

Capítulo 4

Indicadores variacionales

En el Capítulo 3 hemos sometido al *MEGNO* (Sección 2.2.4), un CI relativamente nuevo desarrollado por los directores de esta tesis junto a Carles Simó, a un examen riguroso, comparando su rendimiento con el de otros dos indicadores en un escenario de cierta complejidad.

El *MEGNO* como el *LI* (Sección 2.2.1) y el *FLI* (Sección 2.2.6), pertenecen a la clase de indicadores variacionales, i.e. se basan en la evolución de los vectores desviación, o vectores solución de las ecuaciones variacionales. Luego, en el presente Capítulo extenderemos el estudio comparativo a una mayor cantidad de CIs variacionales, con el objeto de poder determinar un subconjunto que sea lo suficientemente eficiente para estudiar cualquier sistema Hamiltoniano.

Aquí no solamente haremos el análisis sobre flujos continuos, sino también sobre mapas simplécticos. Sin embargo, dada la cantidad de CIs a evaluar, en esta parte del trabajo apelaremos a escenarios más simples.

Recién en el Capítulo 5 retomaremos el modelo de Muzzio *et al.* (2005), para realizar una comparación que agregue a los CIs variacionales, un ejemplo de indicador espectral.

4.1. Aplicación a mapas simplécticos simples*

4.1.1. Introducción

En esta primera parte del Capítulo, haremos una comparación del *LI*, del *MEGNO*, y del *FLI* ya utilizados en el Capítulo 3, en conjunto con el *SALI* (Sección 2.2.5), los *SSNs* y la *D* (Sección 2.2.3) y el *RLI* (Sección 2.2.2). Dejamos para la segunda parte, la introducción de algunas actualizaciones de las técnicas ya mencionadas, como el *GALI* (Skokos *et al.* 2007, Sección 2.2.5), generalización del *SALI*, y el *OFLI* (Fouchard *et al.* 2002, Sección 2.2.6), una actualización del *FLI*.

El estudio se desarrolla sobre dos mapas 4D (equivalentes a sistemas continuos representados por Hamiltonianos de dos grados y medio de libertad). El primero es una variante del Mapa Simpléctico de Froeschlé (Froeschlé 1972), de aquí en más *vFSM* (por sus siglas en inglés: *variant of Froeschlé Symplectic Mapping*) y estudiado por Contopoulos & Giorgilli (1988), Skokos *et al.* (1997) y Skokos (2001), entre otros. El segundo es un sistema compuesto por dos mapas estándar acoplados con el propósito de estudiar, en detalle, el rendimiento de los indicadores en un caso bien conocido de caos muy moderado (Contopoulos & Voglis 1996; Contopoulos & Voglis 1997).

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 4.1.2 comenzamos estudiando la solidez de los valores de corte tomados para los distintos CIs. Con este propósito contamos el número de órbitas caóticas dado por cada CI y su correspondiente V_c y examinamos entonces, la variación de dicha componente de acuerdo a un pequeño cambio en el valor crítico, intentando representar un probable y *a posteriori* ajuste empírico del mismo. Una vez realizado el análisis sobre los valores de corte, es posible determinar con precisión la velocidad de convergencia y el poder resolvente de cada una de las técnicas. Entonces, en la Sección 4.1.3 comparamos los rendimientos de los indicadores de acuerdo a estas dos características fundamentales, a través de la información de su evolución temporal, lo cual es factible debido al pequeño tamaño de la muestra seleccionada para la tarea. Estas características son nuevamente evaluadas en la Sección 4.1.4, pero en esta oportunidad la información se obtiene solamente de los valores finales de los indicadores. Por ende, se pueden tomar muestras de gran tamaño, e.g., la muestra seleccionada en este caso consta de 10^6 órbitas.

Los experimentos de la Sección 4.1.4 muestran los rendimientos de los CIs con órbitas que son fácilmente identificables como caóticas o regulares. Sin embargo, es de gran interés la evaluación de los CIs bajo escenarios mucho más complejos. En la Sección 4.1.5 concentramos nuestros esfuerzos en estudiar las diferentes técnicas sobre dos regiones de dinámica muy compleja: la primera, la capa estocástica en la resonancia principal (Sección 4.1.5.1) y la segunda, una región poblada de órbitas caóticas de tipo *sticky*[†] (Sección 4.1.5.2). Finalmente, en la Sección 4.1.6 incluimos un estudio sobre la dependencia de D y del *RLI* con sus respectivos parámetros libres. Estas técnicas son las únicas del paquete que estudiamos en la Sección 4.1 que deben contar con ajustes previos hechos a la medida del problema, y así configurar de manera eficiente los correspondientes algoritmos para su cálculo numérico. Discutimos los resultados en la Sección 4.1.7.

Aunque apliquemos los CIs en dos mapas 4D, cada método goza de la versatilidad de poder ser aplicado a cualquier mapa de N -dimensiones, salvo la D , la cual no es aplicable a

*Los resultados incluidos en esta sección fueron publicados en Maffione *et al.* (2011b).

[†]La característica de *stickiness* de una órbita se debe a la existencia de los **cantori**, producto de la destrucción de los toros KAM.

mapas 2D (véase Skokos 2001, para una explicación que no por breve, deja de ser clara).

4.1.2. Solidez de los valores críticos

Existen determinadas características que hacen de un CI un método eficaz para un dado estudio, y quizás las más importantes sean:

- la velocidad de convergencia (asociada al tiempo de integración),
- la capacidad de identificar niveles tanto de hiperbolicidad como de estabilidad (o poder resolvente),
- un valor crítico confiable,
- el tiempo de CPU invertido en el cálculo numérico (esto último lo consideraremos recién en la Sección 4.2.5).

En esta primera sección vamos a tratar el tema de los valores de corte de los CIs, debido a que los mismos resultan fundamentales para estudiar apropiadamente las otras características mencionadas. Para ello, tomamos la región definida por los intervalos $x_1 \in [-3,138451 : 0]$ y $x_2 \in [-3,138451 : 0]$ y los valores constantes $x_3 = 0,5$ y $x_4 = 0$, señalada con un recuadro rojo en la Fig. 4.1, y construimos una grilla de $10^3 \times 10^3$ puntos equiespaciados, generando una muestra de 10^6 condiciones iniciales sobre el vFSM.

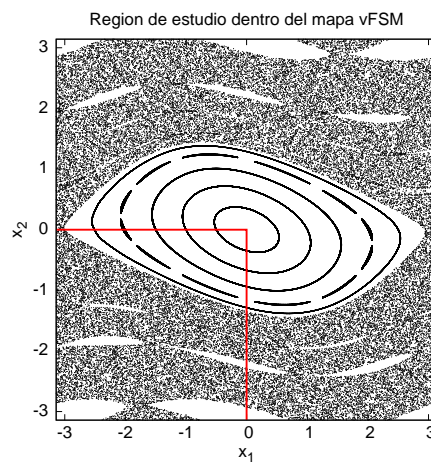


Figura 4.1: En recuadro rojo delimitamos la región a analizar en las Secciones 4.1.2 y 4.1.4 ubicada dentro del mapa simpléctico vFSM.

Recordemos que el vFSM se define a partir de las siguientes ecuaciones (mod 2π):

$$\begin{aligned}
 x_1' &= x_1 + x_2 \\
 x_2' &= x_2 - \nu \cdot \sin(x_1 + x_2) - \mu \cdot [1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)] \\
 x_3' &= x_3 + x_4 \\
 x_4' &= x_4 - \kappa \cdot \sin(x_3 + x_4) - \mu \cdot [1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)].
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Los parámetros usados en el mapa (4.1) son $\nu = 0,5$, $\kappa = 0,1$ y $\mu = 10^{-3}$ (véase Skokos 2001 para mayores detalles). Cabe señalar que un mapa simpléctico 4D se corresponde con un sistema Hamiltoniano de 2,5-d.o.f. (ver Cincotta & Giordano 2012).

A lo largo de esta primera parte del Capítulo, usaremos la siguiente configuración para el cálculo numérico de los experimentos, a menos que se especifique lo contrario: cuatro valores finales de iteraciones, i.e., 10^3 , 5×10^3 , 10^4 y 10^5 . Dado que las órbitas pertenecen a diferentes superficies de energía, la convergencia no será homogénea a medida que aumentemos el valor final de las iteraciones. La separación inicial tomada para el cálculo del *RLI* es de 10^{-12} (al igual que en Sándor *et al.* 2004). La *D* está calculada sobre intervalos de 100 iteraciones y el número de celdas considerado para la generación de los histogramas para los *SSNs* es de 10^3 (Sección 2.2.3). Los vectores desviación iniciales son: (1,1,1,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0). Recordemos que ya en Froeschlé *et al.* (1997a) y Froeschlé *et al.* (1997b), los autores mostraron que la primera parte del cálculo del *LI* era suficiente para distinguir entre movimiento caótico y regular y por ende, introducen el *FLI*. Sin embargo, usando tales técnicas basadas en la ventaja del cálculo con pocas iteraciones, se observa dependencia con los i.d.v. Luego, resulta importante mantener los mismos i.d.v. para toda la muestra a lo largo de cada uno de los experimentos (véase Froeschlé & Lega 2000 para más detalles, también Paleari *et al.* 2008 y Todorović *et al.* 2008). La versión del *MEGNO* considerada en esta Sección 4.1 para mapas es la del *MEGNO*(2,0). Se eligió, en este caso, el *MEGNO*(2,0), para evaluar no sólo la versión natural del indicador, i.e. el *MEGNO*(1,-1) (o simplemente *MEGNO*) ya utilizado en el capítulo anterior, sino también otra de sus versiones (véase Cincotta *et al.* 2003 o la Sección 2.2.4.1 del presente trabajo de tesis donde se introduce la generalización del *MEGNO*).

Aplicamos el V_c dependiente del tiempo para el *LI* (Tabla 4.1, donde N es el número de iteraciones, ver Benettin *et al.* 1976 y el trabajo de revisión de Skokos 2010 para mayores detalles). Es sabido que un ajuste de naturaleza empírica para el V_c del *LI* es fuertemente recomendable para mejores resultados, pero dado que no es estándar sino que depende del problema y a fin de realizar una comparación lo más imparcial posible, decidimos deshechar ese posible ajuste y quedarnos con la estimación teórica del V_c . El valor crítico utilizado para el *RLI* (Tabla 4.1) fue obtenido siguiendo el *modus operandi* señalado por Sándor *et al.* 2004 y las sugerencias discutidas en la Sección 4.1.6. La forma a través de la cual determinar el V_c para la *D*, también dependiente del tiempo, y no es conocida todavía. En el caso del *MEGNO*(2,0), el V_c asociado es un valor fijo (véase Tabla 4.1, Cincotta *et al.* 2003 y Sección 2.2.4) que también necesita de un ajuste empírico. Sin embargo, como hicimos con el *LI*, vamos a usar sencillamente el valor teórico (ya que por el momento tampoco hay un ajuste estándar para el *MEGNO*(2,0)). Para el *SALI* tenemos dos valores empíricos de corte comúnmente usados en la literatura, estos son 10^{-12} y 10^{-4} (véase e.g. Skokos *et al.* 2004). Entre ambos, las órbitas son catalogadas como *sticky*; sin embargo, aquí las consideraremos directamente caóticas. Por ende, el V_c a considerar es 10^{-4} , el cual entonces separa las órbitas regulares de las caóticas y las *sticky*. Una vez más, ésta es nuestra elección para evitar cualquier tipo de ventaja al considerar más de un V_c para el CI. El V_c asociado al *FLI* (a veces también se lo usa con dos valores críticos, véase Paleari *et al.* 2008) es dependiente del tiempo y tiene la fórmula presentada en la Tabla 4.1[‡].

Con la información de los valores para la última iteración o valores finales, recopilada en el cálculo de los CIs para la muestra de 10^6 condiciones iniciales, construimos la Tabla 4.2.

[‡]En el cálculo numérico del *FLI* no vamos a considerar el logaritmo que usualmente se utiliza en su definición, como e.g. en Todorović *et al.* (2008).

CI	V_c
LI	$\ln(N)/N$
RLI	10^{-12}
$MEGNO(2,0)$	0,5
$SALI$	10^{-4}
FLI	N

Tabla 4.1: Valores de corte para el LI , el RLI , el $MEGNO(2,0)$, el $SALI$ y el FLI . El asociado a la D no está incluido, porque se desconoce el mecanismo para su determinación.

Ahí resumimos en base a cuatro números de iteraciones: 10^3 , 5×10^3 , 10^4 y 10^5 iteraciones, la evolución temporal de la variación porcentual de la componente caótica para tres diferentes valores de corte y para cada uno de los indicadores. La primera columna, indica el CI; la segunda, el número total de iteraciones N ; la tercera columna, muestra los valores de corte (V_c); la cuarta columna de la Tabla 4.2, señala el porcentaje de órbitas caóticas que resultan usando las estimaciones (teóricas o empíricas) de los V_c ; las últimas dos columnas, señalan el porcentaje de órbitas caóticas de acuerdo a sendos pequeños ajustes en los V_c ($\pm 1\%$), simulando una calibración *a posteriori* del parámetro. Es interesante que luego de 5×10^3 iteraciones y a pesar de las variaciones consideradas sobre los V_c , todos los indicadores coinciden en los porcentajes de órbitas caóticas dentro de un pequeño intervalo (últimas tres columnas de la Tabla 4.2), i.e. entre (68%, 75%), a excepción del $MEGNO(2,0)$, que marca un porcentaje de la componente caótica muy por encima de los valores precedentes, tanto si optamos por la estimación teórica de su V_c (cuarta columna), como por la modificación del V_c dada en la última columna, donde le aplicamos un ajuste de -1% a la estimación teórica. Por otro lado, si utilizamos un V_c cercano a 0,505 (quinta columna), el $MEGNO(2,0)$ muestra una mejor aproximación a los porcentajes de caos dados por los demás CIs.

Ambos factores nos dicen que no sólo el V_c teórico, fijo, del $MEGNO(2,0)$ necesita de un ajuste empírico cuidadoso, sino también que el mismo resulta ser el más sensible de todos en el experimento.

En la Fig. 4.2 mostramos la evolución temporal de la diferencia de los porcentajes de órbitas caóticas usando los V_c ajustados en $+1\%$ y -1% . Luego, la fragilidad del V_c teórico dado para el $MEGNO(2,0)$ se vuelve evidente (curva con los valores más elevados). Esto es una consecuencia directa de la naturaleza asintótica de su V_c . Está claro entonces, que el valor crítico del $MEGNO(2,0)$ es tan sólo una estimación del valor real que debiera usarse. Por otro lado, encontramos que el RLI y el $SALI$ tienen los V_c más sólidos (curvas de la Fig. 4.2 con los valores más pequeños), aunque su naturaleza sea estrictamente empírica. El $SALI$ tiene el V_c más sólido de acuerdo a lo que se observa en la Fig. 4.2. Sin embargo, la media de los porcentajes obtenidos para la componente caótica (véase Tabla 4.2, últimas tres columnas) cae por debajo de las medias dadas por el LI , el RLI y el FLI si el N está por encima de 5×10^3 iteraciones y a pesar de los ajustes de $+1\%$ y -1% hechos a los V_c .

CI	N	V_c	Caóticas (%)	Caóticas ($V_c+1\%$)	Caóticas ($V_c-1\%$)
<i>LI</i>	10^3	6.9077555E-03	69.4299	68.7814	70.0918
	5×10^3	1.7034386E-03	73.2632	72.7674	73.8041
	10^4	9.2103402E-04	73.5061	72.9797	74.0848
	10^5	1.1512925E-04	73.8847	73.2543	74.5822
<i>RLI</i>	10^3	10^{-12}	49.9296	49.7875	50.0667
	5×10^3	10^{-12}	71.7731	71.7542	71.7912
	10^4	10^{-12}	72.0777	72.0617	72.0961
	10^5	10^{-12}	72.34	72.3255	72.3549
<i>MEGNO(2,0)</i>	10^3	0,5	85.9964	78.8211	87.7021
	5×10^3	0,5	91.4468	77.0322	94.7615
	10^4	0,5	91.8992	75.0808	95.8364
	10^5	0,5	92.7217	71.6947	98.2398
<i>SALI</i>	10^3	10^{-4}	14.7913	14.8604	14.7232
	5×10^3	10^{-4}	68.3665	68.3676	68.3658
	10^4	10^{-4}	68.8171	68.8187	68.8168
	10^5	10^{-4}	69.778	69.7786	69.7776
<i>FLI</i>	10^3	10^3	69.7826	69.6846	69.8806
	5×10^3	5×10^3	73.3382	73.2752	73.4007
	10^4	10^4	73.571	73.5102	73.6329
	10^5	10^5	73.9327	73.8734	73.9905

Tabla 4.2: Evolución temporal de la variación porcentual de la componente caótica debido a tres valores de corte diferentes y para los distintos CIs (véase el texto para mayores detalles).

Entonces, sobre los CIs considerados en el experimento, el *RLI* se muestra como el poseedor del V_c más confiable.

4.1.3. Estudio de órbitas individuales por medio de la evolución temporal de los CIs

En esta sección estudiaremos otros dos aspectos fundamentales de cualquier CI: la velocidad de convergencia y la capacidad de identificación de los diferentes tipos de movimiento. Para ello, usamos como herramienta la evolución temporal de los indicadores, lo que es únicamente viable cuando se trabaja con una muestra de tamaño reducido. La primera muestra consta de diez órbitas, cinco de ellas caóticas y las restantes regulares, de acuerdo al *LI* (el N

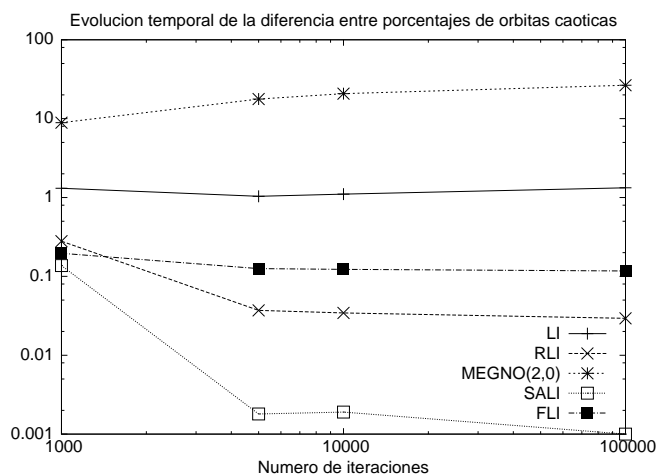


Figura 4.2: Evolución temporal de la diferencia entre los porcentajes de órbitas caóticas usando el par de valores de corte ajustados en $\pm 1\%$.

elegido que garantiza la convergencia del *LI* es de 10^5 iteraciones, el cual es un número mucho mayor que el teórico necesario, pero para pocas órbitas como es éste el caso, el esfuerzo extra para llevar a cabo el cálculo numérico resultó no ser costoso).

Por simplicidad, aquí mostraremos los resultados para tan sólo una de las órbitas caóticas y una de las regulares, que fueron las más interesantes del pequeño grupo.

En la Tabla 4.3 y en la Fig. 4.3 presentamos las condiciones iniciales de las órbitas caótica y regular seleccionadas, y en la Fig. 4.4, mostramos la evolución temporal del *LI*, del *RLI*, del *MEGNO(2,0)*, de la *D*, del *FLI* y finalmente del *SALI* para cada una de ellas.

Carácter de la órbita	x_1	x_2	x_3	x_4
Órbita caótica	3	-0.5	0.5	0
Órbita regular	2	0	0.5	0

Tabla 4.3: Condiciones iniciales para las órbitas caótica y regular seleccionadas.

En el espacio (x_1, x_2) , las proyecciones de cada una de las cinco órbitas caóticas de la muestra llenan densamente la componente caótica conectada (véase e.g. Fig. 3 en Skokos 2001). Entre ellas, la órbita caótica con condición inicial $x_2 = -0,5$ se distingue del resto debido a que tiene características del fenómeno de *stickiness* (véase e.g. Kovács & Érdi 2009; Contopoulos & Harsoula 2010), observado alrededor de la isla de estabilidad principal. En el caso de la componente regular, obviamente tenemos curvas invariantes. Más aún, en el espacio (x_1, x_2) , se puede ver que la órbita regular con condición inicial $x_1 = 2$ se encuentra muy cercana a una capa estocástica (ver Fig. 4.3) y por ende, presenta ciertas características de órbita irregular, una faceta que la destaca para su estudio individual, entre las demás del conjunto de sus pares.

Habiendo justificado la elección de este par de órbitas presentamos en la Fig. 4.4 la evolución temporal del *LI*, del *RLI*, de la *D*, del *MEGNO(2,0)*, del *SALI* y del *FLI* para cada

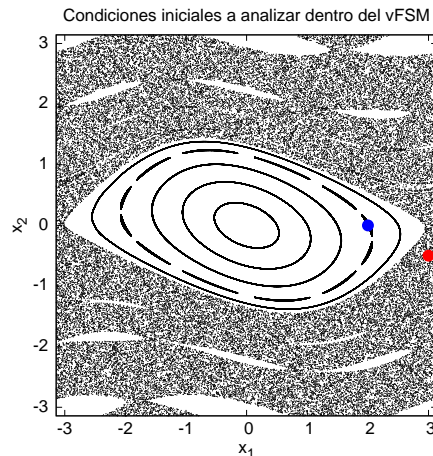


Figura 4.3: Condiciones iniciales dentro del mapa simpléctico vFSM. En color rojo se observa la condición inicial de la órbita caótica y en color azul la condición inicial de la órbita regular de la Tabla 4.3.

una de ellas. La órbita caótica se encuentra señalada con una curva de color negro mientras que la órbita regular con una curva de color gris. También en línea a trazos agregamos los V_c adoptados por cada técnica para separar el movimiento caótico del movimiento regular.

Respecto a la velocidad de convergencia, el LI caracteriza la caoticidad de la órbita antes de 10^3 iteraciones, de acuerdo a un V_c teórico determinado por la fórmula $\ln(N)/N$, con N el número de iteraciones. Sin embargo, sólo es evidente la estabilización en un valor constante después de estas 10^3 iteraciones. En el caso de la órbita regular, la determinación de su naturaleza dinámica es clara desde el principio del intervalo (véase Fig. 4.4, panel superior izquierdo), dado el V_c dependiente del tiempo que tiene asociado el indicador. De todas maneras, la separación con la órbita caótica es clara sólo un tiempo después, alrededor del N ya mencionado.

El RLI incrementa sus valores para la órbita caótica por encima del V_c correspondiente de 10^{-12} , desde el comienzo del intervalo de tiempo, y satura alrededor del valor 10^{-4} cerca de las 10^4 iteraciones. Su rendimiento resulta similar al del LI . El dato interesante aquí, procede de la órbita regular que se encuentra próxima a una de las capas estocásticas, lo cual parece ser un inconveniente en la clasificación dada por el indicador y necesita ser examinado con más cuidado. De acuerdo con el RLI , esta órbita debería ser identificada como caótica. La razón yace en que oscila por encima del V_c del RLI , i.e. 10^{-12} (más precisamente alrededor del valor 5×10^{-12} , véase Fig. 4.4, panel superior derecho). Sin embargo, este valor es muy diferente de aquéllos que caracterizan al resto de las órbitas caóticas de la muestra inicial (las cinco órbitas caóticas a las que nos referimos poseen valores del indicador entre 10^{-2} y 10^{-4}). Luego las órbitas con valores bajos del indicador pero por encima de su V_c deberían ser evaluadas por separado debido a posibles inestabilidades locales que afectarían su dinámica.

La D no tiene un V_c determinado lo que permitiría establecer con mayor precisión su velocidad de convergencia. Más aún, el comportamiento que refleja para ambos tipos de movimiento, caótico y regular, es muy similar en su etapa transitoria inicial, debido a que la D muestra un decrecimiento en sus valores independientemente del carácter de la misma

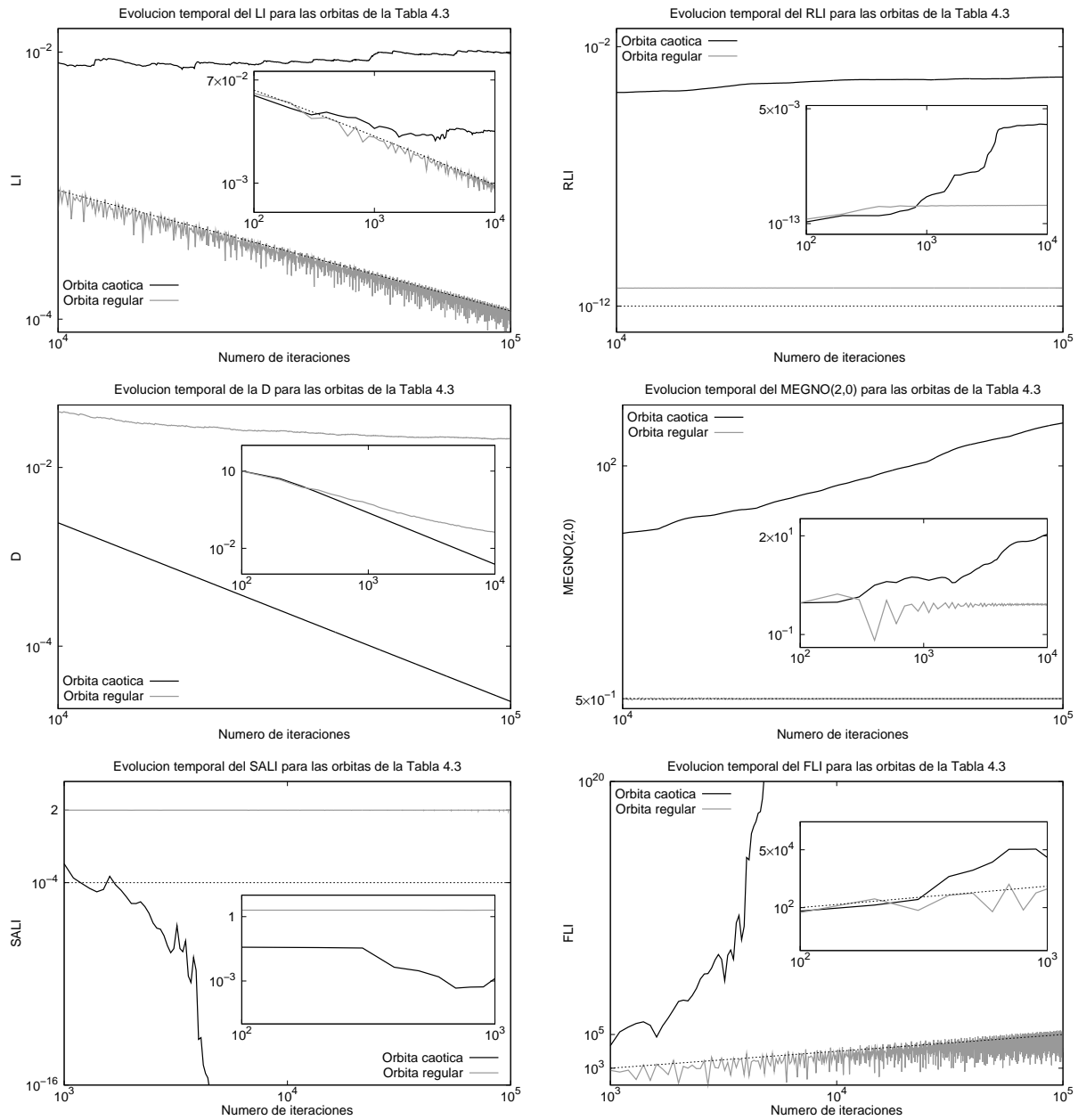


Figura 4.4: Evolución temporal de los CIs para una órbita caótica y otra regular del vFSM (condiciones iniciales en la Tabla 4.3). Los valores de corte también están incluidos en la figura como línea a trazos. Del panel superior de la izquierda al panel inferior de la derecha, presentamos entonces, la evolución del *LI*, del *RLI*, de la *D*, del *MEGNO(2,0)*, del *SALI* y del *FLI*, respectivamente. Notar la escala logarítmica en el número de iteraciones.

(aunque a diferentes tasas; véase Contopoulos & Voglis 1996; Contopoulos *et al.* 1997; Voglis *et al.* 1998 para mayores detalles sobre los *SSNs* que son la base de la *D*, así como Voglis *et al.* 1999 para una revisión de los aspectos más importantes de este último indicador). La tendencia

a decrecer de la órbita caótica aparece antes de las primeras 10^3 iteraciones, por lo que en este caso su velocidad de convergencia parece ser incluso mayor que la obtenida para el LI y la observada para el RLI . Pero considerando que existe un decrecimiento también para la órbita regular, y además ante la falta de un V_c definido, es recomendable identificar el carácter regular de la otra órbita, para luego sí, poder determinar el carácter caótico de la primera observando que esta última continúa decreciendo. De esta manera, encontramos que la clasificación puede darse recién al final del intervalo de iteraciones cuando un valor casi constante es alcanzado por la órbita regular (Figs. 4.4, panel del medio, lado izquierdo). *Ergo*, resulta ser el indicador de más baja velocidad de convergencia. La similitud de comportamientos entre ambas órbitas en el régimen transitorio y la base estadística de la D que la lleva a una identificación tardía de la órbita regular, enlentece alguna eventual clasificación por medio de las curvas de evolución temporal del indicador.

El $MEGNO(2,0)$ tiende a un valor fijo deducido teóricamente, i.e. 0,5, para aquellas órbitas de la componente regular, y crece linealmente con el tiempo en el caso caótico, lo cual hace muy simple la identificación y clasificación de las órbitas (véase Cincotta *et al.* 2003). Esta forma diferente de identificar ambos tipos de movimiento ayuda enormemente a mejorar la velocidad de convergencia. La órbita caótica muestra su carácter luego de las primeras 10^3 iteraciones, como lo hacían tanto el LI como el RLI . La órbita regular muestra un régimen oscilatorio de amplitud decreciente alrededor del V_c asociado, desde el mismo comienzo del proceso iterativo (véase Figs. 4.4, panel del medio, a la derecha).

El $SALI$ fluctúa dentro del intervalo $(0, 2)$ para las órbitas regulares, o alternativamente decae de forma exponencial con una tasa relacionada a los $LCEs$ involucrados (véase Skokos *et al.* 2007 para un análisis completo). El valor del CI para la órbita caótica cruza el V_c de 10^{-4} luego de 10^3 iteraciones, revelando su carácter. Además, antes de las 10^4 iteraciones, el $SALI$ alcanza la precisión de la computadora y consecuentemente, el cálculo numérico se detiene. Por otro lado, la órbita regular oscila en el intervalo mencionado alrededor del valor aproximado $\sim 0,05$ (Figs. 4.4 en el panel inferior izquierdo).

El FLI crece exponencialmente para movimiento caótico (véase e.g. Froeschlé *et al.* 1997a; Froeschlé *et al.* 1997b y Froeschlé & Lega 2006). Para la órbita caótica el CI cruza el V_c dependiente del tiempo (N , ver Tabla 4.3), antes de las 10^3 iteraciones, mostrando que el valor de corte asociado es muy eficiente en el caso de bajos N . Un valor de saturación es necesario con el propósito de evitar el *overflow* en el cálculo numérico, el valor 10^{20} es el elegido para la tarea y alcanzado para la órbita caótica antes de las 10^4 iteraciones (como con el $SALI$). La órbita regular crece linealmente con el tiempo (Figs. 4.4, panel inferior derecho) respetando perfectamente el V_c correspondiente.

Los N necesarios para que los CIs caractericen el movimiento (i.e. la velocidad de convergencia) resultan similares, pero como veremos, analizar el poder resolvente de cada uno de ellos profundiza las diferencias.

Llegando al final del intervalo de iteraciones, para la órbita caótica se observa el fenómeno de *stickiness* en la curva del LI , gracias a un repentino incremento en sus valores finales (véase Fig. 4.5, panel superior izquierdo), el cual no es observado para ninguna de las restantes cuatro órbitas caóticas de la muestra inicial. El $MEGNO(2,0)$ (Fig. 4.5, panel superior derecho) nos ofrece resultados similares, debido a que esta última órbita caótica puede ser identificada gracias a que alcanza los valores más elevados de este indicador, luego de, nuevamente, un incipiente incremento al final del intervalo de iteraciones que no es observado para las otras

órbitas caóticas. Este resultado muestra la íntima relación entre estos dos indicadores, el *LI* y el *MEGNO* (como ya hemos mencionado, e.g. en la Sección 2.2.4). Ni el *RLI* (Fig. 4.5, panel del medio, a la izquierda), el *SALI* (Fig. 4.5, panel del medio, a la derecha) ni el *FLI* (Fig. 4.5, panel inferior) pudieron distinguir esta característica *sticky* en la órbita caótica señalada.

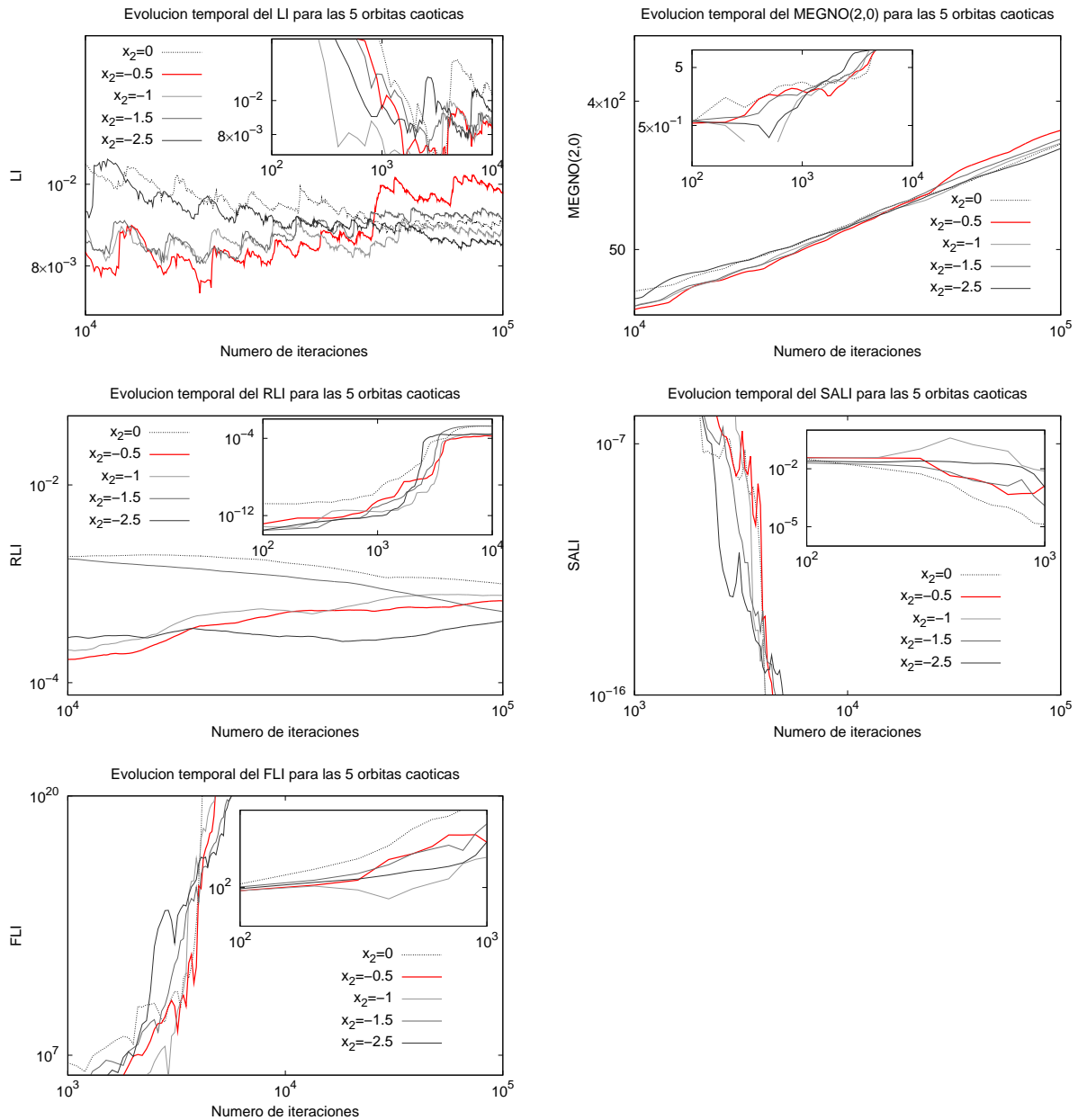


Figura 4.5: Evolución temporal de los CIs para 5 órbitas caóticas. En trazo rojo se identifica la órbita caótica con condiciones iniciales de la Tabla 4.3. Del panel superior de la izquierda al panel inferior, presentamos entonces, la evolución del *LI*, del *MEGNO(2,0)*, del *RLI*, del *SALI* y del *FLI*, respectivamente. Notar la escala logarítmica en el número de iteraciones.

En tanto la órbita regular próxima a la capa estocástica pudo ser separada del resto de la componente regular por todos los CIs estudiados. El *LI* (véase Fig. 4.6, panel superior izquierdo) tanto como el *MEGNO(2,0)* (Fig. 4.6, panel superior derecho), el *SALI* (Fig. 4.6, panel del medio a la izquierda) y el *FLI* (Fig. 4.6, panel del medio a la derecha) manifiestan su identificación por medio de las amplitudes de las oscilaciones, las cuales son visiblemente mayores que para las otras regulares. El *RLI* para esta órbita (Fig. 4.6, panel inferior izquierdo), muestra el valor de convergencia más alto dentro del conjunto de órbitas regulares (hasta un orden de magnitud más grande). Finalmente la *D* (Fig. 4.6, panel inferior derecho) tiene el valor de convergencia más bajo, dentro de los alcanzados para las restantes cuatro órbitas de la componente regular, pero aquí no contamos con una base sólida que permita separarla de, e.g., otros dos casos de órbitas regulares que poseen valores similares del indicador y sin embargo, no están cerca de ninguna estructura estocástica.

Para terminar con esta primera comparación sobre un pequeño grupo de órbitas caóticas y regulares, estudiamos sus *SSNs*, los cuales son esenciales para el cálculo de la *D*. Tomando las diferentes órbitas caóticas de la muestra no cambian los correspondientes *SSNs*. Es esta cualidad la que nos indica que pertenecen a un dominio conectado, siendo una forma simple de identificar los distintos dominios, sencillez que no es compartida por el resto de los CIs para estos casos. Si analizamos los ejemplos de órbitas regulares, los *SSNs* cambian con la condición inicial o incluso, con los diferentes i.d.v. tomados para el cálculo de cada una. Esta diferencia es la que nos permite diferenciar entre movimiento caótico y movimiento regular (véase Contopoulos & Voglis 1996; Contopoulos *et al.* 1997; Voglis *et al.* 1998, Froeschlé *et al.* 2006 y Todorović *et al.* 2008 para más detalles). Sin embargo, la órbita regular que venimos analizando, tiene valores similares de los *SSNs* asociados, incluso cuando variamos los i.d.v. y por ende, sus perfiles son casi idénticos, reproduciendo el comportamiento de una órbita de naturaleza caótica. La razón es que la órbita, como se ha mencionado, se mueve cerca de dominios (no conectados) de movimiento estocástico dentro de la isla principal de estabilidad. Aunque este comportamiento ligado a inestabilidades haya sido también observado por los demás indicadores, sólo los *SSNs* parecen contar con un mecanismo inapropiado para diferenciar una órbita caótica de otra regular cerca de una capa estocástica.

Finalmente, en este experimento donde hemos hecho uso de la evolución temporal de los diferentes CIs para el estudio de órbitas individuales, el *LI* y el *MEGNO(2,0)* parecen ser los más apropiados del paquete, debido a que ambos correctamente identifican no sólo la influencia del dominio estocástico sobre la órbita regular como los restantes CIs, sino también el fenómeno de *stickiness* por el cual se ve afectada la órbita caótica cuando se mueve cerca de la resonancia principal.

4.1.4. Estudio de una muestra de órbitas por medio de los valores finales de los CIs

En la sección anterior mostramos los comportamientos de los CIs del paquete para una órbita caótica cerca de la resonancia principal, y para una órbita regular próxima a una capa estocástica dentro de la resonancia principal. El análisis de la velocidad de convergencia (tiempos de integración necesarios para definir el carácter de las órbitas) y la posibilidad de los distintos indicadores de poder medir los niveles de hiperbolicidad, fue llevado a cabo a través de las curvas de evolución temporal de cada CI. Estas últimas brindaron información que si bien era detallada, resultaron del estudio de sólo unas pocas órbitas, dado que el

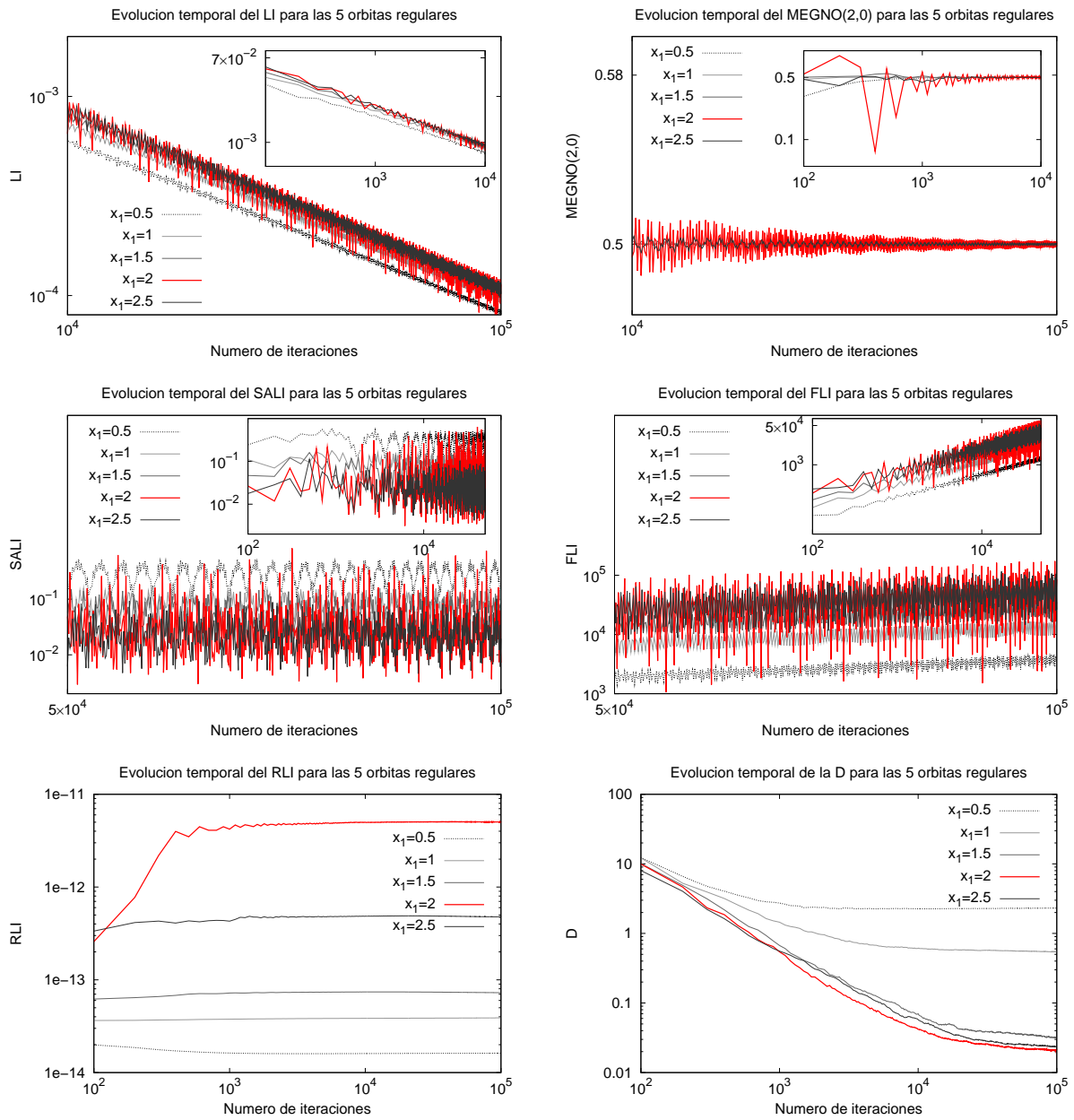


Figura 4.6: Evolución temporal de los CIs para 5 órbitas regulares. En trazo rojo se identifica la órbita regular con condiciones iniciales de la Tabla 4.3. Del panel superior de la izquierda al panel inferior de la derecha, presentamos entonces, la evolución del *LI*, del *MEGNO(2,0)*, del *SALI*, del *FLI*, del *RLI* y de la *D*, respectivamente. Notar la escala logarítmica en el número de iteraciones.

análisis de las evoluciones temporales no está automatizado. La comprensión de un sistema dinámico, generalmente crece con el tamaño de la muestra estudiada, y en tal caso las curvas de evolución temporal tan efectivas para estudios individuales de órbitas, no resultan eficientes. Por tal motivo, en esta sección vamos a utilizar únicamente la información que provenga de

los valores finales de los diferentes CIs, i.e., los valores de los CIs al final del proceso iterativo, para así examinar nuevamente, su velocidad de convergencia y poder resolvente.

La muestra utilizada para el siguiente análisis consta de 10^6 condiciones iniciales (las mismas de la Sección 4.1.2, que se encuentran distribuidas dentro de la región señalada en la Fig. 4.1). Los parámetros utilizados para el cálculo numérico de los CIs, incluyendo los valores de corte (véase la Tabla 4.1), son los mismos adoptados en las Secciones previas. Aclaremos que la D no es considerada en la primera parte de la presente sección dado que carece de un V_c apropiadamente definido.

Comenzamos considerando la velocidad de convergencia de los CIs. En esta dirección, calculamos los porcentajes de órbitas caóticas de la muestra para los cuatro números de iteraciones N utilizados previamente. Los resultados fueron presentados en la cuarta columna de la Tabla 4.2, Sección 4.1.2.

Calculamos las diferencias entre el valor estable, a 10^5 iteraciones, de los porcentajes de órbitas caóticas y los porcentajes alcanzados en los otros números de iteraciones, i.e. 10^3 , 5×10^3 y 10^4 . Los resultados correspondientes son los expuestos en la Tabla 4.4.

N	LI (%)	RLI (%)	$MEGNO(2,0)$ (%)	$SALI$ (%)	FLI (%)
10^3	4,4548	22,4104	6,7253	54,9867	4,1501
5×10^3	0,6215	0,5669	1,2749	1,4115	0,5945
10^4	0,3786	0,2623	0,8225	0,9609	0.3617

Tabla 4.4: Diferencias entre los porcentajes de órbitas caóticas calculados a 10^5 iteraciones, lo cual asegura un porcentaje estable, y los demás N s, i.e.: 10^3 , 5×10^3 y 10^4 para cada uno de los CIs.

De acuerdo a la Tabla 4.4, la mejor aproximación en 10^3 iteraciones a la distribución final del movimiento, es la dada por el FLI , mientras que la más pobre es la correspondiente al $SALI$. Como ambos CIs tienen comportamientos similares para las órbitas caóticas, la diferencia en la convergencia yace en los V_c . El V_c dependiente del tiempo del FLI parece ser mucho más eficiente que el V_c independiente del tiempo del $SALI$. Sin embargo, se observa que las diferencias entre ambos van desapareciendo rápidamente a medida que el N crece.

Luego del primer transitorio, en regímenes casi estables, el RLI muestra los mejores rendimientos respecto a la velocidad de convergencia. Consecuentemente, a pesar del hecho que el FLI comienza con la tasa más alta de convergencia, el RLI lo supera en rendimiento y mantiene el liderazgo en regímenes más estables. De todas maneras, tanto el FLI como el LI , siguen de cerca al RLI en eficiencia.

Los restantes CIs, i.e. el $MEGNO(2,0)$ y el $SALI$, tienen ambos resultados encontrados en la caracterización del espacio de fases, como se vio en la Sección 4.1.2.

Por lo tanto, el RLI muestra nuevamente (Sección 4.1.2, y ahora en este experimento con 10^6 condiciones iniciales) la velocidad de convergencia más confiable, gracias a un V_c robusto que complementa de buena manera un algoritmo muy rápido, por lo sencillo de iterar numéricamente.

Ahora pasaremos a estudiar el poder resolvente de cada uno de los CIs, a través, en esta oportunidad, de los valores finales solamente y sobre una muestra de 10^6 condiciones iniciales.

En la Fig. 4.7 presentamos los retratos del espacio de fases correspondientes al LI (panel de la izquierda) y del RLI (panel de la derecha). Estos retratos son a dos números de iteraciones N distintos: 10^3 iteraciones (paneles superiores) y 10^4 iteraciones (paneles inferiores). En el panel superior izquierdo de la Fig. 4.7, a 10^3 iteraciones, el LI alcanza a mapear un espacio de fases ruidoso e incompleto, aunque prometedor. La ausencia de estructuras como la capa estocástica dentro de la resonancia principal exige iteraciones más largas. De todos modos, las resonancias principales se observan claramente (en la Fig. 4.7 la componente regular se encuentra representada con una escala de colores fríos, cuando la componente caótica con una escala de colores más cálidos). De hecho, a 5×10^3 iteraciones, no solamente esta capa estocástica es evidente (el mapa correspondiente no se incluye en la Fig. 4.7) sino que hasta se observan ciertas estructuras en el interior de las resonancias de la parte baja del vFSM. Más aún, el grado de descripción no cambia significativamente al duplicar el N a 10^4 iteraciones (Figs. 4.7, panel inferior izquierdo), lo que significa que el LI ya ha alcanzado los valores convergentes y por tanto estables para las órbitas caóticas de la muestra. La principal diferencia entre ambos N yace en el mayor nivel de detalle para las órbitas caóticas de tipo *sticky* (e.g. en el borde de la resonancia principal), revelando finalmente, su naturaleza caótica. A 10^5 iteraciones el LI no brinda más información relevante que la que ofreció para el N precedente.

El retrato del espacio de fases del vFSM dado por el RLI a $N = 10^3$ (Figs. 4.7, panel superior derecho) resulta bastante ruidoso (también observamos este ruido sobre muestras menores de 10^4 órbitas). La razón es clara: esta cantidad de iteraciones no son suficientes para separar muchas de las órbitas caóticas de las pertenecientes a la componente regular. Sobre los resultados para los otros N , las conclusiones no difieren mucho de las dadas para el LI en el párrafo anterior. El nivel de descripción es similar al indicador previo, i.e. para 5×10^3 iteraciones, el retrato del espacio de fases brindado por el RLI parece ya presentar una estructura estable. Incrementar el número de iteraciones ayuda a resolver mejor las órbitas caóticas con cierto grado de *stickiness*, como sucedía con el LI (Figs. 4.7, panel inferior izquierdo) pero no ofrece mayores ventajas. Sin embargo, el contraste entre los colores cálidos asociados a las órbitas caóticas pertenecientes a la capa estocástica dentro de la resonancia principal, y los colores fríos de las órbitas regulares que rodean a las primeras, es mayor que el dado por el LI a 5×10^3 , o incluso a 10^4 iteraciones, favoreciendo su identificación. De nuevo, alguna clase de estructura (identificada con colores más fríos) se observa dentro de las resonancias de menor orden en la zona baja de los retratos del espacio de fases.

En la Fig. 4.8, paneles izquierdos, presentamos el comportamiento del $MEGNO(2,0)$ para el vFSM, para 10^6 condiciones iniciales y luego de 10^3 y 10^4 iteraciones, paneles superior e inferior respectivamente. Observamos las mismas características ya mencionadas en las anteriores descripciones de tanto el LI como del RLI . La diferencia fundamental con los primeros resulta como consecuencia del valor asintótico teórico dado para el $MEGNO(2,0)$ en el caso de las órbitas regulares. Esta particular característica del indicador es la que juega un rol esencial en el análisis individual de órbitas por medio de la evolución temporal del indicador, porque permite fácilmente identificar no sólo el movimiento regular sino los diferentes niveles de estabilidad inspeccionando cómo la órbita tiende al valor crítico del CI (una ventaja ya marcada en varios trabajos anteriores, como también en la Sección 4.1.3 del presente). Sin embargo, cuando se trabaja con los valores finales, toda la componente regular tiene aproximadamente un mismo valor, el V_c (en el panel inferior izquierdo de la Fig. 4.8 se ve un mismo color anaranjado para toda la componente). Por lo tanto, no muestra estructuras en la componente (e.g. no hay ninguna estructura observada dentro de las resonancias en

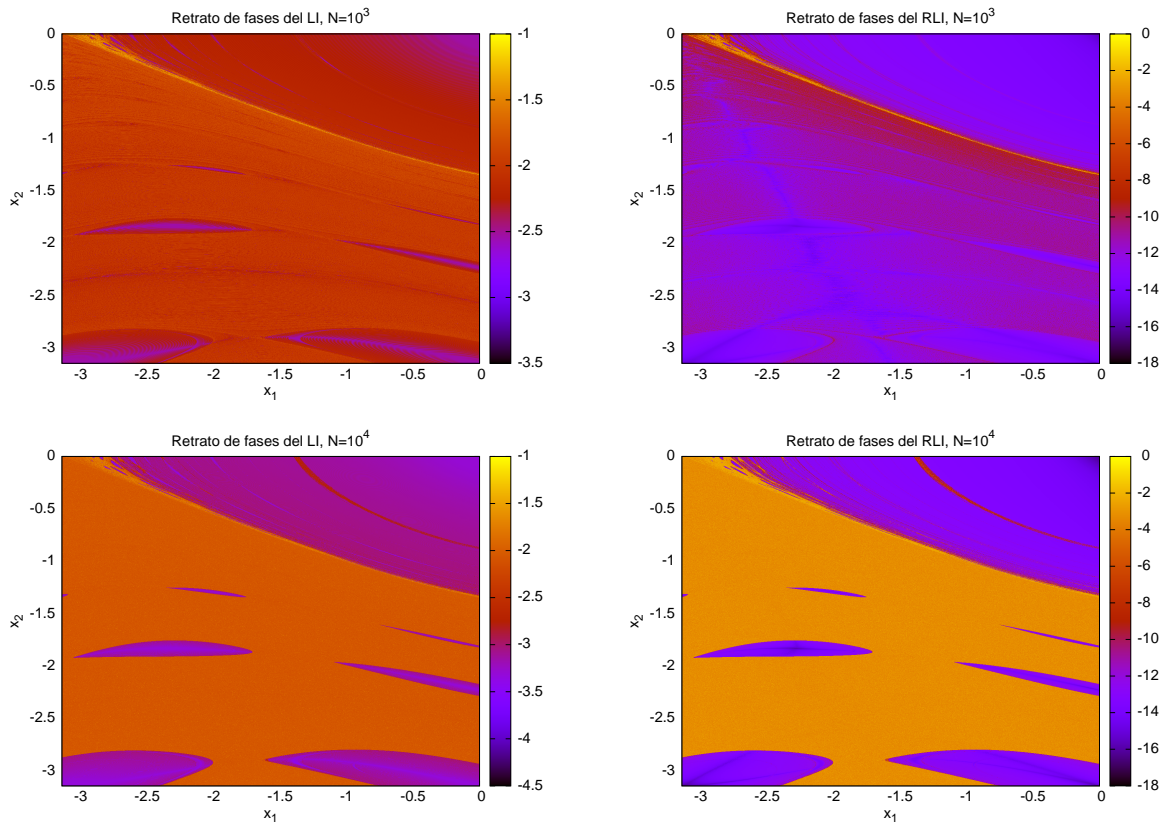


Figura 4.7: Retratos del espacio de fases dados por el LI y el RLI compuestos por 10^6 condiciones iniciales, para 10^3 (paneles superiores) y 10^4 (paneles inferiores) iteraciones. A la izquierda, los retratos dados por el LI , a la derecha, por el RLI . La escala de colores se corresponde con un aumento en la caoticidad de las órbitas, siendo los colores fríos para las órbitas regulares y los colores cálidos para las órbitas caóticas. Los CIs están en escala logarítmica.

la parte baja del retrato, que si se pueden ver con otros CIs). El nivel de descripción en el caso de la componente caótica es como el de los otros indicadores, ya que en este caso, el $MEGNO(2,0)$ crece con el N .

El indicador D (Figs. 4.8, paneles derechos) muestra un retrato del espacio de fases muy ruidoso a 10^3 iteraciones (panel superior) y no presenta ningún avance notorio en la calidad del mapeo cuando se multiplica el N por un factor cinco o incluso diez (panel inferior). O sea, tan sólo a 10^5 iteraciones se puede observar, e.g., claramente la capa estocástica dentro de la resonancia principal. Luego, la D parece ser un indicador, comparativamente hablando, lento, para describir apropiadamente la dinámica del vFSM.

El $SALI$ (Figs. 4.9, paneles izquierdos) y el FLI (Figs. 4.9, paneles derechos) muestran el mismo nivel de descripción que los otros CIs. Aunque las 10^3 iteraciones no resultan suficientes para tener un retrato del espacio de fases claro (Figs. 4.9, paneles superiores), 5×10^3 iteraciones ya son suficientes para lograr tal objetivo. Dada su convergencia extremadamente veloz para las órbitas pertenecientes a la componente caótica, se observa una falta de informa-

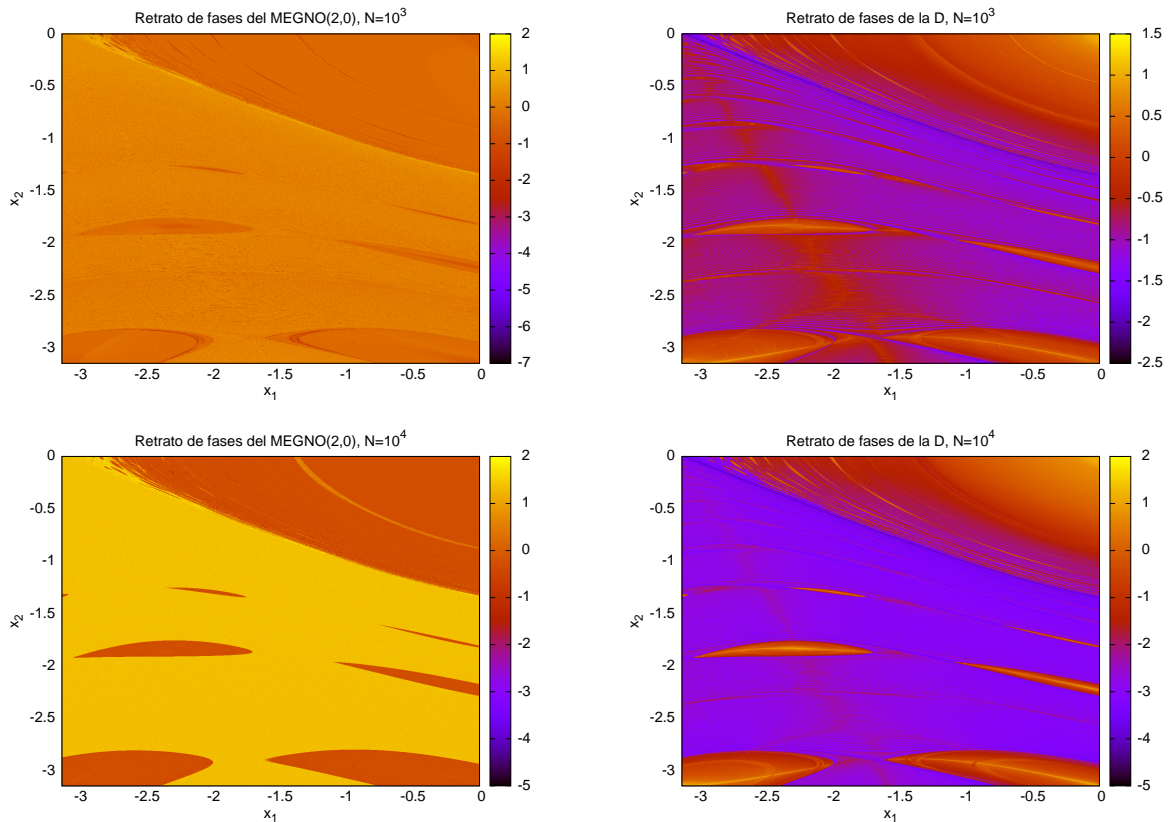


Figura 4.8: Retratos del espacio de fases dados por el *MEGNO*(2,0) y la *D* compuestos por 10^6 condiciones iniciales, para 10^3 (paneles superiores) y 10^4 (paneles inferiores) iteraciones. A la izquierda, los retratos dados por el *MEGNO*(2,0), a la derecha, por la *D*. La escala de colores se corresponde con un aumento en la caoticidad de las órbitas en el caso del *MEGNO*(2,0), siendo los colores fríos para las órbitas regulares y los colores cálidos para las órbitas caóticas. La escala se invierte para la *D*, donde los colores fríos están asociados a las órbitas caóticas y los colores cálidos a las órbitas regulares. Los CIs están en escala logarítmica.

ción en los niveles de hiperbolicidad (e.g. en la Fig. 4.9, panel inferior izquierdo, la componente caótica está señalada de forma homogénea con el color negro para el *SALI*, o bien con el color amarillo en el panel inferior derecho para el *FLI*) dado que en las integraciones numéricas todos los valores finales alcanzan los valores de saturación. Luego, una selección sabia del N , que no sea ni muy chico (porque se tendría un retrato en regímenes transitorios), ni muy grande (para que no saturen todas las órbitas caóticas perdiendo los grados de caoticidad), es lo que ofrecería una descripción detallada de la riqueza que pudiera encontrarse dentro de los dominios caóticos. A 10^4 iteraciones (Figs. 4.9, paneles inferiores), no hay una mejora sustancial del retrato alcanzado con la mitad de las iteraciones y con un N diez veces superior al anterior, no hay diferencia alguna. Estos indicadores también revelan estructuras similares (con colores más cálidos) dentro de las resonancias de menor orden, en la parte baja de los retratos del espacio de fases del vFSM.

Para la Fig. 4.10 tomamos 10^3 condiciones iniciales equidistantes de la forma $(x_1, x_2 =$

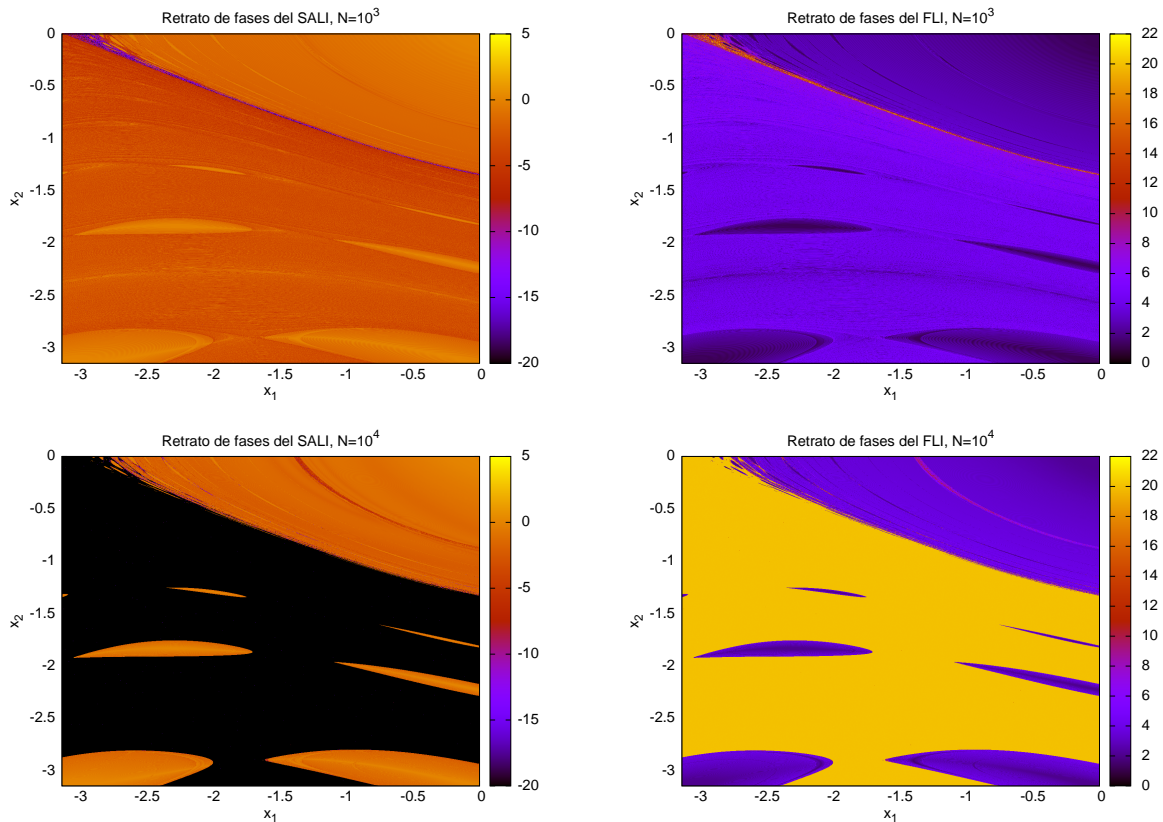


Figura 4.9: Retratos del espacio de fases dados por el *SALI* y el *FLI* compuestos por 10^6 condiciones iniciales, para 10^3 (paneles superiores) y 10^4 (paneles inferiores) iteraciones. A la izquierda, los retratos dados por el *SALI*, a la derecha, por el *FLI*. La escala de colores se corresponde con un aumento en la regularidad de las órbitas en el caso del *SALI*, siendo los colores fríos para las órbitas caóticas y los colores cálidos para las órbitas regulares. La escala se invierte para el *FLI*, donde los colores fríos están asociados a las órbitas regulares y los colores cálidos a las órbitas caóticas. Los CIs están en escala logarítmica.

-3 , $x_3 = 0,5$, $x_4 = 0$) y las iteramos 10^5 veces con el propósito de detallar los rendimientos de los indicadores a lo largo de una línea que atravesase las resonancias de la parte baja de los retratos del espacio de fases del vFSM que se mencionaron anteriormente (el perfil de condiciones iniciales utilizado se encuentra señalado en color verde en la Fig. 4.11 de la sección siguiente). De la Fig. 4.10, es fácil observar que el *RLI* y la *D* son los CIs que mejor muestran la estructura interna de estas resonancias. El *LI* y el *MEGNO*(2,0) no muestran tan claramente estas estructuras, y el *SALI* y el *FLI* si bien dan información sobre la dinámica que se circunscribe dentro de ellas, no lo hacen con el grado de detalle del *RLI* o de la *D*. Sin embargo, como puede observarse de la Fig. 4.8, panel de la derecha, la *D* es una técnica ruidosa por lo que la estructura que muestra puede ser parcialmente espúrea (nótese que al comparar la estructura señalada en la Fig. 4.10, panel superior izquierdo por el *RLI* y aquella descrita en la Fig. 4.10, panel superior derecho por la *D*, se pueden observar con facilidad muchas diferencias importantes).

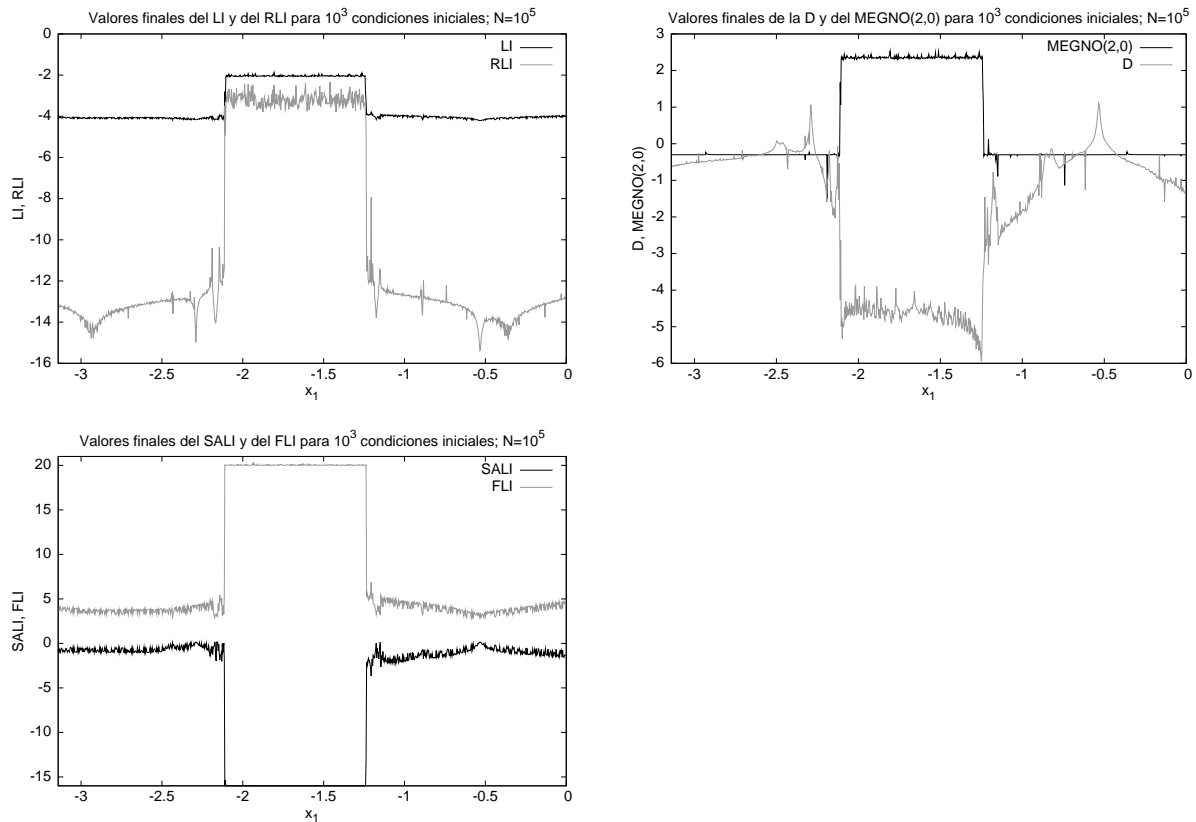


Figura 4.10: El LI y el RLI (panel superior izquierdo), la D y el $MEGNO(2,0)$ (panel superior derecho) y el $SALI$ y el FLI (panel inferior izquierdo) para 10^3 condiciones iniciales equidistantes a lo largo de la línea $x_2 = -3$ y 10^5 iteraciones. En escala logarítmica el valor del indicador correspondiente.

Luego, el RLI resulta el indicador más apropiado para describir la dinámica de una muestra estadística de condiciones iniciales.

En conclusión, cuando es necesario analizar una muestra grande de órbitas, la evolución temporal de los indicadores no resulta eficiente y la alternativa natural para reunir información dinámica es a través de los valores finales de los CIs.

En este contexto, y sobre los CIs examinados en el vFSM, el RLI aparece como el indicador más confiable debido a un agudo poder resolvente y a un buen rendimiento en velocidad de convergencia (en parte, gracias a un bien comportado V_c , véase Sección 4.1.2).

4.1.5. Examinando los CIs en escenarios de dinámica compleja

Ahora estamos interesados en examinar el poder resolvente de los CIs bajo situaciones de mayor complejidad dinámica, y usando solamente los valores finales de los mismos. Para ello hemos seleccionado dos regiones del vFSM que parecen apropiadas para tal efecto. La

primera es una pequeña capa estocástica dentro de la isla de estabilidad primaria o resonancia principal. El perfil de condiciones iniciales que nos ayudará a estudiar la región está señalado en color rojo en la Fig. 4.11 (más aún, se la puede identificar como una banda de color naranja oscura en, e.g. la Fig. 4.7). La segunda región se encuentra adyacente a la resonancia primaria donde la población de órbitas se caracteriza por un alto grado de *stickiness*. Nuevamente el perfil de condiciones iniciales que utilizaremos para el estudio de dicha región, se encuentra identificado en la Fig. 4.11, pero en este caso en color azul.

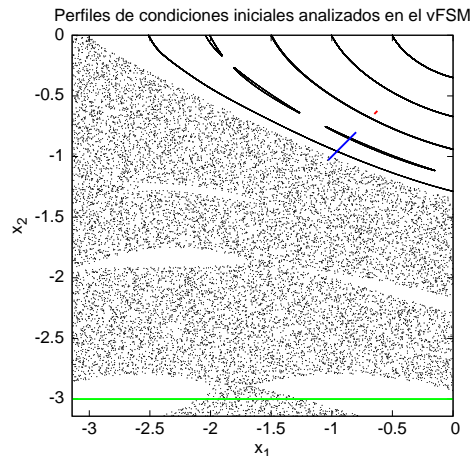


Figura 4.11: En rojo, señalamos el perfil de condiciones iniciales usado para estudiar la región caótica dentro de la resonancia principal, y en azul identificamos el perfil de condiciones iniciales tomado de la región de órbitas *sticky*. Finalmente en verde, el perfil de condiciones iniciales sobre las resonancias secundarias analizado en la Sección 4.1.4, en el mapa simpléctico vFSM.

4.1.5.1. La región caótica dentro de la resonancia principal

En esta sección estudiaremos el poder resolvente de los diferentes CIs en la región estocástica mencionada. Tomamos entonces 80 órbitas que cruzan la región a lo largo de la recta con condiciones iniciales $x_1 = x_2$ y $x_1 \in [-0,6490531, -0,6242345]$, para tener la distribución del movimiento en la capa estocástica y en su entorno inmediato. En la Fig. 4.12 presentamos la región caótica y su vecindario, detallados por los diferentes CIs. El N usado para el experimento es de 10^5 iteraciones.

El LI , el RLI y el $MEGNO(2,0)$ presentan un alto grado de coincidencia en las descripciones de la zona caótica dentro de la resonancia primaria (Fig. 4.12 paneles superiores izquierdo y derecho, y del medio a la derecha, respectivamente). Sin embargo, la D (Figs. 4.12 panel del medio, a la izquierda) exhibe una estructura que no se parece a la señalada por los otros indicadores.

El FLI no brinda información sobre los niveles de hiperbolicidad (Fig. 4.12, panel inferior derecho) debido a su alta velocidad de convergencia y al correspondiente valor de saturación, como hemos mencionado previamente. Sin embargo, el $SALI$ que tiene una tasa de convergencia para las órbitas caóticas muy similar, parece responder de forma diferente mostrando cierta estructura en la región, aunque la misma puede mezclarse con estructuras espúreas

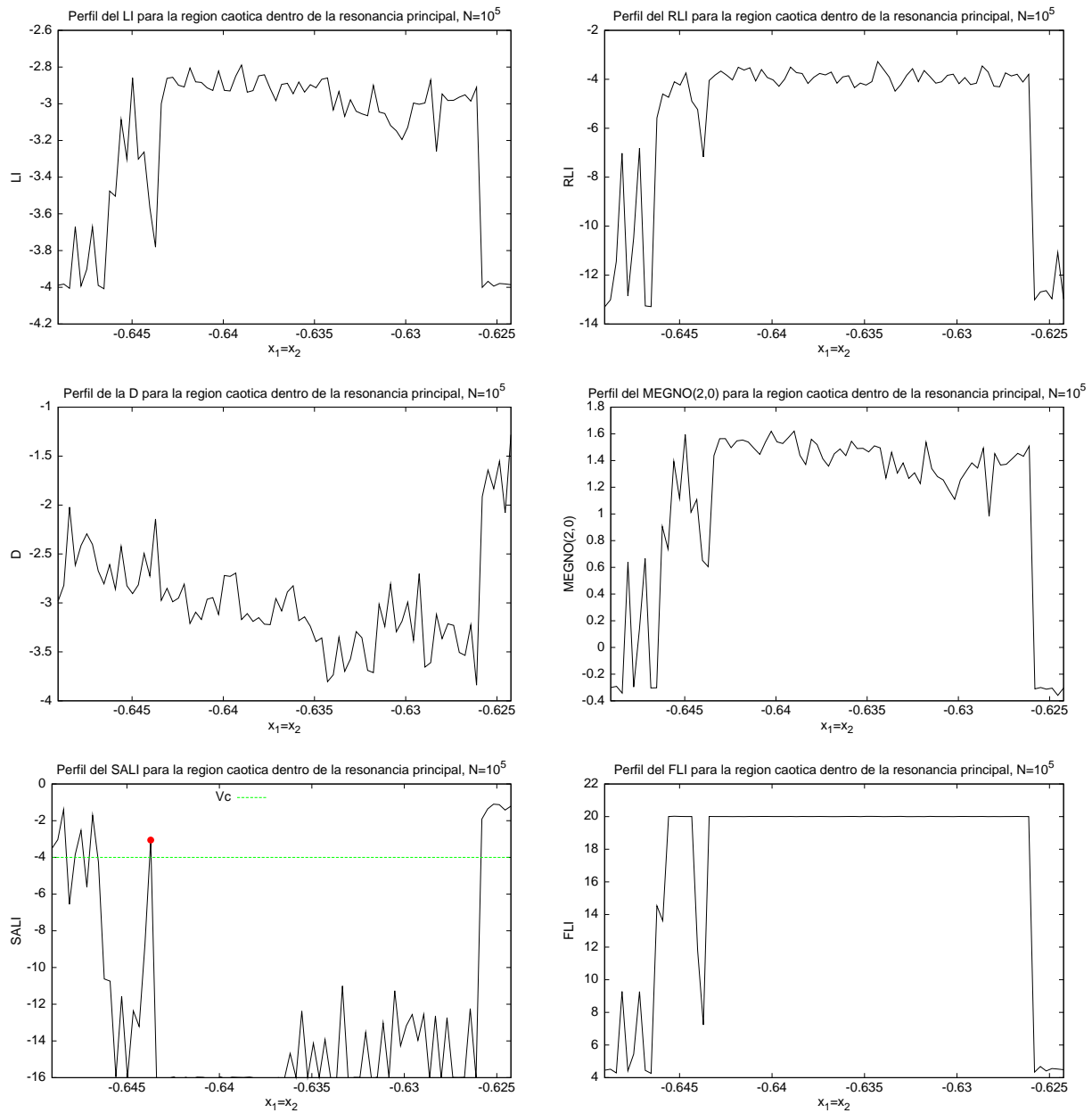


Figura 4.12: Perfiles de valores finales de los CIs a lo largo de la recta definida por $x_1 = x_2$ y $x_1 \in [-0,6490531, -0,6242345]$, que atraviesa la región caótica, para $N = 10^5$. Del panel superior izquierdo al inferior derecho: el *LI*, el *RLI*, la *D*, el *MEGNO(2,0)*, el *SALI* y el *FLI*. En el caso del *SALI* (panel inferior izquierdo), la condición inicial $x_1 = x_2 = -0,6437124$ y su V_c fueron también incluidos. Nótese la escala logarítmica para los valores de los indicadores.

(Fig. 4.12, panel inferior izquierdo). Una explicación posible podría atribuirse a que el *SALI* tiene valores muy pequeños para las órbitas caóticas, siendo éstos entonces, muy cercanos a la precisión de la máquina, lo cual favorece la aparición de estructuras espúreas.

A pesar de la aparente desventaja del *FLI* y del *SALI* en requerir valores de saturación (10^{-16} para el *SALI* y 10^{20} para el *FLI*), es posible recuperar una medida de los niveles de caoticidad por medio de una cantidad relacionada a los valores finales de estos indicadores.

Consideremos el *SALI* (aunque el procedimiento puede ser perfectamente extendido al *FLI*); luego, una alternativa natural para determinar los niveles de hiperbolicidad de las órbitas caóticas es el número de iteraciones para las cuales el CI satura, N_{sat} (ya en Froeschlé *et al.* 1997b se usó esta idea en la comparación del FLI con el método de Laskar y en Skokos *et al.* 2007 para distinguir entre movimiento caótico y regular tanto con el *GALI*₃ como con el *GALI*₄). Esto se ve claramente cuando se sigue la evolución temporal del indicador donde las órbitas caóticas alcanzan el valor de saturación (que en el caso del *SALI* es la precisión de la máquina) a diferentes N_{sat} , permitiendo entonces, distinguir entre una y otra (Fig. 4.4 panel inferior izquierdo, en la Sección 4.1.3). Luego, podemos proceder a construir un retrato usando ambas cantidades procedentes del cálculo numérico del *SALI* (valor final y N_{sat}). De hecho, para la componente regular, la estructura es claramente descrita por los valores finales del *SALI* que no saturan, pero en el caso de la componente caótica, dado que el *SALI* alcanza la precisión de la máquina, nos quedamos con el valor N_{sat} como medida de los niveles de hiperbolicidad.

En la Fig. 4.13, la pequeña región caótica dentro de la resonancia principal la describimos por medio del N_{sat} . Es fácil ver cómo esta nueva cantidad complementa la estructura perdida en el panel inferior izquierdo de la Fig. 4.12.

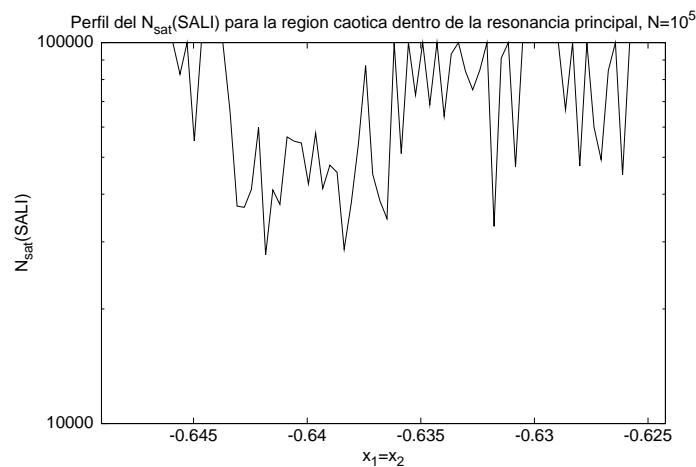


Figura 4.13: El número de iteraciones, N (en escala logarítmica), para el cual el *SALI* satura (N_{sat}) en el intervalo $x_1 \in [-0,6490531, -0,6242345]$.

Aún más, en la Fig. 4.14, presentamos un acercamiento del entorno de la isla principal de estabilidad del vFSM, dado por los valores finales del *SALI* (panel de la izquierda) y por medio de la cantidad N_{sat} (panel de la derecha). Luego, combinando ambos resultados, tendremos la componente regular descrita por los valores finales del *SALI*, y la componente caótica bien determinada por los N_{sat} .

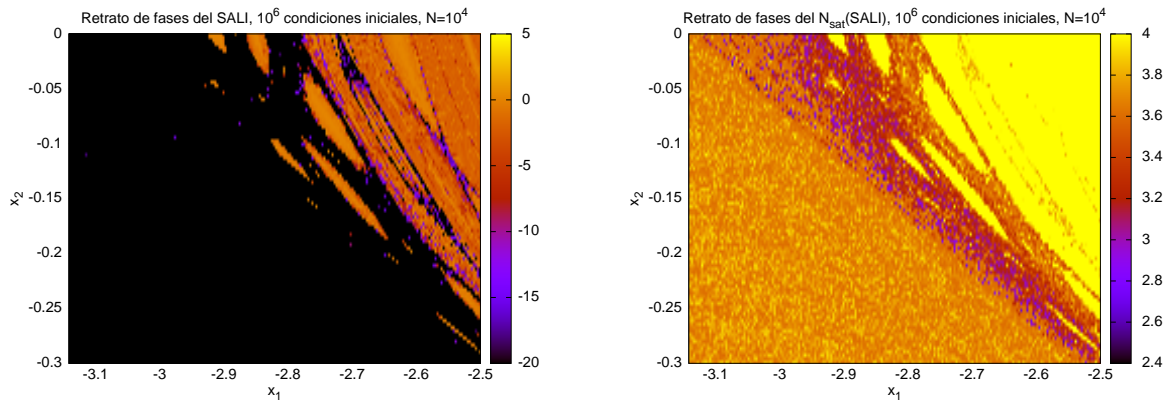


Figura 4.14: Panel izquierdo: los valores finales del *SALI* a 10^4 iteraciones, acercamiento del ν FSM en la vecindad de la isla principal de estabilidad (originalmente descrita por 10^6 condiciones iniciales), en escala logarítmica. Panel derecho: N_{sat} para las mismas condiciones iniciales del panel inferior izquierdo, también en escala logarítmica el valor del indicador.

En consecuencia, considerar ambas cantidades obtenidas directamente del cálculo numérico del *SALI*, léase los valores finales y el N_{sat} , representa ciertamente una mejora para el análisis de muestras grandes de órbitas por medio de este indicador.

Finalmente, existe una órbita con condición inicial $x_1 = x_2 = -0,6437124$ (la señalada en el panel inferior izquierdo de la Fig. 4.12, localizada justo por encima del V_c asociado al *SALI*: 10^{-4} , también incluido en la figura) que sorpresivamente toda técnica clasifica como caótica salvo el *SALI*.

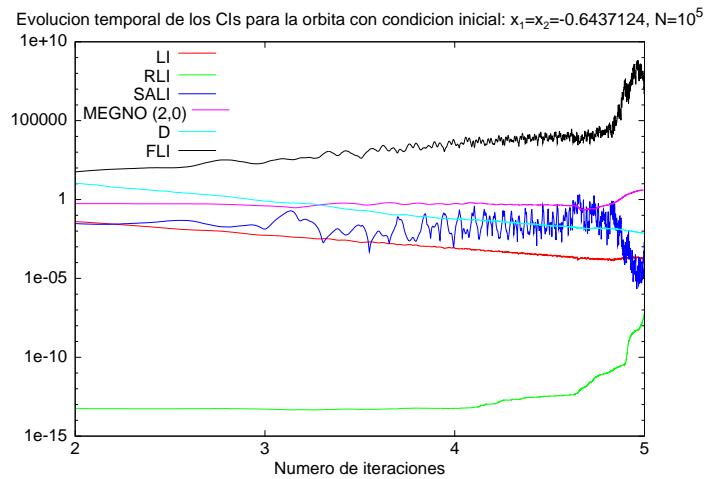


Figura 4.15: Evolución temporal de cada uno de los CIs para la órbita caótica de tipo *sticky* con condición inicial $x_1 = x_2 = -0,6437124$ (el número de iteraciones en escala logarítmica).

De la Fig. 4.15, donde se presenta la evolución de cada CI, es fácil ver que esta órbita

tiene un alto grado de *stickiness*, probablemente debido a su proximidad a una resonancia de alto orden. El *SALI* se comporta de una forma similar que para una órbita caótica hacia el final de las iteraciones (curva de color azul), como el resto de los indicadores. Sin embargo, el valor final alcanzado queda por encima del V_c asociado. Luego, para esta órbita particular, es necesario seguir la evolución temporal del indicador para clasificarla correctamente por medio del *SALI*, o eventualmente, ajustar el V_c del mismo.

Este último resultado reafirma el hecho que el V_c independiente del tiempo empíricamente dado por Skokos *et al.* (2004) y usado en este trabajo para el *SALI*, es una excelente opción para estudios de muestras estadísticas, pero que debe ser elegido con mayor cuidado cuando se trabaja con muestras pequeñas de órbitas dentro de escenarios de dinámica compleja.

Luego en este experimento, la D fue el único indicador que estuvo un paso por detrás en los rendimientos generales.

4.1.5.2. La región dominada por órbitas *sticky*, adyacente a la resonancia principal

Hay una región, adyacente a la resonancia principal, que está densamente poblada por órbitas caóticas de tipo *sticky*. Esta clase de órbitas son las más difíciles de caracterizar por cualquier indicador. Con el propósito de estudiar esta región particular, tomamos una muestra de ~ 760 órbitas que cruzan los alrededores de la resonancia (a lo largo de la identidad, i.e. $x_1 = x_2$, dentro del intervalo $x_1 \in (-1,03, -0,8)$, véase la Tabla 4.5 para condiciones iniciales de tres órbitas representativas).

En la Fig. 4.16, la zona mencionada es descrita por medio de los valores finales de los distintos CIs para 10^5 iteraciones. También señalamos los valores finales correspondientes a las tres órbitas de la Tabla 4.5, siendo dos de ellas caóticas (una de las cuales es de tipo *sticky*) y la otra regular. Los V_c conocidos fueron incluidos en las figuras.

Carácter de la órbita	$x_1 = x_2$	x_3	x_4
Caótica	-1.021646	0.5	0
Caótica (<i>sticky</i>)	-0.966354	0.5	0
Regular	-0.8896991	0.5	0

Tabla 4.5: Tabla con las condiciones iniciales de las tres órbitas seleccionadas en la zona adyacente a la resonancia principal.

En primer lugar, los picos y valles observados en la Fig. 4.16 se corresponden con capas estocásticas y resonancias (lo cual se confirma con los retratos de los espacios de fases), luego, todos los indicadores parecen tener buenos rendimientos al describir en forma global, el espacio de fases de la región bajo análisis (e.g. véase el acuerdo entre todos los CIs en la descripción de la estructura observada en $x_1 = x_2 \sim -0,85$, la cual se corresponde con una isla de estabilidad de alto orden con su separatriz).

En la Fig. 4.16, panel superior izquierdo, presentamos la descripción de la región, dada por el *LI*. Los valores finales de las órbitas dentro del mar caótico están cerca del valor 10^{-2}

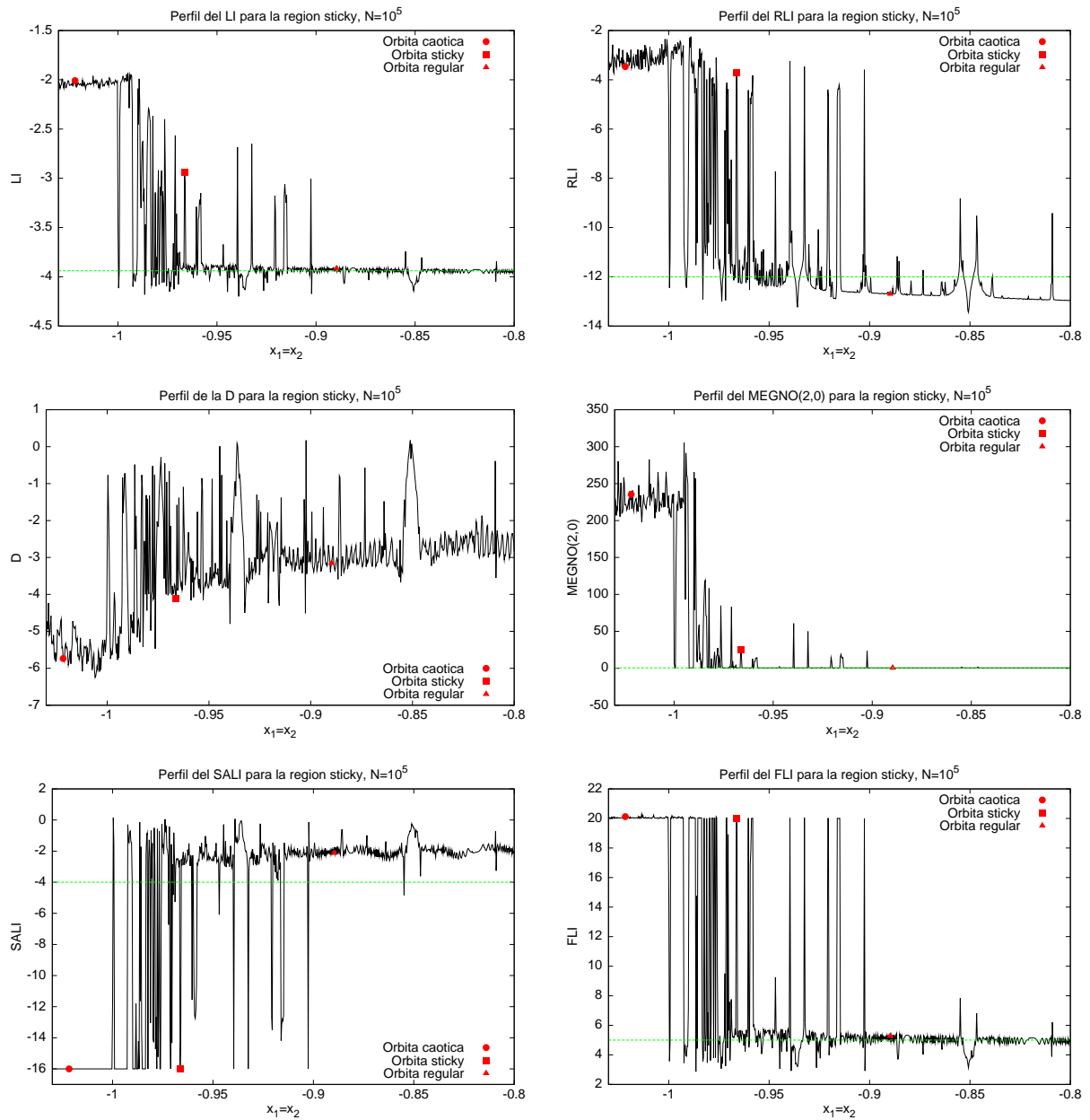


Figura 4.16: Ampliación de la región *sticky* dentro del intervalo $x_1 = x_2$ con $x_1 \in (-1,03, -0,8)$ (véase el texto para mayores detalles). Los valores de corte para 10^5 iteraciones también se incluyen. En escala logarítmica excepto para el *MEGNO*(2,0).

(del lado izquierdo de la figura, donde encontramos la órbita caótica con condiciones iniciales en la Tabla 4.5). Al lado de esta zona, observamos una región con órbitas de tipo *sticky*, descrita como una estructura bastante complicada donde se alternan picos y valles (la órbita caótica de tipo *sticky* seleccionada para el estudio posterior se encuentra en esta región). Y finalmente, del lado derecho de la figura, las órbitas presentan un valor casi constante

de 10^{-4} (lo cual muestra consistencia con el V_c asociado, pero como se había mencionado, se observa también que un ajuste empírico del mismo sería recomendable para mejorar las clasificaciones) correspondiente al valor alcanzado a 10^5 iteraciones por las órbitas regulares, en este caso por aquéllas dentro de la isla de estabilidad primaria (donde ubicamos a la órbita regular de la Tabla 4.5). Algunas resonancias menores también se observan en esta región (e.g. $x_1 = x_2 \sim -0,85$).

En el panel superior derecho de la Fig. 4.16 presentamos la descripción dada por el *RLI*. La principal diferencia con aquélla mostrada por el *LI* es el rango en el cual se encuentran los valores finales del CI. Los valores del *LI* se encontraban entre 10^{-4} y 10^{-2} . En el caso del *RLI*, este intervalo de valores finales se ve extendido desde valores menores a 10^{-12} (que es el valor tomado como V_c del indicador) a valores por encima de 10^{-3} . Esta característica parece ser apropiada para descompactar la información. Sin embargo, dado que esto se logra por una alta velocidad de convergencia, puede no ser del todo conveniente (una desventaja general de todos los CIs con velocidades de convergencia muy altas). Por ejemplo, algunas de las órbitas tomadas en la región *sticky* tienen valores finales idénticos a las órbitas caóticas encontradas en el mar caótico, hecho que oculta entonces los diferentes niveles de hiperbolicidad de las órbitas de la región (tal es el caso para las órbitas elegidas caótica y caótica de tipo *sticky*), dificultad que es sorteada, e.g., por el *LI* como se ve en la Fig. 4.16, panel superior izquierdo.

A pesar de esta aparente desventaja en la falta de distinción de los niveles de hiperbolicidad en regiones de dinámica compleja dada su alta velocidad de convergencia para todo el dominio caótico, el *RLI* tiene un buen rendimiento en revelar rápidamente la estructura del espacio de fases, y por ende, las características globales del sistema.

En el caso de la *D*, la clasificación de las tres órbitas seleccionadas (Fig. 4.16, panel del medio a la izquierda) coincide con los resultados obtenidos por los demás indicadores, pero el espectro de los valores finales no es claro como el de los primeros, debido a una menor habilidad en separar los niveles de caoticidad. De hecho, la distinción de la región *sticky* es bastante confusa y la componente regular asociada a la resonancia principal (lado derecho de la figura), muestra grandes oscilaciones de una órbita a otra.

Los resultados para el *MEGNO*(2,0) están de acuerdo con el *LI* respecto a las órbitas caóticas y aquéllas con algún grado de *stickiness* (Fig. 4.16, panel derecho, en el medio), por lo que el indicador no agrega mayor información para esta componente de lo que ya nos ofrecía el *LI*. En el caso de la componente regular, las órbitas tienen valores muy cercanos al V_c fijo de 0,5, debido al carácter asintótico del último. Los niveles de estabilidad que el indicador muestra por medio de las evoluciones temporales (véase Sección 4.1.3) están completamente ausentes aquí al usar tan sólo los valores finales, por lo que no se ve ningún tipo de estructura dentro de las resonancias de menor orden.

El *SALI* y el *FLI* alcanzan perfiles similares (Figs. 4.16, panel inferior izquierdo para el *SALI* e inferior derecho para el *FLI*). Las órbitas caóticas pertenecientes al mar caótico, en el lado izquierdo de las figuras, alcanzan los niveles de precisión de la máquina, i.e. 10^{-16} para el *SALI*, o el valor de saturación (10^{20}) para el *FLI*. También con estos CIs, la región *sticky* resulta evidente. Los valores finales del *SALI* como los valores finales del *FLI* para las órbitas caótica y *sticky* son los mismos porque ambas órbitas llegan a los valores de saturación para cada CI (recordar lo que se mencionaba para el caso del *RLI*, dada su alta velocidad de convergencia). Un ajuste del V_c del *FLI* puede ser apropiado para separar mejor los elementos

de la componente regular (véase por ejemplo la localización de la órbita regular para este CI y compárese con lo mostrado por el *SALI* para este N extremadamente largo).

En la Fig. 4.17 mostramos la evolución temporal de los CIs para las órbitas *sticky* y regular antes seleccionadas (para el comportamiento de los CIs en el caso de órbitas caóticas, referirse a la Sección 4.1.3). Todos los CIs identifican correctamente el carácter de dichas órbitas, separando la órbita caótica de tipo *sticky* de la órbita regular, después de un número similar de iteraciones. Luego, este experimento refuerza la hipótesis que no hay mayores diferencias entre los indicadores cuando es posible seguir la evolución temporal de los mismos, por ende no hay mayores diferencias en la descripción de la órbita *sticky* a pesar del nivel de complejidad de la misma: casi todos los CIs se comportan de la misma manera.

Cuando se trata de los valores finales de los CIs para las órbitas *sticky*, sabemos que la alta velocidad de convergencia juega en contra del nivel de descripción, dado que les permite saturar como al resto de las órbitas caóticas, no ofreciendo diferencias entre unas y otras. Sin embargo, el N_{sat} permite que el *SALI* y el *FLI* sorteen dicha desventaja.

Por supuesto que es aconsejable tener primero cierto conocimiento de la región, lo cual se puede lograr, e.g., por medio de curvas evolutivas temporales de los CIs para una pequeña muestra de órbitas[§] y así calibrar los parámetros que utilizan los CIs. De esta manera se puede conocer mejor qué tipo de respuesta se espera de los CIs e interpretar adecuadamente sus resultados cuando se los aplique a las órbitas que no son de prueba, e.g., estimando los tiempos de saturación más grandes para las órbitas caóticas de distintos dominios estocásticos y así no confundirlas con los elevados tiempos de saturación observados en las *sticky*. Esto es, si observáramos tiempos de saturación más largos que los encontrados para las órbitas caóticas de los distintos dominios estocásticos, serían indicios de cierto nivel de *stickiness* en las órbitas caóticas. Sin embargo, es claro que para obtener resultados sólidos, este tipo de situaciones requieren de análisis más exhaustivos.

El *LI* y el *MEGNO(2,0)* por medio de sus valores finales, tienen una manera natural de distinguir las órbitas caóticas con cierto grado de *stickiness*. Mientras que el *RLI*, el *SALI* y el *FLI* no lo tienen. Sin embargo, para el *SALI* y el *FLI*, los tiempos de saturación, N_{sat} , funcionan como medida para recuperar esa información.

4.1.6. Dependencia con los parámetros: la D y el *RLI*

Los únicos CIs del paquete utilizado que dependen fuertemente de un ajuste previo son: la D que necesita de la configuración de los histogramas para su cómputo, y el *RLI*, que necesita de la separación inicial entre la órbita de referencia y su “sombra” (Sándor *et al.* 2004). Dado que estamos viendo los rendimientos de cada uno de los CIs, resulta particularmente interesante estudiar este tipo de dependencias.

En los artículos de Voglis *et al.* (1999) y Skokos (2001) existe una discrepancia entre los rendimientos dados para la D , lo cual amerita cierta revisión. Ellos analizaron un sistema dinámico compuesto por dos mapas estándar acoplados, donde existe un caso conocido de caos muy moderado (órbita A3 como la han llamado los autores en Voglis *et al.* 1999).

Las ecuaciones para el mapa que mencionamos son (mod 1):

[§]Es siempre más recomendable trabajar con un grupo de órbitas próximas con el propósito de tener los valores medios de los CIs como los valores representativos de la región, que trabajar con una órbita individual y usar sus valores como los característicos de la zona, ver Sección 3.4.

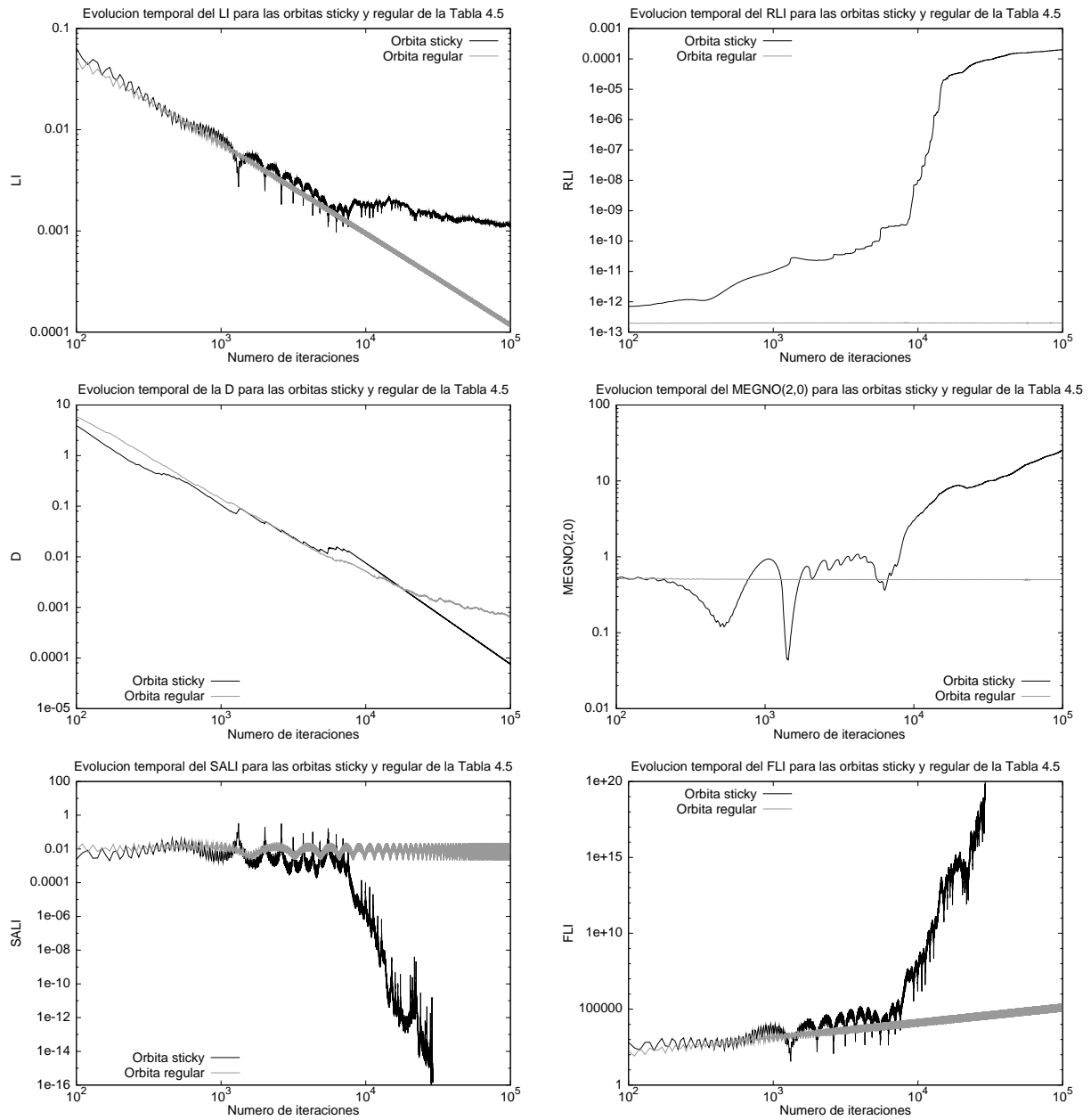


Figura 4.17: Evolución temporal de los CIs para las órbitas *sticky* (curva en negro) y regular (curva en gris). Número de iteraciones en escala logarítmica. Véase el texto para mayores detalles.

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= x_1 + x'_2 \\
 x'_2 &= x_2 + \frac{K}{2\pi} \sin[2\pi \cdot x_1] - \frac{\beta}{\pi} \sin[2\pi(x_3 - x_1)] \\
 x'_3 &= x_3 + x'_4 \\
 x'_4 &= x_4 + \frac{K}{2\pi} \sin[2\pi \cdot x_3] - \frac{\beta}{\pi} \sin[2\pi(x_1 - x_3)]
 \end{aligned}$$

con $K = 3$, y $\beta = 0,1$ o $\beta = 0,3051$.

Aquí, las órbitas A2 (regular) y A3 (caótica pero con bajo $LLCE$, véase Voglis *et al.* 1999 para mayores detalles) son estudiadas por medio del paquete entero de CIs, usando exactamente los mismos parámetros que Voglis *et al.* (1999), i.e. los mismos i.d.v. y el mismo N .

Los resultados obtenidos para la D , coinciden con los dados por los autores en Voglis *et al.* (1999), i.e., este CI resulta ser el más rápido en separar la órbita caótica de bajo $LLCE$, de la regular. Sin embargo, en Skokos (2001) donde los autores estudiaron el mismo conjunto de órbitas, la conclusión respecto a la D es diferente (compárese los paneles izquierdo y derecho de la Fig. 4.18). La razón para tal discrepancia se basa en la particular elección de los i.d.v. La selección hecha por Voglis. *et al.* (1999) explota al máximo la velocidad de convergencia de la D , pero para el propósito del presente estudio, la manera más objetiva de comparar rendimientos es usando una elección azarosa de los mismos. De hecho, haciendo esto, la D tiene una velocidad de convergencia similar a la del resto de los CIs del paquete.

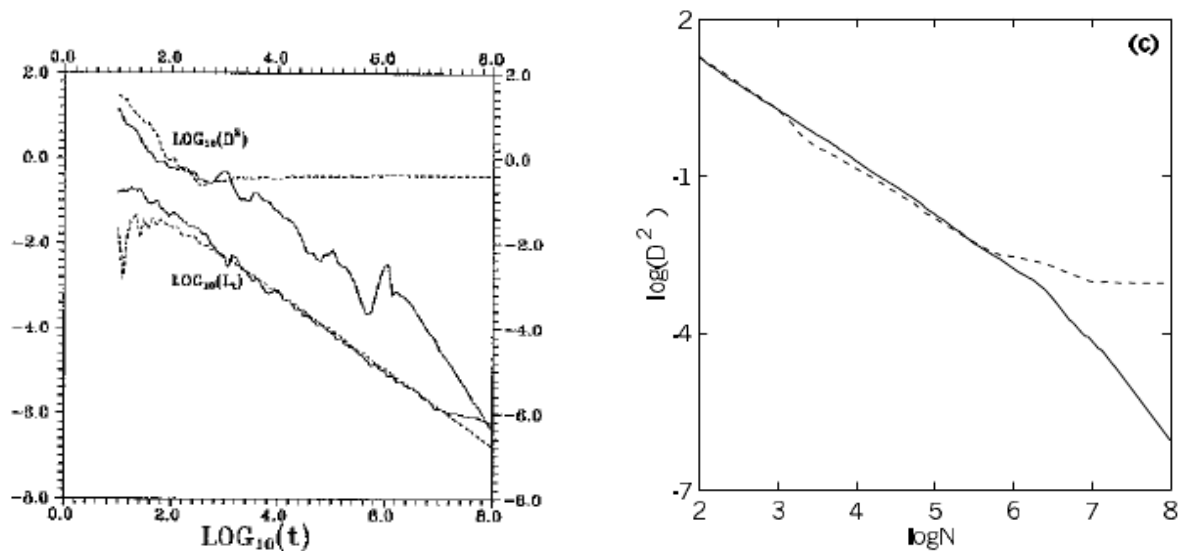


Figura 4.18: Panel izquierdo: evolución temporal del LI y de la D para las órbitas A2 (línea a trozos) y A3 (línea sólida), en escala logarítmica (figura tomada de Voglis *et al.* 1999). Panel derecho: ídem panel izquierdo, pero en este caso sólo para la D (figura tomada de Skokos *et al.* 2001).

En el panel de la izquierda de la Fig. 4.19, tenemos las órbitas A2 y A3 calculadas numéricamente usando dos pares de i.d.v., i.e., los elegidos por Voglis *et al.* (1999), v_{vc2} : (1,1,1,1) y (2,2,1,1); y los elegidos por Skokos (2001), v_{s2} : (1,1,1,1) y (1,2,1,2). Es fácil de ver que la particular elección de Voglis *et al.* (1999) acelera la distinción de las órbitas por medio de la D en dos órdenes de magnitud (la órbita A2 se estabiliza para $\sim 5 \times 10^3$ y para $\sim 5 \times 10^5$ iteraciones respectivamente, nótese las flechas en la Fig. 4.19, panel de la izquierda, las cuales señalan las separaciones correspondientes a cada elección de los i.d.v.).

Como hemos visto, la D parece proveer de información muy valiosa si uno sabe ajustar apropiada y eficientemente los i.d.v., lo cual no es sencillo. Sin embargo, para hacer esto de manera de obtener un resultado óptimo, se necesita algo de conocimiento previo de la

dinámica. Dada la diferencia de rendimientos causada por la diferente elección de los i.d.v., es interesante cuantificar la sensibilidad de la D con su parámetro libre, para conocer en qué grado también puede afectar la caracterización de las órbitas.

El $Nbin$ es el número de celdas usadas en la construcción de los histogramas para la determinación de los $SSNs$ y por ende, de la D . Una alta sensibilidad a la variación del $Nbin$ es claramente observada en el panel de la derecha de la Fig. 4.19: cuanto más chico el $Nbin$ tomado para el cálculo numérico de los histogramas, más rápida la distinción entre la órbita regular (A2) y la levemente caótica (A3), lo cual es razonable ya que uno tiene más puntos en cada celda y entonces, las diferencias en las curvas se ven amplificadas.

Los experimentos llevados a cabo nos dan idea de que 10^2 puntos por celda es una buena estimación para el $Nbin$ (luego, e.g., para 10^5 iteraciones, un $Nbin = 10^3$ es un valor apropiado, y consecuentemente, fue el utilizado para reproducir confiablemente los resultados de Voglis *et al.* 1999 y de Skokos, 2001).

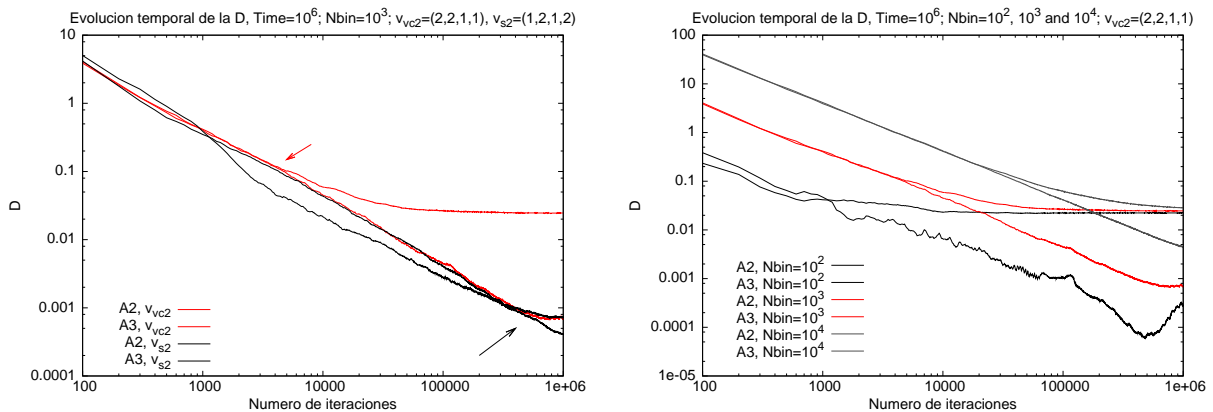


Figura 4.19: Rendimientos de la D usando los pares de i.d.v. seleccionados por Voglis *et al.* (1999) (v_{vc2}) y por Skokos (2001) (v_{s2}) para el mismo par de órbitas con la correspondiente separación entre ambas señalada por las flechas (panel de la izquierda). Variación de la D con el $Nbin$ para las órbitas A2 y A3 (panel de la derecha). Número de iteraciones en escala logarítmica.

El RLI tiene también un parámetro libre: la separación inicial entre la órbita de referencia y su “sombra”, la cual debe ser elegida previamente (véase Sándor *et al.* 2004). Entonces, como hicimos con la D , evaluamos la dependencia del indicador con el parámetro mencionado.

La separación inicial no afecta significativamente los valores finales del RLI en el caso de órbitas caóticas, pero si en el caso de la componente regular. La manera en que la separación inicial afecta los valores finales del RLI para el caso de las órbitas regulares obedece el análisis ya hecho por Sándor *et al.* (2004), donde los autores concluyen que la correspondencia es lineal. Sin embargo, hace falta una pequeña aclaración al respecto.

En la Fig. 4.20 presentamos la variación de los valores finales del RLI para dos órbitas regulares, una condicionalmente periódica, en el panel de la izquierda y otra regular pero cercana a un objeto de naturaleza hiperbólica (de acuerdo a un LI convergente), en el panel de la derecha, y para distintos números de iteraciones.

En ambos casos, el N influye ligeramente en la pendiente de las curvas si la separación inicial elegida es pequeña, i.e., por debajo del valor 10^{-12} . Sin embargo, si el V_c tiene que

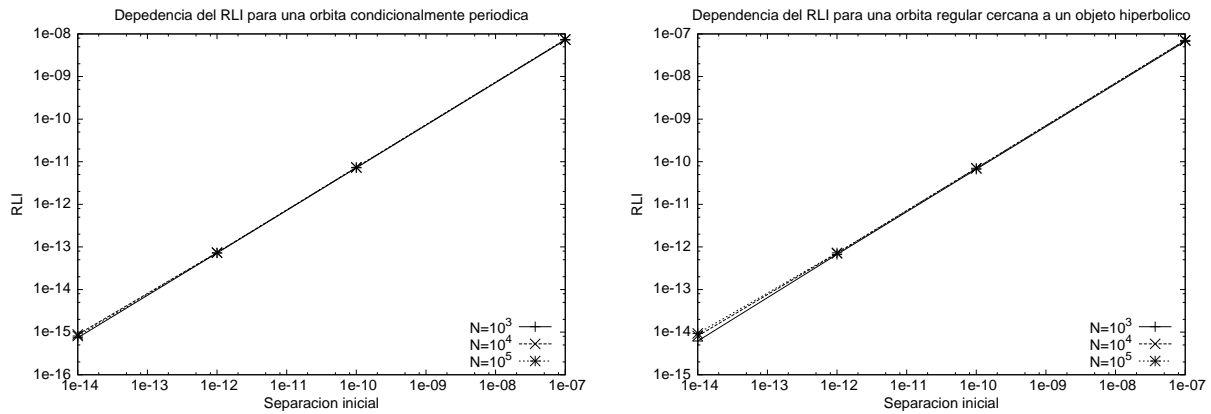


Figura 4.20: Dependencia de los valores finales del RLI con el parámetro de la separación inicial para dos órbitas regulares y para diferentes N . En el panel de la izquierda, una órbita condicionalmente periódica, y en el de la derecha una órbita regular pero cercana a un objeto hiperbólico.

ser determinado, la proximidad a un objeto hiperbólico afecta al indicador en un orden de magnitud (compárese ambos paneles de la Fig. 4.20). Esto es, si se decide comenzar el cálculo numérico del RLI con una separación inicial de 10^{-12} , la relación mostrada en la Fig. 4.20 (panel de la izquierda) nos dice que una buena estimación para el V_c sería de 10^{-13} , luego toda órbita con un valor final del RLI por encima de 10^{-13} sería clasificada como caótica. Por otro lado, si consideramos la órbita que pasa cerca de un objeto hiperbólico, la relación asociada muestra que para una separación inicial de 10^{-12} el V_c debiera ser de 10^{-12} , y sólo aquellas órbitas con valores finales del RLI por encima de 10^{-12} serían consideradas caóticas. Luego, tomando el primer V_c , 10^{-13} , podríamos clasificar erróneamente el carácter de órbitas regulares que pasan cerca de algún objeto hiperbólico. Por ende, la relación lineal que existe entre el V_c y la separación inicial en el intervalo sugerido por Sándor *et al.* (2004), debiera ser evaluada con órbitas regulares que, *a priori*, se conocen cercanas a algún objeto hiperbólico y entonces, se evitaría clasificarlas como caóticas.

En nuestro caso, el V_c seleccionado y usado en los experimentos de esta Sección 4.1 fue de 10^{-12} (en cambio, en la Sección 4.2, usamos el valor 10^{-10}) y el rendimiento del indicador resultó satisfactorio. De todas maneras, en la Sección 4.1.3, en el panel superior izquierdo de la Fig. 4.4, encontramos una órbita regular por encima del V_c . Esto puede ser explicado dada la enorme proximidad de la última a una capa estocástica.

Entonces, un proceso de naturaleza iterativa sobre varios ejemplos de órbitas regulares próximas a objetos hiperbólicos, sería la manera recomendable de calibración del parámetro, hasta que el nivel de precisión requerido sea alcanzado en las descripciones del RLI .

4.1.7. Discusión

Cada método tiene sus ventajas y desventajas, entonces la conclusión inmediata es que resulta altamente recomendable usar diferentes técnicas y no simplemente una. Sin embargo, el objetivo de este trabajo es ir un poco más allá y encontrar una CIsF (ya mencionada en el

Prefacio, i.e. una función de indicadores que represente la forma más eficiente de recolección de información dinámica) para cualquier mapa. Para ello, resumiremos el estudio hecho sobre el vFSM a través de los indicadores que resultaron más ventajosos en el trabajo, explicando las razones de cada una de nuestras elecciones. La CIsF usada en esta Sección 4.1 para el vFSM, puede tomarse como primera aproximación para el estudio de cualquier otro mapa.

Con el propósito de emplear los excelentes rendimientos mostrados por el *RLI* para muestras grandes de órbitas y N largos, primero necesitamos calibrar correctamente la relación entre, la separación inicial de la órbita de referencia y su “sombra” (que debiera ser lo suficientemente grande como para evitar dificultades numéricas, pero a la vez suficientemente pequeña como para describir correctamente la dinámica del problema, véase Sándor *et al.* 2004) y el V_c empírico del indicador. Para hacer esta calibración, resulta fundamental contar con órbitas que describan desde movimiento condicionalmente periódico hasta movimiento caótico, ya que cuanto mayor sea la variedad de movimientos en la calibración, más sólida será la misma. Tener un buen número de órbitas regulares con algún rasgo de inestabilidad es fuertemente recomendable, ya que como vimos (Sección 4.1.6), este tipo de órbitas son las de mayor influencia en la variación del parámetro libre.

Primero entonces, necesitamos localizarlas. Por ende, una rápida mirada global del espacio de fases del sistema sería un buen primer paso y un indicador expeditivo con un V_c teórico (el cual funciona como una buena primera aproximación del V_c óptimo, generalmente obtenido luego de un ajuste empírico) pareciera ser la mejor opción para la tarea. De acuerdo con la Sección 4.1.2, el *FLI* tiene un V_c teórico dependiente del tiempo que parece servir eficientemente para la situación planteada (gran cantidad de órbitas para analizar y pocas iteraciones disponibles, véase la discusión respecto a la velocidad de convergencia del *FLI* en la Sección 4.1.4, donde el indicador muestra muy buenos resultados con bajos N , debido principalmente a la versatilidad de su V_c dependiente del tiempo).

Luego de una primera mirada al retrato del espacio de fases por medio del *FLI* usando pocas iteraciones, es posible seleccionar órbitas de prueba en diferentes regiones para así poder calibrar el V_c empírico del *RLI* para usarlo en la CIsF. Elegimos algunas órbitas cercanas a la capa estocástica dentro de la resonancia principal (con el objetivo de tener órbitas regulares con algún grado de inestabilidad), y también de la zona poblada con órbitas caóticas de tipo *sticky* que bordean la isla de estabilidad primaria (para poder fijar los parámetros que permitan distinguirlas del resto de las órbitas caóticas y así mejorar la descripción de la componente estocástica del sistema). Obviamente, órbitas caóticas del mar caótico y órbitas condicionalmente periódicas que pasan cerca de algún objeto elíptico también fueron incluidas en la muestra de prueba. De todas formas, ninguno de estos dos últimos grupos juega un papel trascendente en el ajuste (Sección 4.1.6) que queremos aplicarle al V_c del *RLI*. Los indicadores seleccionados para este estudio individual de órbitas son el *MEGNO*(2,0) y el *SALI*. Ambos tienen diferentes maneras de identificar el movimiento cuando es caótico o regular (véase Sección 4.1.3), lo cual hace del proceso de diferenciamiento entre regímenes, más sencillo y rápido. Por otro lado, ambos CIs proveen buenos resultados cuando se trata de revelar por medio de las curvas de evolución temporal, la naturaleza de las órbitas caóticas con algún grado de *stickiness*. El N_{sat} del *SALI* resulta fundamental para la tarea. El hecho de usar al *SALI* sólo a través de las curvas de evolución temporal para el análisis individual de órbitas, evita el riesgo de librar la clasificación de órbitas de variada complejidad, al criterio de su V_c empírico (véase la Sección 4.1.4 y la Sección 4.1.5), y además, seguimos conservando todas las ventajas del *SALI*.

Finalmente, con las órbitas de prueba ya clasificadas confiablemente por el *MEGNO*(2,0)

y el *SALI*, y la separación inicial usada para el *RLI* de 10^{-12} (el cual es un valor satisfactorio para la mayoría de las situaciones dinámicas que se puedan presentar, véase Sándor *et al.* 2004), podemos proceder a calibrar el *RLI*. Una buena aproximación para el V_c del *RLI* resulta ser 10^{-12} (aunque un V_c de 10^{-11} podría ser aún mejor). Más aún, el proceso iterativo podría continuar hasta encontrar el nivel de precisión deseado en la descripción de la muestra, tomando órbitas regulares cada vez más cercanas a estructuras hiperbólicas y así ir “levantando” el V_c .

Ahora bien, gracias a un V_c bien definido y un buen poder resolvente, el *RLI* se perfila como la mejor opción cuando se trata de estudiar muestras estadísticas de órbitas (véase Secciones 4.1.2 y 4.1.4). Podemos entonces, una vez más, hacer un análisis global del retrato del espacio de fases, pero ahora para N lo suficientemente grande como para asegurar la convergencia del indicador. Además, no tiene necesidad de un valor de saturación para las órbitas caóticas, por lo que los niveles de hiperbolicidad pueden ser descriptos con los valores finales del indicador (recordemos que este nivel de descripción puede ser también logrado con el *FLI* o el *SALI* gracias a la cantidad N_{sat}). Y el grado de detalle para la componente regular por medio de los valores finales es mayor que el obtenido por los otros métodos usados en esta Sección 4.1 (véase la Sección 4.1.4).

Primera aproximación de la CIsF.

Resumiendo, la CIsF para el vFSM (y probablemente una buena primera aproximación para cualquier mapa) está compuesta por el *FLI* (usando los valores finales y el N_{sat}) para una rápida identificación de las regiones de dónde tomar órbitas de prueba para calibrar el *RLI*. El *MEGNO*(2,0) y el *SALI* (con el correspondiente N_{sat}) resultan apropiados para el análisis individual de las órbitas seleccionadas a través de las curvas de evolución temporal, o para otros casos particulares que resulten de interés. Y por último por el *RLI* por medio de sus valores finales, para estudiar el espacio de fases usando muestras grandes de órbitas y en regímenes más estables, lo que implica iteraciones más largas.

Dos restricciones obvias para la precedente CIsF son: la naturaleza iterativa de los mapas y el número de indicadores considerado. Para salvar la primera restricción, el trabajo se extiende en la siguiente Sección 4.2 a flujos Hamiltonianos simples. Para la segunda restricción, seguiremos agregando a los indicadores variacionales precedentes, i.e.: el *LI*, el *RLI*, el *MEGNO*, la *D*, los *SSNs*, el *SALI*, y el *FLI*, indicadores más recientes como el *GALI* y el *OFLI* (que no son más que actualizaciones del *SALI* y del *FLI*, respectivamente, Sección 4.2), el $OFLI_{TT}^2$ y el *APLE*, y como indicador espectral, el *FMFT* (Capítulo 5).

4.2. Aplicación a flujos Hamiltonianos simples[¶]

4.2.1. Introducción

En la Sección 4.1 hicimos una comparación de distintos CIs en mapas simplécticos, donde incluimos el *LI*, el *RLI*, el *FLI*, el *MEGNO*, los *SSNs*, la *D* y el *SALI*. En cambio, en la presente Sección 4.2 el objetivo es extender la comparación, como ya hemos adelantado, y

[¶]Los resultados incluidos en esta sección forman parte de un trabajo de revisión recientemente aceptado en el *International Journal of Bifurcation and Chaos*, ver Darriba *et al.* (aceptado).

por ende comenzamos agregando el *OFLI* (Fouchard *et al.* 2002 y Sección 2.2.6) y el *GALI* (Christodoulidi & Bountis 2006; Skokos *et al.* 2007; Carpintero 2008; Manos *et al.* 2011 y Sección 2.2.5), i.e., actualizaciones del *FLI* y del *SALI*, respectivamente. Además, buscando generalizar los escenarios y así obtener una CI_{SF} lo más versátil posible, en esta sección nos ocuparemos de flujos Hamiltonianos simples, léase el potencial de Hénon y Heiles (de aquí en más, Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$; Hénon & Heiles 1964). La elección se debe principalmente a que el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ fue utilizado muchas veces como modelo de prueba para la evaluación de CIs, más aún, muchos de estos indicadores fueron estudiados tan sólo en dicho modelo. Dejaremos recién para el último Capítulo, retomar el análisis de un flujo Hamiltoniano más realista y complejo.

Luego, en esta segunda parte del Capítulo 4, usaremos el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ para encontrar una primera aproximación de CI_{SF} para estudiar un flujo Hamiltoniano general (de manera análoga a como lo hicimos para el caso de mapas simplécticos en la Sección 4.1). Entonces, en la Sección 4.2.2 comenzaremos estudiando la solidez de los V_c para los distintos CIs seleccionados. Para ello, computamos nuevamente el número de órbitas caóticas dado por cada CI (y su correspondiente V_c), examinando la variación de esta componente cuando se aplican pequeños cambios a los V_c , simulando un ajuste empírico de los mismos. En la Sección 4.2.3, comparamos los rendimientos de los indicadores de acuerdo a determinados aspectos no considerados en la Sección 4.1, como e.g. la dependencia con los i.d.v. y la identificación de órbitas periódicas. La información es reunida a través de las curvas de evolución temporal de los indicadores, dado que la muestra a analizar es pequeña. El poder resolvente de los CIs lo analizamos en la Sección 4.2.4 donde la comparación de las distintas técnicas se realiza por medio de los valores finales y por ende, podemos tomar muestras grandes de órbitas. Si bien aquí no usaremos muestras de 10^6 condiciones iniciales como habíamos tomado en el caso de mapas, el número sigue siendo elevado: $\sim 10^5$ órbitas, dado que ahora estamos integrando ecuaciones diferenciales y no iterando como en el caso anterior. Finalmente, los tiempos de CPU, otro aspecto no considerado en la Sección 4.1 para mapas, se tratará en la Sección 4.2.5, además de las ventajas del uso de valores de saturación. Discutimos los resultados en la Sección 4.2.6.

4.2.2. Solidez de los valores críticos

Como en la Sección 4.1.2, comenzaremos con el análisis de los V_c de los diferentes CIs. Hemos de realizarlo sobre el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ como ya mencionamos, y sobre la superficie de energía definida por el valor constante $h = 0,118$, la cual resulta interesante dado que existe un toro KAM que separa a las órbitas de período cinco de la región caótica. Adoptamos una muestra de 125751 condiciones iniciales tomadas en la región definida por $x = 0$, $y \in [-0,1 : 0,1]$ y $p_y \in [-0,05 : 0,05]$. La región se encuentra señalada con un recuadro rojo en el panel izquierdo de la Fig. 4.21, en el panel derecho mostramos una ampliación de la misma.

Recordemos que el bien conocido modelo 2D de $H\mathcal{E}H$ puede describirse por medio del Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 \cdot y - \frac{1}{3} y^3$$

donde x, y, p_x, p_y son las usuales variables del espacio de fases.

Usaremos la siguiente configuración para los experimentos a menos que especifiquemos lo contrario: el tiempo final de integración es de $1,1 \times 10^4$ u.t. A diferencia de la Sección 4.1.2,

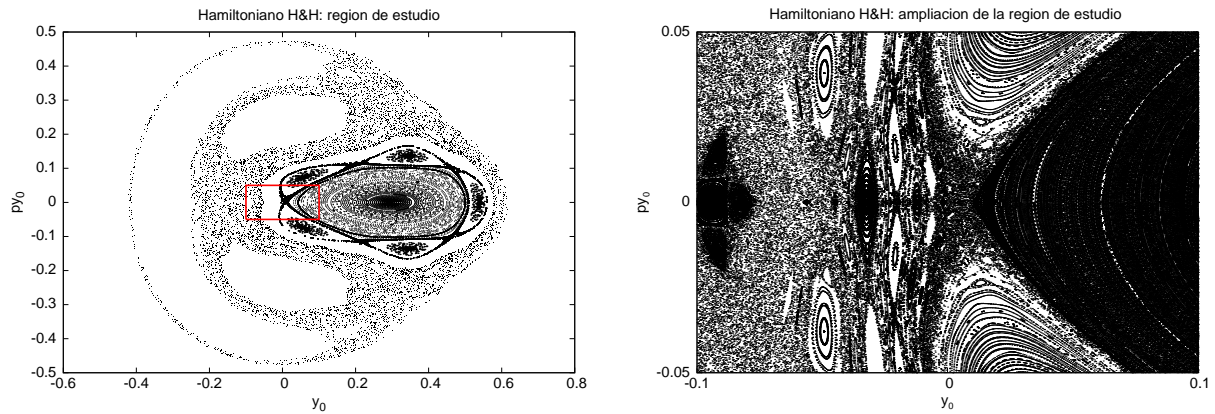


Figura 4.21: Panel izquierdo: en recuadro rojo la región a analizar dentro del Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$, sobre la superficie de energía $-0,118$. Panel derecho: ampliación de la región señalada en el panel izquierdo.

las órbitas de esta muestra pertenecen a una misma superficie de energía ($h = 0,118$). Por consiguiente, se puede estimar un tiempo de convergencia para los indicadores variacionales sobre la superficie de energía. Como el tiempo característico en el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ es de ~ 10 u.t., un tiempo final de integración de $1,1 \times 10^4$ u.t. nos permite contar con los $\gtrsim 10^3$ tiempos característicos que suelen ser una buena aproximación para asegurar la convergencia de los métodos (usado con éxito en el potencial triaxial, Sección 3.3.2). La separación inicial tomada para el cálculo del RLI es de 10^{-10} (Sándor *et al.* 2004). La D la calculamos cada 10^2 pasos de tiempo y el número de celdas considerado para la generación de los histogramas para los $SSNs$ es de 10^3 . La base de i.d.v. es la canónica. Recordemos que es importante mantener los mismos i.d.v. para toda la muestra a lo largo de cada experimento, dado que se puede observar cierta dependencia de los indicadores con la elección de los i.d.v. (Froeschlé & Lega 2000). En la Sección 4.2.3 trataremos esta dependencia.

Hemos aplicado nuevamente el V_c dependiente del tiempo del LI (Tabla 4.6) donde t es el tiempo. Ya fue mencionado que un ajuste empírico del último es muy recomendable, en particular cuando se estudian muestras grandes de órbitas. Sin embargo, volvemos a eludir este ajuste y consideramos simplemente el valor teórico para no dar ventajas a los CIs en la comparación. El valor de corte usado para el RLI (Tabla 4.6) fue calculado siguiendo a Sándor *et al.* (2004) y las recomendaciones dadas en la Sección 4.1.6. Como la manera para determinar el V_c dependiente del tiempo para la D no es totalmente conocida, no la consideraremos en esta sección del trabajo. En el caso del $MEGNO$, el V_c es un valor fijo (Tabla 4.6, notar que es distinto al valor tomado para el $MEGNO(2,0)$ usado en la Sección 4.1) que también necesita de un ajuste empírico. Pero manteniendo la misma filosofía en todo el trabajo, tomaremos la estimación teórica del mismo para evaluarlo comparativamente. Para el $SALI$ hemos visto que tiene dos valores de corte, i.e., 10^{-12} y 10^{-4} (véase e.g. Skokos *et al.* 2004). Entre dichos valores las órbitas las llaman *sticky*. Nosotros las consideraremos como órbitas caóticas y por lo tanto, el V_c a analizar vuelve a ser 10^{-4} , el cual separa movimiento regular del caótico o *sticky*. El valor de corte asociado al FLI o al $OFLI$ (también a veces utilizados con dos V_c , referirse e.g. a Paleari *et al.* 2008) es dependiente del tiempo y obedece a la expresión presentada en la Tabla 4.6 (como en la Sección 4.1.2, no utilizaremos en su

cálculo la aplicación del logaritmo). Finalmente, definimos los V_c que usaremos para la familia de los $GALI$.

El Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ es un Hamiltoniano de dos d.o.f. y entonces, podremos calcular tres $GALI$ s: el $GALI_2$, el $GALI_3$ y el $GALI_4$. Con el objetivo de establecer sus valores críticos para utilizarlos en el análisis de muestras grandes de órbitas, consideramos primero la fórmula que obedecen estos CIs en el caso de movimiento caótico: $GALI_2 \propto e^{-\chi_1 t}$, $GALI_3 \propto e^{-2\chi_1 t}$ y $GALI_4 \propto e^{-4\chi_1 t}$ donde χ_1 es el ILCE de la órbita (véase Christodoulidi & Bountis 2006, Skokos *et al.* 2007 y Manos *et al.* 2011 o Sección 2.2.5 de la presente tesis para mayores detalles). El ILCE se aproxima gracias al LI , que tiene el valor de corte $\ln(t)/t$ (véase Tabla 4.6). Luego, los V_c para el estudio de muestras estadísticas son los que encontramos en la Tabla 4.6. A pesar de que el comportamiento de los $GALI$ s para el movimiento regular cambia con el número de i.d.v. inicialmente tangentes al toro, hemos podido corroborar que los valores críticos dependientes del tiempo seleccionados para cada uno de ellos siguen siendo buenas estimaciones para separar al movimiento regular del caótico.

CI	V_c
LI	$\ln(t)/t$
RLI	10^{-10}
$MEGNO$	2
$SALI$	10^{-4}
$FLI/OFLI$	t
$GALI_2$	t^{-1}
$GALI_3$	t^{-2}
$GALI_4$	t^{-4}

Tabla 4.6: Valores de corte para el LI , el RLI , el $MEGNO$, el $SALI$, el FLI y el $OFLI$ y los $GALI$ s.

En la Sección 4.1.2 evaluamos la confiabilidad de los valores de corte de los distintos CIs por medio del análisis de la variación porcentual de la componente caótica al someterlos a un cambio en un $\pm 1\%$. Este pequeño cambio emula una corrección empírica de los V_c . Luego, en la presente sección repetimos el experimento en el $H\mathcal{E}H$, obteniendo resultados coincidentes con los encontrados en la sección de mapas.

En los paneles superiores de la Fig. 4.22 mostramos la evolución temporal de la diferencia entre los porcentajes de órbitas caóticas encontrados al variar en $\pm 1\%$ los V_c . En los paneles inferiores de la misma Fig. 4.22, presentamos la evolución temporal de los porcentajes de órbitas caóticas de acuerdo a los valores críticos especificados en la Tabla 4.6. La fragilidad del valor de corte, teórico y fijo, para el $MEGNO$ se vuelve evidente (línea azul de puntos, en el panel superior izquierdo de la Fig. 4.22). Es ésta una consecuencia directa de la naturaleza asintótica del V_c del $MEGNO$. Más aún, dado el desacuerdo con el porcentaje de órbitas caóticas que prevalece entre los demás CIs (véase el panel inferior izquierdo de la Fig. 4.22), una corrección de tipo empírico para el V_c teórico del $MEGNO$ resulta fundamental. De hecho, siguiendo las sugerencias de la Sección 3.4, un valor de corte cercano a 3 parece ser mucho

más apropiado para el caso. Por otro lado, encontramos que no sólo el *RLI* y el *SALI* tienen valores de corte confiables, a pesar de su naturaleza empírica, sino que también los tienen el par *FLI/OFLI* y el *GALI₄* (líneas violetas de puntos, en el panel superior izquierdo de la Fig. 4.22 para el par *FLI/OFLI*, y en el panel superior derecho de la misma Fig. 4.22 para el *GALI₄*). El *SALI* posee el V_c más confiable de acuerdo al panel superior derecho de la Fig. 4.22 (línea roja de puntos). Sin embargo, la media de los porcentajes de órbitas caóticas (línea roja de puntos en el panel inferior derecho de la Fig. 4.22) se encuentra por debajo de las medias dadas por los demás CIs.

Luego, entre los CIs analizados, el *RLI* y el par *FLI/OFLI* muestran los valores críticos más confiables para el experimento. El resultado se encuentra en completo acuerdo con lo obtenido en la Sección 4.1.2.

A 10^4 u.t. el V_c usado para el *GALI₄* (i.e. t^{-4}) alcanza la precisión de la máquina (10^{-16}), entonces, toda órbita caótica cae más allá de dicha precisión. Es por esta causa que el último punto de la línea violeta en el panel inferior derecho de la Fig. 4.22, se encuentra fuera de la tendencia que marca al curva.

4.2.3. Estudio de órbitas individuales por medio de la evolución temporal de los CIs

En la Sección 4.1.3 estudiamos la velocidad de convergencia y la capacidad para distinguir los diferentes tipos de movimiento de los CIs bajo análisis. Lo realizamos usando las curvas de evolución temporal gracias al reducido tamaño de la muestra seleccionada. Esta sección está pensada para extender dicho estudio a flujos Hamiltonianos. Por ende, dado que muchos de los resultados encontrados anteriormente para mapas coinciden con los actuales, a pesar del cambio en la naturaleza del escenario, evitaremos la superposición de contenidos tratando ciertas características de los CIs que no fueron discutidas en la Sección 4.1.3. Comenzaremos entonces, estudiando la habilidad de los indicadores para detectar periodicidad y la dependencia de estos últimos con los i.d.v. Luego trataremos la capacidad del *OFLI* y de los *GALIs* para identificar inestabilidades en el movimiento.

Estudiamos entonces una pequeña muestra de seis órbitas en el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$. Una órbita periódica de período 5, **(a)** con condiciones iniciales dadas por el siguiente vector: $(x^{0(a)}, y^{0(a)}, p_x^{0(a)}, p_y^{0(a)}) \sim (0, 0,35207, 0, 0,14979)$, y dos órbitas cercanas a ella, en la misma superficie de energía $h = 0,125$. Estas últimas están definidas por medio de $\Delta y = 0,00793$ y $\Delta y = 0,02793$, donde el Δy es la diferencia en la componente “y” entre las condiciones iniciales de **(a)** y de sus órbitas condicionalmente periódicas asociadas. Estas órbitas fueron tomadas del trabajo de Manos *et al.* (2011) (varias trayectorias de órbitas regulares asociadas a la órbita de período 5 pero sobre la superficie de energía $h = 0,118$ se encuentran señaladas en la Fig. 4.23). Una órbita condicionalmente periódica **(b)** con condiciones iniciales: $(x^{0(b)}, y^{0(b)}, p_x^{0(b)}, p_y^{0(b)}) \sim (0, 0, 0,5, 0)$ (asociada a la órbita periódica de período uno en el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ sobre la superficie de energía $h = 0,125$). La órbita **(b)** fue tomada del trabajo de Skokos *et al.* (2007) (para una órbita regular asociada a la órbita de período 1 pero sobre la superficie de energía $h = 0,118$, referirse a la Fig. 4.23). Una órbita regular cercana a la separatriz, **(c)** y con condiciones iniciales: $(x^{0(c)}, y^{0(c)}, p_x^{0(c)}, p_y^{0(c)}) \sim (0, 0,5085, 0,25512, 0)$ (ver Fig. 4.23). Finalmente, tomamos una órbita caótica dentro del mar caótico, **(d)** con

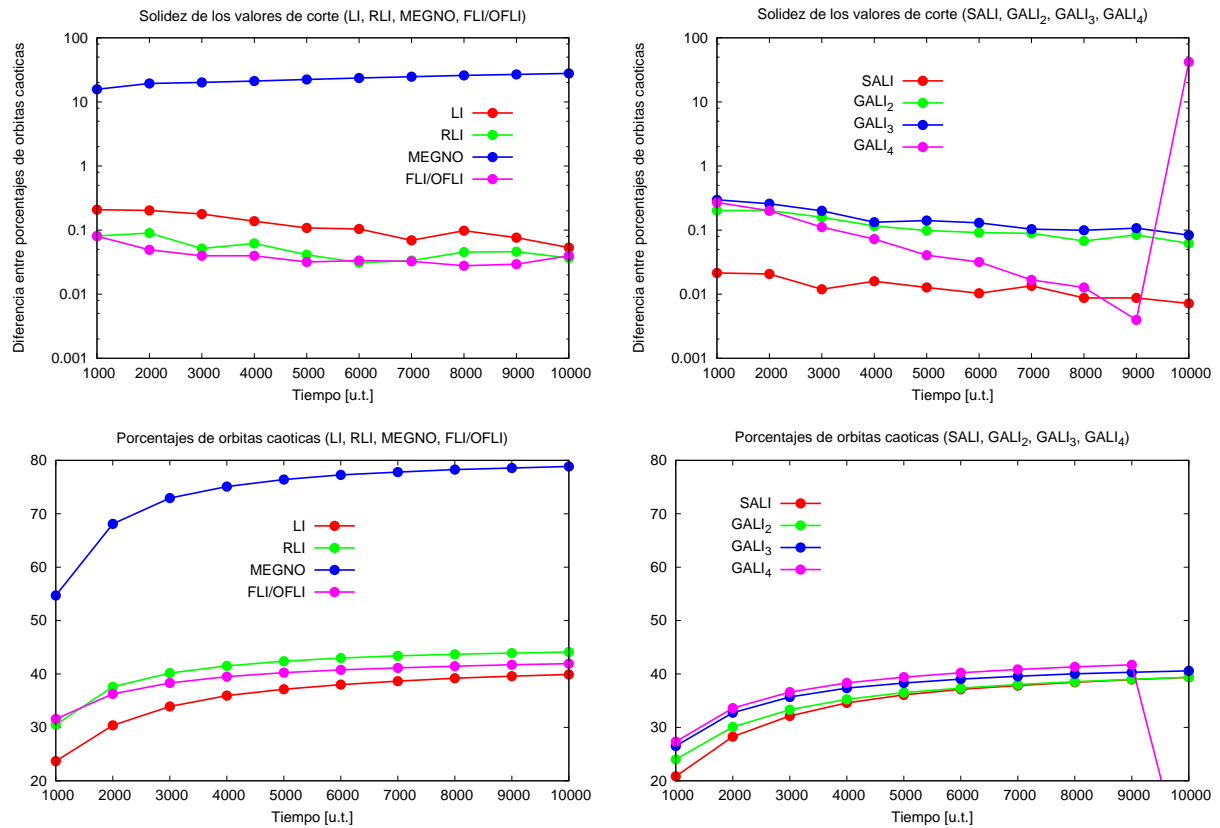


Figura 4.22: Evolución temporal de la diferencia entre los porcentajes de órbitas caóticas usando un valor de corte ajustado en un $+1\%$ y otro valor de corte ajustado en un -1% , para el LI , el RLI , el $MEGNO$ y el par $FLI/OFLI$ (panel superior izquierdo), y para el $SALI$, el $GALI_2$, el $GALI_3$ y el $GALI_4$ (panel superior derecho). Evolución temporal de los porcentajes de órbitas caóticas de acuerdo a los valores de corte referenciados en la Tabla 4.6 para el LI , el RLI , el $MEGNO$ y el par $FLI/OFLI$ (panel inferior izquierdo) y para el $SALI$, el $GALI_2$, el $GALI_3$ y el $GALI_4$ (panel inferior derecho). Los porcentajes fueron calculados a partir de la muestra de 125751 condiciones iniciales tomadas en la región definida por $x = 0$, $y \in [-0,1 : 0,1]$ y $p_y \in [-0,05 : 0,05]$ sobre la superficie de energía $h = 0,118$.

condiciones iniciales: $(x^{0(d)}, y^{0(d)}, p_x^{0(d)}, p_y^{0(d)}) \sim (0, 0,6, 0,14142, 0)$ (ver Fig. 4.23). Las últimas dos órbitas pertenecen a la superficie de energía $h = 0,118$ y fueron tomadas del trabajo de Cincotta & Simó (1999). El tiempo de integración final es de $2,4 \times 10^4$ u.t. (a menos que especifiquemos lo contrario) que nos asegura un LI convergente para poder determinar apropiadamente la naturaleza regular o caótica de las órbitas en ambas superficies de energía.

Comenzamos entonces con la identificación de órbitas periódicas. Para ello evaluamos los CIs en la órbita (a) y las condicionalmente periódicas que se encuentran próximas a la primera. Los comportamientos del LI , de los $SSNs$, del $MEGNO$, del FLI y de los $GALI_3$ y $GALI_4$ son esencialmente los mismos para las tres órbitas.

En cambio, el $OFLI$ está precisamente definido para revelar periodicidad (Fouchard *et al.* 2002). En el panel superior izquierdo de la Fig. 4.24, mostramos los desempeños del

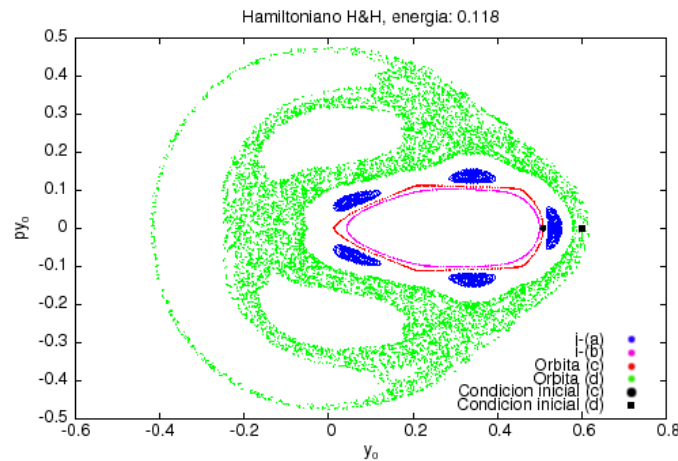


Figura 4.23: Trayectorias y condiciones iniciales dentro del Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$, para la superficie de energía: $h = 0,118$. i-(a): trayectorias de órbitas regulares asociadas a la órbita periódica de período 5. i-(b): trayectoria de una órbita regular asociada a la órbita periódica de período 1. Órbita (c): trayectoria en color rojo y cuya condición inicial se encuentra identificada con un círculo negro. Órbita (d): trayectoria en color verde y cuya condición inicial se encuentra identificada con un cuadrado negro.

OFLI para las órbitas (a) y las dos condicionalmente periódicas cercanas. El CI muestra un comportamiento de tipo oscilatorio alrededor de un valor constante para la órbita periódica. Mientras que se observa un incremento lineal del mismo para los casos condicionalmente periódicos, igual que el *FLI*.

En el panel superior derecho de la Fig. 4.24 mostramos los rendimientos, en este caso, del $GALI_2$ (el *SALI* tiene comportamientos casi idénticos, por lo que no se lo incluyó), nuevamente para la órbita periódica y las condicionalmente periódicas asociadas. El $GALI_2$ resultó ser el único indicador de la familia de los *GALIs* capaz de distinguir claramente el movimiento periódico en el experimento. Revisemos los comportamientos de los *GALIs* (y del *SALI*) para el caso particular de un sistema Hamiltoniano de dos d.o.f. como el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ que está bajo estudio. En un sistema de dos d.o.f., las órbitas condicionalmente periódicas yacen en toros bidimensionales. Luego, todos los vectores desviación tienden a caer en la variedad bidimensional tangente al toro donde ocurre el movimiento. Si comenzamos la integración con dos vectores desviación linealmente independientes (para calcular el $GALI_2$ o el *SALI*), permanecerán linealmente independientes en el espacio bidimensional tangente al toro. Luego, el $GALI_2$ (y el *SALI*) resulta(n) ser constante(s) y diferente(s) de cero. Por otro lado, los $GALI_k$ con $k = 3, 4$ tienden a cero, dado que algunos de los i.d.v. se vuelven necesariamente linealmente dependientes (Manos *et al.* 2011). En el caso de órbitas periódicas, el movimiento se da en un toro de dimensionalidad uno (i.e. una curva invariante), y el espacio tangente también es una curva invariante. Luego, el $GALI_2$ (y el *SALI*) sigue(n) el comportamiento dado por $\propto t^{-1}$. Tenemos entonces la siguiente fórmula que resume los comportamientos asintóticos dentro del Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ para los $GALI_k$ en el caso de órbitas regulares pertenecientes a toros de dimensionalidad M , con $M = 1, 2$, y m i.d.v. inicialmente tangentes al toro (para la fórmula general véase el trabajo de Christodoulidi & Bountis 2006 o la Sección 2.2.5 de la

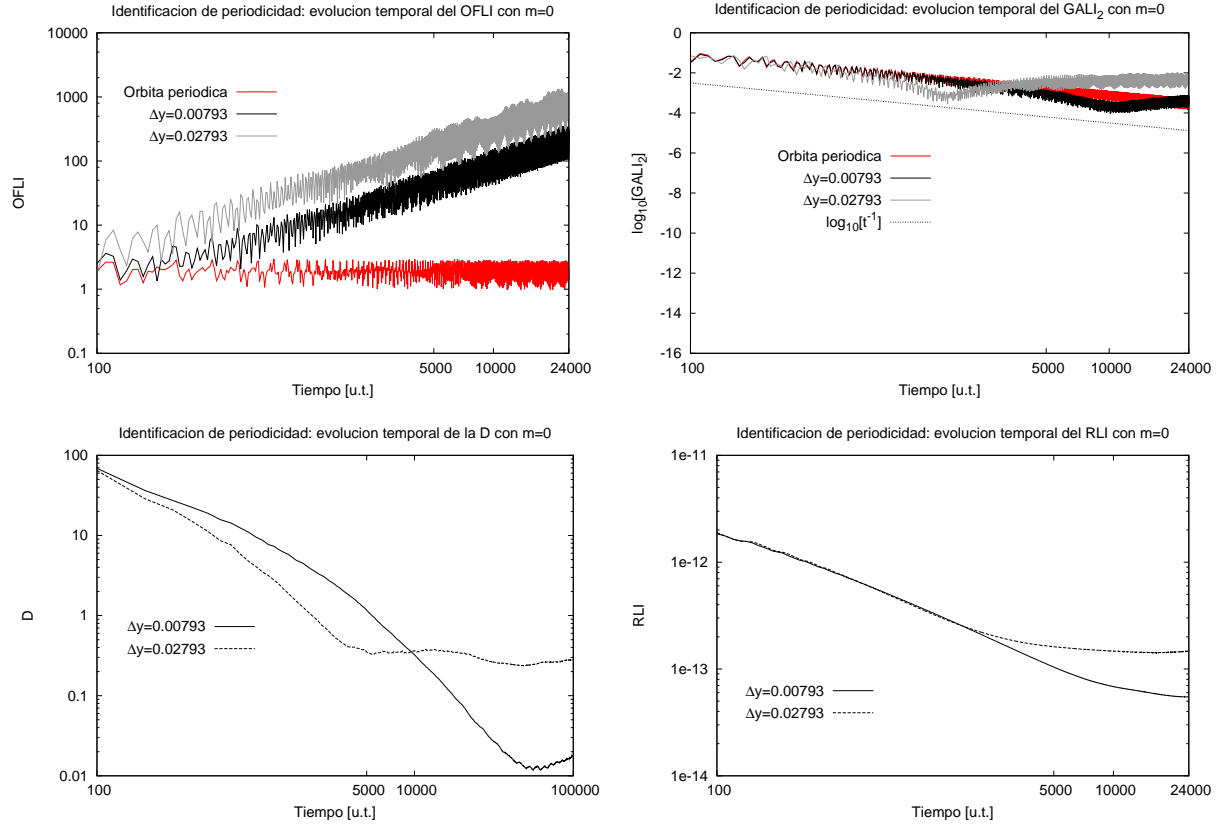


Figura 4.24: En los paneles superiores presentamos los rendimientos de los CIs para la órbita (a) y las condicionalmente periódicas asociadas a ella. En el panel izquierdo para el $OFLI$ y en el panel derecho para el $GALI_2$. En los paneles inferiores presentamos los rendimientos de los CIs para las dos órbitas condicionalmente periódicas asociadas a la órbita (a). En el panel izquierdo, el comportamiento es el de la D y en el derecho, el comportamiento es el del RLI .

presente tesis):

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} \text{constante} & \text{si } k = 2, M = 2, m = 0, 1, 2 \\ t^{-1} & \begin{cases} \text{si } k = 2, M = 1, m = 0, 1 \\ \text{si } k = 3, M = 2, m = 1, 2 \end{cases} \\ t^{-2} & \begin{cases} \text{si } k = 3, M = 2, m = 0 \\ \text{si } k = 4, M = 2, m = 2 \end{cases} \\ t^{-4} \text{ o } t^{-3} & \text{si } k = 4, M = 2, m = 0, 1. \end{cases}$$

En el panel superior derecho de la Fig. 4.24, podemos observar que el $GALI_2$ muestra el mismo comportamiento inicial para las tres órbitas (i.e. siguiendo la ley de potencias t^{-1} , la cual también se encuentra incluida en la figura). Luego del transitorio inicial donde los

comportamientos son similares, el $GALI_2$ oscila alrededor de un valor constante para las órbitas condicionalmente periódicas.

En un sistema Hamiltoniano de dos d.o.f., la D no posee la capacidad de distinguir entre movimiento periódico y movimiento caótico (se observa un decaimiento en los valores del indicador para ambos tipos de movimiento). Sin embargo, la ambigüedad desaparece cuando se tratan Hamiltonianos de más d.o.f. (véase Skokos 2001 para una breve explicación del tema). En el panel inferior izquierdo de la Fig. 4.24, mostramos los comportamientos de la D para las dos órbitas regulares asociadas a la órbita periódica que hemos identificado como **(a)** y para un tiempo de integración extendido de 10^5 u.t. Cuanto más cercana la órbita condicionalmente periódica a la órbita periódica, mayor es el tiempo que tarda la D en converger a un valor y así, identificar la regularidad de la órbita (recordemos que un decaimiento sostenido del indicador indica caos).

En el panel inferior derecho de la Fig. 4.24 mostramos los rendimientos del RLI . El RLI converge a valores más pequeños para la órbita **(a)** que para las órbitas condicionalmente periódicas asociadas. Cuanto más cercanas estén de la primera, más bajo será su valor final del RLI . Sin embargo, no hay un cambio significativo, tanto de carácter cualitativo como de carácter cuantitativo entre los comportamientos de la órbita periódica y de las órbitas condicionalmente periódicas como para, e.g., definir un valor de referencia a partir del cual se pueda distinguir entre unas y otras.

Por lo tanto, de los resultados anteriores podemos decir que el $OFLI$ fue capaz de identificar claramente la órbita periódica entre las de su entorno, debido a un cambio sustancial en su comportamiento. El $GALI_2$ (y el $SALI$) también logró (lograron) identificar la órbita periódica entre las de su entorno.

Sin embargo, dicha identificación puede verse comprometida debido a una elección inapropiada de los i.d.v. (la dependencia de ciertos CIs “rápidos” con los i.d.v. ya fue mencionada en trabajos previos como los de Froeschlé & Lega 2000 y Barrio 2005). Luego, resulta interesante revisar esta dependencia.

En la Sección 4.2.2 usamos la base canónica de i.d.v. para toda la muestra. Aquí, analizaremos sólo el comportamiento de la órbita **(b)** pero usando tres bases de i.d.v. diferentes para así evaluar la dependencia de los CIs sobre estos últimos. Estas bases las caracterizamos por medio del parámetro m (que tomamos como el número de i.d.v. inicialmente tangentes al toro). Las tres bases fueron seleccionadas para tener $m = 0, 1$ y 2 (2 es el límite superior en un sistema Hamiltoniano de dos d.o.f. como el Hamiltoniano $H^{\mathcal{E}H}$). Del trabajo de Skokos *et al.* (2007) sabemos que los vectores unitarios $(1,0,0,0)$ y $(0,0,0,1)$ son inicialmente tangentes al toro donde la órbita **(b)** desarrolla su movimiento. Luego, usando un proceso de **Gram-Schmidt** construimos tres bases de i.d.v. con $m = 0, 1, 2$. Por ejemplo, la base con $m = 2$ tiene cuatro vectores ortonormales donde dos de ellos son los recién mencionados.

Aunque el LI y el RLI muestran cierta dependencia con el parámetro m , las diferencias usando una u otra base no son significativas. Más aún, el $MEGNO$, el FLI y el $OFLI$ no muestran ningún tipo de dependencia dentro del contexto del experimento.

En el panel superior izquierdo de la Fig. 4.25 mostramos los comportamientos de la D para la órbita **(b)** y para las tres bases de i.d.v. Notar que hemos podido identificar la naturaleza regular de la órbita **(b)** usando las bases con $m = 1, 2$. La D alcanza valores constantes con estas dos bases, aunque con tiempos de convergencia distintos. Por otro lado, con $m = 0$ la D decrece como en los casos de órbitas caóticas. El tiempo de integración se extendió a 10^6

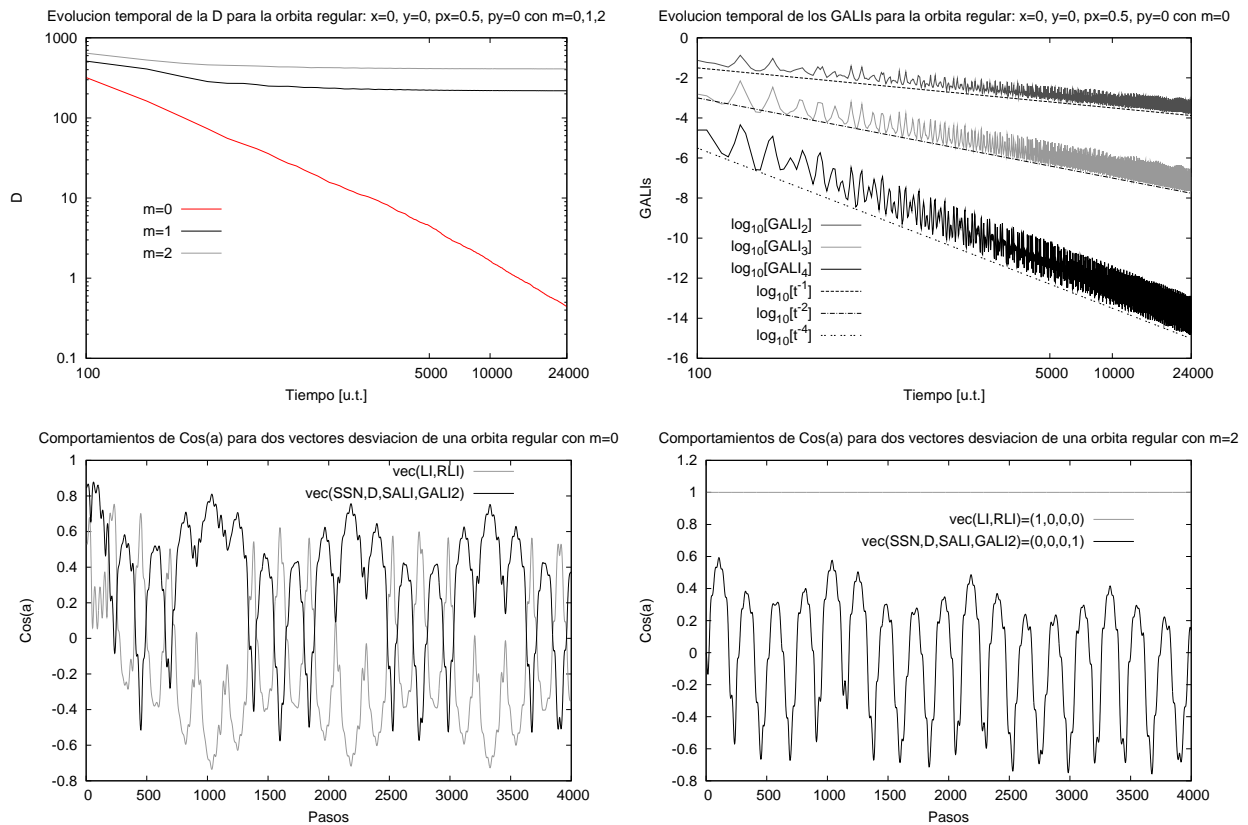


Figura 4.25: Panel superior izquierdo, comportamientos de la D para la órbita regular (b) y tomando bases con $m = 0, 1, 2$. Panel superior derecho, comportamientos de los $GALI$ s para la órbita (b) usando la base con $m = 0$. Las leyes de potencias asociadas con cada $GALI$ también fueron incluidas en la figura (nótese la escala logarítmica). En el panel inferior izquierdo presentamos los comportamientos de la cantidad $\cos(a)$ para ambos i.d.v. considerados para el cálculo del $GALI_2$ con $m = 0$. En el panel inferior derecho presentamos los comportamientos de la cantidad $\cos(a)$ para ambos i.d.v. considerados para el cálculo del $GALI_2$ con $m = 2$ (ver texto).

u.t. (no incluido en la figura por simplicidad) para corroborar que la causa de la incorrecta clasificación no era debida a una lenta convergencia del indicador.

Ahora bien, para estudiar los comportamientos de los $GALI_k$ con $k = 2, 3, 4$, reproducimos el experimento mostrado en la Fig. 4 del trabajo de Skokos *et al.* (2007) (Fig. 4.26). Los autores analizaron la órbita (b) en el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ usando bases con $m = 0, 1, 2$. Aunque los resultados coinciden usando $m = 1, 2$, vemos una discrepancia en los comportamientos del $GALI_2$ para $m = 0$. En la Fig. 4.26 tomada del trabajo mencionado, los autores muestran un valor casi constante para el $SALI$ y el $GALI_2$, a diferencia de lo obtenido en nuestro experimento, véase la línea gris oscura en el panel superior derecho de la Fig. 4.25 (no incluimos el $SALI$ en nuestra figura dado que su comportamiento es similar al del $GALI_2$). Aunque hayamos seleccionado cero i.d.v. inicialmente tangentes al toro como lo hicieron los autores en Skokos *et al.* (2007), nuestros dos i.d.v. usados para el cálculo del $GALI_2$ se alinean el uno con

el otro. En el panel inferior izquierdo de la Fig. 4.25 mostramos los comportamientos opuestos de la cantidad $\cos(a)$ (donde a es el ángulo entre la dirección de los i.d.v. y la dirección del flujo) para ambos i.d.v. Entonces, resultan linealmente dependientes y obtenemos para el $GALI_2$ un comportamiento del tipo t^{-1} (panel superior derecho de la Fig. 4.25) al igual que para la órbita periódica (esta dependencia de ambos i.d.v. también explica el comportamiento de la D para la órbita **(b)** con la base dada por $m = 0$).

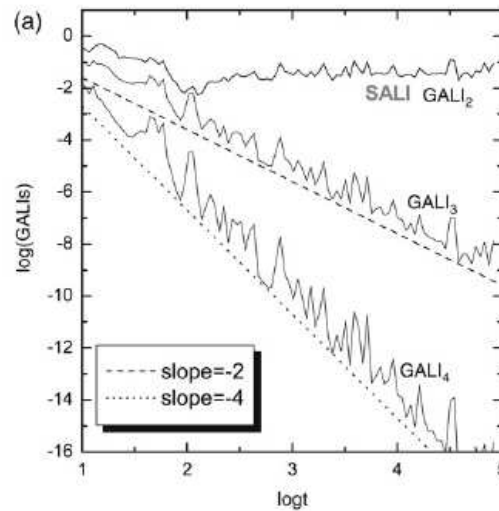


Figura 4.26: Evolución temporal del $SALI$, $GALI_2$, $GALI_3$ y $GALI_4$ para la órbita regular **(b)**, en el caso $m = 0$ y en escala logarítmica. Figura tomada de Skokos *et al.* (2007).

En el panel inferior derecho de la Fig. 4.25 presentamos los comportamientos de la cantidad $\cos(a)$ para los i.d.v. $(1,0,0,0)$ y $(0,0,0,1)$. Estos últimos fueron tomados para la base con $m = 2$. Es claro que el primero de ellos se alinea con el flujo cuando el segundo oscila alrededor de una de las direcciones ortogonales al flujo. Este caso en el que se cuenta con una base con $m = 2$ es el caso general, y los comportamientos de los $GALIs$ están bien modelados por las fórmulas dadas tanto en Christodoulidi & Bountis (2006) como en Skokos *et al.* (2007). Por ende, no hay necesidad de chequear la elección de los i.d.v. cuando se estudian muestras con un gran número de órbitas.

Aunque es conveniente y recomendable seguir los comportamientos de los i.d.v., al menos por un período corto de tiempo, como para asegurar una apropiada elección de los i.d.v. en el caso de estudios de pocas órbitas con los $GALIs$ o la D .

También estamos interesados en evaluar la sensibilidad de los CIs para detectar inestabilidades. En la Sección 4.1.3 analizamos dichas características sobre varios indicadores. A pesar de que el estudio fue realizado en un mapa simpléctico 4D, los resultados no varían en el caso del Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$. Además, el FLI y el $OFLI$ no muestran diferencias en sus comportamientos. Luego, aquí trataremos simplemente la capacidad de los $GALIs$ para detectar inestabilidades y así complementar el estudio hecho en las secciones anteriores. Con este propósito es que estudiamos las órbitas **(c)** y **(d)**.

En la Fig. 4.27 presentamos los comportamientos del $GALI_2$, del $GALI_3$ y del $GALI_4$ para las órbitas (c) (panel de la izquierda) y (d) (panel de la derecha). Los $GALIs$ para la órbita (c) muestran como se comporta una órbita regular cercana a un objeto hiperbólico, dado que describen oscilaciones de gran amplitud alrededor del comportamiento esperado para movimiento regular (i.e. $GALI_2 \propto \text{constante}$; $GALI_3 \propto t^{-1}$; $GALI_4 \propto t^{-2}$, con $m = 2$). Por otro lado, los $GALIs$ para la órbita (d) muestran una órbita caótica dado que sus comportamientos siguen leyes exponenciales (i.e. $GALI_2 \propto e^{-\chi_1 t}$; $GALI_3 \propto e^{-2\chi_1 t}$; $GALI_4 \propto e^{-4\chi_1 t}$, con $\chi_1 \sim 0,4118490 \times 10^{-1}$, i.e. el único LCE diferente de cero y valor del LI para la órbita). El $GALI_4$ tiene la mayor velocidad de convergencia para órbitas caóticas entre todos los indicadores evaluados hasta el momento. Sin embargo, no es un indicador que sea poco costoso al evaluar su tiempo de CPU, véase el trabajo de Skokos *et al.* (2007) y la Sección 4.2.5 de esta tesis.

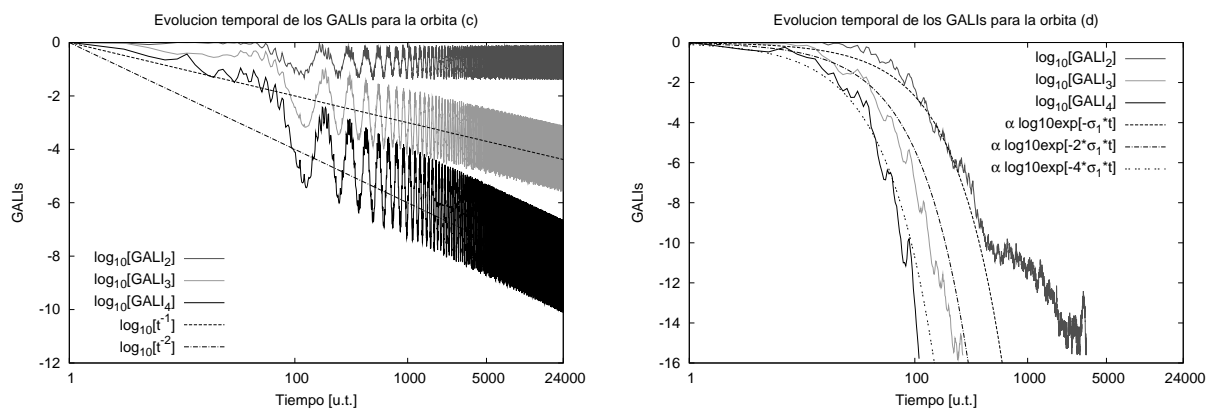


Figura 4.27: En el panel izquierdo presentamos los rendimientos de los $GALIs$ para la órbita (c). En el derecho para la órbita (d). Los comportamientos teóricos también fueron incluidos en las figuras. En escala logarítmica el valor de los indicadores.

El $OFLI$ y el $GALI_2$ (y el $SALI$) son los únicos CIs del paquete que identificaron claramente la órbita periódica, (a). Sin embargo, el $GALI_2$ (y el $SALI$) muestra(n) cierta dependencia con los i.d.v. en el experimento, lo cual puede llevar a identificaciones incorrectas de dichas órbitas periódicas (todos los indicadores que utilizan las variacionales de primer orden pueden ser propensos a esta dependencia con los i.d.v., pero en el caso particular de los $GALIs$ o el $SALI$, esto puede deberse en parte a los bajos valores que alcanzan, y por ende resultan de evolución lenta, Barrio 2005). Por otro lado, como el $GALI_2$ y los otros $GALIs$ muestran dependencia con el parámetro m , pueden brindar información sobre la dimensionalidad de la variedad en la cual se desarrolla el movimiento regular (véase Manos *et al.* 2011). Además, en el caso de órbitas caóticas, el $GALI_4$ tiene la mayor velocidad de convergencia entre los indicadores del paquete.

En acuerdo con lo expresado en la Sección 4.1.7, el *MEGNO* muestra buenos rendimientos para estudios individuales de órbitas, en particular debido a su simpleza en caracterizar los niveles de estabilidad. Luego, una combinación del *OFLI* y del *MEGNO* parece ser una redituable sugerencia si es que resulta factible calcular las evoluciones temporales de estos CIs. El *GALI₂* (y el *SALI*) con el chequeo apropiado de los i.d.v. es (son) también apropiados para el caso.

4.2.4. Estudio de una muestra de órbitas por medio de los valores finales de los CIs

El análisis por medio de las curvas de evolución temporal de los indicadores usado en la Sección 4.2.3, es ineficiente para realizar estudios sobre muestras grandes de órbitas, por lo que los valores finales de los CIs constituyen la alternativa lógica (Sección 4.1.4).

En esta sección, usaremos solamente la información proveniente de los valores finales y los tiempos de saturación (ver Sección 4.1.5.1) para evaluar la velocidad de convergencia y el poder resolvente de los CIs siguiendo las pautas dadas en la Sección 4.1.4 de la presente tesis.

Tanto los parámetros utilizados para el cálculo de los CIs como sus valores de corte (ver Tabla 4.6), son los mismos que se usaron en la Sección 4.2.2. Presentamos entonces, los rendimientos de los CIs en una muestra compuesta por 125751 condiciones iniciales en la superficie de energía definida por el valor $h = 0,118$ en el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ y tomadas de forma equidistante dentro de la región definida por $x = 0$, $y \in [-0,1 : 0,1]$ y $p_y \in [-0,05 : 0,05]$ (para un retrato de fases de la región, referirse al panel derecho de la Fig. 4.21) para un tiempo final de integración de 10^4 u.t.

En la Fig. 4.28 mostramos los rendimientos del LI y del RLI (paneles superiores, izquierdo y derecho, respectivamente), del *MEGNO* y de la *D* (paneles del medio, izquierdo y derecho, respectivamente) y de los valores finales (panel inferior izquierdo) y de los tiempos de saturación (panel inferior derecho) correspondientes al *OFLI*. En los paneles de la izquierda de la Fig. 4.29, mostramos los retratos del espacio de fases de la región bajo análisis para los *GALIs* (del panel superior al inferior, para el *GALI₂*, el *GALI₃* y el *GALI₄*, respectivamente), sobre un tiempo de integración final de 10^4 u.t. En los paneles de la derecha de la Fig. 4.29, presentamos los correspondientes tiempos de saturación para el mismo tiempo final de integración.

El *FLI* y el *SALI* fueron excluidos del presente análisis por simplicidad, dado que sus comportamientos son similares al del *OFLI* y del *GALI₂*, respectivamente.

Comenzamos con la descripción de la componente caótica y por ende, con la identificación de dos dominios dentro de la misma: el mar caótico para $y \lesssim -0,05$ y las capas estocásticas que circunscriben las islas de estabilidad principales. Entonces, los CIs pueden ser divididos en dos grupos. Esta división responde a la diferentes maneras que tienen los indicadores de describir dicha componente caótica. En el primer grupo incluimos al LI, al *MEGNO* y a la *D*. En el segundo grupo, al *OFLI* y a los *GALIs*.

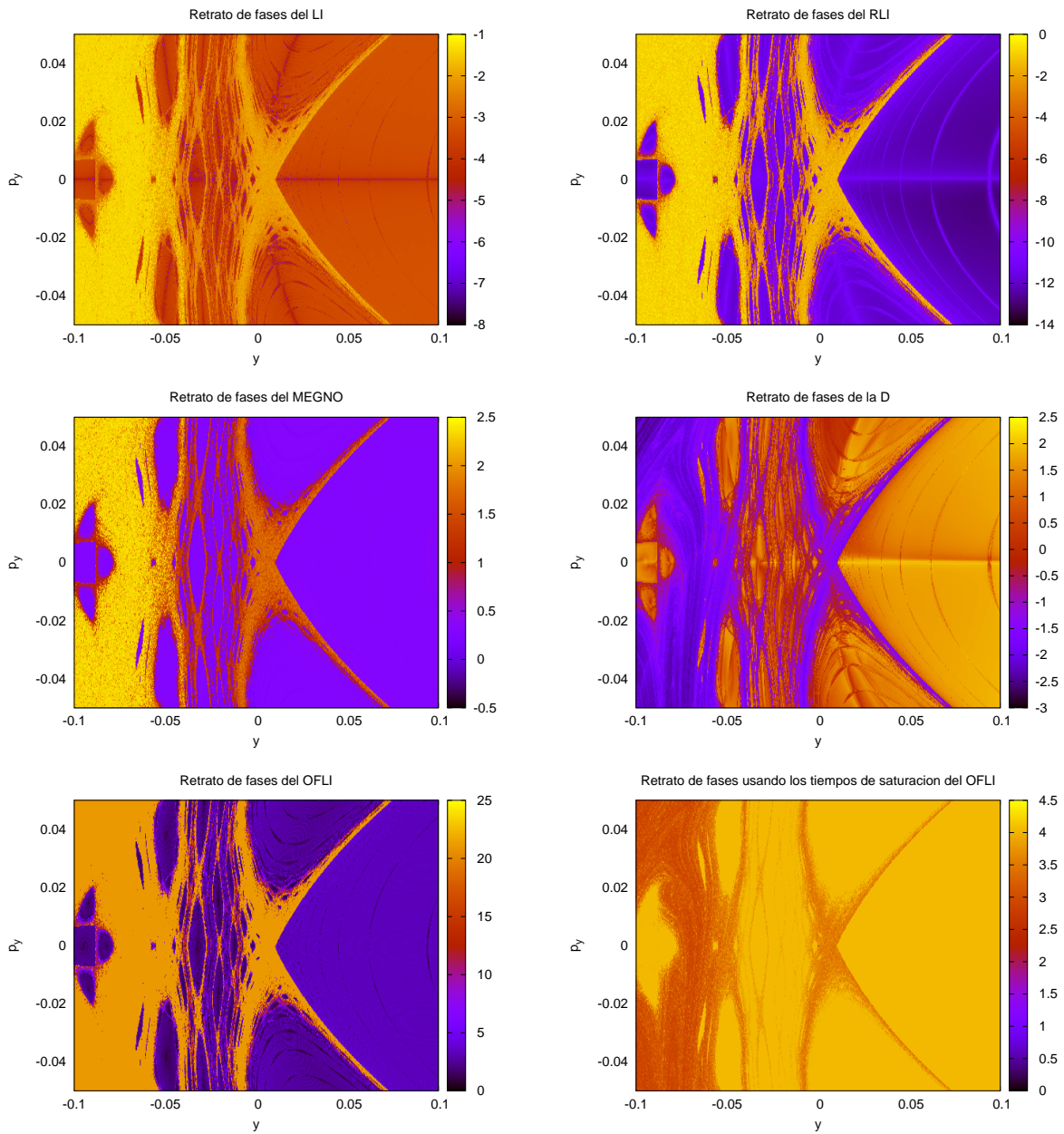


Figura 4.28: Retratos del espacio de fases para la región definida por $x = 0$, $y \in [-0,1 : 0,1]$ y $p_y \in [-0,05 : 0,05]$ en el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ sobre la superficie de energía $h = 0,118$ y descrita en el panel derecho de la Fig. 4.21. Se utilizaron 125751 condiciones iniciales integradas durante 10^4 u.t. En el panel superior izquierdo presentamos los valores finales del LI y en el superior derecho los valores finales del RLI. En los paneles del medio, a la izquierda el MEGNO y a la derecha la D . En los paneles inferiores mostramos los rendimientos del OFLI, en el panel izquierdo el retrato de fases utilizando sus valores finales y en el panel derecho, el mismo retrato utilizando sus tiempos de saturación a 10^4 u.t. En escala logarítmica en valor de los indicadores.

Tanto el LI (panel superior izquierdo de la Fig. 4.28) como el MEGNO (Fig. 4.28, panel del medio a la izquierda), claramente identifican por medio de sus valores finales, los dos dominios mencionados. En cambio, la D (Fig. 4.28, panel del medio a la derecha) no muestra una distinción clara entre ambos dominios caóticos, pero presenta cierta estructura dentro del mar caótico que no está reflejada en los retratos del espacio de fases brindados por el LI o por el MEGNO.

En el segundo grupo, el RLI (panel superior derecho de la Fig. 4.28) distingue los dominios, aunque no tan claramente como los indicadores anteriores (notar lo escaso de la diferencia de colores entre un dominio y otro). La razón de esto es su alta velocidad de convergencia para el movimiento caótico. El OFLI (panel inferior izquierdo de la Fig. 4.28) y los GALIs (paneles izquierdos de la Fig. 4.29) no presentan diferencias entre ambos dominios caóticos. La razón es la misma que la del RLI, su alta velocidad de convergencia debido a un comportamiento exponencial para las órbitas caóticas. No obstante, tanto el OFLI como los GALIs cuentan con los tiempos de saturación para recuperar los distintos niveles de hiperbolicidad (panel inferior derecho de la Fig. 4.28 para los tiempos de saturación del OFLI y paneles derechos de la Fig. 4.29 para los tiempos de saturación de los GALIs). Luego, gracias a esta cantidad auxiliar, la distinción entre ambos dominios caóticos resulta evidente. Más aún, la estructura antes observada por la D , también es identificada por estos indicadores.

El OFLI y los GALIs brindan la manera más detallada de describir la componente caótica, debido a una efectiva combinación entre una alta velocidad de convergencia para órbitas de esta componente y los tiempos de saturación definidos para detener el cómputo del algoritmo.

Ahora seguimos con la descripción de la componente regular, donde nuevamente los CIs pueden ser discriminados en dos grupos. En este caso, la razón de esta separación es la aparición de estructuras espúreas, las cuales pueden deberse a distintos factores: numéricos, cortos tiempos de integración o una mala elección de las condiciones iniciales para las ecuaciones variacionales linealizadas (ver Barrio *et al.* 2009b).

El LI, el RLI y la D presentan estructuras espúreas en la componente regular (paneles superiores y del medio a la derecha de la Fig. 4.28 para el LI, el RLI y la D , respectivamente). Tales estructuras también se pueden observar en los retratos del espacio de fases de los GALIs (paneles izquierdos de la Fig. 4.29). Estas estructuras se ven como líneas que cortan a la mitad a las islas de estabilidad.

Por otro lado, ni el MEGNO ni el OFLI presentan en sus retratos del espacio de fases, alguna de estas estructuras espúreas.

En el caso del *MEGNO*, se debe a que en un espacio de fases fuertemente dividido como el estudiado, el valor de corte asintótico que posee para las órbitas condicionalmente periódicas, i.e. ~ 2 , no permite descubrir ningún tipo de estructura para la componente regular^{||}.

^{||}A menos que manualmente se fijen los rangos de valores.

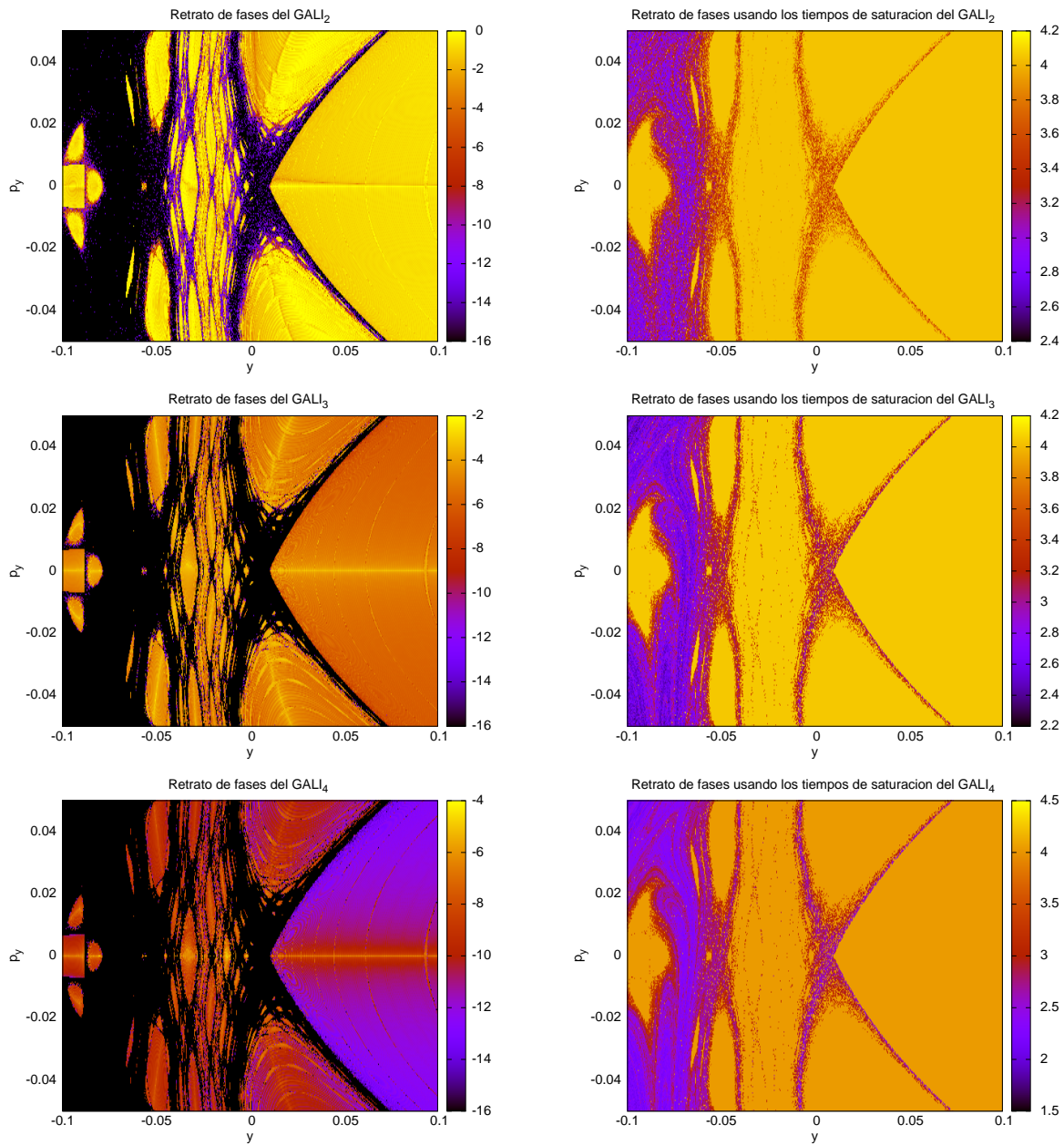


Figura 4.29: Paneles de la izquierda: retratos del espacio de fases para los $GALI$ s, con 125751 condiciones iniciales distribuidas en la región definida por $x = 0$, $y \in [-0,1 : 0,1]$ y $p_y \in [-0,05 : 0,05]$ en el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ sobre la superficie de energía $h = 0,118$ y descrita en el panel derecho de la Fig. 4.21. De arriba a abajo tenemos los retratos del espacio de fases para 10^4 u.t. dados por el $GALI_2$, el $GALI_3$ y el $GALI_4$, respectivamente. En escala logarítmica el valor de los indicadores. Paneles de la derecha: los tiempos de saturación correspondientes, en escala logarítmica, para un tiempo final de integración de 10^4 u.t.

Finalmente, discutimos brevemente la velocidad de convergencia observada de los indicadores y su eficiencia en la separación de las componentes caótica y regular. La distinción entre

dominios caóticos y regulares es satisfactoria para todos los CIs. Sin embargo, tanto el OFLI como los GALIs hacen dicha separación más rápidamente.

En el caso del $GALI_k$, a medida que aumentamos el índice k del indicador (de los paneles inferiores a los paneles superiores de la Fig. 4.29), nos encontramos con descripciones de las componentes caótica y regular más detalladas, tanto considerando los valores finales (paneles izquierdo de la Fig. 4.29) como los correspondientes tiempos de saturación (paneles derechos de la Fig. 4.29).

Además, el $GALI_4$ ha mostrado, a lo largo de los experimentos, tener la mayor velocidad de convergencia para órbitas caóticas.

Por lo tanto, una combinación del par FLI/OFLI y del $GALI_4$ parece brindar suficiente información como para describir satisfactoriamente, por medio de sus valores finales y tiempos de saturación, un espacio de fases fuertemente dividido.

4.2.5. Tiempos de CPU

En la Sección 4.1 estudiamos los rendimientos de varios CIs sobre mapas. Para ello tratamos varias de sus características: la velocidad de convergencia, la capacidad de identificar los niveles de hiperbolicidad y de estabilidad de las órbitas (o poder resolvente), y la robustez de los valores de corte. En la Sección 4.2.3 tratamos la identificación de órbitas periódicas y la dependencia de los CIs con los i.d.v. Sin embargo, uno de los análisis que hace falta es respecto a los tiempos de CPU que insume calcular los algoritmos de cada método, y que desarrollaremos en la presente sección.

Los cálculos numéricos aquí presentados, fueron llevados a cabo con el siguiente arreglo de *hardware*: CPU, 2 x Dual XEON 5450, Dual Core 3.00GHz; M.B., Intel S5000VSA; RAM, 4GB(4x1GB), Kingston DDR-2, 667MHz, Dual Channel. Y siendo el compilador: gfortran 4.2.3.

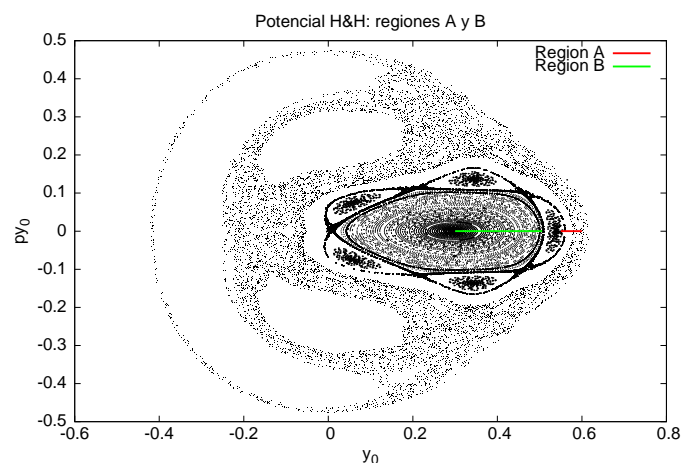


Figura 4.30: Perfiles de condiciones iniciales para las regiones A y B en el Hamiltoniano $H\&H$.

Calculamos los tiempos de CPU para todos los CIs bajo estudio. Primero, para una muestra de 10^3 condiciones iniciales localizadas en el intervalo definido por $y \in [0,55 : 0,6]$, $x = p_y = 0$ y $h = 0,118$ (de aquí en más, región “A” y señalada en color rojo en la Fig. 4.30). La región A cuenta con un espacio de fases dividido, y un gran porcentaje de órbitas que alcanzan los valores de saturación (i.e. 10^{20} para el par *FLI/OFLI* y 10^{-16} , la precisión de la máquina, para el *SALI* o los *GALIs*) dentro de un tiempo de integración final de $1,2 \times 10^4$ u.t. Segundo, para una muestra de 3×10^3 condiciones iniciales localizadas dentro de la isla de estabilidad asociada a la órbita periódica de período uno. Llamaremos a esta región “B” y está definida como $y \in [0,3 : 0,506]$, $x = p_y = 0$ sobre la superficie de energía $h = 0,118$ (señalada en color verde en la Fig. 4.30). En la región B no hay órbitas que alcancen alguno de los valores de saturación para un tiempo de integración final de $1,2 \times 10^4$ u.t. (notar en la Fig. 4.30 que todas las condiciones iniciales tomadas en esta última región están distribuidas dentro de la isla de estabilidad asociada a la órbita periódica de período 1).

La *D* fue el indicador que mostró el mayor costo computacional en el experimento; para la región A y un tiempo de integración de 2×10^3 u.t., el tiempo de cómputo fue de $8,343 \times 10^2$ seg. y para $1,2 \times 10^4$ u.t., fue de $4,9985 \times 10^3$ seg. Para la región B y un tiempo de integración de 2×10^3 u.t., el tiempo de cómputo fue de $2,4283 \times 10^3$ seg. y para $1,2 \times 10^4$ u.t., fue de $1,484704 \times 10^4$ seg. Por lo tanto, en la Fig. 4.31 presentamos los tiempos de cómputo de los demás indicadores como fracciones porcentuales del tiempo de cómputo de la *D*.

De la Fig. 4.31 es claro que el tiempo de CPU de cada indicador se incrementa a medida que crece el porcentaje de órbitas regulares (compárese ambos paneles). Además, el tiempo de CPU se incrementa a medida que crece la complejidad del algoritmo. Luego, el *LI* resulta ser el CI menos costoso de los que figuran en el paquete, y el *GALI*₄ y la *D* son los más costosos.

Ordenando los CIs del menos costoso al más costoso, computacionalmente hablando, tendremos: el *LI*, el *MEGNO*, el *SALI* y el *RLI*, el *FLI* y el *OFLI*, el *GALI*₂, el *GALI*₃, el *GALI*₄ y la *D*.

El *MEGNO* usa dos ecuaciones más que el *LI*. El *SALI* y el *RLI* tienen similares tiempos de cómputo dado que el primero calcula la evolución de dos vectores desviación cuando el segundo hace lo propio pero con dos órbitas próximas. El *FLI* y el *OFLI* calculan la evolución de cuatro vectores desviación** (dado que el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$ tiene un espacio de fases 4D). El *GALI*_{*k*} usa *k* vectores desviación, pero su implementación numérica resulta costosa (a pesar de estar utilizando la “Singular Value Decomposition” o rutina SVD, ver Skokos *et al.* 2008). Finalmente, la aproximación estadística a través del cómputo de histogramas que requiere la *D*, hacen del indicador el más ineficiente en este aspecto .

La necesidad de los valores de saturación para determinados métodos, conlleva varias ventajas que ya fueron estudiadas en la tesis (e.g. en la Sección 4.1.5.1), como poder recuperar los niveles de hiperbolicidad gracias a los tiempos de saturación de determinados indicadores rápidos. Más aún, existe una ventaja numérica al contar con este tipo de CIs. Si la órbita alcanza los valores de saturación para el CI, el cómputo de la misma se detiene y entonces, el tiempo de CPU se ve reducido (ver Skokos *et al.* 2007). En la Fig. 4.32 intentamos cuantificar tal relación. Para ello, computamos el tiempo ahorrado de máquina debido a los porcentajes de

**Recordemos de la Sección 2.2.6, que para el *FLI* (y consecuentemente para el *OFLI*) se utilizó la versión original de Froeschlé *et al.* (1997a) y Froeschlé *et al.* (1997b). Para ahorrar tiempo de cómputo se pueden reemplazar por la versión de Froeschlé & Lega (2000) que utiliza tan sólo un i.d.v.

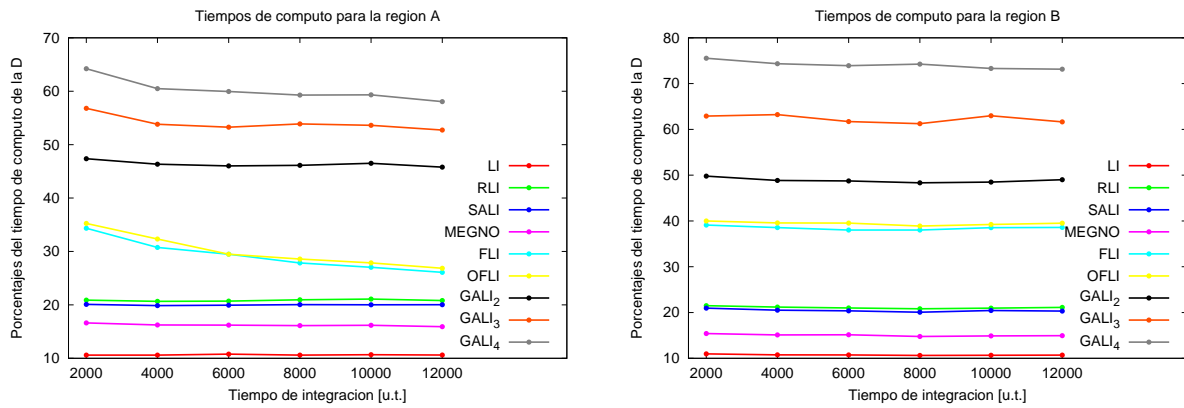


Figura 4.31: Tiempos de cómputo de los CIs del paquete, expresados como porcentajes relativos al tiempo de cómputo consumido por la D , para la región A (panel de la izquierda) y para la región B (panel de la derecha). Ver texto para más detalles.

órbitas que alcanzaron sus valores de saturación. Esta relación nos da idea de cuán eficiente es el indicador para aprovechar dicha ventaja. Por ejemplo, con un 35 % de órbitas que alcanzan el valor de saturación de 10^{-16} , el *SALI* muestra una reducción en los tiempos de CPU menor al 5 %. El *GALI₂* y el *GALI₃* alrededor del 5 % y del 12 %, respectivamente. El *FLI* y el *OFLI* muestran una reducción en los tiempos de CPU de entre el 20 % y el 25 %, para el mismo porcentaje del 35 % de órbitas que alcanzan el valor de saturación de 10^{20} . El *GALI₄* muestra los porcentajes más elevados de órbitas que alcanzan el valor de saturación asociado (10^{-16} ; debido a que es el indicador con la mayor velocidad de convergencia). Sin embargo, la reducción en el tiempo de CPU para este indicador no resulta tan efectiva como la observada con el par *FLI/OFLI*.

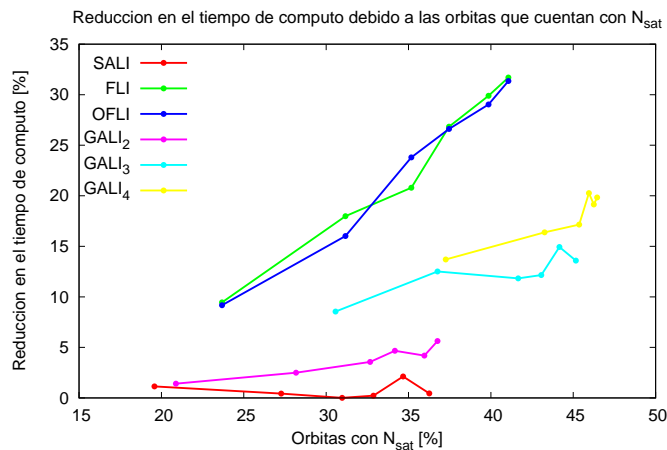


Figura 4.32: Porcentaje de órbitas que alcanzan los valores de saturación contra la reducción en los tiempos de CPU para todos los indicadores analizados que tienen valores de saturación bien definidos.

Este experimento muestra que, tanto el *FLI* como el *OFLI*, resultan ser los CIs que mejor aprovechan un eficiente equilibrio entre sus valores de saturación y sus valores de corte para reducir el tiempo de cómputo.

4.2.6. Discusión

Como discusión sobre la presente Sección 4.2, podemos mencionar ciertos puntos para tener las herramientas necesarias y entonces hacer, apropiadamente, una eventual selección de los métodos a utilizar en el estudio de determinado problema dinámico. Aunque ciertas técnicas muestran excelentes rendimientos para la mayoría de los experimentos realizados (e.g. el par *FLI/OFLI*), es saludable evitar el uso de un solo indicador de caos. También resulta imperativo reducir el número de CIs del paquete que se pretende usar. Por ello, es que la elección de una CIsF para un Hamiltoniano general sigue siendo nuestro principal objetivo.

Al estudiar un sistema dinámico conviene, generalmente y como primer paso, tener una rápida mirada global del espacio de fases y así proceder con las calibraciones necesarias para un análisis más fino (Sección 4.1.7). En los experimentos previos, el *RLI* y el par *FLI/OFLI* mostraron los valores de corte más confiables para hacer este tipo de estudios. Sin embargo, al analizar grandes muestras de órbitas por medio de los valores finales de los indicadores, es la combinación del par *FLI/OFLI* y del *GALI₄* (o más bien, del *GALI_{2N}*, dado un sistema Hamiltoniano de N -d.o.f.) la que parece resultar sumamente satisfactoria para describir el espacio de fases dividido del Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$. Los valores finales del par *FLI/OFLI* no muestran estructuras espúreas en la componente regular dentro del contexto del experimento realizado. Además, el *GALI₄* con la ayuda de los correspondientes tiempos de saturación hace una eficiente descripción, rápida y detallada, de la componente caótica.

Hemos estudiado los tiempos de cómputo que llevan estos análisis, y el *LI* es el método menos costoso computacionalmente, siendo la *D*, el más costoso. Sin embargo, el *LI* es un CI relativamente lento, pues su velocidad de convergencia no es elevada (fue justamente a raíz de esta característica que se volvió masiva la aparición en la literatura de nuevos CIs rápidos). Más aún, mostramos que el par *FLI/OFLI* es el método que refleja la mayor eficiencia en el impacto que la implementación de los valores de saturación hacen sobre la reducción en los tiempos de CPU.

Luego de una mirada global del comportamiento dinámico del sistema, el estudio de subregiones del espacio de fases o incluso de órbitas individuales puede resultar de un interés particular. Para ello, se deja de lado la implementación de los valores finales usados para el análisis de grandes cantidades de órbitas, y se hace uso de las curvas de evolución temporal. De recurrir al uso de estas curvas, el *OFLI* y el *MEGNO* resultaron ser las opciones más recomendables. Por ejemplo, el *OFLI* identifica claramente las órbitas periódicas cuando el *MEGNO* caracteriza de forma sencilla los niveles de estabilidad de las órbitas regulares. El *GALI₂* (y el *SALI*) con un apropiado chequeo de los i.d.v. usados para su(s) cómputo(s) es(son) también apropiado(s) para identificar órbitas periódicas y el *GALI_k* para caracterizar la dimensionalidad del toro en el cual se desarrolla el movimiento de las órbitas regulares (Christodoulidi & Bountis 2006; Skokos *et al.* 2007; Skokos *et al.* 2008).

Finalmente, podemos evaluar los rendimientos generales del paquete, haciendo unos comentarios finales.

El par *FLI/OFLI* prueba ser la técnica más versátil evaluada, debido a sus muy buenos desempeños en todos los experimentos.

El *FLI* muestra un confiable valor de corte y buenos rendimientos usando sus valores finales para estudiar grandes muestras de órbitas y el *OFLI* muestra buenos rendimientos al estudiar casos particulares por medio de la evolución temporal del indicador. Por otro lado, las pocas ventajas mostradas por la *D* en las Secciones 4.1 y 4.2, son completamente cubiertas por otros indicadores. Por lo tanto, no debiera considerarse como parte de la CIsF.

Segunda aproximación de la CIsF.

De acuerdo a los resultados obtenidos en este Capítulo, la CIsF sugerida para el Hamiltoniano $H\mathcal{E}H$, estaría compuesta por: el *FLI/OFLI*, el *MEGNO* y el *GALI_{2N}*. Además, no hay razón para considerar que la CIsF mencionada sea apropiada para flujos Hamiltonianos solamente. La misma es también un sugerente paquete de CIs para el estudio de mapas, que mejora la eficiencia de la CIsF seleccionada en la Sección 4.1.7. Así, la CIsF mencionada cumple los requisitos para ser una primera aproximación en el estudio de un sistema Hamiltoniano general.

Parte de la CIsF sugerida, junto con el $OFLI_{TT}^2$ (para evitar, e.g., la generación de estructuras espúreas independientemente de la elección de los i.d.v.), el *APLE* y una variante del *MEGNO*, la aplicaremos en el Capítulo 5 para estudiar el sistema triaxial de galaxia elíptica propuesto por Muzzio *et al.* (2005).