

VI. INTERACCION ENTRE COLOIDES Y MACROIONES EN SOLUCION.

VI.1. Energia libre de una partícula cargada en solución salina.

La energía libre de una partícula con cargas fijas sumergida en una solución iónica está dada por la siguiente expresión⁽⁴²⁾:

$$F = U_e - TS \quad (\text{VI.1})$$

donde U_e es la energía interna eléctrica de la partícula y los iones que la neutralizan, S es la entropía de la distribución de esos iones y T la temperatura absoluta del sistema.

La energía interna U_e se escribe mediante la siguiente integral en el volumen del sistema:

$$U_e = (1/2) \int (\rho_r + \rho_m) dv \quad (\text{VI.2})$$

y la entropía S vale:

$$-TS = KT \int [c_+ \ln(c_+) + c_- \ln(c_-)] dv \quad (\text{VI.3})$$

donde ρ_r es la densidad de cargas fijas en la partícula, ρ_m la densidad de carga iónica dada por la ecuación (III.2) y c_+ y c_- son las concentraciones numéricas de cationes y aniones respectivamente (ecuaciones (III.3) y (III.4)).

Este método de obtener la energía libre se compone de los siguientes procesos:

- 1^a Se llevan los iones a la distribución final.
- 2^a Se cargan los iones y la partícula manteniendo fija la distribución.

Otro procedimiento para hallar la energía libre, cuya equivalencia con el anterior se demuestra en la ref.⁽⁴²⁾, emplea la expresión siguiente:

$$F = F_0 + F_e \quad (\text{VI.4})$$

donde F_0 es la energía libre standard de una solución de iones sin carga y F_e vale:

$$F_e = 2 \int_0^{\infty} U_e(de/e) \quad (\text{VI.5})$$

En este último método se considera primero una solución ideal de iones que posteriormente se cargan conjuntamente con el macroion. La distribución de los iones se cambia durante el proceso de carga.

VI.2 Energía libre para un sistema de dos placas cargadas paralelas, sumergidas en una solución salina.

La energía libre para este sistema se calcula empleando la ecuación (VI.5) con las relaciones entre Ψ , ρ_m y d dadas en la sección III.2 (35). Se llega al siguiente resultado para la energía libre de 1 cm² de placas para la región comprendida entre 0 y d :

$$F = -(2c_0KT/\kappa) \{ (\kappa d/2)(3e^u - 2 - e^{-u}) + 2[2\cosh(z) - 2\cosh(u)]^{1/2} + 2 \int_u^z \{ (e^{-y} - e^u) / [2\cosh(y) - 2\cosh(u)]^{1/2} \} dy \} \quad (\text{VI.6})$$

Cuando la distancia entre las placas es infinitamente grande la energía libre F se escribe:

$$F_{\infty} = -(2c_0KT/\kappa) \{ 4\cosh(z/2) - 4 \} \quad (\text{VI.7})$$

VI.3 Fuerza de repulsión entre dos placas cargadas.

La fuerza p por cm² entre dos placas cargadas sumergidas en una solución de electrolito se calcula derivando, respec-

to de la distancia d , la energía libre F dada en la ecuación (VI.6):

$$p = -(\partial F / \partial d)_z \quad (\text{VI.8})$$

Se obtiene para p la siguiente expresión:

$$p = 2c_0KT[\cosh(u)-1] \quad (\text{VI.9})$$

A este mismo resultado se llega (35) calculando la presión osmótica del exceso de iones presentes entre las placas. El incremento de la concentración de iones en el plano central ($x=d$) es: $2c_0[\cosh(u)-1]$ y aplicando la ecuación de van't Hoff para la presión osmótica se obtiene la ecuación (VI.9).

El potencial repulsivo por cm^2 que equivale al trabajo necesario para llevar a las placas desde el infinito a la distancia $2d$ se expresa de la siguiente manera:

$$V_R = 2(F - F_\infty) = -2 \int_{\infty}^d p dx \quad (\text{VI.10})$$

Si la interacción entre las placas es débil ($u < 1$) el potencial eléctrico para $x=d$ puede obtenerse en primera aproximación como la suma de los potenciales eléctricos debidos a las dos placas sin interacción entre ellas. Es decir:

$$u = 2y(d) \quad (\text{VI.11})$$

Ademas puede emplearse para $y(d)$ la expresión aproximada dada en la ecuación (III.15), y se obtiene:

$$u = 8\mathcal{V}\exp(-\xi) = 8\mathcal{V}\exp(-Kd) \quad (\text{VI.12})$$

con $\mathcal{V} = [\exp(z/2)-1]/[\exp(z/2)+1]$.

Con estas aproximaciones el potencial de la fuerza de re-

pulsión se escribe:

$$V_R = (64c_0KT/K)\gamma^2 \exp(-2Kd) \quad (\text{VI.13})$$

VI.4. Fuerza de repulsión entre cilindros cargados.

G.F.ELLIOTT ⁽⁵⁰⁾ realiza un cálculo aproximado de la energía de repulsión de dos cilindros cargados paralelos y sumergidos en una solución de electrolito. Supone las superficies cilíndricas enfrentadas seccionadas en pequeñas placas paralelas.

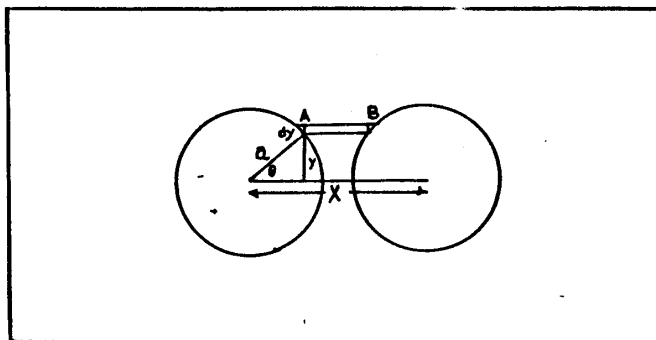


Figura VI.1

La Fig. VI.1 muestra un corte transversal de los dos cilindros; A y B son dos pequeños incrementos de la coordenada $y = a \sin \theta$ que representa pequeñas placas paralelas a una distancia $AB = (X - 2a \cos \theta)$. Si V_R es la energía potencial repulsiva por unidad de área entre dos placas cargadas paralelas sumergidas en una solución de electrolito, el diferencial de energía libre correspondiente a los incrementos A y B resulta:

$$dV_R = LV_R a \cos \theta d\theta \quad (\text{VI.14})$$

Se emplea para V_R la ecuación (VI.13) válida para interacciones débiles ($u < 1$). Se integra la ecuación (VI.14) para las superficies cilíndricas enfrentadas (entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$)

y resulta para la energía de repulsión por unidad de longitud de los dos cilindros la siguiente expresión:

$$V_R = (16\varepsilon_1 K^2 T^2 \mathcal{V}^2 a / \pi e^2) \exp(-\kappa X) \cdot J' \quad (\text{VI.15})$$

donde \mathcal{V} viene dada por la ecuación (III.15) y J' es la integral:

$$J' = \int_0^{\pi/2} \exp(2\kappa a \cos\theta) \cos\theta d\theta \quad (\text{VI.16})$$

que se resuelve numéricamente.

La fuerza de repulsión por unidad de longitud entre los dos cilindros se calcula de la siguiente manera:

$$(dV_R/dX) = -(16\varepsilon_1/\pi)(KTK\mathcal{V}/e)^2 \exp(-\kappa X) \cdot J' \quad (\text{VI.17})$$

BRENNER Y PARSESIAN ⁽⁵¹⁾ analizaron la interacción coulombiana entre macroiones cilíndricos en solución con un electrolito. Suponen que la interacción se realiza por la superposición de las curvas potencial distancia de cada varilla en las regiones donde $e\psi < KT$. Procediendo de esta forma el potencial eléctrico de las varillas se pueden determinar empleando la definición de densidad equivalente de carga introducida en la sección III.3. La energía de interacción electrostática por unidad de longitud de dos varillas cargadas paralelas (de longitud infinita y radio a) en un medio iónico y separadas una distancia X , se calcula como el producto de la densidad lineal de carga equivalente de una de ellas por el potencial que sobre la misma ejerce la otra varilla. Emplendo el potencial de un macroion cilíndrico dado en la ecuación (III.29) se obtiene la siguiente expresión para la energía

$$W(X) = 2(e^2 \mathcal{V}_0^2 / \varepsilon_1) K_0(\kappa X) \quad (\text{VI.18})$$

La fuerza electrostática por unidad de longitud entre las dos varillas es el producto del campo eléctrico de una de

Las varilla a la distancia X por la densidad lineal de carga equivalente. El campo eléctrico se obtiene de la ecuación (III.30) y la fuerza vale

$$f_{//}(X) = 2(e^2 V_0^2 / \epsilon_1) K_1(KX) \quad (\text{VI.19})$$

Esta aproximación es válida si el potencial en alguna superficie entre las varillas es la suma de los potenciales sin perturbar de cada una de las varillas y esto se cumple cuando la distancia $X-2a$ es mayor que $1/K$, que es la longitud de Debye del medio (52).

F. OOSAWA(53,42) calcula la fuerza repulsiva entre macroiones, tipo varilla, paralelos en una solución en función de la densidad de carga de las varillas. El modelo propuesto por OOSAWA consiste de m varillas de radio a en la región central del volumen libre de radio R , formando un agregado cilindrico de diámetro $X \ll R$. Supone que el número de varillas es grande con el fin de poder considerar dos fases; la fase del agregado y la fase externa. La mayoría de los contraiones están condensados entre las varillas y casi neutralizan al conjunto. Empleando la ecuación de Poisson-Boltzmann demuestra que la energía libre del sistema es función solamente de las coordenadas relativas R/a y X/a . Aprovechando esta característica, sin conocer la expresión exacta de la energía libre, encuentra una expresión para la fuerza extensiva del agregado, $\partial F / \partial X$, que se compone de dos términos. Uno de ellos representa la fuerza auto extensiva de m varillas cargadas que cuya expresión encuentra empleando el modelo de dos fases para determinar la distribución de contraiones (sección III.5.) y el otro posee como única incognita la concentración $c(R)$ de contraiones en la periferia del volumen libre del agregado para la cual emplea (para $X \ll R$) el valor de la concentración correspondiente a una varilla con una densidad de carga mQ colocada en el centro del volumen libre.

Finalmente la fuerza extensiva $\partial F / \partial X$ del conjunto de m

varillas, cada una con N cargas, que forma un agregado cilíndrico de longitud L y diámetro X ($X \ll L$) en ausencia de sal esta dada por

$$X(\partial F / \partial X) = -Nm(m-1)QKT \quad \text{para } 0 < Q < 1/(mz) \quad (\text{VI.20})$$

$$= -Nm(2/z - Q - 1/mz^2Q)KT \quad \text{para } 1/mz < Q < 1/z \quad (\text{VI.21})$$

$$= -Nm[(m-1)/mz^2Q]KT \quad \text{para } 1/z < Q \quad (\text{VI.22})$$

donde $Q = [e^2 / (\epsilon_1 KT)](N/L)$ y z la valencia de los contraiones.

La fuerza de repulsión entre dos varilla se encuentre poniendo $m=2$ en las expresiones (VI.20), (VI.21) y (VI.22).

VI.5. Fuerzas de atracción de van der Waals.

Una de las fuerzas atractivas consideradas en sistemas coloidales es la de van der Waals. La energía de interacción mutua entre dos átomos iguales separados por una distancia r está dada por la expresión siguiente:

$$V_A = \lambda' r^{-6} \quad (\text{VI.23})$$

donde λ' es una constante que depende de las propiedades de los átomos (o moléculas) en consideración.

El potencial atractivo entre dos partículas se puede calcular mediante la suma de los potenciales atractivos de todos los pares atómicos formados por dos átomos pertenecientes a diferentes partículas. Se introduce la magnitud $A = \pi^2 q^2 \lambda'$ donde q es el número de átomos por cm^3 de la sustancia que forma las partículas. La integración para el sistema de dos placas planas paralelas de espesor δ' y colocadas a una distancia $2d$ (entre superficies interiores), lleva al siguiente resultado para el potencial atractivo por unidad de área (35).

$$V_A = -(A/48\pi) \{1/d^2 + 1/(d+\delta')^2 - 2/[d+(\delta'/2)]^2\} \quad (\text{VI.24})$$

que puede escribirse aproximadamente:

$$V_A = -(A\delta'^2/32\pi)(1/d^4) \quad \text{para } d \gg \delta' \quad (\text{VI.25})$$

$$V_A = -(A/48\pi)(1/d^2 - 7/\delta'^2) \quad \text{para } d \delta' \quad \text{y} \quad (\text{VI.26})$$

$$V_A = -A/(48\pi d^2) \quad \text{para } d \ll \delta' \quad (\text{VI.27})$$

G.F.Elliott ⁽⁵⁰⁾ calcula la energía de interacción de Van der Waals para dos cilindros de radio a colocados con sus ejes paralelos a una distancia X entre ellos. Encuentra primero la energía de interacción entre un cilindro infinitamente largo y un solo átomo a una distancia R del eje del cilindro (Fig. VI.2).

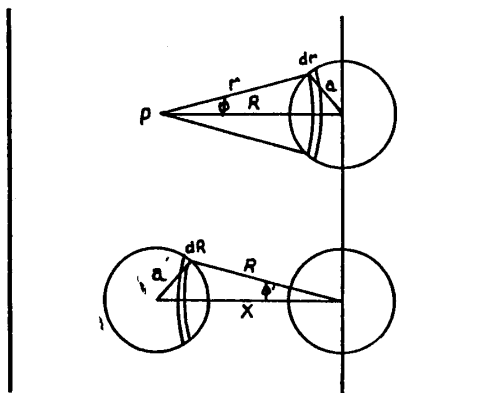


Figura VI.2

La integración sobre las variables z y ϕ , donde z coincide con el eje del cilindro, lleva a la siguiente expresión para esa energía de interacción:

$$U_P = (3/4)(A/\pi q) \int_{R-a}^{R+a} (1/r^4) \cos^{-1}[(R^2+r^2-a^2)/2Rr] dr \quad (\text{VI.28})$$

Luego se considera al otro cilindro, de longitud unidad, a una distancia X (Fig. VI.2). Se integra sobre las variables ϕ' y R y se multiplica por 6 para tener en cuenta que un cilindro (de longitud unidad) interacciona con seis

vecinos en un empaquetado hexagonal. Esto conduce a la siguiente expresión para la energía de interacción de un cilindro de longitud unidad con sus seis vecinos:

$$F_v = -(9A/\pi) \int_{R=X-a}^{X+a} \int_{r=R-a}^{R+a} (R/r^4) \cos^{-1}[(X^2+R^2-a^2)/2XR] \cos^{-1}[(R^2+r^2-a^2)/2Rr] dr dR. \quad (\text{VI.29})$$

Esta integral fue resuelta numéricamente en la ref. (50) para cilindros de 100\AA de radio y con la constante $A=10^{-12}\text{erg}$.

La fuerza atractiva de van der Waals del sistema con 7 cilindros en un empaquetado hexagonal, se encuentra calculando numéricamente la derivada (dF_v/dX).

Si los cilindros son tan delgados que su masa se la puede considerar concentrada en una línea, la energía de interacción mutua por unidad de longitud de un cilindro con sus 6 vecinos es (50):

$$(2,25A\pi a^4)(1/X^5) \quad (\text{VI.30})$$

VI.6. Fuerza atractiva debida a la correlación de las fluctuaciones de carga en los macroiones

J. G. KIRKWOOD y J. B. SHUMAKER (54) calculan la fuerza de interacción electrostática entre dos proteínas cuando están en su punto isoiónico. Consideran dos moléculas de proteína en una solución acuosa, con sus centros de masa separados una distancia R . suponen que la molécula 1 tiene n_1 grupos cargados de carga intrínseca $e_1^{(1)}$ y la molécula 2 con n_2 grupos cargados de carga intrínseca $e_k^{(2)}$. Definen las variables de ocupación protónica $x_1^{(1)}$ y $x_k^{(2)}$ que valen 1 cuando el grupo básico está ocupado por un proton y cero cuando está desocupado. Para configuraciones protónicas especificadas las cargas de los grupos valen:

$$q_1^{(1)} = e_1^{(1)} + ex_1^{(1)}$$

$$q_k^{(2)} = e_k^{(2)} + ex_k^{(2)} \quad (\text{VI.31})$$

La energía de interacción electrostática entre las dos moléculas para una determinada orientación y configuración protónica de las mismas la escriben de la siguiente manera

$$V = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} q_i^{(1)} q_k^{(2)} / \epsilon_1 R_{ik}^{(12)} \quad (\text{VI.32})$$

donde ϵ_1 es la constante dieléctrica del solvente y $R_{ik}^{(12)}$ es la distancia entre el grupo i de la molécula 1 y el grupo k de la molécula 2. En la ec. (VI.32) no tienen en cuenta el apantallamiento del electrolito que lo introducen posteriormente para el caso particular de moléculas esféricas.

El potencial $W(R)$ de la fuerza promedio entre las dos moléculas lo relacionan al potencial V de la fuerza para orientaciones y configuración protónicas fijadas con la siguiente definición

$$\exp[-W(R)/(KT)] = \langle \exp[-V/(KT)] \rangle \quad (\text{VI.33})$$

para $V/(KT) \ll 1$ escriben

$$W(R) = \langle V \rangle - (1/2KT) [\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2] \quad (\text{VI.34})$$

donde el promedio se toma para todas las orientaciones y configuraciones protónicas de las dos moléculas, con funciones de distribución no correlacionadas.

Separan las contribuciones a $W(R)$ de las distribuciones de carga media y fluctuante escribiendo la carga de los grupos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} q_i^{(1)} &= \langle q_i^{(1)} \rangle + \Delta q_i^{(1)} \\ q_k^{(2)} &= \langle q_k^{(2)} \rangle + \Delta q_k^{(2)} \\ \Delta q_i^{(1)} &= e[x_i^{(1)} - \langle x_i^{(1)} \rangle] \end{aligned}$$

$$\Delta q_k^{(2)} = e[x_k^{(2)} - \langle x_k^{(2)} \rangle] \quad (\text{VI.35})$$

obteniéndose para $W(R)$ la siguiente expresión

$$W(R) = \langle q^{(1)} \rangle \langle q^{(2)} \rangle / \epsilon_1 R + W^{(00)}(R) + W^{(10)}(R) + W^{(01)}(R) + W^{(11)}(R) \quad (\text{VI.36})$$

donde $\langle q^{(1)} \rangle$ y $\langle q^{(2)} \rangle$ son las cargas totales promedios de las dos moléculas y los restantes términos de la ec. (VI.36) se escriben

$$W^{(00)}(R) = -(2\epsilon_1^2 R^2 KT)^{-1} \sum_{i,l=1}^{n1} \sum_{k,s=1}^{n2} \langle q_i^{(1)} \rangle \langle q_l^{(1)} \rangle \langle q_k^{(2)} \rangle \langle q_s^{(2)} \rangle f_{ikls}$$

$$W^{(10)}(R) = -(2\epsilon_1^2 R^2 KT)^{-1} \sum_{i,l=1}^{n1} \sum_{k,s=1}^{n2} \langle \Delta q_i^{(1)} \Delta q_l^{(1)} \rangle \langle q_k^{(2)} \rangle \langle q_s^{(2)} \rangle f_{ikls}$$

$$W^{(01)}(R) = -(2\epsilon_1^2 R^2 KT)^{-1} \sum_{i,l=1}^{n1} \sum_{k,s=1}^{n2} \langle q_i^{(1)} \rangle \langle q_l^{(1)} \rangle \langle \Delta q_k^{(2)} \Delta q_s^{(2)} \rangle f_{ikls}$$

$$W^{(11)}(R) = -(2\epsilon_1^2 R^2 KT)^{-1} \sum_{i,l=1}^{n1} \sum_{k,s=1}^{n2} \langle \Delta q_i^{(1)} \Delta q_l^{(1)} \rangle \langle \Delta q_k^{(2)} \Delta q_s^{(2)} \rangle f_{ikls}$$

con $f_{ikls} = \langle R^2 / (R_{ik}^{(12)} R_{ls}^{(12)}) \rangle \quad (\text{VI.37})$

Luego consideran que el pH de la solución corresponde al punto isoiónico de las proteínas donde se anulan las cargas totales promedio de las mismas. De esta manera el término $W^{(11)}(R)$ es el único distinto de cero en la expresión (VI.36) de $W(R)$. Suponen que las proteínas son esféricas y que están a una distancia R mucho mayor que sus radios de manera de los factores f_{ikls} valgan 1. Al término $W^{(11)}(R)$ le incluyen un factor de Debye-Hückel que tenga en cuenta el

apantallamiento a la interacción electrostática fluctuante debido a las contraiones de las proteínas y los iones de otros electrolitos presentes en la solución.

Los valores medios de las cargas fluctuantes que figuran en la expresión de $W^{(11)}(R)$ los calculan empleando la teoría del equilibrio ácido-base de anfólitos desarrollada previamente por KIRKWOOD.

F.OOSAWA (53) estima la fuerza de atracción entre dos macroiones tipo varilla originada por la correlación de la fluctuación de la concentración de los contraiones ligados.

Debido a las fluctuaciones térmicas la concentración de los contraiones ligados a un macroion se desvía de su valor promedio. Cuando dos macroiones se aproximan estas fluctuaciones de carga se correlacionan para dar como resultado una fuerza atractiva semejante a la de van der Waals.

Los macroiones se colocan en forma paralela y a una distancia X uno del otro. Las coordenadas, x_1 y x_2 , determinan la posición a lo largo de sus respectivos ejes. Cada macroion tiene una densidad lineal de contraiones promedio $\bar{V}_B(x) = (N_B/L)$. Se denominan $\delta V_B(x_1)$ y $\delta V_B(x_2)$ a las desviaciones del valor promedio de las densidades de contraiones en los puntos x_1 y x_2 .

Para dos varillas paralelas próximas la energía de interacción debida a la fluctuación de carga en los puntos x_1 y x_2 se escribe:

$$e^2 Z^2 \int \delta V_B(x_1) dx_1 \int \delta V_B(x_2) dx_2 / \epsilon_1 r_{12} \quad (\text{VI.38})$$

donde r_{12} es la distancia entre los dos puntos x_1 y x_2 .

Si se ignora la correlación de fluctuaciones de alto orden entre tres o mas puntos diferentes de las dos varillas la energía de interacción promedio entre los dos puntos x_1 y x_2 se escribe aproximadamente:

$$-e^4 Z^4 \{ \langle [\int \delta V_B(x_1) dx_1]^2 \rangle \langle [\int \delta V_B(x_2) dx_2]^2 \rangle \} / (\epsilon_1^2 r_{12}^2 K T) \quad (\text{VI.39})$$

donde los valores cuadráticos medios de los excesos de con-

centración de contraiones se calculan suponiendo que no existe correlación entre los macroiones. F.OOSAWA estima el valor medio $\langle [\delta v_B(x) dx]^2 \rangle$ en cualquiera de los dos macroiones calculando el exceso de energía libre debido a las desviaciones de concentración $\delta v_B(x)$ en x , $x+dx$. La energía total de la interacción, F' , se obtiene integrando (VI.39) con respecto a x_1 y x_2 a lo largo de las dos varillas. La expresión final de la energía total, para $X \ll L$ resulta ser

$$\langle F' \rangle = -[(N_B/N)z^2Q]^2/[1+(N_B/N)z^2Q]^2(L/X)KT \quad (\text{VI.40})$$

y la fuerza atractiva debida a esta energía

$$dF'/dX = [(N_B/N)z^2Q]^2/[1+(N_B/N)z^2Q]^2(L/X^2)KT \quad (\text{VI.41})$$

VI.7 Energía potencial total entre coloides y macroiones.

VERWEY y OVERBEEK ⁽³⁵⁾ analizaron la estabilidad de suspensiones coloidales de partículas tipo "placa". Suponen el espesor de las placas mayor que la distancia entre ellas y emplean la ecuación (VI.27) para el potencial atractivo V_A . Usan para el potencial de repulsión la ecuación (VI.13), válida para interacciones débiles entre las placas. De esta manera se verifican las siguientes propiedades para este sistema:

-El potencial repulsivo V_R decrece al aumentar la distancia entre las placas de una manera mas o menos exponencial. (para distancias moderadas y grandes).

-El potencial atractivo decrece como el cuadrado de la distancia.

-La energía potencial total (V_A+V_R) se hace negativa para distancias entre las placas muy grandes o muy pequeñas, mientras que para distancias intermedias (d del orden de K^{-1}) pueden ocurrir dos casos:

i) $V_R+V_A > 0$ con curvas de energía potencial, como la (a) de la Fig.VI.3, con un máximo para distancias intermedias y un mínimo a grandes distancias.

ii) $V_R + V_A < 0$ con curvas de energía potencial siempre negativas como la (b) de la Fig VI.3.

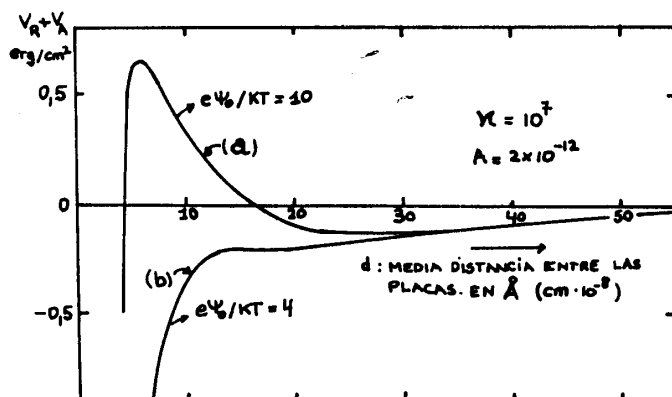


Figura VI.3

Los parámetros que determinan la forma de las curvas de energía potencial son: la constante A de van der Waals, el potencial eléctrico (ψ_0 o z) sobre la superficie del coloide y la constante de Debye-Hückel del sistema.

El máximo de la curva (a) evita que las partículas en sus encuentros debidos al movimiento Browniano caigan en la región de atracción con la consecuente floculación del sistema. La magnitud de este máximo respecto de KT es un parámetro que caracteriza la estabilidad del sistema.

El mínimo secundario de energía que aparece cuando las fuerzas de van der Waals superan a la repulsión electrostática sería el responsable de la formación de agregados reversibles como son los "tactoids" que aparecen en ciertas suspensiones coloidales con partículas tipo placa o varilla (55).

G.F.ELLIOTT (50) calcula la energía potencial total ($V_R + V_A$) de la interacción (por unidad de longitud) de un cilindro con sus seis vecinos de un empaquetado hexagonal (ecuaciones (VI.15) y (VI.29)). Los parámetros son elegidos similares a los que caracterizan al sistema muscular de una red de filamentos de miosina.

Los parámetros del sistema son los siguientes:
 radio de los cilindros: $a=100 \text{ \AA}$
 potencial eléctrico en la superficie: $z=(e\psi_0/KT)=2$
 constante de Debye-Hückel: $\kappa=4 \times 10^8$
 constante de van der Waals: $A=10^{-12}$
 $KT=4,0 \times 10^{-14} \text{ erg.}$

La curva de la energía potencial en función de la distancia muestra un máximo de $2700 \text{ KT}/\mu\text{m}$ y un mínimo secundario de $25 \text{ KT}/\mu\text{m}$ a una distancia entre los cilindros de $X=370 \text{ \AA}$.

Este mismo punto de balance estable se encuentra también en la intersección de las curvas de las fuerzas atractiva y repulsiva (por unidad de longitud) en función de la distancia.

F.OOSAWA (53.42) compara las fuerzas de repulsión y de atracción de dos macroiones cilíndricos con alta densidad de carga empleando las ecuaciones: (VI.22) con $m=2$ y (VI.41) respectivamente. Infiere que prácticamente aparece una atracción antes del contacto directo de los macroiones solo en el caso de contraiones divalentes.