

# Capítulo 3

## Evaluación del *MEGNO*

Dado que inicialmente trabajamos exclusivamente con el *MEGNO* como herramienta dinámica, se consideró pertinente someterlo a numerosas pruebas.

Ya existían estudios en un modelo bastante realista utilizando los *FT-LCNs* (Muzzio *et al.* 2005), que luego se acompañaron con resultados obtenidos con el *MEGNO* (Cincotta *et al.* 2008). Entonces resultó apropiado hacer el primer análisis exhaustivo del *MEGNO* (Sección 2.2.4) por medio de un estudio comparativo con los *FT-LCNs* (Sección 2.2.1) en dicho modelo, tarea que describiremos en el presente Capítulo.

Por otro lado, a pesar de ser el *MEGNO* un CI reciente, adquirió aprobación por la comunidad científica de forma acelerada. Prueba de ello es la gran variedad de trabajos publicados que lo utilizan como herramienta, e.g.: Goździewski (2002); Bois *et al.* (2003); Goździewski (2003a); Goździewski (2003b); Pavlov & Maciejewski (2003); Goździewski & Konacki (2004); Breiter *et al.* (2005); Goździewski *et al.* (2005); Gayon & Bois (2008); Hinse *et al.* (2008); Barrio *et al.* (2009b); Lemaître *et al.* (2009); Valk *et al.* (2009); Hinse *et al.* (2010); Compère *et al.* (2011) entre otros.

Por ende, un análisis minucioso del indicador resulta de interés, y para ello no sólo nos enfocamos en observar las ventajas y desventajas en relación a los rendimientos de los *FT-LCNs* (Capítulo 3), sino que posteriormente extendemos la comparación a los indicadores descriptos en el Capítulo 2.

Los resultados incluidos en este Capítulo fueron publicados en Maffione *et al.* (2011a).

### 3.1. Introducción

El *MEGNO* es introducido por Cincotta & Simó (2000) y en Cincotta *et al.* (2003), formalizado, extendido a sistemas Hamiltonianos discretos y generalizado. En los trabajos de Cincotta *et al.* (2003) y Giordano & Cincotta (2004), el *MEGNO* logró mostrar claramente la estructura global del espacio de fases de un sistema Hamiltoniano multidimensional simple, brindando una descripción detallada de las resonancias presentes como de los dominios regulares y caóticos. Sin embargo, aquí el análisis se traslada a un sistema de dinámica más compleja. Introducido por Muzzio *et al.* (2005), se utiliza un potencial para describir la dinámica de una galaxia triaxial que logra reproducir varias de las características dinámicas de las galaxias elípticas reales.

Dado el escenario, el objetivo de esta primera parte es resaltar tanto los aspectos positivos como negativos del *MEGNO*, prestando particular atención a la eficiencia de su rendimiento respecto al de los *FT-LCNs* calculados por Muzzio *et al.* (2005) (y eventualmente agregaremos en la comparación una versión ligeramente modificada del *FLI*), debido a que los *FT-LCNs* son la herramienta más utilizada y evaluada en, al menos, los últimos cuarenta años, y que continúan hoy en día absolutamente vigentes.

### 3.2. El potencial

Para la comparación del *MEGNO* con el máximo *FT-LCN* tomamos como escenario el potencial introducido por Muzzio *et al.* (2005), el cual es obtenido luego de una virialización de un modelo de  $N$ -cuerpos auto-consistente compuesto por  $10^5$  partículas. Este modelo reproduce varias características dinámicas de las galaxias elípticas reales como la distribución de masa, el achatamiento, la triaxialidad o la rotación (véase también, Muzzio 2006). Es claro que una galaxia elíptica es un sistema astrofísico mucho más complejo que una aproximación dinámica de este tipo, pero para los propósitos de nuestro estudio, el modelo es muy satisfactorio.

Este potencial entonces, parece proveer un adecuado escenario para la comparación entre las técnicas mencionadas previamente. Hacemos el estudio sobre una muestra de órbitas elegidas al azar  $\mathbf{O} = \{\mathbf{x}_i(t), i = 1, \dots, 3472, \mathbf{x}_i(0) = \vec{x}_{0i}\}$ , clasificadas por medio del máximo *FT-LCN* en Muzzio *et al.* (2005). Tanto sus condiciones iniciales  $\mathbf{x}_{0i}$  como los valores del máximo *FT-LCN* asociados fueron amablemente cedidos por los autores. Vamos a identificar a cada órbita del conjunto  $\mathbf{O}$  con una etiqueta que va de 1 a 3472.

La ecuación que reproduce el potencial es:

$$V(x, y, z) = -f_0(x, y, z) - f_x(x, y, z) \cdot (x^2 - y^2) - f_z(x, y, z) \cdot (z^2 - y^2), \quad (3.1)$$

con

$$f_n(x, y, z) = \frac{\alpha_n}{[p_n^{a_n} + \delta_n^{a_n}]^{\frac{ac_n}{a_n}}}, \quad (3.2)$$

donde  $p_n^2$  es el cuadrado del radio suavizado dado por  $p_n^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \epsilon^2$  para  $n = 0$ , o  $p_n^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot \epsilon^2$  para  $n = x, z$ , y  $\alpha_n, \delta_n, a_n, ac_n$  constantes.

El valor adoptado para el parámetro de ablandamiento es  $\epsilon \simeq 0,01$  para cualquier  $n$ . Las funciones  $f_n(x, y, z)$  fueron calculadas numéricamente por medio de un código de  $N$ -cuerpos cuadrupolar para  $10^5$  partículas, lo que permitió a los autores escribirlas bajo la expresión general dada por la Ec. (3.2).

Los valores adoptados para las constantes  $\alpha_n$ ,  $\delta_n$ ,  $a_n$  y  $ac_n$  son los dados en la Tabla 3.1 (para mayores referencias, referirse a Cincotta *et al.* 2008).

|         | $\alpha$    | $a$  | $\delta$ | $ac$       |
|---------|-------------|------|----------|------------|
| $n = 0$ | 0,92012657  | 1,15 | 0,1340   | 1,03766579 |
| $n = x$ | 0,08526504  | 0,97 | 0,1283   | 4,61571581 |
| $n = z$ | -0,05871011 | 1,05 | 0,1239   | 4,42030943 |

Tabla 3.1: Valores adoptados para los coeficientes de las funciones  $f_n$  dadas por la Ec. (3.2).

El carácter estacionario de los parámetros dados en la Tabla 3.1 fue evaluado al integrar varios perfiles a distintos tiempos luego de la virialización, resultando en una precisión de 0,1 %.

Luego que el sistema se relajara, se mantuvieron 86818 cuerpos reproduciendo la dinámica de una galaxia elíptica (el sistema obedece una ley de de Vaucouleurs, como muestra la Fig. 3.1 tomada del trabajo de Muzzio *et al.* 2005) con una fuerte triaxialidad y un achatamiento que crece del borde del sistema hacia su centro (ver Tabla I del mismo trabajo).

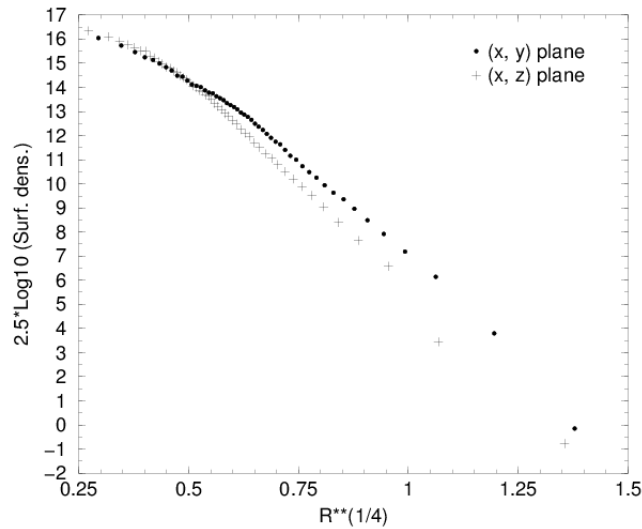


Figura 3.1: Correlación entre la densidad superficial del sistema con una potencia del radio elíptico (figura tomada de Muzzio *et al.* 2005).

En la Fig. 3.2, tomada de Cincotta *et al.* (2008), se muestra el comportamiento de las funciones  $f_n$  en función de  $r$ , siendo  $f_z < 0$ ,  $f_0, f_x > 0$ , y  $f_x > |f_z|$  para el intervalo completo de  $r$ , mientras que para  $r \gtrsim 0,36$  es  $f_0 > f_x$ . Nótese que las funciones  $f_n$  son graficadas con el signo que les corresponde según aparecen en la Ec. (3.1). El potencial triaxial obtenido tiene semi-ejes  $X, Y, Z$  satisfaciendo la condición  $X > Y > Z$  y el mínimo, el cual es cercano al valor  $-7$ , se encuentra en el origen. El potencial es menos achatado que la distribución de masa, como era de esperarse (véase Tabla I en Muzzio *et al.* 2005).

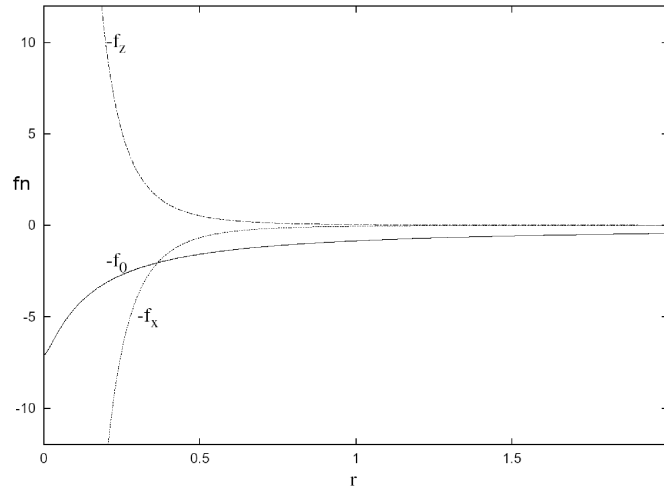


Figura 3.2: Dependencia radial de las funciones  $f_n$ , con su signo (figura tomada de Cincotta *et al.* 2008).

### 3.3. El *MEGNO* vs. el máximo de los Números Característicos de Lyapunov a Tiempo Finito (*FT-LCNs*)

La presente sección está dedicada a desarrollar un estudio comparativo de carácter estrictamente numérico y estadístico sobre los resultados obtenidos tanto por medio del *MEGNO* cuando se lo aplicó al conjunto  $\mathbf{O}$  de órbitas, como de aquéllos cedidos por Muzzio *et al.* (2005) obtenidos por medio del máximo *FT-LCN*.

Es interesante tener en cuenta el espectro de energías de las órbitas del conjunto  $\mathbf{O}$ , mostrado en la Fig. 3.3 (Cincotta *et al.* 2008), información que usaremos más adelante en la Sección 3.3.2. Observemos que la mayoría de las 3472 órbitas consideradas tienen energías de las más grandes en el intervalo; de hecho, éstas se encuentran distribuidas entre los valores  $-3 \leq E < 0$ .

Recordemos el criterio usado en Muzzio *et al.* (2005) para clasificar las órbitas en  $\mathbf{O}$  de acuerdo al valor del máximo *FT-LCN*: aquéllas órbitas con valores del máximo *FT-LCN* por debajo de algún dado valor crítico  $V_c$  fueron clasificadas como pertenecientes a la componente regular, de otra forma fueron clasificadas como caóticas.

Como las integraciones numéricas llevadas a cabo por Muzzio *et al.* (2005) para el cómputo del máximo *FT-LCN* fueron hasta  $10^4$  u.t., el valor esperado para  $V_c$  sería  $V_c^t = \ln T/T \approx 9,2 \times 10^{-4} (\text{u.t.})^{-1}$ . Sin embargo, en Muzzio *et al.* (2005) los autores toman un valor empírico levemente superior,  $V_c^e = 1,55 \times 10^{-3} (\text{u.t.})^{-1}$ , y éste será entonces el que adoptaremos para respetar la clasificación en órbitas regulares y caóticas dada por ellos. A lo largo de este Capítulo, adoptaremos como  $V_c$  del *MEGNO*, el valor 2,01 para las órbitas regulares.

En consonancia con Muzzio *et al.* (2005), el conjunto  $\mathbf{O} = \mathbf{O}_c \cup \mathbf{O}_r$ , donde  $\mathbf{O}_c$  y  $\mathbf{O}_r$  incluyen 1828 órbitas caóticas y 1644 órbitas regulares, respectivamente.

El cálculo numérico del *MEGNO*, como el correspondiente al máximo *FT-LCN*, requieren de la integración de las ecuaciones de movimiento junto con las ecuaciones variacionales linealizadas (los desarrollos correspondientes se encuentran en el Apéndice B), donde las

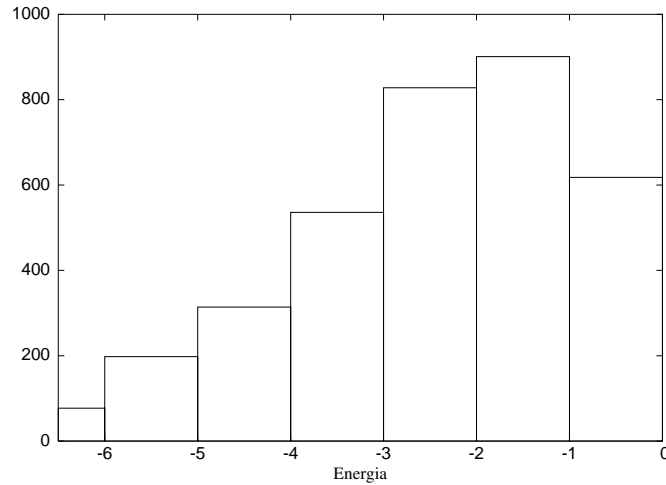


Figura 3.3: Espectro de energías para las 3472 órbitas. Figura tomada de Cincotta *et al.* (2008).

condiciones iniciales para estas últimas se tomaron al azar en el espacio de fases y con norma uno. Para la integración se usó un algoritmo Runge-Kutta 7/8th (rutina denominada DOPRI8, ver Prince & Dormand 1981 y Hairer *et al.* 1987), y el cómputo de las soluciones se hizo sobre tiempos de integración cortos:  $5 \times 10^3$  u.t., intermedios:  $10^4$  u.t. y largos\*:  $10^5$  u.t. La precisión en la conservación de la energía (como medida de control) fue del orden de  $\sim 10^{-12}$ .

Los valores del máximo *FT-LCN* para un tiempo total de integración de  $10^4$  u.t. para la muestra de órbitas clasificadas en Muzzio *et al.* (2005), fueron gentilmente cedidos por el Dr. Muzzio.

Aquí presentamos entonces, los resultados correspondientes a  $5 \times 10^3$  u.t. y a  $10^4$  u.t., e incluso a tiempos de integración mayores, con el objeto de discutir qué tan eficiente puede ser el *MEGNO* como herramienta para proveer información dinámica a tiempos de integración relativamente cortos (i.e. como indicador rápido de la dinámica).

### 3.3.1. Primeros resultados: tiempos cortos de integración

En las Figs. 3.4 y 3.5 hemos dividido al  $\bar{Y}$  por el tiempo total de integración:  $T$ . De esta manera tenemos tanto al *MEGNO* como al máximo *FT-LCN* en la misma escala, haciendo la comparación lo más clara posible. Recordemos que un factor dos debiera ser agregado en caso de órbitas caóticas, dado que estamos trabajando con el valor promediado del *MEGNO*:  $\bar{Y}$ , en vez de con  $Y$  (Sección 2.2.4 y véase también la discusión al final de la Sección 3.3.3).

A tiempos cortos de integración observamos un conjunto pequeño de órbitas, clasificadas como caóticas por el máximo *FT-LCN*, que se encuentran muy cerca del valor de regularidad del *MEGNO*. De hecho, sólo el 0,82% del subconjunto de órbitas caóticas **Oc** alcanzan valores de *MEGNO* cercanos a 2,01 ( $\sim -3,095$ , en escala logarítmica, en la Fig. 3.4, panel de la

---

\*El tiempo de Hubble para el sistema se puede estimar entre 115 y 575 u.t. Necesitamos entonces, poder reconocer órbitas caóticas que posean un máximo *FT-LCN* tan bajo como  $0,0017 \text{ u.t.}^{-1}$ . Con este propósito, Muzzio *et al.* (2005), adoptaron como tiempo de integración,  $10^4$  u.t. Es respecto a este tiempo de integración, que hablamos de tiempos “cortos, medianos o largos”.

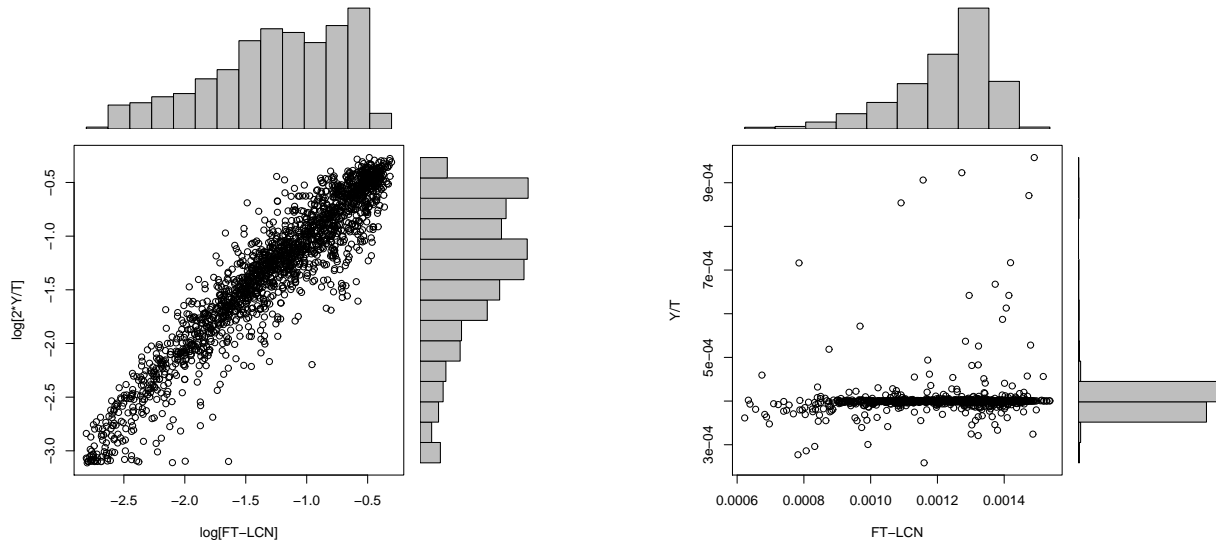


Figura 3.4: Correlaciones entre  $2\bar{Y}/T$  y el máximo  $FT-LCN$  para órbitas caóticas (panel de la izquierda) y entre  $\bar{Y}/T$  y el máximo  $FT-LCN$  para órbitas regulares (panel de la derecha) para  $T = 5 \times 10^3$  u.t. Las distribuciones fueron también incluidas. Estas figuras fueron generadas por medio de Wessa (2009).

izquierda) a  $T = 5 \times 10^3$  u.t., mientras que 8,82 % de las órbitas del subconjunto **Or** alcanzan valores de *MEGNO* dentro del intervalo  $[2,01; 10)$  (o bien  $[0,000402; 0,002)$ , en el panel derecho de la misma figura), señalando que o bien tienen un carácter caótico débil, o que el tiempo total de integración de  $T = 5 \times 10^3$  u.t. no es suficiente para que el valor asintótico sea alcanzado.

Para las órbitas en **Oc**, la media de  $\log(FT-LCN) \approx -1,267$  y la media de  $\log(2\bar{Y}/T) \approx -1,317$ , mientras que las desviaciones estándar correspondientes son  $\approx 0,617$  y  $\approx 0,676$ , respectivamente, con un coeficiente de correlación de  $r \approx 0,942$ . Luego, ambas distribuciones son similares.

Para la componente regular, en cambio, la concordancia es, como era de esperarse, menos afortunada. El coeficiente de correlación concomitante  $r$  es cercano a 0,07. Los valores medios asociados son  $FT-LCN \approx 0,00126$  y  $\bar{Y}/T \approx 0,0004$ , con desviaciones estándar algo diferentes, léase,  $1,6 \times 10^{-4}$  para la distribución del máximo  $FT-LCN$  y  $3,5 \times 10^{-5}$  para  $\bar{Y}/T$ .

Nótese el hecho que estamos comparando valores del máximo  $FT-LCN$  y del *MEGNO* correspondientes a diferentes tiempos de integración.

Como un todo, la clasificación por medio del *MEGNO* provee resultados satisfactorios tomando en cuenta que éstos son producto de una integración a  $T = 5 \times 10^3$  u.t., i.e. la mitad del tiempo de integración usado por Muzzio *et al.* (2005) en el cálculo del máximo  $FT-LCN$ .

La comparación de ambos CIs sobre el mismo tiempo de integración final  $T$ , es el objetivo de la siguiente sección.

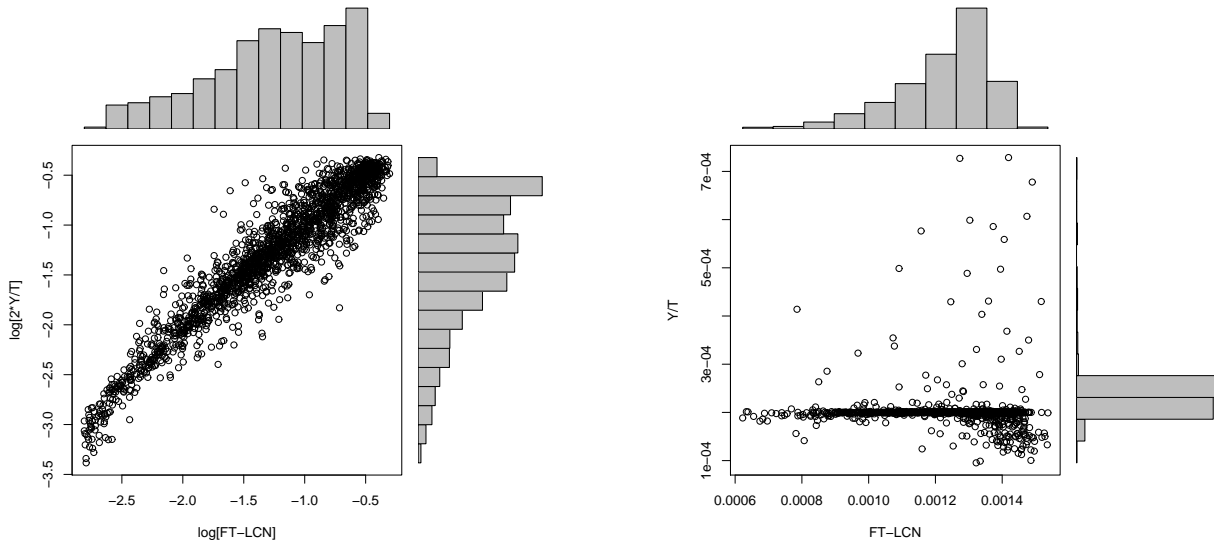


Figura 3.5: Correlaciones entre  $2\bar{Y}/T$  y el máximo  $FT-LCN$  para órbitas caóticas (panel de la izquierda) y entre  $\bar{Y}/T$  y el máximo  $FT-LCN$  en el caso de órbitas regulares (panel de la derecha) para  $T = 10^4$  u.t. Las distribuciones fueron también incluidas. Estas figuras fueron generadas usando Wessa (2009).

### 3.3.2. Resultados para tiempos intermedios de integración

De la Fig. 3.5 observamos un buen acuerdo entre la clasificación dada por el *MEGNO* y la dada por el máximo  $FT-LCN$  a  $T = 10^4$  u.t. De hecho, la componente caótica **Oc** señalada por el máximo  $FT-LCN$  es reproducida por medio del *MEGNO*, i.e. todas las órbitas en **Oc** poseen un valor de *MEGNO* en el intervalo de irregularidad (por encima de  $\sim -3,4$  en el eje vertical de la Fig. 3.5, panel de la izquierda). Debido a que le hemos dado una nueva escala al *MEGNO* al multiplicar por  $1/T$  y  $2/T$  para órbitas regulares y caóticas, respectivamente, aquellos valores por encima, pero cercanos a, tanto  $2 \times 10^{-4}$  como  $-3,4$  (notar la escala logarítmica para este último caso) luego de  $10^4$  u.t., sugieren que la órbita puede encontrarse próxima a un objeto hiperbólico (como una órbita periódica inestable). Por otro lado, para valores de *MEGNO*  $\lesssim 2 \times 10^{-4}$ , la órbita podría encontrarse cerca de algún objeto de naturaleza elíptica (órbitas periódicas estables), como se muestra en Cincotta *et al.* (2003).

En el panel de la izquierda de la Fig. 3.5, correspondiente a las órbitas caóticas, podemos distinguir una correlación claramente lineal entre  $\log(2\bar{Y}/T)$  y  $\log(FT-LCN)$  para  $T = 10^4$  u.t. De hecho, el coeficiente de correlación es  $r \approx 0,95$ ; el valor medio de  $\log(2\bar{Y}/T) \approx -1,29$ , mientras que el concomitante valor medio de  $\log(FT-LCN) \approx -1,27$ .

En la misma figura, mostramos la correlación entre  $\bar{Y}/T$  y el máximo  $FT-LCN$  para las órbitas en **Or**. En este último caso, el coeficiente de correlación es  $r \approx -0,026$ , el valor medio de  $\bar{Y}/T$  es cercano a  $2 \times 10^{-4}$  con una desviación estándar  $\lesssim 10^{-5}$ , mientras que para el máximo  $FT-LCN$  el valor medio es de  $1,3 \times 10^{-3}$  con una desviación estándar del orden de  $\approx 10^{-4}$ .

Remarquemos el perfil agudo de la distribución de valores del *MEGNO* alrededor del valor predicho para movimiento regular (i.e.,  $2,01 \times 10^{-4}$  en el panel derecho de la Fig. 3.5), mientras que la distribución asociada al máximo *FT-LCN* es suave, como las desviaciones estándar de ambas distribuciones señalan. Esta característica puede resultar en una ventaja del *MEGNO* frente al máximo *FT-LCN*.

Nótese nuevamente el hecho que el valor empírico  $V_c^e = 1,55 \times 10^{-3}$ , adoptado por Muzzio *et al.* (2005) para la clasificación, es mayor que el valor medio del máximo *FT-LCN* para órbitas regulares, lo cual puede no ser del todo conveniente.

Entonces, de la componente regular **Or**, que abarca un total de 1644 órbitas, 1513 de ellas tienen valores de  $\bar{Y}/T$  en el intervalo  $[10^{-4}; 2,01 \times 10^{-4})$ , en concordancia con su carácter regular y estable.

Sin embargo, se encuentra una discrepancia de 131 órbitas que agrupamos en el subconjunto **Or<sub>d</sub>**, clasificadas como regulares por el máximo *FT-LCN*, pero cuyos valores de  $\bar{Y}/T$  yacen en el intervalo  $[2,01 \times 10^{-4}; 10^{-3})$  revelando un probable carácter irregular.

El hecho que las órbitas bajo análisis pertenezcan a superficies de energía diferentes, y que para cada energía haya una escala de tiempos característica,  $T_c(E)$ , debe ser analizado con mayor cuidado. Más aún, con el objetivo de asegurar que tanto el máximo *FT-LCN* como el *MEGNO* están siendo correctamente calculados para una órbita dada, el tiempo total de integración debería verificar  $T \gg T_c(E)$ . Luego, fijando la condición  $T \geq 10^3 T_c(E)$  para así obtener valores estables para ambos indicadores, concluimos que tan sólo aquellas órbitas con  $T_c(E) \leq 10$  serán clasificadas apropiadamente en un tiempo de integración de  $10^4$  u.t. La función  $T_c(E)$  para órbitas caja, que se deduce tomando como referencia el período de la órbita periódica de eje X (en la correspondiente superficie de energía), se grafica en la Fig. 3.6, panel de la izquierda, donde se muestra que  $T_c(E) = 10$  se corresponde con un valor de la energía de  $E \sim -0,58$ . Hemos calculado numéricamente los períodos de algunas órbitas caja (cruces en la figura) con el propósito de evaluar la correspondencia de la escala de tiempos  $T_c(E)$  adoptada para las mismas. Los períodos aproximados de algunas órbitas tubo también fueron incluidos en la figura.

Los valores de la energía correspondientes a las órbitas en **Or<sub>d</sub>** se muestran en el panel de la derecha de la Fig. 3.6, donde hemos identificado al grupo 1 como aquellas órbitas con energías  $E < -0,58$ , y como grupo 2, aquellas órbitas con  $E > -0,58$ .

De las 131 órbitas en **Or<sub>d</sub>**, 41 son tubo mientras que 90 son caja, 20 de las cuales tienen  $E > -0,58$ , i.e. sus valores provenientes de los CIs se encuentran aún en una fase transitoria. En total, contamos 70 órbitas caja en **Or<sub>d</sub>** satisfaciendo la condición  $T \gg T_c(E)$ .

Remarquemos el hecho que todas las órbitas en **Or<sub>d</sub>** tienen  $2 \lesssim \bar{Y} \lesssim 7$  a  $T = 10^4$  u.t., entonces, aunque pudieran evidenciar cierto grado de inestabilidad local, se comportan como órbitas regulares desde un punto de vista físico (i.e. a tiempos de integración físicamente plausibles). De todas maneras, nuestro objetivo es estudiar al *MEGNO* de forma rigurosa, entonces analizaremos este pequeño subconjunto de órbitas en detalle, usando incluso, tiempos de integración que carecen de sentido físico (nos extendemos por varios cientos de tiempos de Hubble).

Luego, para las 131 órbitas en **Or<sub>d</sub>** recalculamos el *MEGNO* pero extendiendo el tiempo final de integración a  $10^5$  u.t. para encontrar que 52 de estas órbitas, teniendo valores del



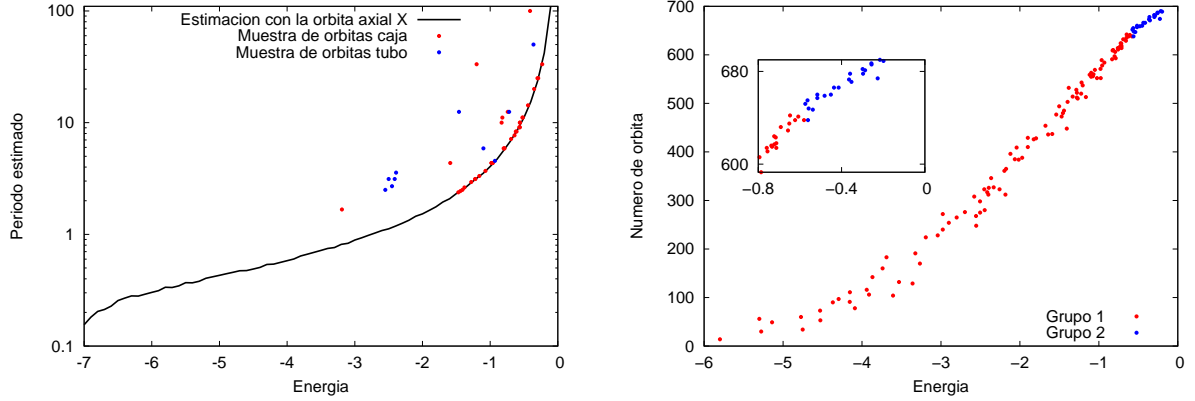


Figura 3.6: Período de la órbita de eje X como función de la energía, adoptado como escala de tiempo característico  $T_c(E)$  para las órbitas caja, junto con el período aproximado de una pequeña muestra de órbitas caja y tubo (a la izquierda). Valores de la energía para las 131 órbitas en  $\mathbf{Or}_d$  (a la derecha).

*MEGNO* por debajo de 3,5 a  $T = 10^4$ , se aproximan al valor de regularidad 2 a  $T = 10^5$ , mientras que las restantes 79 alcanzan valores mayores del *MEGNO* para el último tiempo de integración. Mencionemos que para algunas órbitas el valor del *MEGNO* yace apenas por encima del valor adoptado como valor crítico: 2,01 (ver Sección 3.3.4). En la Sección 3.3.3 que sigue, vamos a identificar al primer grupo como  $\mathbf{Or}_d^s$  y al segundo como  $\mathbf{Or}_d^u$ .

Para determinar el carácter de las órbitas en  $\mathbf{Or}_d$ , vamos a recurrir a una pequeña variación del *FLI*. Tomemos entonces, la evolución de  $\langle \delta(t) \rangle$  donde

$$\langle \delta(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t \delta(t) dt,$$

con  $\delta = \|\vec{\delta}\|$  y siendo  $\vec{\delta}$  la solución de las ecuaciones variacionales linealizadas (i.e. un valor medio del *FLI*), y siendo su valor inicial  $\delta_0 = 10^{-4}$ .

Como tiempos de integración más largos que  $10^4$  u.t. serán considerados en la Sección 3.3.3, calculemos primero el *LI* para una muestra de 100 órbitas en  $\mathbf{O}$  para  $T = 10^4$  u.t. usando el algoritmo clásico (Benettin *et al.* 1976; Benettin *et al.* 1980), y comparemos los valores obtenidos con aquéllos derivados por Muzzio *et al.* (2005) para el máximo *FT-LCN*. El resultado de la comparación se encuentra en el panel de la izquierda de la Fig. 3.7, donde podemos observar un muy buen acuerdo. Esto nos permite calcular con seguridad el *LI* a  $10^5$  u.t. y tomarlo como el máximo de los *FT-LCNs* (recordemos que en un sistema de 3-d.o.f. como el que estamos estudiando, se pueden definir seis *FT-LCNs*, dada la conservación de la energía sólo los primeros dos resultan relevantes, el máximo *FT-LCN* será el más grande entre ellos) para dicho tiempo de integración.

En la Fig. 3.7, a la derecha, también incluimos una estimación del máximo *FT-LCN* derivada de la pendiente del *MEGNO*, y el *MEGNO* para una reducida muestra de órbitas (45 en total). Notemos que la pendiente del *MEGNO* permite una mejor estimación del máximo *FT-LCN*, particularmente para las órbitas regulares, para las cuales yace por debajo de  $10^{-4}$ , lo cual es mucho menor que ambos valores  $V_c^e$  y  $V_c^t$  para  $T = 10^4$  u.t. Aún así, limitamos nuestro análisis comparativo al *MEGNO*, al *LI* y al valor medio del *FLI*  $\langle \delta(t) \rangle$ , dado que

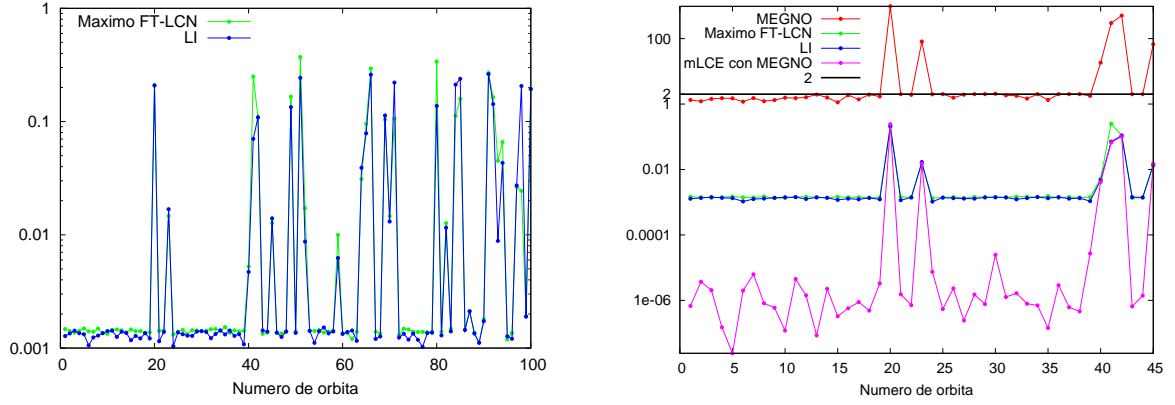


Figura 3.7: El máximo *FT-LCN* brindado por Muzzio *et al.* (2005) y el *LI* calculado por medio del algoritmo clásico para una muestra de 100 órbitas en **O** (izquierda). El *MEGNO*, el máximo *FT-LCN* brindado por Muzzio *et al.* (2005), el *LI* calculado por medio del algoritmo clásico y el *mLCE* estimado por medio de la pendiente del *MEGNO*, para una muestra reducida de 45 órbitas (derecha). Para ambas figuras el tiempo final de integración fue de  $10^4$  u.t.

deducir el valor teórico esperado para la pendiente del *MEGNO* en caso de movimiento condicionalmente periódico no es trivial (sin embargo retomaremos el análisis de las ventajas y desventajas de considerar la pendiente del *MEGNO* en el Capítulo 5, Sección 5.2). De hecho, lo mismo ocurre con el valor medio del *FLI* (el *MEGNO* y el *FLI* son dos indicadores íntimamente relacionados, ver Mestre *et al.* 2011), para el cual no es posible determinar un valor asintótico cuando la órbita se encuentra confinada en un toro. Para un movimiento condicionalmente periódico,  $\gamma_q(t)$ , la solución de las ecuaciones variacionales linealizadas en  $\mathbb{R}^{2N}$  puede escribirse como:

$$\delta(\gamma_q(t)) \approx \delta_0 [1 + w_q(t) + t(\chi_q + u_q(t))],$$

donde  $\chi_q > 0$  es la tasa lineal de divergencia alrededor de  $\gamma_q$ , y  $w_q(t)$  y  $u_q(t)$  son funciones oscilatorias de  $t$  y de amplitud acotada (en general, condicionalmente periódicas y de promedio nulo), satisfaciendo  $|u_q(t)| \leq b_q < \chi_q$ . El parámetro  $\chi_q$  es una medida de la falta de isocronía alrededor de la órbita dado que está relacionado con el mayor autovalor de la matriz  $\partial\vec{\omega}/\partial\mathbf{I}$ ,  $\vec{\omega}$  y  $\mathbf{I}$  representan los vectores frecuencia y acción asociados al toro, respectivamente (para un sistema isócrono, como el oscilador armónico,  $\chi_q = b_q = 0$  para todo  $\gamma$ ).

### 3.3.3. Resultados para tiempos largos de integración

En esta sección nos ocuparemos de la comparación de la evolución temporal de los tres indicadores, léase del *MEGNO*, del *LI* y del *FLI* medio<sup>†</sup>, para tiempos largos de integración (i.e.  $10^5$  u.t.). En la Fig. 3.8 se muestra el comportamiento típico de estos indicadores para órbitas (que identificamos por medio de su número de órbita) caóticas y regulares. A manera de ilustración mostramos los comportamientos de las órbitas 1491, 442 y 3359 del conjunto **Oc** y 358, 2105 y 3375 del conjunto **Or – Ord**.

<sup>†</sup>Para el *FLI* no se realiza ningún proceso de renormalización y en caso de crecimiento exponencial del  $\delta(t)$ , la integración numérica se detiene cuando se cumple la condición  $\langle \delta(t) \rangle = 10^{20}$ .

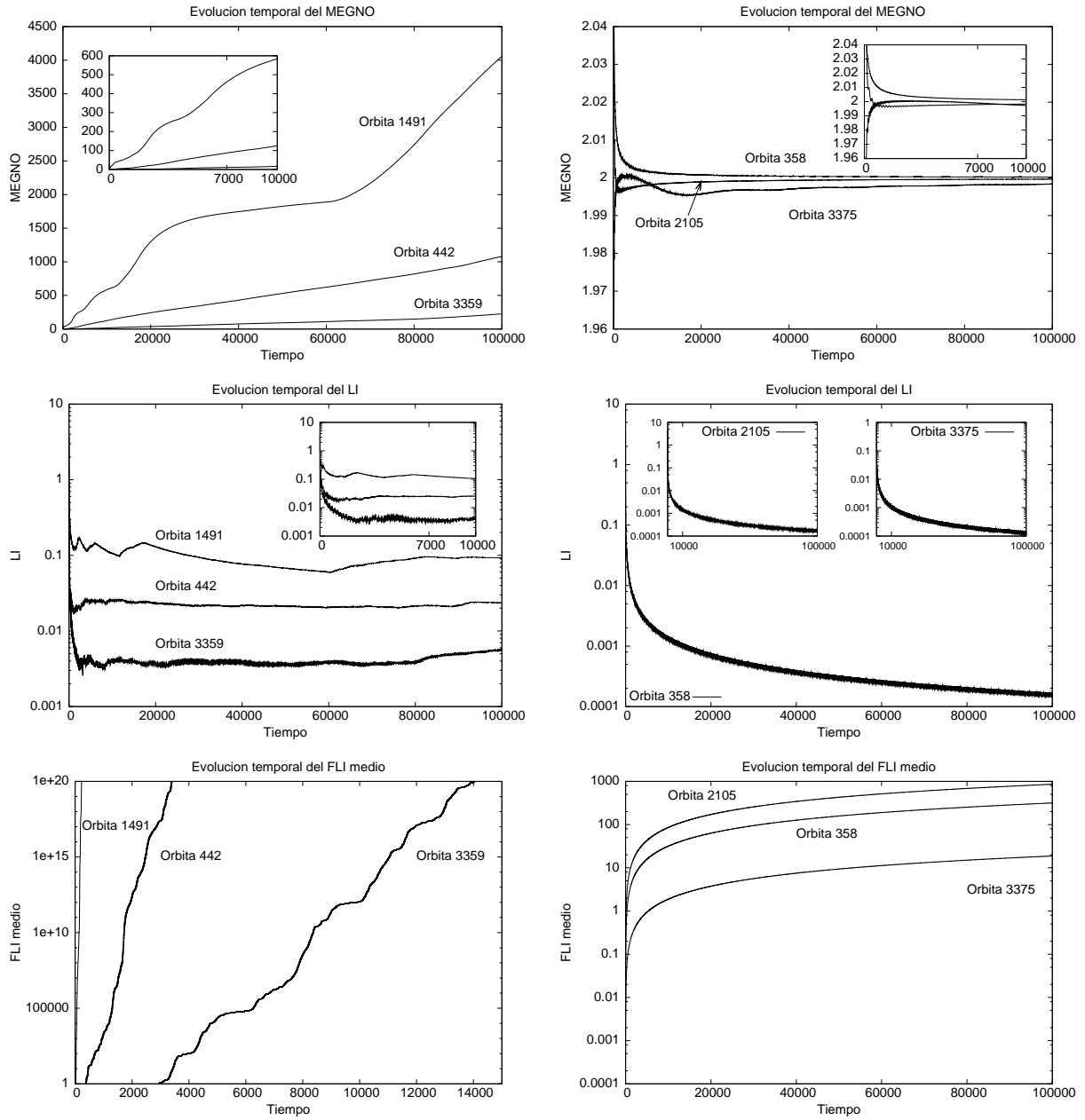


Figura 3.8: Evolución temporal típica del *MEGNO*, del *LI* y del *FLI* medio para órbitas caóticas, columna de la izquierda, y regulares, columna de la derecha (en **Oc** y **Or – Or<sub>d</sub>**, respectivamente). Para las curvas del panel inferior izquierdo, el cálculo numérico fue detenido cuando  $\langle \delta(t) \rangle = 10^{20}$  para evitar problemas de *overflow*.

El *MEGNO* muestra un crecimiento lineal con el tiempo para las órbitas que pertenecen al conjunto **Oc**, excepto por la órbita 1491 para la cual exhibe dos tendencias similares de crecimiento lineal pero entre las cuales se observa un comportamiento más constante, este último entre  $\sim 2 \times 10^4$  y  $\sim 6 \times 10^4$  u.t., sugiriendo que durante ese intervalo de tiempo la

órbita pudo transitar cerca de alguna estructura elíptica. Por otro lado, para las órbitas en  $\mathbf{Or} - \mathbf{Or}_d$ , el *MEGNO* se aproxima asintóticamente al valor de corte teórico 2, tanto a  $10^4$  u.t. como a  $10^5$  u.t.

Con respecto al *LI*, un comportamiento similar al señalado por el *MEGNO* se observa para la órbita 1491, mientras que para las órbitas regulares converge al valor teórico esperado de  $V_c^t = \ln T/T \sim 1,2 \times 10^{-4}$ .

Finalmente, para aquellas órbitas pertenecientes al conjunto  $\mathbf{Oc}$  el *FLI* medio muestra una dependencia casi exponencial con el tiempo (de hecho la dependencia es del tipo  $e^{\chi^t/t}$ ), mientras que alcanza valores mucho menores para órbitas que pertenecen al conjunto  $\mathbf{Or} - \mathbf{Or}_d$  para las cuales el comportamiento del indicador es de tipo lineal (nótese la escala logarítmica en el eje vertical).

Por lo tanto, la Fig. 3.8 provee información sobre el comportamiento esperado de estos tres indicadores en los clásicos casos de movimiento regular o caótico, lo cual será de utilidad para determinar el comportamiento de aquellas órbitas que pertenecen a los conjuntos  $\mathbf{Or}_d^s$  y  $\mathbf{Or}_d^u$ . Recordemos que limitaremos nuestro estudio a aquellas órbitas que satisfagan la condición  $E \leq -0,58$  (Sección 3.3.2) y para las cuales contamos con una buena estimación de sus períodos.

La correlación entre los valores del *MEGNO* y del *LI* a  $T = 10^5$  u.t. para las órbitas de los conjuntos  $\mathbf{Or}_d^u$  y  $\mathbf{Or}_d^s$  se presenta en la Fig. 3.9. Para las órbitas del conjunto  $\mathbf{Or}_d^u$ , las medias son de  $\log(2\bar{Y}/T) \sim -3,28$  y  $\log(LI) \sim -3,13$ , y las desviaciones estándar correspondientes son de 0,72 y 0,56 respectivamente, el coeficiente de correlación es de 0,98. Entonces, no solamente la correlación entre los indicadores es bastante buena, sino que los dos primeros momentos de sus respectivas distribuciones son también similares. Además, a pesar de estar calculando numéricamente el *MEGNO* para tiempos de integración largos, la mayoría de las órbitas del conjunto  $\mathbf{Or}_d^u$  alcanzan valores dentro del intervalo  $-4,5 \lesssim \log(2\bar{Y}/T) \lesssim -2,5$ , mostrando que estas órbitas son caóticas pero de forma moderada, para las cuales el tiempo medio de Lyapunov es de  $T_{Lyap} \sim 1,5 \times 10^3$  u.t., y consecuentemente sus períodos característicos no van más allá de 10 u.t.

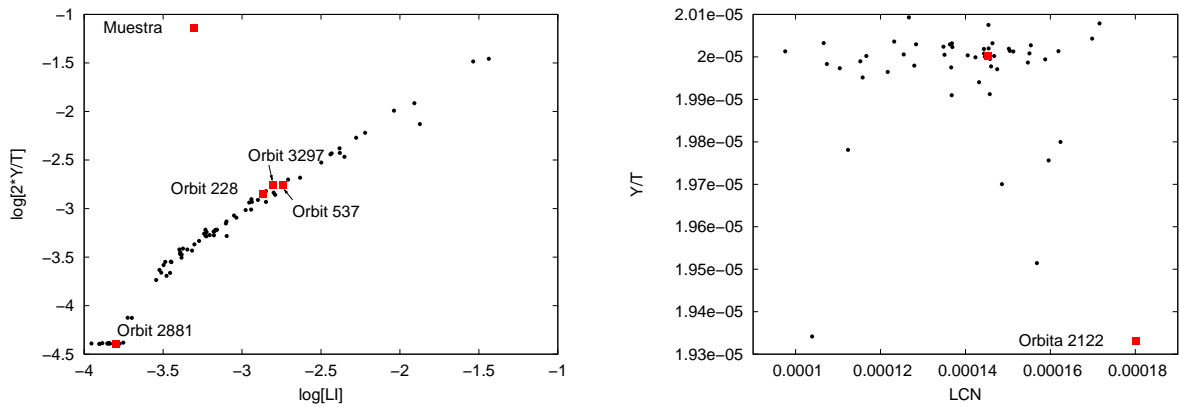


Figura 3.9: Correlaciones entre  $2\bar{Y}/T$  y el *LI* para las órbitas del conjunto  $\mathbf{Or}_d^u$  (panel de la izquierda) y entre  $\bar{Y}/T$  y el *LI* para las órbitas pertenecientes al conjunto  $\mathbf{Or}_d^s$  (panel de la derecha) a  $T = 10^5$  u.t. Las órbitas señaladas con cuadrados llenos forman la muestra que será estudiada en forma particular luego, siguiendo la evolución temporal de los tres CIs.

Por otro lado, para las órbitas  $\mathbf{Or}_d^s$ , el valor medio es  $\bar{Y}/T \approx 2 \times 10^{-5}$  con una desviación estándar de  $1,3 \times 10^{-7}$ , mientras que la media del *LI* está alrededor de  $1,4 \times 10^{-4}$  con una desviación estándar de  $1,7 \times 10^{-5}$ . El coeficiente de correlación correspondiente es de 0,1. De nuevo señalamos lo agudo de la distribución de  $\bar{Y}/T$  alrededor del valor teórico esperado. Las desviaciones estándar de ambas distribuciones difieren en dos órdenes de magnitud (nótese las diferentes escalas de los ejes vertical y horizontal en el panel de la derecha de la Fig. 3.9).

A  $T = 10^5$  u.t. se alcanzan valores de  $\bar{Y}/T$  que proveen una satisfactoria estimación del *LLCE* (o sea, 0), i.e., del orden de  $10^{-5}$ , mientras que el *LI* que se calcula numéricamente por medio del procedimiento clásico es de apenas  $10^{-4}$ .

La razón es inmediata; el factor  $\ln T \approx 11$  en  $V_c^t$  es el responsable de esta convergencia más lenta del *LI* al *LLCE* a medida que  $T \rightarrow \infty$ , y por ende  $\bar{Y}/T$  tiende al *LLCE* más rápido que  $\ln T/T$  (ver Sección 2.2.4). De hecho, para movimiento regular y tiempos de integración del orden de, o mayores que  $T \approx 2,2 \times 10^3$  u.t.,  $|\bar{Y}/T| \lesssim 10^{-4}$ , mientras que el *LI* calculado por medio del algoritmo clásico alcanza un *LLCE*  $\lesssim 10^{-3}$ . Entonces,

$$\frac{\bar{Y}/T}{\text{LLCE}} \approx \frac{2}{\ln T} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Finalmente, los círculos llenos en la Fig. 3.9 corresponden a cinco órbitas seleccionadas de las muestras de  $\mathbf{Or}_d^s$  y  $\mathbf{Or}_d^u$ , para las cuales estudiaremos la evolución temporal de los tres indicadores a  $T = 10^5$  u.t. y así determinar su comportamiento.

### 3.3.4. De las órbitas pertenecientes al conjunto $\mathbf{Or}_d$

Ahora procederemos a estudiar en detalle algunos ejemplos del conjunto  $\mathbf{Or}_d$ . Primero nos referiremos a las órbitas 2881, 537 y 3297 las cuales pertenecen al conjunto  $\mathbf{Or}_d^u$ , y a la 2122  $\in \mathbf{Or}_d^s$ . El estudio de la órbita 228  $\in \mathbf{Or}_d^u$  será llevado a cabo en forma separada.

Las Figs. 3.10 muestran la evolución temporal de los tres indicadores para ambos tiempos de integración, léase  $T = 10^4$  y  $T = 10^5$  u.t., correspondientes a las órbitas seleccionadas. Se puede observar claramente que para  $T = 10^4$  u.t. casi todas las órbitas exhiben un comportamiento de tipo regular. Sin embargo, tanto el *MEGNO* como el *FLI* medio evidencian un incipiente incremento para las órbitas 537 y 3297, lo cual no es observado por el *LI*. Cuando el tiempo se incrementa, ambas órbitas se separan claramente del resto, siendo todos los CIs testigos de esta diferenciación.

Además, las órbitas 2122  $\in \mathbf{Or}_d^s$  y 2881  $\in \mathbf{Or}_d^u$  parecen evolucionar de una manera similar. Pero el valor final del *MEGNO* para la órbita 2122 es ajustadamente 2, mientras que para la 2881 está apenas por encima del valor de regularidad antes señalado, lo cual podría indicar (como ya hemos mencionado) un carácter suavemente inestable para esta órbita (véase la discusión que sigue).

En la Fig. 3.11 presentamos la evolución temporal para la órbita 228  $\in \mathbf{Or}_d^u$  de tanto el *MEGNO* como del *LI*, en los paneles izquierdo y derecho, respectivamente. Es interesante notar el comportamiento particular de los indicadores para esta órbita. Del panel izquierdo, podemos observar que la curva parece describir una órbita regular condicionalmente periódica hasta  $t \lesssim 2 \times 10^3$  u.t., luego el *MEGNO* crece linealmente por un intervalo de tiempo corto hasta que alcanza un valor constante, alrededor de 2,6, y converge al valor 3 a  $T = 10^4$  u.t. Nótese que el *LI* a este tiempo, se acerca mucho al valor teórico esperado, alrededor de  $10^{-3}$ . Cuando el tiempo de integración se incrementa, el *MEGNO* crece a valores más altos pero no en forma lineal, mientras que el *LI* parece decrecer, aunque se aproxima a valores

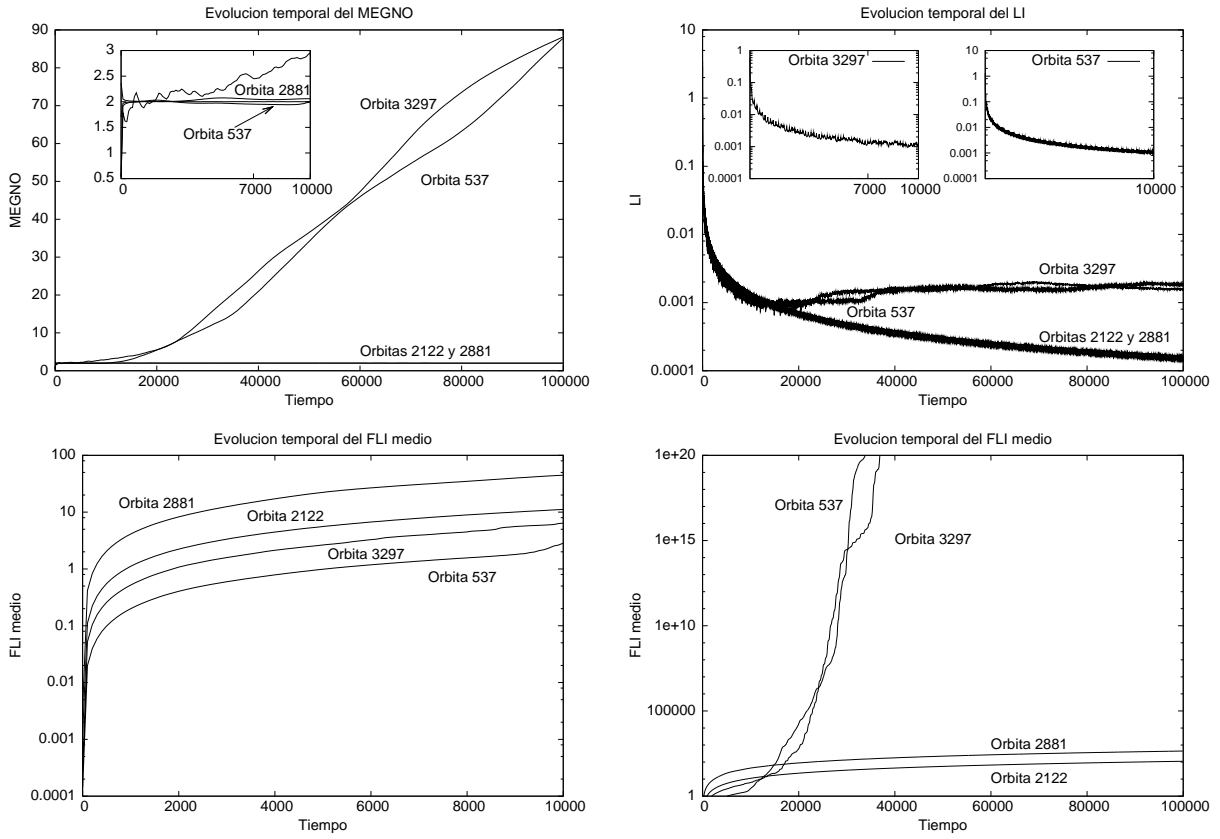


Figura 3.10: Evolución temporal del *MEGNO*, del *LI* y del *FLI medio* para las órbitas seleccionadas de los conjuntos  $\mathbf{Or}_d^u$  y  $\mathbf{Or}_d^s$  a  $T = 10^4$  y  $T = 10^5$  u.t. En los paneles inferiores graficamos la evolución temporal del *FLI medio* para ambos tiempos de integración.

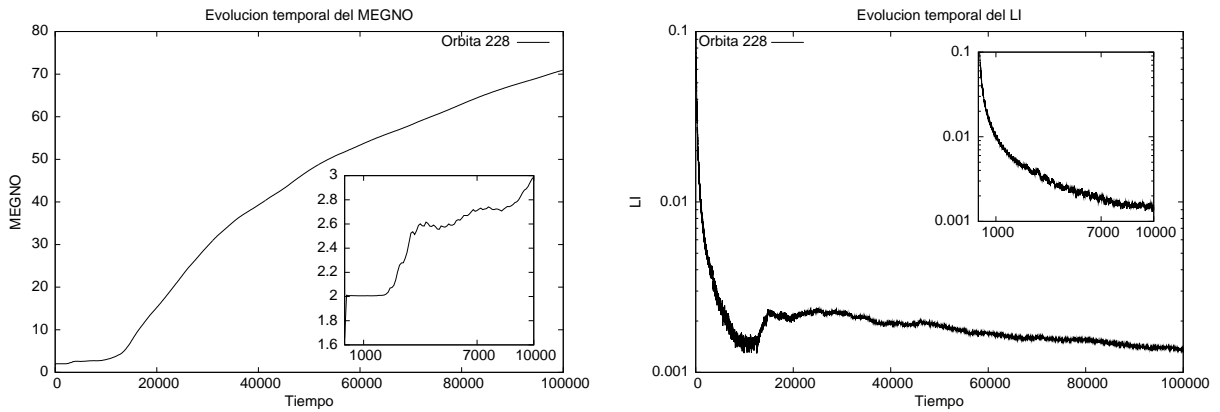


Figura 3.11: Evolución temporal del *MEGNO* y del *LI* para la órbita 228  $\in \mathbf{Or}_d^u$  y para  $T = 10^4$  y  $T = 10^5$  u.t.

más elevados que a aquéllos que caracterizarían un movimiento regular a  $T = 10^5$  u.t. Este particular rendimiento de los indicadores para la órbita en cuestión exige un estudio particular del espacio de fases y de su entorno, para entender fehacientemente su carácter. Dicha tarea fue realizada analizando su entorno inmediato en el espacio de fases.

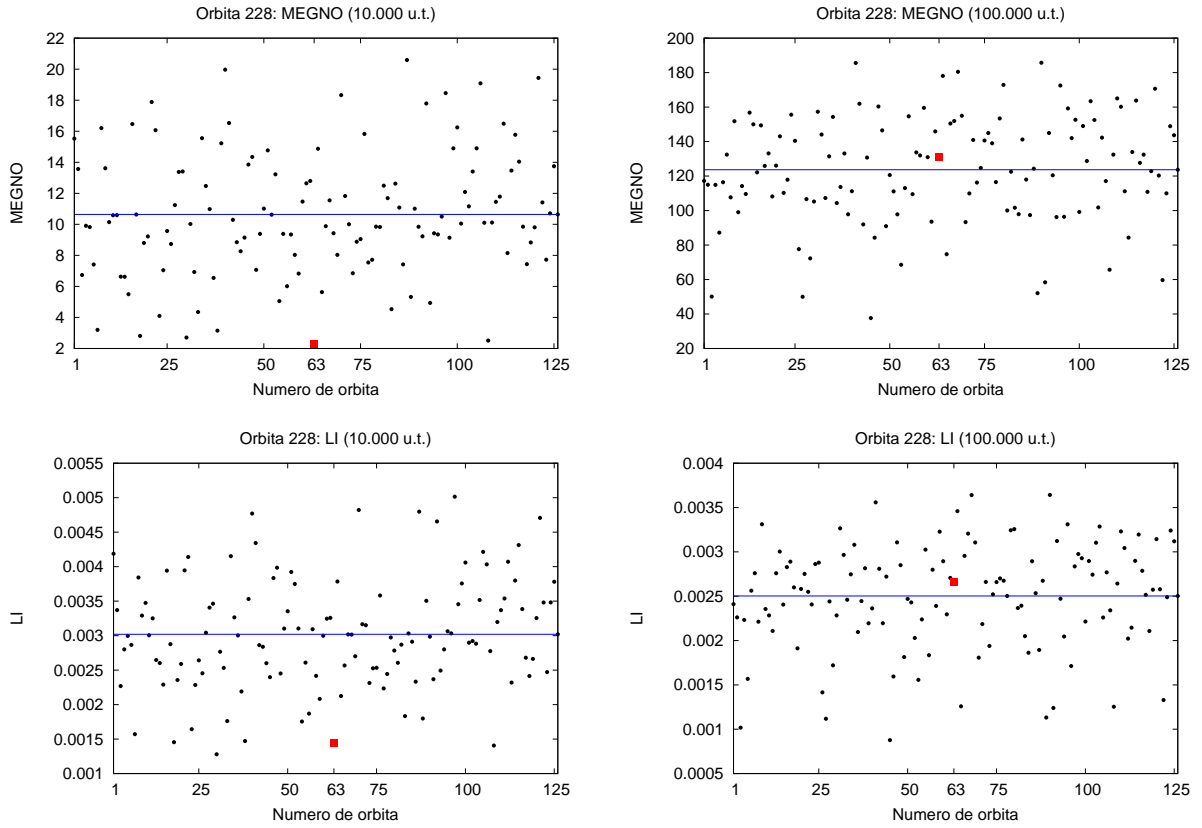


Figura 3.12: El *MEGNO* y el *LI* para  $T = 10^4$  y  $T = 10^5$  u.t. para 125 órbitas circunscriptas en un dominio de radio  $10^{-7}$  alrededor de la órbita 228. El último valor se corresponde con la media de los valores de los indicadores, señalado también por medio de la línea horizontal.

Luego, en la Fig. 3.12 presentamos los valores del *MEGNO* y del *LI* a  $T = 10^4$  u.t. y  $T = 10^5$  u.t. para un conjunto de 125 órbitas tomadas al azar en un entorno de radio  $10^{-7}$  centrado en la órbita 228, cuyo valor está señalado en cada una de las figuras por medio de un círculo lleno. A  $T = 10^4$  u.t. para esta órbita, el *MEGNO* se encuentra muy cerca del valor 2, mientras que el valor medio del indicador para el conjunto mencionado está cerca de 11. Cuando se incrementa el tiempo de integración, se vuelve bastante evidente que la órbita 228 es, de hecho, caótica. Un comportamiento similar se observa en caso de los valores del *LI*. En su conjunto, entonces, estos experimentos muestran que la órbita podría ubicarse dentro de una región del espacio de fases extremadamente compleja.

Con el propósito de confirmar la conjetura establecida, en la Fig. 3.13 mostramos un mapa del *MEGNO* en el espacio de momentos  $(p_x, p_z)$  para la superficie de energía a la cual pertenece la órbita 228, construido a partir de  $10^6$  condiciones iniciales. Los valores del *MEGNO* están calculados sobre  $T = 10^3$  u.t., el cual es un tiempo final de integración apropiado dado que

la condición  $T \approx 10^3 T_c(E)$  se cumple. La escala de tiempos característicos es de 1 para la superficie de energía de  $E \sim -3$  (como se deduce de la Fig. 3.6), a la cual pertenece la órbita 228.

Las regiones oscuras se corresponden con regiones de movimiento caótico fuerte para las cuales  $\bar{Y} > 20$ , mientras que las regiones blancas se corresponden con  $\bar{Y} < 2,01$  revelando movimiento regular estable. Regiones donde tenemos grises claros, refieren a zonas de movimiento ligeramente inestable,  $2,01 < \bar{Y} < 3$  y con grises oscuros se representa movimiento caótico moderado, i.e.  $3 < \bar{Y} < 20$ .

La figura revela la compleja dinámica resonante del espacio de fases proyectado en el espacio de momentos para esta superficie de energía, y podemos ver claramente que la órbita 228 yace dentro de uno de estos cruces de resonancias. Esto debería explicar el comportamiento patológico de esta órbita y su entorno.

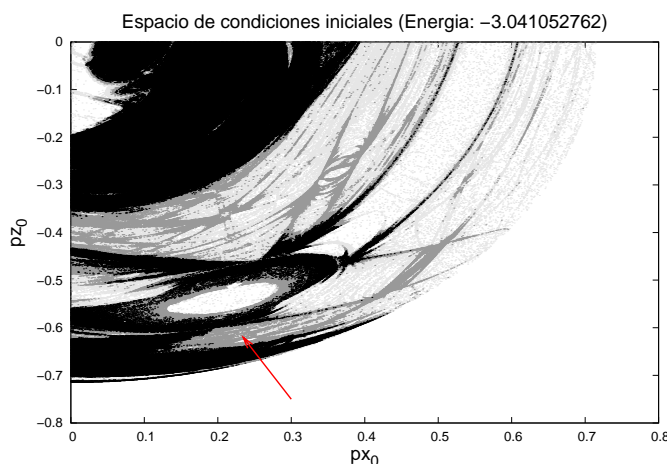


Figura 3.13: Mapa del *MEGNO* para una grilla de  $10^6$  condiciones iniciales en el espacio de momentos  $(p_x, p_z)$  para una energía de  $E = -3,041052762$ , también se señala la condición inicial de la órbita 228, con una flecha. El intervalo de integración es de  $T = 10^3 \approx 10^3 T_c(E)$ . Regiones de color negro ( $\bar{Y} > 20$ ) se corresponden con caos fuerte, zonas de color blanco indican movimiento regular  $\bar{Y} < 2,01$ , grises claros movimiento apenas inestable ( $2,01 < \bar{Y} < 3$ ) y grises oscuros indican dominios de caos moderado ( $3 < \bar{Y} < 20$ ).

Para terminar, investiguemos en detalle los alrededores de la órbita 2881, la cual pertenece al conjunto  $\mathbf{Or}_d^u$ . Consideremos entonces, 125 órbitas seleccionadas al azar dentro de un entorno de radio  $10^{-7}$  y calculemos ambos CIs, el *MEGNO* y el *LI* para los tiempos de integración  $T = 10^4$  y  $T = 10^5$  u.t. Los resultados se encuentran en la Fig. 3.14 donde se muestra que los valores del *MEGNO* yacen en el intervalo  $1,95 \lesssim \bar{Y} \lesssim 3$  para  $T = 10^4$  u.t., y considerando tiempos de integración más largos, el intervalo se achica aún más, e.g. (1,98; 2,27) para  $T = 10^5$  u.t. Por ende, aunque el *MEGNO* para la órbita 2881 caiga apenas por encima del valor de regularidad escogido (2,01), i.e. 2,014 a  $T = 10^5$  u.t., la órbita debería ser considerada a todo efecto como regular. Un resultado similar es el que nos provee el *LI*, el cual fue calculado numéricamente para la misma muestra de órbitas, incluyendo la 2881,



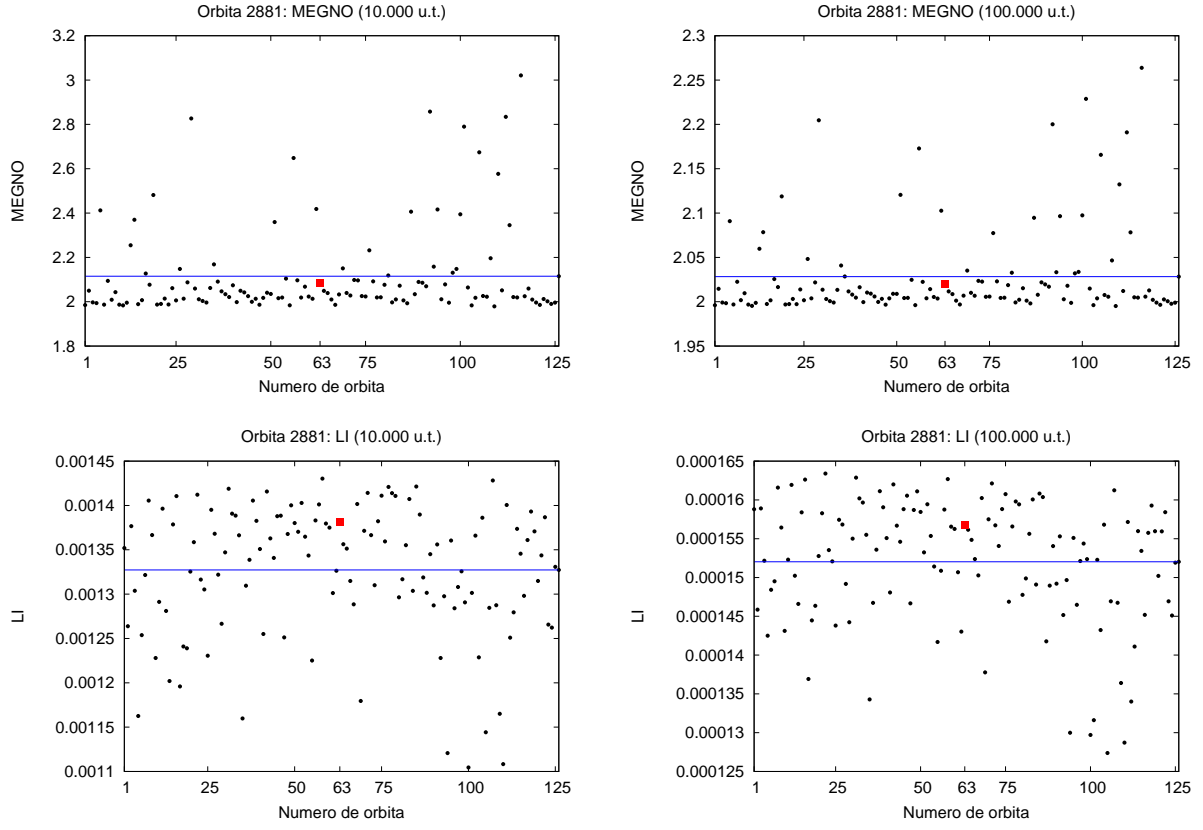


Figura 3.14: El *MEGNO* y el *LI* para  $T = 10^4$  y  $T = 10^5$  u.t. para 125 órbitas en un entorno de radio  $10^{-7}$  alrededor en la órbita 2881. Los últimos valores se corresponden con la media de los valores de los indicadores, también señalados por medio de una línea horizontal.

para la cual a  $T = 10^4$  u.t. alcanza un valor un poco menor que el valor crítico  $V_c^e$  adoptado por Muzzio *et al.* (2005), pero más elevado que el  $V_c^t$ .

Finalmente, sería interesante considerar los valores del *MEGNO* para todas las órbitas en  $\mathbf{Or}_d^u$  para  $T = 10^5$  u.t., lo cual se muestra en la Fig. 3.15. Ahí se observa que al menos 14 órbitas del conjunto  $\mathbf{Or}_d^u$  debieron ser incluidas en el conjunto  $\mathbf{Or}_d^s$  (e.g. 2881), dado que sus valores del *MEGNO* se encuentran muy próximos al valor de regularidad 2. De hecho, podría ser inadecuado para ellas considerar el factor 2 en  $2\bar{Y}/T$ , necesario para el caso de órbitas caóticas, al buscar correlaciones con el *LI*, dado que las órbitas no incrementan sus valores de forma lineal con el tiempo.

Al transferir estas 14 órbitas de  $\mathbf{Or}_d^u$  a  $\mathbf{Or}_d^s$ , y al recalculer las distribuciones para  $\mathbf{Or}_d^u$ , el valor medio resulta de  $\log(2\bar{Y}/T) \approx -3,04$  y se alcanza con una desviación estándar de 0,55, una media de  $\log(LI) \approx -2,98$  con una desviación estándar cercana a 0,51, y el coeficiente de correlación es  $r \approx 0,99$ . Para  $\mathbf{Or}_d^s$  tenemos un valor medio de  $\bar{Y}/T \approx 2 \times 10^{-5}$  con una desviación estándar de  $\approx 2,3 \times 10^{-7}$ , mientras que la media del *LI* es  $\approx 1,4 \times 10^{-4}$  con una desviación estándar de  $\approx 1,8 \times 10^{-5}$ . El coeficiente de correlación en este caso apenas llega a 0,22, indicando nuevamente que “no hay correlación entre ambos indicadores para las órbitas regulares”. Nótese entonces, que no hubo cambios significativos debido a la transferencia de

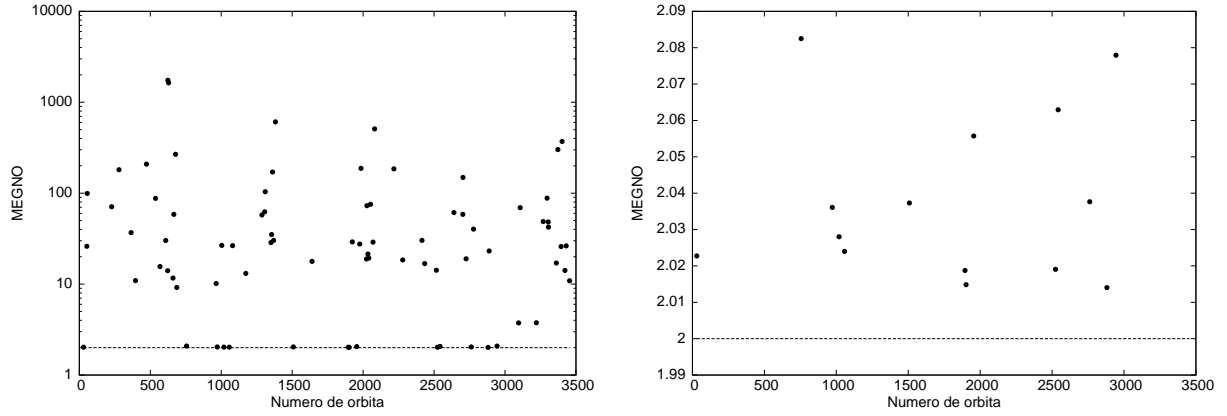


Figura 3.15: Valores del  $MEGNO$  para las 79 órbitas en  $\mathbf{Or}_d^u$  y  $T = 10^5$  u.t. (panel de la izquierda). Acercamiento alrededor de  $\bar{Y} = 2$  (panel de la derecha).

dichas órbitas.

### 3.4. Discusión

El  $MEGNO$  resultó un indicador rápido muy adecuado para identificar movimiento regular y caótico. Más aún, es particularmente útil para investigar la naturaleza de aquellas órbitas regulares con pequeños  $LCEs$  (hecho asociado a inestabilidades).

Además hemos encontrado una buena correlación entre el  $MEGNO$  y el máximo  $FT-LCN$  para tiempos cortos, moderados y largos de integración en caso de las órbitas caóticas, mientras que el  $MEGNO$  provee mejores resultados para la componente regular. De hecho, tiene la ventaja que  $\bar{Y}/T$  converge al valor nulo del  $ILCE$  más rápido que el  $LI$  calculado numéricamente por medio del algoritmo clásico (Sección 2.2.4). Otra forma de estimar el  $ILCE$  es por medio del cálculo numérico de la pendiente del  $MEGNO$ , pero volveremos sobre este punto en la Sección 5.2. El  $FLI$  resultó útil y ventajoso, pero no provee un valor de referencia para movimiento regular, lo cual lo hace preferible para la exploración general del espacio de fases por medio de sus valores finales, que para el análisis particular de una dada órbita, a menos que se siga la evolución temporal del mismo sobre la órbita en cuestión (ver Capítulo 4).

Finalmente, aunque  $\bar{Y} \rightarrow 2$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y para movimiento condicionalmente periódico su convergencia sea relativamente rápida, uno debería mantenerse alerta en el sentido que una órbita particular está generalmente dominada por la dinámica que la rodea, *ergo* si fuera necesario determinar el carácter explícito de dicha órbita resultaría conveniente considerar como valor crítico para el movimiento regular la cantidad  $\bar{Y} \sim d$ , donde  $d$  podría ser tomada como el valor medio de  $\bar{Y}$  sobre un dominio pequeño en el entorno de la órbita en cuestión<sup>‡</sup> (véase Capítulo 4).

<sup>‡</sup>El procedimiento no es solamente válido para el  $MEGNO$ , sino para cualquier método.