

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos e indicadores de caos (CIs)

En este Capítulo introducimos conceptos y propiedades sobre la teoría de sistemas Hamiltonianos que usamos a lo largo del trabajo de tesis. Por otro lado, discutimos brevemente cada uno de los CIs, comenzando con los indicadores variacionales que utilizamos en los experimentos de los Capítulos 3, 4 y 5, para concluir con el indicador espectral al cual recurrimos en el Capítulo 5.

2.1. Sistemas Hamiltonianos

Antes de describir cada uno de los CIs utilizados, es necesario introducir varios conceptos sobre sistemas Hamiltonianos que serán de uso recurrente en el trabajo. Entre ellos, queremos definir de manera precisa la idea de caos, ya que el mismo es uno de los principales objetos de estudio. Además, sólo luego de tener una definición precisa, podremos identificarlo y cuantificarlo por medio de los CIs.

2.1.1. Sistemas dinámicos y ecuaciones variacionales*

Por **sistema dinámico** nos referimos a un sistema físico o matemático que consiste en:

- un conjunto de M variables de estado reales o complejas: x_1, x_2, \dots, x_M cuyos valores dan cuenta del estado del sistema en su conjunto, denotado por el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$
- una regla bien definida bajo la cual se pueda derivar la evolución del estado del sistema respecto a una variable real independiente (generalmente el tiempo t).

De aquí en adelante sólo consideraremos variables reales. Luego, un estado particular \mathbf{x} corresponde a un punto en el espacio M -dimensional S , llamado **espacio de fases** del sistema, mientras que al conjunto de estados $\mathbf{x}(t)$, $0 \leq t < \infty$, parametrizado por el tiempo t se lo llama **órbita o trayectoria** del sistema dinámico.

Podemos resumir matemáticamente lo anterior bajo la ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \vec{f}(\mathbf{x}; t),$$

donde por el punto denotamos la derivada total con respecto a un tiempo “continuo” (pero pueden extenderse inmediatamente a sistemas discretos como mapas), siendo \vec{f} un conjunto de M funciones f_1, f_2, \dots, f_M , i.e. un **campo vectorial**.

Los sistemas continuos correspondientes a **Hamiltonianos autónomos** (como los que vamos a considerar a lo largo del presente trabajo de tesis, además de los mapas simplécticos) de N d.o.f. tienen una **función Hamiltoniana** independiente del tiempo definida por:

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N) = h,$$

donde q_i y p_i con $i = 1, \dots, N$ son las **coordenadas y los impulsos generalizados**, respectivamente y h una constante (que, en los casos que nos interesan, coincide con el valor de la energía del sistema). Luego, una órbita en el espacio de fases S $2N$ -dimensional estará dada por el vector

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2N}(t)), \quad 0 \leq t < \infty$$

con $x_i = q_i$, $x_{i+N} = p_i$. La evolución temporal de esta órbita está gobernada por las **ecuaciones de Hamilton**, las cuales en forma matricial se escriben como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \vec{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} & -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{J}_{2N} \cdot D\mathcal{H},$$

*Los contenidos de esta sección fueron tomados de Skokos (2010).

con $\mathbf{q} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, $\mathbf{p} = (x_{N+1}(t), x_{N+2}(t), \dots, x_{2N}(t))$, donde T indica la matriz transpuesta y

$$D\mathcal{H} = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_N}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{N+1}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{N+2}} \cdots \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{2N}} \right]^T.$$

La matriz

$$J_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix},$$

está compuesta por las submatrices \mathbf{I}_N y $\mathbf{0}_N$, identidad y nula respectivamente, de dimensión $N \times N$. Finalmente a partir de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$, la solución formal de $\dot{\mathbf{x}} = \vec{f}(\mathbf{x})$ puede escribirse como $\mathbf{x}(t) = \vec{\Phi}^t(\mathbf{x}(0))$ donde $\vec{\Phi}^t : S \rightarrow S$.

Lo que buscamos ahora es entender cómo es la evolución temporal de los vectores que describen las desviaciones respecto de una órbita base o de referencia (i.d.v.): \vec{w} . Adelantándonos un poco, los CIs variacionales pertenecen a la clase de indicadores que se basan en el estudio de estos vectores, a diferencia de, e.g., los métodos basados en MFT como el desarrollado por Laskar, que analiza la serie temporal construida a partir de las coordenadas de la órbita.

Estos vectores evolucionan en lo que se conoce como el **espacio tangente** $\Gamma_{\mathbf{x}}S$ de S . Si definimos como $d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t : \Gamma_{\mathbf{x}}S \rightarrow \Gamma_{\vec{\Phi}^t(\mathbf{x})}S$, entonces la evolución temporal de \vec{w} estará dada por

$$\vec{w}(t) = d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t(\vec{w}(0)), \quad (2.1)$$

con $t > 0$.

Entonces, en el caso de sistemas Hamiltonianos autónomos, un i.d.v. a $t = 0$

$$\vec{w}(0) = (\delta_{x_1}(0), \delta_{x_2}(0), \dots, \delta_{x_{2N}}(0))$$

asociado a la solución $\mathbf{x}(t) = \vec{\Phi}^t(\mathbf{x}(0))$, evoluciona en $\Gamma_{\mathbf{x}}S$ de acuerdo a las denominadas **ecuaciones variacionales linealizadas**:

$$\dot{\vec{w}} = D\vec{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \vec{w} = \frac{\partial \vec{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \vec{w} = \mathbf{A}(t) \cdot \vec{w},$$

donde $\mathbf{A}(t) = [J_{2N} \cdot D^2\mathcal{H}(\mathbf{x}(t))]$, con

$$D^2\mathcal{H}(\mathbf{x}(t))_{i,j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{\Phi}^t(\mathbf{x}(t))}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2N,$$

la matriz **Hessiana** del Hamiltoniano \mathcal{H} calculada sobre la órbita de referencia $\mathbf{x}(t)$.

Las ecuaciones $\dot{\vec{w}} = \mathbf{A}(t) \cdot \vec{w}$ representan un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales con respecto a \vec{w} , a coeficientes variables debido a la dependencia de $\mathbf{A}(t)$ con la órbita de referencia que se utilice, la cual es función del tiempo t . Luego su solución puede ser escrita como

$$\vec{w}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{w}(0),$$

donde a $\mathbf{Y}(t)$ se la denomina **matriz fundamental** de soluciones del conjunto específico de ecuaciones diferenciales mencionado, y satisface la ecuación:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = D\vec{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{Y}(t),$$

con $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}_{2N}$.

Las ecuaciones variacionales son la base en el desarrollo de los indicadores variacionales. Brevemente, si la evolución en el espacio tangente $\Gamma_{\mathbf{x}}S$ (i.e. alrededor de $\vec{\Phi}^t(\mathbf{x}(0))$ y de acuerdo a una dinámica linealizada) de los vectores \vec{w} asociados a una determinada órbita, dada por la Ec. (2.1), es de tipo exponencial, se dice que es una **órbita caótica** (o periódica inestable, ver Sección 2.1.2), en caso contrario, se dice que la **órbita es regular**. Dependiendo del argumento de la exponencial, en el caso de las órbitas caóticas (o periódicas inestables), existen distintos **niveles de caoticidad o hiperbolicidad** para cada una de ellas. Como también existen distintos **niveles de estabilidad** para las órbitas regulares.

Dado el marco de la **formulación Hamiltoniana** en el cual estudiaremos los sistemas dinámicos, a continuación comenzamos describiendo una clase muy particular de estos sistemas, los **sistemas integrables**.

2.1.2. Sistemas integrables y condición de resonancia

Un sistema de N -d.o.f. se dice integrable si posee igual cantidad de **integrales de movimiento** globales independientes que d.o.f. (Goldstein 1980; Reichl 2004). Esta característica implica que el espacio de fases se encuentra foliado de **toros invariantes** donde yacen las trayectorias (y el movimiento es esencialmente estable), i.e., en general en la intersección de las hipersuperficies $(N-1)$ -dimensionales definidas por cada una de las integrales de movimiento antes mencionadas.

De esta manera, los toros son hipersuperficies de dimensión N definidas por la intersección de las N integrales de movimiento o de las N **acciones**[†] ($\mathbf{I}^0 = (I_1^0, \dots, I_N^0) \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$):

$$\begin{aligned} I_1^0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= C_1 \\ I_2^0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= C_2 \\ &\vdots \\ I_N^0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= C_N, \end{aligned}$$

con I_i^0 ; $i = 1, \dots, N$ las N acciones y C_i , N constantes. Entonces, existe una **transformación canónica** $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \vec{\theta})$ tal que en estas nuevas coordenadas el Hamiltoniano resulta ser función exclusivamente de las acciones:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(I_1^0, \dots, I_N^0),$$

y reescribiendo las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta_i} = \dot{I}_i^0 = 0, \quad (2.2)$$

para las acciones, y para los **ángulos**[‡] $\vec{\theta}$ ($\vec{\theta} \in \Pi^N$ con $\Pi^N = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$, N veces; el espacio de fases del sistema es entonces $\mathcal{B} \times \Pi^N$):

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_i^0} = \dot{\theta}_i = \omega_i, \quad (2.3)$$

[†]Las acciones están definidas por $I_i^0 = \oint p_i dq_i$, donde la integración se extiende a todo un período de oscilación o rotación, y en general son funciones de las integrales “físicas” como por ejemplo la energía, el momento angular, etc.

[‡]Los ángulos son las variables conjugadas de las acciones.

donde $\omega_i = \omega_i(I_1^0, \dots, I_n^0)$ son constantes.

Finalmente:

$$\theta_i(t) = \omega_i \cdot t + \theta_i^0,$$

i.e., los ángulos θ_i son funciones lineales del tiempo, con una **frecuencia** de movimiento: ω_i .

Entonces, el movimiento en \mathcal{H}_0 es, en general, **condicionalmente periódico** con N frecuencias básicas $\omega_k = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_k^0}$ y una trayectoria: $\mathbf{I}^0, \vec{\theta} = \vec{\omega}t + \vec{\theta}_0$ cubre en general un toro N -dimensional incluido en Π^N . Ahora bien, puede ocurrir que la trayectoria no llene densamente el toro N -dimensional, sino que existan relaciones lineales (**resonancias**) entre un número j (con $j \leq N$) de frecuencias, o **relaciones de conmensurabilidad**.

La condición de resonancia es de la forma:

$$\mathbf{m} \cdot \vec{\omega}(\mathbf{I}^r) = 0, \quad (2.4)$$

con $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N - \{0\}$ y \mathbf{I}^r la acción resonante (o el valor de la acción en la resonancia). La Ec. (2.4) determina una superficie, la superficie resonante Σ_R , tanto en el espacio \mathbf{I}^0 como en el $\vec{\omega}^\S$. Estas resonancias, llamadas **resonancias de acoplamiento**, dan cuenta del intercambio de energía entre los diferentes d.o.f. del sistema integrable.

Si la órbita está en resonancia, la trayectoria no llenará el toro y el movimiento se da en una variedad de menor dimensionalidad. En el caso extremo en que existan $N - 1$ relaciones de conmensurabilidad, la órbita se dice **periódica**. Si el comportamiento de sus vectores \vec{w} en el espacio tangente $\Gamma_x S$ es de tipo exponencial, se dice que este objeto es una **órbita periódica inestable** (o **toro hiperbólico** de mayor dimensionalidad si $j < N - 1$), en caso contrario, al objeto se lo denomina **órbita periódica estable** (o **toro elíptico resonante** si $j < N - 1$).

Los sistemas dinámicos reales son **no integrables**. No obstante, muchos de ellos pueden ser estudiados como un sistema integrable bajo la acción de cierta perturbación.

2.1.3. Perturbaciones a Hamiltonianos integrables y Hamiltoniano del péndulo

Sea el Hamiltoniano (ver Chirikov 1979; Cincotta 2002),

$$\mathcal{H}(\mathbf{I}, \vec{\theta}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \epsilon \sum_{\mathbf{m}} \mathcal{V}_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}) \cdot \exp^{i\mathbf{m} \cdot \vec{\theta}}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{I} \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N, \vec{\theta} \in \Pi^N, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N - \{0\}; 0 < \epsilon \ll 1,$$

donde $\mathcal{H}_0(\mathbf{I})$, el Hamiltoniano sin perturbar, es completamente integrable ya que posee un conjunto de N integrales I_1, I_2, \dots, I_N (Sección 2.1.2). Y donde $\mathcal{V}_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}) \cdot \exp^{i\mathbf{m} \cdot \vec{\theta}}$ son los términos del desarrollo de Fourier de la perturbación. Por otro lado, dado que el tamaño de la perturbación está asociado con el ϵ y en nuestro caso, $0 < \epsilon \ll 1$, se dice que \mathcal{H} describe un sistema **casi integrable**.

[§]El espacio de acciones, espacio \mathbf{I}^0 , y el de las frecuencias, espacio $\vec{\omega}$, están íntimamente relacionados (uno es el dual del otro). En ambos espacios un toro está representado por un único punto: $\mathbf{I}^{0*} = (I_1^{0*}, \dots, I_N^{0*})$ o bien por: $\vec{\omega}^* = (\omega_1^*, \dots, \omega_N^*)$, en el caso que el Hamiltoniano \mathcal{H}_0 sea no degenerado: $\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial I_j \partial I_i} \right) \neq 0$.

Asumamos que tenemos una única fase mucho más lenta. Comencemos entonces, reteniendo este término, siendo el más importante del desarrollo de Fourier de la perturbación, y tomando la componente real:

$$\mathcal{H}(\mathbf{I}, \vec{\theta}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \epsilon \mathcal{V}_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}) \cdot \cos(\mathbf{m} \cdot \vec{\theta}). \quad (2.6)$$

Aquí vemos que la perturbación depende de una única fase $\mathbf{m} \cdot \vec{\theta}$, la fase lenta o resonante. Entonces, $\mathcal{H}(\mathbf{I}, \vec{\theta})$ puede reducirse a un Hamiltoniano unidimensional, el **Hamiltoniano resonante** válido en un entorno de $\mathbf{I} = \mathbf{I}^r$ (por ende es válido localmente), donde \mathbf{I}^r es la acción resonante definida por la relación dada en la Ec. (2.4):

$$\mathcal{H}_r(p_1, \psi_1) = \frac{p_1^2}{2\mathcal{M}} + \epsilon \mathcal{V}_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}^r) \cdot \cos(\psi_1) \quad (2.7)$$

donde $\frac{1}{\mathcal{M}} = m_i \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} |_{I^r} m_j$ luego de la transformación canónica $(\mathbf{I}, \vec{\theta}) \rightarrow (\mathbf{p}, \vec{\psi})$ con $\mathbf{p} \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ y $\vec{\psi} \in \Pi^N$, definida por:

$$\begin{aligned} I_i &= I_i^r + \mu_{ki} p_k, \\ \psi_i &= \mu_{ki} \theta_i \end{aligned}$$

con $\mu_{1i} = m_i$, $\mu_{2i} = \frac{\omega_i^r}{|\vec{\omega}^r|}$, \dots $\mu_{si} = (\vec{e}_s)^i$ la componente “i” del vector \vec{e}_s y donde $s = 3, \dots, N$ (vectores linealmente independientes). Estos vectores son elegidos de esta forma para constituir la base de un sistema local con origen en el punto resonante que permita describir la geometría cercana a la resonancia. Haciendo uso de dicha base y habiendo fijado $p_2 = p_3 = \dots = p_N = 0$ para que el punto \mathbf{I}^r sea un punto de la trayectoria, la transformación canónica antes mencionada: $(\mathbf{I}, \vec{\theta}) \rightarrow (\mathbf{p}, \vec{\psi})$, hace que el Hamiltoniano se transforme como $\mathcal{H}(\mathbf{I}, \vec{\theta}) \rightarrow \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{p}, \vec{\psi})$, donde este último es integrable y sus integrales (locales) son p_2, p_3, \dots, p_N , $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_r$. En otras palabras, hemos recuperado la integrabilidad a costa de reducir nuestro problema al entorno de una única resonancia y por ende, nuestras integrales dejaron de ser globales, para ser integrales locales de movimiento.

El Hamiltoniano resonante (local) resulta ser el Hamiltoniano del **péndulo**. El Hamiltoniano del péndulo (ver Fig. 2.1) cuenta con un punto de equilibrio estable y un punto de equilibrio inestable (mod 2π). La trayectoria que parte del punto de equilibrio inestable para terminar nuevamente en él, o trayectoria **homoclínica** si nos ajustamos al retrato de fases en el sistema cilíndrico (Fig. 2.1, panel de la izquierda; en cambio en el retrato de fases planar, misma figura, panel de la derecha, la trayectoria se dice **heteroclínica** dado que une dos puntos distintos del espacio de fases), se la denomina **separatriz**. La separatriz separa dos clases de movimiento cualitativamente diferentes: oscilaciones y rotaciones, ver Fig. 2.1) y es la primera en verse afectada frente a una perturbación, e.g. si consideramos el segundo término más importante del desarrollo de Fourier de la perturbación, dando lugar a una **capa estocástica** donde el movimiento es caótico. Las capas estocásticas son dominios en las vecindades de las separatrices de las resonancias.

Una estructura estocástica más compleja puede darse debido a, e.g. una resonancia k -múltiple, esto es cuando se dan k condiciones del tipo $\mathbf{m}^l \cdot \vec{\omega}(\mathbf{I}^r) = 0$ con $l = 1, \dots, k$ (generalización de la Ec. 2.4) con todos los \mathbf{m}^l linealmente independientes y para un mismo \mathbf{I}^r (esto ocurre en la intersección de las k superficies resonantes), y el tratamiento resulta mucho más complejo. Esquemáticamente podemos decir lo siguiente: si elegimos vectores de la base $\vec{B} = \{\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_N\}$ tales que $\vec{\mu}_1 = \mathbf{m}_1, \dots, \vec{\mu}_k = \mathbf{m}_k$ y los restantes en forma similar

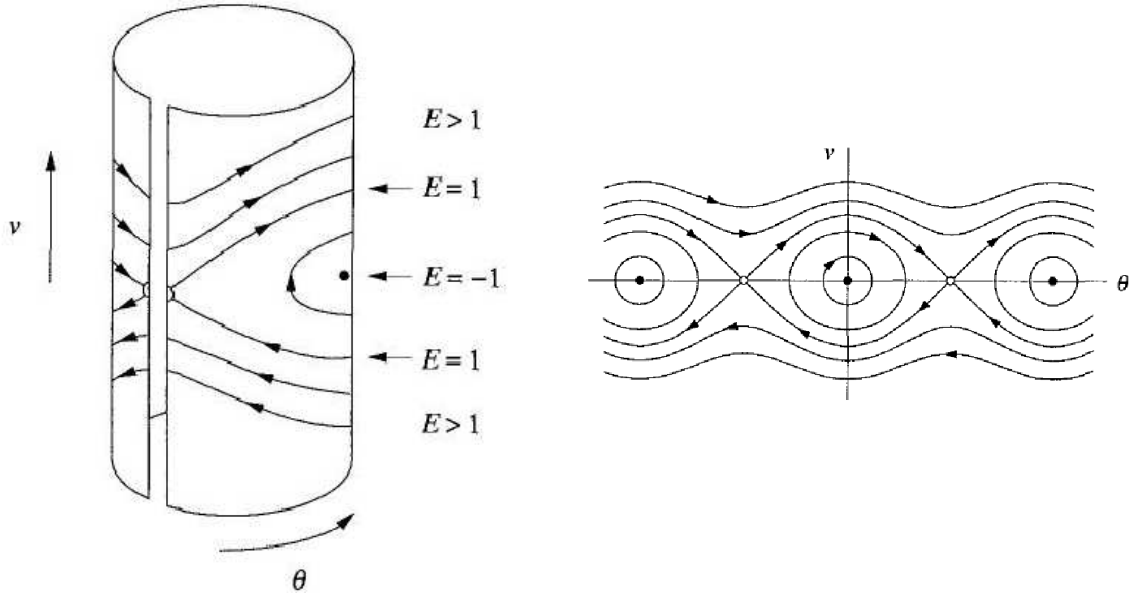


Figura 2.1: Panel izquierdo: retrato del espacio de fases del péndulo en su espacio natural, el cilindro, estratificado según el valor de la energía E . El punto de equilibrio estable (señalado con un círculo lleno) para $E = -1$ (en una escala de energía normalizada), las oscilaciones para $-1 < E < 1$, la separatriz o curva homoclínica que parte del punto de equilibrio inestable (señalado con un círculo vacío) para terminar en el mismo punto, para $E = 1$ y las rotaciones para $E > 1$. Panel derecho: retrato planar del espacio de fases del péndulo donde se identifican los distintos elementos de igual manera. En este caso, la separatriz es una curva heteroclínica que une dos puntos de equilibrio inestable. En ambos casos, θ es lo que nosotros llamamos ϕ_1 y ν , lo que llamamos p_1 para el Hamiltoniano resonante. Figuras tomadas de Strogatz (1994).

al caso de una única resonancia, el Hamiltoniano dependerá ahora de las fases ψ_1, \dots, ψ_k con $k < N$ y sólo hay $N - k$ integrales de movimiento, que podemos redefinir como: $p_l = 0$ (para que nuevamente \mathbf{I}^r sea un punto de la trayectoria) con $l = k + 1, \dots, N$.

En consecuencia, en este caso, reducimos el Hamiltoniano N -dimensional a un Hamiltoniano k -dimensional. En contraposición al caso de una única resonancia, el Hamiltoniano k -dimensional es no integrable y por ende, puede darse el comportamiento caótico mencionado.

2.1.4. Interacción de resonancias e inestabilidad estocástica

La interacción de resonancias, sean éstas entre los d.o.f. del propio sistema o entre el sistema y una perturbación externa, se entiende como la influencia simultánea de varias resonancias. En otras palabras, la influencia simultánea de varios armónicos en el desarrollo de Fourier de la perturbación en la Ec. (2.5), i.e., no retenemos solamente el más importante como en la Ec. (2.6). Cada armónico de la perturbación determina su propia resonancia y por ende, su propio dominio de estabilidad (caracterizado por órbitas con movimiento regular, i.e. **islas de estabilidad**) dentro del espacio de fases, como es el caso de una única resonancia

cuando el Hamiltoniano se reducía al Hamiltoniano del péndulo (ver Ec. 2.7).

Ahora bien, ¿cómo es el movimiento bajo la influencia simultánea de varias resonancias? Pareciera, a primera vista que mientras el sistema está próximo a una resonancia particular, los demás términos de la perturbación son no resonantes y pueden ser eliminados por medio de un cambio de variables.

Introduzcamos en la Ec. (2.5) un cambio de variables para eliminar la perturbación a orden: $\mathcal{O}(\epsilon)$. Para ello aplicamos la función generatriz F , tal que $F : (\mathbf{I}, \vec{\theta}) \rightarrow (\mathbf{I}^{[1]}, \vec{\theta}^{[1]})$:

$$F(\mathbf{I}^{[1]}, \vec{\theta}) = \mathbf{I}^{[1]} \cdot \vec{\theta} + \epsilon \sum_m \Phi_m(\mathbf{I}^{[1]}) \cdot \exp^{i\mathbf{m} \cdot \vec{\theta}},$$

donde $\Phi_m(\mathbf{I}^{[1]})$ debe cumplir:

$$\Phi_m(\mathbf{I}^{[1]}) = i \cdot \frac{\mathcal{V}_m(\mathbf{I}^{[1]})}{\mathbf{m} \cdot \vec{\omega}(\mathbf{I}^{[1]})}. \quad (2.8)$$

Sin embargo, la característica que distingue la relación de la Ec. (2.8) es la aparición de los denominados **pequeños denominadores**: $\omega_m = \mathbf{m} \cdot \vec{\omega}$ que se anulan en cualquier superficie resonante. Como estas superficies son en general densas en todo el espacio de fases, el procedimiento anterior resulta en las llamadas **series asintóticas**, que son sólo soluciones formales dado que, en general, no son convergentes.

Hasta hace relativamente poco tiempo, se consideraba este hecho como una característica propia de un oscilador no lineal y que el movimiento era, en general, inestable. Luego se desarrolló una nueva teoría de estabilidad de sistemas dinámicos debida a Kolmogorov, Arnold y Moser (teoría **KAM**: Kolmogorov 1954; Arnold 1963; Moser 1962) la cual muestra que, en general, existe un cierto valor crítico de la perturbación que determina el borde de la estabilidad para el movimiento. En consecuencia, de acuerdo a la teoría KAM, en el espacio de fases de un sistema casi integrable subsisten muchos toros invariantes.

Veamos qué sucede. Para una dada condición inicial puede ocurrir que luego de la primer transformación canónica, $\mathbf{I}^{[1]}$ en la Ec. (2.8) esté sobre una superficie resonante: $\mathbf{m} \cdot \vec{\omega}(\mathbf{I}^{[1]}) = 0$ y entonces, aparezca el problema de los pequeños denominadores. Más aún, aunque este no sea el caso, esto puede darse después de la próxima transformación canónica: $\mathbf{m} \cdot \vec{\omega}(\mathbf{I}^{[2]}) = 0$. Como se requiere de un número infinito de transformaciones canónicas (en general), no resulta claro cómo puede asegurarse que se eviten todas las superficies resonantes en todas las aproximaciones de la teoría perturbativa y, más difícil aún, que $\mathbf{I}^{[k]}$ esté próximo a una superficie resonante de manera que comprometa seriamente la convergencia de la serie y tengamos como resultado, las mencionadas series asintóticas.

Para sortear esta dificultad, Kolmogorov cambió la formulación del problema: en lugar de estudiar el comportamiento de una trayectoria con una dada condición inicial, él estudió trayectorias con una frecuencia dada: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_*$ (no resonante) y constante en todas las aproximaciones. Debido al cambio en las frecuencias de una aproximación a otra, producto del cambio del valor medio de la perturbación, las condiciones iniciales deben ser corregidas en cada aproximación para compensar este cambio en la frecuencia. Para que la secuencia de correcciones sea convergente, la no linealidad de las oscilaciones no debe ser muy pequeña. Podría decirse que en el tratamiento de Kolmogorov se estudia el comportamiento de un toro con una frecuencia fija. Un **toro estable no resonante** sólo se distorsiona levemente bajo la acción de una perturbación, un **toro inestable resonante** se destruye y se convierte en algo “extremadamente intrincado e incomprensible” (según Poincaré).

Luego, debemos estimar los pequeños denominadores para asegurar la convergencia de la serie perturbativa. No obstante, dado que nuestro objetivo no es adentrarnos en la teoría KAM, sino la introducción de conceptos que utilizaremos a lo largo del trabajo de tesis, en lugar de pensar en una teoría formal, podemos intentar un camino alternativo. Evaluaremos entonces, la **condición de superposición de resonancias** (Chirikov 1979), i.e. investigaremos cualitativamente, aún gráficamente, mecanismos particulares responsables de la destrucción de integrales de movimiento bajo la acción de una perturbación lo suficientemente intensa y, en consecuencia, de la inestabilidad resultante. Para ello, consideramos tan sólo dos términos del desarrollo de Fourier de la perturbación, de donde surge el mecanismo bastante general para la aparición de la inestabilidad, que como hemos mencionado, se lo denomina superposición de resonancias. El estudio de este mecanismo permite formular un criterio de estabilidad muy eficiente aunque poco riguroso.

Sean entonces sólo dos términos del desarrollo de Fourier de la perturbación (Ec. 2.5, asociados a las frecuencias $\vec{\omega} = \vec{\Omega}_1$ y $\vec{\omega} = \vec{\Omega}_2$). El término no resonante sólo distorsiona levemente la trayectoria y genera la capa estocástica, en comparación al efecto producido por una única resonancia (Sección 2.1.3). Más aún, si ambos dominios están lo suficientemente lejos, podemos aplicar un promediado y descartar el otro.

En el caso opuesto en el cual $|\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_2|$ es pequeño, los dominios de cada una de las resonancias se aproximan el uno al otro. Evidentemente, si ambas resonancias están lo suficientemente cerca, la trayectoria no estará más confinada al dominio de una única resonancia y la trayectoria pasará generalmente de una resonancia a otra. Esta clase de movimiento difícilmente podría ser calificado de inestable (al menos para dos resonancias), ya que al ser $\vec{\Omega}_1 \simeq \vec{\Omega}_2$, el dominio de movimiento es pequeño.

Sin embargo, la naturaleza del movimiento es cualitativamente diferente. Los experimentos numéricos muestran que el movimiento se torna irregular, como si el sistema fuera influenciado por una **fuerza aleatoria**. Sin embargo, no existe ninguna fuerza de estas características en el Hamiltoniano bajo consideración. Por este motivo es que esta clase de movimiento fue denominado **oscilaciones estocásticas** o **inestabilidad estocástica**.

Una característica de este movimiento es una fuerte **inestabilidad local**. Esto significa que trayectorias inicialmente muy próximas se separan (en promedio) exponencialmente cuando t crece. Bajo la inestabilidad local, trayectorias próximas divergen hasta una distancia comparable con el tamaño de todo el dominio del movimiento. Este es justamente el momento cuando el **proceso de mezcla** comienza a hacer que se vayan perdiendo las correlaciones temporales con las condiciones iniciales; esto es, el sistema olvida su estado inicial. Cuando la divergencia de las trayectorias es exponencial, el sistema olvida las condiciones iniciales muy rápidamente y para siempre. Los indicadores variacionales que analizaremos en la Sección 2.2 para la identificación del caos implementan el mecanismo de la inestabilidad local.

Una condición plausible para la ocurrencia de la inestabilidad estocástica es que ambas resonancias se aproximen lo suficiente como para que ambos dominios se superpongan. Podríamos decir entonces que la superposición de resonancias comienza cuando las separatrices de ambos se tocan. El problema que surge es cómo calcular esta condición teniendo en cuenta la deformación inducida a una separatriz debido a la presencia de la otra resonancia. La forma más simple de hacer esto, aunque muy aproximada, es considerar cada una de las resonancias como si la otra no existiera (Mestre *et al.* 2009). Es claro que esto sólo nos permitirá estimar órdenes de magnitud. Una limitación del criterio de superposición de resonancias es que, por ejemplo para el sistema en consideración, sólo estamos reteniendo dos resonancias. Esto es así porque en la perturbación, estamos utilizando el hecho que $\vec{\theta}(t) = \vec{\omega}t + \vec{\theta}_0$, enton-

ces $\vec{\theta} = \vec{\omega}$: el movimiento sin perturbar. Evidentemente, si en vez de $\vec{\theta}(t) = \vec{\omega}t + \vec{\theta}_0$ ponemos el movimiento perturbado, que de hecho resulta muy complicado, muchas otras resonancias aparecerán. Genéricamente, resonancias del tipo $\mathbf{m} \cdot \vec{\omega} + \mathbf{m}_1 \cdot \vec{\Omega}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \vec{\Omega}_2 = 0$ aparecerán para cualquier conjunto de enteros no nulos simultáneamente $\{\mathbf{m}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$, que, en general, es denso en el espacio de las fases. Resulta claro entonces que la ausencia de superposición de resonancias del primer orden es sólo una condición necesaria pero no suficiente de estabilidad del movimiento.

La inestabilidad de las oscilaciones no lineales que surge por la superposición de resonancias tiene un naturaleza muy peculiar, resultando en un movimiento irregular o estocástico.

2.1.5. Definición de caos

En consecuencia, la estructura del movimiento con islas de estabilidad (Sección 2.1.4) es típica para las oscilaciones no lineales y se la denomina de **espacio de fases dividido** (ejemplos de estos retratos de espacios de fases divididos se pueden encontrar a lo largo del trabajo de tesis). La división se debe a una **componente regular** (donde el movimiento es condicionalmente periódico y resonante, Sección 2.1.2) y a una **componente caótica, estocástica** (donde el movimiento es irregular, Sección 2.1.1). La componente regular posee el conjunto completo de integrales de movimiento locales y está estratificada en toros invariantes que dan soporte al movimiento condicionalmente periódico. Nótese que el confinamiento del movimiento estocástico a cierto dominio del espacio de fases puede interpretarse como la influencia de cierta **ley de conservación** débil. Esta restringe el movimiento no a un cierto subespacio de menor dimensionalidad como lo hacen usualmente las leyes de conservación, sino a una parte del espacio con la dimensionalidad completa.

La estructura de un espacio de fases dividido es siempre extremadamente intrincada ya que el límite entre las componentes regular y caótica siempre es una capa estocástica (Sección 2.1.3).

Ahora que hemos definido todos los ingredientes, procedemos con la introducción del concepto de caos (ver Devaney 2003; Skokos 2010).

- Sea $V \subset S$ y $\vec{f}: V \rightarrow \bar{V} \subset S$ un campo vectorial en él. Decimos que \vec{f} es caótica en V si

1. \vec{f} es sensible a las condiciones iniciales (inestabilidad local, Sección 2.1.4): $\vec{f}: V \rightarrow \bar{V}$ se dice sensible a las condiciones iniciales si existe un $\delta > 0$, $\lambda > 0$ y $l \geq 0$ tal que para cualquier $\mathbf{x} \in V$ y cualquier entorno Δ de \mathbf{x} , se puede encontrar un $\vec{y} \in \Delta$ de tal forma que si $l = 0$, $|\vec{f}^0(\mathbf{x}) - \vec{f}^0(\vec{y})| \geq \delta$, entonces para $l > 0$, $|\vec{f}^l(\mathbf{x}) - \vec{f}^l(\vec{y})| \geq \delta \cdot e^{\lambda l}$, donde \vec{f}^l denota l aplicaciones sucesivas de \vec{f} .

Esta definición implica que existe al menos un punto arbitrariamente cercano a \mathbf{x} , que eventualmente se separará de él exponencialmente, i.e. al menos una cantidad $\delta \cdot e^{\lambda l}$, luego de aplicar reiteradamente \vec{f} .

2. \vec{f} es topológicamente transitiva: $\vec{f}: V \rightarrow \bar{V}$ se dice topológicamente transitiva si para cualquier par de conjuntos abiertos $U, W \subset V$ existe $l > 0$ tal que $\vec{f}^l(U) \cap W \neq \emptyset$.

Es decir, existen puntos que se moverán bajo sucesivas aplicaciones del campo vectorial, desde un entorno arbitrariamente pequeño a cualquier otro, consecuen-

temente el sistema dinámico no puede ser separado en dos conjuntos abiertos e invariantes que sean disjuntos.

3. Las órbitas periódicas (Sección 2.1.2) son densas en \bar{V} .

Es necesario contar con un elemento de regularidad dentro del sistema, siendo el tercer ingrediente para considerar a un sistema como caótico, además de la impredecibilidad deducida de la condición 1. y la inseparabilidad de 2. No consideramos sistemas totalmente caóticos (e.g. un sistema “K”[¶]) o integrables (Sección 2.1.2), sino el caso más general que es el de sistemas dinámicos con un espacio de fases dividido, i.e., donde componentes regulares y caóticas coexisten. Las componentes regulares contienen un conjunto denso de órbitas periódicas inestables (Sección 2.1.2) rodeadas de pequeñas regiones caóticas, y por otro lado las componentes caóticas contienen órbitas periódicas estables (Sección 2.1.2) inmersas en dominios de estabilidad.

Finalmente, dado que en el Capítulo 5 analizamos un par de espacios particulares de un potencial de un modelo medianamente realista, a continuación daremos una breve explicación sobre la elección de estos dos espacios.

2.1.6. Potenciales de Stäckel y potenciales no integrables^{||}

Los potenciales de **Stäckel** tienen la sobresaliente característica que son sistemas dinámicos integrables, por ende todas las órbitas son regulares y quedan absolutamente definidas por los toros donde yace su trayectoria, i.e. por las tres acciones en el caso de un sistema de tres d.o.f.** (Sección 2.1.2). Más aún, en un potencial de Stäckel, todas las órbitas de una misma energía se ubican en una superficie 2D (el espacio de inicialización $x_0 - z_0$ definido en Schwarzschild 1993) donde fijamos condiciones para x_0 y z_0 , p_{y_0} se obtiene por conservación de la energía y $p_{x_0} = y_0 = p_{z_0} = 0$. En esta superficie las fronteras que separan las cuatro familias principales de órbitas (cajas, tubos de eje menor, tubos internos y tubos externos de eje mayor, ver ejemplos en la Fig.2.2, Papaphilippou & Laskar 1998) se pueden estimar, dando una descripción completa de la dinámica orbital (de Zeeuw 1985; Cincotta *et al.* 2006).

Si queremos extendernos a otros potenciales más realistas, debemos abandonar la integrabilidad de la que gozan los potenciales de Stäckel, y para sistemas no integrables el estudio no es tan sencillo. El potencial triaxial del cual haremos uso en los Capítulos 3 y 5 es un sistema no integrable y, en principio, no es trivial representarlo como un sistema casi-integrable (Sección 2.1.3).

Por un lado, en los sistemas no integrables parte del espacio de fases se encuentra conformado por órbitas caóticas (Sección 2.1.1) que respetan, generalmente, tan sólo una integral global (la energía, h constante). Luego, estos sistemas poseen un espacio de fases dividido (Sección 2.1.5). Por otro lado, las distintas familias orbitales (resonancias, Sección 2.1.2) pertenecen generalmente a espacios de acciones diferentes y no pueden combinarse de forma tal de poder contar con todas ellas en un mismo espacio.

[¶]La característica distintiva de los sistemas “K” es que poseen una tasa media de inestabilidad no nula.

^{||}Los contenidos de esta sección fueron tomados de Schwarzschild (1993).

**Hablamos de un sistema tridimensional dado que el potencial triaxial usado en el trabajo de tesis tiene igual grados de libertad y la sección se introduce con el sólo objeto de aclarar ciertos conceptos relativos a potenciales de este tipo.

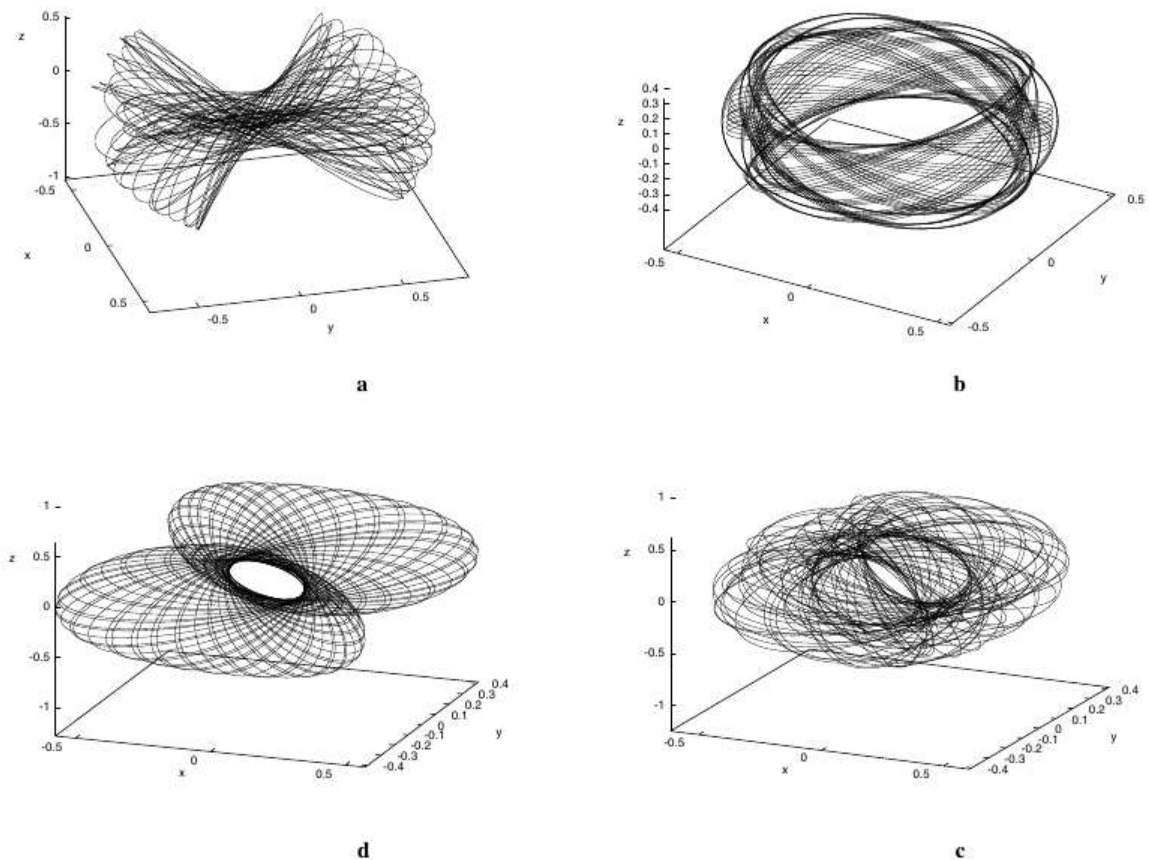


Figura 2.2: Órbitas típicas del potencial logarítmico en el espacio de configuraciones (x, y, z) . (a) Órbitas cajas, (b) tubos de eje menor, (c) tubos internos de eje mayor y (d) tubos externos de eje mayor. Figura tomada de Papaphilippou & Laskar (1998).

Luego, para potenciales como el sistema triaxial mencionado, necesitamos estudiar distintos espacios de inicialización para visualizar las distintas familias de órbitas. Esto es, a diferencia de lo que ocurre con los potenciales de Stäckel, el espacio de inicialización $x_0 - z_0$ no puede ser usado por sí sólo para ver la mayoría de las familias orbitales.

Una de las mayores desventajas al utilizar dicho espacio en forma exclusiva en potenciales no integrables, es la deficiencia en la descripción de las órbitas caja que están en resonancia, como e.g. las “bananas”. Por ello es que se lo complementa con el espacio estacionario (que es un espacio exclusivamente definido para órbitas caja), generado al hacer nulas las tres componentes de la velocidad inicial: $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$. De esta manera conjunta, estos espacios se utilizan para estudiar las familias orbitales de un potencial no integrable como lo haremos con el modelo medianamente realista de sistema triaxial en los Capítulos 3 y 5.

Más aún, no todas las familias pueden estar contenidas en los dos espacios mencionados. Entonces, si el análisis requiriese de un estudio algo más detallado, se debería analizar junto con el espacio estacionario, y el espacio de inicialización $x_0 - z_0$, otros cinco espacios de inicialización (como los que se muestran en la Fig. 2.3 para el poco realista potencial logarítmico tridimensional, Papaphilippou & Laskar 1998).

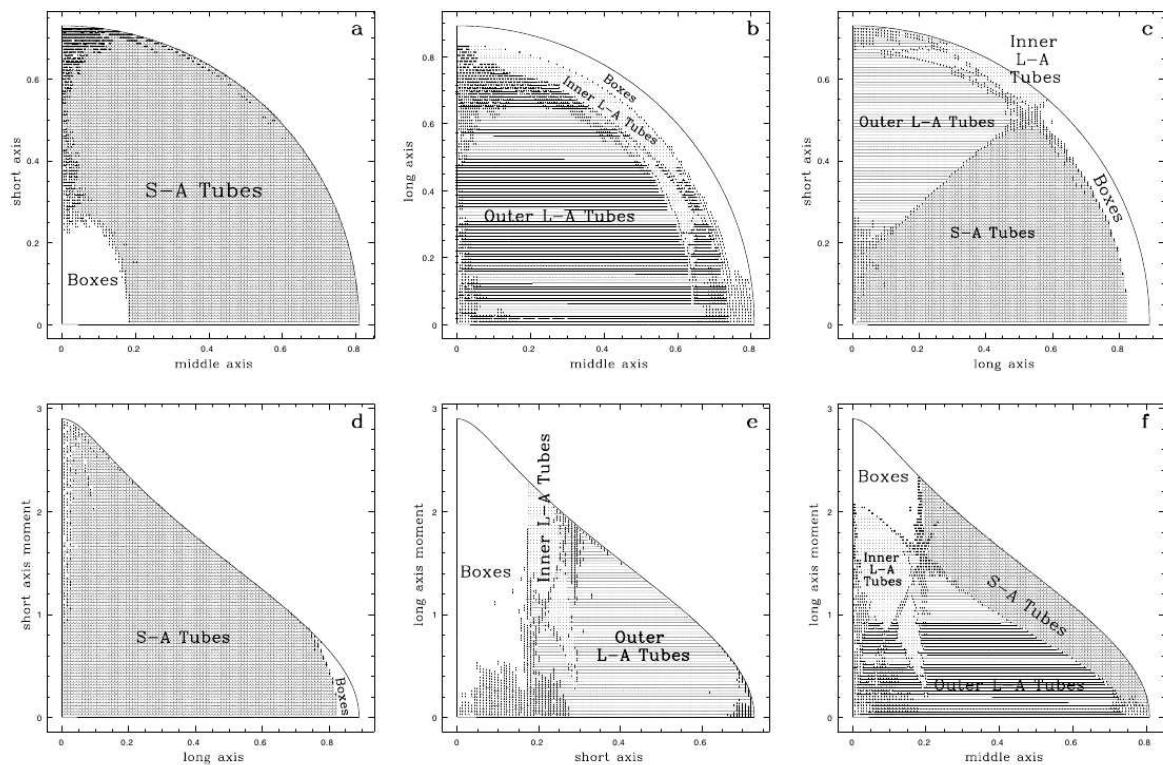


Figura 2.3: Retratos de fases para seis espacios de inicialización en el caso del potencial no integrable logarítmico tridimensional. Para su confección se utilizó un método espectral. El panel superior derecho, (c), corresponde al espacio de inicialización $x_0 - z_0$ (siendo X el eje mayor y Z el eje menor del sistema). Figura tomada de Papaphilippou & Laskar (1998).

2.2. Indicadores variacionales de caos

Como ya hemos mencionado en el Prefacio, dado el propósito de la tesis, sería ideal contar con una herramienta que permita integrar, para un sistema dinámico dado, una gran variedad de técnicas. El *LP-Vicode* es un código que permite la integración simultánea de todos los métodos variacionales utilizados en la presente investigación, además del *RLI* (ver Darriba *et al.* (2012) para una breve descripción del código). Si bien este último CI no se basa en la evolución de los i.d.v. como el resto, se basa en la evolución de dos órbitas muy próximas entre sí, por ende, su implementación en el *LP-Vicode* no resultó costosa.

No es nuestro objetivo describir el código que fue desarrollado en estrecha colaboración con el Lic. Darriba (Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata; Instituto de Astrofísica La Plata, CONICET-CCT La Plata), sino simplemente utilizarlo para encontrar la CI_{SF}. Por ende, en este primer Capítulo nos limitaremos a introducir teórica y brevemente, las técnicas que calcula numéricamente el *LP-Vicode*.

Por otro lado, si bien en la Sección 2.2.1 hablaremos de *LCEs* (entes matemáticos definidos a tiempo infinito), como el tiempo de integración a utilizar en el cálculo numérico es finito, en la práctica se rebautizan como Números Característicos de Lyapunov a Tiempo Finito (ó *FT-LCNs* por sus siglas en inglés: *Finite Time Lyapunov Characteristic Numbers*, ver

Voglis *et al.* 2002). Para las órbitas regulares alcanzan valores del orden de $\ln T/T$, siendo T el tiempo total de integración usado en el experimento (Skokos 2010), y no el valor nulo como indica la teoría, cuando $t \rightarrow \infty$. Luego, un **valor crítico o valor de corte** (V_c) debe ser adoptado como nuevo “cero”, para que en caso de tener valores de los *FT-LCNs* por encima o por debajo del V_c implique valores diferentes o “iguales” a cero, respectivamente.

Como hemos visto en la Sección 2.1, los indicadores variacionales se basan en el seguimiento de la evolución temporal de los $\vec{w}(t)$. Concepto formalizado con la introducción de los *LCEs*. Por ende, comenzamos las descripciones de los CIs variacionales con una descripción algo detallada del *LI* (recordemos que el *LI* es otra forma de denominar al *LLCN*, el cual es la aproximación numérica del *LLCE*, al igual que los *FT-LCNs* son la aproximación numérica de los *LCEs*) donde oportunamente incluimos la teoría de los *LCEs*, y así sentaremos las bases generales para la mayoría de los demás métodos de origen variacional que utilizamos en este trabajo.

2.2.1. El Indicador de Lyapunov (*LI*)^{††}

Los *LCEs* son cantidades asintóticas que caracterizan la tasa local media de separación exponencial de órbitas cercanas en un sistema dinámico, o en otras palabras, la tasa media de crecimiento o decrecimiento de pequeñas perturbaciones aplicadas a las órbitas de un sistema dinámico. Esta idea fue introducida por A. M. Lyapunov cuando estudiaba la estabilidad de soluciones no estacionarias en **ecuaciones diferenciales ordinarias** (Lyapunov 1992).

Como hemos visto, una de las principales características que identifican a una función como caótica es la alta sensibilidad a las condiciones iniciales, y convenientemente los *LCEs* dan una medida de dicha sensibilidad de un sistema dinámico frente a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Es decir, los *LCEs* dan una medida local del caos.

Luego, en el caso de órbitas caóticas, al menos un *LCE* resulta positivo, lo cual implica divergencia exponencial de las órbitas cercanas, mientras que en el caso de órbitas regulares, todo el espectro de los *LCEs* es cero. Generalmente si el *LLCE* es mayor a cero, garantiza el carácter caótico de la órbita aunque claro está, esta sola medida restringe el nivel de información dinámica que puede proveer todo el espectro de *LCEs*, como e.g., indicios sobre la distribución espacial de las órbitas (Muzzio *et al.* 2005). Sin embargo, en el código implementamos la restricción a tiempo finito de sólo el *LLCE*, i.e. el *LI* de acuerdo a la forma clásica (Benettin *et al.* 1976; Benettin *et al.* 1980).

Consideremos un sistema dinámico continuo definido sobre una variedad diferenciable S , donde $\vec{\Phi}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t)$ caracteriza el estado del sistema a tiempo t , cuando a tiempo $t = 0$ su estado es $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. El estado del sistema luego de dos intervalos de tiempo consecutivos t y t' , estará dado por la siguiente ley de composición: $\vec{\Phi}^{t+t'} = \vec{\Phi}^{t'} \circ \vec{\Phi}^t$.

Además, el espacio tangente a \mathbf{x} se mapea en el espacio tangente a $\vec{\Phi}^t(\mathbf{x})$, por medio del operador $d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t$ y de acuerdo a la regla $\vec{w}(t) = d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t(\vec{w}(0))$. Ahora bien, la acción de dicho operador, que actúa sobre el espacio tangente (por tanto sobre los vectores \vec{w}), en intervalos de tiempo sucesivos, satisface la ecuación:

$$d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^{t+t'} = d_{\vec{\Phi}^t(\mathbf{x})}\vec{\Phi}^{t'} \circ d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t.$$

Estamos interesados entonces, en el comportamiento asintótico del operador mencionado cuando $t \rightarrow \infty$. Para ello primero suponemos que nuestra variedad S cuenta con alguna

^{††}Los contenidos de esta sección fueron tomados de Skokos (2010).

métrica denotada por $\|\cdot\|$, pudiendo definir la cantidad:

$$\lambda_t(\mathbf{x}) = \frac{\|d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|}$$

llamado factor de crecimiento (decrecimiento) en la dirección \vec{w} . Si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(\mathbf{x}) > 0$$

decimos que tenemos divergencia exponencial en la dirección de \vec{w} , pero claro, la clave está en saber si la cantidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(\mathbf{x})$$

existe.

Para responder a esta pregunta, tomaremos matrices más generales que las que representan al operador $d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t$, dando al desarrollo un alcance más amplio. De todas formas, es el **Teorema de Oseledec** (Oseledec 1968) el que establece las condiciones necesarias para que los resultados que resumimos a continuación puedan aplicarse al tipo de matriz que representa al operador $d_{\mathbf{x}}\vec{\Phi}^t$.

Sea \mathbf{A}_t una matriz $N \times N$ definida sobre el eje real o bien sobre el conjunto de los enteros, tal que $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}_N$ y para cada tiempo t la matriz \mathbf{A}_t es no singular. Sea $\|\mathbf{A}_t\|$ una norma de $\mathbf{A}_t^{\dagger\dagger}$, y consideraremos en particular aquellas matrices que satisfagan la condición

$$\max(\|\mathbf{A}_t\|, \|\mathbf{A}_t^{-1}\|) \leq e^{ct}, \quad c > 0,$$

con c constante (es decir, el factor de expansión o compresión que provoca la acción del operador no diverge exponencialmente).

- Considerando una matriz \mathbf{A}_t y un vector \vec{w} no nulo de un espacio en \mathbb{R}^N (no es necesario que el espacio sea \mathbb{R}^N , no obstante necesitamos que el producto esté definido), la cantidad

$$\chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{A}_t \vec{w}\| \quad (2.9)$$

se denomina **LCE de orden 1** de la matriz \mathbf{A}_t con respecto al vector \vec{w} .

Sea \vec{w}_i , $i = 1, 2, \dots, p$ con $p \leq N$ un conjunto de vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^N y denotemos por $E^p \subset \mathbb{R}^N$ al subespacio generado por la base precedente, siendo $vol_p(\mathbf{A}_t, E^p)$ el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\mathbf{A}_t \vec{w}_i$, i.e.:

$$vol_p(\mathbf{A}_t, E^p) = \|\mathbf{A}_t \vec{w}_1 \wedge \mathbf{A}_t \vec{w}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{A}_t \vec{w}_p\|$$

con $vol_p(\mathbf{A}_0, E^p)$ el volumen del paralelepípedo a tiempo $t = 0$ (inicial), donde $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}_N$. Luego, la cantidad

^{††}Por ejemplo, la norma euclídeana $\|\mathbf{A}\|$ de una matriz $N \times N$ está inducida por la norma euclídeana para vectores, i.e. $\|\mathbf{x}\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, como $\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ lo que resulta equivalente al máximo autovalor de la matriz $\sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}$.

$$\lambda_t(E^p) = \frac{\text{vol}_p(\mathbf{A}_t, E^p)}{\text{vol}_p(\mathbf{A}_0, E^p)} \quad (2.10)$$

se llama factor de crecimiento (o decrecimiento) en las direcciones de E^p y si el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(E^p)$$

existe, podemos decir que:

- Considerando el conjunto linealmente independiente de vectores \vec{w}_i , $i = 1, 2, \dots, p$ y el subespacio E^p de \mathbb{R}^N que ya presentamos, se denomina **LCE de orden p** de la matriz \mathbf{A}_t con respecto al subespacio E^p a la cantidad

$$\chi(\mathbf{A}_t, E^p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \text{vol}_p(\mathbf{A}_t, E^p). \quad (2.11)$$

Si la acción de las matrices \mathbf{A}_t sobre los vectores provoca un crecimiento o decrecimiento acotado, y consideramos la **desigualdad de Hadamard** (el volumen euclídeo de un dado paralelepípedo no excede el producto de las longitudes de sus lados):

$$\prod_{i=1}^p \|\mathbf{A}_t \vec{w}_i\| \geq |\det \mathbf{A}_t|,$$

con $\det \mathbf{A}_t$ el determinante de la matriz \mathbf{A}_t , podremos asegurar que los límites de las Ecs. (2.9) y (2.11) que definen los *LCEs* son finitos.

Además, por la desigualdad de Hadamard si el conjunto \vec{w}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ resultara una base de \mathbb{R}^N , entonces:

$$\sum_{i=1}^N \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_i) \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \mathbf{A}_t|.$$

Puede demostrarse que para cualquier $r \in \mathbb{R}$, el conjunto de vectores $\{\vec{w} \in \mathbb{R}^N : \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}) \leq r\}$ es un espacio vectorial de \mathbb{R}^N y la función $\chi(\mathbf{A}_t, \vec{w})$ con $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{w} \neq 0$ toma como máximo N valores diferentes que pueden ser ordenados como $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_s$ con $1 \leq s \leq N$. De esta forma podemos introducir los subespacios $L_i = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^N : \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}) \leq \nu_i\}$, que cumplen con la siguiente estructura tipo “mamushka”:

$$\mathbb{R}^N = L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_s \supset L_{s+1} \equiv \{0\},$$

con $L_{i+1} \neq L_i$ y $\chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}) = \nu_i$ sólo si $\vec{w} \in L_i \setminus L_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, s$. Luego, en orden decreciente cada *LCE* vive en un espacio de dimensionalidad menor que el precedente, recreando una estructura de espacios lineales de dimensionalidades cada vez menores, cada uno conteniendo al que le sigue.

- Una base \vec{w}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ de \mathbb{R}^N se dice normal si $\sum_{i=1}^N \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_i)$ es mínima en esta base, donde $\chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_i)$ dependen sólo de \mathbf{A}_t y se los denomina *LCEs* de la matriz \mathbf{A}_t . Además, siempre podremos asumir el siguiente ordenamiento: $\chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_1) \geq \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_2) \geq \dots \geq \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_N)$.

- Sea \vec{w}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ una base normal de \mathbb{R}^N y $\chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_1) \geq \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_2) \geq \dots \geq \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_N)$ los correspondientes *LCEs*. Si asumimos que los ν_i , $i = 1, 2, \dots, s$ aparecen exactamente $k_i = k_i(\nu_i) > 0$ veces, entonces a k_i se la llama **multiplicidad** del valor ν_i y consecuentemente, a la colección de pares (ν_i, k_i) , $i = 1, 2, \dots, s$ se la llama **espectro de los LCEs**.
- La matriz \mathbf{A}_t se le dice **regular** cuando $t \rightarrow \infty$ si para cada base normal \vec{w}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^N \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_i) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \mathbf{A}_t|,$$

lo cual implica que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \mathbf{A}_t| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \mathbf{A}_t|$$

garantizando que el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \mathbf{A}_t|$$

exista, sea finito e igual a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \mathbf{A}_t| = \sum_{i=1}^N \chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}_i) = \sum_{i=1}^s k_i \nu_i.$$

Teniendo todos estos resultados podemos postular el siguiente teorema:
Si la matriz \mathbf{A}_t es regular, luego los *LCEs* de cualquier orden están dados por

$$\chi(\mathbf{A}_t, \vec{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{A}_t \vec{w}\|$$

y, generalizando

$$\chi(\mathbf{A}_t, E^p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \text{vol}_p(\mathbf{A}_t, E^p).$$

En particular, para cualquier subespacio p -dimensional $E^p \subseteq \mathbb{R}^N$ tenemos

$$\chi(\mathbf{A}_t, E^p) = \sum_{j=1}^p \chi_{i_j}$$

con la secuencia $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq N$.

Finalmente, cuando alguno de los *LCEs* (*FT-LCNs*) o el *LLCE* (*LI*) es distinto de cero (mayor que V_c), la órbita es caótica, cuando todos los *LCEs* son cero (*FT-LCNs* menores al V_c) o bien el *LLCE* es cero (*LI* menor que V_c), es regular.

2.2.2. El Indicador Relativo de Lyapunov (*RLI*)

Llamemos $LI(\mathbf{x}_0; j)$ al LI para una condición inicial \mathbf{x}_0 , luego de j pasos de integración (o iteraciones, según se trate de calcular el CI en un flujo o un mapa). En Sándor *et al.* (2000), los autores calcularon el $LI(\mathbf{x}_0; j)$ para varias regiones del problema restringido de los tres cuerpos. En regiones de movimiento regular, el $LI(\mathbf{x}_0; j)$ varía suavemente con \mathbf{x}_0 , en cambio para dominios caóticos, se observan grandes fluctuaciones. Sin embargo, para ciertas regiones, como e.g., de caos débil, las fluctuaciones del $LI(\mathbf{x}_0; j)$ no son lo suficientemente grandes como para efectuar una sólida clasificación del movimiento. Luego, Sándor *et al.* (2000), dedicaron sus esfuerzos a estudiar la dependencia temporal de las fluctuaciones del $LI(\mathbf{x}_0; j)$.

Si graficamos su evolución temporal, encontraremos fluctuaciones que no son significativas. Entonces, con el objetivo de ampliar dichas fluctuaciones, definen el *RLI* como:

$$\Delta LI(\mathbf{x}_0; j) = \|LI(\mathbf{x}_0 + \vec{\Delta x}; j) - LI(\mathbf{x}_0; j)\|$$

donde \mathbf{x}_0 y $\mathbf{x}_0 + \vec{\Delta x}$ son dos condiciones iniciales muy próximas, separadas por una cantidad $|\vec{\Delta x}|$.

El parámetro que determina la distancia inicial entre las órbitas, i.e. $|\vec{\Delta x}|$, es libre (véase Sándor *et al.* 2004).

Finalmente se hace un promediado de la forma:

$$RLI(t) = \langle \Delta LI(\mathbf{x}_0) \rangle_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t/\delta_t} \Delta LI(\mathbf{x}_0, i \cdot \delta_t), \quad (2.12)$$

con δ_t el paso de integración.

Luego, el *LP-VIcode* calcula el LI para dos órbitas cercanas, dada una separación inicial, y determina el módulo de la diferencia, para terminar haciendo el promediado de la Ec. (2.12). Sin embargo, hay que tener ciertos recaudos al calcular la separación inicial, ya que el *RLI* por considerar dos órbitas que, esencialmente, son distintas, corre el riesgo de evaluar dos órbitas que pertenezcan a componentes diferentes. Luego, el intervalo empírico sugerido por Sándor *et al.* (2004) para el parámetro es $[10^{-14}, 10^{-7}]$, que funciona satisfactoriamente para varios modelos.

Finalmente, se observa que las órbitas caóticas tienen valores que son varios órdenes de magnitud más grandes que los de las órbitas regulares, lo que permite al *RLI* su discriminación.

2.2.3. Los Espectros Dinámicos de los Números de Dilatación Local (*SSNs*) y la Distancia Espectral (*D*)

El número de dilatación local s_i se define como:

$$s_i = \frac{1}{\delta_t} \ln \frac{|d_{\mathbf{x}} \vec{\Phi}^{t+i \cdot \delta_t}(\vec{w}(0))|}{|d_{\mathbf{x}} \vec{\Phi}^{t+(i-1) \cdot \delta_t}(\vec{w}(0))|} \quad (2.13)$$

donde $d_{\mathbf{x}} \vec{\Phi}^{t+i \cdot \delta_t}(\vec{w}(0)) = \vec{w}(t+i \cdot \delta_t)$, i.e. el vector desviación a tiempo $t+i \cdot \delta_t$, con $i = 1, 2, \dots, p$ y p la cantidad de pasos de integración δ_t en el que se dividió el intervalo de integración. En el caso de mapas, $\delta_t \equiv 1$ (nosotros vamos a considerar sólo los s_i por simplicidad, pero también

se puede hacer un análisis similar con los ángulos de hélice o de torsión, aunque estos últimos, no resultan del todo convenientes para sistemas multidimensionales).

Además, como no se utiliza en la definición el límite $t \rightarrow \infty$, luego es la serie de s_i generada cuando $i \rightarrow \infty$ que converge al LI (Skokos 2001). Sin embargo, para obtener información dinámica, es necesario estudiar su espectro. El espectro de s_i , i.e. los $SSNs$, tiene más información que el LI ; e.g. Contopoulos & Voglis (1996) mostraron que para dos órbitas caóticas pertenecientes a sistemas totalmente distintos, sus LI coincidían, pero los $SSNs$ eran completamente diferentes. Por otro lado, en el caso de contar con un número grande de órbitas, el análisis de los espectros de cada una se hace inviable, por lo que luego introducimos la D (Voglis *et al.* 1999), método desarrollado para salvar este aspecto.

Los $SSNs$ estarán dados, entonces, por la densidad de probabilidad de los valores s que pueden tomar los s_i , i.e.:

$$S(s)ds = \frac{dN(s)}{N}, \quad (2.14)$$

donde N es el número total de s_i y $dN(s)$ es el número en el intervalo de valores $(s, s + ds)$. O sea que el cómputo de los $SSNs$ yace simplemente en la confección de estos histogramas.

Hay ciertas propiedades interesantes de los $SSNs$ que resultan fundamentales a la hora de clasificar las órbitas y por lo tanto, es conveniente citarlas aquí:

1. El espectro $S(s)$ es invariante con respecto a la condición inicial que se tome a lo largo de la órbita (**invariante temporal**).
2. El espectro $S(s)$ es invariante con respecto a la condición inicial y al i.d.v. si pertenecen a un dominio caótico conectado^{§§} (**invariante espacial**).

La convergencia de dos vectores desviación es mucho más rápida que la convergencia del espectro a su forma final (lo cual ocurre en prácticamente la misma escala de tiempo que la estabilización del LI). Por lo tanto, midiendo las diferencias entre los $SSNs$ asociados a distintos i.d.v., es posible reconocer una órbita caótica mucho más rápidamente que calculando su LI o inspeccionando el $SSNs$ final. La D se basa en esta idea. Dadas las propiedades de los $SSNs$ ya enumeradas, se encuentra inmediatamente que si la órbita es regular, la D es distinta de cero. Cuando la órbita es caótica se acerca al valor nulo, o sea:

$$D^2 = \sum_s [S_1(s) - S_2(s)]^2 \cdot \Delta s, \quad (2.15)$$

donde $S_j(s)$ es el número normalizado de s_i asociados al i.d.v. $\vec{w}_j(0)$, que tienen valores en el intervalo $s, s + \Delta s$. Nótese por otro lado, que es necesario el seguimiento de dos i.d.v. dada la condición inicial para el cómputo de la D .

Cuando la D tiende a un valor constante no nulo la órbita se considera regular (no coinciden los espectros de los $SSNs$ asociados a cada i.d.v.), cuando tiende a cero se considera caótica (coinciden los espectros de los $SSNs$ asociados a cada i.d.v.).

La implementación en el $LP-VIcode$ fue hecha siguiendo las pautas de Voglis *et al.* (1999), resumidas en las Ecs. (2.13), (2.14) y (2.15).

^{§§}Brevemente, los dominios caóticos están caracterizados por un $LLCE$ común.

2.2.4. El Factor de Crecimiento Exponencial Medio entre Órbitas Cercanas (MEGNO)

En esta sección resumiremos las principales características del *MEGNO* (descrito en detalle en Cincotta *et al.* 2003).

Sea $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ con $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ un Hamiltoniano^{¶¶} de N d.o.f., que suponemos autónomo tan sólo por simplicidad. Recordemos entonces que:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \vec{f}(\mathbf{x}) = (-\partial H/\partial \mathbf{q}, \partial H/\partial \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2N},$$

y por ende, las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\mathbf{x}} = \vec{f}(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Sea $\gamma(\vec{x}_0; t)$ un arco de la órbita en el flujo dado por la ecuación (2.16) sobre una superficie de energía compacta: $M_h \subset \mathbb{R}^{2N}$, $M_h = \{\mathbf{x} : H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h\}$ con h una constante, entonces

$$\gamma(\vec{x}_0; t) = \{\mathbf{x}(t'; \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \in M_h, 0 \leq t' < t\}.$$

Obtenemos información esencial sobre el flujo Hamiltoniano en las vecindades de una dada órbita γ a través del *LLCE* que podemos definir como:

$$\chi_\gamma = \chi[\gamma(\vec{x}_0; t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t[\gamma(\vec{x}_0; t)] \quad (2.17)$$

donde

$$\lambda_t[\gamma(\vec{x}_0; t)] = \frac{\|d_\gamma \vec{\Phi}^t \vec{w}\|}{\|\vec{w}\|}$$

con $\|d_\gamma \vec{\Phi}^t \vec{w}\|$ un desplazamiento infinitesimal de γ a tiempo t , donde $\|\cdot\|$ es cierta norma. El hecho que el *LLCE* mida la tasa local media de divergencia exponencial entre órbitas cercanas se ve claramente cuando la Ec. (2.17) se escribe en forma integral, i.e.:

$$\chi[\gamma(\vec{x}_0; t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\|\dot{d}_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|}{\|d_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|} dt' = \overline{\left(\frac{\|\dot{d}_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|}{\|d_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|} \right)}, \quad (2.18)$$

donde la barra denota un promediado en el tiempo.

Ahora podemos introducir la cantidad $Y[\gamma(\mathbf{x}_0; t)]$, por medio de la expresión:

$$Y[\gamma(\mathbf{x}_0; t)] = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\|\dot{d}_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|}{\|d_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|} t' dt', \quad (2.19)$$

que está relacionada con la integral en la Ec. (2.18); i.e., en caso de un incremento exponencial de $\|d_\gamma \vec{\Phi}^t \vec{w}\|$, $\|d_\gamma \vec{\Phi}^t \vec{w}\| = \|\vec{w}\| \cdot \exp(\chi t)$, entonces $Y[\gamma(\mathbf{x}_0; t)]$ puede ser considerada como una variante pesada de la integral de la Ec. (2.18), y en vez de usar la tasa instantánea de crecimiento, χ , usamos el logaritmo natural del factor de crecimiento, $\ln(\lambda_t) = \chi t$.

^{¶¶}Aunque utilizaremos los indicadores variacionales introducidos en este trabajo de tesis para estudiar exclusivamente sistemas Hamiltonianos, recordemos que los *LCEs* en los cuales se basan, no tienen como requisito que el sistema sea de esta naturaleza (ver Sección 2.2.1).

Describamos ahora el comportamiento asintótico del $Y[\gamma(\mathbf{x}_0; t)]$ para mostrar su habilidad para brindar una idea clara sobre el carácter de las órbitas. Primero, consideremos el caso de órbitas en toros irracionales para un sistema no-isócrono. Como se muestra en Cincotta *et al.* (2003), en caso de movimiento condicionalmente periódico, γ_q , la evolución temporal de $Y[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)]$ está dada por

$$Y[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)] \approx 2 - \frac{\ln(1 + \chi_q t)^2}{\chi_q t} + O[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)],$$

donde χ_q es la tasa lineal de divergencia local alrededor de γ_q y O es un término oscilatorio de promedio nulo. Luego, el $\lim_{t \rightarrow \infty} Y[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)]$ no existe, pero introduciendo el promedio temporal (*MEGNO*)

$$\bar{Y}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)] \equiv \frac{1}{t} \int_0^t Y[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t')] dt',$$

éste existe, y es

$$\bar{Y}[\gamma_q(\mathbf{x}_0)] \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Y}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)] = 2.$$

Entonces, para movimiento condicionalmente periódico, $\bar{Y}[\gamma_q(\mathbf{x}_0)]$ es una constante independiente de γ_q .

Cuando tomamos órbitas irregulares γ_i , e.g. órbitas en alguna capa estocástica o cualquier dominio caótico, para las cuales $\|d_{\gamma_i} \bar{\Phi}^t \vec{w}\| \approx \|\vec{w}\| \cdot \exp(\chi_i t)$, siendo χ_i el *LLCE* de γ_i , la evolución temporal del $Y[\gamma_i(\mathbf{x}_0; t)]$ vendrá dada por:

$$Y[\gamma_i(\mathbf{x}_0; t)] \approx \chi_i t + \tilde{O}[\gamma_i(\mathbf{x}_0; t)],$$

con \tilde{O} algún término oscilatorio de amplitud acotada y promedio nulo (véase Cincotta *et al.* 2003). Promediando sobre un intervalo lo suficientemente largo, tendremos:

$$\bar{Y}[\gamma_i(\mathbf{x}_0; t)] \approx \frac{\chi_i}{2} t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Entonces, en el caso de movimiento caótico, no solamente la cantidad $Y[\gamma_i(\mathbf{x}_0; t)]$ sino también $\bar{Y}[\gamma_i(\mathbf{x}_0; t)]$ crecen linealmente con el tiempo, con una pendiente igual al *LLCE* de la órbita, o a un medio de éste, respectivamente. En las regiones donde el espacio de fases posea una estructura hiperbólica, \bar{Y} crecerá indefinidamente con el tiempo. De otra manera, se acercará a un valor constante, incluso en el caso degenerado donde $\|d_\gamma \bar{\Phi}^t \vec{w}\|$ crece con alguna potencia de t , e.g. n , para la cual $\bar{Y} \rightarrow 2n$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Luego, el comportamiento asintótico (a tiempo infinito; a tiempo finito tan sólo reemplazamos en lo que sigue el *LLCE* por el *LI*) del *MEGNO* puede ser descripto en forma resumida de la siguiente manera:

$$\bar{Y}[\gamma(\mathbf{x}_0; t)] \approx a_\gamma t + b_\gamma, \quad (2.20)$$

donde $a_\gamma = \chi_\gamma/2$ y $b_\gamma \approx 0$ para movimiento irregular, estocástico; mientras que $a_\gamma = 0$ y $b_\gamma \approx 2$ para movimiento condicionalmente periódico (para movimiento periódico: $a_\gamma = 0$ y $b_\gamma \approx 0$). Pequeñas desviaciones del valor $b_\gamma \approx 2$ indican que la trayectoria γ pasa cerca de objetos particulares del espacio de fases, siendo $b_\gamma \lesssim 2$ o $b_\gamma \gtrsim 2$ cuando estos objetos son órbitas periódicas estables, u órbitas periódicas inestables, respectivamente (véase Cincotta *et al.* 2003 para más detalles).

Además, la cantidad $\hat{\chi} = Y/t$ verifica que

$$\hat{\chi}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)] \approx \frac{2}{t}, \quad \hat{\chi}[\gamma_i(\mathbf{x}_0; t)] \approx \chi_i, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

confirmando el hecho que para dominios de movimiento regular, $\hat{\chi}$ converge a cero más rápido que χ (que va a cero como $\ln t/t$), mientras que para dominios de movimiento estocástico, ambas cantidades tienden al *LLCE* positivo con una tasa similar.

Nótese que de la Ec. (2.20) es posible recuperar el *LLCE* de la órbita por medio de un ajuste de mínimos cuadrados a partir del \bar{Y} (*MEGNO*) para cada tiempo. Haremos uso de esta estimación en la Sección 5.2, al calcular el *LLCE* por medio de la pendiente del *MEGNO*.

2.2.4.1. Generalización del *MEGNO*

Podemos generalizar el $Y[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)]$, Ec. (2.19), de la siguiente manera (Cincotta *et al.* 2003):

$$Y_{m,n}[\gamma(\mathbf{x}_0; t)] = (m+1) \cdot t^n \int_0^t \frac{\|d_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|}{\|d_\gamma \vec{\Phi}^{t'} \vec{w}\|} (t')^m dt',$$

y definiendo (el *MEGNO* generalizado):

$$\bar{Y}_{m,n}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)] \equiv \frac{1}{t^{m+n+1}} \int_0^t Y_{m,n}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t')] dt',$$

el comportamiento asintótico de $\bar{Y}_{m,n}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)]$ puede ser también resumido como lo expresa la Ec. (2.20). Pero donde ahora: $a_\gamma = \chi_i/(m+n+2)$ y $d_\gamma \sim 0$ para movimiento irregular, estocástico y $a_\gamma = 0$ y $d_\gamma \sim (m+1)/(m+n+1)$ para movimiento estable, condicionalmente periódico.

Además de la elección natural $(m, n) = (1, -1)$, los valores del par $(2, 0)$ también sirven para distinguir el movimiento regular del movimiento caótico de una manera eficiente. Luego, en este trabajo utilizamos el $\bar{Y}_{m,n}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)]$ con $(m, n) = (1, -1)$ (*MEGNO*) para estudiar flujos Hamiltonianos en el Capítulo 3, Sección 4.2 y en el Capítulo 5, y el $\bar{Y}_{m,n}[\gamma_q(\mathbf{x}_0; t)]$ con $(m, n) = (2, 0)$ (*MEGNO(2,0)*) para estudiar mapas simplécticos en la Sección 4.1.

2.2.5. El Índice Menor de Alineamiento (*SALI*) y el Índice de Alineamiento Generalizado (*GALI*)

En Skokos (2001) se introduce el *SALI* de la siguiente manera: primero se definen los índices de alineamiento paralelo

$$d_- = \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|,$$

y antiparalelo

$$d_+ = \|\vec{w}_1 + \vec{w}_2\|,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídeana.

Si los vectores desviación están normalizados (en la implementación numérica se normaliza tiempo a tiempo), cuando la órbita es caótica $d_- \rightarrow 0$ y $d_+ \rightarrow 2$ (porque los vectores tienden a coincidir), o $d_- \rightarrow 2$ y $d_+ \rightarrow 0$ (porque los vectores tienden a ser opuestos). Si es regular d_- y d_+ oscilan dentro del intervalo $(0,2)$.

Entonces se define al *SALI* como el menor de estos índices:

$$SALI(t) = \min(d_+, d_-).$$

De esta forma se implementa en el *LP-VIcode*.

En Skokos *et al.* (2007) se generaliza el *SALI*, introduciendo otra forma de calcularlo, evaluando la cantidad:

$$P(t) = d_+ \cdot d_-,$$

a cada tiempo t . De hecho, si el mínimo de cada uno de los índices de alineamiento es cero (como es el caso de una órbita caótica de referencia), también será el mínimo de la cantidad $P(t)$. Por otro lado, si ninguno es cero, $P(t)$ será proporcional a la constante alrededor de la cual oscilará el mínimo de ambos índices de alineamiento (como es el caso de las órbitas regulares). Este comportamiento es notado por los autores en Skokos *et al.* (2007) y utilizado para evaluar numéricamente el *SALI*, a través de la expresión que obedece $P(t)$. Por ende, utilizan el producto vectorial de los dos vectores desviación:

$$\|\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\| = \frac{P(t)}{2},$$

que representa el área del paralelogramo formado por \vec{w}_1 y \vec{w}_2 . Esta forma de definir al *SALI* les permitió una generalización del mismo, dado que en vez de calcular simplemente el área dados dos vectores desviación, uno puede calcular el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k$ con $2 < k \leq 2N$, tomados como vectores desviación de una órbita de referencia en un sistema Hamiltoniano de N -d.o.f. o un mapa simpléctico de $2N$ dimensiones.

Por ende, el $GALI_k$, con $2 \leq k \leq 2N$ se determina a partir de la evolución de k i.d.v. $\vec{w}_k(0)$. Para evitar el *overflow*, se normaliza continuamente como ya hemos dicho, pero sus direcciones se mantienen intactas, al igual que en el *SALI*. Luego, de acuerdo con Skokos *et al.* (2007), el $GALI_k$ se define como el volumen del k -paralelepípedo que tiene como aristas

los k i.d.v. unitarios $\vec{w}_i(t) = \frac{\vec{w}_i(t)}{\|\vec{w}_i(t)\|}$, $i = 1, 2, \dots, k$ y se determina a través de la norma del producto exterior*** entre los k vectores $\vec{w}_i(t)$:

$$GALI_k(t) = \|\vec{w}_1(t) \wedge \vec{w}_2(t) \wedge \dots \wedge \vec{w}_k(t)\|. \quad (2.21)$$

De la Ec. (2.21) resulta evidente que si al menos dos vectores desviación se vuelven linealmente dependientes, el $GALI_k$ se volverá cero.

En el caso de una órbita caótica de referencia, todos los vectores desviación tenderán a ser linealmente dependientes, alineándose en la dirección definida por el $ILCE$ y por lo tanto, el $GALI_k$ tenderá a cero de forma exponencial:

$$GALI_k(t) \propto e^{-[(\chi_1 - \chi_2) + (\chi_1 - \chi_3) + \dots + (\chi_1 - \chi_k)] \cdot t},$$

donde $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ son los k mayores $LCEs$ asociados a la órbita.

Observemos que la Ec. (2.21) no es más que una forma de estimar el factor de crecimiento (decrecimiento) denotado por $\lambda_t(E^p)$ en la Ec. (2.10), Sección 2.2.1.

En el caso de las órbitas regulares, éstas se mueven en toros de dimensión $m \leq N$ en un dado sistema de N -d.o.f. En general se mueven en toros de dimensionalidad N , pero en el caso de resonancias, la dimensionalidad de la variedad disminuye hasta el caso periódico, donde la variedad es una curva invariante, $m = 1$. Luego, el comportamiento del $GALI_k$ se resume como (Christodoulidi & Bountis 2006):

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} \text{constante} & \text{si } 2 \leq k \leq m \\ \frac{1}{t^{(k-m)}} & \text{si } m < k \leq 2N - m \\ \frac{1}{t^{2(k-N)}} & \text{si } 2N - m < k \leq 2N. \end{cases} \quad (2.22)$$

Nótese que en el caso de mapas 2D, donde el único toro posible es una curva invariante 1-dimensional, i.e. $m = 1$, el espacio tangente es unidimensional. Luego, el comportamiento del $GALI_2$ (el único índice posible en tal situación) está dado por la tercera línea de la Ec. (2.22): $GALI_2 \propto 1/t^2$, dado que los primeros dos casos no son aplicables. El caso más común de órbitas regulares en toros N -dimensionales, se obtiene haciendo simplemente $m = N$ en la Ec. (2.22) (Manos *et al.* 2011).

Aunque el cálculo numérico del $SALI$ no es complicado de programar ni costoso computacionalmente, el correspondiente al $GALI$ sí lo es, dado que requiere del cómputo de determinantes y en grandes cantidades. Por ejemplo, como señalan Skokos *et al.* (2008) en su trabajo, el cálculo del $GALI_8$ requiere de la evaluación de $1,287 \times 10^4$ determinantes de 8×8 y el cálculo del $GALI_{15}$, la evaluación de $1,5511752 \times 10^8$ determinantes de 15×15 .

Consecuentemente, introducen una forma alternativa para el cálculo numérico del $GALI_k$. Haciendo uso de la **descomposición en valores singulares** de matrices obtienen el $GALI_k$ a partir de la siguiente relación:

$$\log(GALI_k) = \sum_{i=1}^k \log(z_i),$$

***Para la definición de producto exterior, ver Skokos *et al.* (2007), apéndice A.

donde los z_i son los **valores singulares** de una determinada matriz \mathbf{Z} : sea \mathbf{A} la matriz cuyas filas son los k vectores desviación unitarios $\vec{w}_i(t)$, al hacer la descomposición en valores singulares de su transpuesta obtenemos la igualdad $\mathbf{A}^T = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{V}^T$, donde \mathbf{U} es una matriz $2N \times k$, \mathbf{Z} una matriz diagonal con valores nulos o positivos z_i llamados valores singulares y \mathbf{V} una matriz ortogonal de $k \times k$.

Es de esta forma, utilizando la subrutina SVD del *Numerical Recipes* (Press *et al.* 2003) señalada por Skokos *et al.* (2008), que se implementó el cálculo de los *GALIs*, en un módulo aparte del *SALI*, dentro del *LP-VIcode*.

2.2.6. El Indicador Rápido de Lyapunov (*FLI*) y la componente Ortogonal del Indicador Rápido de Lyapunov (*OFLI*)

El *FLI* es una cantidad íntimamente relacionada con el *LI* (véase e.g. Froeschlé *et al.* 1997a; Froeschlé *et al.* 1997b; Froeschlé & Lega 2000; Lega & Froeschlé 2001; Guzzo *et al.* 2002; Froeschlé & Lega 2006) y el *MEGNO* (Mestre *et al.* 2011). The *FLI* es capaz de distinguir entre movimiento caótico (e incluso caos moderado) y movimiento regular (Froeschlé *et al.* 1997a; Froeschlé *et al.* 1997b), más aún entre movimiento resonante y no resonante (Froeschlé & Lega 2000; Lega & Froeschlé 2001; Guzzo *et al.* 2002) usando tan sólo la primera parte del cálculo numérico del *LI*.

Para su implementación en el *LP-VIcode* se utilizó la versión original dada en Froeschlé *et al.* (1997a); Froeschlé *et al.* (1997b). No obstante, se prevee implementar también la definición del *FLI* dada en Froeschlé & Lega (2000), donde los autores utilizan un sólo i.d.v., que si bien no modifica los resultados del indicador, disminuye el tiempo de cómputo.

Ahora bien, dado un sistema N -dimensional, se sigue la evolución temporal de N i.d.v. Se toma la norma euclidea de cada uno, y se guarda tiempo a tiempo (paso a paso, según sea flujo o mapa) la mayor de las normas, i.e., en el tiempo (o iteración) t el *FLI* se calcula como:

$$FLI(t) = \sup_t [\|\vec{w}(t)_1\|, \|\vec{w}(t)_2\|, \dots, \|\vec{w}(t)_N\|].$$

Para mayores detalles referirse a Froeschlé *et al.* (1997a) y Froeschlé *et al.* (1997b).

Para ambos tipos de movimiento, caótico y regular, el *FLI* tiende a infinito con el tiempo, pero siguiendo leyes de crecimiento totalmente distintas. El *FLI* crece exponencialmente rápido para movimiento caótico y lo hace linealmente para movimiento regular. Más aún, el *FLI* crece linealmente para movimiento regular pero siguiendo distintas tasas, dependiendo de si el movimiento es regular resonante o no resonante.

En el caso del *OFLI*, la modificación se basa en tomar la componente ortogonal al flujo de cada uno de los vectores desviación, tiempo a tiempo (o iteración a iteración). Luego, podemos calcular el *OFLI* como:

$$OFLI(t) = \sup_t [w(t)_1^\perp, w(t)_2^\perp, \dots, w(t)_N^\perp]. \quad (2.23)$$

Es esta modificación la que hace que el *OFLI* distinga con facilidad las órbitas periódicas del resto de las órbitas regulares, siendo su comportamiento para las primeras, oscilatorio alrededor de una constante fija, cuando para el resto (condicionalmente periódica o caótica), sigue el mismo comportamiento que el *FLI*.

Aclaremos que la Ec. (2.23) es ligeramente distinta a la dada en Fouchard *et al.* (2002) donde se introduce el *OFLI*, dado que los autores utilizan, como en el caso de Froeschlé & Lega (2000), un sólo i.d.v. para el cálculo del indicador. Se prevee entonces, la misma implementación para el *OFLI* que la mencionada para el *FLI* en una futura versión del código.

2.2.7. La componente Ortogonal del Indicador Rápido de Lyapunov de segundo orden ($OFLI_{TT}^2$)

Como se describió en la Sección 2.2.6, el cálculo del *OFLI* es esencialmente el mismo que el del *FLI*, salvo que a cada tiempo se guarda, no el vector desviación, sino su proyección ortogonal al flujo. En Barrio (2005), se llama al *OFLI*: $OFLI^1$, donde el supraíndice “1” señala explícitamente que el *OFLI* es un método basado en las ecuaciones variacionales linealizadas.

El autor remarca en el mismo trabajo, que el rendimiento del *OFLI* depende sensiblemente de las condiciones iniciales usadas para las ecuaciones variacionales linealizadas, dado que estos métodos son utilizados a tiempos cortos de integración (discusiones similares para el caso del *FLI* se pueden encontrar en Froeschlé *et al.* 1997b y Froeschlé & Lega 2000). Luego, es necesaria una elección cuidadosa de estas condiciones iniciales, i.e., de los i.d.v., lo que finalmente motiva la modificación subsecuente.

Tomando el $OFLI_T^1$, donde el subíndice indica que el i.d.v. se elige tangente al flujo (al igual que en Froeschlé & Lega 2000 con el *FLI* y que en Fouchard *et al.* 2002 con el *OFLI*, en Barrio 2005 se utiliza un sólo i.d.v. para el cómputo de los indicadores), Barrio (2005) encuentra buenos rendimientos, pero como sus valores son muy pequeños, la evolución se hace muy lenta y la caracterización de las órbitas, dificultosa. Por ello, procede a calcular numéricamente las ecuaciones variacionales de mayor orden, en este caso de segundo orden, ya que aunque la extensión es posible a órdenes arbitrarios, el costo computacional se incrementa notablemente.

Luego, según el autor podemos definir al $OFLI_{TT}^2$, un método variacional de orden dos, como:

$$OFLI_{TT}^2(t) = \sup_{0 < t < t_f} \hat{w}(t)^\perp, \quad (2.24)$$

donde, siguiendo la notación previamente introducida en la Sección 2.2.6 con el *OFLI*, $\hat{w}(t)^\perp$, es la componente ortogonal al flujo del vector $\hat{\mathbf{w}}(t)$, el cual se encuentra definido como:

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{(2)}(t)$$

con $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{w}^{(2)}(t)$ las soluciones de las ecuaciones variacionales linealizadas y de segundo orden, respectivamente, a tiempo t .

Finalmente, en la Ec. (2.24), tomamos el máximo de los valores de $\hat{w}(t)^\perp$ en el intervalo $(0, t_f]$ para un dado tiempo t_f .

El comportamiento del indicador resulta similar al mencionado para el *OFLI*.

Para mayores detalles, referirse a Barrio (2005); Barrio *et al.* (2009a); Barrio *et al.* (2009b); Barrio *et al.* (2010).

2.2.8. El Exponente Medio de Ley de Potencias (*APLE*)

Derivado como aplicación del concepto de **Entropía de Tsallis** (Tsallis *et al.* 1997; Tsallis *et al.* 2002), en el artículo de Lukes–Gerakopoulos *et al.* (2008) se introduce el *APLE*.

Dado que la deducción es muy distinta a la observada en los otros indicadores variacionales, donde esencialmente la idea es seguir la evolución de los vectores desviación $\vec{w}(t)$ (soluciones de las ecuaciones variacionales linealizadas o de segundo orden), daremos un poco más de detalles sobre cómo los autores introducen este método.

La evolución temporal de la entropía q , S_q , para un conjunto de condiciones iniciales dentro de un volumen V_0 , está dada por:

$$S_q(t) = \frac{W(t)^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad (2.25)$$

donde q es un parámetro constante, conocido como **índice entrópico** q , y

$$W(t) = \frac{\|\vec{w}_1(t)\| \|\vec{w}_2(t)\| \dots \|\vec{w}_m(t)\|}{\delta^m} \quad (2.26)$$

es el número de celdas (o **microestados**) ocupados en un dado volumen, $\vec{w}_i(t)$ es el vector desviación i a tiempo t , y δ el ancho de las celdas en las cuales se particiona el volumen V_0 . Dividiendo la Ec. (2.25) por t/t_1 donde t_1 es un transitorio inicial del tiempo de evolución de las órbitas, y substituyendo W por la Ec. (2.26), tendremos la tasa media de evolución del S_q , i.e.:

$$\frac{S_q}{t/t_1} = \frac{1}{(t/t_1)(1-q)} \left[\left(\frac{\|\vec{w}_1(t)\| \|\vec{w}_2(t)\| \dots \|\vec{w}_m(t)\|}{\delta^m} \right)^{1-q} - 1 \right]. \quad (2.27)$$

Para cada \vec{w}_k , $k = 1, 2, \dots, m$, definen el *APLE* p_k de acuerdo a

$$\vec{w}_k(t) = \vec{w}_k(t_1) \left(\frac{t}{t_1} \right)^{p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.28)$$

Todos los p_k son, en general, funciones del tiempo t , y el valor de los $p_k(t)$ dan la pendiente logarítmica media (o el exponente de la ley de potencias) de la evolución de $\vec{w}(t)$ en el intervalo de tiempo que se extiende desde t_1 hasta t . Más aún, para sistemas conservativos, se tiene que $p_1 + p_2 + \dots + p_m \geq 0$ dado que debido a la preservación del volumen, las componentes de $\vec{w}_k(t)$ no pueden ser todas funciones decrecientes con el tiempo.

De acuerdo a la definición del *APLE* (Ec. 2.28), la Ec. (2.27) toma la forma:

$$\frac{S_q}{t/t_1} = \frac{1}{(t/t_1)(1-q)} \left[\left(\frac{t}{t_1} \right)^{(p_1+p_2+\dots+p_m) \cdot (1-q)} - 1 \right].$$

En el límite $t \rightarrow \infty$ la cantidad $S_q/(t/t_1)$ tiende a un valor finito distinto de cero si (a) los p_i toman valores límites constantes, y (b) el índice entrópico q satisface la relación $(p_1 + p_2 + \dots + p_m) \cdot (1 - q) = 1$. En los restantes casos, la cantidad $S_q/(t/t_1)$ tiende a cero o infinito. Si los vectores desviación $\vec{w}_k(t)$ crecen asintóticamente con una ley de potencias,

entonces la condición (a) es satisfecha automáticamente y la tasa media de incremento de la entropía de Tsallis $S_q/(t/t_1)$ tiende a la suma de los *APLEs* positivos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_q}{(t/t_1)} = p_1 + p_2 + \dots + p_m \quad (2.29)$$

para el valor de q dado por

$$q = 1 - \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}. \quad (2.30)$$

En ese caso, si p_1 es por definición el máximo de todos los *APLEs*, este exponente puede ser usado como cota inferior del límite $S_q/(t/t_1)$, i.e.:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_q}{(t/t_1)} \geq p_1. \quad (2.31)$$

En la práctica se usan las Ec. (2.29), (2.30), (2.31) para tiempos largos pero finitos con el propósito de estimar el valor medio del exponente q en el intervalo de t_1 y t , dado que este valor es casi constante en dicho intervalo. Además, la razón de longitudes del vector desviación $|\vec{w}(t)|^2 = \sum_{k=1}^m \|\vec{w}_k(t)\|^2$ a tiempo t con respecto a la longitud de dicho vector a tiempo t_1 , puede ser evaluada de la ecuación:

$$\frac{|\vec{w}(t)|^2}{|\vec{w}(t_1)|^2} = \sum_{k=1}^m \frac{\|\vec{w}_k(t)\|^2}{|\vec{w}_k(t_1)|^2} = \sum_{k=1}^m \beta_k^2 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{2p_k} \quad (2.32)$$

donde se ha utilizado la Ec. (2.28) y

$$\beta_k^2 = \frac{\|\vec{w}_k(t_1)\|^2}{|\vec{w}(t_1)|^2}$$

con

$$\sum_{k=1}^{m \leq N} \beta_k^2 \leq 1.$$

La Ec. (2.32) puede ser también reescrita como

$$\frac{|\vec{w}(t)|^2}{|\vec{w}(t_1)|^2} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{2p_1} \left[\beta_1^2 + \sum_{k=2}^m \beta_k^2 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{-2(p_1-p_k)} \right]. \quad (2.33)$$

Dado que $p_1 - p_k$ es positivo para $2 \leq k \leq m$, la suma dentro de los corchetes de la Ec. (2.33) tiende asintóticamente a cero para $t \gg t_1$. Luego, los autores (Lukes-Gerakopoulos *et al.* 2008) pueden escribir:

$$APLE = p = \frac{\ln \left(\frac{|\vec{w}(t)|^2}{|\vec{w}(t_1)|^2} \right)}{2 \ln \left(\frac{t}{t_1} \right)} = p_1 + \frac{\ln \left[\beta_1^2 + \sum_{k=2}^m \beta_k^2 \left(\frac{t}{t_1} \right)^{-2(p_1-p_k)} \right]}{2 \ln \left(\frac{t}{t_1} \right)},$$

i.e., en el límite cuando $t \rightarrow \infty$, $APLE \rightarrow p_1$.

En mapas bidimensionales o en superficies de Sección de Poincaré de un sistema Hamiltoniano 2D tendremos $m = 1$, i.e. hay sólo un exponente positivo p_1 el cual es el límite del

APLE p . En estos casos el *APLE* p es también el límite de la tasa media de crecimiento de la entropía de Tsallis S_q con $q = 1 - 1/p$, de acuerdo con la Ec. (2.30).

Para discriminar los movimientos, en el caso regular el *APLE* tiende a 1, mientras que para las órbitas caóticas crece exponencialmente.

2.3. Indicadores espectrales de caos

2.3.1. La Transformada Modificada de Fourier en las Frecuencias (*FMFT*)

Ahora haremos una breve introducción del MFT (Laskar 1990; Laskar 1993; Laskar 1996; Papaphilippou & Laskar 1996; Papaphilippou & Laskar 1998; Laskar 2003), siguiendo con la modificación del algoritmo que corrige tanto las amplitudes como las frecuencias calculadas numéricamente: el *FMFT* (Sidlichovský & Nesvorný 1997).

En el contexto de la teoría KAM (Sección 2.1.4), la familia de toros se puede parametrizar por medio de un **conjunto de Cantor** de los vectores de frecuencias, y es en los vacíos del conjunto de Cantor que puede darse movimiento caótico. Aunque hablando estrictamente, las frecuencias se encuentran sólo definidas en los toros invariantes[†], el MFT calcula numéricamente sobre un tiempo finito, un vector de frecuencias para cualquier condición inicial. En estos toros, este vector de frecuencias es una excelente aproximación del vector de frecuencias real. En cambio, en regiones caóticas, el algoritmo provee de una interpolación entre estas frecuencias (variables) reales.

Consideremos el sistema Hamiltoniano casi integrable de la Ec. (2.5). Para $\epsilon = 0$, el Hamiltoniano es integrable y las ecuaciones de movimiento están dadas por las Ecs. (2.2) y (2.3), para las acciones y los ángulos, respectivamente. La solución de estas ecuaciones es de la forma $z_j(t) = z_{j0} e^{i\omega_j t}$ en las variables complejas $z_j = I_j e^{i\theta_j}$, donde $z_{j0} = z_j(0)$. El movimiento en el espacio de fases se desarrolla en un toro, producto de N circunferencias de radio constante $I_j = |z_j(0)|$, descriptos por una velocidad constante $\omega_j(\mathbf{I})$. Si el sistema es no degenerado, i.e.:

$$\det \left(\frac{\partial \vec{\omega}(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}^2} \right) \neq 0,$$

el mapa de frecuencias $F : \mathcal{B} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$; $\mathbf{I} \rightarrow \vec{\omega}$ es un difeomorfismo en su imagen Ω , y los toros son bien descriptos por las variables acción $\mathbf{I} \in \mathcal{B}$ o equivalentemente, por el vector de frecuencias $\vec{\omega} \in \Omega$.

En el caso de un sistema no degenerado (o para un sistema isoenergético no degenerado), cuando ϵ es distinto del valor nulo, la teoría KAM aún nos dice que para valores suficientemente pequeños de ϵ , existe un conjunto de Cantor Ω_ϵ de valores de $\vec{\omega}$, que satisface la **condición Diofántica**:

$$\|\mathbf{k} \cdot \vec{\omega}\| > \frac{\kappa_\epsilon}{\|\mathbf{k}\|^m}, \quad (2.34)$$

con $k_i \in \mathbb{Z}$. Luego, el sistema perturbado aún posee toros donde el flujo es lineal (**toros KAM**). Para vectores de frecuencias $\vec{\omega}$ en Ω_ϵ , la solución pertenece a un toro y está dada en variables complejas por medio de su **serie de Fourier**:

[†]Estos toros son trayectorias condicionalmente periódicas definidas por vectores de frecuencias constantes, donde cada uno de estos vectores está unívocamente asociado a uno de los toros.

$$z_j(t) = z_{j0}e^{i\omega_j \cdot t} + \sum_{m_1, \dots, m_N} a_{m_j}(\vec{\omega}) e^{i(\vec{m} \cdot \vec{\omega})},$$

donde los coeficientes $a_m(\vec{\omega})$ dependen suavemente de las frecuencias ω_i , $i = 1, \dots, N$. Si fijamos $\vec{\theta} \in \Pi^N$ a determinado valor $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$, obtenemos un mapa de frecuencias en \mathcal{B} definido como:

$$F_{\vec{\theta}_0} : \mathcal{B} \rightarrow \Omega; \quad \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{p}_2(\Psi^{-1}(\vec{\theta}_0, \mathbf{I})), \quad (2.35)$$

donde \mathbf{p}_2 es la proyección en $\Omega(\mathbf{p}_2(\vec{\phi}, \vec{\omega}) = \vec{\omega})$. El MFT provee directamente, de manera numérica, un mapa de frecuencias natural F , definido sobre todo el dominio \mathcal{B} , que coincide, dentro de la precisión numérica que se adopte, con el $F_{\vec{\theta}_0}$ de la Ec. (2.35) en el conjunto de los toros KAM. El mapa de frecuencias F se obtiene buscando las aproximaciones condicionalmente periódicas de las soluciones, sobre un intervalo de tiempo finito, por medio de una serie finita de términos:

$$z_j(t) = z_{j0}e^{i\omega_j \cdot t} + \sum_{k=1}^S a_{\vec{m}_k} e^{i(\vec{m}_k \cdot \vec{\omega})}. \quad (2.36)$$

Una vez que obtenemos la aproximación condicionalmente periódica de la Ec. (2.36), podemos construir el mapa de frecuencias y el análisis de la dinámica global del sistema se podrá llevar a cabo analizando la regularidad de este mapa (FMA, Laskar 1990).

Sea \aleph un subconjunto de \mathcal{B} de los valores de \mathbf{I} tal que el par $(\mathbf{I}, \vec{\theta}_0)$ pertenezca a un toro KAM de dimensión N . En este caso habíamos asumido que, hasta cierta precisión numérica, el vector de frecuencias $\vec{\omega}$ es el vector de frecuencias real asociado al toro. Entonces asumimos que en \aleph , F_T es una buena aproximación del mapa de frecuencias $F_{\vec{\theta}_0}$ definido en la Ec. (2.35) y la restricción del mapa de frecuencias, el F_T , sobre \aleph , tendrá las siguientes propiedades:

1. Si $\mathbf{I} \in \aleph$, luego $F_T((\mathbf{I}), \cdot)$ es constante en \mathbb{R} .
2. Para cualquier τ , el mapa $F_T^r : \aleph \rightarrow \mathbb{R}^N; \quad \mathbf{I} \rightarrow F_T((\mathbf{I}), \tau)$ es regular tal que coincide en \aleph con la restricción sobre \aleph de un difeomorfismo suave.

El segundo criterio es el que asegura que cuando el mapa de frecuencias no es regular, los correspondientes toros KAM son destruidos.

El FMA se basa fundamentalmente en la observación de que cuando una función condicionalmente periódica $f(t)$ del dominio complejo C se da numéricamente, es posible recuperar una aproximación condicionalmente periódica de $f(t)$ de forma muy precisa sobre un intervalo de tiempo finito $[-T, T]$, varios órdenes de magnitud más precisa que la dada por un desarrollo simple en series de Fourier. De hecho, sea:

$$f(t) = e^{i\omega_1 \cdot t} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N - (1, 0, \dots, 0)} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \vec{\omega})t}, \quad a_{\mathbf{k}} \in C \quad (2.37)$$

una solución condicionalmente periódica (KAM) de un sistema Hamiltoniano en $\mathcal{B} \times \Pi^N$, donde el vector de frecuencias $\vec{\omega}$ satisface la condición Diofántica de la Ec. (2.34). El MFT proveerá una aproximación

$$f'(t) = \sum_{k=1}^S a'_k e^{iw'_k \cdot t}$$

de $f(t)$ a través de los valores numéricos obtenidos sobre un intervalo de tiempo finito $[-T, T]$. Las frecuencias w'_k y las amplitudes complejas a'_k se calculan numéricamente a través de un proceso iterativo. Con el objeto de determinar la primera frecuencia w'_1 , se busca la máxima amplitud de $\phi(\sigma) = \langle f(t), e^{i\sigma \cdot t} \rangle$ donde el producto escalar $\langle f(t), g(t) \rangle$ está definido por:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)g^*(t)\zeta(t)dt,$$

y donde $\zeta(t)$ es un función de peso, i.e. una función positiva y par, tal que

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \zeta(t)dt = 1.$$

Usamos la **ventana de Hanning** como función de peso: $\zeta_H(t) = 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$. Entonces, una vez que se encuentra el primer término periódico $e^{iw'_1 \cdot t}$, su amplitud compleja a'_1 se obtiene por proyección ortogonal (usando Gram-Schmidt), y el proceso se reanuda con la parte restante de la función, i.e.: $f_1(t) = f(t) - a'_1 e^{iw'_1 \cdot t}$. También es necesario ortogonalizar el conjunto de funciones $\left(e^{iw'_k \cdot t}\right)_k$ cuando se proyecta f iterativamente en estos $e^{iw'_k \cdot t}$.

Para las soluciones KAM, el MFT permite determinaciones de las frecuencias de forma muy precisa sobre un intervalo de tiempo finito $[-T, T]$, y converge a estas frecuencias a medida que el T crece. De hecho, para una solución (KAM) $f(t)$ con la forma dada en la Ec. (2.37), y usando una función de peso del tipo $\zeta(t) = \zeta_p(t)$ (Laskar 1996):

$$\zeta_p(t) = \frac{2^p (p!)^2}{(2p)!} (1 + \cos \pi t)^p,$$

la aplicación del MFT para el cálculo de frecuencias sobre un intervalo de tiempo finito $[-T, T]$, provee una estimación ω_1^T de la frecuencia ω_1 , que converge a esta última para $T \rightarrow +\infty$, con la expresión asintótica:

$$\omega_1 - \omega_1^T = \frac{(-1)^p \pi^{2p} (p!)^2}{A_p T^{2p+2}} \sum_k \frac{\mathbb{R}(a_k)}{\Omega_k^{2p+1}} \cos(\Omega_k T) + O\left[\frac{1}{T^{2p+2}}\right]$$

con $\Omega_k = \langle \mathbf{k}, \vec{\omega} \rangle - \omega_1$, y

$$A_p = -\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} \right).$$

En particular, el uso de la ventana de Hanning ($p = 1$) asegura que, para soluciones tipo KAM, la precisión de las **frecuencias fundamentales** (aquéllas que como base generan todas las demás frecuencias que aparecen en el espectro) sea proporcional a $1/T^4$, en vez de a $1/T^2$ como sería sin dicha ventana ($p = 0$). Además, usando el método usual FFT (*Fast Fourier Transform*), la precisión sólo alcanzaría una convergencia del tipo $1/T$. Luego, el MFT es capaz de recuperar el vector de frecuencias $\vec{\omega}$ y la dinámica del sistema puede ser descripta a través del estudio del mapa de frecuencias (FMA).

Para las demostraciones de las expresiones anteriores y una descripción completa del FMA, referirse a Laskar (2003).

Ahora bien, hemos introducido el MFT de Laskar (el algoritmo que calcula las frecuencias para luego analizar la regularidad del mapa asociado, i.e., el FMA). Es tiempo entonces, de revisar la modificación al MFT hecha por Sidlichovský & Nesvorný (1997), denominada *FMFT*, que es la que usaremos en este trabajo.

El *FMFT* consiste en aplicar el MFT seguido de una corrección ϵ_j en la frecuencia ω_j (para las N frecuencias) a fin de tener una nueva frecuencia $\omega_j - \epsilon_j$. La corrección ϵ_j es de la forma:

$$\epsilon_j = \sum_{s>j}^N \frac{C_s Q'(y_{sj})}{C_j Q''(0)\tau} \cos(y_{sj} + \beta_s - \beta_j),$$

donde $y_{sj} = (\omega_s - \omega_j)\tau$, los valores reales C_s y β_s se determinan de la relación $a_s = C_s e^{i\beta_s}$ y

$$Q'(y) = \frac{1}{y} \frac{\pi^2}{\pi^2 - y^2} \left[\cos(y) + \frac{\sin(y)}{y} \frac{3y^2 - \pi^2}{\pi^2 - y^2} \right], \quad y \neq \pi,$$

$$Q''(0) = \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{3} \right).$$

Luego, se realiza una determinación de las amplitudes empleando nuevamente el MFT pero con solamente las frecuencias determinadas *a priori*.

Otra forma de corregir las frecuencias determinadas por el MFT es la siguiente: primero aplicamos el MFT a la función original $f(t)$ y encontramos su aproximación numérica $f'(t)$. El error en la determinación de la frecuencia viene dado por la cantidad $\epsilon_j = \omega_j - \omega'_j$. Análogamente, los errores en las amplitudes y en las fases son también pequeños. Si aplicamos nuevamente el MFT pero esta vez a $f'(t)$, nos da una nueva aproximación que llamaremos $f''(t)$, con errores en la frecuencia del tipo: $\epsilon'_j = \omega'_j - \omega''_j$. Sustituyendo en esta última, la expresión $\omega'_j = \omega_j - \epsilon_j$ y desarrollando ϵ_j en series de Taylor (asumiendo que las derivadas primeras son muy pequeñas), uno puede despreciar tanto la parte lineal como la de órdenes superiores y quedarse con $\epsilon_j = \epsilon'_j$. Luego, obtendremos $\omega_j = \omega'_j + \epsilon'_j$, donde las cantidades del lado derecho de la igualdad son conocidas. Un procedimiento similar lleva a encontrar las amplitudes $C_j = C'_j + (C'_j - C''_j)$ y las fases $\beta_j = \beta'_j + (\beta'_j - \beta''_j)$.

El *FMFT* nos indica regularidad cuando no hay una variación temporal de las frecuencias, ya que al ser la órbita regular, la misma está confinada a un toro que está unívocamente definido por un conjunto de N frecuencias (siendo N el número de d.o.f. del sistema). En cambio, si se observa variación, quiere decir que la órbita no realiza su movimiento sobre un toro y por ende, es caótica.

El factor de cuidado en este cálculo es la precisión con la que se calculan las frecuencias. Si esta precisión no es buena, el indicador no observaría la variación temporal de las frecuencias y podríamos confundir órbitas caóticas con regulares y viceversa.