Análise de Ferramentas Intervalares para Computação Científica

Carlos Amaral Hölbig[1]
Willingthon Pavan[2], *Taciane Vendrusculo* [3], *Patrícia Donadel Zottis*[4]
Universidade de Passo Fundo
Curso de Ciência da Computação – ICEG
Passo Fundo – RS - Brasil
&
PUCRS - Faculdade de Informática - Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação
Porto Alegre – RS – Brasil
E-mail: holbig@upf.tche.br

Dalcidio Moraes Claudio[5]

PUCRS - Faculdade de Informática - Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação
Porto Alegre – RS - Brasil
E-mail: dalcidio@pucrs.br

Resumo

Este artigo descreve os passos iniciais da pesquisa desenvolvida na UPF sobre a Análise de Ferramentas Intervalares para Aplicações de Computação Científica, que objetiva o estudo de ferramentas computacionais intervalares que estão sendo propostas para aplicação na resolução de problemas na área de computação científica. Este trabalho visa o estudo, análise, comparação da utilização dessas ferramentas na resolução de problemas industriais e científicos em diversos ambientes computacionais, proporcionando a difusão do uso de ferramentas baseadas nos conceitos matemáticos da aritmética intervalar e da aritmética de alta exatidão.

Palavras-chaves: Computação Científica, Aritmética Intervalar, Linguagens de Programação

Abstract

This paper describes the initial steps of the research developed in UPF on analysis of Interval tools for applications of scientific computation, that objectifies the study of interval computational tools that are being proposed for application in the resolution of problems in the area of scientific computation. This work seeks the study, analysis, comparison of the use of those tools in the resolution of industrial and scientific problems in several computational envirioment, providing the diffusion of the use of tools based on the mathematical concepts of the interval arithmetic and of the high accuracy arithmetic.

Key-words: Scientific Computation, Interval Arithmetic, Programming Languages

---

1Professor do curso de Ciência da Computação da UPF, aluno de doutorado do PPGCC da PUCRS.
2Professor do curso de Ciência da Computação da UPF
3Aluna de graduação do curso de Ciência da Computação da UPF e bolsista da FAPERGS.
4Aluna de graduação do curso de Ciência da Computação da UPF
5Professor e orientador do PPGCC da PUCRS.

1 Introdução

A Análise de Ferramentas Intervalares para Aplicações de Computação Científica objetiva o estudo de ferramentas computacionais intervalares que estão sendo propostas para aplicação na resolução de problemas na área de computação científica. O trabalho que está em desenvolvimento visa o estudo, análise, comparação da utilização dessas ferramentas na resolução de problemas industriais e científicos em diversos ambientes computacionais, proporcionando a difusão do uso de ferramentas baseadas nos conceitos matemáticos da aritmética intervalar e da aritmética de alta exatidão.

Para esta análise foram selecionados algumas das ferramentas intervalares existentes, onde pode-se destacar o software Maple V, a linguagem de programação para computação científica *Pascal-XSC* (desenvolvida por pesquisadores da Universidade de Karlsruhe na Alemanha) ([KLA92] e [HAM93]) e a biblioteca *Intlab* (ferramenta de domínio público que prove facilidades para cálculos numéricos, trabalhos com grandes matrizes e intervalos e que está sendo desenvolvida pelo Prof. Siegfried M. Rump da Universidade Técnica Hamburg-Harburg da Alemanha, que roda no softwate MatLab). Este artigo descreve os primeiros passos que estão sendo desenvolvidos na UPF na execução desta pesquisa, tendo por objetivo divulgar suas potencialidades e sua aplicabilidade.

2 Aplicabilidade

O estudo e a análise dessas ferramentas é importante pois um dos problemas que encontra-se na computação científica é a qualidade e exatidão dos resultados, o que pode ser consideravelmente minimizados através do uso da matemática intervalar e da aritmética de alta exatidão. O estudo dessas técnicas é importante devido a sua aplicabilidade em uma grande variedade de problemas de engenharia e de outras ciências, tais como: a determinação de potenciais em certas redes elétricas, o cálculo do *stresse* numa armação de construção ou de uma estrutura de ponte, o cálculo do padrão de escoamento num sistema hidráulico com ramos interconectados ou o cálculo das estimativas das concentrações de reagentes sujeitos a simultâneas reações químicas entre outras.

Muitas vezes vê-se em noticiários problemas ocorridos com os mais diversos mecanismos no que tange sua precisão (erro de precisão de armamentos militares, imprecisão na construção de peças industriais, sobreestimação ou subestimação de recursos para construção de equipamentos de precisão, entre outros). Muitos destes erros são gerados pelo uso incorreto de algoritmos matemáticos, ou seja, na elaboração e implementação desses algoritmos não teve-se o cuidado necessário com a qualidade dos dados que iriam ser gerados. Com esses argumentos acredita-se que o desenvolvimento e análise de ferramentas intervalares e a identificação de suas aplicações possam propocionar uma grande melhoria para os setores industriais e científicos que necessitam solucionar problemas que envolvam uma grande quantidade de cálculos e que a precisão obtdas pelos resultados seja de extrema importância para a correta solução do problema.

3 Os Primeiros Passos

Este trabalho desenvolvido na UPF relaciona-se com projetos desenvolvidos pelo Grupo de Matemática da Computação (GMC) da PUCRS (coordenado pelo Prof. Dr. Dalcidio Moraes

Claudio) e com projetos desenvolvidos no Instituto de Informática da UFRGS (coordenado pelo Prof. Dr. Tiarajú Asmuz Diverio) ([DIV95], [DIV95a] e [DIV97]).

Inicialmente, tem-se estudado a resolução de problemas numéricos em diferentes ambientes computacionais (computadores pessoais, estações de trabalho e supercomputadores), identificando as características específicas de cada ambiente, as vantagens e desvantagens dos diferentes tipos de processamento sobre a resolução de problemas com matemática intervalar, aritmética de alta exatidão e de alto desempenho ([ADA93], [JAH91] e [KAU91]). A "ferramentação", ou seja, o desenvolvimento e/ou estudo das ferramentas computacionais que implementam a aritmética de alta exatidão é parte importante para a execução de um laboratório de computação científica. Estas ferramentas já vem sendo desenvolvidas e analisadas através de projetos desenvolvidos pelos Grupos de Matemática da Computação da PUCRS e da UFRGS.

Para o desenvolvimento desta pesquisa são analisadas algumas ferramentas computacionais intervalares disponíveis atualmente. A escolha destas ferramentas deve-se ao fato de que elas são resultados de pesquisas de ponta na área de computação científica. Deve-se salientar que, para o correto uso dessas ferramentas, deve-se ter um profundo conhecimento das técnicas matemáticas que nelas foram incorporadas. Essas técnicas são a aritmética intervalar, produto escalar ótimo e aritmética de alta exatidão que, juntas, propiciam elaboração de algoritmos com verificação automática do resultado ([ALE83], [KUL81], [KUL83] e [KUL88]). Essas técnicas são apresentados resumidamente a seguir.

3.1 Aritmética Intervalar

A Aritmética Intervalar trata com dados na forma de intervalos numéricos e surgiu com o objetivo de automatizar a análise do erro computacional, trazendo uma nova abordagem que permite um controle de erros com limites confiáveis, além de provar a existência ou não da solução de diversas equações.

Ela tem sido utilizada em diversas áreas, com a finalidade de resolver sistemas de equações lineares e não lineares, equações diferenciais ordinárias e parciais, equações integrais e problemas de otimização. Para cada uma dessas classes de problemas numéricos, o emprego da Aritmética Intervalar tem sido acompanhado pelo desenvolvimento de novas técnicas, as quais vão além da mera substituição dos coeficientes reais por intervalos de números.

A Aritmética Intervalar vem trazer uma técnica que permite um controle de erros com limites confiáveis, além de provar a existência e a unicidade da solução de muitos problemas numéricos. Surgiu com o objetivo de automatizar a análise do erro computacional. Várias das características do padrão IEEE são necessárias para a definição da aritmética intervalar. Entre estas, pode-se destacar a forma de representação dos números de ponto-flutuante, os intervalos de representatividade, os símbolos especiais de mais e menos infinito e o símbolo "not-a-number"(NaN), utilizados no tratamento de underflow e overflow e de outras exceções e, por fim, as operações com máxima exatidão.

O uso da aritmética intervalar foi desenvolvido inicialmente por Moore ([MOO66] e [MOO79]). Este ramo da matemática veio se desenvolvendo desde então. A matemática intervalar foi proposta em 1974 por Leslie Fox, combinando diferentes áreas como: aritmética intervalar, análise intervalar, topologia intervalar, algebra intervalar entre outras. Intervalos podem ser aplicados para representar valores desconhecidos ou para representar valores contínuos que podem ser conhecidos ou não. No primeiro sentido servem para controlar o erro de arredondamento e para representar dados inexatos, aproximações e erros de truncamento de procedimentos (como consistência lógica de programas, critério de parada de processos iterativos). No segundo sentido servem, por exemplo, para testes de verificação computacional e para a existência e unicidade de soluções de sistemas não lineares. A condição necessária não é verificada manualmente, mas automaticamente pelo computador.

O uso da Matemática Intervalar sofreu críticas em função de dois problemas principais, os quais se resumem em que, muitas vezes, podem resultar intervalos pessimistas, ou seja, demasiadamente grandes, que não possuem muita informação sobre o resultado, gastando-se muito tempo de máquina. Estas duas críticas foram facilmente refutadas, uma vez que, com a aritmética avançada, os resultados são produzidos com máxima exatidão. Quanto ao tempo de processamento, depende da forma como foi implementada. Existem várias formas, tanto via software quanto via hardware.

3.2 Aritmética de Alta Exatidão

O computador foi inventado para, entre outras coisas, fazer o trabalho complicado e/ou repetitivo para o homem. Na questão de cálculos em ponto-flutuante, a evidente discrepância entre o poder computacional e o controle dos erros computacionais sugere que se coloque o processo de estimativa de erro dentro do próprio computador. Para fazer isso o computador tem que ser feito aritmeticamente mais poderoso que o comum. Na aritmética de ponto-flutuante ordinária (definida pelo padrão IEEE), a maioria dos erros ocorre em acumulações, isso é, pela execução de uma seqüência de adições e subtrações. Na aritmética de ponto-fixo, contudo, a operação de acumulação é realizada sem erros. Assim, grande parte dos erros encontrados em ponto-flutuante podem ser evitados se a acumulação for realizada em ponto-fixo em um acumulador especial ([MIR86]).

Com a atual tecnologia pode-se realizar facilmente essa acumulação de ponto-fixo. Necessita-se, somente, providenciar um registrador de ponto-fixo na unidade de aritmética que cubra todo o domínio em ponto-flutuante. Se um registrador com esta característica não está disponível, então esse pode ser simulado na memória principal por software. Isso infelizmente pode resultar em perda de velocidade, que em muitos casos, é de maior importância do que o ganho em confiabilidade.

Por outro lado, se esse registrador tiver dupla precisão, então os produtos escalares de vetores de qualquer dimensão finita sempre podem ser calculados de forma exata. A possibilidade de calcular os produtos escalares de vetores em ponto-flutuante de qualquer dimensão, com exatidão total, abre uma nova dimensão na anánilse numérica. Em particular o produto escalar ótimo prova ser um instrumento essencial para alcançar maior exatidão computacional. No sentido de adaptar o computador para esta nova tarefa, o controle automático de erros, sua aritmética deve ser estendida ainda com um outro elemento.

Todas as operações com números de ponto-flutuante, que são a adição, a subtração, a divisão e a multiplicação, e o produto escalar ótimo de vetores em ponto-flutuante devem ser supridos com os arredondamentos direcionados, isso é, arredondamentos para o número de máquina anterior (para baixo), posterior (para cima) e para o mais próximo (simétrico).

A Aritmética de Alta Exatidão possibilita que os cálculos sejam efetuados com máxima exatidão, isto é, o resultado calculado difere do valor exato no máximo em um arredondamento. Para isto é necessário que o formato ou tipo de dado, as operações aritméticas suportadas pelo hardware ou pela linguagem de programação, safisfaçam as condições de um semimorfismo. Todas as operações definidas deste modo são então de máxima exatidão.

Os requisitos para se ter Aritmética de Alta Exatidão são: o uso de arredondamentos direcionados (para baixo *x e para cima *x), as quatro operações aritmética com máxima exatidão e o produto escalar ótimo. Resumindo, operações semimórficas para números reais e complexos, vetores e matrizes, assim como para intervalos reais e complexos, vetores e matrizes intervalares podem ser realizadas em termos de quinze (15) operações aritmética fundamentais em ponto-flutuante (+, -, * , /), cada uma munida de arredondamento (para cima, para baixo e para o mais próximo.

O uso da Aritmética de Alta Exatidão, aliado à matemática intervalar resulta em resultados confiáveis e com máxima exatidão, onde o resultado está contido em um intervalo cujos extremos diferem por apenas um arredondamento do valor real. Os cálculos intermediários são feitos em registradores especiais, de forma a simular a operação dos reais, sendo o arredondamento feito só no final, onde em cada extremo é aplicado o arredondamento direcionado para baixo e para cima.

3.3 Produto Escalar Ótimo

É utilizado na multiplicação de vetores, de matrizes e de vetores e matrizes nos diferentes tipos numéricos avançados de dados. A questão gira a respeito do número de arredondamentos. O cálculo tradicional do produto escalar de dois vetores com n componentes cada, envolve 2n-1 arredondamentos. Se ocorrerem cancelamentos, um grande número de dígitos significativos pode ser perdido. O resultado final poderá estar totalmente errado. A forma ótima do cálculo do produto escalar é através de um resultado intermediário, calculado com precisão infinita e com faixa de expoente ilimitada e, então, arredondado para o formato em ponto-flutuante desejado de acordo com o arredondamento selecionado. Esta definição da operação do produto escalar garante a mais alta exatidão possível. A ordem em que as operações elementares são realizadas quando determinam o produto escalar não é especificado ([ULL90] e [ULL90a]).

3.4 Verificação Automática do Resultado

O cálculo numérico com a verificação de resultados é de fundamental importância para muitas aplicações, por exemplo, para simulação e modelagem matemática. Na análise clássica do erro em algoritmos numéricos, o erro em cada operação em ponto-flutuante é estimado. Na verdade a possibilidade do resultado estar errado não é normalmente considerada. Do ponto de vista matemático, o problema da correção dos resultados é de grande importância para garantir a alta velocidade computacional atingida atualmente. Isto torna possível ao usuário distinguir entre inexatidão nos cálculos e as reais propriedades do modelo. Em contraste com a velha computacão científica, que podia ser caracterizada por multiplicações e divisões intensivas, contadores e contabilistas insistiam com adições e subttrações de longas colunas de números de várias magnitudes. Erros nestas adições e subtrações calculadas intensivamente não eram toleradas e vários métodos de validação eram desenvolvidos para assegurar que as respostas estivessem corretas até nos centavos.

No sentido de tornar possível o manuseio de milhões de adições e subtrações com o máximo de exatidão, é evidente que as capacidades da aritmética de ponto-flutuante têm que ser aumentadas. Dadas as possibilidades atuais, não há razão para que isto não possa ser feito em um chip simples. Uma grande vantagem na verificação automática de resultados é que o próprio computador pode rapidamente estabelecer se o cálculo realizado é ou não correto e útil. Neste caso, o programa pode escolher um algorítmo alternativo ou repetir o processo usando uma maior precisão. Técnicas similares de verificação automática de resultados podem ser aplicadas para muitas outras áreas de problemas algébricos, tal como a solução de sistemas não lineares de equações, o cálculo de raízes, a obtenção de autovalores e de autovetores de matrizes, problemas de otimização, etc. Em particular, a validade e a alta exatidão da avaliação de expressões aritméticas e de funções no computador está incluída. Estas rotinas também funcionam para problemas com dados intervalares ([KUL83]).

4 Ferramentas Computacionais Intervalares

Nesta etapa da pesquisa foram desenvolvidos estudos sobre a a linguagem de programação para computação científica Pascal-XSC ([HÖH97]), a qual é uma linguagem de programação de propósito geral que proporciona condições especiais à implementação de algoritmos numéricos sofisticados, que verificam matematicamente os resultados. PASCAL-XSC é uma extensão da linguagem de programação PASCAL para computação científica. Seu nome vem do inglês, **PASCAL** *e***X***tension for* **S***cientific* **C***omputation.*

Ele contém as características do Pascal Padrão; o conceito de operador universal (operador definido pelo usuário); funções e operadores com tipo de resultado arbitrário; *overloading* de rotinas, funções e operadores; *overloading* de atribuição de operadores; *overloading* de rotinas de entrada e saída (*read* e *write* genéricos); conceito de módulos; *arrays* dinâmicos; acesso a *subarrays*; conceito de *string*; arredondamento controlado; produto escalar ótimo (exato); tipo-padrão ***dotprecision*** (um formato de ponto-fixo abrangendo todo o intervalo do produto de valores em ponto-flutuante); aritmética especial para tipos-padrões de complexos e intervalos; aritmética de alta exatidão para todos os padrões; alta exatidão para funções elementares e avaliação exata de expressões (*#-expressions*). Este sistema proporciona uma completa simulação da aritmética de ponto-flutuante definida pelo padrão binário IEEE-754.

Pelo uso dos módulos matemáticos do PASCAL-XSC, algoritmos numéricos que providenciam alta exatidão e verificação automática de resultados podem ser facilmente programados. Além disso, o compilador PASCAL-XSC simplifica o projeto de programas para as Engenharias e para a Computação Científica, graças à estrutura modular dos programas, à possibilidade de definição de operadores, ao *overloading* de funções, rotinas e operadores, às funções e operadores com tipos arbitrários de dados e aos *arrays* dinâmicos. Outras características presentes nos módulos da aritmética padrão para os tipos adicionais de dados numéricos incluem operadores e funções elementares com alta exatidão e com avaliação exata de expressões (para maiores detalhes a respeito do Pascal-XSC ver [KLA92]).

Os programas escritos em PASCAL-XSC são de fácil leitura, mesmo se existirem as operações com tipos de dados dos espaços matemáticos avançados, onde os operadores usados para as operações obedecem à notação matemática convencional. Existe ainda, uma grande quantidade de problemas numéricos que podem ser resolvidos pelas bibliotecas de rotinas com verificação automática do resultado. O PASCAL-XSC possui grandes facilidades para o desenvolvimento de tais rotinas ([HAM93] e [KRÄ96]).

Com a utilização desta linguagem já foram desenvolvidas bibliotecas que possibilitam a resolução de sistemas de equações lineares utilizando verificação automática do resultado. Os principais objetivos com o desenvolvimento das bibliotecas são os seguintes: utilização dessas bibliotecas na difusão do estudo de métodos intervalares junto aos meios acadêmicos e a pessoas que estejam interessadas a respeito desses métodos; utilização das bibliotecas na resolução de problemas computacionais nas mais diversas áreas de pesquisa. A criação de bibliotecas científicas independentes, justifica-se no fato de que estas devem ser incluídas nos programas aplicativos dos usuários.

Através do estudo dessas técnicas intervalares foram identificadas quatro tipos de metodologias de desenvolvimento ou abordagens para a resolução de sistemas de equações lineares. Essas abordagens geraram, cada uma, um módulo da biblioteca. Estes módulos são:

- Módulo *dirint*: inclui os métodos baseados em operações algébricas intervalares e propriedades intervalares, também são conhecidos como métodos diretos intervalares;

- Módulo *refint*: inclui os métodos baseados em inclusões ou refinamentos intervalares da solução e do erro. Também podem ser chamados de métodos híbridos, uma vez que se pode utilizar a solução inicial calculada por métodos pontuais ou a matriz inversa pontual;

- Módulo *itrint*: inclui os métodos iterativos intervalares, conhecidos também como métodos de relaxação, eles também se baseiam em inclusões monotônicas.

- Módulo *equalg*: contém as rotinas do caso particular de sistema linear de ordem um, ou seja, resolução algébrica de equações por métodos intervalares.

Também estão sendo avaliados os pacotes matemáticos Maple ([ABE99], [HEA98] e [MON98]) e Matlab ([HAN99]) (juntamente com a biblioteca *intlab*) e suas bibliotecas intervalares, com o objetivo de realizar uma análise de suas potencialidades e uma comparação com as outras ferramentas utilizadas para a realização dos testes.

5 Conclusões

Nas pesquisas realizadas até o momento pôde-se verificar que o uso de métodos intervalares pode verificar a existência ou não existência da solução de sistemas de equações lineares, o que pode não acontecer com os métodos pontuais. E qual o motivo de falar-se sobre sistemas de equações lineares? É que uma gama muito grande de problemas na computação científica são solucionados através da resolução desses sistemas de equações.

Os resultados obtidos pelos métodos intervalares implementados no ambiente de computadores pessoais e estações de trabalho mostraram-se, em sua grande maioria, com boa qualidade (utilizando a linguagem Pascal-XSC). Comparando-os com os resultados pontuais dos sistemas testados, verificou-se mesma grandeza de exatidão e, ainda, que a solução pontual estava contida no intervalo solução. A ordem do diâmetro dos intervalos soluções foi de 10^{-15}, o que garantia uma exatidão de cerca de 14 dígitos significativos corretos. O próximo passo será de comparar esses resultados com os obtidos usando os softwares matemáticos Maple V e Matlab (e suas bibliotecas intervalares) a fim de realizar uma avaliação mais ampla sobre o uso de ferramentas computacionais intervalares para aplicações em computação científica.

6 Bibliografia

[ABE99] ABELL, M.L.; BRASELTON, J.P. **Maple V by Example.** USA: Academic Press, 1999.

[ADA93] ADAMS,E; KULISCH,U. Eds. **Scientific Computing with automatic result verification.** San Diego: Academic Press, 1993.

[ALE83] ALEFELD, G; HERZBERGER, J. **- An introduction to interval computations.** New York, Academic Press, 1983.

[DIV95] DIVERIO, T.A. **Uso Efetivo da Matemática Intervar em Supercomputadores Vetorias.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1995.

[DIV95a] DIVERIO, T.A.; et al. **LIBIAVI.A Biblioteca de Rotinas Intervalares – Manual de utilização.** Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1995.

[DIV97] DIVERIO, T.A.; NAVAUX, P.O.A.; CLAUDIO, D.M.; HÖLBIG, C.A.; FERNANDES, U.A.L.; SAGULA, R.L. High Performance with High Accuracy Laboratory. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, Porto Alegre: v.3, nº2, p.35-53, 1997.

[HAM93] HAMMER,R; HOCKS,M; KULISCH,U; RATZ,D. - **Numerical Toolbox for Verified Computing I: basic numerical problems.** Berlin, Springer Verlag, 1993.

[HAN99] HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. Matlab 5 - Versão do Estudante - Guia do Usuário. BRA: Makron Books, 1999.

[HEA98] HEAL, K.M.; HANSEN, M.L.; RICHARD, K.M. **Maple V Learning Guide.** USA: Springer, 1998.

[HÖH97] HÖHER, C.L.; HÖLBIG, C.A.; DIVERIO, T.A**. Programando em Pascal-XSC.** Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 1997.

[HÖL96] HÖLBIG, C.A.; SAGULA, R.L.; FERNANDES, U.A.L.; DIVERIO, T.A.; CLAUDIO, D.M. **High Accuracy and High Performance Environment.** In: INTERVAL'96 - INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL METHODS AND COMPUTER AIDED PROOFS IN SCIENCE AND ENGINEERING, Wuerzburg, Alemanha. Anais ... Würzburg: Universität Würzburg, 1996, p.51.

[HÖL97] HÖLBIG, C.A.; CLAUDIO, D.M. **O Desenvolvimento de Bibliotecas Científicas Intervalares.** EVENTO INTERNACIONAL CIENTIFICO METODOLÓGICO DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN, 3., Matanzas, Cuba. Anais ... Matanzas: Universidad de Matanzas, 1997.

[JAH91] JAHN, K-U (Ed) - **Computerarithmetik mit ergebnisverifikation problemseminar, technische Hochschede Leipzig.** March 13-15,1991. Proceedigs in Wissenschaftliche zeitschrift der technischen Hochschule. Leipzig, Jahrgang 15, heft 6, 1991.

[KAU91] KAUCHER,E; MARKOV,S.M; MAYER,G (Eds) - **Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling.** Proceedings of SCAN'90 Albena, Sept 24-28, 1990. IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, v.12. Basel: J.C.Baltzer, 1991.

[KLA92] KLATTE, R; KULISC, U; NEAGA, M; RATZ, D; ULLRICH, Ch - **PASCAL-XSC language reference with examples.** Berlin, Springer Verlag, 1992.

[KRÄ96] KRÄMER, W.; KULISCH, U.; LOHNER, R. **Numerical Toolbox for Verified Computing II:** advanced numerical problems. Berlim: Springer-Verlag, 1996.

[KUL81] KULISCH, U; MIRANKER,W.L. - **Computer arithmetic in theory and Practice.** New York, Academic Press, 1981.

[KUL83] KULISCH, U; MIRANKER, W. L. (Eds) - **A new approach to scientific computation.** Proceedings of symposium held at IBM Research Center, Yorktown Heights, 1982. New York, Academic Press, 1983.

[KUL88] KULISCH, U; STETTER,H.J (Eds) - **Scientific computation with automatic result verification.** Seminar held in Karlsruhe Sept.30-Oct.2, 1987. Computing suplementum 6, Wien, Springer Verlag, 1988.

[MON98] MONAGAN, M.B.; GEDDES, K.O.; HEAL, K.M.; LABAHN, G.; VORKOETTER, S.M. **Maple V Programming Guide.** USA: Springer, 1998.

[MOO66] MOORE, RAMON,E - **Interval Analysis.** Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1966.

[MOO79] MOORE, R E. - **Methods and applications of interval analysis.** Philadelphia, SIAM, 1979.

[ULL90a] ULLRICH,Ch (Ed) - **Computer Arithmetic and self-validating numerical methods.** Proceedings of SCAN'89, invited papers. Basel, Oct 2-6, 1989. San Diego, Academic Press, 1990.

[ULL90b] ULLRICH,Ch (Ed) - **Contributions to computer arithmetic and self-validating Numerical Methods.** Proceedings of SCAN'89, submitted papers. Basel, Oct 2-6, 1989. IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, v.7. Basel: J.C Baltzer, 1990.