Capítulo 1

Prefacio

Quizás sea el caos
la forma que encontró Dios
de ocultarnos su plan determinista.

Uno de los mayores logros científicos en el último siglo ha sido, sin lugar a dudas, el desarrollo de la teoría del caos (véase e.g. Devaney 2003). Sus alcances son tan amplios que impacta en muchas y variadas ciencias aplicadas como, e.g., la Astronomía Dinámica: la identificación de regiones con dinámica regular o caótica es fundamental en el estudio de la dinámica del Sistema Solar, e.g. para comprender la variación de los elementos orbitales tanto de planetas como de asteroides (Laughlin & Chambers 2001; Virtanen *et al.* 2001; Voyatzis 2008; Giuppone *et al.* 2010). La determinación de regiones de movimiento estable en modelos de sistemas planetarios extrasolares se ha convertido, recientemente, en un tema de vanguardia (Beaugé *et al.* 2003; Goździewski *et al.* 2006; Michtchenko *et al.* 2008a; Michtchenko *et al.* 2008b). También podemos mencionar que desde el celebrado trabajo de Hénon & Heiles (1964), el estudio del impacto del caos en galaxias, tanto elípticas como espirales, ha adquirido suma trascendencia (Kandrup & Sideris 2002; Capuzzo–Dolcetta *et al.* 2007; Muzzio *et al.* 2009; Manos & Athanassoula 2011), dado que la componente caótica contribuye directamente tanto en la construcción de los modelos autoconsistentes como en su posterior evolución dinámica.

Luego, conocer si las trayectorias de un sistema pertenecen a un régimen regular o caótico es fundamental para el entendimiento del comportamiento dinámico de dichos sistemas. Sin embargo, distinguir entre movimiento regular y caótico no es una tarea sencilla. Por lo tanto, cualquier técnica que permita indicar y caracterizar tanto el movimiento regular como el caótico resulta de gran utilidad. Muchos de estos "indicadores de caos" (de aquí en más CIs por sus siglas en inglés: *Chaos Indicators*) se han venido desarrollando durante las últimas décadas.

Desde el mencionado trabajo de Hénon & Heiles, el desarrollo de los CIs ha crecido exponencialmente. En el caso de dos grados de libertad (d.o.f., por sus siglas en inglés: *degrees of freedom*), la herramienta básica es el tratamiento gráfico por medio de las Superficies de Sección de Poincaré. Este tratamiento ha sido extendido a sistemas de tres d.o.f. (Froeschlé 1970a; Froeschlé 1970b; Froeschlé 1972), pero contiene numerosas restricciones cuando se intenta generalizarlo a sistemas con más d.o.f. Entonces, resulta fundamental contar con técnicas que puedan brindar información dinámica, independientemente de la dimensión del problema.

Los primeros métodos no gráficos de detección de caos (indicadores variacionales) se basaban en el concepto de divergencia exponencial local. Por ende, la introducción teórica de los Exponentes Característicos de Lyapunov (*LCEs*: *Lyapunov Characteristic Exponents*; Lyapunov 1992), y su implementación numérica (e.g., Benettin *et al.* 1980), fue una de las mayores contribuciones al avance del entendimiento del caos.

El comportamiento dinámico de una determinada región del espacio de fases de un sistema, así como del espacio de fases en su conjunto, puede ser estudiado por medio, e.g., del máximo *LCE* (*lLCE* por *largest LCE*, definido a tiempo infinito). Sin embargo, lo que calculamos es un valor truncado del *lLCE*, i.e., su aproximación numérica a tiempo finito o *lLCN* (por sus siglas en inglés: *largest Lyapunov Characteristic Number*) para un gran número de órbitas, un proceso que podría insumir mucho tiempo de cómputo. Entonces, es interesante definir nuevos algoritmos que sean al menos tan eficientes como el *lLCN* (también denominado Indicador de Lyapunov o *LI* por sus siglas en inglés: *Lyapunov Indicator*, Benettin *et al.* 1976), pero a la vez, menos costosos computacionalmente.

Es de esta manera que surgieron en gran número, indicadores variacionales como e.g.:

- el factor de Crecimiento Exponencial Medio entre Órbitas Cercanas (*MEGNO* de aquí en más por sus siglas en inglés: *Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits*), desarrollado por Cincotta & Simó (2000)*;

- el Índice Menor de Alineamiento (*SALI*: *Smaller Alignment Index*) por Skokos (2001) o su generalización, el Índice de Alineamiento Generalizado (*GALI*: *Generalized Alignment Index*) por Skokos *et al.* (2007)†;

- el Indicador Rápido de Lyapunov (*FLI*: *Fast Lyapunov Indicator*) introducido por Froeschlé *et al.* (1997a)‡, o una primera modificación al mismo, como la componente Ortogonal del Indicador Rápido de Lyapunov (*OFLI*: *Orthogonal Fast Lyapunov Indicator*, Fouchard *et al.* 2002);

- la Distancia Espectral (*D*: *Spectral Distance*) debida a Voglis *et al.* (1999), como también los Espectros Dinámicos de los Números de Dilatación Local (*SSNs*: *Spectra of Stretching Numbers* de Voglis & Contopoulos 1994§) también llamados Números Característicos Locales de Lyapunov (*LLCN*s: *Local Lyapunov Characteristic Numbers* de Froeschlé *et al.* 1993¶), o los espectros de los ángulos de hélice (o *helicity angles* en inglés) y ángulos de torsión (o *twist angles*);

- el Indicador Relativo de Lyapunov (*RLI*: *Relative Lyapunov Indicator* de Sándor *et al.* 2000‖) que no está basado en la evolución de vectores desviación iniciales (i.d.v. de aquí en más por sus siglas en inglés: *initial deviation vectors*), sino en la evolución de la diferencia entre una órbita de referencia y otra muy próxima;

*Véase también Cincotta *et al.* (2003); Giordano & Cincotta (2004); Goździewski *et al.* (2005); Gayon & Bois (2008); Lemaître *et al.* (2009); Hinse *et al.* (2010); Compère *et al.* (2011).

†Para mayores detalles tanto del *SALI* como del *GALI* véase también Széll *et al.* (2004); Bountis & Skokos (2006); Carpintero (2008); Antonopoulos *et al.* (2010).

‡Véase también Froeschlé *et al.* (1997b); Froeschlé & Lega (2000); Lega & Froeschlé (2001); Guzzo *et al.* (2002); Froeschlé & Lega (2006); Froeschlé *et al.* (2006); Paleari *et al.* (2008); Todorović *et al.* (2008); Lega *et al.* (2010).

§Véase también Contopoulos & Voglis (1996); Contopoulos & Voglis (1997); Voglis *et al.* (1998).

¶Véase también Froeschlé *et al.* (2006); Todorović *et al.* (2008).

‖Véase también Széll *et al.* (2004); Sándor *et al.* (2004); Sándor *et al.* (2007).

- el Exponente Medio de Ley de Potencias (*APLE*: *Average Power Law Exponent*, Lukes-Gerakopoulos *et al.* 2008), un método variacional que explota el concepto de Entropía de Tsallis;

- y la componente Ortogonal del Indicador Rápido de Lyapunov de segundo orden ($OFLI^2_{TT}$ de aquí en más, introducido por Barrio 2005[**]), introducido como modificación del *OFLI*, y novedoso por tratarse de un indicador variacional de segundo orden.

Y existen tantos otros CIs que se basan en técnicas diferentes, como el análisis espectral (Binney & Spergel 1982), entre los cuales podemos citar los métodos basados en la Transformada Modificada de Fourier (MFT por *Modified Fourier Transform*, Laskar 1990; Laskar 1993), la Transformada Modificada de Fourier en las Frecuencias (*FMFT*, *Frequency Modified Fourier Transform*, introducida por Sidlichovský & Nesvorný 1997) como una actualización del MFT, u otras variantes como los Números Espectrales (*SNs* por *Spectral Numbers*, Michtchenko & Ferraz–Mello 1995; Ferraz–Mello *et al.* 2005; Michtchenko *et al.* 2010) que también utilizan técnicas basadas en Transformadas Rápidas de Fourier (FFT por *Fast Fourier Transform*) e incluso más novedosos como el Indicador de Modulación de Frecuencias (*FMI: Frequency Modulation Indicator*), introducido por Cordani (2008), y tan diversos como los Algoritmos Evolutivos (*EAs: Evolutionary Algorithms*), Petalas *et al.* (2009).

Estos CIs son tan sólo una muestra de todos los indicadores que están siendo utilizados hoy en día en el estudio de sistemas dinámicos.

Dada la extensa literatura sobre CIs, pero a su vez, la falta de un estudio pormenorizado sobre las ventajas y desventajas de cada uno, se tornó interesante hacer dicho análisis y comparar varias de estas técnicas en escenarios Hamiltonianos de variada complejidad (simples y más realistas) y naturaleza (mapas y flujos), con el fin de reconocer cuáles son los métodos más eficientes y bajo qué circunstancias. Para la evaluación de las técnicas en mapas, consideramos dos mapas 4D: uno es una variante del mapa simpléctico de Froeschlé (Froeschlé 1972) y el otro es un sistema compuesto por dos mapas estándar acoplados. Entre los flujos, primero evaluamos los indicadores en el clásico potencial 2D de Hénon & Heiles (1964), y luego elevamos la complejidad del escenario considerando un potencial 3D introducido por Muzzio *et al.* (2005), el cual es obtenido luego de una virialización de un modelo de N-cuerpos autoconsistente compuesto por 10^5 partículas, y que reproduce varias características dinámicas de las galaxias elípticas reales.

A raíz de esto, el Lic. Luciano Darriba generó el código[††] de La Plata para la integración de Indicadores Variacionales (*LP–VIcode* por *La Plata Variational Indicators code*), un código que, aunque aún está en etapa de desarrollo, ya es capaz de integrar el conjunto de los métodos variacionales mencionados (i.e., el *LI*, el *RLI*, el *SALI*, el *GALI*, el *MEGNO*, el *FLI*, el *OFLI*, el $OFLI^2_{TT}$, los *SSNs*, la *D*, el *APLE*), y que oportunamente irá creciendo con el tiempo. Entonces, por medio del *LP–VIcode* se hizo una comparación exhaustiva entre varios de estos métodos variacionales y un ejemplo de indicador espectral, basado este último en el análisis de la trayectoria para la identificación de ciertas cantidades como las frecuencias del movimiento (el *FMFT*), dando como resultado diferentes combinaciones de técnicas que resultaron las más eficientes para uno u otro escenario y que llamaremos "paquetes minimales de indicadores de caos" (CIsFs, por sus siglas en inglés: *Chaos Indicators Functions*).

[**]Véase también Barrio *et al.* (2009a); Barrio *et al.* (2010).

[††]De hecho, son dos códigos, uno calcula los indicadores sobre mapas simplécticos y el otro sobre flujos Hamiltonianos.

Finalmente, del subconjunto de CIs analizado, sugerimos la CIsF que mostró la mayor versatilidad y por ende, que serviría para el estudio de un sistema Hamiltoniano general.