolviendo la ec. (5.21).

Por lo tanto las ecuaciones fundamentales de la cosmología dinámica son las ecuaciones de Einstein (5.22), la ecuación de conservación de la energía (5.23) y la ecuación de estado. Los modelos cosmológicos basados en una métrica de Robertson-Walker, en los que $R(t)$ es encontrada en este modo, se conocen como **modelos de Friedmann**.

Analizando las ecuaciones (5.19)-(5.20) podemos obtener gran información acerca del pasado y de la expansión futura del Universo, aún sin necesidad de especificar una ecuación de estado.

La ec. (5.19) muestra que siempre que $\rho + 3p$ permanezca positiva, la "aceleración" \ddot{R}/R es negativa. Ya que en el tiempo presente $R > 0$ (por definición) y $\dot{R}/R > 0$ (pues observamos corrimientos hacia el rojo y no hacia el azul), concluimos que la curva de $R(t)$ en función de t debe ser cóncava hacia abajo, y por lo tanto $R(t)$ debe haber alcanzado el valor $R(t) = 0$ en algún tiempo finito en el pasado. Llamando a ese tiempo $t=0$, tenemos que

$$R(0) = 0 \quad (5.25)$$

El tiempo presente t_0 es entonces el tiempo transcurrido a partir de esa singularidad, y esto justifica que lo llamemos **edad del Universo**.

Si $\dot{R}(t)$ se anula para $0 < t < t_0$, $R(t)$ tomará el valor

$$R(t) = \frac{R(t_0)}{t_0} t \quad \text{y la edad } t_0 \text{ será justamente igual al tiempo de Hubble}$$

$$H_0^{-1} = \frac{R(t_0)}{\dot{R}(t_0)}$$

Si $\ddot{R}(t)$ es negativa para $0 < t < t_0$, la edad del Universo debe ser menor que el tiempo de Hubble, H_0^{-1} ,

$$t_0 < H_0^{-1} \quad (5.26)$$

Mirando hacia el futuro, vemos a partir de la ec. (5.22), que siempre que la presión p no se haga negativa la densidad ρ debe decrecer a medida que crece R , al menos tan rápido como t^{-3} , de modo que para $R \rightarrow \infty$ el lado derecho de la ec. (5.21),

$$\frac{8\pi G}{3} \rho R^2$$

se anule al menos tan rápido como R^{-1} .

En tal caso podemos analizar la ecuación

$$\dot{R}^2 + k = 0 \quad R \rightarrow \infty$$

Para $k = -1$, $\dot{R}^2(t) = 1$ permanece definido positivo, de modo que $R(t) \sim t$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $k = 0$, $\dot{R}^2(t)$ también es definido positivo; $R(t)$ todavía crece con t pero en una forma más suave.

Para $k = +1$ tenemos que $\dot{R}^2 = -1 + \frac{8\pi G}{3} \rho R^2$, es decir que $\dot{R}^2(t)$ tomará el valor 0 cuando ρR^2 caiga al valor $3/8\pi G$. Luego $\dot{R}(t) = 0$ y estamos en el caso anterior.

Como estamos considerando $\dot{R} < 0$ y para el valor $\rho R^2 = 3/8\pi G$ es $\dot{R} = 0$, se trata de un máximo de la función $R(t)$. A partir de allí $R(t)$ comienza a decrecer y eventualmente alcanza nuevamente el valor $R = 0$ en algún tiempo finito en el futuro.

Concluimos entonces que, cualitativamente, el curso de la historia cósmica está determinado por el signo de la curvatura espacial: si $k = -1$ o $k = 0$ el Universo seguirá expandiéndose para siempre, mientras que si $k = 1$ la expansión eventualmente cesará y comenzará una contracción que lo hará volver al estado singular $R(t) = 0$.

Existe una forma alternativa de encontrar las ecuaciones dinámicas para un Universo en expansión. Si imaginamos una superficie esférica comóvil en todo punto del Universo, entonces siempre que su radio propio sea mucho menor que $R(t)$, las galaxias dentro de esta esfera se moverán bajo la influencia de sus propios campos gravitacionales, y el campo gravitacional del resto del Universo puede ser despreciado.

Podemos pensar al Universo como un gas newtoniano en estado de expansión uniforme en todo punto. Cualquier partícula del gas tendrá una trayectoria

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) \frac{R(t)}{R(t_0)}$$

siendo $R(t)$ un factor de escala común a todo el gas. (Notemos que el gas aparece igual para un observador montado en cualquier partícula del gas que para un observador en el origen. Además, las coordenadas comóviles de una dada partícula del gas no son $x^i(t)$ sino $r^i \equiv x^i(t_0)$).

La energía potencial gravitacional V de tal partícula viene dada justamente por la materia contenida dentro de una esfera de radio $|\vec{x}(t)|$ y centro en el origen:

$$V(t) = -\frac{4\pi}{3} |\vec{x}(t)|^3 \rho(t) \frac{mG}{|\vec{x}(t)|} = -\frac{4\pi}{3} mG |\vec{x}(t_0)|^2 \rho(t) \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)}$$

siendo m la masa de la partícula y $\rho(t)$ la densidad de masa uniforme del gas. La energía cinética de tal partícula es

$$T(t) = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}(t)|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{x}(t_0)|^2 \frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t_0)}$$

de modo que su energía total resulta:

$$E = T(t) + V(t) = \frac{1}{2} m \frac{|\vec{x}(t_0)|^2}{R^2(t_0)} \left[\dot{R}^2(t) - \frac{8\pi G}{3} \rho(t) R^2(t) \right]$$

Con E constante, ésta es justamente la misma ecuación que (5.21) siempre que identifiquemos la energía de una partícula como

$$E = -\frac{1}{2} m \frac{|\vec{x}(t_0)|^2}{R^2(t_0)} k$$

Para $k = -1$ la energía es definida positiva de modo que la gravitación no puede prevenir al gas de que se disperse hacia el infinito, con una velocidad asintótica finita. Para $k = 0$, E se anula y el gas es justamente capaz de expandirse indefinidamente. Para $k = 1$, E es negativa de modo que la explosión cesará en algún momento y será seguida por una contracción.

Si bien vemos que la cosmología newtoniana puede reproducir los principales resultados obtenidos a partir de las ecuaciones de Einstein, es esencialmente incompleta por los siguientes motivos:

- a) Se necesita la relatividad general para justificar que despreciemos toda la materia fuera de la esfera de radio $|\vec{x}(t)|$ para calcular el potencial gravitacional en $x(t)$.
- b) No se puede usar la mecánica newtoniana cuando el medio consiste de partículas con velocidades locales relativistas.
- c) Sólo usando la relatividad general podemos interpretar la observación de señales luminosas correctamente en términos del factor de escala cósmico $R(t)$.

SECCION 5.5: DENSIDAD Y PRESION DEL PRESENTE UNIVERSO

Obtendremos aquí expresiones para la densidad y la presión actuales en función del parámetro de desaceleración que ya introdujimos en la Sección 5.3.

En el instante presente la presión y la densidad de energía del Universo están dadas por las ecs. (5.19) y (5.20):

$$3\ddot{R} = -4\pi G (\rho + 3p) R$$

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G (\rho - p) R^2$$

como

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{k}{R_0^2} + H_0^2 \right) \quad (5.27)$$

$$p_0 = -\frac{1}{8\pi G} \left[\frac{k}{R_0^2} + H_0^2 (1 - 2q_0) \right] \quad (5.28)$$

siendo R_0 el presente valor del factor de escala cósmico $R(t)$ y $H_0 = \dot{R}_0/R_0$ y $q_0 = -\dot{R}_0 \ddot{R}_0/R_0^2$, la constante de Hubble y el parámetro de desaceleración, respectivamente. (Ver ecs. (5.10) y (5.11)).

A partir de la ecuación (5.27) vemos que la curvatura espacial k/R^2 es positiva o negativa según si ρ_0 es mayor o menor que una cierta densidad crítica ρ_c , dada por

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2 \times 10^{-29} \left(\frac{H_0}{100 \text{ km/seg Mpc}} \right)^2 \text{ g/cm}^3 \quad (5.29)$$

Por lo tanto, $k/R^2 > 0$ si $\rho_0 > \rho_c$, mientras que $k/R^2 < 0$ si $\rho_0 < \rho_c$.

Existen buenos fundamentos para creer que la densidad de energía del presente Universo está dominada por materia no relativista con

$$\rho_0 \ll \rho_0 \quad (5.30)$$

En este caso la ec. (5.28) conduce a una expresión para la curvatura espacial en términos de parámetros observables H_0 y

q_0 :

$$\frac{k}{R_0^2} = (2q_0 - 1) H_0^2 \quad (5.31)$$

mientras que la ec. (5.27) da el cociente entre la presente densidad y la densidad crítica ρ_c como:

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = 2q_0 \quad (5.32)$$

Por lo tanto vemos que para $q_0 > 1/2$ el Universo está positivamente curvado con $\rho_0 > \rho_c$, mientras que para $q_0 < 1/2$ el Universo está negativamente curvado siendo $\rho_0 < \rho_c$.

Existen estimaciones que indican que la mayor contribución de las partículas relativistas a la densidad de energía cósmica total la brinda el fondo de radiación de microonda de 2.7 °K. Su densidad es menor que un centésimo de la densidad de masa galáctica en reposo, lo que justifica el haber despreciado la presión en las ecuaciones de Einstein y en la de conservación de la energía.

Si la densidad de energía del Universo estuviera dominada por partículas altamente relativistas la presión estaría dada por

$$p_0 = \frac{\rho_0}{3} \quad (5.33)$$

En este caso las ecuaciones de Einstein resultan:

$$\frac{k}{R_0^2} = H_0^2 (q_0^2 - 1) \quad (5.34)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = q_0 \quad (5.35)$$

siendo ρ_c la densidad crítica que definimos en (5.29).

El parámetro de desaceleración para el cual $k=0$ y $\rho_0 = \rho_c$, es ahora $q_0=1$, y la densidad requerida para un dado q_0

y un dado H_0 es la mitad de la que se necesita en un Universo lleno de materia.

SECCION 5.6: LA ERA DOMINADA POR MATERIA

Calcularemos en esta Sección la edad del Universo a partir de su ecuación dinámica durante la era dominada por materia en los tres casos posibles de curvatura del espacio.

La densidad de energía de las formas conocidas de radiación en el Universo actual es menor que un centésimo de la densidad de masa en reposo. De acuerdo a las ecuaciones (5.23) y (5.24), la densidad de energía de masa en reposo varía como R^{-3} , y la densidad de energía de radiación varía según R^{-4} , de modo que podemos concluir que la expansión del Universo ha estado gobernada por su contenido de materia no relativista, al menos desde el tiempo en que $R(t)$ era un centésimo de su valor actual.

Hemos visto que la ecuación dinámica que gobierna el Universo durante esta era es la ecuación de Einstein (5.21):

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \quad (5.36)$$

donde ρ toma la forma apropiada para el Universo dominado por materia (ver ec. (5.23)):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \quad (5.37)$$

Es conveniente usar las ecuaciones (5.31) y (5.32) para escribir ρ_0 y k/R_0^2 en términos de q_0 y H_0 :

$$\frac{k}{R_0^2} = (2q_0 - 1) H_0^2$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_0 = 2q_0 H_0^2$$

Entonces, las ecs. (5.36) y (5.37) dan:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[1 - 2q_0 + 2q_0 \left(\frac{R_0}{R}\right) \right] \quad (5.38)$$

En general su solución puede ser expresada como una fórmula para t en términos de R :

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{R}{R_0}} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right]^{-1/2} dx \quad (5.39)$$

donde hemos definido $t=0$ como el tiempo para el cual $R \ll R_0$.

En particular la edad actual del Universo se obtiene haciendo $R = R_0$:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right]^{-1/2} dx \quad (5.40)$$

Luego, para cualquier q_0 positivo la edad del Universo debe ser menor que el tiempo de Hubble

$$t_0 < \frac{1}{H_0} \quad (5.41)$$

como ya habíamos señalado.

El resultado de (5.39) puede ser convenientemente discutido analizando los tres casos especiales (Ver Figura 5.1):

CASO A: $q_0 > 1/2$ ($k=1$, $\rho_c > \rho_0$)

Es conveniente en este caso definir un ángulo θ mediante:

$$1 - \cos \theta = \left(\frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) \frac{R(t)}{R_0} \quad (5.42)$$

Luego la ec. (5.49) da:

$$H_0 t = q_0 (2q_0 - 1)^{3/2} [\theta - \sin \theta] \quad (5.43)$$

Esta es la ecuación de una cicloide: $R(t)$ crece desde 0 en $\theta=0$, $t=0$; alcanza un máximo en

$$\theta_m = \pi \quad t_m = \frac{\pi q_0}{H_0 (2q_0 - 1)^{3/2}} \quad R(t_m) = \frac{2q_0 R_0}{2q_0 - 1} \quad (5.44)$$

y luego retorna al valor 0 en $\theta = 2\pi$, $t = 2t_m$.

Podemos determinar el instante presente haciendo $R(t)$ igual a R_0 en la ec. (5.42). El valor actual del ángulo θ está dado por:

$$\cos \theta = \frac{1}{q_0} - 1 \quad (5.45)$$

de modo que la edad del Universo es:

$$t_0 = H_0^{-1} q_0 (2q_0 - 1)^{-3/2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right) - \frac{1}{q_0} (2q_0 - 1)^{1/2} \right] \quad (5.46)$$

Por ejemplo, si consideramos los valores $q_0 \approx 1$ y $H_0^{-1} \approx 20 \times 10^9$ años, entonces la ec. (5.45) da $\theta_0 \approx \pi/2$ y la ec. (5.46) da que la edad del Universo es

$$t_0 \approx \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) H_0^{-1} \approx 7.5 \times 10^9 \text{ años}$$

A partir de la ec. (5.44) vemos que el Universo alcanzará su radio máximo $R(t_m) \approx 2R_0$ en un tiempo

$$t_m \approx \pi H_0^{-1} \approx 40 \times 10^9 \text{ años}$$

El ciclo de vida completo del Universo tiene un tiempo $t = 2t_m$ de alrededor de 80×10^9 años.

CASO B: $q_0 = 1/2$ ($k=0$, $\rho_0 = \rho_c$)

Este caso corresponde al modelo de Einstein-de Sitter.

Para este valor de q_0 la ec. (5.39) resulta:

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3} \quad (5.47)$$

Es decir, $R(t) \propto t^{2/3}$ de modo que $R(t)$ crece sin límite. La edad del Universo está dada a partir de $H_0^{-1} \approx 20 \times 10^9$ años como

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \approx 13 \times 10^9 \text{ años} \quad (5.48)$$

CASO C: $0 < q_0 < 1/2$ ($k = -1$, $\rho_0 < \rho_c$)

Podemos aplicar los resultados del caso A, es decir las ecuaciones (5.42) y (5.43), sólo que ahora el ángulo θ es imaginario, $\theta = i\psi$ de manera que:

$$H_0 t = q_0 (1 - 2q_0)^{-3/2} [\sinh \psi - \psi] \quad (5.49)$$

donde se cumple que

$$\cosh \psi - 1 = \frac{1 - 2q_0}{q_0} \frac{R(t)}{R_0} \quad (5.50)$$

Al igual que en el caso B, el factor de escala $R(t)$ crece sin límite.

Para $t \rightarrow \infty$ tenemos

$$\frac{R(t)}{R_0} \rightarrow \frac{1}{2} q_0 (1 - 2q_0)^{-1} e^\psi \rightarrow (1 - 2q_0)^{1/2} H_0 t \quad (5.51)$$

El instante presente lo definimos haciendo $R(t) = R_0$ en la ec. (5.50):

$$\cosh \psi_0 = \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right) \quad (5.52)$$

y la edad del Universo viene dada por:

$$t_0 = H_0^{-1} \left[(1 - 2q_0)^{-1} - q_0 (1 - 2q_0)^{-3/2} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right) \right] \quad (5.53)$$

Por ejemplo, si tomamos la densidad de masa del Universo como la contenida dentro de las galaxias, la edad del Universo es prácticamente igual al tiempo de Hubble

$$t_0 \approx 0.96 H_0^{-1} \approx 20 \times 10^9 \text{ años} \quad (5.54)$$

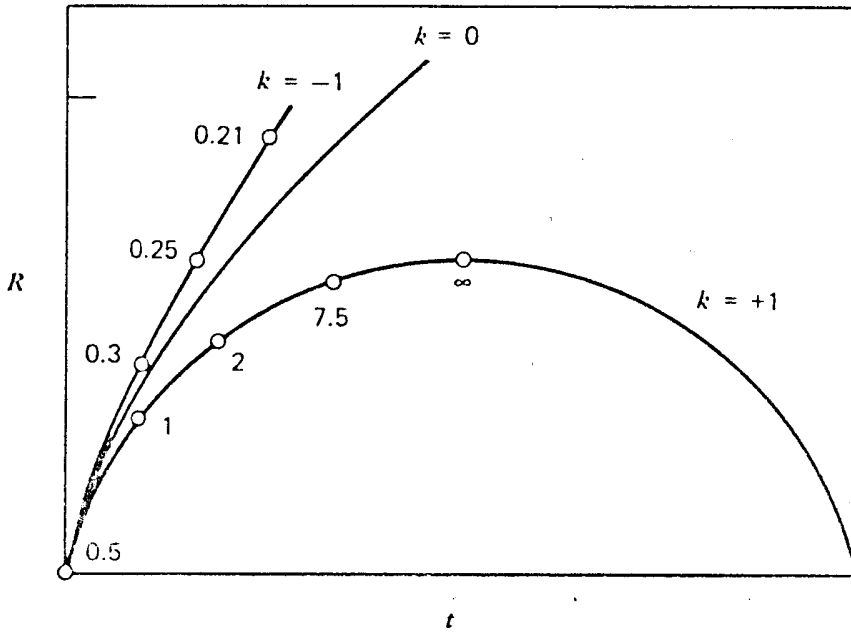


Figura 5.1: Soluciones de las ecuaciones de Einstein para un Universo de Robertson-Walker con curvatura $k = +1$, $k = 0$ y $k = -1$. Los números sobre las curvas con $k = +1$ representan los valores del parámetro de desaceleración en las distintas épocas.

SECCION 5.7: HISTORIA TERMICA DEL UNIVERSO

Haremos en esta Sección un breve resumen de la historia térmica del Universo para luego encontrar las soluciones de las ecuaciones dinámicas (junto con una ecuación de estado), en las diferentes eras que dominan el Universo.

La densidad de energía del presente fondo de radiación de microonda de 2.7 K es:

$$\rho_{\gamma_0} = a T_{\gamma_0}^4 \approx 4.40 \times 10^{-34} \text{ g/cm}^3$$

Esta es considerablemente menor que la densidad de masa en reposo nucleónica, de modo que en el presente estamos en la era dominada por materia, la que ha ocupado la mayor parte del Universo.

Prestemos atención ahora al período anterior, cuando la radiación y las partículas relativistas eran más importantes que la materia ordinaria. Para ello, daremos un esquema de lo que es la historia temprana del Universo:

(A) En tiempos muy tempranos cuando la temperatura T estaba por encima de 10^{12} °K, el Universo contenía una gran variedad de partículas en equilibrio térmico, incluyendo fotones, leptones, mesones y nucleones, y sus antipartículas. Las interacciones fuertes entre mesones y nucleones hacen que esta era sea muy difícil de estudiar.

(B) Al tiempo en que la temperatura $T \approx 10^{12}$ °K el Universo contenía fotones, muones y antimuones, electrones, positrones, neutrinos y antineutrinos. Además había una muy pequeña contaminación nucleónica, teniendo igual número de neutrones que de protones. Todas estas partículas estaban en equilibrio térmico.

(C) Cuando la temperatura cae por debajo de 10^{12} °K, los μ^+ y μ^- comenzaron a aniquilarse. Después de que casi todos los muones desaparecieron en $T \approx 1.3 \times 10^{11}$ °K, los neutrinos y antineutrinos se desacoplaron de las otras partículas dejando e^\pm , γ y unos

pocos nucleones en equilibrio térmico con $T \propto R^{-1}$.

(D) Cuando la temperatura cayó por debajo de 10^{11} °K ($t \approx 0.01$ seg), la diferencia de masa entre neutrones y protones comenzó a hacer que la pequeña contaminación nucleónica tuviera más protones que neutrones.

(E) Cuando la temperatura cae por debajo de 5×10^9 °K ($t \approx 4$ seg), los pares electrón-positrón comienzan a aniquilarse, dejando como constituyentes dominantes del Universo solamente a los fotones, neutrinos y antineutrinos en, esencialmente, expansión libre, siendo la temperatura fotónica un 40.1% mayor que la temperatura de los neutrinos. Al mismo tiempo, el enfriamiento de los neutrinos y antineutrinos, y la desaparición de los electrones y los positrones, congelan el "cociente" neutrón-protón en aproximadamente 1:5.

(F) A una temperatura de alrededor de 10^9 °K ($t \approx 180$ seg) los neutrones rápidamente comienzan a fusionarse con los protones en núcleos pesados, dejando un gas ionizado de hidrógeno y He^4 .

(G) Continúa la expansión libre de fotones, neutrinos y antineutrinos con temperatura $T_H = 1.041 T_\nu \propto R^{-1}$. La temperatura del gas ionizado permanece fija a la temperatura fotónica hasta que el hidrógeno se recombina a $T \approx 4000$ °K.

(H) A alguna temperatura entre 10^3 °K y 10^5 °K la densidad de energía de los fotones, neutrinos y antineutrinos cayó por debajo de la densidad de masa en reposo del H y del He. Fue en ese momento que comenzó la era dominada por materia.

Estudiaremos ahora en más detalle cómo depende la densidad del Universo con la temperatura en las diferentes eras.

A cualquier tiempo dado podemos esperar encontrar algunas partículas en equilibrio térmico unas con otras, otras

partículas en expansión libre, y posiblemente algunas partículas que pasen de una condición a otra.

En la aproximación de gas ideal, el número de densidad de partículas de tipo i , $n_i(q) dq$, con momentos entre q y $q+dq$, en el equilibrio térmico, está dado por la distribución de Fermi o de Dirac:

$$n_i(q) = 4\pi h^{-3} g_i q^2 dq \left[e^{\frac{E_i(q) - \mu_i}{kT}} \pm 1 \right]^{-1} \quad (5.55)$$

siendo $E_i(q) \equiv (m_i^2 + q^2)^{1/2}$ la energía de la partícula, μ_i el potencial químico. El signo $+$ corresponde a los fermiones, el $-$ a los bosones y g_i es el número de estados de spin ($g=1$ para neutrinos y antineutrinos y $g=2$ para fotones, electrones, muones, nucleones, y sus antipartículas).

Usaremos la aproximación $\mu_i=0$ que nos permite trabajar la conservación de la energía en una manera conveniente.

La densidad total de energía y la presión de todas las partículas en el equilibrio térmico son funciones únicamente de la temperatura:

$$\rho_{eq}(T) \equiv \sum_{i(2q)} \int E_i(q) n_i(q;T) dq \quad (5.56)$$

$$P_{eq}(T) \equiv \sum_{i(2q)} \int \left(\frac{q^2}{2E_i(q)} \right) n_i(q;T) dq \quad (5.57)$$

De acuerdo a la segunda ley de la Termodinámica, la entropía de las partículas en equilibrio a una temperatura T dentro de un volumen V es una función $S(V,T)$ tal que:

$$dS(V,T) = \frac{1}{T} \left\{ d(\rho_{eq}(T) V) + P_{eq}(T) dV \right\} \quad (5.58)$$

de modo que

$$\frac{\partial S(V,T)}{\partial V} = \frac{1}{T} \left\{ \rho_{eq}(T) + P_{eq}(T) \right\} \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial S(V,T)}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho_{eq}(T)}{dT} \quad (5.60)$$

Por lo tanto la densidad de energía y la presión deben

satisfacer la condición de integrabilidad:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \{ p_{eq}(T) + p_{rs}(T) \} \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{V}{T} \frac{dp_{eq}}{dT} \right]$$

que escrita en otra forma queda:

$$\frac{d p_{eq}(T)}{dT} = \frac{1}{T} \{ p_{eq}(T) + p_{rs}(T) \} \quad (5.61)$$

Siempre que las partículas en equilibrio térmico interactúen solamente unas con otras, su energía total y su presión deben satisfacer la ecuación de conservación de la energía separadamente:

$$R^3 \frac{d p_{eq}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[R^3 \{ p_{eq} + p_{rs} \} \right] \quad (5.62)$$

Si usamos la ec. (5.61) en (5.62) obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{R^3}{T} \{ p_{eq}(T) + p_{rs}(T) \} \right] = 0 \quad (5.63)$$

Esta ley de conservación puede interpretarse en términos de la entropía. Usando la ec. (5.61) en (5.58) encontramos que:

$$dS(V,T) = \frac{1}{T} d \left[\{ p_{eq}(T) + p_{rs}(T) \} V \right] - \frac{V}{T^2} \{ p_{eq}(T) + p_{rs}(T) \} dT$$

de manera que, a menos de una constante aditiva, la entropía es:

$$S(V,T) = \frac{V}{T} \{ p_{eq}(T) + p_{rs}(T) \} \quad (5.64)$$

Vemos entonces que la ec. (5.63) simplemente muestra que la entropía en un volumen $R^3(t)$ es constante:

$$S \equiv S(R^3, T) = \frac{R^3}{T} \{ p_{eq}(T) + p_{rs}(T) \} \quad (5.65)$$

A partir del esquema de la historia del Universo que hicimos al comienzo de esta Sección, podemos concluir que durante al menos parte de su historia temprana, cuando la temperatura es grande comparada con todas las masas relevantes, la materia puede

ser considerada como un gas ideal relativista de partículas no masivas en equilibrio térmico. En este caso tenemos que $E = \rho$, y cuando reemplazamos esta expresión para la energía en las ecuaciones (5.56) y (5.57) encontramos que:

$$P_{\text{eq}}(T) = \frac{1}{3} \rho_{\text{eq}}(T) \quad (5.66)$$

valor que ya habíamos utilizado para la presión en la era dominada por radiación.

La densidad de energía resulta:

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4 = a(T) T^4 \quad (5.67)$$

siendo $N(T) = N_b(T) + \frac{7}{8} N_f(T)$, donde $N_b(T)$ y $N_f(T)$ son, respectivamente, los números de estados de helicidad distintas para bosones y fermiones (cuyas masas son pequeñas comparadas con T). En la teoría Gran Unificada más simple, $SU(5)$, $N(T)=160.75$.

Siempre que la expansión del Universo sea adiabática, la entropía se conserva y podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} S = 0 \quad (5.68)$$

siendo

$$S = \frac{2\pi^2}{45} N(T) T^4 \quad (5.69)$$

Esta expresión para la entropía la obtenemos al reemplazar las ecs. (5.66) y (5.67) que dan la presión y la densidad en la ec. (5.64).

Si la temperatura no está cerca de ningún umbral de masa, de modo que $N(T)=\text{cte.}$, obtenemos a partir de (5.68) que:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{R^3}{T} \left\{ \rho_{\text{eq}}(T) + P_{\text{eq}}(T) \right\} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{R^3}{T} \left\{ a T^4 + \frac{1}{3} a T^4 \right\} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ R^3 T^3 \right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad R \propto \frac{1}{T} \quad (5.70)$$

Por otra parte conocemos la ecuación de estado para un

gas ideal, de modo que podemos resolver las ecuaciones dinámicas (5.21) y (5.22) para la temperatura como función del tiempo. El resultado es:

$$\frac{dT}{2T^3} = - \left(\frac{45}{16\pi^3 N(T) G} \right)^{1/2} \frac{1}{T^2} \approx \frac{10^{-6}}{T^2 [\text{GeV}]} \text{seg} \quad (5.71)$$

Por lo tanto, para la era dominada por radiación podemos obtener (usando las ecs. dinámicas y la ec. de estado) los siguientes resultados:

$$\bar{r}(t) \propto t^{1/2} \quad (5.72)$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2} \quad (5.73)$$

$$T = \left(\frac{45}{16\pi^3 N G} \right)^{1/4} \frac{1}{t^{1/2}} \quad (5.74)$$

$$\rho \propto R^{-4} \quad (5.75)$$

Cuando el Universo comienza a ser dominado por materia (no relativista), la presión prácticamente se anula, $p \sim 0$, y en tal caso las ecuaciones dinámicas nos dan que:

$$\frac{d}{dt} (\rho R^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto R^{-3} \quad (5.76)$$

$$R(t) \propto t^{2/3} \quad (5.77)$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2} \quad (5.78)$$

La transición entre los dos regímenes ocurre en un tiempo en que la densidad de materia y de radiación se igualan. Llamamos $t_{1/2}$ a tal tiempo.

Recordemos los dos parámetros importantes que caracterizan el presente Universo: la constante de Hubble $H = \dot{R}/R$ y la densidad ρ . Usaremos ahora parámetros adimensionales h y Ω para referirnos a ellos:

$$h = \frac{H}{100 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \quad (5.79)$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = 2q_0 \quad (5.80)$$

siendo ρ_c la densidad crítica definida en (5.29).

Los valores actuales de h y Ω se conocen sólo aproximadamente

$$h = 0.55 \pm 0.07 \quad (5.81)$$

$$0.1 \leq \Omega \leq 1 \quad (5.82)$$

Para $\Omega \approx 1$ el parámetro de corrimiento al rojo va como:

$$(1+Z) \propto t^{-\frac{2}{3}} \quad (5.83)$$

Para $t > t_{eq}$ el cociente entre la densidad de radiación y la densidad de materia en el Universo, ρ_r/ρ , decrece como $(1+Z)$ de manera que el tiempo en el que la densidad de radiación iguala a la densidad de materia, t_{eq} , corresponde a un corrimiento hacia el rojo:

$$1+Z_{eq} = 2 \times 10^4 \Omega h^2 \quad (5.84)$$

La densidad del Universo en t_{eq} es $\rho_{eq} = 3.2 \times 10^{-16} (\Omega h^2)^4 \text{ g cm}^3$. Luego, el tiempo t_{eq} puede ser encontrado, aproximadamente, a partir de la relación $\rho_{eq} \approx \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t_{eq}^2}$. Esto da:

$$t_{eq} \sim 4 \times 10^{10} (\Omega h^2)^{-2} \text{ seg} \quad (5.85)$$

Como hemos visto, un evento importante en la historia del Universo es el desacople entre la materia y la radiación, cuando los protones y los electrones se combinan para formar átomos de hidrógeno. Este hecho ocurre en

$$Z_{desacople} = 1300 \quad t_{desacople} \approx 5 \times 10^{11} (\Omega h^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ seg} \quad (5.86)$$

Concluimos así el resumen sobre el modelo cosmológico standar.

Cabe acotar que un gran número de autores ha notado que las condiciones iniciales asumidas en el modelo cosmológico son poco naturales.

La homogeneidad requerida podría no establecerse por procesos causales; la aproximada "chatura" del actual Universo requiere un severo ajuste del balance entre energías cinética y potencial en tiempos tempranos; finalmente, las velocidades de interacción a energías mayores que 10^{17} GeV no son suficientes para establecer el equilibrio térmico.

Una solución atractiva a la mayoría de estos problemas está dada por el escenario de Universo inflacionario propuesto por Guth.⁽⁴⁶⁾

CAPITULO 6:

CUERDAS COSMICAS

SECCION 6.1: INTRODUCCION

Existe una estrecha conexión entre la Cosmología y la Física de Partículas. Uno de los vínculos que las conecta fue establecido por Kirzhnits⁽²⁶⁾ quien sugirió que las simetrías espontáneamente rotas pueden ser restauradas a temperaturas suficientemente altas. Las interacciones entre partículas elementales pueden en principio ser descritas por una Teoría Gran Unificada (GUT) con un grupo simple de transformaciones de gauge G , que provee una simetría válida para las altas energías. A medida que la energía se hace menor, el modelo pasa por una serie de roturas espontáneas de la simetría:

$$G \longrightarrow H \longrightarrow SU(3) \times [SU(2) \times U(1)] \longrightarrow SU(3) \times U(1)$$

color
Salam-Weinberg
electro

magnetismo

En el contexto cosmológico del Big Bang caliente esto implica una secuencia de transiciones de fase en el universo temprano, estando relacionadas las temperaturas críticas con las correspondientes escalas de las roturas de simetría.

Las transiciones de fase en el Universo temprano pueden dar lugar a defectos topológicamente estables: paredes de dominio de vacío, cuerdas y monopolos. (También pueden formarse "animales topológicos híbridos": paredes rodeadas por cuerdas y monopolos conectados por cuerdas).

La primera clasificación de los defectos topológicos y una discusión de su evolución fue dada por Kibble en 1976⁽⁴⁷⁾. Desde entonces se ha estudiado profusamente la evolución y las

consecuencias cosmológicas de los distintos defectos.

Las principales conclusiones pueden ser resumidas de la siguiente manera: las paredes de dominio y los monopolos topológicamente estables no son aceptables en los modelos cosmológicos habituales y deben ser, en principio, desechados^(48,49). Las estructuras híbridas también traen problemas: se rompen rápidamente en pedazos y decaen prácticamente sin dejar huellas.

Por otro lado, las cuerdas no sólo no causan problemas sino que conducen a consecuencias cosmológicas de interés. En particular, pueden generar fluctuaciones en la densidad de materia del Universo suficientes como para explicar la formación de galaxias, y pueden producir efectos observacionales únicos^(50,52).

Para cuerdas en la escala de Gran Unificación ($\sim 10^{16}$ GeV) algunos de los efectos que producen pronto estarán dentro de las capacidades experimentales actuales.

En este capítulo daremos una breve descripción de cómo las cuerdas originadas en el Universo temprano pueden producir fluctuaciones como para explicar la formación de las galaxias. Para ello, en la Sección 6.2 estudiaremos las transiciones de fase en la evolución del Universo y la consiguiente formación de estructuras, para luego discutir la relevancia de los vórtices cargados, estudiados en los capítulos anteriores, en el contexto de la formación de galaxias.

En la Sección 6.3 hacemos un análisis más detallado de las cuerdas que pueden generarse durante las transiciones de fase, estableciendo una relación entre la masa de la cuerda y la fluctuación, en la densidad de materia, que originan.

En la Sección 6.4 estudiamos de manera más detallada los efectos cosmológicos de las cuerdas y su conexión con la formación de galaxias.

Finalmente, en la Sección 6.5 presentamos nuestros resultados originales sobre el análisis de las fluctuaciones en la densidad de materia producidas por los vórtices no Abelianos cargados.

SECCION 6.2: TRANSICIONES DE FASE EN EL UNIVERSO

a) RESTAURACION DE LA SIMETRIA A TEMPERATURA FINITA

Consideraremos una teoría de gauge descrita por la densidad Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_{\mu} \phi \cdot D^{\mu} \phi - U(\phi) \\ & + \bar{\psi} i \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi - \bar{\psi} \Gamma \psi \cdot \phi \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde ϕ es un campo escalar de Higgs que pertenece a alguna representación del grupo de gauge G , con generadores reales antisimétricos T^a normalizados de modo que

$$\text{tr} T^a T^b = -\frac{1}{2} \delta^{ab} \tag{6.2}$$

La derivada covariante de ϕ es

$$D_{\mu} \phi = \partial_{\mu} \phi - e A_{\mu} \phi \qquad A_{\mu} = A_{\mu}^a T^a \tag{6.3}$$

y el campo de gauge

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu} + e [A_{\mu}, A_{\nu}] \tag{6.4}$$

$U(\phi)$ es un polinomio de grado 4 invariante bajo el grupo de transformaciones de G .

Como el campo espinorial no juega un rol importante en los problemas que discutiremos, de aquí en más lo ignoraremos.

Tomaremos como grupo de gauge G al grupo $SO(N)$ y al campo escalar perteneciente a la representación vectorial N -dimensional fundamental.

El potencial U es un polinomio de la forma:

$$U = \frac{1}{8} g^2 (\phi \cdot \phi - \eta^2)^2 \quad (6.5)$$

con η una constante que define la escala de ϕ y g^2 la constante de acoplamiento del potencial.

A temperatura finita el estado de equilibrio de una teoría de campos Lagrangiana no queda determinado por el potencial $U(\phi)$ sino por el potencial efectivo $V(\phi)$, que es la densidad de energía libre mínima en estados con un dado valor de expectación de ϕ . Este potencial efectivo se calcula a partir de la suma de todos los diagramas de Feynman con las líneas externas de ϕ con momento nulo. Se deben usar las reglas de Feynman a temperatura finita con una variable temporal imaginaria periódica de período $1/T$. En el Apéndice B discutimos cómo se trabaja en una teoría de campos a temperatura finita.

Para la teoría de gauge descrita por la densidad Lagrangiana (6.1) tenemos que para temperaturas altas los términos principales de corrección que surgen de las contribuciones a un loop a $V(\phi)$ conducen a (Ver Apéndice B):

$$V(\phi) = U(\phi) - \frac{\pi^2}{90} N(T) T^4 + \frac{1}{24} M_T^2(\phi) T^2 + O(T) \quad (6.6)$$

$N(T)$ es el número efectivo de estados de helicidad de partículas livianas (aquellas con masas $\ll T$) y $M_T^2(\phi)$, que depende de ϕ , es la suma de los cuadrados de las masas de estos estados de helicidad (contando los fermiones con un factor $1/2$).

Por ejemplo en el modelo simple que vimos antes, con $SO(N)$ como grupo de gauge, con $N(T) = N^2$, tenemos que:

$$M_T^2(\phi) = \frac{1}{2} N g^2 (\phi^2 - \eta^2) + g^2 \phi^2 + 3(N-1) e^2 \phi^2 \quad (6.7)$$

obteniéndose que

$$V(\phi) = \frac{1}{2} g^2 (\phi^2)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g^2 \eta^2 + A T^2 \right) \phi^2 + \text{tér. indep. de } \phi \quad (6.8)$$

donde

$$A = 3(N-1)e^2 + \frac{1}{2}(N+2)g^2 \quad (6.9)$$

Claramente existe una temperatura de transición dada por

$$T_c^2 = \frac{g^2 \eta^2}{2A} \sim \eta^2 \quad (6.10)$$

Para $T > T_c$ el coeficiente de ϕ^2 en V es positivo, de modo que $\langle \phi \rangle = 0$. El sistema está entonces en una fase simétrica; la simetría es restaurada.

Quando T cae por debajo de T_c el coeficiente de ϕ^2 se hace negativo y ϕ adquiere un valor de expectación dado por

$$\langle \phi \rangle^2 = \eta^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (6.11)$$

El sistema se halla ahora en una fase ordenada, de modo que T_c es la temperatura crítica para la transición de fase desde una fase simétrica a otra con la simetría rota.

El valor de expectación de vacío de ϕ , $\langle \phi \rangle$, juega el rol de parámetro de orden.

En un contexto cosmológico, a medida que el Universo se enfría pasando a través de T_c , el campo de Higgs ϕ , que tenía un valor de expectación $\langle \phi \rangle = 0$, tiende a adquirir un valor de expectación $\langle \phi \rangle \neq 0$ correspondiente a algún punto en la variedad $M = G/H$ de vacíos equivalentes. Sin embargo ya que todos los puntos en M son equivalentes, la elección dependerá de fluctuaciones aleatorias y será diferente en diferentes regiones del espacio. Se puede introducir así una longitud de correlación, ξ , tal que las direcciones de $\langle \phi \rangle$ no estén correlacionadas en puntos separados por una distancia mayor que ξ .

En el ejemplo que estamos tratando la longitud de correlación está dada por:

$$\xi = \xi_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right)^{-1/2} \quad (6.12)$$

siendo $\xi_0 = \frac{1}{g\eta}$.

Por supuesto, para $T = T_c$, ξ es infinita.

b) HISTORIA DE LAS TRANSICIONES DE FASE EN EL UNIVERSO.

La unificación de las interacciones débiles y electromagnéticas en una teoría de gauge electrodébil basada en el grupo de gauge $SU(2) \times U(1)$, es actualmente aceptada como un hecho. En cuanto a las interacciones fuertes, también existe una teoría de gauge, la **Cromodinámica Cuántica (QCD)**, basada en el grupo de color $SU(3)$, que las describe razonablemente.

Es entonces natural plantearse continuar con esta unificación y combinar las interacciones electrodébiles con las fuertes en una teoría Gran Unificada basada en un grupo simple o semisimple que contenga a $SU(3) \times [SU(2) \times U(1)]$ como subgrupo.

Las teorías de gauge no Abelianas tienen la propiedad especial de **libertad asintótica** (Dentro de ciertas condiciones, sus constantes de acoplamiento dependientes de la energía se hacen menores en las energías más altas, de un modo predecible, gobernado por el grupo de renormalización).

El acoplamiento de $SU(3)$ decrece más rápidamente que el de $SU(2)$, y éste aún más rápido que el de $U(1)$. Los tres acoplamientos se hacen iguales en una masa llamada de Gran Unificación que se estima alrededor de 10^{15} GeV. Para los órdenes de magnitud standar de la Física de Partículas éste es un valor muy grande, sólo cuatro órdenes por debajo de la masa de Planck

$$m_p = G^{1/2} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (6.13)$$

a la cual la gravedad deviene relevante. El valor unificado del acoplamiento en la masa de unificación es aproximadamente

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx 0.025 \quad (6.14)$$

Una teoría unificada tal debe ser espontáneamente rota al menos tres veces, de modo que el Universo pasa al menos por tres transiciones de fase durante el curso de su historia temprana.

Supondremos que el mecanismo de rotura espontánea de la simetría es debido a que el campo escalar de Higgs adquiere un

valor de expectación de vacío no nulo.

La primera de las transiciones de fase, como muestra el Cuadro 6.1, es la transición de Gran Unificación que ocurre aproximadamente a la temperatura correspondiente a la escala de energía de Gran Unificación $\sim 10^{15}$ GeV, cuando el Universo sólo tiene 10^{-37} segundos y un corrimiento al rojo de 10^{28} (Es decir, que desde entonces el radio de un volumen comóvil se ha incrementado en un factor de 10^{28}). Esta transición de fase, se cree, es de primer orden. Antes que ocurriera, el Universo estaba en un estado con la simetría completa de un grupo Gran Unificado, como por ejemplo SU(5).

Después de la transición la simetría está rota. Si se rompe directamente a SU(3)x[SU(2)xU(1)], la siguiente transición no ocurre hasta que la temperatura haya caído a unos 100GeV (ver Cuadro 6.1), después de haber transcurrido cerca de 10^{-11} segundos ($Z \sim 10^{15}$). Esta es la transición electrodébil, en la cual la parte SU(2)xU(1) (Salam-Weinberg) de la simetría se rompe en la U(1) del electromagnetismo. Se piensa que esta transición es de segundo orden.

Si este esquema es correcto, existirá un desierto físicamente no interesante entre las energías 10^{15} y 10^2 GeV.

Existe una última transición de fase conectada con el confinamiento de los quarks. Es la transición desde una sopa de quarks y gluones a un gas de hadrones identificables como tales. Presumiblemente esta transición ocurre cerca de $t=1$ microsegundo, cuando la temperatura era de unos pocos cientos de MeVs. Esta transformación está asociada con el grupo de color SU(3), pero no es una transformación que rompa la simetría.

Cuadro 6.1

1-	$E_{GU} \sim 10^{15} \text{ GeV}$	Se piensa que la transición es de primer orden.
	$t_{GU} \sim 10^{-37} \text{ seg}$	
2-	$E_{SW} \sim 100 \text{ GeV}$	Se rompe la simetría de Salam-Weinberg. Se piensa que la transición es de segundo orden.
	$t_{SW} \sim 10^{-11} \text{ seg}$	

A partir de este punto la historia del Universo es algo menos especulativa y más convencional. A medida que la temperatura desciende, las diferentes especies de partículas masivas se aniquilan y desaparecen.

c) ESTRUCTURAS FORMADAS EN LAS TRANSICIONES DE FASE.

Veamos ahora en más detalle qué ocurre cuando el Universo sufre una transición de fase, utilizando los resultados obtenidos en 6.2a.

Por encima de la transición, $T > T_c$, el parámetro de orden $\langle \phi \rangle$ se anula, como puede verse a partir de la ec.(6.11). Cuando T cae por debajo de T_c , $\langle \phi \rangle$ adquiere un valor no nulo y yace sobre la superficie de mínimos M .

La situación aquí es muy similar a al que ocurre en un ferromagneto cuando es enfriado a través de su punto de Curie. El ferromagneto adquiere una magnetización espontánea, cuya dirección

no es predecible y en la práctica queda determinada por campos externos remanentes o bien por fluctuaciones iniciales aleatorias.

También en el Universo temprano la elección de un punto y no de otro sobre la superficie de mínimos M es aleatoria. Más aún, no hay razón por la cual $\langle \phi \rangle$ deba hacer la misma elección en todo punto. Sería difícil de explicar cómo podría existir alguna correlación entre direcciones en regiones muy separadas, cuando están más allá del horizonte causal a una distancia t .

En estas circunstancias pueden quedar atrapados defectos, regiones en las cuales $\langle \phi \rangle$ no puede unirse continuamente desde un valor a otro, pues se lo impiden obstrucciones topológicas.

Las diferentes posibilidades pueden ser ilustradas considerando el modelo $SO(N)$, descrito anteriormente, para distintos valores de N .

Consideremos primero el caso $N=1$, que no es una teoría de gauge sino simplemente un modelo de un campo escalar ϕ con una interacción ϕ^4 y un término de masa negativo. A bajas temperaturas hay dos mínimos en los puntos $\phi = \pm \eta$. Por lo tanto esperamos que se forme una estructura de dominio, tal que algunas partes del Universo elijan $\langle \phi \rangle = \eta$, y otras $\langle \phi \rangle = -\eta$. Donde ambas regiones se encuentren existirá lo que se llama una pared de dominio. A medida que atravesamos la pared desde un dominio hacia el otro, $\langle \phi \rangle$ variará desde el valor η a $-\eta$, pasando por el valor $\langle \phi \rangle = 0$. Entonces la pared representa una concentración local de energía. Ningún cambio suave podrá eliminarla, excepto si se contrae uno de los dominios en el punto nulo.

Tomemos ahora el caso $N=2$. Aquí M es un círculo y tendremos singularidades tipo cuerdas, como en superconductores o superfluidos.

Cuando damos una vuelta alrededor de la cuerda, el ángulo que especifica el punto en M cambia en 2π (o bien en un múltiplo de 2π). Nuevamente, $\langle \phi \rangle$ debe pasar a través del valor cero en algún lugar dentro de tal loop, en el corazón de la cuerda.

Finalmente, si $N=3$ entonces M es una esfera y tendremos singularidades tipo monopolo puntual. Aquí $\langle \phi \rangle$ tiene una

configuración tipo erizo, apuntando radialmente hacia afuera, rodeando al monopolo. En el centro debe tomar el valor cero.

Volvamos ahora a considerar el caso general.

Inmediatamente por debajo de la temperatura crítica T_c , el sistema estará sujeto a grandes fluctuaciones, suficientemente grandes como para hacerlo retornar al valor $\langle \phi \rangle = 0$. Veamos hasta cuándo ésto será posible.

Como hemos dicho, el potencial efectivo es una medida de la densidad de energía libre en estados con un dado valor de $\langle \phi \rangle$.

Para $T < T_c$ la diferencia en la densidad de energía libre entre estados con $\langle \phi \rangle = 0$ (fase normal) y $\langle \phi \rangle$ igual a su valor en el equilibrio (fase ordenada) es:

$$\Delta f = V(\langle \phi \rangle = 0) - V(\langle \phi \rangle = \langle \phi_0 \rangle \neq 0) \quad (6.15)$$

$$\Delta f = \frac{1}{8} g^2 (\langle \phi_0 \rangle^2)^2 = \frac{1}{8} g^2 \eta^4 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)^2 \quad (6.16)$$

donde hemos utilizado el potencial efectivo calculado en el Apéndice B:

$$V(\phi) = \frac{1}{8} g^2 (\phi^2 - \eta^2)^2 + \left[\frac{3}{2} (N-1) e^2 + \frac{1}{4} (N+2) g^2 \right] T^2 \phi^2 + \text{term indep. de } \phi$$

y

$$\langle \phi_0 \rangle^2 = \eta^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)$$

siendo

$$T_c^2 = \eta^2 \left[6(N-1) \frac{e^2}{g^2} + (N+2) \right]^{-1}$$

A medida que T cae por debajo de T_c , Δf crece rápidamente hacia su valor a temperatura cero:

$$\Delta f_0 = \frac{1}{8} g^2 \eta^4 \quad (6.17)$$

La longitud de correlación } que determina la escala de fluctuaciones en ϕ (la inversa de la masa del mesón escalar)

está dada aproximadamente por:

$$\xi^{-1} = m_s = g |\langle \phi \rangle| \quad (6.18)$$

Como en un superconductor, hay una segunda longitud de correlación, la profundidad de penetración λ , relacionada con el campo vectorial de gauge y dada por:

$$\lambda^{-1} = m_v = e |\langle \phi \rangle| \quad (6.19)$$

Esta cantidad es importante en la discusión de las oscilaciones "angulares", es decir las oscilaciones en la orientación de ϕ . Por otra parte, las oscilaciones "radiales", en la magnitud de ϕ , están controladas por ξ .

Si $T \ll T_c$ todavía son probables fluctuaciones que regresen el sistema al valor $\langle \phi \rangle = 0$. La energía libre total asociada a tal fluctuación con escala ξ es, ignorando factores de orden 1,

$$\Delta F = v \Delta f = (2\xi)^3 \Delta f = \frac{8}{g^3 \langle \phi \rangle^3} \frac{1}{8} g^2 (\langle \phi \rangle^2)^2$$

∴

$$\Delta F = \frac{|\langle \phi \rangle|}{g} = \frac{\eta}{g} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)^{1/2} \quad (6.20)$$

siendo $(2\xi)^3$ el volumen de la fluctuación.

Esta fluctuación tendrá alta probabilidad de ocurrir siempre que la energía libre requerida sea sustancialmente menor que la energía térmica T (Usamos unidades en las cuales tanto la constante de Boltzman como \hbar y c son iguales a uno).

La temperatura a la cual la energía térmica iguala a la energía libre se conoce como **temperatura de Ginzburg**,

$$\Delta F|_{T=T_G} = \Delta E_{\text{Térmica}}|_{T=T_G} \quad (6.21)$$

$$\frac{1}{T_G^2} = \frac{g^2}{\eta^2} + \frac{1}{T_c^2} \quad (6.22)$$

La escala de la estructura inicial formada por variaciones espaciales en $\langle \phi \rangle$ es entonces la longitud de correlación ξ_G a la temperatura de Ginzburg T_G :

$$\xi_G^{-1} = g |\langle \phi \rangle| \approx g^2 T_G \quad (6.23)$$

Una vez que T ha caído por debajo de T_G , las fluctuaciones que retornan al valor $\phi = 0$ son improbables, excepto sobre una escala de longitud demasiado corta como para ser relevante. De modo que se puede establecer una buena distinción entre fases normales y ordenadas, así como entre las fases ordenadas correspondientes a puntos separados en M , es decir, a orientaciones bien diferentes de $\langle \phi \rangle$, como puede verse en la Figura 6.1.

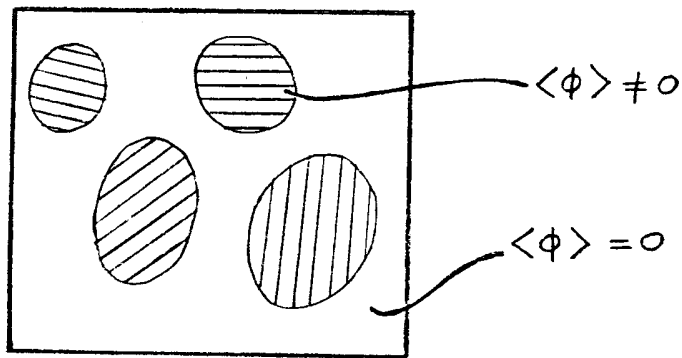


Figura 6.1

A medida que el sistema se enfría la mayor parte de esta estructura desaparece. Por razones energéticas $\langle \phi \rangle$ tiende hacia la uniformidad espacial, a menos que algún tipo de singularidad quede atrapada. Entonces, la escala sobre la cual $\langle \phi \rangle$ varía crecerá, mientras que la longitud de correlación ξ cae hasta su valor a temperatura cero $\xi_0 = 1/m_S$.

Los posibles tipos de singularidades atrapadas dependerán de la topología de la variedad M de vacíos degenerados.

Si M contiene dos o más pedazos desconectados,

correspondientes a la rotura espontánea de una simetría discreta, tendremos paredes de dominio. (Corresponde al caso $N=1$ en el modelo ya considerado).

Si M contiene lazos que no pueden contraerse, entonces pueden aparecer singularidades lineales o cuerdas. Un ejemplo familiar es el caso $N=2$, el modelo de Ginzburg-Landau.

Finalmente si M contiene superficies bidimensionales cerradas que no pueden contraerse en un punto (dentro de M), entonces pueden existir monopolos.

SECCION 6.3: CUERDAS

a) CUERDAS GLOBALES Y LOCALES

Por simplicidad consideraremos una teoría con simetría $U(1)$. Como ya hemos visto, corresponde a la teoría más simple que da lugar a cuerdas. Sea entonces un campo ϕ con una autointeracción de la forma (Ver ec. (6.5))

$$U(\phi) = \frac{1}{8} g^2 (\phi \cdot \phi - \eta^2)^2$$

Después de la transición de fase, ϕ adquiere un valor de expectación de vacío $\langle \phi \rangle = \eta e^{i\theta}$ con θ variando sobre la escala de la longitud de correlación λ . Como $\langle \phi \rangle$ es univaluado, el cambio total de θ alrededor de cualquier lazo cerrado en el espacio debe ser igual a $2\pi n$, siendo n un entero:

$$\Delta\theta = 2\pi n$$

Consideremos un lazo cerrado con $\Delta\theta = 2\pi$ e imaginemos que lo contraemos continuamente en un punto. Si no encontramos singularidades, el valor $n=1$ no puede cambiar discontinuamente a $n=0$ y por lo tanto debe existir al menos un punto donde la fase no esté definida, lo que significa que $\langle \phi \rangle = 0$. Esto muestra que al menos un tubo delgado de falso vacío debe quedar atrapado dentro de cualquier lazo que tenga $\Delta\theta \neq 0$. Es claro que tales tubos, llamados cuerdas, no pueden tener extremos; deben ser infinitos o cerrados (de otro modo sería posible contraer el lazo sin atravesar la cuerda). La situación es como la que presenta la Figura 6.2.

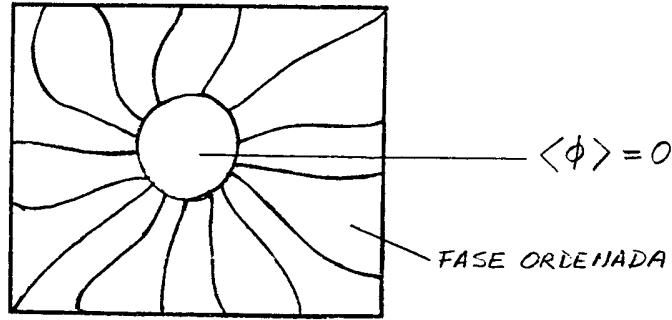


Figura 6.2

Si suponemos que el radio de la cuerda es aproximadamente la longitud de correlación a temperatura cero ξ_0 , podemos estimar la masa por unidad de longitud, que en esta situación relativista coincide con la tensión de la cuerda:

$$\mu \sim \xi_0^2 \Delta f_0 \sim \frac{1}{g^2 \eta^2} g^2 \eta^4 \sim \eta^2 \quad (6.24)$$

Cuando $g \ll e$ es más correcto tomar como radio la profundidad de penetración m_V^{-1} (Ver Sección 6.2c); sin embargo, el resultado $\mu \sim \eta^2$ sigue siendo válido.

A una temperatura $T \neq 0$ encontramos que:

$$\mu \sim \xi^2 \Delta f \sim \eta^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right) \quad (6.25)$$

Este número es muy grande. En unidades convencionales la masa de una cuerda producida en la transición de Gran Unificación, cuando $T_c \simeq 10^{15}$ GeV, es $\mu \sim 10$ toneladas/fermi.

Sin embargo, como las cuerdas son objetos unidimensionales en número pequeño no producen una contribución excesiva a la densidad de masa del Universo.

Consideremos por ejemplo una única cuerda extendida a través del Universo visible (de longitud $4t$ en el instante t). La masa de tal cuerda es:

$$M_s = 4t\mu \quad (6.26)$$

Comparemos esta masa con la masa total del Universo visible, suponiendo que estamos en la era dominada por radiación. La densidad es:

$$\rho = \frac{0.03}{9t^2} \quad (6.27)$$

de modo que su masa total es:

$$M = \left(\frac{4\pi}{3}\right) \rho (2t)^3 \sim \frac{t}{9} \quad (6.28)$$

Luego, a partir de (6.26) y (6.28) concluimos que el cociente entre la masa de la cuerda (mucho tiempo después de ocurrida la transición) y la masa del Universo es:

$$\frac{M_s}{M} \sim 4G\mu \sim 4\left(\frac{g}{m_p}\right)^2 \sim 10^{-6} \quad (6.29)$$

Este es un número suficientemente pequeño como para no causar dificultades con la isotropía observada del Universo. Es interesante notar que M_s/M es independiente de la época t .

Las cuerdas pueden formarse como resultado de roturas de simetrías globales o locales. Las condiciones topológicas para la formación de cuerdas son las mismas en ambos casos. Sin embargo, las propiedades de las cuerdas producidas por roturas de simetrías locales son algo diferentes de las de las producidas por roturas de simetrías globales.

Consideremos primero el caso de simetría $U(1)$ local. Sea:

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{g^2}{2} (\phi^\dagger \phi - \eta)^2 \quad (6.30)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y e es la constante de

acoplamiento de gauge. Como vimos, una solución de cuerda para este modelo fue discutida por primera vez por Nielsen y Olesen.

En coordenadas cilíndricas (r, θ, z) el campo de Higgs a grandes distancias a partir de la cuerda tiene la forma (ver ec. 2.37)

$$\phi \approx \eta e^{in\theta} \quad (6.31)$$

siendo n un número entero. Por otro lado el campo de gauge es (ver ec. 2.38):

$$A_\mu \approx \frac{i}{e} \partial_\mu \ln \phi \quad (6.32)$$

El flujo magnético asociado está dado por (ver ec. 2.40):

$$\Phi = \frac{2\pi n}{e} \quad (6.33)$$

Una cuerda elemental corresponde a $n = \pm 1$. Las cuerdas con $|n| > 2$ son probablemente inestables y decaen en las elementales.

Vimos que el radio del corazón de la cuerda está determinado por las longitudes de onda Compton de los mesones de Higgs y vectorial: $\delta_\phi \sim m_\phi^{-1}$ y $\delta_A \sim m_A^{-1}$, siendo $m_\phi = g\eta$ y $m_A = e\eta$ las correspondientes masas. Cuando $m_\phi < m_A$ la cuerda tiene un carozo interior de falso vacío con densidad lineal de masa $\mu_\phi \sim \rho_v \delta_\phi^2 \sim \eta^2$, y un tubo de campo magnético de radio $\delta_A > \delta_\phi$ con $\mu_A \sim B^2 \delta^2 \sim \eta^2$. Luego, la masa total de la cuerda por unidad de longitud es (como ya vimos):

$$\mu \sim \eta^2$$

Las cuerdas de interés cosmológico tienen medidas mucho mayores que su ancho. En este caso, la estructura interna de la cuerda no es importante y las cantidades físicas de interés, tales como el tensor energía-momento T_μ^ν , pueden ser promediadas a través de la sección transversal.

Veamos ahora qué ocurre con las cuerdas globales⁽⁵³⁾. El caso más simple es el de una simetría U(1) global. El Lagrangiano está dado por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} g^2 (\phi^\dagger \phi - \eta^2)^2 \quad (6.34)$$

No hay presente campo de gauge A_μ .

Como en el caso de cuerdas locales, la fase θ cambia en 2π alrededor de la cuerda. El radio del corazón de la cuerda es $\delta \sim (g\eta)^{-1}$ y fuera del corazón ϕ está dado por $\phi = \eta e^{i\theta}$. Pero en este caso no hay campo de gauge para compensar la variación de la fase θ en $r \gg \delta$, y desde luego no hay flujo magnético asociado a la cuerda.

La masa por unidad de longitud de la cuerda es:

$$\mu \sim \eta^2 + \int_\delta^\infty \left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e^{i n \theta} \eta \right|^2 2\pi r dr \quad (6.35)$$

que diverge logarítmicamente en el infinito. Sin embargo, en el contexto cosmológico esto no representa un problema. Si la escala del sistema es R (R es la curvatura típica de la cuerda y la distancia típica entre cuerdas), podemos escribir

$$\mu \sim \eta^2 + \eta^2 \int_\delta^R \frac{2\pi}{r} dr \sim \eta^2 \left(1 + 2\pi \ln \frac{R}{\delta} \right) \quad (6.36)$$

y este cut-off natural resuelve el problema.

Por otra parte la energía de un lazo cerrado de medida R es siempre finita: $E \sim \eta^2 R \ln \frac{R}{\delta}$. El factor $\ln R$ refleja una interacción de largo alcance entre diferentes partes del loop.

Si tenemos dos cuerdas paralelas con sentidos opuestos de $\Delta\theta$, de modo que para un contorno que encierre ambas cuerdas es $\Delta\theta = 0$, el rol de radio cut-off lo juega la distancia entre las cuerdas. Las dos cuerdas se atraen una a la otra con una fuerza por unidad de longitud dada por:

$$F = \frac{\partial \mu}{\partial R} \approx \frac{2\pi \eta^2}{R}$$

b) PROCESOS FISICOS CON CUERDAS

Discutiremos brevemente la dinámica de las cuerdas macroscópicas suponiendo que sus dimensiones son mucho mayores que su espesor λ .

La trayectoria espacio-temporal de una cuerda puede ser parametrizada como

$$X^\mu = X^\mu(\rho^a) \quad \text{con } a = 0, 1 \tag{6.37}$$

siendo ρ^0 un parámetro tipo tiempo y ρ^1 uno tipo espacio, como se muestra en la Figura 6.3.

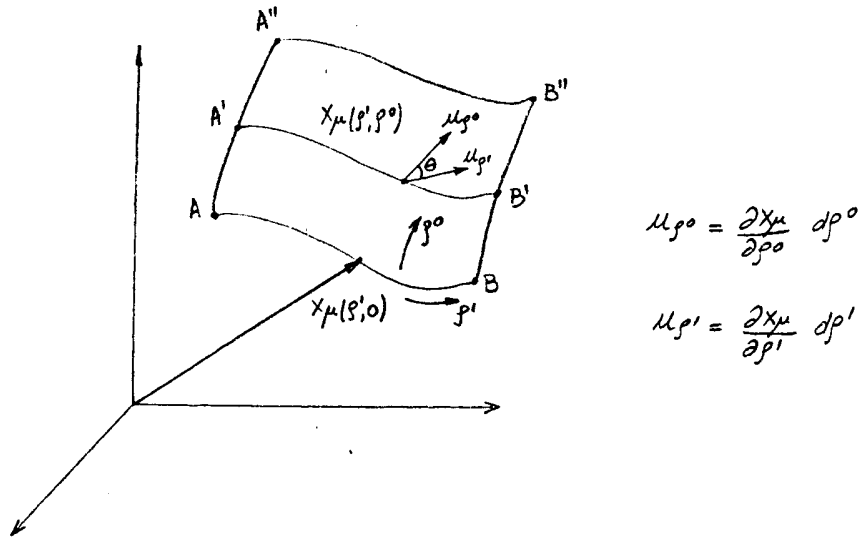


Figura 6.3

Consideraremos solamente cuerdas locales que no interactúan con un campo de Goldstone de largo alcance.

La acción S para tales cuerdas debe satisfacer los siguientes requerimientos:

- (i) S debe ser invariante bajo transformaciones generales de coordenadas.
- (ii) S debe ser invariante con respecto a la reparametrización

$$\rho^a \rightarrow \tilde{\rho}^a(\rho) \tag{6.38}$$

(iii) S debe tener la forma de una integral a través de la

"sábana" bidimensional dada por (6.37).

Las cantidades que nos permiten construir la acción son las funciones $X^\mu(\sigma^a)$ y la tensión de la cuerda.

Estas tres condiciones determinan unívocamente la acción, a menos de un factor numérico:

$$S = -\mu \int [-g^{(2)}]^{1/2} d^2\sigma \quad (6.39)$$

siendo $g^{(2)}$ el determinante del tensor métrico bidimensional sobre la superficie, $g_{ab}^{(2)} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b}$, es decir

$$g^{(2)} = \dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x} \cdot x')^2 \quad (6.40)$$

donde usamos que $a \cdot b = a^\mu b_\mu$, $\dot{x}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0}$ y $x'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1}$.

La ecuación (6.39) es la acción de Nambu para una cuerda relativista^(54,55). La integral en esta ecuación es justamente el área (superficial) de la "sábana" descrita por la cuerda.

Si como parametrización tomamos σ^1 como la longitud a lo largo de la cuerda y σ^0 como el tiempo, entonces la acción (6.39) toma la forma⁽⁵⁴⁾

$$S = -\mu \int dt \int dl (1 - v_\perp^2)^{1/2} \quad (6.41)$$

con

$$v_\perp^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{x}}{\partial l} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial l} \right) \quad (6.42)$$

la velocidad transversal. La ec. (6.41) muestra que solamente el movimiento transversal de la cuerda es físicamente observable.

Las ecuaciones de movimiento para una cuerda son:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^a} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial X^\mu} = 0 \quad (6.43)$$

siendo $L = -\mu [-g^{(2)}]^{1/2}$ el Lagrangiano de la cuerda. El último término de (6.43), $\frac{\partial L}{\partial X^\mu}$, sólo se anula cuando la métrica $g_{\mu\nu}$ depende de X^μ .

Consideremos en primer lugar la dinámica de las cuerdas en espacio-tiempo chato, es decir que $g_{\mu\nu}$ no dependa de x^μ . La ec. (6.43) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial p^0} \left\{ \frac{(\dot{x} \cdot x') x'^\mu - x'^2 \dot{x}^\mu}{[(\dot{x} \cdot x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2}} \right\} + \frac{\partial}{\partial p^i} \left\{ \frac{(\dot{x} \cdot x') \dot{x}^\mu - \dot{x}^2 x'^\mu}{[(\dot{x} \cdot x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2}} \right\} = 0 \quad (6.44)$$

Estas ecuaciones de movimiento pueden ser simplificadas eligiendo adecuadamente los parámetros p^0 y p^i . Podemos elegir por ejemplo p^0 como una coordenada temporal y p^i como una de las tres coordenadas espaciales, digamos:

$$p^0 = t \quad p^i = x \quad (6.45)$$

Luego, la trayectoria de la cuerda queda descrita por dos funciones, $y(x,t)$ y $z(x,t)$. Se puede verificar que

$$y = f(x \pm t) \quad z = g(x \pm t) \quad (6.46)$$

es una solución de la ec. (6.44) para funciones f y g arbitrarias⁽⁵⁰⁾. Estas soluciones describen ondas de formas arbitrarias, propagándose a lo largo de la cuerda con la velocidad de la luz. Debemos notar que en general una superposición de ondas que viajan en direcciones opuestas no es una solución, ya que la ec. (6.44) no es lineal.

Para poder estudiar los lazos cerrados de cuerdas es conveniente hacer una elección diferente de los parámetros p^0 y p^i . La libertad de gauge dada en (6.38) nos permite imponer dos condiciones de gauge que podemos elegir como

$$\dot{x} \cdot x' = 0 \quad \dot{x}^2 + x'^2 = 0 \quad (6.47)$$

con x'^μ y \dot{x}^μ tipo espacio y tipo tiempo respectivamente.

Con esta elección la ecuación de movimiento (6.44) toma la forma de una ecuación de onda:

$$\ddot{x}^\mu + x''^\mu = 0 \quad (6.48)$$

Las condiciones (6.47) no fijan completamente el gauge. Queda aún la libertad de las transformaciones (6.38) con $\tilde{f}' = \tilde{f}'^0$ y $\tilde{f}'' = \tilde{f}''^0$, lo que implica que

$$\ddot{\tilde{f}}^a - \tilde{f}''^a = 0 \quad (6.49)$$

Podemos usar esta libertad remanente para hacer $\tilde{f}^0 = X^0$; esto es consistente con las ecs. (6.48) y (6.49). Luego, si hacemos $f' = \rho$ la trayectoria de la cuerda estará descrita por una función vectorial $\vec{X}(\rho, t)$, de modo que las ecs. (6.47) y (6.48) toman la forma:

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}' = 0 \quad \dot{\vec{X}}^2 + \vec{X}'^2 = 1 \quad (6.50)$$

$$\ddot{\vec{X}} - \vec{X}'' = 0 \quad (6.51)$$

Tratemos de entender el significado físico de estas ecuaciones.

La primera de las ecuaciones (6.50), $\dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}' = 0$, nos dice que el vector $\dot{\vec{X}}$ es perpendicular a la cuerda y por lo tanto representa la velocidad físicamente observable, \vec{v}_\perp .

La segunda, $\dot{\vec{X}}^2 + \vec{X}'^2 = 1$, puede ser escrita como:

$$\left(\frac{d\vec{X}}{d\rho}\right)^2 = 1 - \dot{\vec{X}}^2 \implies d\rho = (1 - \dot{\vec{X}}^2)^{-1/2} |d\vec{X}| = \frac{dl}{\mu}$$

donde

$$H = \mu \int (1 - \dot{\vec{X}}^2)^{-1/2} dl = \mu \int d\rho \quad (6.52)$$

es la energía (masa) de la cuerda. Esta ecuación puede compararse con la (6.41) que es la expresión de la acción.

Por lo tanto hemos elegido f proporcional a la masa de la cuerda, contada a partir desde algún punto arbitrario sobre la misma.

Para un loop cerrado f cambia desde cero hasta el valor H/μ al recorrer el lazo, siendo H su masa total.

Finalmente, la ecuación (6.51), $\ddot{\vec{X}} - \vec{X}'' = 0$, nos dice que la aceleración de un elemento de cuerda en su sistema de reposo local

($\dot{\vec{x}}=0$) es inversamente proporcional al radio de curvatura local, $R = \left| \frac{d^2 \vec{x}}{d\ell^2} \right|^{-1}$. La dirección de $\ddot{\vec{x}}$ es tal que una cuerda curvada tiende a enderezarse. Por supuesto al hacer ésto desarrolla una velocidad, y por lo tanto mantiene oscilaciones.

La solución general de la ec. (6.51) es:

$$\vec{x}(\rho, t) = \frac{1}{2} [\vec{a}(\rho-t) + \vec{b}(\rho+t)] \quad (6.53)$$

mientras que las ecs. (6.50) dan los siguientes vínculos para las funciones \vec{a} y \vec{b} arbitrarias:

$$\vec{a}'^2 = \vec{b}'^2 = 1 \quad (6.54)$$

Algunas veces las cuerdas se cruzarán e intercambiarán formas produciendo nuevos enredos. Cuando dos cuerdas se intersectan cambiando formas, como se ve en la Figura 6.4a, se dice que **interconmutan**. Por otro lado las intersecciones dobles y las autointersecciones pueden dar lugar a la formación de lazos cerrados, como lo muestra la Figura 6.4b,c.

Las soluciones numéricas⁽⁵⁷⁾ de las ecuaciones de campo no lineales que describen las cuerdas que chocan sugieren que las interconmutaciones ocurren con una alta probabilidad.

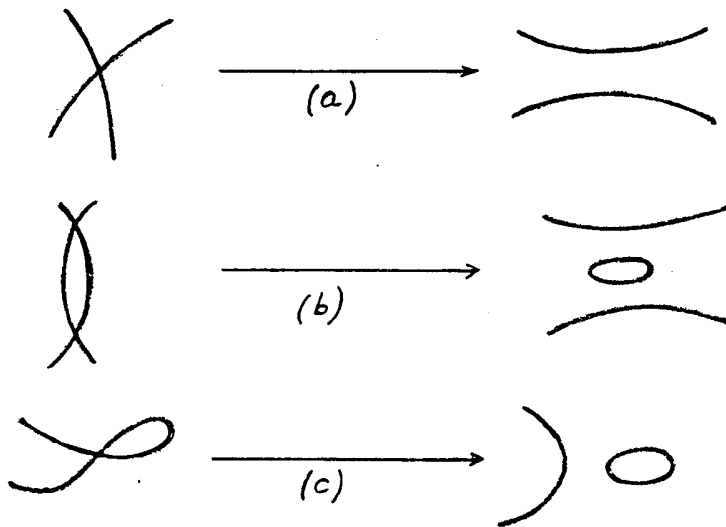


Figura 6.4: Interconmutación de las cuerda

Consideremos ahora el caso de los lazos oscilantes. El movimiento de un lazo cerrado, en su sistema de centro de masa, está descrito por una solución de la forma:

$$\vec{x}(\rho, t) = \frac{1}{2} [\vec{a}(\rho-t) + \vec{b}(\rho+t)]$$

con $\vec{a}'^2 = \vec{b}'^2 = 1$, donde $\vec{a}(\rho)$ y $\vec{b}(\rho)$ son funciones periódicas con período $L = M/\mu$ (ya que tanto \vec{x} como $\dot{\vec{x}}$ deben ser periódicas) siendo M la masa del loop, es decir:

$$\vec{a}(\rho+L) = \vec{a}(\rho) \quad \vec{b}(\rho+L) = \vec{b}(\rho) \quad (6.55)$$

A partir de la forma de $\vec{x}(\rho, t)$ podemos ver que el movimiento también es periódico en el tiempo con período $L/2$ en lugar de L , ya que se cumple que⁽⁵⁸⁾

$$\vec{x}(\rho + \frac{L}{2}, t + \frac{L}{2}) = \vec{x}(\rho, t) \quad (6.56)$$

Las funciones periódicas \vec{a} y \vec{b} pueden ser expandidas en series de Fourier; los vínculos (6.54) dan ecuaciones algebraicas no lineales para los coeficientes. Se pueden encontrar fácilmente soluciones exactas en las que están presentes unas pocas bajas frecuencias. Kibble y Turok⁽⁵⁸⁾ y Turok⁽⁵⁹⁾ han encontrado varias familias de tales soluciones. El tipo más simple de solución que envuelve sólo una frecuencia es

$$\vec{x}(\rho, t) = \frac{L}{4\pi} \left\{ \hat{e}_1 (\sin \sigma_- + \sin \sigma_+) - \hat{e}_2 (\cos \sigma_- + \cos \phi \cos \sigma_+) - \right. \\ \left. - \hat{e}_3 \sin \phi \cos \sigma_+ \right\} \quad (6.57)$$

donde $\sigma_{\pm} = \frac{2\pi}{L}(\rho \pm t)$, \hat{e}_i son vectores unitarios en las direcciones de los ejes cartesianos, y ϕ es un parámetro constante.

Si rotamos el sistema coordenado en un ángulo $\phi/2$ alrededor de la dirección \hat{e}_1 , haciendo transformaciones trigonométricas simples podemos llevar la ec. (6.57) a la forma:

$$\vec{X} = \frac{L}{2\pi} \left\{ \hat{e}_1 \sin \sigma_1 \cos \sigma_0 + \hat{e}_2 \cos \frac{\phi}{2} \cos \sigma_1 \cos \sigma_0 + \right. \\ \left. + \hat{e}_3 \sin \frac{\phi}{2} \sin \sigma_1 \sin \sigma_0 \right\} \quad (6.58)$$

donde $\sigma_0 = \frac{2\pi t}{L}$ y $\sigma_1 = \frac{2\pi f}{L}$.

A $t=0$ el lazo tiene la forma de una elipse en el plano x-y. Luego rota y se estira en una línea doble a lo largo del eje z en $t=L/4$. En este momento los extremos de la doble línea se mueven en la dirección x con la velocidad de la luz. En $t=L/2$ el loop retorna a su forma elíptica y vuelve a repetir el ciclo.

El parámetro ϕ toma valores desde 0 hasta π . El valor $\phi=0$ corresponde a un loop circular que alcanza la velocidad de la luz a medida que colapsa en un punto; $\phi=\pi$ corresponde a una doble línea rotando en el plano x-z, cuyos extremos siempre se mueven con la velocidad de la luz.

Los loops autointersectantes pueden interconmutar y romperse en pedazos más pequeños. Si todas las trayectorias de los lazos se intersectan entre ellas en algún punto durante el período, ellos decaerán rápidamente en una cascada de loops cada vez más pequeños. Cuando sus medidas sean comparables con el ancho de la cuerda $\delta \sim \eta^{-1}$, decaerán en partículas elementales. Kibble y Turok obtuvieron un resultado muy importante acerca de esto; encontraron una clase de trayectorias de loops que nunca se autointersectan.

Si en la ec. (6.57) agregamos términos de la forma $\cos 2\sigma_{\pm}$ y $\sin 2\sigma_{\pm}$ se puede comprobar que esto no conduce a nuevas soluciones.

Por otra parte las soluciones más simples que le siguen envuelven $\cos 3\sigma_{\pm}$ y $\sin 3\sigma_{\pm}$ ⁽⁵⁸⁾:

$$X = \frac{L}{4\pi} \left\{ \hat{e}_1 \left[(1-\alpha) \sin \sigma_- + \frac{1}{3} \alpha \sin 3\sigma_- + \sin \sigma_+ \right] - \hat{e}_2 \left[(1-\alpha) \cos \sigma_- + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \alpha \cos 3\sigma_- + \cos \sigma_+ \right] - 2 \hat{e}_3 \left[\alpha (1-\alpha) \right]^{1/2} \cos \sigma_- \right\} \quad (6.59)$$

Kibble y Turok han mostrado que para $0 < \alpha < 1$ estos lazos nunca se intersectan.

En la Figura 6.5 mostramos la proyección de un lazo tal, para $\alpha = 0.7$, sobre el plano x-y en los tiempos $t=0$ y $t = 1/4$.

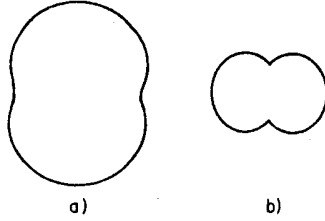


Figura 6.5: Proyección sobre el plano x-y del loop (6.59) con $\alpha = 0.7$ en a) $t=0$ y b) $t = 1/4$.

A partir de los resultados de las Ref.(58-59) podemos concluir que existe una fracción sustancial de trayectorias de loops que nunca se autointersectan.

c) CUERDAS EN UN UNIVERSO EN EXPANSION

Obtendremos ahora las ecuaciones de movimiento y discutiremos el comportamiento de las cuerdas en un Universo que se expande.

Por simplicidad usaremos el modelo cosmológico de espacio chato de modo que la métrica ,en coordenadas cartesianas, toma la forma (Ver Capítulo 5, Sección 5.2)

$$ds^2 = R^2(\tau) (d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \quad (6.60)$$

siendo $R(\tau) d\tau = dt$, es decir que usamos la variable temporal conforme.

Como hemos visto en el Capítulo 5 en un Universo

dominado por radiación ($R \propto t^{1/2}$), tenemos $\sigma \propto t^{1/2}$, $R(\sigma) \propto \sigma$. Mientras que en un Universo dominado por materia ($R \propto t^{2/3}$) tendremos que $\sigma \propto t^{1/3}$ y $R(\sigma) \propto \sigma^2$.

Podemos encontrar las ecuaciones de movimiento para la cuerda a partir de la acción

$$S = -\mu \int [(\dot{x} \cdot x')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2} d^2\sigma \quad (6.61)$$

y luego tratar de resolverlas numérica o analíticamente. El caso tratable analíticamente es el de pequeñas perturbaciones sobre una cuerda rectilínea, y es por lo tanto el que estudiaremos.

Nuevamente supondremos que la cuerda se mueve en el plano x - y , $z=0$, y que la coordenada x puede ser elegida como un parámetro sobre la cuerda:

$$\sigma^0 = \tau \quad \sigma^1 = x \quad (6.62)$$

Entonces la trayectoria de la cuerda está descrita por una función $y(x, \tau)$ y el Lagrangiano de la cuerda toma la forma:

$$L = -\mu [-g^{(2)}]^{1/2} = -\mu R^2(\tau) (1 + y'^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \quad (6.63)$$

donde $y' = dy/dx$, $\dot{y} = dy/d\tau$.

La correspondiente ecuación de movimiento es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \right) \left[\dot{y} (1 + y'^2 - \dot{y}^2)^{-1/2} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[y' (1 + y'^2 - \dot{y}^2)^{-1/2} \right] \quad (6.64)$$

Vemos que una línea recta, $y = \text{constante}$, es una solución. Una cuerda rectilínea permanece rectilínea y simplemente es estirada por la expansión. Tomaremos $y = 0$ como la solución no perturbada y consideraremos pequeñas perturbaciones sobre esta cuerda recta.

Para pequeñas perturbaciones ($y'^2, \dot{y}^2 \ll 1$), la ecuación de movimiento se reduce a

$$\ddot{y} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \dot{y} - y'' = 0 \quad (6.65)$$

Como ya vimos, para un Universo dominado por

radiación, $R(\bar{t}) < \bar{t}$ y la ec. (6.65) se reduce a:

$$\ddot{y} + 2\bar{t}^{-1}\dot{y} - y'' = 0 \quad (6.66)$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma:

$$y(x, \bar{t}) = \bar{t}^{-1} f(x \pm \bar{t})$$

siendo $f(x)$ una función arbitraria.

Cualquier solución de la ec. (6.66) puede ser representada como una superposición de ondas estacionarias

$$y = \bar{t}^{-1} \sin(k\bar{t}) \cos(kx) \quad (6.67)$$

$$y = \bar{t}^{-1} \cos(k\bar{t}) \cos(kx) \quad (6.68)$$

y soluciones similares conteniendo $\sin(kx)$.

Recordemos que x e y son coordenadas comóviles y $\frac{2\pi}{k}$ es la longitud de onda comóvil de la onda. La longitud de onda física es $\lambda = \frac{2\pi R(\bar{t})}{k}$ que crece proporcionalmente con el factor de escala.

La cantidad $k\bar{t} \sim t/\lambda$ da el cociente entre la medida del horizonte y la longitud de onda.

Es natural suponer que al tiempo de formación ($\bar{t} = \bar{t}_0$) las cuerdas estén en reposo con respecto a la materia que las rodea:

$$\dot{y}(\bar{t}_0) = 0 \quad (6.69)$$

Para ondas suficientemente largas ($k\bar{t}_0 \ll 1$) esta condición inicial puede ser reemplazada por

$$\dot{y}(\bar{t}) \rightarrow 0 \quad (\bar{t} \rightarrow 0) \quad (6.70)$$

La condición $k\bar{t}_0 \ll 1$ significa que en $t = t_0$ la longitud de onda $\lambda_0 = \frac{2\pi R(\bar{t}_0)}{k}$ es mucho mayor que el horizonte $t_0 = \frac{1}{2} R(\bar{t}_0) \bar{t}_0$.

El requerimiento (6.70) selecciona las ondas de la forma

(6.67) y prohíbe las de la forma (6.68).

Para dar una representación física de la evolución de una cuerda con una onda estacionaria de la forma (6.67) consideraremos dos casos límites: cuando la longitud de onda $\lambda(t)$ es mucho mayor que el horizonte t y cuando es mucho menor.

Si $\lambda \gg t$, es decir $k\tau \ll 1$, la ec. (6.67) se reduce a una constante e $\dot{y} \approx 0$. Por lo tanto la cuerda no se mueve en las coordenadas comóviles. Esto significa que la cuerda es conformemente estirada por la expansión del Universo: tanto la amplitud como la longitud de onda crecen como $R(\tau)$, de modo que la forma de la cuerda permanece sin cambiar.

Consideremos ahora el caso límite opuesto, cuando la longitud de onda es mucho menor que el horizonte $\lambda \ll t$ ($k\tau \gg 1$). En este caso la longitud de onda también crece como el factor de escala $R(\tau)$, mientras que la amplitud física de la onda, $R(\tau) \cos k\tau / \tau$, permanece constante. Como el cociente entre la amplitud y la longitud de onda decrece, la cuerda se hace menos y menos curvada.

Resultados similares pueden ser obtenidos en el caso general de una expansión en potencias:

Extrapolando este análisis perturbativo al caso de las cuerdas fuertemente curvadas esperamos que, en general, las ondas mayores que el horizonte sean conformemente estiradas, mientras que las irregularidades sobre escalas menores que el horizonte sean "desarrugadas"^(51,56).

Veamos ahora qué ocurre en el caso de tener lazos cerrados. El Lagrangiano de un loop circular, en la métrica (6.60), está dado por:

$$L = -2\pi\mu R^2(\tau) \int (1 - \dot{r}^2)^{1/2} \quad (6.71)$$

donde $R = R(\tau) r$ es el radio del loop.

La ecuación de movimiento es

$$\ddot{r} (1 - \dot{r}^2)^{-1} + z \frac{\ddot{R}}{R} \dot{r} + \dot{r}^{-1} = 0 \quad (6.72)$$

Un análisis similar al de las pequeñas perturbaciones (en la cuerda) muestra que el loop es conformemente estirado hasta

que su radio se hace menor que el horizonte. A partir de ese momento comienza a colapsar con una velocidad relativista.

Consideraremos como ejemplo un loop circular de radio inicial R_0 mucho mayor que el horizonte al tiempo t_0 , $R_0 \gg t_0$, y supondremos que $R(t) \propto t^{1/2}$.

El lazo es estirado como el factor de escala:

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} R_0$$

hasta que cae dentro del horizonte. Esto ocurre en $t = t_H$ tal que $R(t_H) \sim t_H$, es decir

$$t_H \sim \frac{R_0^2}{t_0}$$

A partir de este instante el radio del lazo comienza a decrecer. Cuando el loop es mucho menor que el horizonte los efectos de expansión pierden importancia y el loop colapsa a un punto, con velocidad relativista.

SECCION 6.4: EFECTOS COSMOLOGICOS DE LAS CUERDAS

a) FORMACION DE GALAXIAS: HECHOS BASICOS

Veremos ahora las condiciones necesarias para que una perturbación en la densidad del Universo de lugar a la formación de galaxias.

Las galaxias y los cúmulos de galaxias han evolucionado por inestabilidad gravitacional a partir de pequeñas fluctuaciones en la densidad. El origen de las fluctuaciones iniciales es uno de los mayores problemas cosmológicos todavía no resuelto. Algunas fluctuaciones en la densidad pueden ser producidas por una transición de fase en el Universo temprano. Sin embargo, puede mostrarse^(50,45) que los procesos físicos al tiempo cósmico t no pueden producir fluctuaciones sustanciales en escalas mucho mayores que t . Uno espera que las transiciones de fase hayan ocurrido en tiempos $t < 10^{-4}$ seg., y por lo tanto no pueden explicar fluctuaciones en la densidad en escalas mayores que unos pocos parsecs.

Han sido sugeridos dos caminos para eliminar esta dificultad. En el escenario inflacionario⁽⁴⁶⁾ todo el Universo actualmente observable tiene medida inicial menor que el horizonte, y por lo tanto se evita el problema del horizonte. En este escenario las fluctuaciones en la densidad son debidas a fluctuaciones cuánticas en el campo de Higgs.

Una posibilidad alternativa es que las fluctuaciones en la densidad estén producidas por cuerdas^(50,51). Las cuerdas abiertas moviéndose rápidamente y los loops cerrados oscilantes producen perturbaciones en la densidad que comienzan a crecer en el tiempo t_{eq} cuando la densidad de materia es igual a la de radiación (tanto si la materia oscura fría o la caliente domina en el tiempo t_{rec} de recombinación para el Universo dominado por bariones).

Los lazos más grandes producen pozos de potencial mayores, lo que origina masas mayores. Contienen loops más pequeños y materia alrededor de ellos. De este modo se produce una

"jerarquía" de objetos, loops pequeños dentro de los grandes, que pueden ser identificados con las galaxias y sus asociaciones.

Sobre escalas mayores que el horizonte las fluctuaciones en la densidad debida a las cuerdas están balanceadas por las correspondientes variaciones en la densidad de materia y de radiación.

Las cuerdas abiertas moviéndose rápidamente y los lazos cerrados oscilantes producen fluctuaciones en la densidad sobre escalas menores que el horizonte, de modo que el proceso que genera fluctuaciones continúa por todos los tiempos, extendiéndose a escalas cada vez mayores.

La evolución de las fluctuaciones en la densidad está determinada por dos efectos importantes: inestabilidad gravitacional y disipación⁽⁴⁵⁾.

Para que una acumulación de materia forme un sistema unido gravitacionalmente es necesario que su energía potencial gravitacional supere a su energía térmica interna.

La energía potencial gravitacional de una acumulación de radio r y masa M es del orden de:

$$E.P. \approx - \frac{GM^2}{r} \quad (6.73)$$

La energía interna por unidad de volumen es proporcional a la presión p , de modo que la energía interna total es del orden:

$$E.I. \approx p r^3 \quad (6.74)$$

Luego, el cúmulo gravitacional se ve favorecido si:

$$\frac{GM^2}{r} \gg p r^3 \quad (6.75)$$

Si tenemos una densidad ρ podemos escribir r en términos de M mediante la relación

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$$

De este modo expresamos la condición para la acumulación

gravitacional como:

$$GM^2 \gg P \left(\frac{M}{\rho} \right)^{3/2} \quad (6.76)$$

o en otras palabras

$$M \gg M_J \quad (6.77)$$

donde M_J es (salvo un factor numérico de poca importancia) la magnitud conocida como la masa de Jeans

$$M_J = \frac{P^{3/2}}{G^{3/2} \rho^2} \quad (6.78)$$

Por ejemplo, poco antes de la recombinación del hidrógeno la densidad de masa era $9.9 \times 10^{-32} \text{ g/cm}^3$ y la presión $p \sim \frac{1}{3} c^2 \rho = 0.3 \text{ g/cm seg}^2$. La masa de Jeans era entonces

$$M_J = 9.7 \times 10^{51} \text{ g} = 5 \times 10^{18} M_\odot$$

siendo M_\odot una masa escalar.

Después de la recombinación la presión disminuyó en un factor 10^9 de manera que la masa de Jeans se redujo a:

$$M_J = (10^{-9})^{3/2} 5 \times 10^{18} M_\odot = 1.6 \times 10^5 M_\odot$$

También podemos expresar la condición (6.77) en función de la llamada longitud de Jeans. Consideremos una nube de gas uniforme de densidad ρ . Si una perturbación de pequeña escala aparece en la densidad, tenderá a desaparecer o a crecer según una cierta escala mínima. Justamente la escala mínima requerida es la longitud de Jeans, L_J , dada por:

$$L_J = \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}} \quad (6.79)$$

donde c_s es la velocidad del sonido. Siempre que el gas esté ionizado $c_s = 1/\sqrt{3}$. Luego, durante la era dominada por radiación tenemos:

$$L_J \approx c_s t \approx \frac{t}{\sqrt{3}} \quad (6.80)$$

de modo que la longitud de Jeans es comparable con la distancia al horizonte.

Sin embargo después del tiempo del desacople, cuando los electrones y los protones se combinan para formar átomos de hidrógeno neutros, y, efectivamente, se desacoplan de la radiación, c_s cae rápidamente al valor característico del hidrógeno atómico, digamos

$$c_s = \left(\frac{5T}{3m_H} \right)^{1/2} \quad (6.81)$$

Entonces $L_J \ll t$.

Sobre escalas mayores que L_J las perturbaciones en la densidad $\delta\rho/\rho$ pueden comenzar a crecer. Veremos ahora en qué forma lo hacen.

En la Sección 6-a vimos que las cuerdas cósmicas contribuyen con una fracción muy pequeña a la densidad de energía ρ :

$$\frac{\rho_s}{\rho} \sim G\mu$$

Supondremos que inicialmente el resto de la densidad de energía es homogénea e isotrópica. Los lazos de cuerdas juegan el rol de "semillas" a partir de las cuales la materia puede acumularse. Luego las cuerdas cósmicas constituyen las simientes para las galaxias y los cúmulos. El acrecentamiento de la materia comienza aproximadamente en el tiempo t_{eq} , cuando la presión se hace despreciable.

En t_{eq} hay una distribución de loops, todos con radios menores que t_{eq} . A grandes rasgos, la idea de la formación de estructuras con cuerdas cósmicas es que los loops más grandes en t_{eq} dan lugar a los cúmulos mientras que aquellos más pequeños forman las galaxias.

Existen diferentes esquemas de aproximación para calcular el crecimiento de las perturbaciones alrededor de un loop

"semilla" en un Universo que se expande. Estamos interesados sólo en el análisis del período dominado por materia, es decir para $t > t_{eq}$. El esquema de aproximación más crudo es la teoría de perturbación lineal, que consiste en la linealización de la ecuaciones de Einstein alrededor de un background de Friedmann-Robertson-Walker.

Puesto que la gravedad es atractiva, las perturbaciones crecerán con el tiempo. La expansión del Universo amortigua el crecimiento, el que en ausencia de expansión sería exponencial.

En la era dominada por materia el crecimiento sigue la ley de potencias^(45,60):

$$\frac{\delta \rho}{\rho}(t) \propto (1+z)^{-1} \propto R(t) \quad (6.82)$$

$$\therefore \frac{\delta \rho}{\rho}(t) \propto t^{2/3} \quad (6.83)$$

Mientras que en la era dominada por radiación la perturbación crece como t .

Por lo tanto vemos que sobre escalas mayores que L_T la perturbación en la densidad comienza a crecer como $t^{2/3}$.

A partir de (6.82) tenemos que:

$$\left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_{\text{presente}} \approx 10^3 \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_{z=1000} \quad (6.84)$$

Entonces, tomando una estimación mínima de $(\delta \rho / \rho)_{\text{pres}} \sim 1$ ($t_{\text{pres}} \sim 10^{16} - 10^{17}$ seg.) vemos que en la época de recombinación, $t_{\text{rec}} \sim 10^2$ seg., tienen que haber existido variaciones sustanciales, $\delta \rho / \rho \sim 10^{-3}$. Es solamente después de este momento que las galaxias pueden comenzar a formarse.

Pensando que las cuerdas son una posible fuente de las perturbaciones iniciales en la densidad, la cuestión es si pueden ellas sobrevivir lo suficientes como para ser relevantes. Y si es así, podrán generar las perturbaciones en la densidad de medida correcta?

Zel'dovich⁽⁵⁰⁾ en 1980 fue el primero en sugerir que las cuerdas podrían ser útiles en este contexto. Sin embargo una versión más atractiva de la teoría fue realizada por Vilenkin en

b) EVOLUCION TEMPRANA DE LAS CUERDAS.

Para poder explicar cómo funciona la teoría de formación de galaxias según Vilenkin⁽⁵¹⁾ volvamos a considerar las cuerdas que son producidas en algunos modelos y discutamos cómo evolucionan en el tiempo⁽⁴⁷⁾.

Inicialmente las cuerdas son producidas en un enredo aleatorio. Esperamos que en el tiempo de formación tengan la forma de trayectorias Brownianas con una longitud de persistencia $\sim \xi_0$, donde ξ_0 es la escala característica de variación del valor de expectación de vacío del campo de Higgs (Si la longitud de correlación en $t = t_0$ es ξ_0 , no podemos esperar que las direcciones de una cuerda estén correlacionadas a través de distancias mucho mayores que ξ_0).

La causalidad requiere que ξ_0 no pueda exceder la medida del horizonte en la transición de fase: $\xi_0 \leq t_0$.

Esto ha sido confirmado por simulaciones Monte Carlo⁽⁵¹⁾, que también muestran que: (i) alrededor del 80% de la longitud total de la cuerda se debe a la cuerdas "infinitas" y (ii) las cuerdas restantes son lazos cerrados con una distribución invariante de escala $dN \propto R^{-4} dR$, siendo R la medida característica del lazo.

Una vez formadas, las cuerdas se mueven en un medio denso de modo que su movimiento es fuertemente amortiguado. En efecto, consideremos una sección de cuerda moviéndose con una velocidad v (suponemos $v \ll 1$) a través de un medio de partículas relativistas o de radiación. Suponemos que la cuerda tiene una sección transversal efectiva por unidad de longitud ξ_0 (radio a $T=0$) de modo que sobre ella actuará una fuerza retardadora de orden:

$$f_d \sim \xi_0 \rho v \quad (6.85)$$

Entonces el tiempo efectivo de amortiguamiento (Es decir, el tiempo característico para hacer desaparecer pequeñas fluctuaciones en la longitud de onda) es obtenido a partir de la ecuación:

$$\mu a_d = \mu \frac{v}{t_d} = \gamma_0 \rho v \Rightarrow t_d = \frac{\mu}{\gamma_0 \rho} \sim \frac{g \eta^3 t^2}{m_p^2} \quad (6.86)$$

Inicialmente t es aproximadamente el tiempo de la transición de fase, es decir

$$t \sim t_c \sim \frac{m_p}{\eta^2} \quad (6.87)$$

Esto conduce a que $t_d \sim g/\eta$. Podemos comparar este valor con la escala de longitud típica L de un sistema de cuerdas que, como vimos en la Sección 6.2c, es del orden

$$L_g \sim \lambda_g \sim \frac{1}{g\eta} \quad (6.88)$$

Concluimos entonces que $t_d \ll L \ll t$.

Sin embargo esta situación no dura demasiado tiempo. Durante el período de amortiguamiento fuerte las cuerdas tienden a acortarse y a enderezarse. La longitud total de la cuerda decrece a lo largo de este proceso. Ocasionalmente pequeños lazos se contraerán y desaparecerán. El decrecimiento de la longitud total de la cuerda implica un crecimiento en la escala de longitud. (La longitud de la cuerda por unidad de volumen es aproximadamente L^{-2}). Más aún, algunas veces las cuerdas se cruzarán e intercambiarán formas produciendo nuevos enredos, que luego se arreglarán.

Supongamos que inicialmente la sección de cuerda, que veníamos considerando, está en reposo con un radio de curvatura local r . La fuerza aceleradora por unidad de longitud será:

$$\frac{k}{r}$$

Entonces experimentará una aceleración inicial

$$\sim \frac{\mu}{\mu r} \sim \frac{1}{r}$$

Si el medio es denso de modo que $t_d \ll r$, la cuerda adquirirá una velocidad límite $v = at_d = \frac{td}{r}$; por lo tanto será estirada en un tiempo

$$t = \frac{r}{v} = \frac{r^2}{td} \quad (6.89)$$

Esta es la escala típica de tiempo para el estiramiento del enredo. Podríamos por lo tanto esperar que la escala de longitud de la estructura crezca con una rapidez dada por

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \sim \frac{td}{L^2} \quad (6.90)$$

Inicialmente, esto significa que L crece como $t^{1/2}$, incrementando rápidamente el cociente L/td . Sin embargo, como vimos en el capítulo 5, la densidad ρ en un Universo de Robertson-Walker (tratando a la materia como un gas relativista bajo expansión adiabática) es

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} N T^4$$

Si reemplazamos este valor en la expresión (6.86) para td escrita de la siguiente manera

$$td = \frac{g \rho^3}{\rho} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)^{3/2} \quad (6.91)$$

vemos que td no es constante sino que

$$td \propto \frac{g \rho^3}{N T^4} \propto t^2 \quad (6.92)$$

es decir $td \propto t^2$. A partir de (6.90) vemos que

$$td \propto t^2 \quad L \propto t^{3/2} \quad (6.93)$$

Claramente vemos que eventualmente td alcanzará el valor de L . Esto ocurre cuando

$$t_d \propto L \propto t \propto \frac{m_p^2}{g^2} \quad (6.94)$$

lo que implica que

$$t_d \sim 10^{-32} \text{ seg} \quad (6.95)$$

Luego, para $t \gg t_d$ la fricción puede ser despreciada.

c) ESTADOS POSTERIORES DE LA EVOLUCION

Lo que ocurre después de este tiempo t_d es menos claro. Ya que el movimiento de las cuerdas deja de ser fuertemente amortiguado, ellas pueden adquirir velocidades relativistas. Es claro que la escala de longitud de la configuración de cuerdas no puede crecer más rápido que la distancia al horizonte causal, es decir que $L \leq t$. Por el momento supondremos que $L \sim t$. Esto significa que en cualquier época hay aproximadamente una cuerda atravesando el Universo visible.

Las cuerdas deben transferir energía a la materia; de otro modo dominarían la densidad de masa y el Universo se expandiría demasiado rápido.

Vimos que una sola cuerda extendida a través del Universo visible en cualquier tiempo dentro de la era dominada por radiación contribuirá con una fracción $4G\mu \sim 10^{-6}$ de la masa total. Por otra parte, las cuerdas están constantemente ganando energía a partir de la expansión del Universo debido al trabajo realizado en contra de la tensión de la cuerda. Entonces, si es cierto que $L \sim t$, deberá existir un mecanismo de pérdida de energía que constantemente transfiera energía desde las cuerdas a la radiación. Los posibles mecanismos de pérdida de energía son⁽⁵¹⁾:

i) La fricción debida a la interacción de las cuerdas con las

partículas.

ii) El corrimiento al rojo cosmológico de las oscilaciones como resultado de la expansión.

iii) La intersección de las cuerdas intercambiando configuraciones y formando lazos cerrados, disminuyendo así su longitud.

iv) La radiación gravitacional.

Ya hemos considerado la fricción debida a la interacción de las cuerdas con las partículas y vimos que puede ser despreciada para tiempos $t \gg t_d \sim 10^{-32}$ seg.⁽⁴⁷⁾. (Después de este tiempo las cuerdas adquieren velocidades relativistas).

También hemos discutido (Ver Sección 6.3c) el corrimiento al rojo cosmológico de las oscilaciones. Concluimos que las cuerdas son conformemente estiradas por la expansión en escalas mayores que el horizonte y son "desenmarañadas" sobre escalas menores, es decir que la longitud de persistencia de las cuerdas al tiempo t es del orden de t .

Por lo tanto tendremos que considerar los puntos iii) y iv).

El mecanismo más importante de pérdida de energía es la radiación gravitacional, si bien no es fácil establecer cuándo este mecanismo es el dominante.

Según Vilenkin la formación de los lazos cerrados es el paso crucial, debido al hecho de que viven mucho tiempo de modo que tienen mayor contribución que las cuerdas largas.

De tiempo en tiempo una cuerda se autointersectará formando un lazo cerrado, con un radio típicamente del orden de t .

La formación de loops así como la radiación gravitacional sólo pueden acelerar el proceso de enderezamiento. Estos mecanismos son efectivos solamente en escalas menores que el horizonte, y concluimos que la longitud de persistencia en $t > t_d$ es de orden t .

Como ya hemos visto, la densidad de energía de las cuerdas es

$$\rho_s \sim \mu t^{-2} \quad (6.96)$$

y la densidad de energía total del Universo en la era dominada por radiación es

$$\rho \sim \frac{1}{Gt^2} \quad (6.97)$$

de modo que

$$\frac{\rho_s}{\rho} = G\mu \quad (6.98)$$

Para las cuerdas de Gran Unificación tenemos que $G\mu \sim 10^{-6}$. Notemos que ρ_s no incluye la contribución de los lazos cerrados menores que el horizonte. Veremos que en el caso de los loops el contraste de densidad es:

$$\frac{\rho_{\text{Loops}}}{\rho} \sim 10^{-3} \quad (6.99)$$

valor que es necesario para la formación de galaxias como lo discutimos en la Sección 6.4a.

Discutamos entonces ahora la evolución de los loops cerrados.

Los grandes loops, de medidas mayores que el horizonte, se comportan del mismo modo que las cuerdas infinitas: son conformemente estirados mientras que las pequeñas irregularidades son suavizadas. Cuando el loop cae dentro del horizonte comienza a colapsar; aquellos suficientemente grandes colapsan en agujeros negros.

A. Albrecht y N. Turok⁽⁶²⁾ han realizado simulaciones numéricas de la evolución de un enredo de cuerdas cósmicas interactuantes en un Universo en expansión. En la Figura 6.6 se muestra la evolución de un lazo Browniano inicialmente estático, que comenzó con una longitud de coherencia $\lambda_0 \sim h$, donde $h = 2\bar{t}$ es la distancia al horizonte. Como podemos ver el loop evoluciona "enderezándose" en la escala de h . En estas simulaciones se consideró el caso en que inicialmente $\lambda_0 \sim h$. La causalidad requiere que $\lambda_0 \leq h$, y el breve período de amortiguamiento fuerte

de las cuerdas tiende a incrementar a λ hasta la escala de horizonte, antes de que las cuerdas evolucionen libremente.

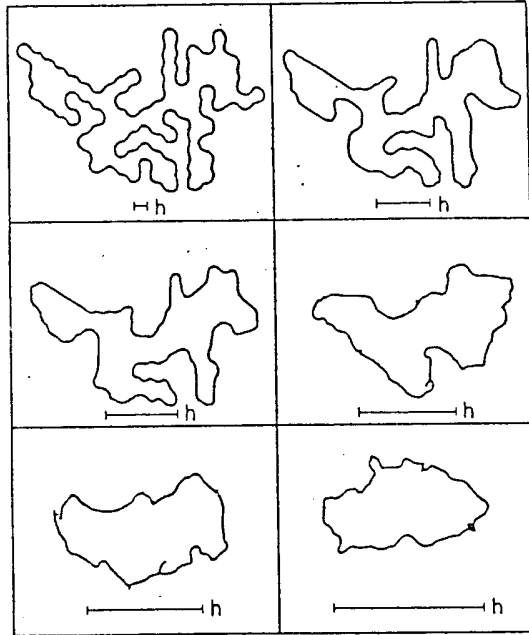


Figura 6.6

Vilenkin ha estudiado el comportamiento de pequeñas perturbaciones sobre un lazo circular colapsante y ha encontrado que la amplitud de las perturbaciones permanece constante, de modo que las desviaciones a partir de la forma circular crecen como R^{-1} , donde R es el radio del loop. En el transcurso del colapso dicho radio cambia en un factor $G\mu \sim 10^{-6}$ y permanece aproximadamente circular si las perturbaciones iniciales son menores que 10^{-6} . Esto sugiere que la probabilidad de formación de agujeros negros es muy pequeña.

Los lazos de forma irregular oscilan y pierden su energía por radiación gravitacional. De tanto en tanto pueden autointersectarse y romperse en pequeños pedazos. Si tales autointersecciones son frecuentes los loops rápidamente se deterioran cayendo, eventualmente, en partículas relativistas. Aquí supondremos que las autointersecciones ocurren rara vez, de modo que la radiación gravitacional es el mecanismo dominante de pérdida de energía.

Consideremos un lazo de masa M con medida característica R (es decir longitud $2\pi R$) que oscila bajo su propia tensión con una frecuencia ω . La energía perdida por radiación gravitacional para tal loop oscilante es de orden:

$$\frac{dM}{dt} \sim -GM^2R^4\omega^6 \quad (6.100)$$

Como $M \sim \mu R$ y la frecuencia de oscilación es $\omega \sim 1/R$, tenemos que:

$$\frac{dM}{dt} \sim -G\mu^2 \quad (6.101)$$

El tiempo de vida del loop es entonces:

$$\tau \sim \frac{M}{|dM/dt|} \sim (G\mu)^{-1} R \quad (6.102)$$

es decir

$$\tau \sim 10^6 R \quad (6.103)$$

Vemos entonces que si éste es el mecanismo dominante de pérdida de energía los loops viven un tiempo muy largo.

Algunos lazos son producidos durante la transición de fase $T \sim T_c$. Otros se producen por la intersección de cuerdas. El radio de curvatura característico de las cuerdas al tiempo t es del orden de t , y por lo tanto esperamos que la medida típica de los lazos formados en tal tiempo sea también del orden de t . Esto significa que aquellos lazos creados al tiempo t vivirán alrededor de $10^6 t$, según (6.103), antes de aniquilarse finalmente en los distintos tipos de partículas. En resumen los muchos lazos cerrados pequeños que todavía no han desaparecido contribuyen a la masa total mucho más de lo que lo hacen las largas cuerdas con una escala de longitud del orden de .

Para ver esto comencemos estimando la rapidez de formación de los lazos suponiendo^(47,50) que es suficiente para el estiramiento de las cuerdas en escalas menores que el horizonte. Por la ec. (6.96) tenemos que

$$\mu t \frac{dn}{dt} = -\frac{d}{dt} (\rho_s) \sim -\frac{d}{dt} (\mu t^{-2})$$

$$\therefore \frac{dn}{dt} \sim t^{-4} \quad (6.104)$$

La ec. (6.104) significa que se forma aproximadamente un loop de medida t por escala de horizonte en el intervalo $\Delta t \sim t$.

Después de la formación la densidad de número de loops simplemente es corrida hacia el rojo, de modo que la distribución de lazos está dada por⁽⁶³⁾:

$$n(R, t_0) \sim R^{-4} Z(t_R) \quad (6.105)$$

siendo $n(R, t_0) dR$ la densidad de número de loops con radios en el intervalo $[R, R+dR]$ y t_R el tiempo en el que se forma un lazo de radio R , que tomaremos del orden de R , $t_R = R$.

Con t_0 estamos indicando el tiempo presente.

Como vimos en la Sección 5.3, el corrimiento al rojo viene dado por:

$$Z(t_R) = \frac{R(t_0)}{R(t_R)} - 1$$

modo que (6.105) queda

$$n(R, t_0) \sim t_R^{-4} \left(\frac{R(t_0)}{R(t_R)} \right)^3 \quad (6.106)$$

Luego la densidad de loops con masas entre M y $M+dM$ está dada por

$$dn(t_0) \sim \left(\frac{R(t_0)}{R(t_0)} \right)^3 t_R^{-4} dt_R \quad (6.107)$$

(Como ya dijimos $t_R = M/\mu$ es el tiempo de formación de los loops).

En la Sección 5.7 vimos que en la era dominada por radiación el factor de escala va como $R(t) \propto t^{1/2}$, de modo que para los lazos que entren en el radio de Hubble ($\sim 2t$) antes de t_q tenemos que:

$$dn(M) \sim \mu^{-1} t^{-3/2} \left(\frac{M}{\mu} \right)^{-3/2} dM \quad (6.108)$$

El espectro de masas (6.108) se extiende desde $M_1(t) \sim G\mu^2 t$

hasta $M_2(t) \sim \mu t$. La densidad total de masa de los loops es:

$$\rho_L(t) \sim \int_{\pi_1}^{\pi_2} H \left(\frac{dn}{dH} \right) dH \sim (G\mu)^{-1/2} \mu t^{-2} \quad (6.109)$$

de modo que, comparándola con la densidad del Universo tenemos

$$\frac{\rho_{\text{loops}}}{\rho} \sim (G\mu)^{1/2} \quad (6.110)$$

SECCION 6.5: LOS VORTICES CARGADOS Y LA FORMACION DE GALAXIAS

En esta Sección investigaremos la relevancia de los vórtices cargados, presentados en el capítulo 3, en conexión con las perturbaciones en la densidad de materia necesarias para iniciar el proceso de formación de galaxias, fenómeno descrito en la Sección 6.4a.

a) VORTICES CARGADOS NO ABELIANOS CON ENERGIA INFINITA.

Como vimos en la Sección 3.2b los vórtices no Abelianos, cuando no está presente en el Lagrangiano un término de Chern-Simons, poseen energía divergente logarítmicamente.

Por lo estudiado en este capítulo sabemos que el análisis de la evolución cosmológica de las cuerdas en los modelos con rotura espontánea de una simetría local ha sido extendida al caso de simetrías globales en modelos simples, mostrando que las cuerdas con densidad de energía infinita están también presentes en este caso. En efecto, como vimos en la Sección 6.3a, la escala L de las cuerdas formadas en una transición de fase, es decir la curvatura típica de las cuerdas y la distancia típica entre cuerdas, constituye un cut-off natural de la teoría que resuelve, en el contexto cosmológico, el problema de la masa por unidad de longitud logarítmicamente divergente en el infinito. Calcularemos entonces la densidad de energía de la cuerda teniendo en cuenta este cut-off natural. Para ello definiremos las variables adimensionales:

$$X = m_V \rho \quad \bar{f}(\rho) = \frac{f}{m_V} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{m_V} \quad (6.111)$$

donde m_V es la masa del mesón vectorial definida en (2.79)

$$m_V^2 = e^2 (\eta^2 + \eta'^2)$$

En función de estas nuevas variables la densidad de energía μ de la solución de vórtice, es decir la densidad

lineal de masa de la cuerda, es:

$$\mu = 2\pi m_V^2 \int_0^\infty T_{00}(x) x dx \quad (6.112)$$

T_{00} está dado por

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{B'^2}{x^2} + \bar{f}'^2 + \frac{1}{x^2} \bar{f}^2 (HeB)^2 + \frac{g^2}{4} (\bar{f}^2 - \eta^2)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{f}^2 \dot{\Lambda}^2 + \frac{1}{e^2} \Lambda'^2 \right) \quad (6.113)$$

con

$$\dot{\Lambda} \equiv \frac{1}{m_V} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (6.114)$$

Los términos independientes de Λ en (6.113) corresponden justamente a la densidad de energía del vórtice usual (puramente magnético). Los otros dos términos deben ser tratados cuidadosamente, utilizando el cut-off L :

$$\mu = \mu_{mag} + \pi m_V^2 \int_1^{L/3} \left[\bar{\eta}^2 \left(\frac{eK}{2\pi} \right)^2 \log x + \frac{K^2}{4\pi^2} \frac{1}{x^2} \right] x dx \quad (6.115)$$

Esto conduce a

$$\mu = \mu_{mag} + \frac{K^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{L^2}{2\zeta^2} \left[\log \left(\frac{L}{\zeta} \right) - \log \left(\frac{L}{3} \right) + \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{4} + \log \left(\frac{L}{3} \right) \right\} \quad (6.116)$$

La densidad de energía para la parte puramente magnética puede ser escrita en la forma:

$$\mu_{mag} = \eta^2 m (g^2/e^2) \quad (6.117)$$

siendo m una función que varía suavemente y que puede ser calculada numéricamente. Para el caso límite entre superconductividad de tipo I y de tipo II, que corresponde a tener $e^2 = g^2$, ha sido calculada exactamente⁽³¹⁾

$$m(\mathcal{F}/e^2) = m(1) = \pi \quad (6.118)$$

Hemos visto en este capítulo de qué manera las cuerdas cósmicas pueden ser formadas si se rompe en un modo adecuado una simetría de gauge. En un contexto cosmológico, a medida que el Universo se enfría, pasando a través de temperaturas críticas, el campo de Higgs ϕ tiende a adquirir un valor de expectación $\langle \phi \rangle$ no nulo y se puede introducir una longitud de correlación ξ (Ver ec. (6.12)) tal que las direcciones de $\langle \phi \rangle$ no estén correlacionadas en puntos separados una distancia mayor que ξ . Por lo que las direcciones iniciales de las cuerdas no estarán correlacionadas para distancias mayores que la escala de horizonte en el tiempo de la rotura de simetría.

Sin embargo, a medida que el Universo se expande la escala de horizonte crece, lo que hace que las secciones curvadas de las cuerdas "caigan" dentro del horizonte.

Ya hemos dicho que la escala de longitud típica de la configuración de cuerdas, L , no puede crecer más rápido que el horizonte causal, de modo que se puede suponer que al tiempo cósmico t es $L \sim t$.

Para las cuerdas formadas en la transición de fase de Gran Unificación tenemos que $\eta^2 \sim \frac{m_U^2}{\alpha}$, donde α es la constante de estructura fina de las teorías de Gran Unificación, definida en (6.14):

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq 0.025$$

Entonces si consideramos el término dominante en (6.116) tenemos:

$$\mu = \alpha \eta^2 Q^2 \log^2 L m_U \quad (6.119)$$

donde hemos definido la carga total del vórtice, Q , como

$$Q = K L \quad (6.120)$$

Recordemos ahora la relación existente entre la densidad de energía de las cuerdas y la densidad de energía total del Universo.

Si consideramos una cuerda extendida a través del Universo visible, cuya longitud en el instante t es $4t$, su densidad de energía estará dada por (Ver ec. (6.26)):

$$\rho_s \sim \mu t^{-2}$$

donde μ es la densidad de masa lineal de la cuerda.

Por otra parte, como vimos en el Capítulo 5, la densidad de energía total del Universo en la era dominada por radiación viene dada por (Ver ec. (5.73)):

$$\rho \sim \frac{1}{G t^2}$$

De modo que el cociente entre la densidad de energía de las cuerdas (mucho tiempo después de ocurrida la transición de fase) y la energía del Universo resulta (Ver ec. (6.98)):

$$\frac{\rho_s}{\rho} \sim G\mu \quad (6.121)$$

Como ya hemos notado al presentar esta relación, ρ_s no incluye la contribución producida por los lazos cerrados menores que el horizonte, sino que en este caso (como vimos en la Sección 6.4c) el contraste de densidad viene dado por (Ver ec. (6.110)):

$$\frac{\rho_{\text{Lazos}}}{\rho} \sim (G\mu)^{1/2} \quad (6.122)$$

Retornemos entonces a los vórtices que estamos considerando. Si tomamos $m_V = 10^{15}$ GeV, obtenemos que:

$$G\mu = G \propto \eta^2 Q^2 \log^2 L m_V = 10^{-5} Q^2 \quad (6.123)$$

De acuerdo a lo estudiado en este Capítulo sabemos que

el orden de magnitud del contraste de densidad (definido en las ecs. (6.121) y (6.122)) necesario para dar lugar a la formación de galaxias, es del orden de 10^{-3} a 10^{-6} . Por lo tanto podemos concluir que las cuerdas con carga $Q \sim 1$ pueden producir las adecuadas fluctuaciones en la densidad.

b) VORTICES CARGADOS CON TERMINO DE CHERN-SIMONS.

Al estudiar en el capítulo 3 los vórtices cargados no Abelianos en presencia de un término de Chern-Simons⁽⁴²⁾, encontramos que la energía por unidad de longitud de la solución de vórtice es de la forma⁽⁴²⁾ (Ver ec. (3.103)):

$$E = \int T_{00} d^2y = \pi \eta^2 \int_0^\infty \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \left[\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left(\frac{dx}{d\bar{\sigma}} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\bar{\sigma}} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\bar{\sigma}} \right)^2 + y^2 z^2 + \frac{x^2 z^2}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\lambda^2}{4} (1-z^2)^2 \right] \quad (6.124)$$

La expresión (6.124) corresponde a la masa por unidad de longitud de la cuerda $M = E$. Nuevamente trataremos de encontrar los valores del contraste en la densidad debido a estas cuerdas y a los lazos.

Consideramos entonces la transición de fase de Gran Unificación para la que tenemos los valores $T_c \sim 10^{15} - 10^{16}$ GeV, $\eta^2 \sim \frac{m_+^2}{\alpha}$ con $\alpha = 0.025$, donde m_+ es la masa del mesón vectorial, definida en el Capítulo 4 (ec. (4.12))

$$m_+ = \left(\frac{1}{4} \mu^2 + e^2 \eta^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{2} |\mu|$$

Si tomamos $\lambda = 1$ y $m_+ \sim 10^{15}$ GeV, debemos todavía fijar el valor del parámetro $\delta = \frac{\mu^{cs}}{e\eta}$ para poder determinar M . Para un valor de $\delta \sim 1$ (lo que corresponde a tener $\mu^{cs} \sim 10^{14}$) la carga eléctrica por unidad de longitud del vórtice es $Q \sim 10^{17} e^- \sim 10^{-2}$ coul. Usando nuestros resultados numéricos que aparecen en el capítulo 4, encontramos que para dichos valores $M = 1.2 \pi \eta^2$. Esto nos conduce a que los contrastes de densidad para tal cuerda son:

$$\frac{\rho_s}{\rho} \sim 10^{-6} \quad \frac{\rho_L}{\rho} \sim 10^{-3} \quad (6.125)$$

que, al igual que en el caso de los vórtices no Abelianos sin término C-S, son del orden de magnitud necesario para dar lugar al proceso de formación de galaxias.

CAPITULO 7:

CONCLUSIONES

En esta Tesis hemos estudiado propiedades y aplicaciones de vórtices no Abelianos que no sólo presentan un flujo magnético cuantificado sino que también tienen carga eléctrica.

Estos vórtices aparecen como soluciones de las ecuaciones de movimiento de Teorías de Gauge con rotura espontánea de la simetría.

Uno de los resultados originales de esta Tesis ha sido probar (En el capítulo 3) la incompatibilidad entre la condición de energía finita y la de carga eléctrica para Teorías de Gauge Abelianas y no Abelianas, en las que el Lagrangiano de los campos de gauge es simplemente $(1/4)F_{\mu\nu}^2$.

Vimos también, en el capítulo 3, que esta situación cambia drásticamente cuando se agrega al Lagrangiano original un término de origen topológico llamado de Chern-Simons. En efecto, este término relaciona el flujo magnético y la carga eléctrica de manera tal que sólo existen vórtices que tengan al mismo tiempo ambas propiedades. Es de notar que en teorías no Abelianas tanto el flujo magnético como la carga eléctrica y el momento angular de estos vórtices resultan cuantificados a nivel clásico.

En el capítulo 4 hemos estudiado detalladamente las soluciones de vórtices cargados en teorías de Chern-Simons en el caso SU(2). Hemos sido capaces de mostrar que de las dos posibles masas que puede tener el mesón vectorial en estas teorías, sólo una de ellas da origen a una solución de vórtice.

Para analizar el comportamiento de la solución hemos utilizado desarrollos en serie de potencias y cálculos variacionales de precisión remarcable.

Cualitativamente los vórtices cargados tienen propiedades análogas a las de los vórtices Abelianos de Nielsen y Olesen: dentro de un tubo delgado, cuyo radio es del orden de la

inversa de la masa del mesón vectorial, se establece un campo magnético (cuyo flujo está cuantificado). Fuera de este tubo el campo magnético es prácticamente nulo, y el campo de Higgs (que prácticamente se anula dentro del tubo) toma su valor de expectación de vacío. En cuanto al campo eléctrico, también se concentra en el tubo, originándose así una cuerda portadora de carga eléctrica y flujo magnético cuantificados.

En el capítulo 6 hemos discutido una importante aplicación de los vórtices en cosmología. En efecto, siguiendo la propuesta de Zel'dovich, Vilenkin, Kibble y otros autores, hemos considerado la posibilidad de que los vórtices formados como defectos topológicos en la transición de fase de Gran Unificación originen inhomogeneidades de materia que actúen como semillas para la formación de galaxias.

Como explicamos en nuestro trabajo, si ρ es la densidad de materia del Universo, la perturbación $\delta\rho$ en la etapa de recombinación ($t=10^{12}$ seg.) capaz de desencadenar la formación de galaxias, debe ser tal que $\delta\rho/\rho \sim 10^{-3}-10^{-5}$. En el caso de vórtices cargados en teorías con término de Chern-Simons, eligiendo una carga eléctrica por unidad de longitud $Q \sim 10^{-2}$ coul, nuestros resultados encajan en estos valores.

Una mención particular merecen los vórtices cargados cuando no se incluye un término C-S. Como dijimos, en ese caso la energía por unidad de longitud no es finita sino que diverge como $\log L$, donde L es el radio de curvatura típico de la cuerda. Esto no representa un problema cosmológico, puesto que en un dado instante t de la evolución del Universo existe un "cut-off" natural para L , $L \sim t$. Como en el caso de simetrías globales discutido por Vilenkin, estos vórtices cargados también pueden originar el contraste de densidad requerido para dar lugar a la formación de galaxias.

Varios aspectos relacionados con los vórtices discutidos en esta Tesis quedan abiertos a la investigación. En particular, resta analizar la evolución temporal de los vórtices durante las distintas etapas de expansión del Universo, campo éste de activas investigaciones en la actualidad.

Otro punto interesante a investigar se relaciona con la

estructura de cuerdas finitas originadas por vórtices. Ya que estas cuerdas tienen flujo magnético y campo eléctrico, en sus extremos deberían ubicarse monopolos cargados. La estabilidad y propiedades de tales configuraciones no han sido aún estudiadas.

Finalmente, como mencionamos en la Introducción, las Teorías Topológicas de Chern-Simons han devenido un terreno de múltiples estudios, tanto desde el punto de vista de la matemática como desde la teoría de campos y cuerdas, y la mecánica estadística.

Si bien en las Teorías Topológicas la dinámica clásica es trivial, los vórtices pueden jugar un papel importante en la cuantificación.

APENDICE A

En este Apéndice probaremos que si $A_0(0) \neq 0$ no existen soluciones de vórtice cargado, mostrando de esta manera la necesidad de elegir condiciones de contorno en el origen de la forma (3.61).

Como se ve al estudiar el caso de vórtices no Abelianos con un término de Chern-Simons, las ecuaciones de movimiento que surgen son las mismas que las del sistema (3.58), y se las puede escribir en función de nuevas variables $X(z)$, $Y(z)$, $Z(z)$, tal que:

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + e A(z) \\ Y(z) &= \frac{1}{\eta} A_0(z) \\ Z(z) &= \frac{1}{\eta} f(z) \end{aligned} \tag{A.1}$$

siendo η el valor de vacío del campo de Higgs, y la variable $\tau = \rho e \eta$. En función de ellas las ecuaciones de movimiento (3.58) resultan:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{dX}{d\tau} - X Z^2 = \delta \tau \frac{dY}{d\tau} \tag{A.2a}$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dY}{d\tau} - Y Z^2 = \frac{\delta}{\tau} \frac{dX}{d\tau} \tag{A.2b}$$

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dZ}{d\tau} - \frac{X^2 Z}{\tau^2} + Y^2 Z + \frac{\tilde{\lambda}}{2} Z(1-Z^2) = 0 \tag{A.2c}$$

con $\delta = k/e\eta$ y $\tilde{\lambda} = g/e$ los parámetros adimensionales de la teoría. Ahora las condiciones de contorno que cumplen con el requerimiento de energía finita son:

$$\begin{aligned} Z(0) &= 0 & Z(\infty) &= 1 \\ X(0) &= 1 & X(\infty) &= 0 \\ Y(0) &= C < \infty & Y(\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Supondremos entonces que $C = 0$.

Si pedimos que las funciones sean analíticas en el

origen tenemos las siguientes expansiones:

$$X(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (\text{A.4})$$

$$y(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

$$Z(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Reemplazando estos desarrollos en las ecuaciones de movimiento podemos ver fácilmente que:

$$a_1 = b_1 = 0$$

$$b_2 = \frac{\delta a_2}{2} \quad (\text{A.5})$$

con c_1 y a_2 arbitrarios.

De modo que en un entorno del origen tenemos:

$$X(z) = 1 + a_2 z^2 + O(z^4)$$

$$y(z) = \frac{\delta a_2}{2} z^2 + O(z^4) \quad (\text{A.6})$$

$$Z(z) = c_1 z + O(z^3)$$

Observemos que el comportamiento en el origen de la función y está ligado con el de la función X .

Consideraremos entonces el caso $\delta > 0$ (el caso $\delta < 0$ puede ser tratado en forma análoga). Existen dos comportamientos de $X(z)$ según sea el signo de a_2 . Supondremos en primer lugar que $a_2 > 0$. En tal caso ambas funciones X e y son crecientes en un entorno del origen. Como $y(0)$ e $y(\infty)$ son iguales a cero debe existir al menos un z_1 tal que $y(z_1)$ sea un máximo. Elijamos el más próximo al origen, que debe existir pues hemos pedido analiticidad, con lo que queda descartada la existencia de infinitas oscilaciones alrededor del origen. También tenemos que $y(z_1) > 0$, ya que z_1 es el lugar donde se presenta el primer máximo.

La ec. (A.2b) implica que:

$$\left. \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta_1} = y(\zeta_1) Z^2(\zeta_1) + \frac{\delta}{\zeta_1} \left. \frac{dx}{d\zeta} \right|_{\zeta_1} \quad (\text{A.7})$$

y como $y(\zeta_1) > 0$, para obtener que $\left. \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta_1} \leq 0$ (condición de máximo) necesariamente debe cumplirse que:

$$\left. \frac{dx}{d\zeta} \right|_{\zeta_1} < 0 \quad (\text{A.8})$$

Es decir, $X(\zeta)$ es una función creciente de ζ_1 . Como $X(\zeta)$ es creciente en un entorno del origen ($a_2 > 0$) debe existir un máximo de $X(\zeta)$ en el intervalo $(0, \zeta_1)$. Sea entonces $\zeta_2 \in (0, \zeta_1)$ tal que $\left. \frac{dX}{d\zeta} \right|_{\zeta_2} = 0$; tomamos este máximo como el más próximo al origen.

A partir de la ec. (A.2) obtenemos que en es:

$$\left. \frac{d^2 X}{d\zeta^2} \right|_{\zeta_2} = X(\zeta_2) Z^2(\zeta_2) + \frac{\delta}{\zeta_2} \left. \frac{dy}{d\zeta} \right|_{\zeta_2} > 0 \quad (\text{A.9})$$

ya que en $(0, \zeta_2) \subset (0, \zeta_1)$ es $X(\zeta) > 0$ y $dy/d\zeta > 0$. Es decir que $d^2 X/d\zeta^2$ no puede ser negativa, por lo que el punto ζ_2 no corresponde a un máximo.

Concluimos entonces que no existe solución para $\delta > 0$ y $a_2 > 0$.

Consideremos ahora el caso $a_2 < 0$, que implica que $X(\zeta)$ e $y(\zeta)$ son ambas decrecientes en un entorno del origen.

Nuevamente como $y(0)$ e $y(\infty)$ son nulas, debe existir un ζ_1 tal que $y(\zeta_1)$ sea un mínimo de la función. Tomamos ζ_1 como el más próximo al origen.

En dicho punto es $y(\zeta_1) < 0$ y a partir de (A.2b) vemos que:

$$\frac{\delta}{\zeta_1} \left. \frac{dx}{d\zeta} \right|_{\zeta_1} > 0 \quad (\text{A.10})$$

La condición (A.10) implica que la función $X(\zeta)$ debe tener un mínimo en el intervalo $(0, \zeta_1)$. Sea $\zeta_2 \in (0, \zeta_1)$, tal que $dX/d\zeta|_{\zeta_2} = 0$ y $X(\zeta_2)$ un mínimo. A partir de (A.2a) vemos que en ζ_2 , $X(\zeta_2)$ es positiva, por lo que si todos los mínimos de $X(\zeta)$ en $(0, \zeta_1)$ son positivos deducimos que la función $X(\zeta)$ es positiva en el intervalo $(0, \zeta_1)$.

Como X es creciente en τ_1 , y además positiva, deberá existir un punto $\tau_3 > \tau_1$ tal que en τ_3 , X presente un mínimo. Elijamos el más próximo a τ_1 .

En τ_3 la función $X(z)$ es positiva y a partir de la ec. (A.2a) surge que:

$$\left. \frac{dy}{d\tau} \right|_{\tau_3} < 0 \quad (\text{A.11})$$

La condición (A.11) a su vez implica que y tiene algún máximo en (τ_1, τ_3) y es fácil ver que estos máximos son necesariamente negativos. Por lo que concluimos que $y(z)$ es negativa en (τ_1, τ_3) .

Pero ahora estamos nuevamente en las condiciones del entorno del cero. Repitiendo este razonamiento demostramos que en caso de existir una solución, la función $X(z)$ es siempre positiva mientras que $y(z)$ es siempre negativa, y además existen infinitos máximos y mínimos de X e y .

Sin embargo vamos a demostrar que ésto no es posible. Para ello tomemos la ecuación

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dy}{d\tau} - yz^2 = \frac{\delta}{\tau} \frac{dx}{d\tau} \quad (\text{A.12})$$

que es equivalente a escribir

$$\frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{dy}{d\tau} \right) = yz^2\tau + \delta \frac{dx}{d\tau} \quad (\text{A.13})$$

Integrando una vez obtenemos:

$$\tau \frac{dy}{d\tau} = \int_0^{\tau} yz^2s ds + \delta(X(\tau) - 1) \quad (\text{A.14})$$

Como en el infinito $X(z)$ tiende a cero, existirá un

M tal que para $\tau > M$ sea

$$X(\tau) - 1 < 0 \quad (\text{A.15})$$

Además como $y(z) < 0$ en todo el intervalo $(0, \infty)$ tenemos que:

$$\int_0^{\infty} y z^2 s \, ds < 0 \quad (\text{A.16})$$

Esto explica que para $\tau > M$:

$$\tau \frac{dy}{d\tau} \neq 0 \quad (\text{A.17})$$

La condición (A.17) está en contradicción con lo que habíamos supuesto, es decir que la función $y(\tau)$ tenga infinitos mínimos.

Por lo tanto podemos concluir que no existen soluciones analíticas en el origen para $\delta > 0$ que satisfagan las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{array}{ll} X(0) = 1 & X(\infty) = 0 \\ Y(0) = 0 & Y(\infty) = 0 \\ Z(0) = 0 & Z(\infty) = 1 \end{array} \quad (\text{A.18})$$

Como ya hemos dicho, la extensión al caso $\delta < 0$ es trivial. Notemos que el sistema es invariante ante el cambio

$$\begin{array}{ll} \delta \longrightarrow -\delta \\ y \longrightarrow -y \end{array} \quad (\text{A.19})$$

Por lo que si existiera una solución para $\delta < 0$ existiría también para $\delta > 0$.

Podemos ver que el sistema ni siquiera admite la solución trivial

$$y \equiv 0 \quad \forall \tau \quad (\text{A.20})$$

para $\delta \neq 0$, ya que en ese caso sería

$$x \equiv 0 \quad \forall \tau \quad (\text{A.21})$$

y no se satisfacería la condición

$$X(\infty) = 1$$

(A.22)

APENDICE B

CALCULO DEL POTENCIAL EFECTIVO A TEMPERATURA FINITA

Es importante poder determinar el estado de una Teoría de Campos Cuántica en un dado tiempo en la evolución del Universo. Una herramienta básica para ello es el conocimiento del **potencial efectivo**, que incluye todas las correcciones cuánticas al potencial de la Teoría de Campos Cuántica. Minimizando el potencial efectivo obtenemos la configuración de campo con energía mínima, es decir, el vacío de la teoría. Entonces, estudiando el potencial efectivo podemos obtener información sobre las simetrías de la teoría completa, y no solamente de aquellas del Lagrangiano.

Como veremos, $V_{\text{eff}}(\bar{\varphi})$ a temperatura finita tendrá un término de masa dependiente de la temperatura, proporcional a $\varphi^2 T^2$, que conduce a la restauración de las simetrías a altas temperaturas.

Antes de comenzar con el cálculo explícito del potencial efectivo a temperatura finita comenzamos recordando que en el formalismo de la integral funcional, la **funcional generatriz** $Z[J]$ para las **funciones de Green** completas $G_n(x_1, \dots, x_n)$ está definida como:

$$Z[J] = \langle 0 | T. \exp \left[i \int J(x) \varphi(x) d^4x \right] | 0 \rangle \quad (\text{B.1})$$

siendo $|0\rangle$ el vacío físico y $\varphi(x)$ el campo de Heisenberg.

Expandiendo $Z[J]$ como serie de potencias en J obtenemos una representación en términos de las funciones de Green:

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n J(x_1) \dots J(x_n) G_n(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{B.2})$$

Una de las principales ventajas de las funcionales generatrices es el hecho de que por simples operaciones algebraicas se puede pasar de las funciones de Green completas a las conectadas, y a las irreducibles de una partícula (1PI), de la

siguiente manera:

$$iW[J] = \ln Z[J]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n J(x_1) \dots J(x_n) G_n^c(x_1, \dots, x_n) \quad (B.3)$$

es la funcional generatriz para las funciones de Green conectadas, mientras que

$$\Gamma(\bar{\varphi}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \bar{\varphi}(x_1) \dots \bar{\varphi}(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (B.4)$$

es la funcional generatriz para las funciones de Green 1PI.

En una teoría traslacionalmente invariante $\bar{\varphi}(x)$ será constante. En ese caso es conveniente extraer el volumen infinito espacio-tiempo que aparece en cada término de $\Gamma(\bar{\varphi})$ y definir el potencial efectivo $V_{\text{eff}}(\bar{\varphi})$ mediante:

$$\Gamma(\bar{\varphi}) = \int d^4x [-V_{\text{eff}}(\bar{\varphi})] \quad (B.5)$$

El potencial efectivo para una teoría con densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - U(\varphi) \quad (B.6)$$

se reduce, a menor orden en \hbar , al potencial clásico $U(\bar{\varphi})$, es decir:

$$V_{\text{eff}}(\bar{\varphi}) = U(\bar{\varphi}) + O(\hbar) \quad (B.7)$$

Calcularemos entonces el potencial efectivo para una teoría de campos escalar dada por la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2} A \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} B \varphi^2 - \frac{1}{4!} C \varphi^4 \quad (B.8)$$

siguiendo el método de la integral funcional desarrollado por

Jackiw en 1974 y por Iliopoulos, Itzykson y Martin en 1975.

Los últimos tres términos en (B.8) son los contratérminos de renormalización, y por lo tanto de orden \hbar .

El potencial efectivo $V_{eff}^{(1)}(\bar{\varphi})$ a orden \hbar se obtiene sumando al potencial clásico $U(\bar{\varphi})$ todos los gráficos de 1-loop con momentos externos nulos, es decir:

$$V_{eff}^{(1)}(\bar{\varphi}) = \frac{\lambda}{4!} \bar{\varphi}^4 + \frac{1}{2} B^{(1)} \bar{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} C^{(1)} \bar{\varphi}^4 + \dots$$

(B.9)

siendo $B^{(1)}$ y $C^{(1)}$ los contratérminos \bar{B} y \bar{C} a orden \hbar .

Como todos los momentos externos son cero, la integración de los loops en (B.9) es la misma para cada gráfico. Luego, podemos sumar explícitamente los gráficos 1PI a un loop:

$$i \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2n} \left[\frac{\frac{\lambda}{2} \bar{\varphi}^2}{k^2 + i\epsilon} \right]^n = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \frac{\frac{\lambda}{2} \bar{\varphi}^2}{k^2 + i\epsilon} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left[1 + \frac{\frac{\lambda}{2} \bar{\varphi}^2}{k_E^2} \right]$$

(B.10)

Es necesario ahora renormalizar la teoría.

Primero se regulariza imponiendo un cut-off en el espacio de los momentos $k_E^2 = \Lambda^2$. Luego, a partir de las condiciones de renormalización de la masa y de la constante de acoplamiento:

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}^{(1)}}{d\bar{\varphi}^2} \right|_{\bar{\varphi}=0} = 0 \qquad \left. \frac{d^4 V_{eff}^{(1)}}{d\bar{\varphi}^4} \right|_{\bar{\varphi}=\mu} = \lambda$$

(B.11)

se obtiene, respectivamente

$$\bar{B}^{(1)} = -\frac{\lambda \Lambda^2}{32\pi^2} \qquad \bar{C}^{(1)} = -\frac{11}{32} \frac{\lambda^2}{\pi^2} - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{\lambda \mu^2}{2\Lambda^2}$$

(B.12)

De modo que el potencial efectivo resulta:

$$V_{eff}^{(1)}(\bar{\varphi}) = \frac{\lambda}{4!} \bar{\varphi}^4 + \frac{\lambda^2 \bar{\varphi}^4}{256\pi^2} \left[\ln \frac{\bar{\varphi}^2}{\mu^2} - \frac{25}{6} \right]$$

(B.13)

Para valores pequeños de $\bar{\varphi}$, $V_{eff}^{(1)}(\bar{\varphi})$ es negativo, de lo que se deduce que las correcciones radiativas pueden desestabilizar

el estado fundamental a nivel árbol $\bar{\varphi} = 0$, como muestra la Figura B.1

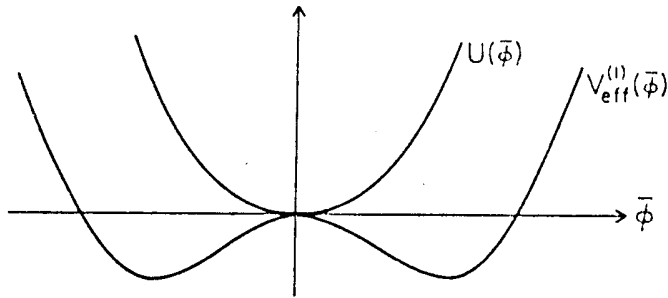


Figura B.1: Potencial efectivo para una teoría de un campo escalar. $U(\bar{\varphi})$ es el potencial a nivel árbol; $V_{\text{eff}}^{(1)}(\bar{\varphi})$ es el potencial efectivo a 1-loop.

Calcularemos ahora el potencial efectivo a 1-loop a temperatura finita $V_{\text{eff}}^{(1)}(\bar{\varphi})$, para la teoría de campo escalar descrita por el Lagrangiano (B.8).

El único cambio necesario comparado con el caso a temperatura cero es la discretización de la variable k_0 . La periodicidad en la dirección espacial euclídea implica que los posibles valores de k_0 están dados por la condición $-i\beta\omega_n = 2\pi n$ para campos de Bose, y $-i\beta\omega_n = (2n+1)\pi$ para campos de Fermi. Esto conduce a los cambios en las reglas de Feynman, resumidos en la Tabla B.1

Tabla B.1: Comparación de las reglas de Feynman a $T=0$ y a T finita.

	Temperatura cero	Temperatura finita
Integral de loop.	$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$	$\frac{1}{-i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$
Funciones de vértice δ .	$(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i k_i)$	$\frac{\beta}{i} (2\pi)^3 \delta_{\sum \omega_i} \delta^{(3)}(\sum \vec{k}_i)$

Por lo tanto, siguiendo los mismos pasos que condujeron a (B.10), obtenemos

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) &= U(\bar{\varphi}) + i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{-i\beta} \right) \frac{1}{2n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\lambda \bar{\varphi}^2}{\omega_m^2 - \vec{k}^2} \right)^n \\
 &= U(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[1 + \frac{\lambda \bar{\varphi}^2}{2 \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 m^2 + \vec{k}^2} \right] \\
 &= U(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln \left[\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} + \frac{2\vec{k}^2 + \lambda \bar{\varphi}^2}{2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \ln \left(\frac{4\pi^2}{\beta^2} m^2 + \vec{k}^2 \right) \right\} \\
 &= U(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} + E_k^2 \right] + \text{cte}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

siendo

$$E_k^2 = \vec{k}^2 + \frac{\lambda \bar{\varphi}^2}{2}$$

$$y \quad cte = -\frac{1}{2\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} + \vec{k}^2 \right)$$

La suma sobre m en (B.14) es divergente, pero la parte infinita es una constante, mientras que la parte finita que contiene sólo dependencia en E puede ser calculada (Ver Dolan y Jackiw, 1974) de la siguiente manera:

i) se diferencia con respecto a E .

ii) se suma la serie resultante utilizando la identidad

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y}{y^2+m^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{\pi}{2} \coth \pi y = -\frac{1}{2y} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}} \quad (\text{B.15})$$

iii) se integra la función resultante.

Comenzamos entonces calculando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE_k} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} + E_k^2 \right) \right) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2E_k}{\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} + E_k^2} = \\ &= \frac{2}{E_k} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta E_k/2}{m^2 + (\frac{\beta E_k}{2\pi})^2} = \beta \coth \frac{\beta E_k}{2} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} + E_k^2 \right] &= \beta \int_0^{E_k} dE_k \frac{\frac{\beta E_k}{2} e^{\frac{\beta E_k}{2}} + e^{-\frac{\beta E_k}{2}}}{e^{\frac{\beta E_k}{2}} - e^{-\frac{\beta E_k}{2}}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} \right) \\ &= \beta E_k + 2 \ln [1 - e^{-\beta E_k}] + cte \end{aligned}$$

Volviendo a la expresión (B.4) para $V_{eff}^{(1)\beta}$ obtenemos

$$V_{eff}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) = U(\bar{\varphi}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k}{2} + \frac{1}{\beta} \ln (1 - e^{-\beta E_k}) \right] \quad (\text{B.16})$$

Usando el hecho de que

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \ln (-x^2 + y^2 - i\varepsilon) = y + cte \quad (\text{B.17})$$

podemos escribir:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \ln(-k_0^2 + E_k^2 - i\varepsilon) + cte$$

de modo que obtenemos:

$$V_{eff}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) = U(\bar{\varphi}) + \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(-k_0^2 + E_k^2 - i\varepsilon) + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta E_k}) \quad (B.18)$$

Si rotamos el segundo término al espacio euclídeo $k_0 \rightarrow -ik_0$, encontramos, a menos de una constante, que

$$\begin{aligned} V_{eff}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) &= U(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \ln(k_E^2 + \frac{\lambda\bar{\varphi}^2}{2}) + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta E_k}) \\ &= U(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \ln\left(1 + \frac{\lambda\bar{\varphi}^2}{2k_E^2}\right) + \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \ln k_E + \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta E_k}) \end{aligned} \quad (B.19)$$

$$\therefore V_{eff}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) = V_{eff}^{(1)T=0}(\bar{\varphi}) + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta E_k}) + cte$$

A partir de (B.19) podemos concluir que la introducción de temperatura finita da como resultado un término extra en el potencial efectivo a 1-loop, de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta V_{eff}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) &= \frac{1}{2\pi^2\beta} \int_0^\infty dk k^2 \ln\left[1 - e^{-\beta(k^2 + \frac{\lambda\bar{\varphi}^2}{2})^{1/2}}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \ln\left[1 - e^{-(x^2 + \beta^2 \frac{\lambda\bar{\varphi}^2}{2})^{1/2}}\right] \end{aligned} \quad (B.20)$$

Es muy importante que este término extra sea finito, ya que como consecuencia de ello los contratérminos de renormalización a $T=0$ proveerán un potencial efectivo a 1-loop a temperatura finita, finito.

Tenemos entonces que:

$$V_{eff}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) = V_{eff}^{(1)T=0}(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2\pi^2\beta^4} I(y) \quad (B.21)$$

con

$$I(y) = \int_0^{\infty} x^2 \ln [1 - e^{-(x^2+y^2)^{1/2}}] dx \quad (B.22)$$

y

$$y^2 = \frac{\lambda \bar{\varphi}^2}{2} \beta^2 \quad (B.23)$$

Para temperaturas altas podemos expandir $I(y)$ en serie de potencias de y^2 (más precisamente, la condición para la aplicabilidad de la condición es $\bar{\varphi}\beta \ll 1$):

$$T^2 \gg \frac{1}{2} \bar{\varphi}^2 \implies y^2 \ll 1$$

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx + \frac{y^2}{2} \int_0^{\infty} x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx + O(y^4) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx} dx + \frac{y^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx + O(y^4) \end{aligned} \quad (B.24)$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx} dx &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \Big|_{\alpha=n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \Big|_{\alpha=n} = - \frac{\pi^4}{45} \\ \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx &= \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

y, reemplazando estos resultados en (B.24) obtenemos:

$$I(y) = -\frac{\pi^4}{45} + y^2 \frac{\pi^2}{12} + O(y^4) \quad (B.25)$$

De modo que el potencial efectivo a 1-loop a temperatura finita, para la teoría de un campo escalar resulta:

$$V_{eff}^{(1)\beta}(\bar{\varphi}) = V_{eff}^{(1)T=0}(\bar{\varphi}) + \frac{\lambda}{48} T^2 \bar{\varphi}^2 - \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad (B.26)$$

Como vemos las correcciones debidas a la temperatura finita al potencial efectivo a 1-loop, en el limite de altas temperaturas, dan lugar a un término de masa dependiente de la temperatura. Este término $T^2\bar{\varphi}^2$ hace que $\bar{\varphi}=0$ pase de ser un máximo local del potencial efectivo a ser un mínimo local. En efecto, para altas temperaturas los términos $T^2\bar{\varphi}^2$ y $\bar{\varphi}^4$ dominan para todos los valores de $\bar{\varphi}$ y hacen que $\bar{\varphi}=0$ sea un mínimo absoluto, mientras que por debajo de alguna temperatura crítica T_c , $\bar{\varphi}=0$ es un mínimo relativo, es decir, un falso vacío metaestable. (Ver Figura B.2).

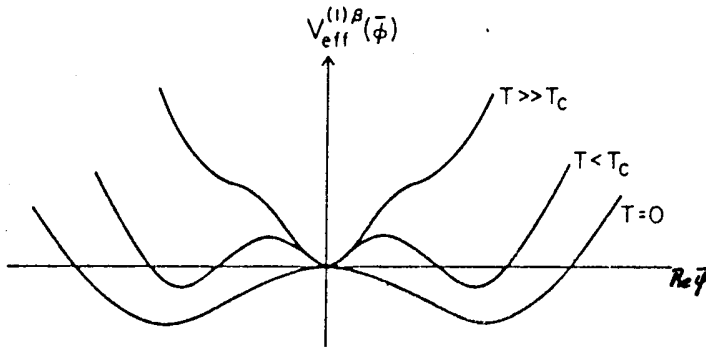


Figura B.2: Potencial Efectivo a Temperatura Finita

Trabajando en forma análoga en una Teoría de Gauge descrita por la densidad Lagrangiana dada en el capítulo 6 (Ver ec. 6.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_{\mu}\phi D^{\mu}\phi - U(\phi) + \\ & + \bar{\psi} i \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi - \bar{\psi} \Gamma \psi \cdot \phi \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

llegamos a que los principales términos de corrección a altas temperaturas, que surgen de las contribuciones a un loop a $V_{\text{eff}}^{\beta}(\bar{\varphi})$ conducen a

$$V_{\text{eff}}^{\beta}(\bar{\varphi}) = U(\varphi) - \frac{\pi^2}{90} N(\tau) T^4 + \frac{1}{24} M_r^2(\varphi) T^2 + O(T) \quad (\text{B.28})$$

con $N(\tau)$ el número efectivo de estados de helicidad de partículas livianas y $M_r^2(\tau)$ la suma de los cuadrados de las masas de estos estados de helicidad.

Blasius

REFERENCIAS

- (1) R. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu; Phys. Rev. D 10 (1974), 4114, 4130, 4138.
- (2) S. Coleman; "Classical Lumps and their Quantum descendants", lecturas en la Escuela de Verano "Ettore Majorana", 1979, Ed. Sicchicchi.
- (3) H. Nielsen, P. Olesen ; Nucl. Phys. B 61 (1973), 45.
- (4) G. t'Hooft; Nucl. Phys. B 79 (1974), 276.
- (5) A. M. Polyakov; J. E. T. P. Lett. 20 (1974), 194.
- (6) Georgi, Glashow; Phys. Rev. Lett. 28 (1972), 1494.
- (7) P. Dirac; Phys. Rev. 74 (1948), 817.
- (8) Ver por ejemplo " Solitons and Particles", C. Rebbi y G. Soliani, World Sei. (1985) y referencias incluidas en él.
- (9) A. M. Polyakov; Phys. Lett. B 59, (1975), 82.
- (10) A. M. Polyakov; Nucl. Phys. B 120, (1977), 429.
- (11) F. A. Schaposnik; Phys. Rev. D 18, (1978), 1183.
- (12) C. Callan, D. Gross, M. Hasslacher; Phys. Rev. D 29, (1979), 1026.
- (13) E. Witten; Nucl. Phys. B 156, (1979), 269.
- (14) E. Witten; Comm. Math. Phys. 117, (1988), 353; 118, (1988), 411.
- (15) Para tener una lista completa de referencias sobre Teoría de Campos Topológica ver por ejemplo F. A. Schaposnik en la V

Escuela de verano "J. A. Swieca", San Pablo, Brasil, 1989.

(16) L. Baulieu, B. Grossman; Phys. Lett. B 212, (1988), 351.

(17) D. Birmingham, M. Rakowski, G. Thompson; Phys. Lett. B 214, (1988), 387.

(18) F. A. Schaposnik, G. Thompson; LPTHE Report 88-51 (1988, en prensa).

(19) R. Jackiw, S. Templeton; Phys. Rev. D 23 (1981), 2291.

(20) J. Schonfeld; Nucl. Phys. B 185 (1981), 157.

(21) S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton; Phys. Rev. Lett. 48 (1982), 975 y Ann. Phys. (N. Y.) 140 (1982), 372.

(22) D. A. Kirzhnits, A. D. Linde; Phys. Lett. B 42 (1972), 471.

(23) L. Dolan, R. Jackiw; Phys. Rev. D 9 (1974), 3320.

(24) S. Weinberg; Phys. Rev. D 9 (1974), 3357.

(25) Ver por ejemplo: "Cosmology and GUTs" por K. A. Olive, publicado en "Grand Unification with and without Supersymmetry and Cosmological implications", G. Kounnas et al., en International School of Advanced Studies Lecture Serie N 2; Trieste; World Scientific Publishing Company; 1987.

(26) D. A. Kirzhnits; J. E. T. P. Lett. 15 (1972), 745.

(27) E. Witten; Phys. Lett. B 86, (1979), 283.

(28) G. Callan; Nucl. Phys. B 212, (1983), 391.

(29) V. A. Rubakov; Nucl. Phys. B 236, (1984), 109.

- (30) B. Julia, A. Zee; Phys. Rev. Lett. 35 (1975).
- (31) H. de Vega, F. A. Schaposnik; Phys. Rev. D 14 (1976), 1100.
- (32) B. Julia, A. Zee; Phys. Rev. D 11 (1975), 2227.
- (33) M. V. Manías, C. M. Naón, F. A. Schaposnik, M. L. Trobo; Phys. Lett. B 171 (1986), 179.
- (34) S. K. Paul, A. Khare; Phys. Lett. B 174 (1986), 420; *ibid.*
- (35) H. J. de Vega, F. A. Schaposnik; Phys. Rev. Lett. 56 (1986), 2564.
- (36) S. Aoyama, Y. Fujimoto; Phys. Lett. B 124 (1983), 74.
- (37) W. Siegel; Nucl. Phys. B 156 (1976).
- (38) R. Jackiw, C. Rebbi; Phys. Rev. Lett. 37 (1976), 172.
R. Jackiw; Rev. Mod. Phys. 52 (1980), 661.
S. Deser, M. Duff, C. Isham; Phys. Lett. B 93 (1980) 419.
- (39) R. D. Pisarski, S. Rao; Phys. Rev. D 32 (1985), 2081.
- (40) H. de Vega, F. A. Schaposnik; Phys. Rev. D 34 (1986), 3206.
- (41) C. Kumar, A. Khare; Phys. Lett. B 178 (1986), 395.
- (42) G. Lozano, M. V. Manías, F. A. Schaposnik; Phys. Rev. D 38,2 (1988).
- (43) L. Jacobs, C. Rebbi; Phys. Rev. B 19 (1978), 4486.
- (44) G. T. Hill, H. M. Hodges, M. S. Turner; Phys. Rev. D 37 (1988), 263.

(45) Ver por ejemplo:

S. Weinberg: "Gravitation and Cosmology". New York: Wiley (1972)

P. J. Peebles, "The large scale structure of the Universe", Princeton University Press, Princeton, 1980.

(46) The very early Universe, eds. G. W. Gibbons, S. W. Hawking and S. T. Siklos. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

(47) T. W. Kibble, J. Phys. A 9 (1976) 1387; Phys. Reports 67 (1980) 183.

(48) Ya. B. Zel'dovich, I. Yu Kobzarev, L. B. Okun; Zh. Eksp. Teor. Fiz. 67 (1974), 3.

(49) J. P. Preskill; Phys. Rev. Lett. 43 (1979), 1365.

(50) Ya. B. Zel'dovich; Mon. Not. R. Astr. Soc. 192 (1980), 663.

(51) A. Vilenkin; Phys. Rev. Lett. 46 (1981), 1169; 1496 (E).

(52) A. Vilenkin, Q. Shafi; Phys. Rev. Lett. 51 (1983), 1716.

(53) A. Vilenkin, A. E. Everett; Phys. Rev. Lett. 48 (1982), 1867.

(54) H. B. Nielsen, P. Olesen; Nucl. Phys. B 61 (1973), 45.

(55) P. Goddard, J. Goldstone, G. Rebbi, G. B. Thorn; Nucl. Phys. B 56 (1973) 109.

(56) A. Vilenkin; Phys. Rev. D 24 (1981), 2082.

(57) E. P. Shellard; Nucl. Phys. B 283, (1987), 624.

(58) T. W. B. Kibble, N. Turok; Phys. Lett. B 116 (1982), 141.

(59) N. Turok; Nucl. Phys. B 242 (1984), 520.

(60) R. Matzner; Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 96 (1984), 189.

(61) T. Vachaspati, A. Vilenkin; Phys. Rev. D 30 (1984), 2036.

(62) A. Albretch, N. Turok; Phys. Rev. Lett. 54, (1985), 1848.

(63) R. Brandenberger; Lectures delivered at the U.K. Institute for Theoretical Physicists, DAMPT, University of Cambridge; Cambridge CB3 9EW, U.K.; published in the proceedings.