

Universidad Nacional de La Plata

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

TESIS

Estudio de Teorías de Campos de Medida sobre redes

mediante la Técnica del Campo Promedio

H. A. Ceccatto

1985

ESTUDIO DE TEORIAS DE CAMPOS DE MEDIDA SOBRE REDES
MEDIANTE LA TECNICA DEL CAMPO PROMEDIO

Doctorando: Lic. Hermenegildo Ceccatto

Director de Tesis: Dr. Oscar Zandrón

Asesor Científico: Dr. Huner Fanchiotti

Tesis presentada ante la Facultad de Ciencias Exactas de la
Universidad Nacional de La Plata, para optar al título de Doctor en Física
ca.

La Plata, febrero de 1985

a la Memoria de mi Padre
a mi hijo, Federico

PROLOGO

Las *Teorías de Campos de medida* (TCM) se caracterizan por sus simetrías internas, las que se manifiestan como propiedades de invariancia frente a particulares transformaciones *locales* de los campos básicos (transformaciones de medida). La característica local (dependiente de la posición) es el rasgo distintivo de dichas transformaciones de simetría, que constituyen una generalización de la familiar invariancia de medida de la Electrodinámica.*

Las TCM engloban dentro de sí a la Electrodinámica Cuántica (QED), el prototipo de teoría de campos, al modelo unificado electro-débil, cuyas predicciones van siendo paulatinamente confirmadas experimentalmente, y a la Cromodinámica Cuántica (QCD), o Teoría de las interacciones "de color".

Esta última Teoría es al presente la única con pretensiones de explicar, a partir de primeros principios, a la interacción fuerte, entendida ésta como el remanente de la interacción de color entre partículas fundamentales (*quarks* y *gluones*), constituyentes de los hadrones.

La imagen de los hadrones como constituidos por partículas más elementales tiene su origen en experiencias realizadas alrededor de 1968 en Stanford (SLAC). Dichas experiencias mostraron que electrones muy energéticos pueden dispersarse, por impacto con un protón, con gran transferencia de energía y momento. Ello sugirió -en forma análoga a la inferencia de Rutherford sobre la estructura atómica a partir de las experiencias con partículas α -que la carga del protón está localizada en unos pocos centros dispersores internos. La energía y distribución angular final de los electrones indican que dichos centros dispersores se comportan como partículas puntuales de spin 1/2, apro-

* Históricamente, sin embargo, el origen de las TCM se vincula a la invariancia de isospin en física nuclear (Yang y Mills, 1954).

ximadamente no-interactivas entre sí. Tales partículas, a las que se designa / con el nombre de quarks , no han sido sin embargo halladas en estado libre.

Volviendo a la QCD, el mérito principal de esta teoría reside en su bien establecida *libertad asintótica*, que explica el comportamiento cuasi libre de los quarks dentro del protón. Tal propiedad implica que frente a cambios de escala $r \rightarrow \lambda^{-1} r$, la constante de acoplamiento efectiva $g_{ef}(\lambda)$ (que es una medida de la interacción entre quarks a escala λ) tiende a cero para $\lambda \rightarrow \infty$. Es decir, la QCD indica que a cortas distancias los quarks prácticamente no / interactúan entre sí.

Por otro lado, existe una creciente evidencia teórica que induce a creer que la QCD predice un crecimiento (lineal) de la interacción entre quarks a / grandes distancias, propiedad ésta conocida con el nombre de *confinamiento*. El establecimiento fehaciente de esta propiedad, que explicaría la no-observación de quarks libres, cae fuera de las posibilidades del método perturbativo usual de la Teoría de Campos (Técnicamente hablando ello se debe a que dicho método organiza el cálculo como un desarrollo en potencias de g_{ef} . Un desarrollo tal -cuya validez requiere un valor pequeño de g_{ef} - no puede dar cuenta de una propiedad como el confinamiento, que implica un crecimiento ilimitado de dicho parámetro).

El estudio del confinamiento en QCD requiere entonces la implementación de nuevas técnicas de cálculo. Para ello se hace necesario contar previamente con formas adecuadas de *regularizar globalmente* a la teoría. Es decir, formas alternativas de controlar las divergencias propias de cualquier teoría de campos, distintas de las técnicas de regularización usuales especialmente adaptadas al esquema perturbativo de cálculo.

Un requisito importante que debe cumplir una buena técnica de regularización es que mantenga las simetrías internas de la teoría. Ello se debe a / que el mantenimiento explícito de dichas simetrías en las etapas intermedias del cálculo, especialmente durante el procedimiento de eliminación de divergencias (renormalización), garantiza la invariancia de medida de los resultados finales. Es bien sabido, sin embargo, que una técnica tal, que conserve además las simetrías espacio-temporales (invariancia de Lorentz), no existe. (En caso contrario la teoría regularizada sería en sí misma una TCM sin divergencias ultravioletas).

Estas cuestiones llevaron a K. Wilson (1974) a regularizar a las TCM de una manera invariante de medida formulándolas sobre *redes* espacio-temporales. Es decir, definiendo campos básicos que toman valores sobre *sitios y uniones* de una red hipercúbica que reemplaza al espacio-tiempo continuo. La regularización buscada se obtiene así debido a que la presencia de la red -de espacio a - impone en el espacio de los momentos (1a. zona de Brillouin de la red recíproca) un límite $\Delta \sim 1/a$ al valor máximo del cuadrivector energía-momento de las partículas, evitando las divergencias ultravioletas usuales para $k_\mu \rightarrow \infty$ (ver Apéndice A).

Si bien esta formulación permite obtener una teoría regularizada invariante de medida, rompe evidentemente la invariancia de Lorentz de la Teoría de Campos (sólo se mantienen las simetrías de traslación y rotación discretas asociadas a la estructura de la red). Dicha invariancia deberá reestablecerse en alguna etapa posterior del cálculo mediante un adecuado paso al límite $a \rightarrow 0$ ($\Delta \rightarrow \infty$).

Debe señalarse que la acción sobre la red de una TCM no está definida / unívocamente. Los requerimientos básicos de que conserve las simetrías de la

acción continua y se reduzca a ésta en el límite (formal) $\alpha \longrightarrow 0$ no la / determinan unívocamente. Si bien invocando razones de simplicidad Wilson propuso una forma particular para dicha acción, expresiones mucho más complejas (acciones generalizadas) son -a priori- aceptables.

Las dos cuestiones arriba mencionadas -la necesidad de eliminar la estrutura discreta de la red para reobtener una TCM invariante de Lorentz y la ambigüedad existente en la elección de la acción sobre la red- pueden interpretarse, y eventualmente resolverse, en términos de la analogía formal , existente entre las TCM sobre redes y los sistemas de spin de la Mecánica / Estadística*.

En particular la reobtención de una TCM invariante de Lorentz está intimamente vinculada -en el lenguaje de la Mecánica Estadística- a la existencia de *puntos críticos* en la estructura de fases de la correspondiente TCM formulada sobre una red.

Para entender esta vinculación hay que tener presente que en las proximidades de un punto crítico (transición de fase de segunda especie) la *longi*tud de correlación de una teoría tiende a infinito. Dicho parámetro es una / medida del rango efectivo de la interacción entre los distintos grados de libertad del sistema; el hecho de que tienda a infinito indica que cada grado de libertad -spin, por ejemplo- interacciona de manera igualmente importante con los restantes grados de libertad, independientemente de la distancia a / la que se encuentren. Este comportamiento cooperativo de todo el sistema torna irrelevantes los detalles finos de la interacción a escala finita.

Es de esperar entonces que, tal como ocurre con los sistemas de spin,

* En términos de dicha analogía, por ejemplo, las transiciones de fase de los sistemas de spin corresponden a importantes cambios cualitativos en las propiedades del vacío (estado fundamental) de las TCM sobre redes (Kogut, 1979a).

en las proximidades de un punto crítico las TCM sobre redes tengan un comportamiento prácticamente independiente de la estructura granular de la red, que constituye una información sobre las características de la interacción a muy cortas distancias (del orden de a). Como consecuencia de ello, las zonas del diagrama de fases próximas a puntos críticos resultarán particularmente aptas para el estudio del límite continuo $a \rightarrow 0$

Incidentalmente, el hecho de que a efectos de dicho límite interesen sólo los puntos críticos del diagrama de fases resolvería la dificultad que plantea la no-unicidad de la acción sobre la red.

Para ello basta apelar a la propiedad de *universalidad* del comportamiento de sistemas muy diversos en las proximidades de sus respectivos puntos críticos. Dicha propiedad establece que el comportamiento crítico de un sistema viene determinado básicamente por las simetrías de los términos de interacción presentes*, por lo que las distintas acciones sobre la red representativas / de una única TCM llevarían -en la medida en que presentan las mismas propiedades de simetría- a idénticos resultados continuos para $a \rightarrow 0$

Las cuestiones hasta aquí comentadas -objetos de activo estudio al presente- produjeron en los últimos años un interés creciente por las estructuras de fases de TCM sobre redes. La riqueza de las mismas generó un activo campo / de investigación, el cual -si bien por motivos mayormente académicos al presente*- trasciende en mucho el marco inicial del problema del confinamiento en QCD

Distintas técnicas propias de la Mecánica Estadística han sido utilizadas para el estudio de las estructuras de fases de TCM sobre redes (desarrollos en altas y bajas temperaturas, aproximación del campo promedio, simulaciones / de Monte Carlo, etc.) siendo, indudablemente, el método (numérico) de Monte Caro

* Además de las simetrías de la interacción, el comportamiento crítico de un / sistema depende de su dimensionalidad - $d = 4$ en TCM sobre redes- y de las / características del parámetro de orden, cantidad ésta que indica la existencia de una transición de fase (Ma, 1976).

* Es interesante destacar que han sido señaladas (Kleinert, 1983) algunas analogías entre modelos de TCM sobre redes y una teoría de fusión de defectos en cristales recientemente desarrollada.

lo* el que ha producido los resultados más confiables, a juzgar por la precisión con que reproduce los pocos resultados exactos conocidos (obtenidos en general en modelos muy simples).

No obstante ello, la real comprensión y dilucidación del contenido físico de una teoría requiere también de su estudio a través de técnicas analíticas confiables.

Resulta entonces interesante -y a través de lo dicho quizás también necesario- reobtener diagramas de fases de TCM sobre redes mediante el uso de técnicas analíticas. El conocimiento previo sobre la estructura de dichos diagramas obtenido en forma numérica puede complementarse con la información que proporcionan dichas técnicas, posibilitándose además un chequeo recíproco de ambos métodos.

Entre las técnicas analíticas más frecuentemente utilizadas para la obtención de diagramas de fases se destaca, por su sencillez y probada efectividad, la llamada *aproximación de campo promedio* (ACP). La misma se basa en la evaluación aproximada de la función de partición del sistema a partir de la idea de campo autoconsistente, de uso frecuente en distintas ramas de la Física (campo molecular medio de Weiss en Física del Estado Sólido, método de Hartree-Fock en Física Atómica, etc.). Esta idea consiste, básicamente, en simular la interacción entre los distintos grados de libertad de un sistema por la interacción de los mismos con un campo externo, el cual se determina finalmente a través de alguna condición de consistencia. Normalmente dicha condición surge de extremar alguna cantidad relevante en el cálculo, tal como la energía libre en Mecánica Estadística o la energía del estado fundamental en Mecánica Cuántica.

* El método de Monte Carlo es un algoritmo que permite evaluar en forma aproximada la función de partición de sistemas finitos. Básicamente consiste en la generación de configuraciones del sistema $\{\sigma\}$ con probabilidad proporcional al factor de Boltzmann $\exp(-\beta \mathcal{E}\{\sigma\})$.

La ACP fue aplicada al estudio de diagramas de fases de TCM sobre redes apenas formuladas dichas teorías, sobre la base de la analogía formal -ya señalada- que las mismas tienen con los sistemas de spin. Sin embargo, una aparente ruptura de las simetrías básicas de las TCM generada por el método de cálculo relegaron esta técnica durante varios años.

Recientemente Drouffe (1980) y Brézin y Drouffe (1982) clarificaron esta cuestión, renovando el interés por la ACP. Más aún, mostraron como calcular correcciones sucesivas a dicha aproximación, mejorando substancialmente el poder predictivo del método.

El propósito principal de esta Tesis lo constituye el estudio, a través de la técnica del campo promedio, de diagramas de fases correspondiente a // TCM sobre redes con acciones generalizadas. La elección de tales acciones se hace a fin de verificar la hipótesis de universalidad, de manera de establecer la aceptabilidad o no de distintos modelos sobre redes como representativos de los correspondientes modelos continuos.

Una información más precisa y de carácter técnico sobre los trabajos / desarrollados puede hallarse en la introducción, mientras que un detalle completo de los temas tratados lo proporciona el índice que sigue a este prólogo.

INDICE

INTRODUCCION

Capítulo 1: TEORIAS DE CAMPOS DE MEDIDA

- 1.1) Generalidades básicas
- 1.2) Un ejemplo de TCM: Cromodinámica Cuañtica
- 1.3) Operadores Invariantes
- 1.4) Un criterio de confinamiento

Capítulo 2: TEORIAS DE CAMPOS DE MEDIDA SOBRE REDES

- 2.1) Formulaci3n lagrangiana euclídea de TCM sobre redes
- 2.2) Límite continuo de la acci3n sobre la red
- 2.3) Cuantificaci3n. Ventajas de la formulaci3n sobre redes
- 2.4) Límite continuo de TCM sobre redes

Capítulo 3: LA TECNICA DEL CAMPO PROMEDIO

- 3.1) Aproximaci3n de campo promedio: método variacional
- 3.2) Ruptura espontánea de simetría: el teorema de Elitzur
- 3.3) La ACP como el orden cero de un desarrollo asintótico
- 3.4) Degeneraci3n del punto de ensilladura. Simetrías continuas

Capítulo 4: CORRECCIONES A LA ACP PARA TCM BASADAS EN LOS GRUPOS $U(N)$ ($N \geq 1$)

- 4.1) Aproximaci3n de campo promedio
- 4.2) Correcciones gaussianas
- 4.3) Modos-ceros y métodos de coordenadas colectivas
- 4.4) Correcciones de orden $1/d$ provenientes de las fluctuaciones gaussianas
- 4.5) Resultados numéricos
- 4.6) Comentarios y conclusiones

Capítulo 5: ESTUDIO DE LA QED COMPACTA CON ACCION GENERALIZADA

- 5.1) Método variacional vs. método de desarrollo en el punto de ensilladura

- 5.2) Aproximación de campo promedio
- 5.3) Correcciones gaussianas
- 5.4) Correcciones de orden $1/d$
- 5.5) Comentarios y conclusiones

Capítulo 6: ESTUDIO DE LA TCM CON ACCION MIXTA FUNDAMENTAL-ADJUNTA BASADA EN EL GRUPO $SU(2)$

- 6.1) Aproximación de campo promedio
- 6.2) Correcciones gaussianas
- 6.3) Comentarios y conclusiones

COMENTARIOS GENERALES Y CONCLUSIONES FINALES

Apéndices:

- A) LA RED COMO REGULADOR
- B) ROTACION DE WICK
- C) EL METODO DE DESARROLLO ALREDEDOR DE UN PUNTO DE ENSILLADURA
- D) FIJADO DE MEDIDA SOBRE LA RED
- E) ALGUNOS RESULTADOS BASICOS VINCULADOS A LA TEORIA DE INTEGRACION EN GRUPOS COMPACTOS

REFERENCIAS

AGRADECIMIENTOS

INTRODUCCION

Como fuera dicho en el prólogo, la ACP fue aplicada al estudio de TCM sobre redes (Balian et al, 1975) apenas formuladas dichas teorías (Wilson, / 1974), sobre la base de la analogía formal que las mismas tienen con los sistemas de spin de la Mecánica Estadística (Kogut, 1979a).

Sin embargo, la aplicabilidad de la ACP a TCM sobre redes fue inmediatamente cuestionada por un resultado riguroso (Elitzur, 1975), que establece la imposibilidad de la ruptura espontánea de simetrías locales*. La ACP, al simular la interacción real a través de la interacción con un campo promedio, rompe la simetría de medida e induce la aparición de una "magnetización" espontánea (valor medio de vacío del campo no-nulo), en contradicción con el resultado antes mencionado.

Drouffe (1980) resolvió esta cuestión, indicando la forma de reestablecer, sobre los resultados finales, la invariancia de medida inicialmente perdida. Casi simultáneamente distintos autores (Creutz et al, 1979a,b Creutz, 1981; Moriarty, 1981; Bohr y Moriarty, 1981; Halliday y Schwimmer, 1981; Creutz y Moriarty, 1982, etc.) predijeron, a través del método de Monte Carlo (Binder, 1979), la existencia de transiciones de fase de primer / orden para TCM sobre redes con acción de Wilson basadas en distintos grupos de simetría, discretos (Z_2) y continuos ($U(N)$, $N \geq 2$; $SU(N)$, $N \geq 4$, $SO(3)$, etc.), con pocas excepciones a dicho comportamiento. Estas excepciones son, sin embargo, importantes, ya que corresponden a los modelos relevantes para la teoría de partículas elementales QED compacta, que corresponde al grupo de simetría $U(1)$ y experimenta una transición de segundo or

* En el contexto de la Mecánica Estadística ya Wegner (1971) había propuesto la versión invariante de medida del modelo de Ising como ejemplo de sistema que sufre transiciones de fase sin un parámetro de orden local, ni ruptura de la simetría de medida.

den (Lautrup y Nauemberg, 1980a) y QCD sobre redes, basada en el grupo $SU(3)$, que no presenta transición de fase (Creutz, 1980). Lo mismo ocurre con el modelo basado en el grupo $SU(2)$ (Lautrup y Nauemberg, 1980b). Debe señalarse / que el comportamiento diferenciado de estos modelos se obtiene por simulaciones de Monte Carlo en redes de dimensionalidad realista $d=4$; en $d=5$ los mismos pasan a tener transiciones de primer orden como el resto de los modelos considerados (Creutz, 1979; Bhanot y Creutz, 1980).

Los hechos arriba comentados -la eliminación de objeciones formales a la aplicabilidad de la ACP y la observación de transiciones de primer orden en la mayoría de los modelos de TCM sobre redes- generaron un renovado interés por la ACP, aproximación ésta que predice ese tipo de transiciones para modelos con acción de Wilson, debido a la estructura particular de dicha acción. Esta característica había sido ya observada por Wilson (1974) en su artículo original.

En una serie de artículos (Greensite y Lautrup, 1981; Greensite et al 1981; Cvitanovic et al, 1981) se recalcularon mediante la ACP los puntos de transición de fase previamente obtenidos a través del método de Monte Carlo. Si bien en estos trabajos se remarca la concordancia entre ambos métodos, / ésta es en parte forzada por la utilización de un criterio no-termodinámico para la localización de las transiciones (Müller y Rühl, 1982a). Por otro / lado, la ACP no reproduce el comportamiento de los modelos basados en los / grupos $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$ en $d=4$, prediciendo también en estos casos transiciones de primer orden, tal como en el resto de los modelos.

Más recientemente Brézin y Drouffe (1982) pusieron en forma más clara las ideas inicialmente propuestas por Drouffe para resolver la aparente contradicción ya comentada entre la ACP y el teorema de Elitzur. Mostraron

además, que dicha aproximación puede obtenerse como el orden cero del desarrollo en un punto de ensilladura (DPE) de la función de partición del sistema convenientemente reescrita*. Esta forma de deducir la ACP permite calcular correcciones sucesivas a dicha aproximación por inclusión progresiva de potencias crecientes de las fluctuaciones de los campos alrededor de sus valores medios (Lautrup, 1982).

El trabajo de Brézin y Drouffe implicó la posibilidad de mejorar substancialmente el poder predictivo de la técnica del campo promedio. Ello motivó que distintos autores (Flyvbjerg et al, 1982; Müller y Rühl, 1982b; Alessandrini et al, 1983, etc.) se dedicaran inmediatamente al cálculo de las primeras correcciones a la ACP, que implica considerar las fluctuaciones cuadráticas de los campos alrededor de sus valores medios (correcciones gaussianas).

En el caso de TCM sobre redes con simetrías continuas, el cálculo de correcciones gaussianas a la ACP requiere un fijado de medida en alguna etapa del cálculo. Ello se debe a que las fluctuaciones de los campos en la dirección de simetría generan divergencias (modos-ceros), de manera similar a lo que ocurre en la teoría de coordenadas colectivas (Gervais y Sakita, 1975; Polyakov, 1977). En la mayoría de los casos (Flyvbjerg et al, 1982; Müller y Rühl, 1982b; Müller et al, 1983) dichas divergencias se evitaron fijando, previamente al cálculo de la ACP, el equivalente sobre la red de la medida axial (Creutz, 1977). Otros autores restringieron la posibilidad de fluctuación de los campos después del cálculo de la ACP, recurriendo a métodos de coordenadas colectivas (Alessandrini et al, 1983), o bien imponiendo el equivalente sobre la red de la medida covariante general (Rühl, 1982).

* En realidad Brézin y Drouffe aplicaron por primera vez en TCM sobre redes un esquema de cálculo previamente desarrollado en el estudio de modelos de Mecánica Estadística (Brézin et al, 1976).

Se calcularon también correcciones a la ACP para TCM sobre redes con si metrías discretas (Alessandrini, 1982; Alessandrini et al, 1983b; Camarata et al, 1983). En estos casos no se requiere un fijado de medida dado que no aparecen modos-ceros.

En resumen, de los trabajos arriba citados referentes a correcciones a la ACP pueden señalarse las siguientes regularidades:

- a) Las correcciones gaussianas mejoran apreciablemente los resultados de orden cero, prediciendo valores con -típicamente- menos de un 10 % de dife / rencia con los obtenidos a través del método de Monte Carlo.
- b) En algunos casos dichas correcciones producen mejoras cualitativas en los resultados. Ello ocurre, por ejemplo, con los modelos basados en los grupos $SU(2)$ y $SU(3)$, donde las correcciones gaussianas eliminan la transi / ción espúrea que predice la ACP (Flyvbjerg et al, 1983a; Muller et al, 1983).
- c) Los resultados son fuertemente dependientes del tipo de fijado de medida utilizado en el cálculo.

Los trabajos hasta aquí citados consideraron exclusivamente modelos / con acciones sobre la red del tipo inicialmente propuesto por Wilson. Paralelamente a dichos trabajos, modelos con acciones más generales comenzaron a / ser investigados a través del método de Monte Carlo, con el fin de obtener / mayor información sobre el comportamiento del modelo standard y estudiar pro / piedades de universalidad de TCM sobre redes (Bhanot y Creutz, 1981; Bhanot, 1982; Bhanot y Dashen, 1982, etc.).

El estudio a través de simulaciones de Monte Carlo de modelos con accio / nes generalizadas requiere un gran tiempo de computación. Ello se debe básicamente a la presencia en dichas acciones de múltiples parámetros indepen //

dientes, que deben ser barridos en rangos no bien establecidos a priori. Tal dificultad hizo pronto apreciar (Bitar et al, 1982a) los beneficios de aplicar técnicas analíticas sencillas al estudio de dichos modelos: técnicas del grupo de renormalización tipo Migdal-Kadanoff (Bitar et al, 1982a,b), desarrollos en $1/N$ para acciones con simetría $SU(N)$ (Yu et al, 1982; Samuel, 1982; Jurkiewicz et al, 1983), métodos variacionales. (Zheng et al, 1982, 1983), etc.

La técnica del campo promedio fue también aplicada a estos modelos (Drouffe, 1981, 1982; Alberty et al, 1983, etc.), aunque con resultados no plenamente satisfactorios. Antes de discutir las dificultades que se presentaron, recordemos que la ACP puede obtenerse alternativamente como el orden cero del DPE de la función de partición del sistema o bien a través de un procedimiento variacional (Brézin y Drouffe, 1982). Esta última forma de deducir dicha aproximación muestra que la misma en realidad proporciona una cota inferior rigurosa a la energía libre del sistema, cota que coincide con el resultado exacto en el caso en que la dimensionalidad d de la red tienda a infinito (Drouffe, 1980).

Tal propiedad, característica de la ACP, sugiere que las correcciones a la misma pueden ser organizadas como un desarrollo en potencias de $1/d$. Esta particularidad, verificada en el caso de modelos con acción de Wilson (Alessandrini et al, 1983), fue cuestionada para modelos con acciones generalizadas (Ghoroku, 1983). También fue puesto en duda que el procedimiento variacional utilizado en el caso del modelo standard para obtener la ACP conduzca necesariamente a dicha aproximación para modelos ampliados (Zheng et al, 1982).

La forma de evitar estas dificultades requiere una leve generalización

del trabajo de Brézin y Drouffe. Dicha generalización consiste, básicamente, en la introducción de más de un campo externo en el cálculo, según la estructura de la acción extendida considerada (Ceccatto, 1984a). Se obtiene así, / tanto a través de un procedimiento variacional (Zheng et al, 1983), como mediante un DPE a orden cero de la función de partición del sistema convenientemente reescrita (Alessandrini y Boucaud, 1983), un resultado que es exacto para $d \rightarrow \infty$. Tal resultado puede entonces con propiedad ser considerado para d finita, la correcta ACP para modelos con acciones generalizadas.

El propósito principal de esta Tesis es el estudio, mediante la generalización arriba comentada de la técnica del campo promedio, de la estructura de fases de algunos de estos modelos ampliados de TCM sobre redes. En particular se considerará

- a) un modelo basado en el grupo $U(1)$ (QED compacta) con una acción extendida que contiene dos parámetros independientes, correspondientes al término / de plaqueta de Wilson y a su cuadrado respectivamente (Capítulo 5), y
- b) un modelo basado en el grupo $SU(2)$, con una acción extendida que contiene al término de plaqueta de Wilson en las representaciones fundamental y adjunta del grupo (acciones mixtas) (Capítulo 6).

El interés en estos modelos reside en la propia riqueza de sus estructuras de fases y en la posibilidad de investigar la existencia o no -en el plano definido por los parámetros contenidos en las respectivas acciones- de conexiones analíticas entre las fases confinante y no-confinante de dichos modelos. La existencia o no de tales conexiones resulta relevante a efectos de establecer las propiedades físicas de los correspondientes modelos continuos / (Kadanoff, 1977).

Previo al estudio de los modelos mencionados en a) y b) se aplicará la

técnica del campo promedio al modelo standard basado en el grupo de simetría $U(N)$. (Capítulo 4). Este trabajo constituye una generalización para $N > 1$ / del trabajo de Alessandrini et al (1983). El mismo tiene por objeto establecer, en el caso de grupos no-abelianos, la conveniencia o no de fijar la medida sobre las fluctuaciones de los campos en lugar de hacerlo a orden cero, -es decir, antes del cálculo de la ACP. Servirá también para discutir, sobre un modelo más simple, detalles técnicos del cálculo de correcciones gaussianas a la ACP.

Además de los trabajos mencionados se han incluido en esta Tesis tres capítulos introductorios (Capítulos 1, 2 y 3). En el primero de ellos se recuerdan brevemente cuestiones básicas vinculadas a TCM en el continuo y se definen el operador de "cuerda" y el operador "lazo" de Wilson, importantes en la formulación y estudio de TCM sobre redes. La formulación sobre redes de las TCM se discute detalladamente en el capítulo 2, en el cual se incluye también un análisis sobre el límite continuo de dichas teorías. En el capítulo 3 se presenta la técnica de cálculo básica, que será utilizada en los capítulos posteriores (4, 5 y 6) para el estudio de los diagramas de / fases de los modelos más arriba mencionados.

Finalmente, una última sección contiene algunos comentarios generales sobre la técnica del campo promedio y las conclusiones finales que pueden / extraerse de los trabajos desarrollados en esta Tesis. Además, en una serie de apéndices (A a E) se discuten en detalle distintas cuestiones técnicas / que a juicio del autor resultó conveniente separar del texto principal. En particular el Apéndice C -que contiene una introducción matemática al método del DPE- constituye un complemento importante a dicho texto principal.

Capítulo 1: TEORIAS DE CAMPOS DE MEDIDA

En la primera parte de este capítulo se discuten brevemente generalidades básicas sobre Teorías de Campos de Medida (TCM). No se pretende con ello hacer una introducción al tema sino simplemente precisar algunos conceptos y definir notación. Una introducción detallada a TCM puede hallarse en Abers y Lee (1973) o, algo más rigurosa, en Fadeev y Slavnov (1980).

Posteriormente, y como ejemplo concreto de TCM, se describe la Cromodinámica Cuántica (QCD) o teoría de las interacciones de color. Marciano y Pagels (1978) y Bander (1981) proporcionan información completa sobre QCD.

En la última parte del capítulo se introduce el concepto de operador / de "cuerda", relevante en la formulación de TCM sobre redes, y se establece un criterio de confinamiento de quarks estáticos. Dicho criterio involucra / exclusivamente al campo de medida, lo que justifica que posteriormente se es tudien modelos de TCM puros, es decir, sin campos de materia.

1.1) GENERALIDADES BASICAS

1.1a) Nociones sobre la teoría de grupos de Lie

Antes de reseñar las características esenciales de las TCM recordaremos aquí algunas nociones elementales necesarias sobre grupos continuos (de Lie) (Gilmore, 1974).

Consideremos un grupo de Lie G . Cualquier elemento $g \in G$ (próximo a / la identidad) puede parametrizarse en la forma

$$g = \exp \left(i \sum_a \varepsilon^a T_a \right) \approx 1 + i \sum_a \varepsilon^a T_a \quad (1.1)$$

En esta expresión T_a ($a = 1, \dots, \dim G$) designa a los generadores del grupo y ε^a a los parámetros que caracterizan al elemento g .

Los generadores (hermíticos) T_a verifican las relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = i \sum_c f_{ab}^c T_c \quad (1.2)$$

donde las f_{ab}^c son las constantes de estructura de G. Normalizando los T_a de manera que

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab} \quad (\text{Tr} = \text{traza}) \quad (1.3)$$

las f_{ab}^c satisfacen $f_{ab}^c = f_{abc}$ y son totalmente antisimétricas.

Una representación de G particularmente importante es la llamada representación adjunta, constituida por matrices reales g_{ab} , de orden $n = \dim G$, definidas por

$$g T_b g^{-1} = \sum_a T_a g_{ab} \quad (1.4)$$

Las relaciones de conmutación (1.2) definen un álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a G- cuyos elementos vienen dados por

$$A = \sum_a A^a T_a$$

con $A^a \in \mathbb{R}$.

1.1b) Formulación clásica de TCM

La acción de una teoría de campos viene dada por

$$A = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x$$

donde \mathcal{L} , la densidad lagrangiana, es función de los campos básicos $\phi(x)$

y de sus derivadas $\partial_\mu \Phi(x)$.

Supongamos que \mathcal{L} sea invariante frente a transformaciones globales / de los campos

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = g \Phi(x)$$

donde g es un elemento de un grupo de simetría continuo G (compacto, semisimple).

Si se permite que los campos se transformen de manera distinta en cada punto del espacio (transformaciones locales)

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = g(x) \Phi(x) \quad (1.5)$$

los términos en \mathcal{L} que contienen a $\partial_\mu \Phi$ no resultarán ya invariantes.

Una forma de reestablecer la invariancia de la teoría consiste en introducir (Yang y Mills, 1954) campos compensadores A_μ^a ($a = 1, \dots, \dim G$) a través del siguiente reemplazo (prescripción minimal):

$$\partial_\mu \Phi(x) \longrightarrow D_\mu \Phi(x) = \partial_\mu + i A_\mu(x) \quad (1.6)$$

con

$$A_\mu(x) = \sum_a A_\mu^a T_a \quad (\in \mathcal{G}) \quad (1.7)$$

Si se exige que frente a (1.5) A_μ se transforme como

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = g(x) A_\mu(x) g^{-1}(x) + i g(x) \partial_\mu g^{-1}(x) \quad (1.8)$$

la derivada "covariante" $D_\mu \Phi$ (1.6) se transformará de igual manera que / el campo Φ , reestableciéndose la invariancia de \mathcal{L} .

Se deben incluir, por supuesto, términos de energía cinética para A_μ . Para ello conviene introducir (Utiyama, 1956) el tensor de intensidades de / campo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i [A_\mu, A_\nu] \quad (1.9)$$

el cual transforma frente a (1.8) en la forma

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = g(x) F_{\mu\nu}(x) g^{-1}(x)$$

En consecuencia, con $F_{\mu\nu}$ se puede construir el invariante bilineal

$$L_M = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.10)$$

donde g es una constante arbitraria (cte de acoplamiento).

La densidad lagrangiana total de la TCM resultante es entonces

$$L_{TCM} = L(\Phi, \partial_\mu \Phi) + L_M(A_\mu) \quad (1.11)$$

Las ecuaciones (1.6)~(1.12) constituyen una generalización de las correspondientes expresiones de la electrodinámica. En el caso particular de esta teoría el grupo de simetría interno es $U(1)$. Debido al carácter abeliano del mismo, en la Electrodinámica no aparecen en (1.10) los términos de autointeracción entre cuantos del campo de medida A_μ .

1.1c) Cuantificación

La forma más sencilla de cuantificar una TCM hace uso de la integral de Feynman-Kac (Feynman, 1948). Este método proporciona directamente los valores de expectación de vacío de operadores ordenados cronológicamente:

$$\langle 0 | \hat{\Omega}_1(x_1) \dots \hat{\Omega}_n(x_n) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}A_\mu (\Omega_1(x_1) \dots \Omega_n(x_n)) e^{iA} \quad (1.12a)$$

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A_\mu \exp(iA) \quad (1.12b)$$

En estas expresiones A es la acción total del sistema

$$A = \int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}) d^4x$$

considerada como un funcional de los campos clásicos ϕ y A_μ .

El símbolo \mathcal{D} implica una adecuada medida en el espacio funcional de dichos campos.

Como es sabido, a fin de evitar infinitos provenientes de la degeneración en las configuraciones debido a la invariancia de medida, es necesario / considerar en (1.12) una única configuración representante de cada clase de equivalencia. Ello puede hacerse a través de un fijado de medida mediante el procedimiento de Fadeev-Popov (Fadeev y Popov, 1967).

Dada la condición de medida

$$\mathcal{F}'_a(A_\mu, \phi) = 0 \quad a = 1, \dots, \dim G$$

el fijado de medida en (1.12) se efectúa introduciendo dentro del integrando la identidad

$$1 = \Delta_{FP} \int \frac{d\mu(g_x)}{V(g_x)} \delta[\mathcal{F}'_a(A_\mu^g, \phi^g)] \quad (1.13)$$

En esta expresión Δ_{FP} es el determinante de Fadeev-Popov:

$$\Delta_{FP} = \det \begin{pmatrix} \delta \mathcal{F}'_a \\ \delta \bar{E}^b & \epsilon^b_0 \end{pmatrix}$$

y ϕ^g y A_μ^g simbolizan a los campos transformados (1.5) y (1.8) respectivamente. La integración en (1.13) se efectúa en cada punto x sobre la medida invariante en el grupo $d\mu(g_x)$ (medida de Haar) (Weyl, 1939).

El resultado final es:

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^n \Omega_i(x_i) | 0 \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A_\mu \left(\prod_{i=1}^n \Omega_i(x_i) \right) \Delta_{FP} \prod_a \delta(\mathcal{F}'_a) e^{iA} \quad (1.14a)$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP} \prod_a \delta(\mathcal{F}'_a) e^{iA} \quad (1.14b)$$

Por supuesto, el tratamiento perturbativo de esta expresión lleva a las divergencias propias de cualquier teoría de campos, divergencias éstas que deben ser tratadas por los procedimientos usuales de regularización y renormalización.

1.2) UN EJEMPLO DE TCM: CROMODINAMICA CUÁNTICA

La Cromodinámica Cuántica (QCD) o Teoría de las interacciones de color / tiene como constituyentes básicos campos de spin-1/2 ψ_α^F (quarks). En esta notación se han suprimido los índices spinonales y (F, α) designan grados de libertad internos de los campos. En particular F (de "flavour") corresponde a los distintos tipos de quarks (1 = up, 2 = down, 3 = strange, 4 = charm etc.) y no juega ningún papel en la dinámica. El índice α hace referencia / al grado de libertad de color, de manera que $(\psi^F)_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) / sea un espacio base para la representación fundamental del grupo de simetría / interno $G \equiv SU_c(3)$.

Los campos compensadores de spin-1 A_μ^a (gluones), con $a = 1, 2, \dots, 8$ pueden juntarse en una matriz de color que toma valores en el álgebra de Lie / del grupo, tal como en (1.7).

Los generadores T_a normalizados según (1.3) vienen dados por

$$(T_a)_{3 \times 3} = \lambda_a / \sqrt{2}$$

donde las λ_a son las matrices de Gell-Mann.

Definiendo la derivada covariante D_μ y el tensor intensidad de campo de acuerdo con (1.6) ~ (1.9), el lagrangiano (1.11) de la teoría clásica viene dado por (Marciano y Pagels, 1977):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \sum_F \left[i \bar{\psi}^F \not{\partial}_\mu \psi^F - m_F \bar{\psi}^F \psi^F \right] - \frac{1}{4g^2} \text{tr} (F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a) \quad (1.15) \\ &= \sum_F \left[i \bar{\psi}_\alpha^F \not{\partial}^\mu \left(\partial_\mu - i A_\mu^a \frac{\lambda_a^{\alpha\beta}}{12} \right) \psi_\beta^F - m_F \bar{\psi}_\alpha^F \psi_\alpha^F \right] - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \end{aligned}$$

En esta expresión aparece g , la única constante de acoplamiento de la teoría, y m_F , las masas de los distintos tipos de quarks. \mathcal{L}_{QCD} es invariante frente a las transformaciones de medida:

$$\psi^F(x) \rightarrow g(x) \psi^F(x) \quad \bar{\psi}^F(x) \rightarrow \bar{\psi}^F(x) g^{-1}(x) \quad (1.16a)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow g(x) A_\mu(x) g^{-1}(x) + i g(x) \partial_\mu g^{-1}(x) \quad (1.16b)$$

donde $g(x) = \exp \left(i \sum_a \varepsilon^a \lambda_a / 12 \right)$ es un elemento del grupo $SU_c(3)$ local.

1.3) OPERADORES INVARIANTES

Todas las magnitudes físicas estarán representadas en la versión cuántica de la teoría por operadores invariantes de medida. En consecuencia, para construir observables ni los campos ψ , $\bar{\psi}$, A_μ ni aún $F_{\mu\nu}^a$ sirven a dicho fin. A simple vista los operadores de que se dispone son $\psi \bar{\psi}$ y

$\text{Tr} (F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^A)$, pero ellos forman una clase muy restrictiva. Una clase de operadores invariantes de medida mucho más grande puede construirse con la ayuda de los operadores de "cuerda" (Bander, 1981):

$$\hat{U}(x,y,c) = P_c \exp \left[\int_x^y A(z).dz \right] \quad (1.18)$$

El símbolo P_c indica que la exponencial debe ser ordenada a lo largo / de la curva c . Si se divide dicha curva en N segmentos $\overline{z_i z_{i+1}}$, con / $z_N = y$ y $z_0 = x$, entonces:

$$P_c \exp \left[\int_x^y A(z).dz \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} \exp \left[(z_{i+1} - z_i) \cdot A(z_i) \right]$$

Bajo transformaciones de medida \hat{U} se transforma como

$$\hat{U}(x,y,c) = g(x) \hat{U}(x,y,c) g^{-1}(y)$$

Entre los operadores invariantes de medida que pueden construirse con / \hat{U} los dos más útiles son

$$W(c) = \text{Tr} \hat{U}(x,x,c) \quad (1.19)$$

el cual depende de la curva c pero no del punto x, y

$$M(x,y,c) = \psi(x) \hat{U}(x,y,c) \bar{\psi}(y) \quad (1.20)$$

que puede interpretarse como un operador de creación de un mesón. Una parte / de una función de onda mesónica contendría un quark en y y un antiquark en x . Tal estado puede ser creado por el operador $\psi(x) \bar{\psi}(y)$ actuando sobre / el vacío. Sin embargo, el estado así creado no sería invariante de medida. Una forma de remediar esto, es introducir un operador de cuerda entre x e y , /

lo cual conduce al operador M de (1.20). Por supuesto, la función de onda de un mesón tendrá una estructura más compleja. No obstante, si los quarks se suponen estáticos la mayor complejidad residirá sólo en la complicada superposición de cuerdas que unan x e y .

1.4) UN CRITERIO DE CONFINAMIENTO

Los quarks no han sido hallados experimentalmente como partículas libres sino sólo como constituyentes de los hadrones. En consecuencia, uno de los problemas centrales de la QCD es mostrar que dichas partículas se encuentran confinadas formando estructuras hadrónicas caracterizadas por ser singletes de color (invariantes frente a $SU_c(3)$).

Una pregunta obvia que uno puede formularse cuando busca criterios que establezcan dicho confinamiento de los quarks es: ¿cuál es la energía de un estado con un antiquark en $\vec{x} = \vec{0}$ y un quark en $\vec{x} = \vec{R}$? Basándonos en la discusión de la última parte del punto anterior, dicho estado será de la forma:

$$|\Psi(0), \bar{\Psi}(R)\rangle = \sum_c \Psi[c] M[(0,0), (R,0), c] |0\rangle$$

donde la suma sobre las curvas c que unen 0 y R es una manera simbólica de indicar una superposición, con amplitudes $\Psi[c]$, de estados asociados a distintas curvas.

Denotando con $E_0(R)$ la energía fundamental de dichas configuraciones, si no hay confinamiento uno espera que para R grande

$$E_0(R) \longrightarrow 2m$$

donde m es la masa renormalizada de los quarks estáticos. Si hay confinamiento, en cambio, la energía crecerá con R . Aunque cualquier crecimiento que implique $E_0 \longrightarrow \infty$ para $R \longrightarrow \infty$ es consistente con el confinamiento, los resultados hasta ahora obtenidos indicarían un comportamiento de $E_0(R)$ //

lineal con R:

$$E_0(R) \rightarrow \sigma R \quad (R \rightarrow \infty) \quad (1.21)$$

donde σ es una constante, llamada "tensión de la cuerda", que puede ser determinada a través de la espectroscopía de quarks pesados:

$$\sigma \approx 0.2 \text{ GeV}^2$$

El problema reside entonces en trasladar el estudio del comportamiento de E_0 a propiedades de los valores de expectación de vacío de operadores apropiados.

La superposición de dos estados mesónicos en tiempos euclídeos distintos es:

$$M(T, R) = \langle 0 | M[(0, \bar{0}), (0, \bar{R}); c] M^\dagger[(T, \bar{0}), (T, \bar{R}); c] | 0 \rangle \quad (1.22)$$

donde por c tomaremos la línea recta de $\bar{0}$ a \bar{R} . Intercalando un conjunto completo de autoestados del hamiltoniano del sistema, trabajando en un espacio euclídeo (Apéndice B) resulta:

$$M(T, R) = \sum_n \langle 0 | M[(0, \bar{0}), (0, \bar{R}); c] | n \rangle \langle n | M^\dagger[(T, \bar{0}), (T, \bar{R}); c] | 0 \rangle e^{-E_n T} \quad (1.23)$$

Para T grande el comportamiento de (1.23) es:

$$M(T, R) \sim e^{-E_0(R) T} \quad (1.24)$$

con $E_0(R)$ la energía de separación de un quark y un antiquark, cuyo comportamiento buscamos.

Calcularemos ahora en forma directa $M(T, R)$. La ecuación de movimiento / (euclidiana) de los campos de quark estáticos es:

$$i\delta^0(\partial_0 - i\sigma t_0)\psi = im\psi \quad (1.25)$$

la cual puede deducirse del lagrangeano (1.15) después de haber eliminado las derivadas espaciales sobre dichos campos debido a su naturaleza estática.

Aunque en la medida $A_0 = 0$ (1.25) es una ecuación de campo libre, resolviéndola en presencia de A_0 se obtendrá un criterio de confinamiento independiente de la medida.

El propagador de los quarks es

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}^\alpha(t, \bar{x}) \psi^\beta(t', \bar{x}') | 0 \rangle &= \\ &= P_c \exp \left[i \int_{t'}^t dz A_0(z, \bar{x}) \right] \langle 0 | \bar{\psi}^\alpha(t, \bar{x}) \psi^\beta(t', \bar{x}') | 0 \rangle_{\text{free}} \quad (1.26) \\ &\approx \exp(-m|t-t'|) \hat{U}[(t, \bar{x}), (t', \bar{x}'), c'] \delta^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

donde c' es la línea paralela al eje de tiempo que va de x' a x . Combinando / las ecuaciones (1.20), (1.22) y (1.26) se obtiene:

$$M(T, R) \sim \exp(-2mT) W(c) \quad (1.27)$$

En esta expresión $W(c)$ es el operador definido en (1.19) ("lazo" de Wilson) y c es la curva de la fig. (1.1)

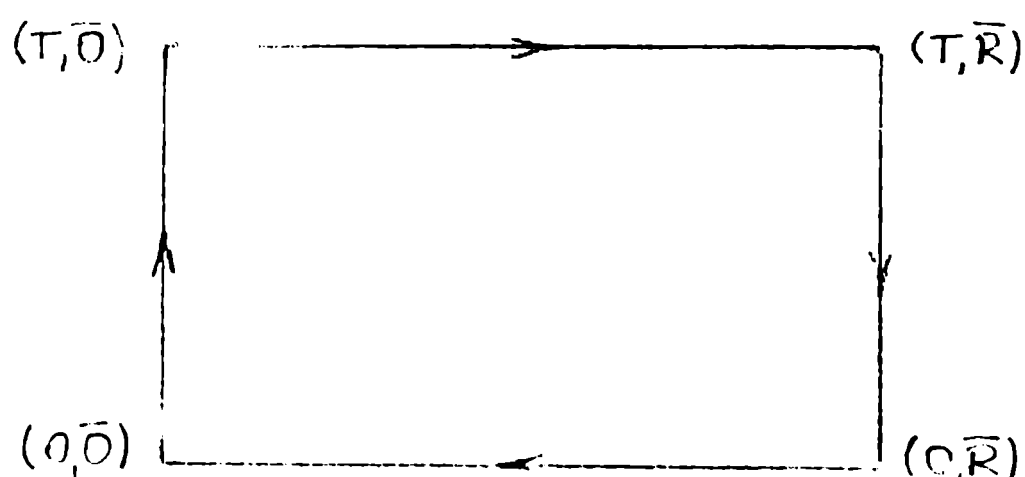


fig. (1.1)

comparando (1.24) y (1.27) resulta:

$$W(c) \sim \exp \left\{ -T [E_0(k) + 2m] \right\}$$

Si la teoría conduce al confinamiento de los quarks y el comportamiento de $E_0(R)$ dado por (1.21) es el correcto se tendrá:

$$W(c) \sim \exp(-\sigma TR) = \exp[-\sigma A(c)] \quad (1.28a)$$

donde $A(c)$ es el área del rectángulo bordeado por c . Nótese que de esta condi
ción sobre $W(c)$ ha desaparecido toda referencia a los quarks.

Generalizando (1.28a) a una curva cerrada arbitraria, Wilson (1974) pro
puso adoptar tal comportamiento de W como indicativo de que la QCD confina co
lor. En el caso general $A(c)$ es el área minimal de las superficies bordeadas /
por c .

Si la teoría no confina el comportamiento esperado es

$$W(c) \sim \exp[-\mu P(c)] \quad (1.28b)$$

donde $P(c)$ es el perímetro de la curva considerada.

Como fuera dicho en la introducción a este capítulo, el hecho que el con
finamiento o no de quarks estáticos pueda establecerse estudiando el comporta-
miento del operador (1.19) (que depende sólo del campo de medida), justifica /
el estudiar modelos de medida puros (sin campos de materia). La presencia de /
quarks podría, no obstante, modificar de una manera importante el comportamiento
de dichos modelos puros.

Capítulo 2: TEORIAS DE CAMPOS DE MEDIDA SOBRE REDES

La formulación de TCM sobre redes (Wilson, 1974) tiene su motivación / histórica en la necesidad de regularizar no-perturbativamente a la QCD. La / introducción de un retículo espacio-temporal proporciona una adecuada regula / rización global de la teoría, independiente del método perturbativo usual.

En esta formulación se pone especial énfasis en el mantenimiento expli / cito de la invariancia de medida local de las TCM.

El precio que se paga por ello es la pérdida de la invariancia de Lo- / rentz en los cálculos intermedios, invariancia que debe restablecerse en los resultados finales mediante un procedimiento de límite al continuo gobernado por las ecuaciones del grupo de renormalización (Hasenfratz, 1983).

En la primera parte de este capítulo se presenta la formulación lagran / giana euclídea de TCM sobre redes (Drouffe y Itzykson, 1978). Posteriormente se discuten las ventajas de dicha formulación, destacándose las analogías for / males que la misma tiene con la Mecánica Estadística (clásica) de los siste / mas de spin (Kogut, 1979a). Finalmente, en la última parte de este capítulo / se analiza la forma de reobtener una teoría continua con resultados invarian / tes de Lorentz.

2.1) FORMULACION LAGRANGIANA EUCLIDEA DE TCM SOBRE REDES

Si bien el uso de la integral funcional de Feynman-Kac simplifica el / procedimiento de cuantificación de las TCM, en realidad expresiones tales co / mo (1.14) no están bien definidas. A fin de tener una mejor chance de que di / chas expresiones converjan es usual efectuar la rotación de la teoría a un / espacio euclídeo (Apéndice B). Dicha rotación evita el desagradable comporta / miento oscilatorio de $\exp(iA)$ llevándolo a la forma $\exp(-A_E)$ (ec. (B.3)). Sin embargo, aún con esta prescripción se debe seleccionar precisamente el / espacio funcional de los campos clásicos ϕ y la medida \mathcal{D} dentro de dicho es / pacio (a menos que nos limitemos a teoría de perturbaciones dada en términos de integrales gaussianas). Se requiere además un procedimiento de regulariza /

ción de la teoría para darle sentido matemático a expresiones plagadas de divergencias propias de la misma teoría (divergencias ultravioletas).

A fin de evitar estas dificultades es conveniente formular a las TCM / en un espacio-tiempo discreto -normalmente una red hipercúbica de lado a - / Si bien la manera más sencilla de hacerlo sería partir de la acción euclídea continua, sustituir las derivadas por diferencias finitas y reemplazar la integración sobre el espacio euclídeo por una suma sobre sitios de la red, como resultado se obtendría una acción discreta no invariante de medida. Debido a cuestiones vinculadas con el procedimiento de renormalización, en el límite continuo $a \rightarrow 0$ (suponiendo que exista) no recobraríamos una teoría invariante de medida.

En consecuencia, una de las preocupaciones fundamentales al definir la acción sobre la red es mantener las simetrías internas del modelo continuo.

2.1a) Invariancias globales

Analizaremos la acción de campos de materia (bosónicos y/o fermiónicos) preocupándonos inicialmente por conservar las invariancias globales de los / modelos.

Para el caso de un conjunto de campos escalares libres $\varphi^a(x)$, $a = / 1, 2 \dots n$ (denotados colectivamente ϕ), el reemplazo obvio sobre una red / d -dimensional es:

$$\int d^d x \rightarrow a^d \sum_x \quad (2.1a)$$

$$d\varphi \rightarrow \frac{1}{a} (\phi_{x+a\hat{\mu}} - \phi_x) \quad (2.1b)$$

$$\int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi^\dagger + \frac{1}{2} m \Phi \Phi^\dagger \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow - \frac{a^{d-2}}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \Phi_x \Phi_y^\dagger + \left(\frac{m^2 a^d}{2} + d a^{d-2} \right) \sum_x \Phi_x \Phi_x^\dagger \quad (2.2)$$

donde $\hat{\mu}$ es el versor en la dirección μ -ésima de los ejes de la red, $x = / / = \sum_{\mu=1}^d n_\mu a \hat{\mu}$ un sitio de la red y $\langle xy \rangle$ significa suma sobre pares orientados de sitios vecinos próximos (fig. 2.1).

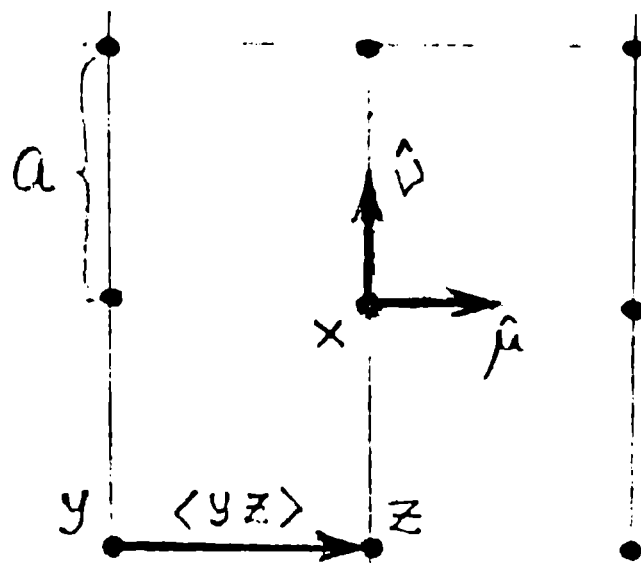


fig. 2.1

Una característica destacable de (2.2) es la bilocalidad en el término / cinético.

Para un conjunto de campos fermiónicos $\psi^a(x)$, un reemplazo similar / llevaría a

$$\int d^d x \bar{\psi}(0|m)\psi \rightarrow \frac{a^{d-1}}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\psi}_x \delta_{xy} \psi_y + m a^d \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x \quad (2.3)$$

En esta expresión $\delta_{xy} = \gamma \cdot (y-x)/2 = \pm \gamma_{\hat{\mu}}$, con γ el conjunto de matrices de Dirac euclídeas que satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma_u, \gamma_v\} = 2 \delta_{uv}$$

Sin embargo, el reemplazo (2.3) puede introducir estados espúreos. Para hacer evidente este hecho comparemos las acciones bosónicas (2.2) y fermiónicas (2.3) en el espacio de los momentos.

Usando la transformada de Fourier

$$\Phi_x = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{\Phi}(k)$$

donde la integral viene dada sobre la primera zona de Brillouin de la red re
ciproca ($|k_\mu| \leq \pi/a$), la acción (2.2) toma la forma

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \sum_\mu \frac{4}{a^2} \sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right) + m^2 \right\} \tilde{\Phi}^\dagger(-k) \tilde{\Phi}(k)$$

Como resultado, cada modo contribuye a la acción en una cantidad

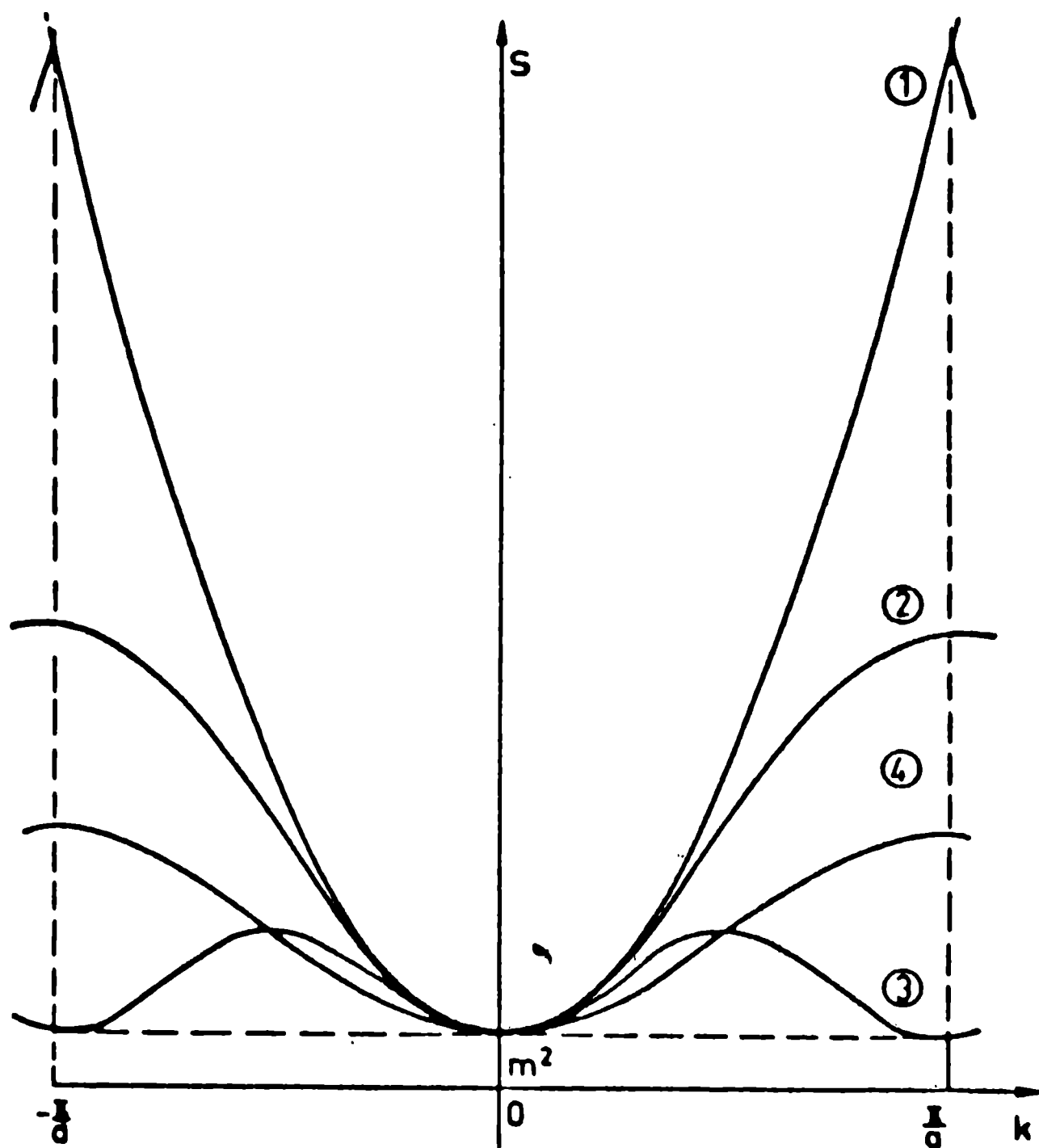
$$m^2 + (4/a^2) \sum_\mu \sin^2(ak_\mu/2)$$

en lugar de la forma standard ($m^2 + k_\mu k_\mu$) (fig. 2.2). Sin embargo, ambas /
curvas tienen un único mínimo en la primera zona de Brillouin para $k = 0$, /
coincidiendo en las proximidades de este punto hasta términos de orden ($a^2 k^4$)
Esto garantiza que el límite continuo sea el correcto.

Para la acción fermiónica un tratamiento similar llevaría a un compor
tamiento

$$m^2 + (1/a^2) \sum_\mu \sin^2(ak_\mu)$$

En este caso aparecen dos mínimos iguales en la primera zona de Brillo
uin. Uno en $k = 0$, que proporciona el límite continuo correcto y el otro al-
rededor de $k = \pm \pi/a$, que constituyen estados espúreos de momento infi
nito para $a \longrightarrow 0$.



1) Standard 2) Bosónica 3) Fermiónica 4) Prescripción de Wilson

fig. 2.2

Existen varias prescripciones para eliminar tales estados espúreos, / siendo la más sencilla -aunque bastante arbitraria- la propuesta por Wilson / (1975). La misma consiste en modificar levemente la acción (2.3) tomando

$$\int dx^d \bar{\Psi} (\not{\partial} + m) \Psi = \int dx^d \bar{\Psi}_x (1 + \not{\partial}_{xy}) \Psi_y + (m a^d - d a^{d-1}) \sum_x \bar{\Psi}_x \Psi_x \quad (2.4)$$

Esta prescripción incrementa el mínimo secundario sin influenciar el / comportamiento para $k \sim 0$

Supongamos ahora que la acción (2.2) sea invariante frente a las transformaciones de un grupo de simetría continuo (grupo de Lie) G. Los campos constituirán un espacio base para una representación D de dicho grupo, es de cir, frente a una transformación $g \in G$ se transformarán como:

$$\varphi_x^a \longrightarrow D(g)^a_b \varphi^b$$

Los términos cuadráticos vendrán dados explícitamente por

$$\sum_x \phi_x \phi_x^+ = \sum_x \phi_x^a g_{ab} \phi_x^b$$

y

$$\sum_{\langle xy \rangle} \phi_x \phi_y^+ = \sum_{\langle xy \rangle} \phi_x^a g_{ab} \phi_y^b \quad (2.5)$$

donde g_{ab} es una forma cuadrática invariante ante G . Un análisis similar / es válido para fermiones.

2.1b) Invariancias locales

Si permitimos que las transformaciones g dependan del sitio x de la / red, es decir, ampliamos la invariancia del modelo a las transformaciones / $g_x \in \prod_x G_x$, el término bilocal (2.5) ya no permanecerá invariante.

Como en el caso continuo, se introducen entonces nuevos grados de libertad en el sistema para implementar la invariancia de medida local del modelo. Un nuevo campo U_{xy} , asociado a cada unión ("link") orientada $\langle xy \rangle$ (lado de un hipercubo elemental entre los puntos x e y vecinos próximos, fig. 2.3), y que toma valores en el grupo G permite definir una derivada covariante

$$D_\mu \phi_x^a = \frac{1}{a} [D(U_{xy})_{ab} \phi_y^b - \phi_x^a] \quad (y = x + a\hat{\mu}) \quad (2.6)$$

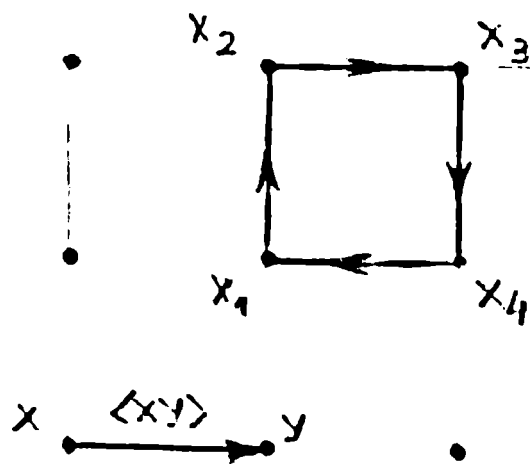


fig. 2.3

El exigir que $D_\mu \phi_x^a$ transforme como ϕ_x^a lleva a la siguiente ley de transformación para U_{xy} :

$$U_{xy} \longrightarrow g_x U_{xy} g_y^{-1} \quad (2.7)$$

Condiciones de hermiticidad conectan los campos de medida U_{xy} asociados a uniones que difieren en orientación:

$$U_{xy} = U_{yx}^{-1}$$

Con estas prescripciones, si en la acción (2.2) efectuamos el reemplazo

$$\partial_\mu \phi_x \longrightarrow D_\mu \phi_x$$

generaremos un término bilocal que, en lugar de (2.5) vendrá dado por

$$\sum_{\langle xy \rangle} \phi_x D(U_{xy}) \phi_y^\dagger$$

el cual es ahora evidentemente invariante local como consecuencia de (2.7).

Debemos ahora introducir en la acción un término que involucre solamente a los campos de medida. La manera más sencilla de hacerlo preservando la invariancia de medida es adicionar un término de la forma (Wilson, 1974):

$$-\beta \sum_P \text{Tr} (U_{x_1 x_2} U_{x_2 x_3} U_{x_3 x_4}^{-1} U_{x_4 x_1}^{-1}) \quad (2.8)$$

donde (x_1, x_2, x_3, x_4) constituyen los vértices de una cara de un hipercubo elemental de la red (fig. 2.3). La suma se efectúa sobre todas estas caras, a las que se designa con el nombre de plaquetas. La traza hace a (2.8) independiente del punto elegido como x , en cada plaqueta. La constante β se determinará en la subsección siguiente exigiendo que (2.8) reproduzca el límite / continuo correcto para $a \longrightarrow 0$

En general el sentido de circulación de la plaqueta es relevante. No obstante, si la traza es real, es decir, U_{xy} viene dado en una representa-

ción equivalente a su adjunta, ambos sentidos de circulación son equivalentes. En lo sucesivo supondremos que U_{xy} viene dado en una representación unitaria:

$$U_{xy}^\dagger = U_{xy}^{-1} = U_{yx}$$

de manera que a efectos de obtener una acción real para los campos de medida la suma en (2.8) se efectuará sobre plaquetas orientadas.

En definitiva, la acción invariante de medida sobre una red para un campo escalar resulta, en una notación simplificada:

$$A_{red}(\phi, U) = \frac{a^{d-2}}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \phi_x D(U_{xy}) \phi_y^\dagger - \beta \sum_P \text{Tr}(UUU^\dagger) + \\ + m \left(\frac{a^d}{2} + da^d \right) \sum_x \phi_x^\dagger + \sum_x V(\phi_x) \quad (2.9a)$$

donde hemos introducido un término de potencial $V(\phi_x)$.

Para el caso fermiónico, adoptando la prescripción de Wilson (2.4) se obtiene:

$$A_{red}(\psi, U) = \frac{a^{d-1}}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\psi}_x (1 + \gamma_{xy}) D(U_{xy}) \psi_y + \\ - \beta \sum_P \text{Tr}(UUU^\dagger) + m \left(\frac{a^{d-1}}{2} + da^{d-1} \right) \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x \quad (2.9b)$$

2.2) LIMITE CONTINUO DE LA ACCION SOBRE LA RED

A partir de las substituciones (2.1) es evidente que (2.2) y (2.4) conducen a las respectivas acciones continuas en el límite $a \longrightarrow 0$. Ello no es tan transparente después de la inclusión de los campos de medida, ecs. (2.9a,b). Mostraremos aquí que para $a \longrightarrow 0$ dichas ecuaciones se reducen a los modelos continuos (1.11) para bosones y fermiones respectivamente.

Para a pequeño es natural suponer a U_{xy} próximo a la identidad. En consecuencia tomaremos

$$U_{x, x+aj} = \exp \left[i \int_x^{x+aj} A(z) \cdot dz \right] = 1 + i a A_\mu(x) \quad (2.10)$$

es decir, identificaremos a U_{xy} con el operador de cuerda $\hat{U}(x,y,c)$ definido en (1.18), tomando como c la unión entre x e $y = x + a\hat{\mu}$.

De acuerdo con (2.10), para $a \longrightarrow 0$ y con las restantes cantidades mantenidas fijas, (2.6) resulta

$$D_{\mu} \phi_x = (\partial_{\mu} - iD[A_{\mu}(x)]) \phi_x$$

que coincide con la definición (1.6) de derivada covariante.

En el caso del término (2.8) que involucra sólo al campo de medida, un cálculo directo lleva a

$$\begin{aligned} U_{x,x+a\hat{\mu}} U_{x+a\hat{\mu},x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}} U_{x+a\hat{\nu},x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}} U_{x,x+a\hat{\nu}} &= \\ &\simeq 1 + ia^2 F_{\mu\nu}^{\dagger} - \frac{1}{2} a^4 F_{\mu\nu}^{\dagger} F_{\mu\nu}^{\dagger} \end{aligned}$$

con $F_{\mu\nu}^{\dagger}$ dado por (1.8). Tomando la traza en esta expresión el primer término produce una constante irrelevante (dimensión de la representación), el segundo término (lineal en $F_{\mu\nu}^{\dagger}$) se anula con la contribución de la plaqueta orientada a la inversa; finalmente, el tercer término (primero no-trivial no-nulo) es

$$-\frac{1}{2} a^4 \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{\dagger} F_{\mu\nu}^{\dagger}).$$

En consecuencia

$$\beta \sum_P \text{Tr}(UUUU) \longrightarrow \frac{\beta}{a^d} \int d^d x \left[-\frac{1}{2} a^4 \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{\dagger} F_{\mu\nu}^{\dagger}) \right]$$

que reproduce el término cinético usual (1.10) tomando

$$\beta = a^{d-4} / 2g^2 \tag{2.11}$$

Con esta elección, (2,9a,b) constituyen adecuadas acciones sobre la red que, al menos clásicamente, llevan al modelo continuo para $a \longrightarrow 0$.

2.3) CUANTIFICACION-VENTAJAS DE LA FORMULACION SOBRE REDES

La cuantificación de la teoría sobre la red puede efectuarse en forma / análoga al caso continuo, utilizando la acción discreta (2.9) como acción euclídea en (B.3). Se obtiene así una teoría de campos cuántica que si bien ha perdido la invariancia de Lorentz presenta las siguientes bondades que justifican su estudio:

- a) no es necesario preocuparse por seleccionar el espacio funcional de los / campos clásicos ϕ . Este es simplemente el producto cartesiano (denumerable) $E_\phi = \prod_x E_{\phi_x}$ de los espacios E_{ϕ_x} en los que toma valores ϕ_x en cada sitio. El procedimiento de integración es el usual sobre los valores ϕ_x . En forma más explícita (1.12) resulta:

$$\langle \hat{\Omega} \rangle_{red} = \frac{1}{Z} \int \prod_x d\phi_x \prod_{x,\mu} d\mu(U_{x\mu}) \Omega(\phi, u) e^{-A_{red}} \quad (2.12a)$$

$$Z = \int \prod_x d\phi_x \prod_{x,\mu} d\mu(U_{x\mu}) e^{-A_{red}} \quad (2.12b)$$

donde hemos diferenciado las integraciones sobre los campos de medida $U_{xy} \equiv U_{x\mu}$ (es decir, sobre los parámetros que definen la medida de Haar $d\mu(u)$). Para el caso fermiónico los campos $\psi_x, \bar{\psi}_x$ son variables de // Grassmann y la integración $d\psi_x$ es la correspondiente sobre dichas variables (Berezin, 1966).

- b) la introducción de los campos de medida como funciones sobre el grupo G // (compacto), y no sobre el álgebra de Lie de dicho grupo, soluciona el problema de la cuantificación invariante. Esto está relacionado con el hecho de que la libertad de medida contribuye a (2.12) con un factor finito en cada sitio, proporcional al volumen V_G del grupo. Si la red es finita // (con apropiadas condiciones de borde) el factor total es finito ($\sim V_G^V$).

Para una red infinita el factor (infinito) resultante se cancela dividiendo por \mathcal{L} .

Debe destacarse que la propia estructura del grupo finito, discreto o continuo, abeliano o no-abeliano, etc. no es relevante, salvo en lo que concierne a la compacidad.

- c) la definición de la teoría sobre la red introduce de manera natural un valor máximo $k_{máx} = \Lambda \sim 1/a$ en el espacio de los momentos, lo cual regulariza la teoría (aunque de manera no relativísticamente invariante) // controlando las divergencias ultravioletas. Por supuesto, y tal como ocurre con cualquier método de regularización, los resultados finales deberán ser independientes de Λ para $\Lambda \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow 0$).
- d) tal como fuera mencionado previamente, la formulación (lagrangiana euclídea) sobre una red de la Teoría de campos es esencialmente idéntica a la Mecánica Estadística (clásica) de los sistemas de spin (Kogut, 1979). Ello puede establecerse fácilmente asimilando el funcional generatriz Z de (2.12) a la función de partición de un sistema de spin (clásico) sobre una red hipercúbica en d dimensiones. A partir de esa identificación se generaran las siguientes analogías formales:

A_{red}	Acción euclídea sobre la red	\sim	H/KT : Energía/cte. de Boltzmann x Temp.
$Z[\mathcal{J}]$	Funcional generatriz	\sim	$\Omega[h]$ función de partición
$W = \ln Z$	Func. generatriz conectado	\sim	$F = -KT \ln \Omega$: Energía libre de Hemholtz
$\Gamma[\tilde{u}]$	Funcional de vértices propios	\sim	$G(M)$: Energía libre de Gibbs
$\tilde{u} = \langle u \rangle$	campo clásico	\sim	M : magnetización
\mathcal{J}	fuerza externa	\sim	h : campo magnético

En particular para una TCM pura se tiene, según (2.11)

$$\beta = 1/KT \sim 1/T^2 \quad (2.13)$$

por lo que los resultados perturbativos para $g \simeq 0$ y $g \longrightarrow \infty$ pueden asimilarse a desarrollos para bajas y altas temperaturas respectivamente.

A partir de las analogías señaladas puede incorporarse a TCM sobre redes el concepto de "transición de fase", entendida ésta como un cambio cualitativo del comportamiento del modelo al variar la constante de acoplamiento g (equivalente a la temperatura según (2.13)). Más aún, puede probarse incluso que la reobtención de una teoría continua para $a \longrightarrow 0$ está íntimamente ligada a hallar un dominio crítico (transiciones de fase de segunda especie) en la correspondiente teoría sobre la red (sección 2.4).

Una vez salvadas las diferencias en los términos usados (según el cuadro precedente) pueden aplicarse a la resolución de problemas en Teoría de Campos toda la batería de métodos y aproximaciones propias de la Mecánica Estadística. Debido a esta interrelación de las dos disciplinas en lo sucesivo emplearemos en forma indistinta términos análogos.

2.4) LIMITE CONTINUO DE TCM SOBRE REDES

Como fuera dicho precedentemente, la red es sólo un regulador que debe ser removido al finalizar los cálculos tomando el límite $a \longrightarrow 0$. Dicho límite no puede sin embargo ser efectuado en forma trivial.

Para clarificar este punto consideremos (Hasenfratz, 1983) una teoría de medida pura cuyo único parámetro g es adimensional en $d = 4$. Sobre la red, cualquier cantidad con dimensiones vendrá dada por una función de g (adimensional) multiplicada por una adecuada potencia del espaciado de la red a . // Por ejemplo, en el caso de una masa m se tendrá

$$m = \frac{f(g)}{a} \quad (2.14)$$

Con $f(g) \neq 0$, para $a \longrightarrow 0$ en forma trivial dicha masa divergería como el momento de corte $\Delta \sim 1/a$.

Para que ello no ocurra, la constante de acoplamiento g debe ser ajusta

da de manera que

$$\lim_{a \rightarrow 0} g = g^* \quad f(g^*) = 0 \quad (2.15)$$

En términos de la Mecánica Estadística, esta ecuación implica que la longitud de correlación (en unidades del espaciado de la red)

$$\xi = 1/ma = 1/f(g)$$

debe diverger. Es decir, en el límite continuo la teoría sobre la red debe aproximarse a un punto de transición de fase de segunda especie (punto crítico) (Stanley, 1971). La estructura de la red se torna entonces irrelevante debido a las fluctuaciones de largo orden que aparecen en la teoría, restableciéndose la invariancia rotacional euclidiana.

Desde el punto de vista de la Teoría de Campos la constante de acoplamiento crítica g^* de (2.15) es la constante "desnuda" cuando el regulador es removido ($\Lambda \sim 1/a \rightarrow \infty$). En una teoría asintóticamente libre tal como QCD, el límite continuo deberá tomarse ajustando la constante desnuda g hacia $g^* = 0$ en forma adecuada (Montvay, 1983).

El requerimiento usual de renormalizabilidad de la teoría determina únicamente cual debe ser dicha forma de ajuste. Exigiendo que cualquier cantidad con sentido físico tal como la masa (2.14) permanezca inalterada por cambios simultáneos de g y a

$$a \frac{dm}{da} = 0 \quad (a \simeq 0), \quad (2.16)$$

se obtiene la siguiente ecuación diferencial para $g(a)$:

$$a \frac{d}{da} g(a) = -f(g)/f'(g) = -\beta_{red} \quad (2.17a)$$

Para $g \simeq 0$, la teoría de perturbaciones da (Gross y Wilczck, 1973):

$$\beta_{red} = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 - \beta_2 g^7 + \dots \quad (2.17b)$$

Los dos primeros coeficientes β_0 y β_1 son universales: son iguales / que los que proporciona la teoría de perturbaciones en el continuo (en cual / quier esquema de renormalización) (Gross, 1975).

Integrando (2.17) se obtiene:

$$a \Delta_{red} = e^{-\frac{1}{2\beta_0 g^2} (\beta_0 g^2)^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} [1+O(g^2)]} \quad (2.18)$$

La constante de integración Δ_{red} que aparece en esta ecuación es un / parámetro de masa externo, independiente de a , que fija la escala de la teo- ría. Nótese además que $g \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow 0$ como era esperado.

Teniendo en cuenta (2.18), la integración de (2.16) lleva a:

$$m = \frac{C_m}{a} (\beta_0 g^2)^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} e^{-\frac{1}{2\beta_0 g^2} [1+O(g^2)]} = C_m \Delta_{red} \quad (2.19)$$

es decir, el contenido (no-perturbativo) de la teoría radica en el valor de / la constante C_m (valor de m en unidades de Δ_{red}).

A través de métodos numéricos como el de Monte Carlo, todos los resulta- dos (numéricos) se obtienen en unidades de potencias adecuadas del espaciado de la red a . Consideremos por ejemplo la tensión σ de (1.21):

$$\sigma / \Delta_{red}^2 = \sigma a^2 / (a \Delta_{red})^2$$

El numerador de esta expresión (σa^2) es dicha tensión en unidades / de a^{-2} y puede entonces ser obtenida a través del método de Monte Carlo. A su vez el denominador $(a \Delta_{red})^2$ viene dado por (2.18). En consecuencia, / para g^2 dado el cociente σ / Δ_{red}^2 es calculable numéricamente. Para a su- ficientemente pequeño dicho cociente no debería depender del espaciado de la red y una extrapolación suave correspondiente a $a \rightarrow 0$ daría el límite / continuo.

Para g grande la teoría sobre la red hamiltoniana (Kogut y Susskind, / 1975) predice:

$$\beta(g) = -g + O(g^3) \quad (2.20)$$

lo cual lleva a

$$g(a) = \text{cte. } a \quad (a \rightarrow \infty)$$

Este resultado corresponde al confinamiento de los quarks para bajas energías ($\Delta \sim 1/a \rightarrow 0$). El comportamiento (2.20) de g lleva a un crecimiento lineal de la energía de separación de quarks estáticos (Kogut, 1979b).

El establecimiento fehaciente de que la QCD confina color depende de que las funciones β para $g \rightarrow 0$ (2.17b) y para g grande (2.20) se continúen suavemente para valores intermedios de g . La no existencia de ceros intermedios de $\beta(g)$ (puntos fijos) garantizaría la coexistencia de la libertad asintótica y el confinamiento en una única fase de la teoría. Las figuras siguientes reproducen el comportamiento predicho por extrapolación de series en altas y bajas temperaturas (fig. 4a) y el comportamiento esperado (fig. 4b) (Kogut, 1980).

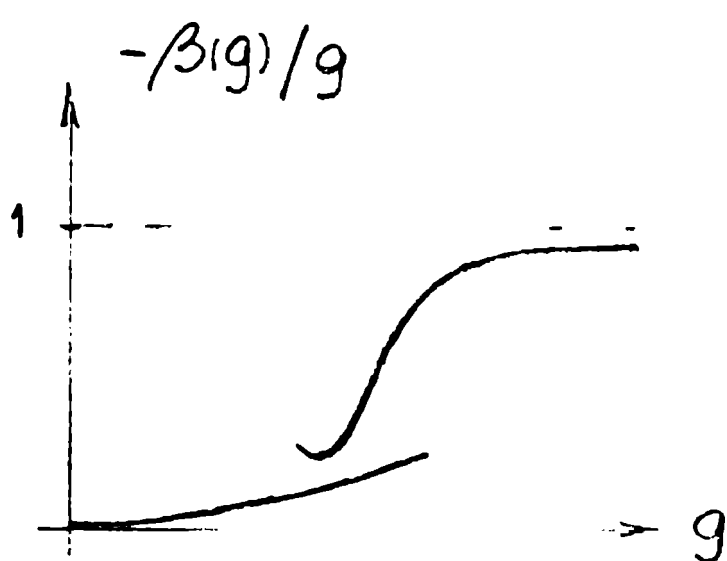


fig. 4a

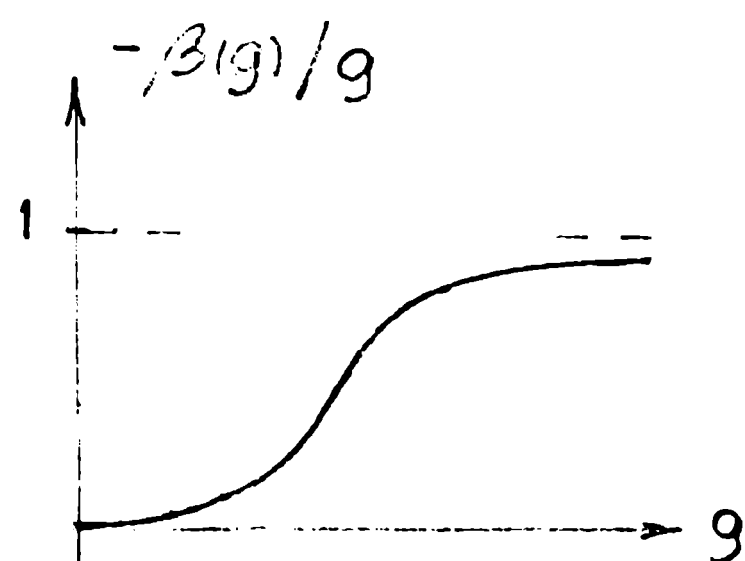


fig. 4b

La discusión anterior muestra la necesidad de contar con métodos de cálculo confiables para valores intermedios de g . En ese aspecto resulta particularmente interesante la técnica desarrollada en el capítulo siguiente, la cual no depende de la "temperatura" del sistema.

Capítulo 3: LA TECNICA DEL CAMPO PROMEDIO

Se desarrolla en este capítulo la técnica de cálculo básica que será utilizada para la obtención de diagramas de fases de TCM sobre redes. En la / primera parte, y a través de un método variacional, se determina estrictamente una cota superior para el funcional generatriz de funciones de Green conectadas (energía libre) $W = \ln \mathcal{Z}$. La minimización de dicha cota respecto a parámetros arbitrarios ("campos externos") proporciona la llamada aproximación de campo promedio (ACP) a la teoría original.

En la segunda parte de este capítulo se discuten ciertas contradicciones metodológicas vinculadas a una aparente ruptura de simetría inherente al procedimiento de cálculo antes esbozado (Elitzur, 1975). Tales contradicciones pueden eliminarse mediante una adecuada prescripción sugerida por Drouffe (1980) y Brézin y Drouffe (1982) (sección 3.2).

Finalmente se presenta una deducción alternativa de la ACP basada en el método de desarrollo alrededor de un punto de ensilladura (DPE) (Apéndice C). La ventaja de esta deducción alternativa radica en que posibilita la consideración sistemática de correcciones a dicha aproximación (Lautrup, 1982).

3.1) APROXIMACION DE CAMPO PROMEDIO: METODO VARIACIONAL

La ACP constituye un método aproximado muy sencillo de evaluar el funucional generatriz $W = \ln \mathcal{Z}$. En esta sección se presenta una forma de obtener dicho resultado apelando a un procedimiento variacional. Las ideas físicas involucradas se discutirán después de la presentación matemática del problema.

Por simplicidad consideraremos el caso de una TCM pura con acción dada / por (2.8). La extensión a modelos con campos de materia (bosónicos) es directa.

3.1a) Obtención de la aproximación de campo promedio

Consideremos la acción de "uniones desacopladas" :

$$A_0 = - \sum_{x\mu} \text{Tr} (U_{x\mu} K_{x\mu}^\dagger + K_{x\mu} U_{x\mu}^\dagger) \equiv - \sum_{x\mu} (U_{x\mu} \cdot K_{x\mu}) \quad (3.1)$$

en la cual los campos de medida $U_{x\mu}$ interactúan sólo con un campo externo $K_{x\mu}$.

Definiendo

$$\langle \hat{\Omega} \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int [d\mu(u)] \Omega e^{-A_0(u,k)}$$

$$Z_0 = \int [d\mu(u)] e^{-A_0(u,k)}$$

la siguiente identidad resulta obvia:

$$Z[J] / Z_0[K] = \langle \exp [-A(u) + A_0(k) + \sum_{x\mu} U_{x\mu} \cdot J_{x\mu}] \rangle_0 \quad (3.2)$$

En esta expresión se ha introducido un campo $J_{x\mu}$ acoplado al campo de medida. Su única finalidad es la de posibilitar la obtención de valores medios a través de la relación

$$\langle \hat{\Omega}(u_{x\mu}) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \hat{\Omega} \left[\frac{\delta}{\delta J_{x\mu}} \right] Z[J] \Big|_{J_{x\mu}=0} \quad (3.3)$$

Dado que dicho campo rompe la simetría de la teoría en la mayor parte / de los cálculos se considerará $J_{x\mu} = 0$.

Haciendo uso de la convexidad de la exponencial (desigualdad de Peierls

$$\langle e^x \rangle_0 \geq \exp \langle x \rangle_0$$

de (3.2) se obtiene

$$W[J] = \ln Z[J] \geq \ln Z_0[J] + \langle -A + A_0 \rangle_0 + \sum_{x\mu} \langle U_{x\mu} J_{x\mu} \rangle_0 \quad (3.4)$$

Definiendo el funcional de unión independiente

$$e^{\omega(K_{x\mu})} = \int d\mu(U_{x\mu}) e^{U_{x\mu} \cdot K_{x\mu}} \quad (3.5)$$

(3.4) resulta:

$$W[J] \Rightarrow \sum_{x\mu} \left\{ \omega(K_{x\mu}) + \tilde{U}_{x\mu} \cdot (J_{x\mu} - K_{x\mu}) \right\} - A[\tilde{U}] \quad (3.6)$$

En esta expresión hemos llamado

$$\tilde{U}_{x\mu} = \frac{\partial \omega}{\partial K_{x\mu}} \quad (3.7)$$

$$A[\tilde{U}] = -\frac{\beta}{2} \sum_{x, \mu \neq \nu} \text{Tr} \left(\tilde{U}_{x\mu} \tilde{U}_{x+\mu, \nu} \tilde{U}_{x+\mu, \nu}^{\dagger} \tilde{U}_{x\mu}^{\dagger} \right) \quad (3.8)$$

La ACP del funcional $W[J]$ viene dada por (3.6) eligiendo los valores de $K_{x\mu}$ (aún arbitrarios) que maximicen el miembro derecho de dicha expresión:

$$W_{CP}[J] = \text{Sup}_{(K)} \left\{ \sum_{x\mu} \left[\omega(K_{x\mu}) + \tilde{U}_{x\mu} \cdot (J_{x\mu} - K_{x\mu}) \right] - A[\tilde{U}] \right\} \quad (3.9)$$

Derivando respecto a $K_{x\mu}$ y $K_{x\mu}^{\dagger}$ se obtienen las ecuaciones extremas:

$$K_{x\mu} = -\frac{\partial A[\tilde{U}]}{\partial \tilde{U}_{x\mu}} + J_{x\mu} \quad K_{x\mu}^{\dagger} = -\frac{\partial A[\tilde{U}]}{\partial \tilde{U}_{x\mu}^{\dagger}} + J_{x\mu}^{\dagger} \quad (3.10)$$

Estas ecuaciones (junto con (3.7) ~ (3.8)) determinan a $K_{x\mu}$ como función de $\tilde{U}_{x\mu}$ y del parámetro β .

Teniendo en cuenta (3.3) y (3.7) ~ (3.10) es fácil probar que

$$\langle U_{x\mu} \rangle_{CP} = \frac{\partial}{\partial J_{x\mu}} W_{CP} [J] = \tilde{U}_{x\mu} (k_{x\mu}^{ext}) \quad (3.11)$$

En consecuencia, la ACP del funcional generatriz de vértices propios / será:

$$\begin{aligned} \Gamma_{CP} [\tilde{U}] &= \sum_{x\mu} \langle U_{x\mu} \rangle_{CP} J_{x\mu} - W_{CP} [J] = \\ &= -\frac{\beta}{2} \sum_{x, \mu \neq \nu} \text{Tr} (\tilde{U}_{x\mu} \tilde{U}_{x+\mu, \nu} \tilde{U}_{x+\nu, \mu}^{\dagger} \tilde{U}_{x\nu}^{\dagger}) + \sum_{x\mu} \delta(\tilde{U}_{x\mu}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\delta(U_{x\mu})$ es la transformada de Legendre de $\omega(J_{x\mu})$

$$\omega(J_{x\mu}) + \delta(\tilde{U}_{x\mu}) = \tilde{U}_{x\mu} \cdot J_{x\mu}$$

La derivación de (3.9) ~ (3.12) muestra la naturaleza de la aproximación realizada: la interacción entre las variables dinámicas $U_{x\mu}$ se reemplaza por la interacción independiente de cada variable con un campo externo $K_{x\mu}$ definido consistentemente. La limitación de esta aproximación reside / en el hecho de que ignora las fluctuaciones locales del campo promedio (3.10) que siente cada variable dinámica: el campo producido por uniones vecinas a / una dada se fija en el valor medio

$$K_{x\mu}^{ext} - J_{x\mu} = - \frac{\partial A[\tilde{U}]}{\partial U_{x\mu}^*}$$

3.b) Solución de las ecuaciones extremales

Desde el punto de vista del cálculo efectivo, para $J_{x\mu}$ arbitrario la / resolución de las ecuaciones extremales (3.10) presenta serias dificultades. Para $J_{x\mu} = 0$, las simetrías traslacionales y rotacionales remanentes en la

red sugieren que el valor medio del campo (magnetización) debe verificar:

$$\langle U_{x\mu}^{\alpha\beta} \rangle_{CP} = \tilde{U}_{x\mu}^{\alpha\beta}(K_{x\mu}^{ext}) = M \delta^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N) \quad (3.13a)$$

A través de las ecuaciones (3.7) y (3.10) esta condición obliga a que $K_{x\mu}^{ext}$ sea de la forma

$$(K_{x\mu}^{ext})^{\alpha\beta} = \alpha \delta^{\alpha\beta} \quad (3.13b)$$

con M y α (reales) vinculadas por las ecuaciones

$$M = \frac{dW}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left[\ln \int d\mu(U) e^{\alpha \text{Re Tr } U} \right] \quad (3.14a)$$

$$2\bar{\beta} M^3 N = \alpha, \quad \bar{\beta} = \beta(d-1), \quad (3.14b)$$

De acuerdo con (3.13) la ACP (3.9) del funcional $W[J=0]$ resulta:

$$W_{CP}[J=0] = Vd \left[\frac{\bar{\beta} M^4 N}{2} - \alpha MN + W(\alpha) \right] \quad (3.15)$$

donde V es el volumen (número de sitios) de la red.

3.1c) Transiciones de fase

Las ecuaciones (3.14) definen a M y α como funciones de la inversa de la "temperatura" β . Dado que $W(0) = 0$ las mismas admiten para todo β / la solución trivial $\alpha = M = 0$. No obstante, para todos los grupos de simetría de interés (continuos o discretos) para un cierto valor $\beta = \beta_c$ de / finido por (ver fig. 3.1a):

$$\beta_t = \min_{\alpha} \beta(\alpha) \quad (3.16)$$

una solución no-trivial $\alpha = \alpha_t$ $M = M_t$ aparece .

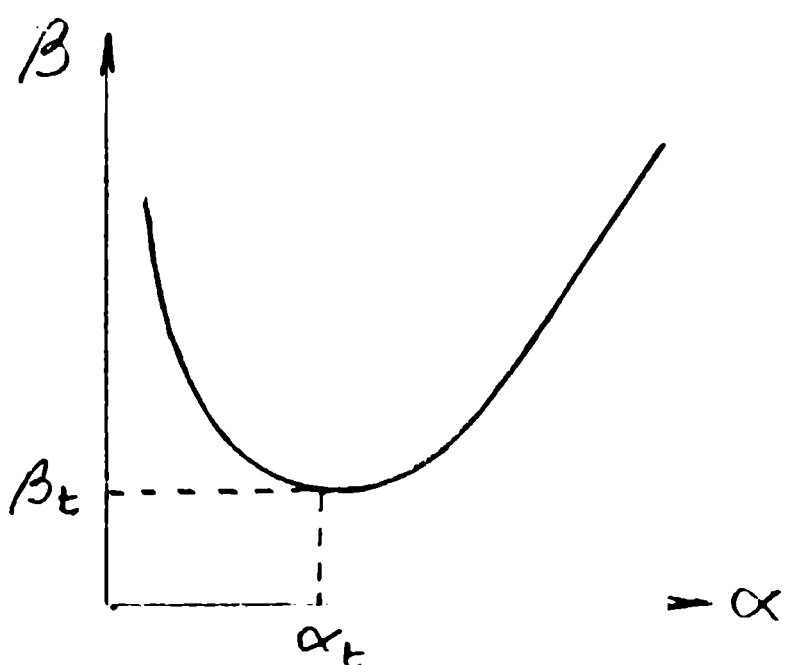


fig. 3.1a

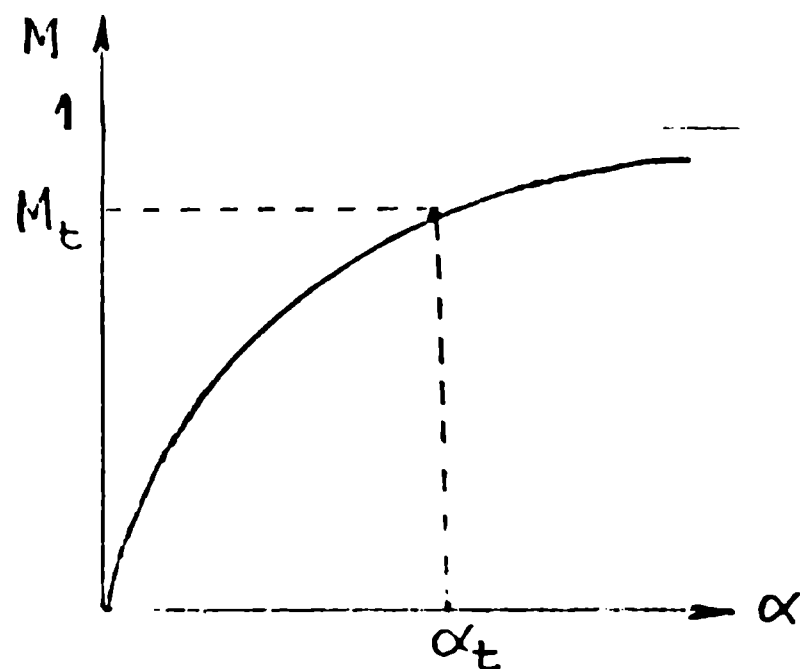


fig. 3.1b

Cuando $\beta > \beta_t$ hay dos soluciones no triviales $\alpha_1(\beta)$, $M_1(\beta)$ y $\alpha_2(\beta)$, $M_2(\beta)$ ($\alpha_1 < \alpha_t < \alpha_2$, $M_1 < M_t < M_2$) y, por supuesto, también la trivial. En todos los casos la solución física corresponde al máximo / absoluto de la "energía libre" (3.15).

El valor β^c del parámetro β a partir del cual es energéticamente más / favorable para el sistema un estado con magnetización

$$\langle U_{XM} \rangle_{CP} = M \mathbb{1} \neq 0$$

corresponde a la solución de

$$V_{CP} [\beta^c, M^c, \alpha^c] = W_{CP} [\beta^c, M=0, \alpha=0] = 0$$

Dicho punto puede considerarse como un punto de "transición de fase" de la teoría desde una "fase caliente" desordenada ($M = \alpha = 0$) a una "fase fría" ordenada ($M \neq 0$, $\alpha \neq 0$). De la definición (3.16) de β_t surge que necesariamente debe ser $\beta^c \geq \beta_t$ (ver fig. 3.2).

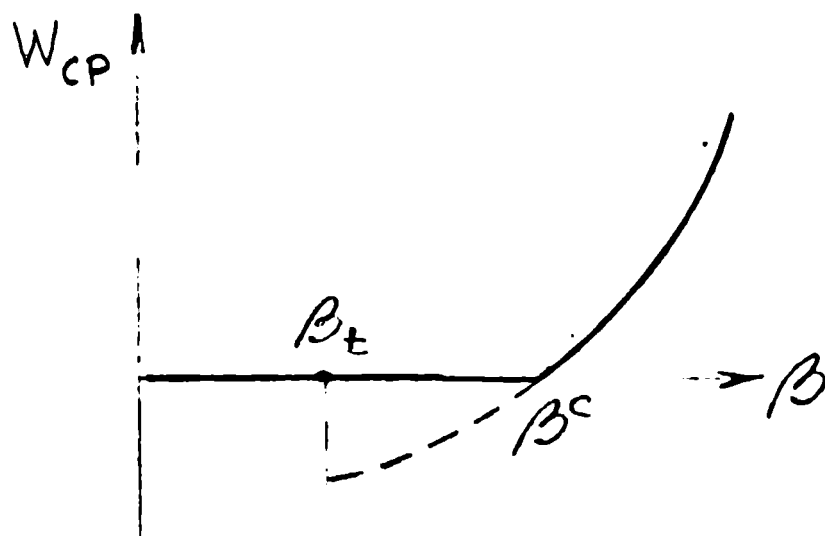


fig. 3.2

En todos los casos de interés el "parámetro de orden" M salta desde ce ro en la fase caliente ($\beta = \beta^c - \delta\beta$) a un valor M_c cercano a uno en la fase fría ($\beta = \beta^c + \delta\beta$), es decir, las transiciones de fase predi / chas por la ACP para TCM con acción dada por (2.8) son de primer orden.

Desde el punto de vista de la Teoría de Campos estas transiciones co rresponden a cambios cualitativos muy importantes en el comportamiento del / estado de vacío de la teoría. Para visualizar este hecho consideremos el va lor medio de vacío del operador de Wilson (1.19). Tomando como curva c una / curva cerrada que contenga n uniones, de acuerdo con (3.3) resulta (FC: fase caliente, FF: fase fría):

$$\langle W_n(c) \rangle_{FC} = 0 \qquad \langle W_n(c) \rangle_{FF} \sim M^n = e^{-n \ln(\frac{1}{M})}$$

Según (1.28a), el comportamiento de $W_n(c)$ en la fase caliente corres ponde a una tensión $\sigma \rightarrow \infty$ en (1.21), que implica un confinamiento de / los quarks estáticos en dicha fase. El comportamiento en la fase fría es, en cambio, del tipo no-confinante (1.28b), con $P(c) = na$.

En la subsección siguiente discutiremos una aparente contradicción en / tre la argumentación que lleva a (3.15) y ciertos resultados exactos conoci / dos. Dicha contradicción tiene origen en el valor de expectación no-nulo (pa / ra algún rango del parámetro β):

$$\langle U_{xy} \rangle_{CP} \Big|_{J_{xy}=0} = U_{xy}(K_{xy}^{at}) = M \mathbb{1} \qquad (3.17)$$

que predice la ACP

3.2) RUPTURA ESPONTANEA DE SIMETRIA: EL TEOREMA DE ELITZUR

La deducción de la ACP realizada en la sección anterior se basa fundamentalmente en la suposición de que los campos $\psi_{x\mu}$ tienen, para $J_{x\mu} = 0$ y para algún rango de valores del parámetro β , un valor de expectación no-nulo (ec.(3.17)). Este valor medio de campo no-nulo contribuye al campo efectivo $K_{x\mu}$ que sienten las uniones vecinas, y que finalmente se determina consistentemente a través de (3.7) ~ (3.10).

Sin embargo, un resultado exacto (Teorema de Elitzur, 1975) demuestra que no puede romperse espontáneamente una simetría de medida local. Es decir, el campo $\psi_{x\mu}$ en cada unión $(x, x+a\hat{\mu})$ no puede adquirir espontáneamente (para ningún valor del parámetro β) un valor medio $\langle \psi_{x\mu} \rangle \neq 0$.

Más generalmente, ningún operador local no-invariante de medida (con valor medio en el grupo de simetría nulo) puede tener un valor de expectación distinto de cero.

La demostración del Teorema de Elitzur es muy sencilla. La invariancia de medida local de la teoría implica que

$$\langle \psi_{x\mu} \rangle = g_x \langle \psi_{x\mu} \rangle g_{x+\mu}^{-1} \quad (g_x, g_{x+\mu} \in G)$$

Para g_x y $g_{x+\mu}$ arbitrarios esta ecuación conduce a $\langle \psi_{x\mu} \rangle = 0$. Este análisis simplista puede perfeccionarse introduciendo un pequeño campo ordenador. En ese caso puede probarse, invocando la invariancia de medida local, que el valor medio de $\psi_{x\mu}$ tiende a cero con dicho campo ordenador (Elitzur, 1975).

La posibilidad de ruptura espontánea de simetrías globales está vinculada al número infinito de grados de libertad que cooperan para producir el confinamiento del sistema en alguna porción de la órbita del grupo de simetría. En el caso de teorías con simetrías locales, si bien el número de grados de /

libertad sigue siendo infinito, la simetría involucra a un número finito de ellos. Las fluctuaciones cuánticas tienden a promediar el estado fundamental del sistema homogéneamente sobre toda la órbita del grupo de simetría, proporcionando valores de expectación nulos para operadores no-invariantes de medida.

En conclusión, rupturas espontáneas de simetrías tales como el fenómeno de Higgs no pueden ocurrir en teorías con simetrías locales. Las simetrías locales deben ser previamente rotas de manera explícita a través de un término de fijado de medida, dejando sólo simetrías globales. Estas simetrías globales remanentes sí pueden ser luego rotas espontáneamente. En este aspecto la formulación de teorías de medida sobre redes no elimina la necesidad de un fijado de medida (Apéndice D).

La ACP, tal como fue deducida en la sección precedente, presupone una ruptura espontánea de la simetría. Esta aparente contradicción interna del método se origina en la pérdida de información sobre dicha simetría, ya manifestada en la acción de prueba (3.1).

Una forma muy sencilla de eliminar esta dificultad (que tuvo varios años relegada a la técnica del campo promedio) fue propuesta por Drouffe (1980) y Brézin y Drouffe (1982). Dichos autores parten de la observación de que debido a la invariancia de medida de la teoría el funcional Γ_{CP} de (3.12) es invariante frente a la transformación

$$\tilde{U}_{x\mu} \longrightarrow g_x \tilde{U}_{x\mu} g_{x+\mu}^+, \quad (3.18)$$

a pesar de que $\tilde{U}_{x\mu} = \langle U_{x\mu} \rangle_{CP}$ no es ya un elemento del grupo de simetría G . En consecuencia Γ_{CP} no tendrá un único mínimo: si $\tilde{U}_{x\mu}^{ext} = M \mathbb{1}$ es solución de

$$\delta \Gamma_{CP}[\tilde{U}] / \delta \tilde{U}_{x\mu} = 0$$

entonces $g_x \tilde{U}_{x\mu}^{ext} g_{x+\mu}^+$ también es solución de dicha ecuación con igual valor Γ_{CP} .

En cálculos concretos $\Gamma_{CP}(M)$ tiene un comportamiento como se muestra en las figuras (3.3a,b)

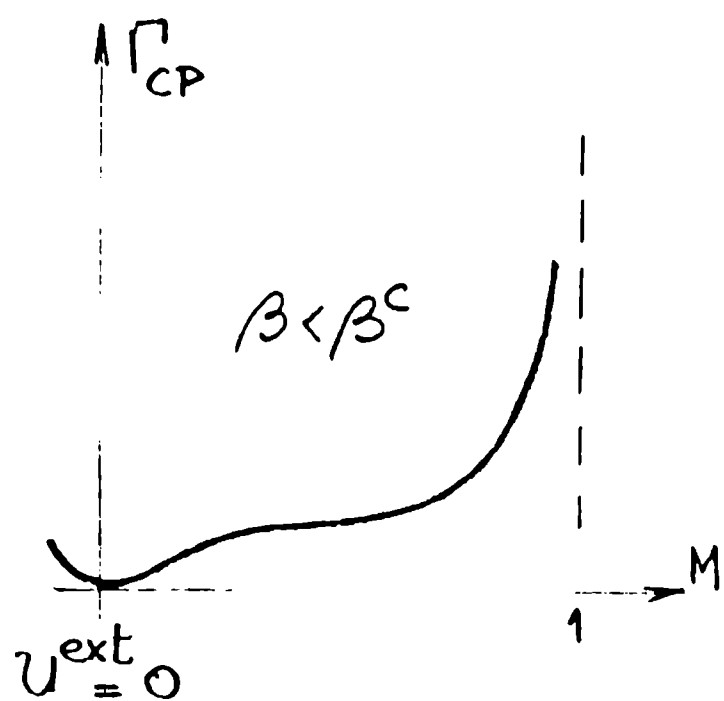


fig. (3.3a)

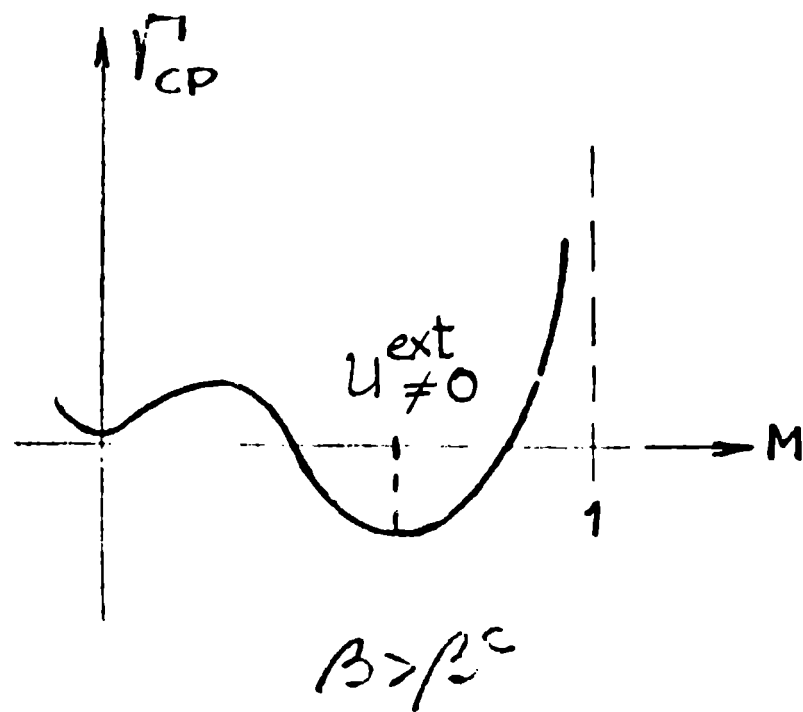


fig. (3.3b)

Es decir, para β menor que un cierto valor β^c el mínimo de Γ_{CP} se produce para $\tilde{U}_{x\mu}^{ext} = 0$

$$\frac{\delta \Gamma_{CP}}{\delta \tilde{U}_{x\mu}} \Big|_{\tilde{U}_{x\mu}^{ext} = 0} = 0 \Rightarrow \tilde{U}_{x\mu}^{ext} = 0 \quad (\beta < \beta^c)$$

Para $\beta > \beta^c$ en cambio $\tilde{U}_{x\mu}^{ext} \neq 0$ y se produce una aparente ruptura de simetría. Para reestablecer la simetría Brézin y Drouffe propusieron / definir como valor de expectación de un operador $\hat{\Omega}(U)$ a $(\int d\mu(U) = 1)$:

$$(\hat{\Omega}(U))_{CP} = \overline{\langle \hat{\Omega}(U) \rangle_{CP}} = \int [d\mu(g)] \Omega(g \tilde{U}^{ext} g^\dagger) \quad (3.19)$$

En palabras, propusieron promediar el valor de expectación sobre toda / la órbita de mínimos degenerados (3.18). Resulta claro que esta prescripción / no modifica el valor de expectación de operadores invariantes dado que:

$$\Omega^{inv}(\tilde{U}^{ext}) = \Omega^{inv}(g \tilde{U}^{ext} g^\dagger)$$

En cambio, en el caso de operadores no-invariantes tales como el campo de medida se tendrá:

$$J_{x\mu} |_{CP} = \overline{\langle U_{x\mu} \rangle_{CP}} = \int d\mu(g_x) d\mu(g_{x+\mu}) (g_x \hat{U}_{x\mu}^{ext} g_{x+\mu}) = 0$$

en concordancia con el teorema de Elitzur.

3.3) LA ACP COMO ORDEN CERO DE UN DESARROLLO ASINTOTICO

El método variacional expuesto en la primera parte de este capítulo no indica cómo pueden calcularse correcciones a la ACP (3.9). En esta sección se presenta un método alternativo de deducir dicho resultado que permite el cálculo de correcciones sucesivas al mismo.

Esta forma alternativa de deducir (3.9) está basada, desde el punto de vista de la física involucrada, en el hecho de que cualquier sistema en in / teracción es equivalente a un problema de grados de libertad independientes en un campo externo fluctuante ("random field transform"). Desde un punto de vista puramente matemático hace uso del método de desarrollo alrededor de un punto de ensilladura (DPE) (De Bruijn, 1956). Este método, esencialmente una adaptación a integrales de línea en el plano complejo del método de Laplace para integrales reales, se desarrolla en el Apéndice C.

Utilizando la identidad

$$e^{J_{x\mu}} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dw \int \frac{d\mu}{(2\pi i)} d\mu(u) e^{(u-W) \cdot J}$$

el funcional generatriz (2.12b) puede reescribirse en la forma:

$$\mathcal{L}[J] = \int \frac{dw d\mu}{(2\pi i)} d\mu(u) \exp \left\{ -A(W) - \sum_{x\mu} W_{x\mu} \cdot (Z_{x\mu} + J_{x\mu}) + \sum_{x\mu} U_{x\mu} \cdot Z_{x\mu} \right\}$$

Integrando en las variables de unión $U_{x\mu}$, que están desacopladas, / se obtiene:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \left[\frac{dW}{(2\pi i)} \right] \exp \left\{ -A(W) - \sum_{x\mu} W_{x\mu} \cdot (\mathcal{L}_{x\mu} - J_{x\mu}) + \sum_{x\mu} U(\mathcal{L}_{x\mu}) \right\} = \int \left[\frac{dW}{(2\pi i)} \right] \exp[-A_{ef}] \quad (3.20)$$

Esta expresión de $\mathcal{Z}[J]$ tiene la forma adecuada (ec. C.1) para aplicar el método de desarrollo alrededor de un punto de ensilladura de A_{ef} . Según (C.20), la aproximación más cruda de $W[J] = \ln \mathcal{Z}[J]$ viene dada por

$$-A_{ef} = -A(W) - \sum_{x\mu} W_{x\mu} \cdot (\mathcal{L}_{x\mu} - J_{x\mu}) + \sum_{x\mu} U(\mathcal{L}_{x\mu})$$

evaluada en la configuración de campos extremales $W_{x\mu}^{ext}$, $\mathcal{L}_{x\mu}^{ext}$ solución / de

$$\frac{\partial A_{ef}}{\partial W_{x\mu}} = \frac{\partial A}{\partial W_{x\mu}} + \mathcal{L}_{x\mu} - J_{x\mu} = 0 \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial A_{ef}}{\partial \mathcal{L}_{x\mu}} = W_{x\mu} - \frac{\partial U}{\partial \mathcal{L}_{x\mu}} = 0 \quad (3.21b)$$

Resulta ahora elemental verificar que esta aproximación de orden cero, que esencialmente consiste en despreciar las fluctuaciones de los campos y retener sus valores más probables, es equivalente a la ACP (3.9). Para ello basta identificar

$$W_{x\mu} = \tilde{U}_{x\mu} \quad \mathcal{L}_{x\mu} = K_{x\mu}$$

con lo cual las ecuaciones (3.21) se convierten en (3.10) y (3.7) respectivamente.

Para $J_{x\mu} = 0$, restringiéndonos tal como en (3.13) a soluciones de /

la forma:

$$(W_{x\mu}^{ext})^{\alpha\beta} = M \delta^{\alpha\beta} \quad (Z_{x\mu}^{ext})^{\alpha\beta} = \alpha \delta^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N) \quad (3.22)$$

se reobtienen las ecuaciones (3.14) y el resultado $W_{cp}[J=0]$ (3.15).

Nótese que en (3.20) el contorno de integración en $Z_{x\mu}$ (eje imaginario) no pasa por el punto de ensilladura (3.22).

Para que ello ocurra basta con deformar el contorno de $(\text{Re } Z_{x\mu})^{\alpha\beta}$ como indican las figuras (3.4a,b).

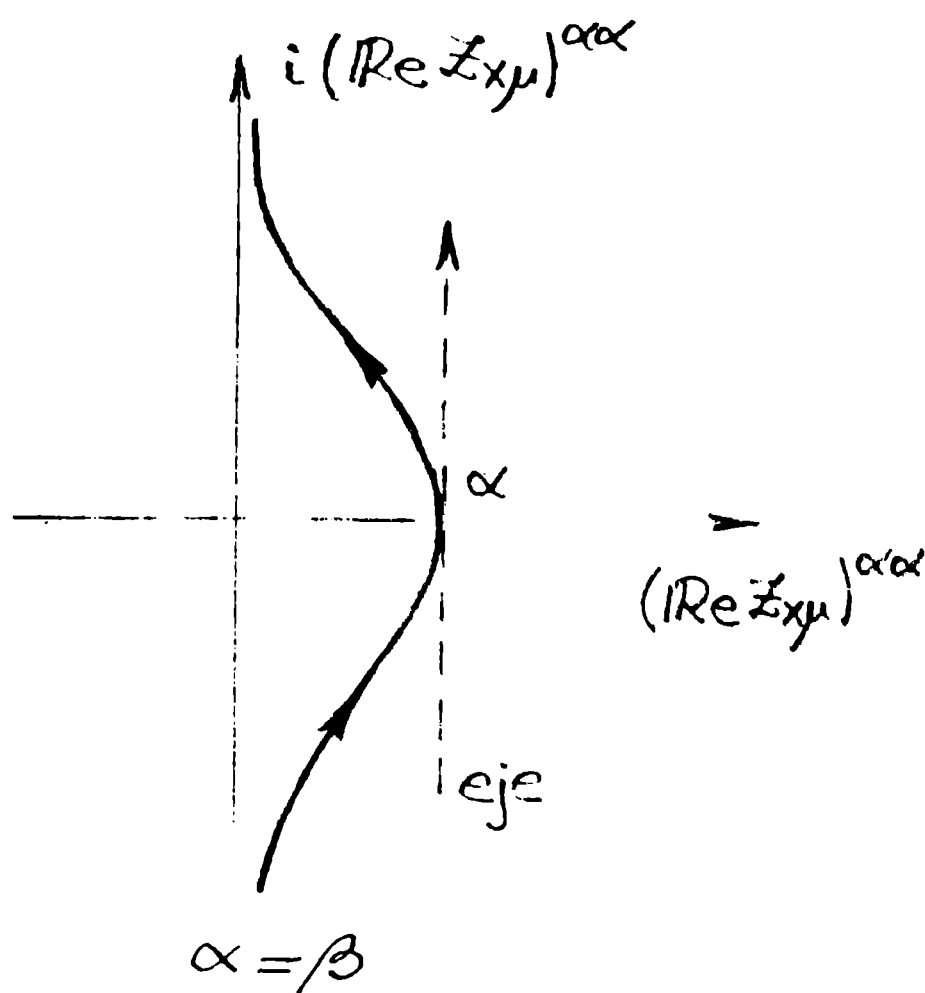


fig. (3.4a)

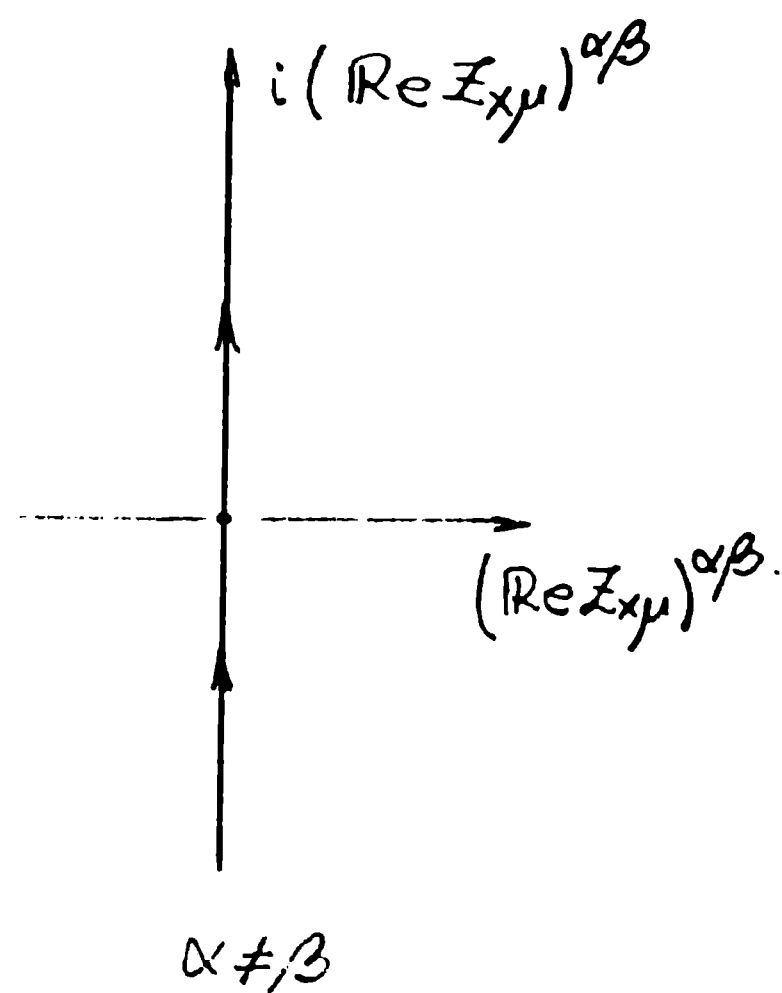


fig. (3.4b)

Esto está permitido por ser

$$\int d\mu(U_{x\mu}) \exp[(U_{x\mu} - W_{x\mu}) \cdot Z_{x\mu}]$$

una función entera (holomórfica) de las $Z_{x\mu}$. El contorno de integración en $W_{x\mu}$ permanece en el eje real. Veremos en cálculos concretos que (3.22) con M y α soluciones de (3.14) constituyen efectivamente un punto de ensilladura de la teoría.

Es necesario hacer aquí un breve comentario sobre el carácter asintóti

co de la ACP. En la deducción de (C-20) la justificación matemática de las a aproximaciones realizadas se apoya en el comportamiento del parámetro t ($t \rightarrow \infty$) lo cual le da validez asintótica al desarrollo obtenido. En el caso de (3.20) en cambio, no aparece inicialmente y de manera explícita un parámetro grande. Sin embargo, por trabajos previos sobre modelos de la Mecánica Estadística es conocido que el rol de t lo juega en la aproximación (3.15) la dimensionalidad d de la red. Lo usual es definir una "energía libre por unión"

$$F_{CP} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{-W_{CP}}{Vd} = -\frac{\bar{\beta} M^4}{2} N + \alpha MN - W(\alpha) \quad (3.23)$$

que resulta exacta en el límite $d \rightarrow \infty$ con $\bar{\beta} = O(1)$ (Drouffe, 1979). Las correcciones a este resultado para d finito pueden organizarse en potencias inversas de d , posiblemente multiplicadas por $\ln d$ (ver ecs. (C-20) y (4.28)).

Desde el punto de vista físico resulta claro porqué la ACP es exacta cuando $d \rightarrow \infty$. Como fuera comentado en la sub-sección (3.1), dicha aproximación se basa en simular la interacción entre las variables dinámicas por su interacción con un campo externo definido consistentemente. Dicho campo externo equivale al campo promedio producido por variables vecinas a una dada, ignorando las fluctuaciones locales. Cuando $d \rightarrow \infty$ el número de variables dinámicas que interactúan con una dada crece indefinidamente, suprimiendo las fluctuaciones del campo promedio que generan.

3.4) DEGENERACION DEL PUNTO DE ENSILLADURA. SIMETRIAS CONTINUAS

3.4a) Degeneración del punto de ensilladura

Debido a la invariancia (E.1) de la medida de Haar, la función W dada por (3.5) verifica

$$\omega(\mathcal{P}_x K_{xy} \mathcal{P}_x^\dagger) = \omega(K_{xy})$$

Teniendo en cuenta esta ecuación y la invariancia de medida de la acción

$$A[g\ddot{u}g^{\dagger}] = A[\ddot{u}]$$

resulta

$$A'_{x\mu} = g_x^{\dagger} A'_{x\mu} [gWg^{\dagger}] g_{x+\mu}^* \quad W'_{x\mu}(z) = g_x^{\dagger} W'(gzg^{\dagger}) g_{x+\mu}^* \quad (3.24)$$

En estas expresiones hemos definido

$$A'_{x\mu} [W] = \frac{\partial A}{\partial W_{x\mu}} \quad W'_{x\mu}(z) = \frac{\partial W}{\partial z_{x\mu}}$$

Usando (3.24) es sencillo probar que si $W_{x\mu}^{\text{ext}}$, $z_{x\mu}^{\text{ext}}$ son soluciones de (3.21) para $J_{x\mu} = 0$, entonces

$$g_x W_{x\mu}^{\text{ext} \dagger} g_{x+\mu} \quad g_x z_{x\mu}^{\text{ext} \dagger} g_{x+\mu} \quad (3.25)$$

también lo son. Estas soluciones son degeneradas en el sentido de que proporcionan el mismo valor para W_{CP} . En consecuencia, de acuerdo con (C-9) el funcional generatriz $Z [J=0]$ puede aproximarse por

$$Z \sim \sum_{(PE)} \exp [W_{CP}(W^{\text{ext}}, z^{\text{ext}})] \quad (3.26)$$

donde (PE) indica suma sobre la órbita de puntos de ensilladura (3.25). Teniendo en cuenta la degeneración de los mismos (en el sentido antes indicado) resulta

$$Z \sim \exp [W_{CP}(W^{\text{ext}}, z^{\text{ext}})] (V_G)^V \quad (3.27)$$

Con V_G se ha indicado el volumen (número de elementos) del grupo de simetría G . Si se calcula a partir de (3.27) la energía libre por unión (3.23) aparece un nuevo término

$$\frac{1}{d} \ln V_G$$

("entropía" de la degeneración) que se anula para $d \longrightarrow \infty$. Dicho término no debe ser incluido al calcular las correcciones a (3.27) provenientes de las fluctuaciones cuadráticas de los campos alrededor de sus valores medios (ver ec. (C-20)).

La prescripción (3.19) que reestablece la simetría de los valores de expectación puede ahora entenderse más naturalmente como un valor medio calculado con la "función de partición" (3.26):

$$\begin{aligned} (\hat{\Omega}(u))_{CP} &= \frac{1}{Z} \sum_{(PE)} \Omega(W^{ext}) \exp [W_{CP}(W^{ext}, Z^{ext})] = \\ &= \left(\frac{1}{V_G}\right)^V \sum_{(PE)} \Omega(W^{ext}) = \int [d\mu(g)] \Omega(gW^{ext}g^+) \end{aligned}$$

en concordancia con (3.19) como fuera anticipado.

3.4b) Simetrías continuas

En el caso en que el grupo de simetría G sea continuo se presentan dificultades en el cálculo de correcciones a (3.27) provenientes de las fluctuaciones cuadráticas de los campos $W_{x\mu}$, $Z_{x\mu}$ alrededor de sus valores medios (correcciones gaussianas). Para visualizar esta dificultad consideremos el caso de una teoría dada por

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} [d\phi] \exp \{-A[\phi]\} \quad (3.28)$$

con $A[\phi]$ invariante por transformaciones

$$\phi_x \longrightarrow g_x \phi_x \quad (g_x \in G)$$

Si ϕ_x^{ext} es solución de la ecuación extrema

$$A'[\phi] = 0 \quad (3.29)$$

de acuerdo con lo visto en el punto anterior $g_x \phi_x^{ext}$ también será solución //

ción de 3.29):

$$A'[\varrho\phi^{\text{ext}}] = 0 \quad (3.30)$$

Parametrizando a g a través del mapa exponencial (1.1), la derivada de (3.30) respecto de ε_x^a para $\varepsilon_x^a = 0$ resulta

$$A'[\phi^{\text{ext}}](T_a \phi_x^{\text{ext}}) = 0 \quad a = 1 \dots \dim G$$

Es decir, siempre que ϕ_x^{ext} rompa la simetría de la teoría:

$$T_a \phi_x^{\text{ext}} \neq 0 \quad (3.31)$$

la matriz $A''[\phi^{\text{ext}}]$ tendrá un autovalor nulo (modo-cero) con autovector $T_a \phi_x^{\text{ext}}$ por cada generador que verifique (3.31). En el caso en que ϕ_x^{ext} rompa completamente la simetría de la teoría habrá $(\dim G)^V$ modos-ceros.

En consecuencia, teniendo en cuenta las ecs. (C.10) ~ (C.11) resulta evidente la imposibilidad de calcular la aproximación gaussiana a (3.27): la existencia de autovalores de $A''[\phi^{\text{ext}}]$ nulos hace que $\det \{A''[\phi^{\text{ext}}]\} = 0$.

El tipo de dificultad arriba señalado se presenta en la "fase fría" de una TCM, ya que en dicha fase resulta evidente que se verifica (3.31). Existen sin embargo distintas alternativas para salvar el problema. Una posibilidad es fijar la medida inicialmente (posiblemente a través de un procedimiento tal como el discutido en el Apéndice D), eliminando en esa forma la invariancia de la teoría ya en el orden cero del cálculo. Una alternativa distinta consiste en fijar la medida directamente sobre las fluctuaciones, construyendo a los campos a fluctuar en una dirección particular de la órbita del grupo de simetría. Ambos procedimientos serán discutidos en detalle al calcular efectivamente correcciones gaussianas a la ACP en los capítulos siguientes.

Capítulo 4: CORRECCIONES A LA ACP PARA TCM BASADAS EN LOS GRUPOS $U(N)$ ($N \geq 1$)

En este capítulo se calculan las correcciones gaussianas a la ACP para TCM con acción de Wilson basadas en los grupos $U(N)$ ($N \geq 1$). Es decir, se mejorará la aproximación (3.15) por inclusión en el cálculo de las fluctuaciones cuadráticas de los campos alrededor de sus valores medios.

Tal como fuera expuesto en la última parte del capítulo anterior, debido a la característica continua de los grupos considerados aparecen modos-ceros en el cálculo. Para eliminarlos se fijará la medida sobre las fluctuaciones de los campos usando el "gauge natural" de la teoría de coordenadas colectivas (Alessandrini et al, 1983). Como se verá, dicha medida coincide con el equivalente sobre la red del gauge de Landau de la teoría continua.

Los resultados obtenidos (equivalentes a C.20) pueden desarrollarse explícitamente en potencias de $1/d$ (d : dimensión del espacio euclídeo), en concordancia con el análisis hecho en la última parte de la Sección (3.3). Reteniendo términos de orden $1/d$ como máximo, se evalúa numéricamente el punto de transición de fase para el grupo $U(\infty)$ (Ceccatto y Giacomini, 1983).

Este capítulo constituye una extensión a grupos no-abelianos ($U(N)$, $N \geq 2$) de las ideas desarrolladas por Alessandrini et al (1983) para el grupo abeliano $U(1)$. El propósito de la misma es doble: por un lado discutir detalles técnicos de la aplicación a TCM del método de DPE desarrollado en el Apéndice C, aprovechando, antes de estudiar modelos más complejos, la relativa simplicidad de la acción de Wilson. Por otro lado se pretende establecer, para el caso de grupos no-abelianos, la conveniencia o no de fijar la medida sobre las fluctuaciones de los campos, comparando los resultados que dicho procedimiento proporciona con los que se obtienen fijando a orden cero la medida axial (Müller y Rühl, 1983; Müller et al, 1983).

4.1) APROXIMACION DE CAMPO PROMEDIO

La ACP para TCM con acción de Wilson ha sido discutida en detalle en el

capítulo 3. Resumiendo los resultados allí obtenidos, la energía libre por u nión es

$$F_0 = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{-W_{CP}}{Vd} = - \frac{\bar{\beta} M^d N}{2} + \alpha MN - W(\alpha) \quad (4.1)$$

donde

$$W(\alpha) = \ln \int d\mu(U) \exp [\alpha \text{Re Tr } U]$$

con M y α definidos como funciones de la "temperatura" $\bar{\beta} = \beta \cdot (d-1)$ a través de las ecuaciones

$$2\bar{\beta} M^3 = N\alpha \quad M = W'(\alpha)/N \quad (4.2)$$

Para un cierto valor $\bar{\beta} = \bar{\beta}_0^c$ definido por

$$F_0[\bar{\beta}_0^c, M_0^c, \alpha_0^c] = F_0[\bar{\beta}_0^c, 0, 0] = 0 \quad (4.3)$$

La energía libre (4.1) predice una transición de fase del modelo, desde una fase "desordenada" ($M = \alpha = 0$, $\bar{\beta} < \bar{\beta}_0^c$) a una fase "ordenada" ($M \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\bar{\beta} > \bar{\beta}_0^c$). Para $\bar{\beta} = \bar{\beta}_0^c$ los campos $W_{\mu\nu}$ y $Z_{\mu\nu}$ de (3.20) "magnetizan" espontáneamente a valores medios dados por

$$\langle W_{\mu\nu} \rangle_{CP} \Big|_{\bar{\beta} = \bar{\beta}_0^c} = M_0^c \mathbb{1} \quad \langle Z_{\mu\nu} \rangle_{CP} \Big|_{\bar{\beta} = \bar{\beta}_0^c} = \alpha_0^c \mathbb{1}$$

Los valores $\bar{\beta}_0^c$, M_0^c y α_0^c dependen del grupo de simetría interno / considerado. En particular para $U(N)$ $M_0^c \approx 0.9$ y $\alpha_0^c \approx 4N$, mientras que los valores de $\frac{\bar{\beta}_0^c}{N^2}$ vienen dados en la tabla (4.1). En la misma tabla se inclue / yen los resultados que proporciona la ACP fijando previamente la medida axial así como también los valores que predice el método de Monte Carlo para $d = 4$

Como puede apreciarse, para grupos no-abelianos ($N \geq 2$) la ACP resulta más eficiente fijando previamente la medida axial.

En las secciones siguientes se calcularán las correcciones gaussianas a (4.1). En particular se determinarán explícitamente las correcciones al /

punto de transición de fase (4.3) para el grupo $U(\infty)$.

N	Invariante	Medida axial	Monte Carlo
1	3.646	2.330	3.02
2	3.364	2.138	2.48
3	3.290	2.086	2.30
4	3.260	2.062	2.28
5	3.244	2.050	2.26
6	3.236	2.044	2.26
∞	3.210	2.024	

Tabla 4.1

(Müller y Rühl, 1982b)

4.2) CORRECCIONES GAUSSIANAS

Consideremos las fluctuaciones de los campos alrededor de las soluciones (3.22):

$$\Delta W_{x\mu}^{\alpha\beta} = W_{x\mu}^{\alpha\beta} - M \delta^{\alpha\beta} = H_{x\mu}^{\alpha\beta} + i A_{x\mu}^{\alpha\beta} \quad (4.4a)$$

$$\Delta Z_{x\mu}^{\alpha\beta} = Z_{x\mu}^{\alpha\beta} - \alpha \delta^{\alpha\beta} = h_{x\mu}^{\alpha\beta} + i a_{x\mu}^{\alpha\beta}$$

con $H_{x\mu}$, $A_{x\mu}$, $h_{x\mu}$ y $a_{x\mu}$ matrices hermíticas. En el caso en que estamos en la "fase fría" de la teoría ($M \neq 0$, $\alpha \neq 0$) resulta:

$$A_{ef} \simeq W_{CP} - \frac{1}{2} \sum_{\kappa\mu\nu} \text{Tr} \left(H_{\kappa\mu}^{\dagger} M_{\kappa\mu\nu}^{(H)} H_{\kappa\nu} + A_{\kappa\mu}^{\dagger} M_{\kappa\mu\nu}^{(A)} A_{\kappa\nu} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\kappa\mu\nu} \left(h_{\kappa\mu}^{\dagger} K_{\kappa\mu\nu}^{(h)} h_{\kappa\nu} + a_{\kappa\mu}^{\dagger} K_{\kappa\mu\nu}^{(a)} a_{\kappa\nu} \right) - \sum_{\kappa\mu} \text{Tr} \left(H_{\kappa\mu} h_{\kappa\mu}^{\dagger} + A_{\kappa\mu} a_{\kappa\mu}^{\dagger} \right) \quad (4.4b)$$

con

$$M_{\rho\kappa\mu\nu}^{(H)} = -\frac{\beta M^2}{N} \left[(1+e^{ik_\mu})(1+e^{-ik_\nu}) + 2\delta_{\mu\nu} \left(\sum_{\eta} \cos k_\eta - 1 - 2\cos k_\mu \right) \right] \quad (4.5a)$$

$$M_{\rho\kappa\mu\nu}^{(A)} = -\frac{\beta M^2}{N} \left[(1-e^{ik_\mu})(1-e^{-ik_\nu}) + 2\delta_{\mu\nu} \left(\sum_{\eta} \cos k_\eta - 1 \right) \right] \quad (4.5b)$$

y

$$(K_{\rho\mu\nu}^{(h)})^{\alpha\beta,\gamma\delta} = \left[\frac{1}{2} (f_1 + g_1 - 2M^2) \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (f_2 + g_2) \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \right] \delta_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

$$(K_{\rho}^{(a)})^{\alpha\beta,\gamma\delta} = \left[\frac{1}{2} (g_1 - f_1) \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (g_2 - f_2) \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \right] \delta_{\mu\nu}$$

Para obtener (4.5) se ha realizado una transformación de Fourier sobre la red

$$\mathcal{H}_{\kappa\mu} = V^{-1/2} \sum_x \mathcal{H}_{x\mu} e^{-ikx} \quad \sum_x e^{-ikx} = V \delta_{0k}$$

Las funciones f_1 , f_2 , g_1 y g_2 de (4.6) se definen en el Apéndice E (ecs. (E.7)).

A fin de realizar las integraciones gaussianas sobre las fluctuaciones del campo $Z_{x\mu}$ se deben diagonalizar las matrices K_{ρ} . Descomponiendo $h_{x\mu}$ y $a_{x\mu}$ en la siguiente forma:

$$h_{x\mu} = h'_{x\mu} + h_{x\mu} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad h_{x\mu} = \frac{\text{Tr } h_{x\mu}}{\sqrt{N}} \quad (4.7)$$

$$a_{x\mu} = a'_{x\mu} + a_{x\mu} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad a_{x\mu} = \frac{\text{Tr } a_{x\mu}}{\sqrt{N}}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{\kappa\mu\nu} (h_{\kappa\mu}^{\dagger} K_{\nu\mu}^{(h)} h_{\kappa\nu} + a_{\kappa\mu}^{\dagger} K_{\mu\nu}^{(a)} a_{\kappa\nu}) = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{\kappa\mu} \left\{ \lambda_1 \text{Tr} (h_{\kappa\mu}^{\dagger} h'_{\kappa\mu}) + \lambda_2 \text{Tr} (a_{\kappa\mu}^{\dagger} a'_{\kappa\mu}) + \right. \\
& \quad \left. + \lambda_3 h_{\kappa\mu} h'_{\kappa\mu} + \lambda_4 a_{\kappa\mu} a'_{\kappa\mu} \right\}
\end{aligned}$$

Los autovalores λ_1 , λ_2 , λ_3 y λ_4 que aparecen en esta expresión vienen dados como funciones de f_i y g_i ($i=1,2$) por (E.8). Para todos los grupos $U(N)$ ($N \geq 1$) los λ_i son positivos (Apéndice E). En consecuencia se pueden realizar las integraciones sobre las variables ΔZ , obteniéndose

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} = & \exp(-A e f) [(\lambda_1, \lambda_2)^{N^2-1} \lambda_3 \lambda_4]^{-\frac{Vd}{2}} \int \left[\frac{dH}{\sqrt{2\pi}} \frac{dA}{\sqrt{2\pi}} \right] \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\kappa\mu\nu} \text{Tr} \left[H_{\kappa\mu}^{\dagger} \left(M_{\nu\mu}^{(H)} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{\lambda_1} \right) H'_{\kappa\nu} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + A_{\kappa\mu}^{\dagger} \left(M_{\nu\mu}^{(A)} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{\lambda_2} \right) A'_{\kappa\nu} \right] + \tilde{H}_{\kappa\mu}^* \left(M_{\nu\mu}^{(H)} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{\lambda_3} \right) H_{\kappa\nu} + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{A}_{\kappa\mu}^* \left(M_{\nu\mu}^{(A)} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{\lambda_4} \right) A_{\kappa\nu} \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde las primas denotan extracción de la traza tal como en (4.7).

Antes de integrar en las fluctuaciones ΔW se deben diagonalizar las matrices \mathcal{M}_0 en los índices $\mu\nu$. En el caso de $M_{\nu\mu}^{(A)}$ pueden obtenerse fácilmente los autovalores:

$$\zeta_0^{(A)} = -\frac{2}{N} M^2 \beta \tag{4.9a}$$

y

$$\zeta_0^{(A)} = -\frac{2}{N} M^2 \beta \left(\sum_{\mu} \cos k_{\mu} - 1 \right) \tag{4.9b}$$

con este último (d-1)-veces degenerado.

Las correspondientes autofunciones normalizadas son

$$\psi_k^{(0)} = \frac{(1 - e^{ik_y})}{[2 \sum_{\nu} (1 - \cos k_{\nu})]^{1/2}} \quad (4.10)$$

más los (d-1) vectores unitarios ortogonales a (4.10).

La matriz $M_{\kappa\mu}^{(H)}$ será diagonalizada en una forma aproximada más adelante.

Teniendo en cuenta (4.2) y (4.9a) puede probarse que (Müller y Rühl, / 1982a):

$$\sum_0^{(A)} + 1/\lambda_2 = 0 \quad (4.11)$$

es decir, la forma cuadrática en A en (4.8) tiene autovalores nulos. Estos / son $V(N^2 - 1)$ modos de frecuencia cero que ocurren como consecuencia de la in / variancia de medida continua de la acción de Wilson (2.8) (Sección (3.4)). / Para $U(N)$ $\lambda_2 = \lambda_4$, en consecuencia hay V modos-ceros adicionales en (4.8) / correspondientes a $A_{\kappa\mu}$.

Antes de integrar en ΔW se deben eliminar estos modos-ceros retenien / do solamente las fluctuaciones gaussianas genuinas. Ello se hará en la sec / ción siguiente restringiendo las posibilidades de fluctuar de los campos por / un adecuado fijado de medida mediante el procedimiento de Fadeev-Popov.

4.3) MODOS-CEROS Y METODOS DE COORDENADAS COLECTIVAS

Una transformación de medida infinitesimal realizada en $x = s$ convier / te a la solución "clásica" (3.22a) en:

$$W_{\chi\mu}^{\alpha\beta} = M \delta^{\alpha\beta} + M (\delta_{x,s} - \delta_{x+\mu,s}) \epsilon_3^{\alpha} (iT_3)^{\alpha\beta}$$

Esta ecuación muestra que los modos-ceros, correspondientes a fluctua / ciones en la dirección de simetría, deben ocurrir dentro de la parte antiher / mítica $iA_{\chi\mu}$ de las fluctuaciones ΔW . Ello ciertamente es lo que ocurre, / de acuerdo con lo visto en la última parte de la sección anterior. Siguiendo

el trabajo de Alessandrini et al, 1983 emplearemos métodos de la teoría de / coordenadas colectivas (Gervais y Sakita, 1975; Polyakov, 1977) para eliminar los.

Describamos brevemente el método en la teoría continua (Schaposnik et / al, 1980). Desarrollando el campo de medida $A_{\mu}(x)$ alrededor de una configuración clásica $A_{\mu}^{cl}(x)$:

$$A_{\mu} = A_{\mu}^{cl} + a_{\mu} \quad \frac{\delta S}{\delta A_{\mu}} \Big|_{A_{\mu}=A_{\mu}^{cl}} = 0$$

hasta términos cuadráticos, la acción toma la forma

$$S(A_{\mu}^{cl} + a_{\mu}) = S(A_{\mu}^{cl}) + \frac{1}{2} \int a_{\mu}(x) L_{\mu\nu}(A^{cl}) a_{\nu}(x) d^4x$$

En consecuencia

$$\frac{\delta S}{\delta A_{\mu}} \Big|_{A_{\mu}^{cl} + a_{\mu}} = L_{\mu\nu}(A^{cl}) a_{\nu}$$

Una transformación infinitesimal de A_{μ}^{cl}

$$A_{\mu}^{cl} = A_{\mu}^{cl} + D_{\mu}^{cl} \psi \quad D_{\mu}^{cl} = \partial_{\mu} + [A_{\mu}^{cl};]$$

deja a S invariante, por lo que A_{μ}^{cl} es una nueva solución clásica:

$$\frac{\delta S}{\delta A_{\mu}} \Big|_{A_{\mu}^{cl} + D_{\mu}^{cl} \psi} = L_{\mu\nu}(A^{cl}) D_{\nu}^{cl} \psi = 0 \quad (4.12)$$

Según (4.12), $D_{\mu}^{cl} \psi$ es una autofunción de $L_{\mu\nu}(A^{cl})$ con autovalor nulo es decir, un modo-cero de la teoría continua.

Dado que $L_{\mu\nu}$ es hermítico, autofunciones $a_{\mu}^{(n)}$ con autovalores $\lambda^{(n)}$ distintos son ortogonales.

En particular, si $\lambda^{(n)} \neq 0$

$$\text{Tr} \int a_{\mu}^{(n)} (D_{\mu}^{cl} \psi^{(n)}) d^4x = 0$$

Integración por partes y condiciones de borde adecuadas llevan a

$$D_{\mu}^{cl} A_{\mu}^{(n)} = 0 \quad \forall n / \lambda^{(n)} \neq 0. \quad (4.13)$$

Desarrollando el campo de medida A_{μ} en las autofunciones de $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ y teniendo en cuenta (4.13) se obtiene

$$D_{\mu}^{cl} A_{\mu} = D_{\mu}^{cl} A_{\mu}^{cl} = \partial \cdot A^{cl}$$

En consecuencia, si se desea eliminar los modos-ceros de las fluctuaciones gaussianas se debe imponer la condición de gauge "natural"

$$D_{\mu}^{cl} (A_{\mu} - A_{\mu}^{cl}) = 0 \quad (4.14)$$

Sobre la red, después de efectuar la transformación que lleva a (3.20) y en términos de ΔW , la condición (4.14) es equivalente a

$$\hat{A} \left\{ \sum_{\mu} \left[(H_{x\mu}^{\alpha} + i A_{x\mu}^{\alpha}) T_{\alpha} W_{x\mu}^{ext} - W_{x\mu}^{ext} (H_{x-\mu,\mu}^{\alpha} + i A_{x-\mu,\mu}^{\alpha}) T_{\alpha} \right] \right\} = 0 \quad (4.15)$$

donde $W_{x\mu}^{ext}$ es un elemento de la órbita de puntos de ensilladura degenerados (3.25). El símbolo \hat{A} indica que se debe tomar la parte antihermítica de la expresión entre llaves (debido a que $W_{x\mu}$ ya no es más unitario como $U_{x\mu}$). Eligiendo a $W_{x\mu}^{ext} = M \mathbb{1}$ (4.15) se reduce a

$$M \sum_{\mu} (A_{x\mu}^{\alpha} - A_{x-\mu,\mu}^{\alpha}) = 0 \quad (4.16)$$

En esta forma la condición "natural" coincide con el equivalente sobre la red del "gauge" de Landau de la teoría continua ($\partial \cdot A = 0$). Ello se debe a la forma particular de la solución extremal elegida.

En el espacio de los momentos y desarrollando a $A_{x\mu}$ en las autofunciones $\psi_{k\mu}^{(n)}$ de $\mathcal{M}_{\mu}^{(A)}$ (4.16) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} (1 - e^{-ik_{\mu}}) A_{k\mu}^{\alpha} T_{\alpha} &= \sum_{n=0}^{d-1} \frac{1}{n!} (-ik_{\mu})^n T_{\alpha} \sum_{\mu} (1 - e^{-ik_{\mu}}) \psi_{k\mu}^{(n)} = \\ &= C_{0k}^{\alpha} T_{\alpha} \left[2 \sum_{\mu} (1 - \cos k_{\mu}) \right]^{1/2} = 0 \quad \forall k \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para obtener esta expresión se han usado las propiedades de ortogonalidad de las $\psi_{k\mu}^{(n)}$ y se ha tenido en cuenta (4.10).

La condición de medida (4.17) puede ahora introducirse en (3.20) mediante el procedimiento de Fadeev-Popov, brevemente comentado en la sub-sección (1.1c) para el caso de una teoría continua. Definiendo Δ_{FP} a través de la identidad

$$1 = \int \prod_x d\varphi_x \prod_a \delta \left\{ \hat{A} \left[\sum_{\mu} \vartheta_x W_{x\mu} \vartheta_{x+\mu}^+ - \vartheta_{x-\mu} W_{x-\mu,\mu} \vartheta_x^+ \right] \right\} \quad (4.18)$$

resulta (Ruhl, 1982):

$$\Delta_{FP} = \det (M_{xy}^{ab}) \quad (4.19)$$

$$M_{xy}^{ab} = M \sum_{\mu} (2\delta_{xy} - \delta_{x+\mu,y} - \delta_{x-\mu,y}) \delta^{ab} + f^{bca} \left[-A_{x\mu}^c (\delta_{xy} + \delta_{x+\mu,y}) + A_{x-\mu,\mu}^c (\delta_{x-\mu,y} + \delta_{xy}) + d^{bca} \left[H_{x\mu}^c \cdot (\delta_{xy} - \delta_{x+\mu,y}) + H_{x-\mu,\mu}^c (\delta_{xy} - \delta_{x-\mu,y}) \right] \right]$$

Las constantes de estructura del grupo f_{abc} y d_{abc} vienen definidas por (1.2) y

$$d_{abc} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(T_c \{ T_a, T_b \} \right)$$

respectivamente.

Consideremos ahora el funcional Z de (3.20) escrito en la forma

$$Z = e^{-F_0 V d} \int \left[\frac{dW dZ}{(2\pi i)} \right] e^{-A e f + F_0 V d} \quad (4.20a)$$

Introduciendo la identidad (1.18) dentro de esta expresión y realizando la transformación de medida

$$W_{x\mu} \rightarrow \vartheta_x^+ W_{x\mu} \vartheta_{x+\mu}^+ \quad f_{x\mu} \rightarrow \vartheta_x^+ Z_{x\mu} \vartheta_{x+\mu}^+$$

resulta

$$\mathcal{Z} = (V_{2(N)})^V e^{-F_0 V d} \int \frac{dW dZ}{(2\pi i)} \Delta_{FP} \prod_a \delta [\hat{A} (W_{x\mu} - W_{x-\mu, \mu})] e^{-A_{eff} + F_0 V d} \quad (4.20b)$$

donde se ha hecho uso de la invariancia de A_{eff} . El factor $(V_{2(N)})^V$ aparece en (4.20b) debido a las integraciones en el grupo provenientes de (4.18). Si se estuviera calculando el valor medio de una cantidad no-invariante estas integraciones producirían un resultado nulo, en concordancia con el teorema de Elitzur.

Pasando ahora a las fluctuaciones (4.4a) e integrando en ΔZ tal como fuera hecho anteriormente se obtiene:

$$\mathcal{Z} = (V_{2(N)})^V \exp(-F_0 V d) [\lambda_1 \lambda_2]^{N^2} [\lambda_3 \lambda_4]^{V d / 2} \int \left[\frac{dH}{\sqrt{2\pi}} \frac{dC}{\sqrt{2\pi}} \right] \Delta_{FP} \prod_{k,a} \frac{\delta(C_{0k}^a)}{[2 \sum_{\eta} (1 - \cos k_{\eta})]^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \sum_{\mu\nu} \left\{ \right. \right. \quad (4.21)$$

$$\text{Tr} \left[H_{k\mu}^{\dagger} \left(M_{\sigma k \mu}^{(H)} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{\lambda_1} \right) H_{k\nu} \right] + H_{k\mu}^* \left(M_{\sigma k \mu\nu}^{(H)} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{\lambda_3} \right) H_{k\nu} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_k \sum_{n=0}^{d-1} \left\{ \text{Tr} \left[C_{nk}^{\dagger} \left(\tau_n^{(A)} + \frac{1}{\lambda_2} \right) C_{nk} \right] + C_{nk} \left(\tau_n^{(A)} + \frac{1}{\lambda_4} \right) C_{nk} \right\} \left. \right\}$$

Para obtener esta expresión se ha desarrollado

$$A_{k\mu}^a = \sum_{n=0}^{d-1} C_{nk}^a \psi_{k\mu}^{(n)}$$

tal como en (4.17) y se ha hecho uso de

$$\prod_a \delta [\hat{A} (W_{x\mu} - W_{x-\mu, \mu})^a] = \prod_a \delta (A_{x\mu}^a - A_{x-\mu, \mu}^a) =$$

$$\prod_{\alpha} \delta [\hat{A} (W_{x\mu} - W_{x-\mu, \mu})^{\alpha}] = \prod_{\alpha} \delta [A_{x\mu}^{\alpha} - A_{x-\mu, \mu}^{\alpha}] =$$

$$= \prod_{\alpha, k} \delta \left\{ C_{\alpha k}^{\alpha} \left[2 \sum_{\mu} (1 - \cos k_{\mu}) \right]^{1/2} \right\} = \prod_{\alpha, k} \left[2 \sum_{\mu} (1 - \cos k_{\mu}) \right]^{-1/2} \delta(C_{\alpha k}^{\alpha})$$

Dado que Δ_{FP} es una función de $W_{x\mu}$ de variación suave, para el cálculo de correcciones gaussianas basta considerar su valor en el punto extremal $W_{x\mu}^{ext} = M \mathbb{1}$ (Δ_{FP} juega aquí el mismo papel que la función $g(x)$ en (C.7), la aproximación efectuada equivale a tomar $g(x) \simeq g(x_{PE})$ tal como en (C.20), lo cual está plenamente justificado en el límite $t \rightarrow \infty$). En ese caso es fácil probar que

$$\Delta_{FP}(M) = \left[M^V \prod_k \sum_{\mu} 2(1 - \cos k_{\mu}) \right]^{N^2} \quad (4.21')$$

Las integraciones restantes en (4.21) pueden ahora ser efectuadas aprovechando las funciones δ del integrando para eliminar los modos-ceros (4.11) que aparecen en $C_{\alpha k}^{\alpha}$. El resultado que se obtiene es

$$\mathcal{Z} = (V_{11(N)})^V e^{-E_0 V d} \Delta_{FP} (2\pi)^{\frac{-11^2 V}{2}} \lambda_2^{-\frac{(N^2-1)V}{2}} \lambda_4^{-\frac{V}{2}}$$

$$\prod_k \left\{ \left[2 \sum_{\mu} (1 - \cos k_{\mu}) \right]^{-N^2} \left(1 + \frac{\beta}{N} \mathcal{C}_0^{(A)} \lambda_4 \right)^{-(N^2-1)} \left(1 + \frac{\beta}{N} \mathcal{C}_k^{(A)} \lambda_2 \right)^{-(N^2-1)(d-1)} \right. \quad (4.22)$$

$$\left. \det^{-1/2} (\delta_{\mu\nu} + \lambda_1 \mathcal{M}_{\alpha\mu\nu}^{(H)}) \det^{-1/2} (\delta_{\mu\nu} + \lambda_3 \mathcal{M}_{\alpha\mu\nu}^{(H)}) \right\}$$

El cálculo de los $\det (\delta_{\mu\nu} + \lambda_i \mathcal{M}_{\alpha\mu\nu}^{(H)})$ ($i=1,3$) no puede efectuarse exactamente debido a que no es posible diagonalizar a $\mathcal{M}_{\alpha\mu\nu}^{(H)}$ por la presencia del término proporcional a $\cos k_{\mu}$ en (4.5a). Una alternativa posible / consiste en calcularlos a través de la identidad

$$\ln \det (\mathbb{1} + \lambda \mathcal{M}_b) = \text{Tr} \ln (\mathbb{1} + \lambda \mathcal{M}_b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \lambda^n \text{Tr} (\mathcal{M}_b^n)$$

que resulta en definitiva un cálculo perturbativo en los parámetros efectivos $\frac{\lambda_i \beta M^2}{N}$ ($i=1,3$). En la Sección siguiente se discute una alternativa //

distinta.

4.4) CORRECCIONES DE ORDEN 1/d PROVENIENTES DE LAS FLUCTUACIONES GAUSSIANAS

De acuerdo con la discusión de la última parte de la Sección (3.3) la ACP es exacta cuando $d \longrightarrow \infty$. En consecuencia, las correcciones a dicho resultado pueden organizarse en potencias de 1/d (multiplicadas por $\ln d$, ec. (4.30)). Teniendo esto en cuenta, se calculan en esta sección las correcciones a la energía libre de orden 1/d provenientes de las fluctuaciones gaussianas.

En la fase fría dichas correcciones vienen dadas por el primer término del desarrollo en potencias inversas de la dimensionalidad de la red de

$$\Delta F = \lim_{V \rightarrow \infty} \left(F_0 - \frac{\ln Z}{Vd} \right) \quad (4.23)$$

con Z dado por (4.22).

A efectos de dicho cálculo basta el conocimiento de los autovalores de $M_{\mu\nu}^{(H)}$ a orden cero en 1/d. Despreciando el término proporcional a $\cos k_\mu$ en (4.5a) (de orden 1/d), se obtiene:

$$\zeta_0^{(H)} = - \frac{2\beta M^2}{N} \left[2 \sum_{\mu} \cos k_\mu + (d-1) \right] + O(1/d) \quad (4.24a)$$

$$\zeta_1^{(H)} = - \frac{2\beta M^2}{N} \left(\sum_{\mu} \cos k_\mu - 1 \right) + O(1/d) \quad (4.24b)$$

este último siendo a este orden (d-1)-veces degenerado.

El límite termodinámico en (4.23) implica efectuar el reemplazo

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d}$$

Las integrales resultantes, de la forma

$$I = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \ln \left(a + \frac{b}{d} \sum_{\mu} \cos k_\mu \right)$$

pueden aproximarse por

$$I \simeq \ln a - \left(\frac{b}{2ad} \right)^2 + O(1/d^2) \quad (4.24')$$

Manteniendo un error de orden $(1/d)^2$ en todos los cálculos el resultado final viene dado por los siguientes términos (Ceccatto y Giacomini, 1983)

a) contribuciones del fijado de medida

$$F_{fm} = -\frac{N^2}{2d} \ln \left(\frac{dM^2}{\pi} \right) - \frac{1}{d} \ln(V_{U(N)}) \quad (4.25a)$$

b) contribuciones de las fluctuaciones hermíticas

$$F_{fh} = -\frac{1}{d} \left\{ \frac{M^4 \bar{\beta}^2}{2N^2} [\lambda_3^2 + (N^2-1)\lambda_1^2] - \frac{\bar{\beta} M^2}{N} [\lambda_3 + (N^2-1)\lambda_1] - \frac{(N^2-1)}{2} \ln \left(1 - \frac{2M^2 \bar{\beta} \lambda_1}{N} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M^2 \bar{\beta} \lambda_3}{N} \right) \right\} \quad (4.25b)$$

c) contribuciones de las fluctuaciones antihermíticas

$$F_{fa} = -\frac{1}{d} \left\{ \frac{M^4 \bar{\beta}^2}{2N^2} [(N^2-1)\lambda_2^2 + \lambda_4^2] - \frac{\bar{\beta} M^2}{N} [\lambda_4 + (N^2-1)\lambda_2] - \frac{(N^2-1)}{2} \ln \lambda_2 - \frac{1}{2} \ln \lambda_4 \right\} \quad (4.25c)$$

La energía libre en la fase fría corregida a orden $1/d$ resulta así

$$F_{FF} = F_0 + F_{fm} + F_{fh} + F_{fa} \quad (4.26)$$

A fin de calcular correcciones al punto de transición de fase $\bar{\beta}_0^c$ dado por (4.3) es necesario conocer la energía libre corregida a orden $1/d$ en la fase caliente. Es fácil convencerse de que en dicha fase el considerar / las fluctuaciones de los campos alrededor de la solución trivial de (4.2) /, reproducirá el desarrollo perturbativo en acoplamiento fuerte ($\bar{\beta} \simeq 0$) usual. Para ello basta observar que con $F_0 = 0$ la forma (4.20a) de escribir a \bar{Z} no genera términos cuadráticos (gaussianos) en ΔW . Por otro lado, el desarrollo en acoplamiento fuerte resulta también un desarrollo en la inversa de d debido al cambio de escala

$$\beta \longrightarrow \frac{\bar{\beta}}{(d-1)} = \frac{\bar{\beta}}{d} + O(1/d^2) \quad \bar{\beta} = O(1)$$

En consecuencia, un cálculo perturbativo directo para $\bar{\beta} \approx 0$ lleva a

$$F_{FC} = -\frac{1}{d} \frac{\bar{\beta}^2}{8N^2} + O(1/d^2)$$

Tal como en (4.3) el punto de transición de fase corregido viene dado por

$$F_{FF}[\bar{\beta}^c, M^c, \alpha^c] = F_{FC}[\bar{\beta}^c, 0, 0]$$

con M^c y α^c funciones de $\bar{\beta}^c$ a través de (4.2). Manteniendo el error de / orden $(1/d^2)$ como a lo largo de todo el cálculo y teniendo en cuenta que /

$$\left. \frac{\partial F_0}{\partial \beta} \right|_{\bar{\beta}^c} = \frac{(M_0^c)^4}{2} \quad \frac{\partial F_0}{\partial M_0} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha_0} = 0$$

resulta:

$$\bar{\beta}^c = \bar{\beta}_0^c + \delta\bar{\beta}^c = \bar{\beta}_0^c + \frac{N^2}{(M_0^c)^4} \frac{\ln d}{d} + \frac{2}{d(M_0^c)^4} \left(\Delta F + \frac{\bar{\beta}_0^{c2}}{8N^2} \right) \quad (4.27)$$

En la sección siguiente se evaluará esta expresión para $U(\infty)$.

4.5) RESULTADOS NUMERICOS

Para el caso del grupo $U(\infty)$ se deben rescalear las distintas cantidades en la forma

$$F \rightarrow N^2 F \quad \bar{\beta} \rightarrow N^2 \bar{\beta} \quad \alpha \rightarrow N \alpha \quad M \rightarrow M$$

de manera de obtener resultados finitos en el límite $N \rightarrow \infty$ de (4.1)~(4.2).

Teniendo en cuenta (E.9) y (E.10) se obtiene así:

$$F_{FF} = -\frac{\bar{\beta} M^4}{2} + \alpha M - w(\alpha) - \frac{\ln d}{2d} - \frac{1}{d} \left[\frac{1}{2} \ln(2M\alpha) - \frac{1}{2} \ln(1 - 2M^2 \bar{\beta} x) - \bar{\beta} M^2 \left(x + \frac{M}{\alpha}\right) + \frac{\bar{\beta}^2 M^4}{2} \left(x^2 + \frac{M^2}{\alpha^2}\right) + \frac{3}{4} \right] \quad (4.28)$$

con

$$M = w'(\alpha) \quad 2\bar{\beta} M^3 = \alpha \quad x = 1 - M^2 \frac{M}{\alpha}$$

$$\omega(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} \ln \alpha - \frac{3}{4}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln N - \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n!) \right) = 3/4$$

La evaluación numérica de (4.2) proporciona los valores

$$M_0^c = 0.89 \quad \alpha_0^c = 4.52 \quad \bar{\beta}_0^c = 3.21$$

con lo cual, en (4.27) se obtiene:

$$\bar{\beta}_\infty^c = 3.21 - 1.60 \frac{\ln d}{d} - \frac{0.42}{d} \quad (4.29)$$

Para el grupo U(1) los resultados correspondientes son (Alessandrini et al, 1983):

$$M_0^c = 0.90 \quad \alpha_0^c = 5.32 \quad \bar{\beta}_0^c = 3.64$$

y

$$\bar{\beta}_1^c = 3.64 - 1.52 \frac{\ln d}{d} - \frac{0.04}{d} \quad (4.30)$$

En la tabla siguiente figuran los valores de $\bar{\beta}_1^c$ y $\bar{\beta}_\infty^c$ para $d=4$ y / los correspondientes valores predichos por el método de Monte Carlo.

N	ACP	+ δ (1/d)	M.C.
1	3.65	3.11	3.02*
∞	3.21	2.55	2.25 ⁺

Tabla 4.2

* Lautrup y Nauenberg, 1980

+ Creutz y Moriarty, 1982
(extrapolado desde N=6)

4.6) COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El análisis de la tabla (4.2) muestra una buena concordancia (aproximadamente dentro del margen de error $O(1/4^2)$) entre el resultado obtenido pa

ra $U(1)$ y el correspondiente valor predicho por el método de Monte Carlo, y tal como fuera adelantado en la subsección (3.1b), la transición predicha es de primer orden, en desacuerdo con los resultados obtenidos mediante técnicas del grupo de renormalización (Migdal, 1976) y simulaciones de Monte Carlo (Lautrup y Nauenberg, 1980), que indican que para $U(1)$ en $d=4$ la transición es de segundo orden.

La buena concordancia numérica para el caso de $U(1)$ antes señalada se deteriora para $U(\infty)$, aunque en este caso la transición esperada es de primer orden tal como indica la ACP.

Cálculos similares a los de esta sección usando la medida axial (Müller et al, 1983) proporcionan un valor $\beta_c \approx 2.34$, mucho más próximo al valor predicho por el método de Monte Carlo. Dicha medida resulta así más eficiente que el "gauge natural" para el tratamiento de grupos no-abelianos. Esta conclusión había sido ya adelantada en la Sección (4.1) por simple inspección de los resultados a orden cero dados en la tabla (4.1). Es de destacar sin embargo que en dicha medida el cálculo de correcciones de mayor orden se dificulta enormemente. Ello se debe a que la misma rompe parte de las simetrías discretas de la teoría al privilegiar una dirección determinada.

Finalmente, debe hacerse notar que las correcciones de orden $1/d$ evaluadas no agotan las correcciones a ese orden: fluctuaciones de orden mayor que las cuadráticas contribuyen a (4.26) ~ (4.27) con nuevos términos de orden $1/d$. Sin embargo, dichos términos pueden ignorarse debido a que aparecen multiplicados por potencias de $(1-M_0)$ y $1/\lambda_0$ (≈ 0.1), provenientes de los propagadores de los campos $W_{x\mu}$ y $Z_{x\mu}$ respectivamente (Alessandrini et al, 1983).

Capítulo 5: ESTUDIO DE LA QED COMPACTA CON ACCION GENERALIZADA

La Electrodinámica Cuántica (QED) como TCM pura (sin campos de materia) es un modelo trivial en el continuo debido a la no-interacción entre los cuantos del campo de medida (fotones). Su formulación sobre redes (QED compacta) la convierte, sin embargo, en un modelo sumamente rico, el cual sufre una transición de fase de segundo orden para $\beta \simeq 1.00$ (Lautrup y Nauenberg, 1980).

De acuerdo con lo visto en la sección (2.4), la existencia de dicha transición, desde una fase confinante a una fase no-confinante, es esencial en cuanto a la utilidad de la formulación de TCM sobre redes: los electrones no se hallan ciertamente confinados.

La posibilidad de considerar acciones más generales que la de Wilson lleva entonces a preguntarse si no es posible encontrar, en el espacio de los parámetros de estas acciones, una trayectoria del grupo de renormalización (Kadanoff, 1977) que lleve desde altas a bajas temperaturas sin atravesar ninguna línea de transición de fase. Si así ocurriese, la acción generalizada considerada correspondería a un modelo sobre la red confinante, no obstante tener como simetría básica a $U(1)$, al igual que la teoría (no-confinante) con acción de Wilson. Es decir, se estaría violando la hipótesis de universalidad; en el límite continuo, las características físicas de la teoría resultante dependerían de la acción sobre la red elegida.

El propósito de este capítulo es investigar dicha posibilidad estudiando, a través de la técnica del campo promedio, el diagrama de fases para una acción generalizada con dos parámetros, que incluye el término de plaqueta de Wilson usual más su cuadrado (Ceccatto, 1984; Dagotto, 1984). Resulta también interesante comparar los resultados que proporciona la técnica aquí empleada con los resultados para el mismo modelo obtenidos a través de simulaciones de Monte Carlo (Bhanot, 1982) y técnicas del grupo de renormalización (Bitar et al, 1983).

La presencia, dentro de la acción considerada, del término de plaqueta elevado al cuadrado requiere para su tratamiento una leve generalización de la técnica del campo promedio. Dicha generalización, desarrollada en la sección siguiente, resulta necesaria a fin de preservar la equivalencia entre el método variacional y el orden cero del DPE (Ceccatto, 1984), como formas alternativas de obtener la ACP que conducen a resultados exactos en el límite $d \longrightarrow \infty$ (Alessandrini y Boucaud, 1983).

Para eliminar los modos-ceros del cálculo se fijarán las fluctuaciones de los campos usando la medida covariante general (Rühl, 1982), que contiene el gauge natural de la teoría de coordenadas colectivas -empleado en el capítulo anterior- como caso particular (ver el comentario que sigue a la ec. / (5.14)). Esta forma de fijar la medida posibilita un manejo más elegante de las etapas intermedias del cálculo.

Tal como fuera hecho en el capítulo anterior se evaluarán los términos hasta orden $1/d$ provenientes de las correcciones gaussianas. Esta aproximación ha probado ser efectiva en modelos con simetría $U(1)$ (abeliana), tal como el considerado aquí (Tabla (4.2)).

5.1) METODO VARIACIONAL VS. METODO DE DESARROLLO EN EL PUNTO DE ENSILLADURA

Apenas formulada la teoría del campo promedio (ACP) como el orden cero de un desarrollo alrededor de un punto de ensilladura (DPE), distintos autores se dedicaron al cálculo de correcciones a las energías libres y diagramas de fase de TCM sobre redes. Sin embargo, la explicitación que Brézin y Drouffe hicieron de la equivalencia entre la ACP y el orden cero del DPE es válida solamente para acciones del tipo de la de Wilson. La aplicación directa a otras acciones sobre la red (acciones generalizadas) llevó a la pérdida de dicha equivalencia y, consecuentemente, a la pérdida de la exactitud de los resultados en el límite $d \longrightarrow \infty$ (Ghoroku, 1983), una propiedad esencial de la ACP.

El origen del problema radica en la no-linealidad de las acciones generalizadas en cada variable de unión $U_{x\mu}$. La presencia, por ejemplo, de términos que contiene a $U_{x\mu}^2$ no es tomada en cuenta convenientemente en la formulación usual, ya que ésta no distingue entre $\langle U_{x\mu} \rangle_{CP}^2$ y $\langle U_{x\mu}^2 \rangle_{CP}$:

$$\langle U_{x\mu} \rangle_{CP}^2 = A^2 = \langle U_{x\mu}^2 \rangle_{CP}$$

La forma de remediar este problema, bien conocida para sistemas de spin (Brézin et al, 1976), es muy sencilla.

Dada una acción polinómica arbitraria

$$A = - \sum_{(x)} \sum_{(m)} \beta_{(m)} \Phi_1^{n_1}(x_1) \dots \Phi_r^{n_r}(x_r). \quad (5.1)$$

para hacer coincidir el tratamiento variacional de este modelo con el DPE se debe proponer una acción de prueba de sitios (o uniones) independientes

$$A_0 = - \sum_x \sum_{(m)} K_{(m)}(x) \Phi_1^{m_1}(x) \dots \Phi_r^{m_r}(x)$$

que contenga todos los productos locales de campos $\Phi_1^{m_1}(x) \dots \Phi_r^{m_r}(x)$ que aparezcan en A acoplados a fuentes externas $K_{(m)}(x)$. El resultado variacional coincidirá así con el orden cero del DPE de la teoría equivalente:

$$\mathcal{Z} = \int \left[\frac{dW dZ}{(2\pi i)^d} \right] \exp \left\{ -A(W) - \sum_x \sum_{(m)} Z_{(m)}(x) W_{(m)}(x) + \sum_x W_x(Z_{(m)}) \right\} \quad (5.2)$$

En esta expresión se ha definido,

$$W_x(Z_{(m)}) = \ln \int \prod_{i=1}^r d\Phi_i(x) \exp \left\{ \sum_{(m)} Z_{(m)}(x) \Phi_1^{m_1}(x) \dots \Phi_r^{m_r}(x) \right\} \quad (5.3)$$

y $A(W)$ es la acción (5.1) con los productos locales de campos reemplazados por adecuados campos $W(m)$.

El espíritu de la prescripción hecha es permitir las fluctuaciones independientes de todas las estructuras locales en A. La misma lleva, al menos para las acciones generalizadas usuales, a resultados en orden cero exactos cuando $d \rightarrow \infty$ (Alessandrini y Boucaud, 1984). El precio a pagar es un aumento en la complejidad de la función w de (3.5).

5.2) APROXIMACION DE CAMPO PROMEDIO

Aplicaremos aquí la prescripción dada en la sección anterior a la QED / compacta con acción generalizada (Ceccatto, 1984, Dagotto, 1984).

El modelo considerado viene dado por

$$\mathcal{Z} = \int [d\mu(u)] \exp(-A) \quad (5.4a)$$

$$A = -\beta_1 \sum_P \text{Re} U_P - \beta_2 \sum_P \text{Re} (U_P)^2 \quad (5.4b)$$

donde U_P es el producto de variables de unión $U_{x\mu}$ ($\in U(1)$) alrededor de \underline{u} na plaqueta, tal como en (2.8).

Utilizando la identidad

$$1 = \int \left[\frac{dW_1}{(2\pi i)} \frac{dZ_1}{(2\pi i)} \frac{dW_2}{(2\pi i)} \frac{dZ_2}{(2\pi i)} \right] \exp \left\{ \sum_{x\mu} \text{Re} \left[(U_{x\mu} - W_{1x\mu}) \cdot \bar{Z}_{1x\mu}^* + (U_{x\mu}^2 - W_{2x\mu}) \cdot \bar{Z}_{2x\mu}^* \right] \right\}$$

se puede escribir (5.4) en la forma

$$\mathcal{Z} = \int \left[\prod_{n=1}^2 \frac{dW_n}{(2\pi i)} \frac{dZ_n}{(2\pi i)} \right] e^{-A_{ef}} \quad (5.5a)$$

con

$$A_{ef} = -\beta_1 \sum_P \text{Re}(W_{1P}) - \beta_2 \sum_P \text{Re}(W_{2P}) + \sum_{x\mu} \text{Re} (W_{1x\mu} \bar{Z}_{1x\mu}^* + W_{2x\mu} \bar{Z}_{2x\mu}^*) - \sum_{x\mu} W_{x\mu} \quad (5.5b)$$

La función $W_{x\mu}$ viene dada por

$$W_{x\mu} = \ln \int [d\mu(u)] \exp \left\{ \text{Re} (U_{x\mu} \bar{Z}_{1x\mu}^* + U_{x\mu}^2 \bar{Z}_{2x\mu}^*) \right\} \quad (5.6)$$

En esta forma $U_{x\mu}$ y $U_{x\mu}^2$ fluctúan independientemente a través de los / campos W_1 y W_2 , respectivamente.

Las ecuaciones extremales obtenidas de (5.5b) pueden ser resueltas pro poniendo soluciones de la forma :

$$W_{nxy\mu}^{ext} = M_n V_{xy\mu}^n \quad \mathcal{L}_{nxy\mu}^{ext} = \alpha_n V_{xy\mu}^n \quad (n=1,2) \quad (5.7)$$

donde $V_{xy\mu}$ es un elemento de $U(1)$ arbitrario. Se obtienen entonces las condiciones

$$M_n = \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} \quad W = \ln \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)} \exp[\alpha_1 \cos\phi + \alpha_2 \cos(2\phi)]$$

mientras que $V_{xy\mu}$ debe verificar

$$\beta_n M_n^3 \sum_{\nu \neq \mu} \left[(V_{xy\mu} V_{x+\mu,\nu}^* V_{x+\nu,\mu}^* V_{x\nu})^n + (V_{x-\nu,\mu}^* V_{x-\nu+\mu,\nu}^* V_{xy\mu} V_{x-\nu,\nu})^n \right] = \alpha_n \quad (5.8)$$

Tomando como configuración básica

$$V_{x1} = \mathbb{1} \quad V_{x2} = (V_0)^{x_1} \quad V_{xy\mu} = (V_0)^{\sum_{\nu=1}^{\mu-1} x_\nu} \quad (5.8')$$

la ecuación (2.7) lleva a

$$2\bar{\beta}_n M_n^3 V_0^n = \alpha_n \quad \bar{\beta}_n = \beta_n \cdot (d-1)$$

Se tienen entonces dos posibilidades

$$1) \quad V_0 = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 2(\pm\bar{\beta}_1) M_1^3 = \alpha_1 \\ 2\bar{\beta}_2 M_2^3 = \alpha_2 \end{cases} \quad (5.9a)$$

$$2) \quad V_0 = \pm i \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} M_1 = \alpha_1 = 0 \\ 2(-\bar{\beta}_2) M_2^3 = \alpha_2 \end{cases} \quad (5.9b)$$

Para el primer caso la energía libre por unión viene dada por

$$T_0 = (\mp\bar{\beta}_1) \frac{M_1^4}{2} + \alpha_1 M_1 - \bar{\beta}_2 \frac{M_2^4}{2} + \alpha_2 M_2 - (1) \quad (5.10a)$$

y para el segundo por

$$T_0 = \bar{\beta}_2 \frac{M_2^4}{2} + \alpha_2 M_2 - \ln I_0(\alpha) \quad (5.10b)$$

Las ecuaciones (5.9) - (5.10) definen el diagrama de fases de la fig.

(5.1). Se tienen allí cuatro fases: una fase confinante (A), dos fases parcialmente confinantes (B y C) y una fase ordenada no-confinante (D). Para $\beta_1 < 0$ se obtiene el diagrama simétrico.

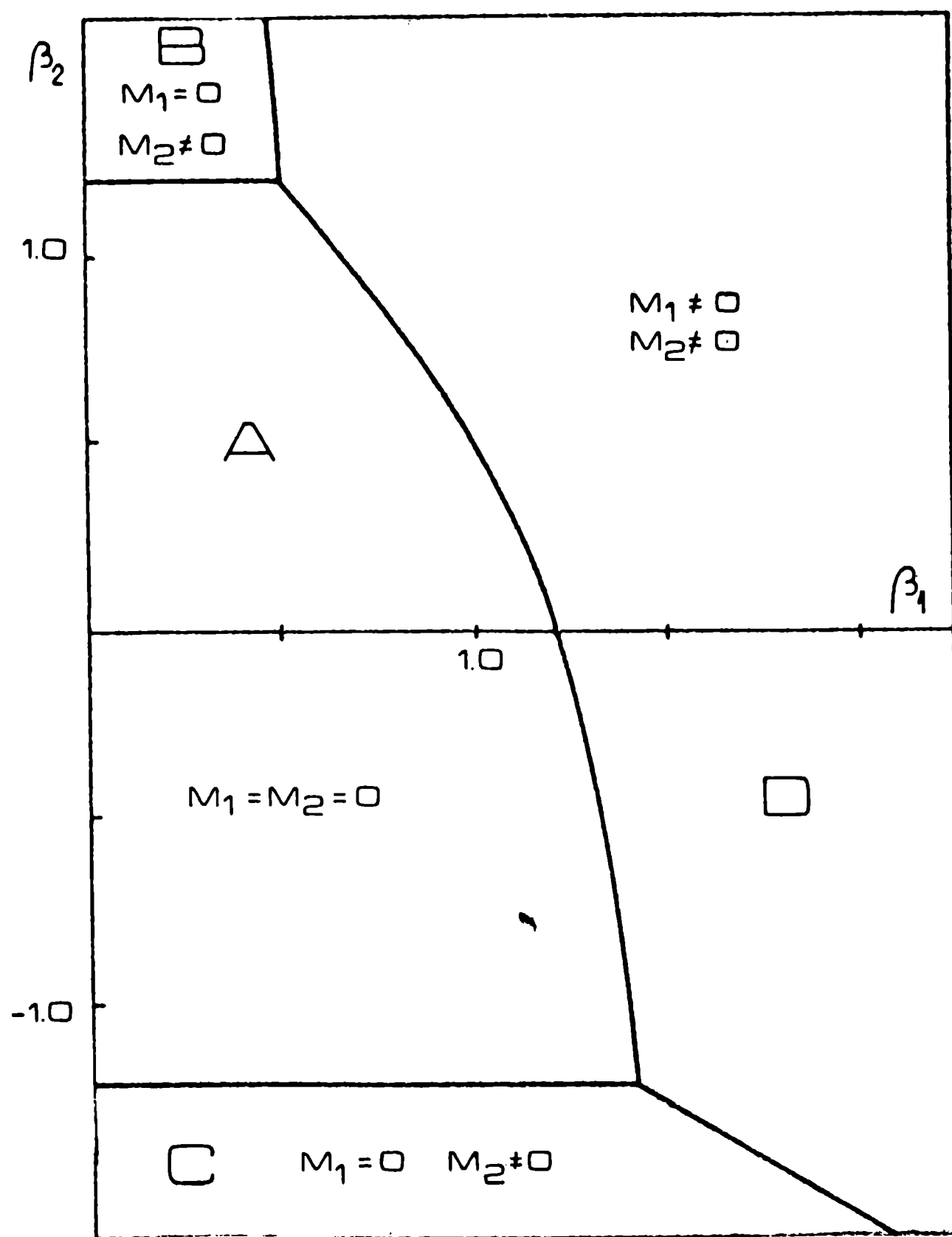


fig. (5.1)

En las fases parcialmente confinantes B y C las excitaciones del campo W_1 se hallan confinadas mientras que las del campo W_2 no lo están. La diferencia entre ambas fases reside en las características de la configuración fundamental en la que se propagan dichas excitaciones (ec. (5.8')).

5.3) CORRECCIONES GAUSSIANAS

5.3a) Fase ordenada (D)

Reescribiendo la acción (5.5b) en términos de las fluctuaciones de los campos alrededor de los valores medios (5.7) y reteniendo sólo términos cuadráticos, integraciones gaussianas elementales llevan al resultado:

$$\mathcal{L} = \exp(-i\beta/d) \prod_k \det^{-1/2}(\delta_{\mu\nu} + \mathcal{M}_0^{(R)}{}_{\kappa\mu\nu}) \det^{-1/2}(\delta_{\mu\nu} + \mathcal{M}_0^{(J)}{}_{\kappa\mu\nu}) \quad (5.11)$$

Las fluctuaciones reales e imaginarias contribuyen a (5.11) a través / de los determinantes de las matrices $\mathcal{M}_0^{(R)}$ y $\mathcal{M}_0^{(J)}$ respectivamente. Dichas matrices se definen

$$\mathcal{M}_0^{(R)}{}_{\kappa\mu\nu} = (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2) R_{\rho\kappa\mu\lambda}^{(1)} R_{\rho\kappa\lambda\nu}^{(2)} + \lambda_1 R_{\rho\kappa\mu\nu}^{(1)} + \lambda_2 R_{\rho\kappa\mu\nu}^{(2)}$$

y

$$\mathcal{M}_0^{(J)}{}_{\kappa\mu\nu} = (\zeta_1\zeta_2 - \zeta_{12}^2) J_{\kappa\mu\lambda}^{(1)} J_{\lambda\nu}^{(2)} + \zeta_1 J_{\kappa\mu\nu}^{(1)} + \zeta_2 J_{\kappa\mu\nu}^{(2)}$$

Las funciones $\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$ y $\zeta(\alpha_1, \alpha_2)$ vienen dadas por (E.12) y las matrices $R_{\rho\kappa\mu\nu}^{(n)}$ y $J_{\kappa\mu\nu}^{(n)}$ por (4.5) con $N=1$ y $\beta = \beta_n$.

El determinante de $\mathcal{M}_0^{(J)}{}_{\kappa\mu\nu}$ puede ser calculado exactamente mediante un procedimiento de diagonalización. Los autovalores correspondientes resultan

$$\omega_1^{(J)} = (\zeta_1\zeta_2 - \zeta_{12}^2) \frac{\alpha_1}{M_1} \frac{\alpha_2}{M_2} - \left(\zeta_1 \frac{\alpha_1}{M_1} + \zeta_2 \frac{\alpha_2}{M_2} \right) \quad (5.12a)$$

y

$$\omega_2^{(J)} = (\zeta_1\zeta_2 - \zeta_{12}^2) \frac{\alpha_1}{M_1} \frac{\alpha_2}{M_2} \left(\frac{\sum_{\mu} \cos k_{\mu} - 1}{d-1} \right)^2 - \left(\zeta_1 \frac{\alpha_1}{M_1} + \zeta_2 \frac{\alpha_2}{M_2} \right) \left(\frac{\sum_{\mu} \cos k_{\mu} - 1}{d-1} \right) \quad (5.12b)$$

siendo este último $(d-1)$ -veces degenerado. El determinante de $\mathcal{M}_0^{(R)}{}_{\kappa\mu\nu}$ será evaluado en forma aproximada más adelante.

5.3b) Modos-ceros y fijado de medida

Cálculos numéricos muestran que $\omega_1^{(J)}$, dado por (5.12a) es idénticamente nulo. Este modo-cero puede ser evitado, tal como en la sección (4.3), fijando la condición de medida (Rühl, 1982):

$$\sum_{\mu} (A_{1x\mu} - A_{1x-\mu}) = \xi_x \quad \forall x \quad (5.13)$$

donde $A_{1x\mu}$ son las fluctuaciones imaginarias del campo W_1 (nótese que $\beta_1 \neq 0$)

en esta fase) y t_x son números reales arbitrarios.

Introduciendo la condición (5.13) dentro de la función de partición mediante el procedimiento usual de Fadeev-Popov e integrando respecto a t_x con el peso normalizado

$$P(t_x, \xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{\xi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi t_x^2\right)$$

se obtiene la acción de fijado de medida

$$A_{fm} = -\frac{1}{2} \xi \sum_x \left[\sum_\mu (A_{1x\mu} - A_{1x-\mu,\mu}) \right]^2 - \frac{V}{2} \ln\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) \quad (5.14)$$

El parámetro arbitrario ξ define el gauge. En particular, para $\xi \rightarrow \infty$ se reobtiene el gauge de Landau, equivalente al gauge natural de la teoría / de coordenadas colectivas de acuerdo con lo visto en la sección (4.3).

Adicionar A_{fm} a la acción original sólo lleva a reemplazar $(-\beta, M_1^2)$ por $(\xi - \beta, M_1^2)$ en el primer término de (5.5b), lo cual a su vez es equivalente a cambiar el autovalor $w_1^{(j)}$ de (5.12a) por

$$w_\xi = \left[2\xi \sum_\mu (1 - \cos k_\mu) \right] \left[(\epsilon_{12}^2 - \epsilon_1 \epsilon_2) \frac{\alpha_2 + \epsilon_1}{M_2} \right]$$

En consecuencia, el resultado correcto es

$$\mathcal{Z} = \exp(-E_0 V d) \Delta_{FP} \prod_k \det_k^{-1/2} (\delta_{\mu\nu} + \hat{b}_{k\mu\nu}^{(R)}) \left(\frac{2\pi}{\xi}\right)^{-V/2} \prod_k \det_k^{-1/2} (\delta_{\mu\nu} + \hat{M}_{k\mu\nu}^{(j)}) \quad (5.15)$$

con el autovalor $w_1^{(j)}$ de $\hat{M}_{k\mu\nu}^{(j)}$ reemplazado por w_ξ y Δ_{FP} dado por (4.21') con $M=M_1$. Debe hacerse notar aquí que en realidad (2.12) no depende de ξ , tal como era esperable desde un punto de vista físico.

5,3c) Fase de confinamiento parcial (B)

Para el cálculo de correcciones a la fase de confinamiento parcial B se puede aprovechar el hecho de que $\beta_1 \approx 0$. En consecuencia

$$\mathcal{Z} = \int [d\mu_i] \left\{ 1 + \beta_1 \sum_p \text{Re} U_p + \frac{1}{2} \beta_1^2 \left(\sum_p \text{Re} U_p \right)^2 + \dots \right\} e^{\beta_2 \sum_p \text{Re} U_p^2} \approx$$

$$= \int [d\mu(u)] \exp \left\{ \beta_{\text{ef}} \sum_P \text{Re} \ell_P + \frac{\bar{\beta}_1 V d}{8(d-1)} \right\}$$

es decir

$$F^{(B)} = - \frac{\bar{\beta}_1^2}{8(d-1)} + F^{(D)}(\beta_{\text{ef}}, 0) \quad \beta_{\text{ef}} = \beta_2 + \frac{\beta_1^2}{4} \quad (5.16)$$

Las correcciones a la fase de confinamiento parcial C son difíciles de calcular debido a la "anisotropía" de la configuración de base (5.8'). En consecuencia -y dado que dichas correcciones no son de especial interés-, las mismas no serán consideradas en este trabajo.

5.3d) Fase de confinamiento (A)

Como fuera discutido en la sección (4.4), las correcciones en la fase desordenada ($\alpha_1 = \alpha_2 = M_1 = M_2 = 0$) reproducen el desarrollo en acoplamiento fuerte usual. A través de un cálculo directo se obtiene

$$F^{(A)} = - \frac{1}{8(d-1)} (\bar{\beta}_1^2 + \bar{\beta}_2^2) \quad (5.17)$$

5.4) CORRECCIONES DE ORDEN 1/d

De acuerdo con lo visto en el capítulo 4, las correcciones a la ACP pueden organizarse como un desarrollo en potencias de 1/d. En esta sección se evaluarán los términos de orden 1/d provenientes de las fluctuaciones gaussianas.

5.4a) Correcciones a la energía libre

Para obtener los términos de orden 1/d buscados, tal como fuera hecho precedentemente se puede:

i) despreciar el término proporcional a $\cos k_\mu$ en (4.5a) (cuya contribución

es de orden $1/d$ en el resultado final) y evaluar el determinante de $\mathcal{M}_{\alpha\kappa\mu\nu}^{(R)}$ a través de los autovalores aproximados

$$\omega_1^{(R)} = (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2) \frac{\alpha_1}{M_1} \frac{\alpha_2}{M_2} \left(1 + \frac{1}{d-1} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right)^2 -$$

$$- \left(\lambda_1 \frac{\alpha_1}{M_1} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{M_2} \right) \left(1 + \frac{2}{d-1} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right)$$

y

$$\omega_2^{(R)} = (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2) \frac{\alpha_1}{M_1} \frac{\alpha_2}{M_2} \left(\frac{1}{d-1} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} - \frac{1}{d-1} \right)^2 -$$

$$- \left(\lambda_1 \frac{\alpha_1}{M_1} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{M_2} \right) \left(\frac{1}{d-1} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} - \frac{1}{d-1} \right)$$

el cual es a este orden $(d-1)$ veces degenerado.

ii) retener solamente los términos constantes (en K) de las integrales en / los momentos que se obtienen al tomar el límite termodinámico $V \longrightarrow \infty$.

Con estas simplificaciones, la energía libre por unión en las distintas fases viene dada por (Ceccatto, 1984):

1) Fase ordenada (D)

Contribuciones de orden cero

$$F_0^{(D)} = - \frac{\beta_1 M_1^4}{2} + \alpha_1 M_1 - \frac{\beta_2 M_2^4}{2} + \alpha_2 M_2 - U \quad (5.18a)$$

Contribuciones de los términos de fijado de medida

$$F_{fm}^{(D)} = - \frac{1}{2d} \ln(8\pi d^2 M_1^2) \quad (5.18b)$$

Contribuciones de las fluctuaciones reales

$$F_{fr}^{(D)} = \frac{1}{2d} \ln \left[1 + (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2) \frac{\alpha_1}{M_1} \frac{\alpha_2}{M_2} - \left(\lambda_1 \frac{\alpha_1}{M_1} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{M_2} \right) \right] \quad (5.18c)$$

$$+ \frac{1}{2d} \left[\lambda_1 \frac{\alpha_1}{M_1} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{M_2} - \left(\frac{\lambda_1 \alpha_1}{2M_1} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_2 \alpha_2}{2M_2} \right)^2 - \frac{\lambda_{12}}{2} \frac{\alpha_1}{M_1} \frac{\alpha_2}{M_2} \right]$$

Contribuciones de las fluctuaciones imaginarias

$$F_{fi}^{(D)} = \frac{1}{2d} \ln(2d) + \frac{1}{2d} \ln \left[(\zeta_{12}^2 - \zeta_1 \zeta_2) \frac{\alpha_2}{M_2} + \zeta_1 \right] + \quad (5.18d)$$

$$+ \frac{1}{2d} \left[\epsilon_1 \frac{\alpha_1}{M_1} + \epsilon_2 \frac{\alpha_2}{M_2} - \left(\frac{\epsilon_1 \alpha_1}{2M_1} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon_2 \alpha_2}{2M_2} \right)^2 - \frac{\epsilon_{12} \alpha_1 \alpha_2}{2M_1 M_2} \right]$$

2) Fase de confinamiento parcial (B)

De acuerdo con (5.16) basta con tomar en (5.18)

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0 \quad \beta_1 = \beta_{ef} = \beta_2 + \frac{\beta_1^2}{1}$$

y

$$F^{(B)} = - \frac{\beta_1^2}{8d} + F^{(D)}(\beta_{ef}, 0) = - \frac{\beta_1^2}{8d} + F_1^{(B)}$$

3) Fase confinante (A)

Según (5.17) resulta

$$F^{(A)} = - \frac{1}{8d} (\beta_1^2 + \beta_2^2) + \dots (1/d^2)$$

5.4b) Correcciones al diagrama de fases

Si se propone un desarrollo en $1/d$ para los valores medios de los campos sobre las líneas de transición de fase

$$l_n^c = M_{n0}^c + M_{n1}^c/d \quad \alpha_n^c = \alpha_{n0}^c + \alpha_{n1}^c/d \quad (n=1,2)$$

donde M_{n0}^c y α_{n0}^c corresponden a los valores sobre las líneas del diagrama de orden cero (fig. 5.1), entonces los conocimientos de orden $1/d$ vienen dados por:

$$\delta \bar{\beta}_1^c(\bar{\beta}_2^c) \Big|_{AD} = \left\{ \frac{2}{(M_1^c)^4} (F^{(D)} - F^{(A)}) \right\} \Big|_{\alpha_{n1}^c = M_{n1}^c = 0}$$

$$\delta \bar{\beta}_1^c(\bar{\beta}_2^c) \Big|_{EL} = \left\{ \frac{2}{(M_1^c)^4} \left[F^{(D)} + \frac{(\beta_1^c - \beta_2^c)^4}{8d} - F_1^{(B)} \right] \right\} \Big|_{\alpha_{n1}^c = M_{n1}^c = 0}$$

$$\delta \bar{\beta}_2^c(\bar{\beta}_1^c) \Big|_{AB} = \left\{ \frac{2}{(M_B^c)^4} (F_1^{(B)} - F^{(A)}) - \frac{(\beta_1^c)^2}{11d} \right\} \Big|_{\alpha_{B1}^c = M_{B1}^c = 0}$$

La evaluación numérica de estas expresiones para $d=4,5$ proporciona los diagramas corregidos de las figs. (5.2) y (5.3). A fines de comparación se incluyen en dichas figuras los resultados correspondientes obtenidos a tra /

vés del método de Monte Carlo (puntos negros y círculos) (Bhanot, 1982a,b).

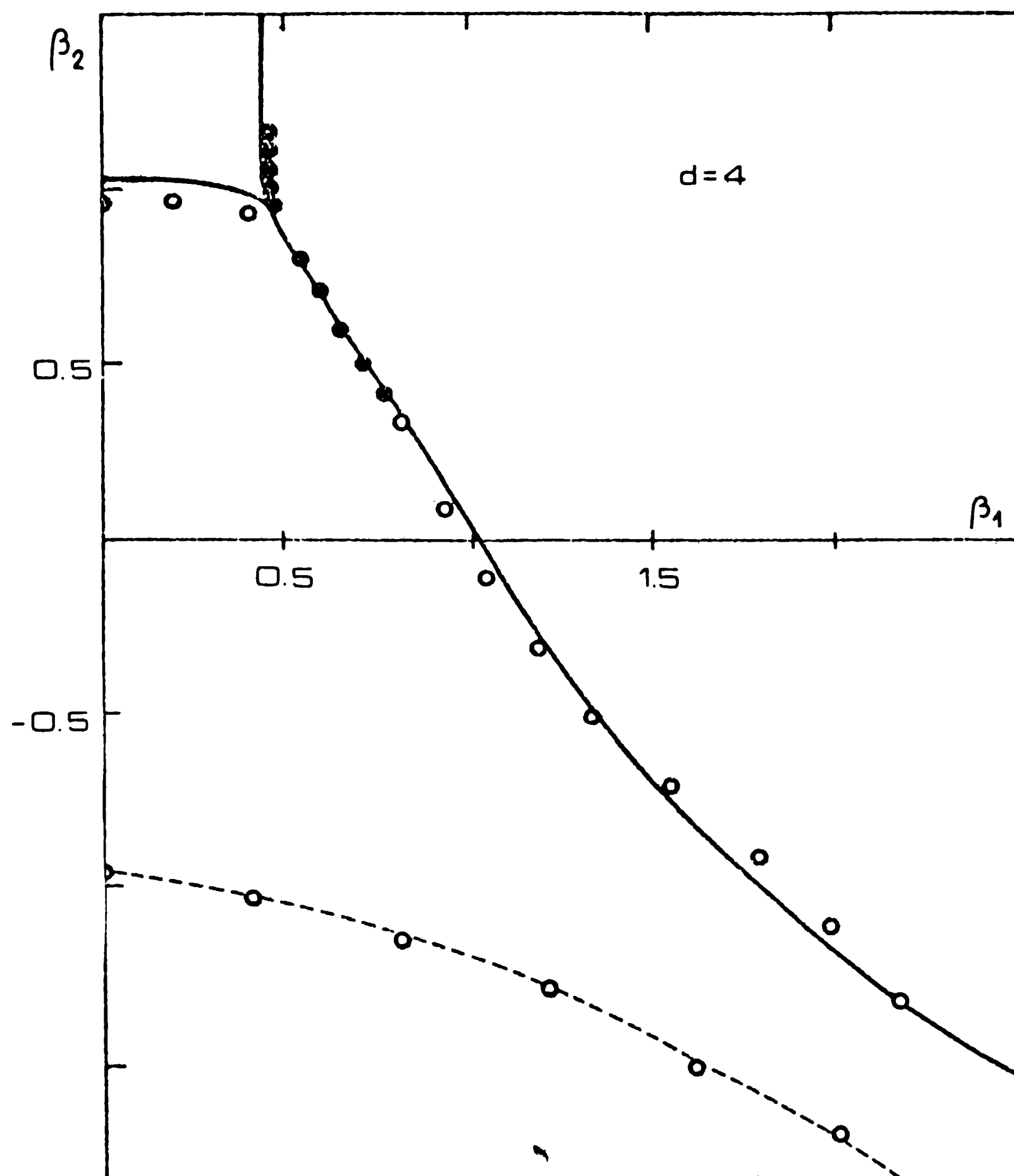


fig. (5.2)

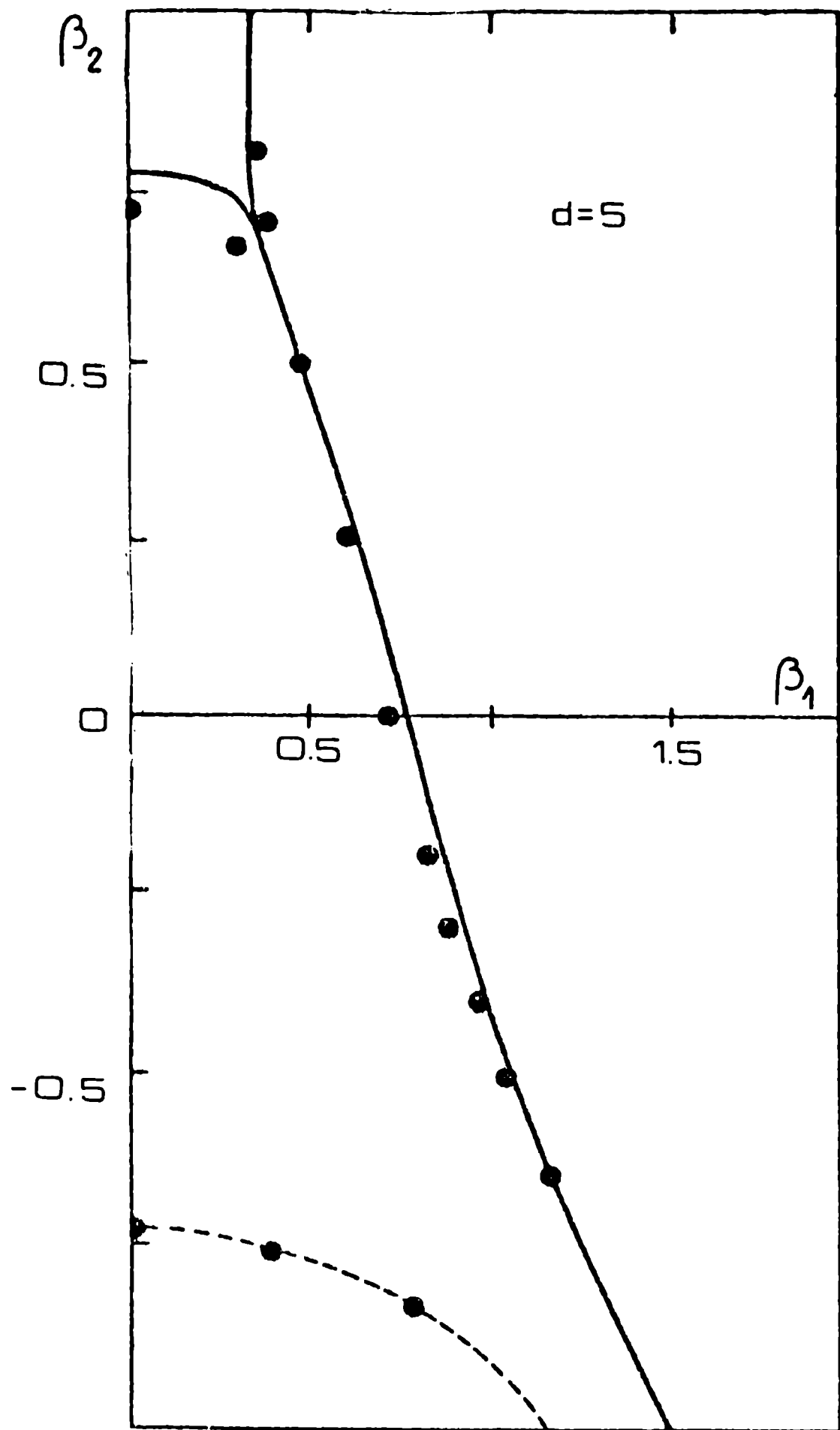


fig. (5.3)

5.5) COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El análisis de los diagramas de figs. (5.2) y (5.3) muestra una buena concordancia entre los resultados que proporciona la técnica del campo promedio y los obtenidos a través del método de Monte Carlo (Bhanot, 1982a,b). Es de esperar, sin embargo, que la concordancia entre los resultados aquí obtenidos y los valores exactos sea aún más estrecha: en fig. (5.2) por ejemplo, determinaciones numéricas más precisas (Caldi, 1982) de los puntos $(\beta_1^c, 0)$ y $(0, \beta_2^c)$ los ubican en $\beta_1^c = \beta_2^c \approx 1.00$, es decir, en una posición intermedia entre nuestros resultados y los correspondientes a la simulación de Monte Carlo realizada por Bhanot. No obstante, la ventaja de este último método reside en que diferencia (estudiando el comportamiento del calor específico) en $d=4$ las líneas de transiciones de primer orden de las de segundo orden (puntos negros y círculos respectivamente en fig. (5.2))

Debe señalarse que no se observan "ventanas" en el diagrama de fases, es decir, a lo largo de cualquier trayectoria que conecte zonas de altas y bajas temperaturas se cruza alguna línea de transición de fase. Ello está de acuerdo con la hipótesis de universalidad en la formulación de TCM sobre redes: todos los modelos sobre redes representativos de la QED deben tener una fase no-confinante separada, a través de una línea de transición, de posibles fases confinantes. Resta, sin embargo, establecer claramente el significado físico de las transiciones de primer orden en cuanto a su conexión con las propiedades del modelo continuo, lo cual es algo actualmente en discusión (Bitar et al, 1982a).

Capítulo 6: ESTUDIO DE LA TCM CON ACCION MIXTA FUNDAMENTAL-ADJUNTA BASADA EN EL GRUPO SU(2).

Simulaciones de Monte Carlo del modelo realista standard basado en el grupo SU(3) con acción de Wilson (Creutz, 1980) no detectan transiciones de fase de la teoría al ir desde altas a bajas temperaturas. Esto está de acuerdo con la esperada coexistencia de los fenómenos de confinamiento y libertad asintótica en una única fase de la QCD sobre una red.

Se detecta sin embargo, un pico en el calor específico para un valor intermedio de temperatura, que se interpreta como el remanente de una transición de segundo orden próxima en un espacio de parámetros ampliado (Bhanot y Creutz, 1981). Dicho espacio de parámetros ampliado corresponde a una acción sobre la red generalizada que incluye, además de la plaqueta de Wilson en la representación fundamental, el mismo término en la representación adjunta del grupo (acciones mixtas). Esta clase de acciones más generales ha sido extensamente estudiada para modelos con simetría SU(N) en el límite $N \longrightarrow \infty$ (Makeenko y Polikarpov, 1982; Samuel, 1982), con el fin de chequear la hipótesis de universalidad.

El objeto de esta sección es el estudio de un modelo con acción mixta (mezcla de representaciones fundamental y adjunta) basado en el grupo SU(2), de comportamiento análogo (Bhanot y Creutz, 1981) al del modelo con simetría SU(3). La elección de SU(2) en lugar de SU(3) se debe a razones de simplicidad en el manejo de integrales en el grupo.

Teniendo en cuenta la relación (E.13) $\text{Tr } U_A = \text{Tr } U_F \text{Tr } U_F^\dagger - 1$, válida para U(N) y SU(N), resulta evidente por la discusión de la sección / (5.1) que es necesario introducir dos campos externos, uno para cada representación.

En este caso los cálculos serán realizados en la medida axial (Apéndice D) que, de acuerdo con resultados previos (Capítulo 4), es más conveniente que el gauge natural para el estudio de TCM con simetrías no-abelianas.

6.1) APROXIMACION DE CAMPO PROMEDIO

La acción mezcla de las representaciones fundamental y adjunta del grupo $SU(2)$ viene dada por

$$A = \frac{\beta_F}{2} \sum_P \text{Tr}_F U_P - \frac{\beta_A}{3} \sum_P \text{Tr}_A U_P \quad (6.1)$$

donde Tr_F y Tr_A indican la traza de la variable de plaqueta U_P en las distintas representaciones. Dado que se trabajará en la medida axial, en U_P las variables de unión $U_{x\mu}$ en la dirección "temporal" $\mu=d$ se fijan a $\mathbb{1}$ (A-péndice D).

Debido a que cualquier elemento de $SU(2)$ en la representación fundamental puede escribirse en la forma (Drouffe, 1981):

$$U_F = \exp \left[i \sum_{i=1}^3 \alpha_i T_F^i \right]$$

con

$$\alpha_0^2 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = \text{cte.} \quad (\alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{R})$$

$$T_F^0 = \mathbb{1}/12 \quad T_F^i = \sigma^i/12$$

es suficiente realizar la transformación (5.2) "sumergiendo" a U_F en \mathbb{R}_4 en lugar de $GL(2, \mathbb{C})$. Del mismo modo, debido a la naturaleza real de la representación adjunta U_A puede englobarse en $GL(3, \mathbb{R})$.

Teniendo en cuenta estas observaciones, la función de partición del modelo (6.1) puede reescribirse en la forma usual como

$$Z = \int \prod_P [dU_F dU_A] \exp \left[-\beta_F \sum_P \text{Tr}_F U_P - \beta_A \sum_P \text{Tr}_A U_P \right] \quad (6.2)$$

con

$$U_F = \exp \left[i \sum_{i=1}^3 m^i T_F^i \right] \quad (m, m^i \in \mathbb{R})$$

$$U_A = \exp \left[\sum_{i=1}^3 z^i T_{Fi} \right] \quad (z, z^i \in \mathbb{R})$$

y $W_A, Z_A \in GL(3, \mathbb{R})$.

La función $W_{X\mu}$ se define

$$W_{X\mu}(Z_F, Z_A) = \ln \int d\mu(U_{X\mu}) \exp \left\{ \text{Re} \left[\text{Tr}_F (U_{X\mu} \overset{+}{Z}_{FX\mu}) + \text{Tr}_A (U_{X\mu} \overset{+}{Z}_{AX\mu}) \right] \right\} \quad (6.3)$$

Derivando de (6.2) las ecuaciones extremales y proponiendo una solución invariante traslacional tal como en (3.13):

$$W_{\alpha_{X\mu}}^{\text{ext}} = M_a \mathbb{1} \quad Z_{\alpha_{X\mu}}^{\text{ext}} = \alpha_a \mathbb{1} \quad (a = F, A) \quad (6.4)$$

se obtiene

$$M_a = \frac{1}{N_a} \frac{\partial W}{\partial \alpha_a} \quad (N_F = 2, N_A = 3) \quad (6.5a)$$

$$\beta_a [M_a^3 (d-2) + M_a] = \alpha_a \quad (6.5b)$$

Teniendo en cuenta (E.3) y la relación (E.13) resulta:

$$W(\alpha_F, \alpha_A) = \ln \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\phi \sin^2 \phi e^{2\alpha_F \cos \phi + \alpha_A (4\cos^2 \phi - 1)} \right] \quad (6.6)$$

A orden cero la energía libre por unión viene dada por

$$F_0 = - \frac{(d-1)}{d} \sum_a \left\{ \beta_a \left[\frac{(d-2)}{2} M_a^4 + M_a^2 \right] - N_a M_a \alpha_a \right\} - W(\alpha_F, \alpha_A) \quad (6.7)$$

con M_a y α_a definidas como funciones de β_a a través de (6.5).

El sistema de ecuaciones (6.5) tiene tres tipos de soluciones (fig. 6.1). En la región A se tiene sólo la trivial: $M_a = 0$ ($a = F, A$), en la región B aparece otra solución: $M_F = 0, M_A \neq 0$. Finalmente, en C tanto M_F como M_A son distintos de cero. Las líneas de transición de una fase a otra se determinan comparando los valores de la energía libre (6.7) para cada tipo de solución.

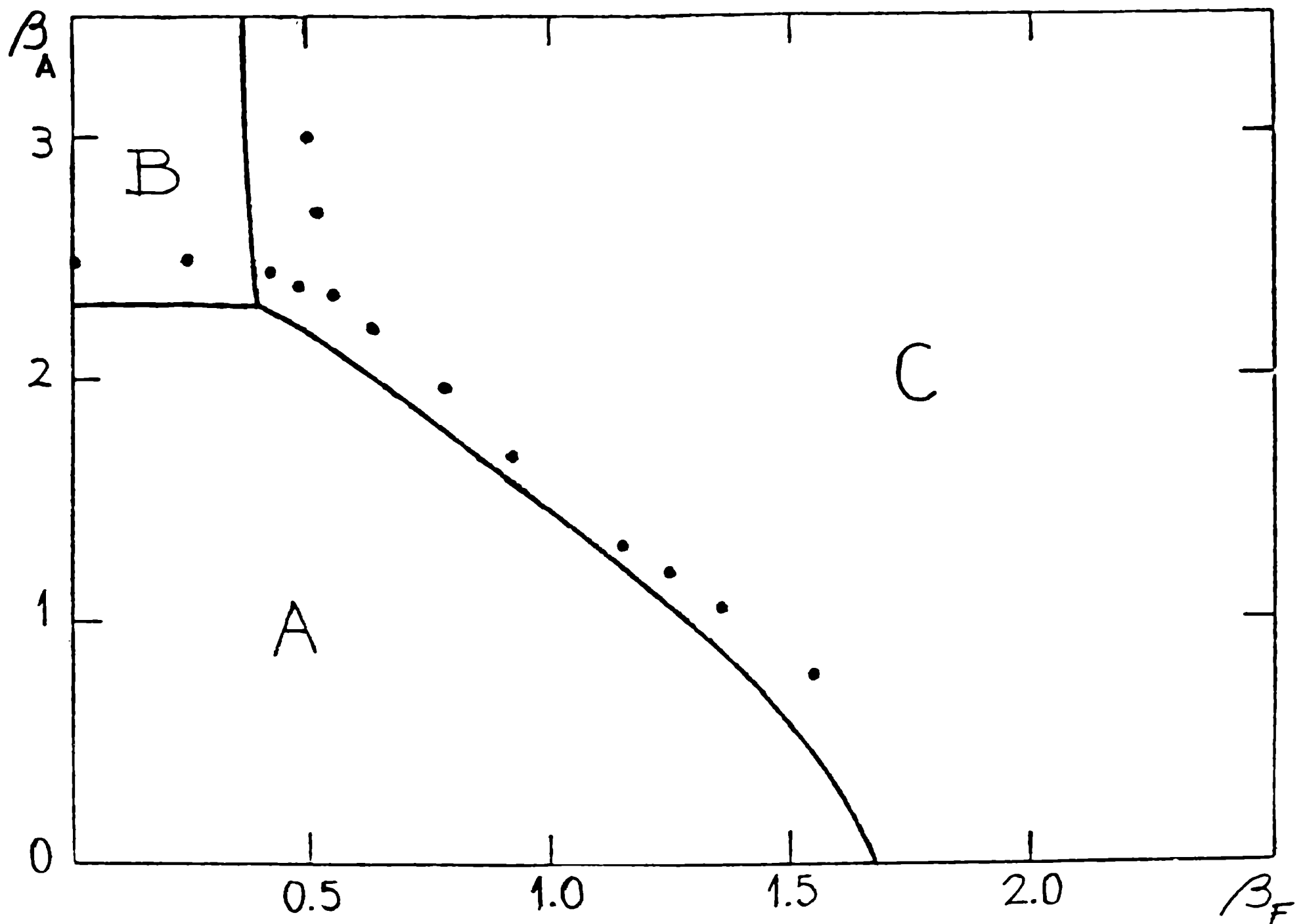


fig. 6.1

En el diagrama de fig. 6.1 se incluyen los resultados predichos por el método de Monte Carlo (puntos negros). Si bien la concordancia numérica es aceptable para una aproximación de orden cero como la ACP, el diagrama obtenido es cualitativamente erróneo en las proximidades del eje β_F . Veremos que la inclusión en los cálculos de las fluctuaciones cuadráticas de los campos alrededor de (6.4) corrige dicha deficiencia.

6.2) CORRECCIONES GAUSSIANAS

Los pasos a seguir para el cálculo de las correcciones gaussianas a / (6.7) han sido discutidos en detalle en las secciones anteriores. En la fase C ($M_a \neq 0$, $\alpha_a \neq 0$), llamando

$$\Delta Z_F = h_F^0 T_F^0 + i \sum_{i=1}^3 a_F^i T_F^i$$

$$\Delta W_F = H_F^0 T_F^0 + i \sum_{i=1}^3 A_F^i T_F^i \quad (6.8a)$$

y

$$\Delta Z_A = h_A^0 T_A^0 + \sum_{i=1}^3 h_A^i T_A^i + i \sum_{i=6}^8 a_A^i T_A^i$$

$$\Delta W_A = H_A^0 T_A^0 + \sum_{i=1}^3 H_A^i T_A^i + i \sum_{i=6}^8 A_A^i T_A^i \quad (6.8b)$$

(la base T_A viene dada por (E.14)), después de un cálculo largo pero directo resulta:

$$W(Z_F, Z_A) - W(\alpha_F, \alpha_A) \approx -\frac{1}{2} \left\{ K_F^{(h)} h_F^0 h_F^0 + \right.$$

$$+ K_F^{(a)} \sum_{i=1}^3 a_F^i a_F^i + K_A^{(h)} h_A^0 h_A^0 + \tilde{K}_A^{(h)} \sum_{i=1}^5 h_A^i h_A^i +$$

$$+ K_A^{(a)} \sum_{i=1}^3 a_A^i a_A^i + K_{FA}^{(a)} [a_F^1 a_F^6 + a_F^2 a_A^7 + a_F^3 a_A^8] \left. \right\} \quad (6.9a)$$

$$- A(W_F, W_A) + F_0 V d = -\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu}^{d-1} \left\{ H_{F, \mu\nu}^0 M_{\mu\nu}^{(H)} H_{F, \nu}^0 + \right.$$

$$+ A_{F, \mu}^i M_{\mu\nu}^{(A)} A_{F, \nu}^i + H_{A, \mu}^0 M_{\mu\nu}^{(H)} H_{A, \nu}^0 +$$

$$\left. + H_{A, \mu}^i M_{\mu\nu}^{(H)} H_{A, \nu}^i + A_{A, \mu}^i M_{\mu\nu}^{(A)} A_{A, \nu}^i \right\} \quad (6.9b)$$

Los coeficientes K de la forma cuadrática (6.9a) se definen en (E.15), las variables $H_{a\mu}$ y $A_{a\mu}$ ($a=F, A$) son las transformadas de Fourier de las correspondientes variables en (6.8) y las matrices M_b vienen dadas por (Müller y Rühl, 1982a):

$$M_{a, \mu\nu}^{(H)} = \frac{1}{1/a} \left\{ [M_a^2 (1 + 2 \cos k_\mu - \sum_{\lambda=1}^{d-1} \cos k_\lambda) - \right.$$

$$\left. - \cos k_\nu] \delta_{\mu\nu} - \frac{M_a^2}{2} (1 + e^{ik_\mu}) (1 + e^{-ik_\nu}) \right\} \quad (6.10a)$$

$$M_{0a,\mu\nu}^{(A)} = \frac{2\beta a}{N_a} \left\{ \left[M_a^2 \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{d-1} \cos k_\lambda \right) - \cos k_d \right] \delta_{\mu\nu} - \frac{M_a^2}{2} (1 - e^{ik_\mu})(1 - e^{-ik_\nu}) \right\} \quad (6.10b)$$

Después de realizadas las integraciones gaussianas la función de partición resulta:

$$\mathcal{Z} = e^{-F_0 V d} \det^{-1/2} \left\{ (1 + \lambda_F^H M_{0F}^{(H)} + R^H) (1 + \lambda_A^H M_{0A}^{(H)}) - R^H \right\} \det^{-3/2} \left\{ (1 + \lambda_F^A M_{0F}^{(A)} + R^A) (1 + \lambda_A^A M_{0A}^{(A)}) - R^A \right\} \det^{-5/2} \left\{ 1 + \tilde{\lambda}_A^H M_{0A}^{(A)} \right\} \quad (6.10')$$

Las funciones λ_a^A , λ_a^H ($a=F,A$) y R^H, R^A se definen en (E.16).

La evaluación de los determinantes que contienen a la matriz $M_{0a}^{(A)}$ puede efectuarse a través de sus autovalores

$$\omega_a^{(A)} = (2\beta a / N_a) \left\{ M_a^2 \left(1 - \sum_{\lambda} \cos k_\lambda \right) - \cos k_d \right\} \quad (6.11a)$$

(el cual es (d-2)-veces degenerado) y

$$\omega_a^{(A)} = (2\beta a / N_a) \left[-M_a^2 (d-2) - \cos k_d \right] \quad (6.11b)$$

En el caso de la matriz $M_{0a}^{(H)}$, se prueba numéricamente que la contribución al resultado final del término proporcional a $\cos k_\mu$ en (6.10') es despreciable. En consecuencia, los determinantes que contienen a dicha matriz pueden evaluarse a través de los autovalores aproximados

$$\omega_a^{(H)} = (2\beta a / N_a) \left\{ M_a^2 \left(1 - \sum_{\lambda} \cos k_\lambda \right) - \cos k_d \right\} \quad (6.12a)$$

((d-2)-veces degenerado) y

$$\omega_a^{(H)} = (2\beta a / N_a) \left[-M_a^2 (d-2) - \cos k_d - 2M_a^2 \sum_{\lambda} \cos k_\lambda \right] \quad (6.12b)$$

En el límite termodinámico aparecerán en

$$F^c = \lim_{V \rightarrow \infty} - \frac{\ln \mathcal{Z}}{V d}$$

términos de la forma

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\ln \det^{-\alpha} (1 + \Delta)}{V d} = - \frac{\alpha}{d} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sum_{i=1}^{d-1} \ln [1 + \omega_i(k)].$$

donde los $\omega_i(k)$ son productos y sumas de los autovalores (6.11)-(6.12). Las integrales resultantes pueden evaluarse mediante desarrollos del tipo de (4.24') hasta órdenes adecuados de $1/d$ como para que el error sea numéricamente despreciable.

Hasta aquí se ha indicado como calcular las correcciones (gaussianas) a la energía libre en la fase C. Las correcciones correspondientes en las dos fases restantes se pueden obtener muy fácilmente. En el caso de la fase A ($M_a = \alpha_a = 0$), tal como en los modelos antes estudiados la energía libre corregida viene dada por el correspondiente desarrollo en alta temperatura (acoplamiento fuerte). Dicho desarrollo ha sido calculado en Alberty et al (1982). En la fase B, un razonamiento similar a (5.13) lleva a

$$F^B(\beta_F, \beta_A) = F^C(0, \beta_A + 3/8\beta_F^2) - \beta_F^2(d-1)/16$$

Como en los casos anteriores, el diagrama de fases corregido puede ahora obtenerse buscando las curvas en el plano (β_F, β_A) en las que las energías libres corregidas se intersectan. Dicho diagrama corresponde a la fig. 6.2 (Ceccatto et al, 1984).

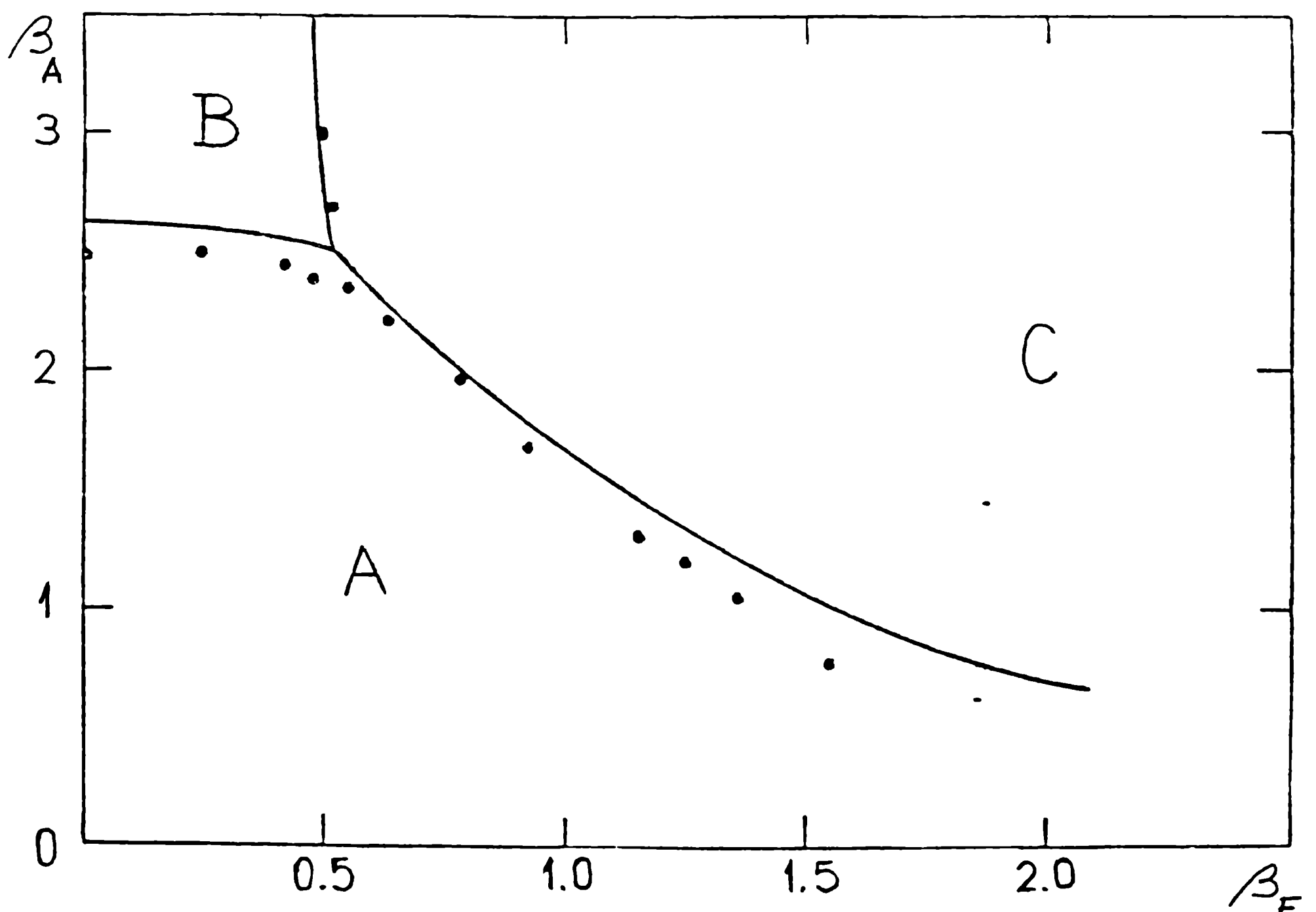


fig. (6.2)

6.3) COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El análisis de la fig. (6.2) muestra que la inclusión de las fluctuaciones gaussianas en el cálculo mejora los resultados de orden cero (fig. (6.1)). Ello ocurre no sólo desde el punto de vista cuantitativo, como en el caso del capítulo anterior, sino, y principalmente, desde el punto de vista cualitativo. El diagrama corregido presenta la interrupción esperada, cerca del eje β fundamental, de la línea de transición de fase A-C. El comportamiento de la energía libre indica que la transición en el punto terminal es de 2º orden, lo que explica el pico de calor específico observado (Bhanot y Creutz, 1981) en el modelo standard ($\beta_A = 0$) al ir de altas ($\beta_F \simeq 0$) a bajas ($\beta_F \rightarrow \infty$) temperaturas.

La existencia de una conexión analítica entre la fase confinante A y β la fase no-confinante C constituye una confirmación -al menos para el tipo β de acción generalizada aquí estudiado- de la esperada coexistencia de los fenómenos de confinamiento y libertad asintótica en una única fase de la teoría, independientemente de la acción sobre la red considerada.

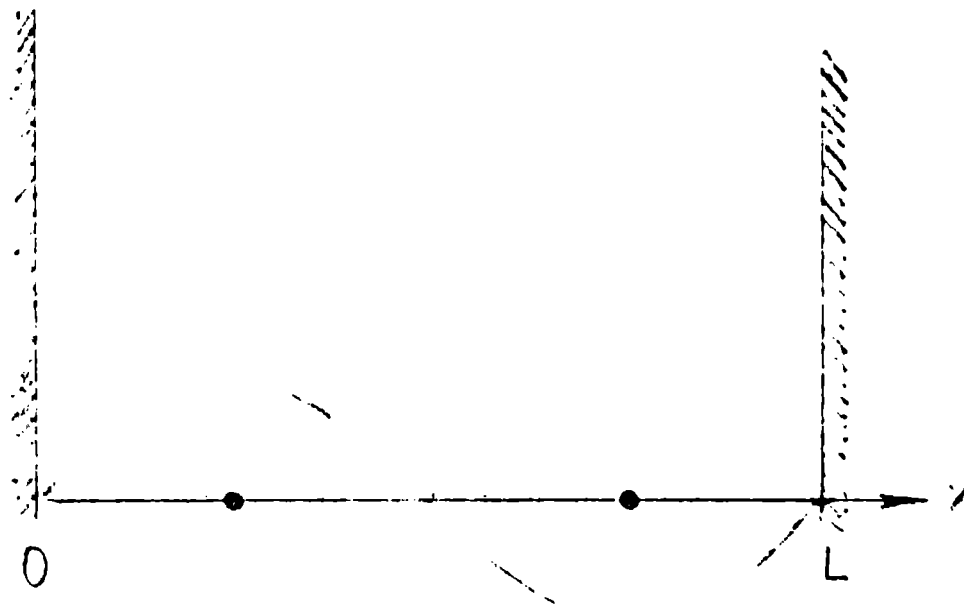
Tratamientos del modelo SU(2) mixto mediante la técnica del campo promedio han sido realizados previamente por Drouffe (1981, 1982), Pritchard (1981) y Alberty et al (1982). En los trabajos de Drouffe se calcula la ACP destacando el rol jugado por el centro Z_2 del grupo SU(2). Pritchard calcula la ACP introduciendo dos campos externos, uno para cada representación, tal como se ha dicho en este trabajo. Sus resultados difieren sin embargo del diagrama de la fig. (6.1) debido a que utiliza un criterio no-termodinámico para determinar las líneas de transición de fase (adopta como punto de transición los valores de β_a para los cuales comienza a existir una solución no trivial de las ecuaciones (6.5), sin comparar los valores de las energías libres en las distintas fases). Tanto los resultados de Pritchard como los de Drouffe (en la zona donde los diagramas obtenidos por este autor son comparables a los nuestros), son cualitativamente similares al diagrama (6.1).

En Alberty et al (1982) no se introducen campos distintos para cada representación, lo cual no resulta apropiado en las proximidades del eje adjunto ($\beta_f = 0$). Si bien el diagrama corregido allí obtenido es similar al de la fig. (6.2), nuestros resultados se ajustan mejor a los predichos por el método de Monte Carlo (puntos negros)..

Debe señalarse finalmente que el modelo SU(2) mixto ha sido también estudiado a través de técnicas del grupo de renormalización (Bitar et al, 1982) y mediante técnicas variacionales similares a la ACP (Zheng et al, 1982). En ambos casos los resultados concuerdan con los obtenidos en este capítulo.

Apéndice A: LA RED COMO REGULADOR

La formulación de una teoría de campo sobre una red puede ser considerada como un método de introducir una regularización ultravioleta. A fin de ilustrar este hecho consideremos el efecto Casimir en una dimensión espacial (Jurkiewicz y Zalewski, 1983).



De acuerdo con la Teoría de Campos cuántica, una energía de "punto cero" $\frac{1}{2} \omega$ es asociada a cada oscilación entre 0 y L de frecuencia ω . En consecuencia, el estado de mínima energía de la región entre placas tiene una energía

$$E_0(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_n = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (A.1)$$

con $\omega = 2\pi/\lambda_n = \pi n / L$

Para extraer información física de (A.1) este resultado debe ser convenientemente regularizado y renormalizado. Nótese que la divergencia es de tipo ultravioleta, es decir, resulta de la posibilidad de tener oscilaciones de longitud de onda $\lambda_n \sim 1/n$ arbitrariamente cortas.

Introduciendo entre 0 y L una red de puntos ubicados en

$$x = a, 2a, 3a, \dots, La$$

se convierte la ecuación diferencial para la amplitud de las oscilaciones

$$\square A = 0$$

en una ecuación en diferencias finitas en x

$$\frac{d^2 A_k}{dt^2} - \frac{1}{a^2} (A_{k+1} - 2A_k + A_{k-1}) \quad a = \frac{L}{N} \quad (\text{A.2})$$

Con condiciones de borde $A(0) = A(N+1) = 0$, las soluciones de (A.2) periódicas en el tiempo son:

$$A_k^n = e^{i\omega_n t} \sin \nu_n k, \quad n=1,2,\dots,N$$

con $\nu_n = \pi n/L$ y $\omega_n = (2/a) \sin(\nu_n/2)$.

De esta forma, la suma divergente (A.1) es reemplazada por

$$E_0(L, a) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^N \sin^2 \left[\frac{\pi n}{2(N+1)} \right] = \frac{1}{2a} \left[\cot \left(\frac{\pi a}{4L} \right) - 1 \right]$$

Desarrollando esta ecuación para $a = L/N \sim 0$ (límite continuo) se obtiene

$$E_0(L, a) = \frac{2h}{\pi a^2} - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{24L} + O\left(\frac{a^2}{L^3}\right)$$

Esta fórmula para la energía presenta la regularización deseada. El tercer término es el resultado finito buscado; los dos primeros términos (divergentes para $a \rightarrow 0$) deben ser eliminados a través de algún procedimiento de renormalización.

El primer término puede eliminarse teniendo en cuenta que la cantidad que interesa físicamente no es $E_0(L)$ sino su diferencia $\Delta E_0(L)$ con la energía entre 0 y L cuando no hay placas. En consecuencia, en el límite

$$a \rightarrow 0$$

$$\Delta E_0(L) = E_0(L) - \frac{1}{N} E_0(NL) = \frac{-\pi}{24L} + \text{cte.} \quad (\text{A.3})$$

La constante es formalmente infinita pero no es medible y puede ser considerada nula por convención.

Para el caso tridimensional y para oscilaciones electromagnéticas, el / resultado equivalente a (A.3) -obtenido por Casimir- coincide muy bien con / los resultados experimentales.

Apéndice B: ROTACION DE WICK

En muchos casos resulta útil transformar el funcional integral Z del espacio de Minkowski a un espacio euclídeo de cuatro dimensiones. Ello puede hacerse continuando analíticamente la variable t a valores imaginarios $-ix_0$ (rotación de Wick) (Wick, 1954).

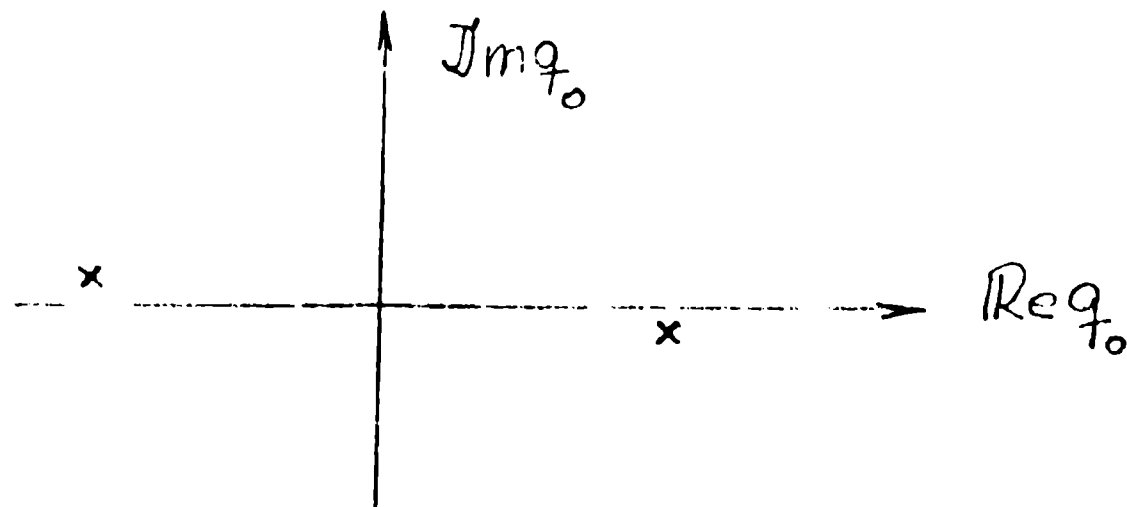
La posibilidad de la continuación analítica a tiempos imaginarios puede ser establecida fácilmente en teoría de perturbaciones. Consideremos una función de Green de una teoría escalar en el espacio de Minkowski:

$$G(x_1 \dots x_n) = \int \prod_{r=1}^n \frac{d^4 p_r}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p_1 \dots p_n) e^{i \sum_r p_r x_r} \quad (B.1)$$

En la constitución de G se han utilizado propagadores con la prescripción $i\epsilon$

$$q_0^2 - \vec{q}^2 - m^2 + i\epsilon$$

que mueve los polos de dichos propagadores levemente por arriba y por debajo del eje q en el plano complejo:



Si se rota el contorno de integración en q_0 (eje real) en el sentido antihorario, los polos son evitados. Esto lleva a la posibilidad de definir la función

$$\int_{-x_{10} - i\epsilon}^{\bar{x}_{11}} \int_{-x_{20} - i\epsilon}^{\bar{x}_{21}} \dots \int_{-x_{n0} - i\epsilon}^{\bar{x}_n} \quad 0 < \theta < \pi \quad (B.2)$$

la cual viene dada por (B.1) con todos los contornos de integración de componentes \mathcal{P}_0 rotados en Θ y $(x_{10} \dots x_{n0})$ reemplazados por $(e^{-i\Theta} x_{10} \dots e^{-i\Theta} x_{n0})$. La función de Green original puede ser reobtenida tomando $\Theta \rightarrow 0$. Fuera del esquema de Teoría de perturbaciones existen resultados rigurosos / que hacen posible la continuación analítica a tiempos imaginarios (Osterwalder y Schrader, 1975).

Para el caso particular $\Theta = \pi/2$ el funcional generatriz Z se convierte en

$$Z_E = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(- \int d^4x \mathcal{L}_E(\phi, \partial_\mu \phi) \right) = \int \mathcal{D}\phi e^{-A_E} \quad (B.3)$$

con \mathcal{L}_E el lagrangeano euclidiano donde todos los índices entran simétricamente con métrica diagonal (1,1,1,1).

En la forma (B.3) el funcional generatriz de una teoría de campos puede ser interpretado como la función de partición de un sistema mecano-estadístico clásico ($H/kT = A_E$). Por supuesto, para obtener resultados físicamente aceptables las expresiones obtenidas a través de Z_E deben rotarse en forma horaria a través de la substitución $x_0 \rightarrow it$. Sin embargo en la práctica esta rotación resulta muchas veces innecesaria. Por ejemplo, un propagador libre en el espacio euclídeo

$$G_E(x) = \frac{1}{m^4} \int d^4p e^{ipx} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

se comporta para $|x| = |x_\mu x_\mu|$ grande como

$$G_E(x) \sim \exp(-m|x|) \quad (B.4)$$

La continuación analítica para volver al espacio de Minkowski llevaría (para separaciones temporales $x_\mu x^\mu < 0$) al comportamiento oscilatorio usual. La obtención de la masa de la partícula, un problema frecuente en cálculos no perturbativos, puede igualmente ser obtenida del comportamiento (B.4).

Apéndice C: EL METODO DE DESARROLLO ALREDEDOR DE UN PUNTO DE ENSILLADURA

Se desarrolla en este apéndice un método matemático para obtener aproximaciones a integrales de la forma

$$\int_{\gamma} e^{\varphi(z)} dz \quad (C.1)$$

donde γ es un camino de integración en el plano complejo. Este método, debido a B Riemann y P. Debye, es conocido como el método del punto de ensilladura ("saddle point method") (De Bruijn, 1956).

a) Integrales reales: el método de Laplace

Consideremos primeramente el caso de integrales de funciones reales de la forma:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} dx \quad (C.2)$$

donde $f(x)$ tiene un máximo absoluto agudo en $x = x_0$.

Sin pérdida de generalidad, (C.2) puede reescribirse en la forma

$$I = e^{f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x) - f(x_0)} dx = e^{f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx$$

donde $h(x)$ tiene un máximo absoluto en $x = 0$ y $h(0) = 0$. La hipótesis de máximo agudo de $f(x)$ puede indicarse pidiendo $t \rightarrow \infty$

Si como ocurre en la mayor parte de las aplicaciones $h(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, puede probarse que para cualquier $\delta > 0$ existe $\eta_\delta > 0$ tal que $h(x) \leq -\eta_\delta$ para $|x| \geq \delta$. En consecuencia

$$\int_{-\infty}^{-\delta} e^{th} dx + \int_{\delta}^{+\infty} e^{th} dx < e^{-(t-1)\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(x)} dx \quad (t > 1) \quad (C.3)'$$

Para probar esta desigualdad sólo hace falta tener en cuenta que $(t-1)x$
 $h \leq - (t-1) \eta_\delta \quad (|x| \geq \delta, t > 1)$ y que

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{th(x)} dx > 0$$

Puede demostrarse también que dado un $\varepsilon > 0$ tal que $0 < 3\varepsilon < |h''(0)|$
puede determinarse un $\delta(\varepsilon) > 0$ que verifique

$$|h(x) - \frac{1}{2}x^2 h''(0)| \leq \varepsilon x^2 \quad |x| \leq \delta(\varepsilon)$$

De (C.3) resulta

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{\frac{1}{2}tx^2[h''(0)-2\varepsilon]} dx < \int_{-\delta}^{+\delta} e^{th(x)} dx < \int_{-\delta}^{+\delta} e^{\frac{1}{2}tx^2[h''(0)+2\varepsilon]} dx \quad (C.4)$$

Las tres integrales en el intervalo $(-\delta, \delta)$ que aparecen en esta expresión difieren de las integrales correspondientes en $(-\infty, \infty)$ en cantidades del orden de $e^{-\alpha t}$, con $\alpha > 0$ y dependiente de δ . Para la integral central esto es evidente de (C.3); para las dos de los extremos dicha propiedad puede establecerse fácilmente en la misma forma que se obtuvo (C.3). En consecuencia, teniendo en cuenta el resultado de la integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (C.5)$$

se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{1/2} [-h''(0) - 2\varepsilon]^{-1/2} t^{-1/2} + O(e^{-\alpha t})$$

$$(2\pi)^{1/2} [h''(0) + 2\varepsilon]^{-1/2} t^{-1/2} < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx + O(e^{-\alpha t})$$

Para t suficientemente grande este resultado puede ponerse en la forma

$$(2\pi)^{1/2} [-h''(0) + 3\varepsilon]^{-1/2} t^{-1/2} < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{1/2} [-h''(0) - 3\varepsilon]^{-1/2} t^{-1/2}$$

La arbitrariedad de ε lleva finalmente a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx \simeq (2\pi)^{1/2} [-th''(0)]^{-1/2} t^{-1/2} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (C.6a)$$

o bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} dx \simeq 2\pi^{1/2} [-f''(x_0)]^{-1/2} e^{f(x_0)} \quad (C.6b)$$

Este resultado puede generalizarse levemente. Incorporando en el integrando una función $g(x)$ integrable y de comportamiento regular, resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{f(x)} dx \simeq (2\pi)^{1/2} [-f''(x_0)]^{-1/2} g(x_0) e^{f(x_0)} \quad (C.7)$$

Para mejorar sistemáticamente (C.7) se debe incorporar más información sobre el comportamiento asintótico de $f(x)$ y $g(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$

$$g(x) e^{f(x)} \simeq [g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \dots] e^{f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots} \left[1 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots \right]$$

Integrando término a término resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{f(x)} dx \simeq e^{f(x_0)} \left[\frac{2\pi}{f''(x_0)} \right]^{1/2} \left\{ g(x_0) + \frac{1}{2} g'(x_0) \frac{f'''(x_0)}{(f''(x_0))^2} + \dots \right\} \quad (C.8)$$

Para obtener este resultado se ha hecho uso de la fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^{-n} dx = a^{-1} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1/2)} = a^{-1} \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}} \pi^{1/2}$$

El resultado (C.8) debe entenderse, tal como indica (C.6), como un desarrollo asintótico para algún parámetro en $f(x)$ muy grande. Una deducción rigurosa de dicho desarrollo asintótico puede hallarse en De Bruijn (1956).

Una complicación frecuente al aplicar este método lo constituye la existencia de más de un máximo de $f(x)$. En el caso de n máximos diferentes la aproximación (C.7) debe reemplazarse por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x)} dx = \sum_{i=1}^n e^{f(x_0^i)} \left[-\frac{2\pi}{f''(x_0^i)} \right]^{1/2} \quad (C.9)$$

Resulta claro el tipo de errores que se cometen en una aproximación como (C.9): las colas de $f(x)$ no se parecen a parábolas y además éstas se superponen (fig. C.1) llevando generalmente a una sobreestimación de la integral.

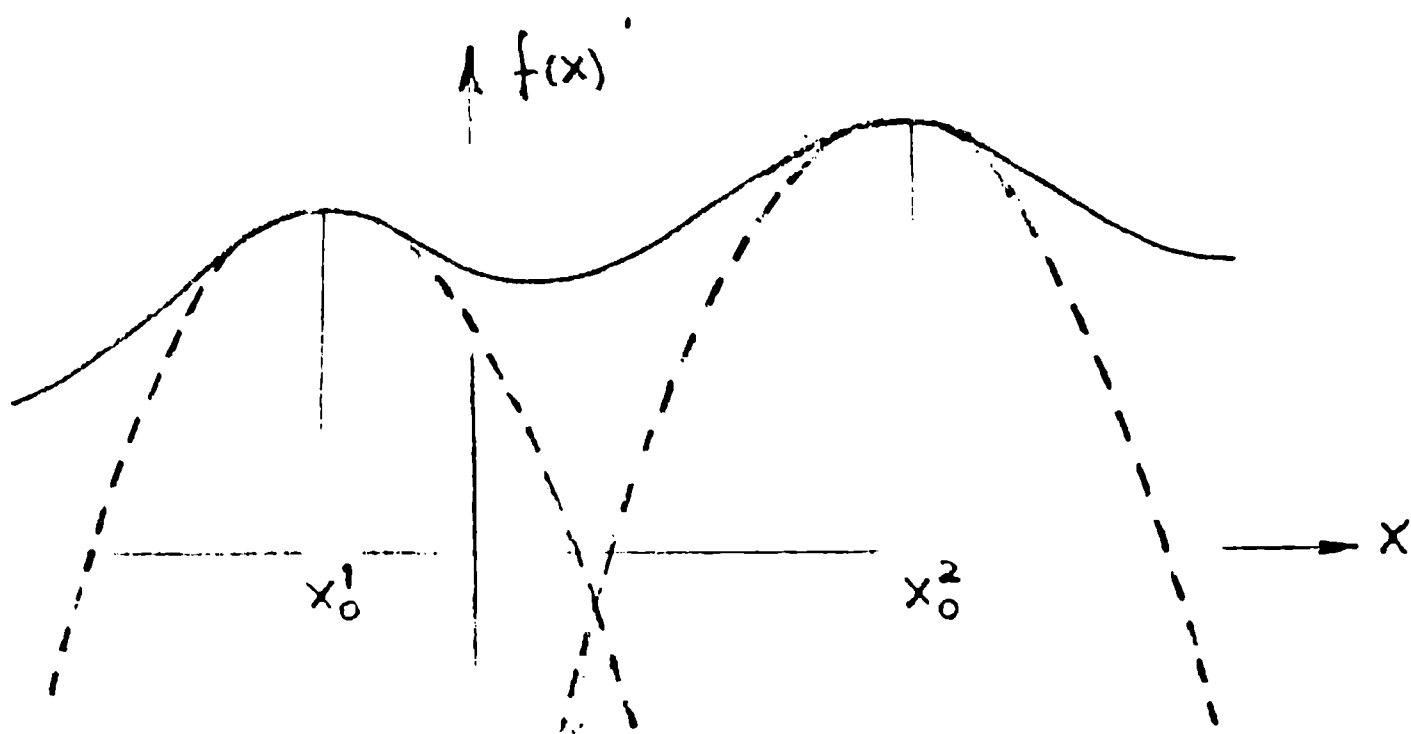


fig. C.1

La generalización del método de Laplace a integrales multidimensionales

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i dx_i e^{f(x_1 \dots x_n)}$$

es directa. La aproximación (C.6) resulta en este caso

$$I \approx (2\pi)^{n/2} \det^{-1/2}(-A) \quad (C.10)$$

donde A es la matriz de coeficientes

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\bar{x}_0) \quad (C.11)$$

El resultado (C.10) usualmente se deriva efectuando un cambio de variables (ortogonal) que diagonalice la forma $A_{ij} x_i x_j$, obteniéndose así n / integrales desacopladas del tipo (C.5).

El punto extremal $\bar{x}_0 = (x_1, \dots, x_n)$ viene dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1..n)$$

En general habrá más que una solución a estas ecuaciones. Tales soluciones deben ser necesariamente aisladas, es decir, debe haber una vecindad de cada solución en la cual no haya otra solución. Ello se debe a que si así no fuese, dada una solución \bar{x}_0 habría otra $\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_0$ con $\Delta \bar{x}_0 \approx 0$. En consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} (\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_0) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\bar{x}_0) \Delta x_0^j = A_{ij} \Delta x_0^j$$

es decir, la matriz A tendría un autovalor nulo (modo-cero) lo cual invalidaría (C.10). Este caso se trata en el texto principal (Sección (3.4)).

b) Integrales complejas: el desarrollo en un punto de ensilladura

Como fuera dicho en la introducción, el DPE es un método destinado a obtener aproximaciones a integrales

$$I = \int_{\gamma} \psi(z) dz \quad (C.12)$$

donde γ es un camino de integración en el plano complejo z y $\psi(z)$ es analítica en sus proximidades. Básicamente este método consta de dos etapas:

i) la etapa exploratoria del problema, que lleva a la elección de un nuevo camino de integración en lugar de γ . Por el Teorma de Cauchy, el camino γ puede ser reemplazado por otro camino γ_{PE} sin alterar el valor de

I, siempre que γ_{PE} se obtenga deformando γ sin abandonar el dominio / de analiticidad de ψ . La elección del nuevo camino prepara el problema para la segunda etapa.

ii) La segunda etapa consiste en el cálculo efectivo de la aproximación (a / sintótica) a I. Dicho cálculo está esencialmente basado en el método de Laplace desarrollado previamente.

La idea general del DPE es la siguiente. Supongamos por un momento que no estamos interesados en el valor de I sino que deseamos hallar una cota superior de $|I|$. Si el camino γ tiene longitud finita l_γ será:

$$|I| \leq \int_\gamma |\psi(z)| |dz| \leq l_\gamma \max_\gamma |\psi(z)|$$

Puede ser posible, sin embargo, obtener una mejor acotación de $|I|$ modificando el camino γ . Este problema nos lleva entonces a tratar de determinar un camino γ' (dentro del dominio de analiticidad de $\psi(z)$) tal que

$$l_{\gamma'} \max_{\gamma'} |\psi(z)| \quad (C.13)$$

sea mínimo.

En realidad, el rol de $l_{\gamma'}$ en (C.13) es poco importante. El DPE resulta útil en problemas en los cuales a lo largo de la mayor parte del camino el valor de $|\psi(z)|$ es mucho menor que en el máximo, de manera que sólo una parte pequeña del camino cerca de dicho máximo tiene relevancia. Por otro lado pequeñas variaciones del camino pueden resultar en cambios notables de $\max_{\gamma'} |\psi(z)|$, mientras la longitud $l_{\gamma'}$ casi no se modifica.

Por las razones antes expuestas es de esperar que (C.13) esté cerca de su mínimo si se elige entre los γ' posibles aquél para el cual $\max_{\gamma'} |\psi(z)|$ sea mínimo. Usualmente resulta que el camino γ_{PE} así elegido, además de proporcionar una cota superior adecuada para $|I|$, es al mismo tiempo un buen camino para la evaluación de I. Esto es, se puede parametrizar dicha curva y escribir $\int_{\gamma_{PE}} \psi(z) dz$ como una integral a lo largo de un intervalo real, para aplicar luego a este problema el método de Laplace.

Supongamos ahora que conocemos el camino γ_{PE} que proporciona el valor

mínimo de $\max_{\gamma} |\psi(z)|$ Es fácil darse cuenta que el punto $z_0 \in \gamma_{PE}$ para el cual

$$\max_{\gamma_{PE}} |\psi(z)| = |\psi(z_{PE})| \quad (C.14)$$

debe ser un punto de ensilladura de la superficie $w = |\psi(z)|$ (fig. C.2). Si así no fuera, rodeando al punto z_0 se obtendría un camino con una altura máxima menor que (C.4). Este hecho es lo que da el nombre al método en discusión. (No se ha considerado aquí el caso en que el máximo ocurra en uno de los extremos del camino, ver De Bruijn, 1956)

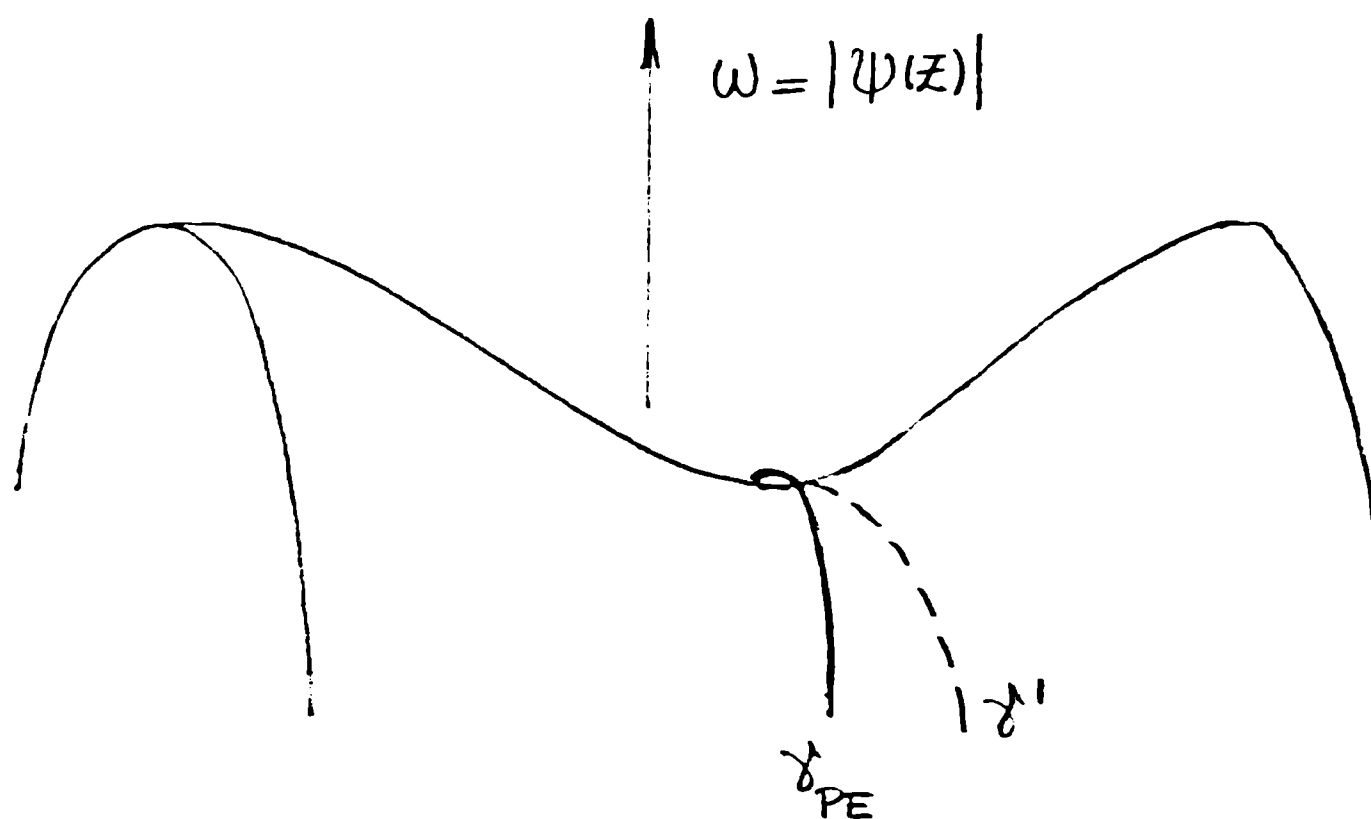


fig. C.2

En consecuencia, el problema de minimizar (C.13) queda así reducido a hallar los puntos de ensilladura de la superficie $w = |\psi(z)|$ y seleccionar un camino (en el plano complejo z) cuyo punto más alto sea el punto de ensilladura de menor cota.

Más aún, puede probarse que si por cualquier medio se halla un camino cuyo punto más alto sea un punto de ensilladura, dicho camino es el que resuelve el problema minimal planteado. Este enunciado es muy importante porque permite determinar si un camino dado es el buscado o no independientemente de otros caminos posibles.

Teniendo en cuenta el Teorema del módulo máximo que establece que $|\psi(z)|$ no puede tener máximos ni mínimos (excepto los mínimos para los cuales $\psi(z) =$

= 0), los puntos de ensilladura pueden determinarse a través de la ecuación /

$$\psi'(z = z_0) = 0 \quad (C.15a)$$

con la condición auxiliar

$$|\psi(z_0)| \neq 0 \quad (C.15b)$$

La determinación del camino γ_{PE} requiere cierto cuidado. Habrá muchos caminos que pasen por el punto de ensilladura de menor altura $z_0 = z_{PE}$ (fig. C.2), pero no todos serán adecuados para la aplicación del método de Laplace. Como regla, se deberá elegir el camino γ_{PE} de menor longitud cerca $|\psi(z_{PE})|$ lo cual puede conseguirse con el método del "descenso más escarpado" ("steepest descent").

Consideremos un camino cuyo punto más alto sea z_{PE} y examinemos las proximidades de dicho punto. Si por comodidad se reemplaza $\psi(z)$ por $\varphi(z) = \ln |\psi(z)|$ y $|\psi(z)|$ por $\text{Re } \psi(z)$ (lo cual no invalida los resultados anteriores por ser ésta una función monótona de $|\psi(z)|$), las condiciones (C.15) implican que

$$\varphi'(z_{PE}) = 0 \quad (C.16)$$

En consecuencia, cerca de z_{PE} se tendrá

$$\varphi(z) = \varphi(z_{PE}) + \frac{1}{2} \varphi''(z_{PE}) (z - z_{PE})^2 + \dots$$

El "eje" del punto de ensilladura se define como la línea recta (pasante por z_{PE})

$$\text{Im} \left\{ \varphi''(z_{PE}) (z - z_{PE})^2 \right\} = 0 \quad \text{Re} \left\{ \varphi''(z_{PE}) (z - z_{PE})^2 \right\} \leq 0$$

El "argumento" del eje (ángulo que forma con el eje $\text{Re } z$) es

$$\alpha = \pi/2 - 1/2 \arg \varphi''(z_{PE})$$

Puede demostrarse que $\text{Re } \varphi(z)$ decrece más rápidamente en la dirección del eje que en cualquier otra dirección pasante por z_{PE} . Por ello esta dirección se la conoce como la de "descenso más escarpado" ("steepest descent").

Supongamos ahora que hemos hallado una curva γ_{PE} que minimice $\max \gamma'$, $\text{Re}(\varphi(z))$ y que pase por z_{PE} en la dirección de descenso más escarpado (fig. C.3). A partir de este punto comienza la segunda etapa del DPE: la aplicación al problema del método de Laplace.

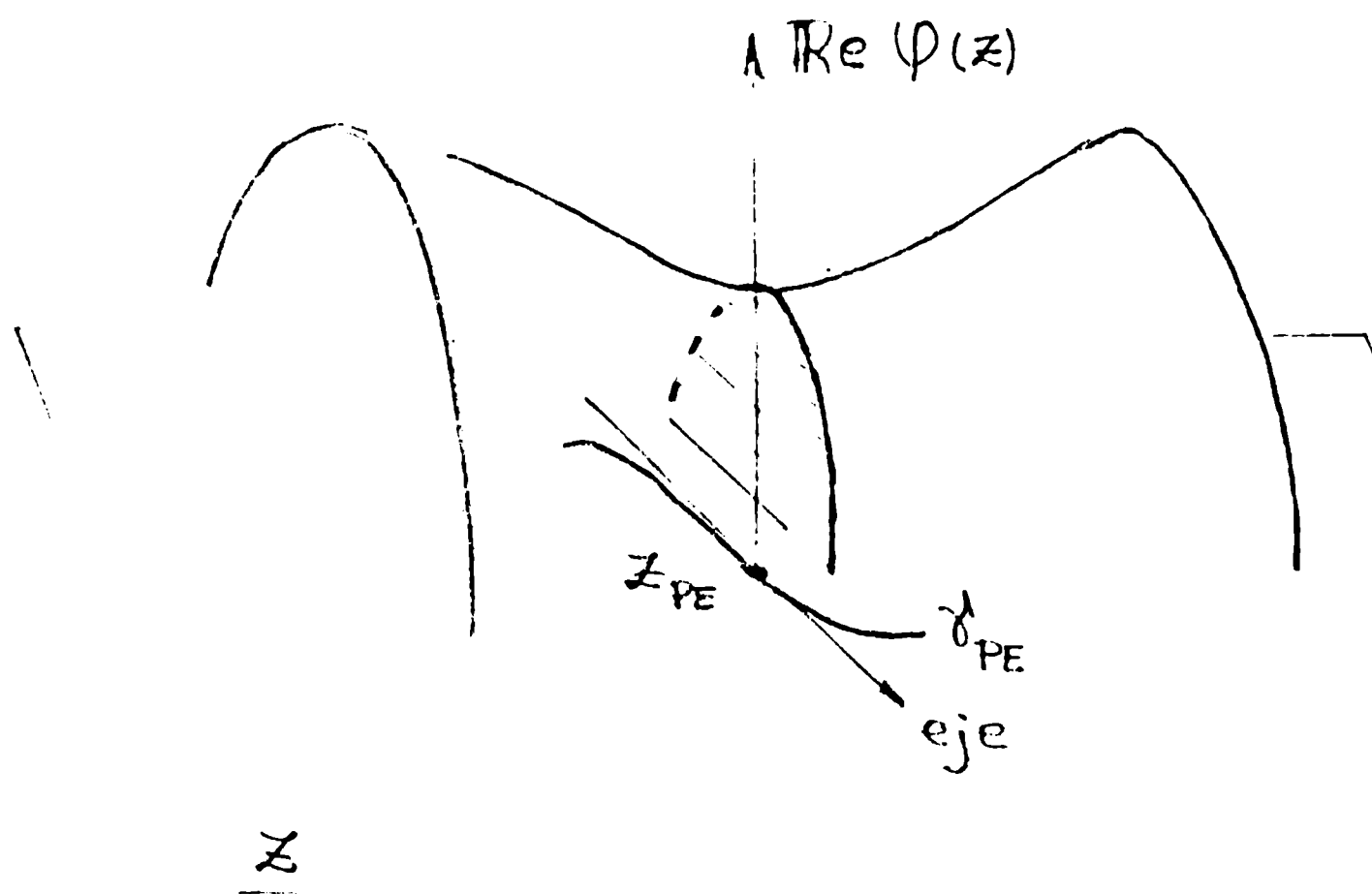


fig. C.3

Por hipótesis, $\text{Re}(\varphi(z))$ tendrá un comportamiento violento cerca de z_{PE} de manera que la contribución a

$$I = \int_{\gamma_{PE}} e^{\varphi(z)} dz = \int_{\gamma_{PE}} e^{th(z)} dz \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (C.17)$$

de puntos alejados de z_{PE} será despreciable para $t \rightarrow \infty$.

La contribución apreciable a (C.17) proviene de la parte de γ_{PE} coincidente con el eje del punto de ensilladura. Parametrizando dicha porción de la curva por

$$z = z_{PE} + cx \quad (a \leq x \leq b) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg h''(z_{PE})$$

resulta

$$I \approx e^{ix} \int_a^b e^{th(z_{PE} + cx)} dx \quad (C.18)$$

Teniendo en cuenta que

$$h(z_{PE} + e^x) = h(z_{PE}) + \frac{1}{2} h''(z_{PE}) e^{2x} + \quad (C.19)$$

$$\frac{1}{2} h''(z_{PE}) e^{2x} < 0$$

Los resultados de la parte a) de este apéndice pueden aplicarse inmediatamente a (C.18). Se obtiene así una serie asintótica de la forma (C.8), cuyo término principal es

$$I \approx (2\pi)^{1/2} e^{i\alpha} t^{-1/2} \left| h''(z_{PE}) \right|^{-1/2} e^{th(z_{PE})} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$(2\pi)^{1/2} e^{i\alpha} \left| \psi''(z_{PE}) \right|^{-1/2} \psi(z_{PE}) \quad (C.20)$$

donde se ha incluido, tal como en (C.7), una función $g(z)$ de variación suave a lo largo del camino de integración.

Es necesario aquí hacer algunos comentarios sobre este resultado. Primeramente nótese que la contribución de z_{PE} depende de la dirección en que es cruzado (a través de α). Segundo, los puntos en los que γ_{PE} se pega al eje del punto de ensilladura

$$z_a = z_{PE} + e^a \quad z_b = z_{PE} + e^b$$

son irrelevantes, en el sentido que la diferente contribución a (C.20) por cambio de dichos puntos es exponencialmente suprimida en el límite asintótico $t \rightarrow \infty$. Finalmente, la cuestión de si la integral original (C.12) es sensiblemente representada (asintóticamente) por (C.20) no puede ser respondida estudiando solamente las proximidades de z_{PE} . Para responder dicha pregunta es necesario comparar el comportamiento de $\text{Re } h(z)$ con $\text{Re } h(z_{PE})$ en las secciones del camino γ_{PE} no coincidentes con el eje.

Detalles matemáticos más finos de la discusión precedente pueden encontrarse en la referencia De Bruijn (1956) ya citada.

Apéndice D: FIJADO DE MEDIDA SOBRE LA RED

De acuerdo a lo dicho en la Sección (2.3), la formulación sobre redes permite cuantificar la teoría sin fijar la medida. No obstante, la invariancia de la acción permite calcular en una medida particular, sin afectar los valores de funciones de Green de operadores invariantes. En consecuencia discutiremos en este apéndice el fijado de medida en una teoría sobre la red / (Creutz, 1977).

Sea $P(\phi, u)$ cierto polinomio en los campos invariante. ante transformaciones de medida (2.7). Su función de Green asociada será:

$$G[P(\phi, u)] = \frac{1}{Z} \int [d\phi du] P(\phi, u) \exp[-A(\phi, u)]$$

Esta expresión puede reescribirse en la forma

$$G[P] = \int d\mu(g_0) I(P, g_0) \quad g_0 \in G \quad (D.1)$$

con

$$I(P, g_0) = \frac{1}{Z} \int [d\phi d\mu] \delta(U_{x\mu}, g_0) P(\phi, u) e^{-A(\phi, u)} \quad (D.2)$$

La δ sobre el grupo que aparece en (D.2) verifica

$$\int d\mu(g) \delta(g', g) f(g) = \int d\mu(g) \delta(g, g') f(g) = f(g')$$

$$\delta(g, g') = \delta(g_0 g g_1, g_0 g' g_1)$$

con g_0 y $g_1 \in G$ arbitrarios.

Realizando una transformación de medida en (D.2) se obtiene

$$I(P, g_0) = I(P, g_x g_0 g_{x+\mu}^{-1})$$

Dado que g_x y $g_{x+\mu}$ son arbitrarios, $I(P, g_0)$ debe ser independiente de

g_0 . La ecuación (D.1) implica entonces que

$$G[P] = I(P, g_0) = \frac{1}{Z} \int [d\phi d\mu] \delta(U_{x\mu}, g_0) P(\phi, u) e^{-A(\phi, u)}$$

En consecuencia, al calcular una función de Green de un operador invariante se puede fijar arbitrariamente (a un valor dentro del grupo) cualquier variable de unión $U_{x\mu}$ particular. Este proceso puede ser repetido para fijar más U 's en la medida que el conjunto de uniones con campo fijado no contenga un circuito cerrado. Una medida queda completamente determinada fijando arbitrariamente los valores de campos $U_{x\mu}$ sobre un "árbol maximal" (conjunto de uniones que no contiene un circuito cerrado pero que pierde esta propiedad por inclusión de cualquier nueva unión no contenida en él).

La fig. (D.1a) siguiente ejemplifica un árbol maximal. En la fig. (D.1b) se muestra el equivalente sobre la red de la medida temporal $A_0 = 0$. / Las uniones llenas en dirección temporal se fijan a la identidad. Las uniones de trazo corresponden al fijado que elimina la simetría remanente frente a transformaciones no dependientes del tiempo.

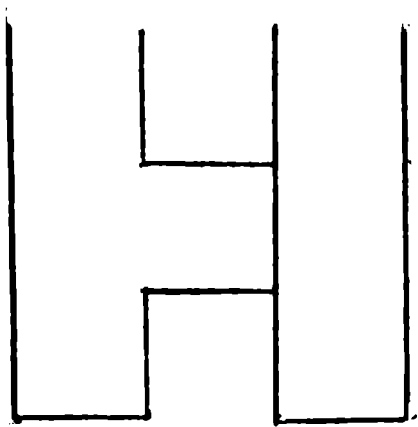


fig. D.1a

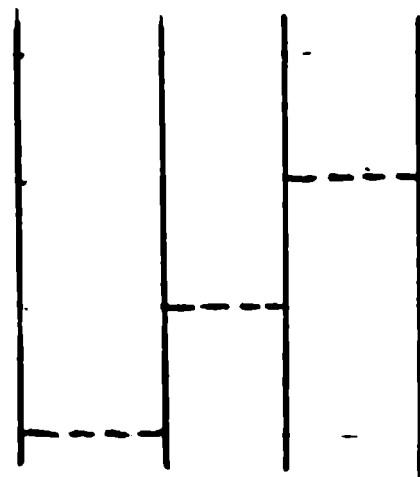


fig. D.1b

Después del fijado de la medida temporal la acción de los campos de medida (2.8) es

$$A = - \sum_{x, \mu=1}^{d-1} \text{Tr} (U_{x\mu} U_{x+\hat{\mu}, \mu}^{\dagger} U_{x+\hat{\mu}, \mu} U_{x\mu}^{\dagger}) - \beta \sum_{x, \mu=1}^{d-1} \text{Tr} (U_{x\mu} U_{x+\hat{\mu}, \mu}^{\dagger} + U_{x+\hat{\mu}, \mu} U_{x\mu}^{\dagger})$$

Apéndice E: ALGUNOS RESULTADOS BASICOS VINCULADOS A LA TEORIA DE INTEGRACION EN GRUPOS COMPACTOS

Se deducen en este Apéndice algunos resultados intermedios necesarios / lo largo de los cálculos en distintos capítulos. Dado que dichos resultados / están vinculados a la teoría de integración en grupos compactos (particularmente $U(N)$ y $SU(N)$), recordaremos previamente algunos resultados básicos.

La medida invariante (de Haar) sobre un grupo compacto G verifica:

$$d\mu(U) = d\mu(gU) = d\mu(Ug) \quad g \in G \quad (E.1a)$$

Normalizando

$$\int d\mu(U) = 1 \quad (E.1b)$$

para $U(N)$ y $SU(N)$ se tiene (Bars y Green, 1979):

$$\int d\mu(U) U^{\alpha\beta} = 0 \quad (E.2a)$$

$$\int d\mu(U) U^{\alpha\beta} U^{\dagger\gamma\delta} = (1/N) \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \quad (E.2b)$$

$$\int d\mu(U) U^{\alpha\beta} U^{\dagger\gamma\delta} U^{\alpha'\beta'} U^{\dagger\gamma'\delta'} = (1/N(N-1)) (\delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \delta^{\alpha'\delta'} \delta^{\beta'\gamma'} + \delta^{\alpha\delta'} \delta^{\alpha'\delta} \delta^{\beta\gamma'} \delta^{\beta'\gamma}) - [1/N(N-1)] (\delta^{\alpha\delta} \delta^{\alpha'\delta'} \delta^{\beta\gamma'} \delta^{\beta'\gamma} + \delta^{\alpha\delta'} \delta^{\alpha'\delta} \delta^{\beta\gamma} \delta^{\beta'\gamma'}) \quad (E.2c)$$

La integración en dichos grupos de funciones de clase $f(U) = f(gUg^{-1})$

puede efectuarse a través de la parametrización de Weyl de la medida (Weyl, / 1939):

$$\int d\mu(U) f(U) = \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^N \frac{d\phi_i}{2\pi} \Delta(\phi) f(\phi) \quad (E.3)$$

con

$$\Delta(\phi) = (2\pi)^N \prod_{i < j} \text{sen}^2 \left(\frac{\phi_j - \phi_i}{2} \right) \quad (U(N))$$

y

$$f(\phi) = f(U^{\alpha\beta} = e^{i\phi_\alpha \delta^{\alpha\beta}})$$

Capítulo 4

Con los resultados básicos arriba establecidos se puede estudiar el de

desarrollo hasta términos cuadráticos de la función

$$\omega(k) = \ln \int d\mu(U) \exp \left[i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (UK)^\dagger \right] \quad (\text{E.4})$$

en las proximidades de $K = \alpha \mathbb{1}$. Dicho desarrollo es necesario para la construcción de la forma cuadrática (4.5).

Definiendo

$$\langle \Omega(U) \rangle = e^{-\omega(\alpha)} \int d\mu(U) \Omega(U) e^{\alpha i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U} \quad (\text{E.5})$$

con

$$\omega(\alpha) = \omega(K = \alpha \mathbb{1}) = \ln \int d\mu(U) e^{\alpha i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U}$$

resulta

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial K_{\alpha\beta}} \right|_{K = \alpha \mathbb{1}} = \langle U_{\beta\alpha}^\dagger \rangle \quad (\text{E.6a})$$

$$\left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial K_{\alpha\beta} \partial K_{\gamma\delta}} \right|_{K = \alpha \mathbb{1}} = \langle U_{\beta\alpha}^\dagger U_{\delta\gamma}^\dagger \rangle - \langle U_{\beta\alpha}^\dagger \rangle \langle U_{\delta\gamma}^\dagger \rangle \quad (\text{E.6b})$$

$$\left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial K_{\alpha\beta}^\dagger \partial K_{\gamma\delta}} \right|_{K = \alpha \mathbb{1}} = \langle U_{\beta\alpha}^\dagger U_{\delta\gamma} \rangle - \langle U_{\beta\alpha}^\dagger \rangle \langle U_{\delta\gamma} \rangle \quad (\text{E.6c})$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \int d\mu(U) U e^{\alpha i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U} &= \int d\mu(V) d\mu(U) V U e^{\alpha i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (VU)} = \\ &= \int d\mu(V) V e^{\alpha i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} V} = \int d\mu(U) U e^{\alpha i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U} \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\langle U_{\alpha\beta} \rangle = \langle U_{\alpha\beta}^{\dagger} \rangle = \langle \text{Re } U_{\alpha\beta} \rangle$$

$$\langle U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}^{\dagger} \rangle = \langle U_{\alpha\beta}^{\dagger} U_{\gamma\delta} \rangle = \langle \text{Re } (U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}^{\dagger}) \rangle$$

Estas igualdades justifican el estudiar solamente las derivadas (E.6) de $W(K)$.

Si en $\langle U_{\alpha\beta} \rangle$ se efectúa el cambio $U \longrightarrow VUV$ y se integra en V , teniendo en cuenta (E.1) ~ (E.2b) resulta

$$\langle U_{\alpha\beta} \rangle = N^{-1} \delta_{\alpha\beta} \langle \text{Tr } U \rangle = N^{-1} \delta_{\alpha\beta} \langle \text{Re Tr } U \rangle = N^{-1} \delta_{\alpha\beta} W'(\alpha)$$

Efectuando el mismo reemplazo en $\langle U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta} \rangle$, $\langle U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}^{\dagger} \rangle$ y teniendo en cuenta ahora (E.1) ~ (E.2c), resulta

$$\langle U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta} \rangle = f_1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + f_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \quad (\text{E.7a})$$

$$\langle U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}^{\dagger} \rangle = g_1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + g_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \quad (\text{E.7b})$$

con

$$f_1 = \frac{N \langle \text{Re}(\text{Tr } U)^2 \rangle - \langle \text{Re Tr } U^2 \rangle}{N(N^2 - 1)}$$

$$f_2 = \frac{N \langle \text{Re Tr } U^2 \rangle - \langle \text{Re}(\text{Tr } U)^2 \rangle}{N(N^2 - 1)}$$

($N \neq 1$)

$$g_1 = \frac{\langle \text{Tr } U^2 \rangle - 1}{(N^2 - 1)}$$

$$g_2 = \frac{N^2 - \langle \text{Tr } U^2 \rangle}{(N^2 - 1)}$$

Estas expresiones pueden ahora calcularse usando la parametrización de Weyl (E.3). En particular es fácil probar que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (g_2 + f_2) = \frac{1}{2N(N^2-1)} \left\langle \sum_{a,b} (\cos \phi_a - \cos \phi_b)^2 \right\rangle > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (g_2 - f_2) = \frac{1}{2N(N^2-1)} \left\langle \sum_{a,b} (\sin \phi_a - \sin \phi_b)^2 \right\rangle > 0$$

(E.8)

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[(g_2 + f_2) + N \left(g_1 - f_1 - 2 \frac{\omega'}{N} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{N} \left\langle \left(\sum_a \cos \phi_a - \left\langle \sum_a \cos \phi_a \right\rangle \right)^2 \right\rangle > 0$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left[(g_2 - f_2) + N (g_1 - f_1) \right] = \frac{1}{N} \left\langle \left(\sum_a \sin \phi_a \right)^2 \right\rangle > 0$$

Para $U(\infty)$, un análisis asintótico para $N \rightarrow \infty$ de (E.4) con $\alpha = N\zeta$ ($\zeta > 1$) lleva a (Müller y Rühl, 1982):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\omega(N\zeta)}{N^2} = \zeta - \frac{1}{2} \ln \zeta - \frac{3}{4}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N\lambda_1 = \frac{1}{4\zeta^2}$$

(E.9)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N\lambda_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\omega'(N\zeta)}{N\zeta} = \frac{\zeta - 1}{2\zeta^2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N\lambda_3 = \lim_{N \rightarrow \infty} \omega''(N\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}$$

En general el volumen de $U(N)$ viene dado por (Rühl, 1982):

$$V_{U(N)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}N(N+1)} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} \quad (E.10)$$

Capítulo 5

Para obtener (5.11) es necesario conocer previamente el desarrollo hasta términos cuadráticos de la función

$$\omega(z) = \ln \int d\mu(u) \exp \left\{ \operatorname{Re} (u z_1^* + u^2 z_2^*) \right\} \quad u \in U(1)$$

en las proximidades de $z_1 = \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$). Llamando

$$z_n = \alpha_n + h_n + i a_n \quad (n=1,2) \quad u = e^{i\phi} \quad \int d\mu(u) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)}$$

se obtiene

$$\omega(z) \approx \omega(\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 (\lambda_n h_n^2 + \bar{c}_n a_n^2) + \lambda_{12} h_1 h_2 + \bar{c}_{12} a_1 a_2$$

En esta expresión hemos llamado:

$$\omega(\alpha) = \ln \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)} \exp \left(\alpha_1 \cos \phi + \alpha_2 \cos(2\phi) \right) \quad (\text{E.11})$$

$$\lambda_n = \langle \cos^2(n\phi) \rangle - \langle \cos(n\phi) \rangle^2 > 0 \quad (n=1,2)$$

$$\lambda_{12} = 2 \left[\langle \cos \phi \rangle \langle \cos^2 \phi \rangle - \langle \cos^3 \phi \rangle \right]$$

$$\bar{c}_n = 1 - \langle \cos^2(n\phi) \rangle > 0 \quad (n=1,2) \quad (\text{E.12})$$

$$\bar{c}_{12} = 2 \left[\langle \cos^3 \phi \rangle - \langle \cos \phi \rangle \right]$$

Los promedios en el grupo $\langle \rangle$ se definen de manera análoga a (E.5):

$$\langle \Omega(u) \rangle = e^{-\omega(\alpha)} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)} \Omega(e^{i\phi}) e^{\sum_{n=1}^2 \alpha_n \cos(n\phi)}$$

con $w(\alpha)$ dada por (E.11).

Capítulo 6

La representación adjunta de $SU(2)$ está constituida por las matrices

$$U^{ba} \quad \text{que verifican} \quad U T_a^\dagger U = \sum_b U^{ba} T_b$$

donde T_a ($a=1,2,3$) son los generadores de $SU(2)$ normalizados según (1.3).

Utilizando la relación

$$\sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha}^{\beta} T_{\beta}^{\alpha} = \left(\delta^{\alpha\beta} \delta^{\beta\alpha} - \frac{\delta^{\alpha\alpha} \delta^{\beta\beta}}{2} \right)$$

es fácil probar que

$$\text{Tr } U_A = (\text{Tr } U_F) (\text{Tr } U_F^\dagger) - 1 \quad (\text{E.13})$$

(F y A hacen referencia a las representaciones fundamental y adjunta respectivamente).

Una representación explícita de la base T_A usada en (6.8b) es

$$\begin{aligned} T_A^1 &= \frac{\lambda_3}{\sqrt{2}} & T_A^2 &= \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}} & T_A^3 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \\ T_A^4 &= \frac{\lambda_{11}}{\sqrt{2}} & T_A^5 &= \frac{\lambda_6}{\sqrt{2}} & T_A^6 &= -\frac{\lambda_7}{\sqrt{2}} \\ T_A^7 &= \frac{\lambda_5}{\sqrt{2}} & T_A^8 &= -\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} & T_A^9 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

donde las λ_i son las matrices de Gell-Mann.

Los coeficientes de la forma cuadrática (6.9) vienen dados por:

$$\begin{aligned} K_F^{(h)} &= 2 \left[\langle \cos^2 \phi \rangle - \langle \cos \phi \rangle^2 \right] \\ K_F^{(a)} &= \frac{2}{3} \left[1 - \langle \cos^2 \phi \rangle \right] \\ K_A^{(h)} &= \frac{16}{3} \left[\langle \cos^4 \phi \rangle - \langle \cos^2 \phi \rangle^2 \right] \\ \tilde{K}_A^{(h)} &= \frac{8}{15} \left[\langle \cos^4 \phi \rangle - 2 \langle \cos^2 \phi \rangle + 1 \right] \\ K_A^{(a)} &= \frac{8}{3} \left[\langle \cos^2 \phi \rangle - \langle \cos^4 \phi \rangle \right] \\ K_{FA}^{(h)} &= \frac{8}{16} \left[\langle \cos \phi \rangle \langle \cos^2 \phi \rangle - \langle \cos^3 \phi \rangle \right] \\ K_{FA}^{(a)} &= \frac{4}{3} \left[\langle \cos \phi \rangle - \langle \cos^3 \phi \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

En estas expresiones se ha definido

$$\langle f(\phi) \rangle = \frac{2}{\pi} e^{-w} \int_0^{\pi} d\phi \sin^2 \phi f(\phi) e^{2\alpha_F \cos \phi + \alpha_A (4\cos^2 \phi - 1)}$$

con $w(\alpha)$ dado por (6.6).

Las funciones λ y R de (6.10') se definen:

$$\lambda_F^H = K_F^{(h)} \quad \lambda_F^A = K_F^{(a)} \quad \lambda_A^H = E^{(h)} / K_F^{(h)}$$

$$\lambda_A^A = L^{(a)} / K_F^{(a)} \quad \tilde{\lambda}_A^H = \tilde{K}_A^{(h)}$$

$$R^H = (K_{FA}^{(h)})^2 / E^{(h)} \quad R^A = (K_{FA}^{(a)})^2 / E^{(a)}$$

(E.16) ,

con

$$E^{(\alpha)} = K_F^{(\alpha)} K_A^{(\alpha)} - (K_{FA}^{(\alpha)})^2 \quad \alpha = h, a$$

Se incluyen en esta sección una serie de comentarios sobre particularidades de la técnica del campo promedio, el método de cálculo básico utilizado en esta Tesis. Además en la última parte de la sección se resumen los resultados obtenidos y las conclusiones más importantes que de ellos se extraen.

En la sección (4.2) se puso de manifiesto la necesidad, en el caso de TCM con simetrías continuas, de un fijado de medida previo al cálculo de correcciones gaussianas, a fin de evitar modos-ceros en la forma cuadrática en las fluctuaciones de los campos. Dicho fijado de medida puede efectuarse directamente sobre las fluctuaciones de los campos alrededor de sus valores medios (capítulo 4), o bien previamente al cálculo de la ACP. Ambos procedimientos llevan sin embargo a resultados muy diferentes (Tabla 4.1).

Para entender esta discrepancia basta comparar las ecuaciones de orden cero (4.2) y (6.5) (para $a=F$). De tal comparación surge que si bien la contribución de los términos de fijado de medida es despreciable para $d \rightarrow \infty$, para $d=4$ dicha contribución representa una modificación sustancial de las ecuaciones mencionadas. Esta modificación de los resultados de orden cero es luego sólo parcialmente compensada por la inclusión de las primeras correcciones a la ACP.

No obstante los buenos resultados obtenidos en el caso de grupos abelianos fijando la medida sobre las fluctuaciones de los campos (Alessandrini et al, 1983; Camarata et al, 1983; Ceccatto, 1984; Dagotto, 1984), a priori lo más conveniente es fijar la medida antes del cálculo de la ACP, debido a que de esa forma se tratan exactamente parte de los grados de libertad del sistema.

Tal procedimiento fue el seguido en el capítulo 6. La medida axial allí utilizada es sin embargo poco conveniente para el cálculo de correcciones de mayor orden que las gaussianas. Ello se debe a que dicha medida rompe las

simetrías de rotación discretas de la teoría. Una forma alternativa que no / presenta dicha dificultad consiste en fijar, previo al cálculo de la ACP, la medida covariante general (5.13) (Flyvbjerg, 1984). Se ha demostrado (Flyvbjerg et al, 1983) que si bien la medida axial es más conveniente que la medida covariante general en cálculos que consideren como máximo fluctuaciones / cuadráticas de los campos, a órdenes mayores esta última medida proporciona resultados igualmente buenos con menor esfuerzo de cálculo.

___ El cálculo de correcciones sucesivas a la ACP puede organizarse como un desarrollo en potencias inversas del parámetro α de (3.13) (Kawamoto y Shigemoto, 1983; Flyvbjerg, 1984). Cálculos hasta orden $1/\alpha^4$ para la / acción de Wilson con simetría U(1) proporcionan un resultado para el punto de transición de fase con menos del 1% de discrepancia con respecto / al valor predicho por el método de Monte Carlo (Flyvbjerg, 1984). A ese orden la técnica del campo promedio compete en precisión con las simulaciones numéricas realizadas en redes del tamaño más grande considerado ($\sim 12^4$ sitios).

___ Ciertas ambigüedades metodológicas de la técnica del campo promedio discutidas por Rühl (1982), Lautrup y Rühl (1983) y Ceccatto y Giacomini / (1983), podrían ser aprovechadas para complementar dicha técnica con el método de Monte Carlo, obteniéndose así diagramas de fases más precisos. Para ello bastaría fijar los parámetros indeterminados que aparecen en los trabajos citados ajustando algunos puntos del diagrama obtenidos previamente en forma numérica. De esta forma se podrían estudiar con poco tiempo de computación TCM con acciones generalizadas que involucren varios parámetros.

El tipo de complementación arriba señalado fue ya utilizado en los trabajos de Bitar et al (1982, 1983). En los mismos se determina, a través del conocimiento de algunos puntos del diagrama de fases mediante el método de / Monte Carlo, el valor óptimo del factor de escala λ al aplicar técnicas del grupo de renormalización del tipo Migdal-Kadanoff (Migdal, 1975; Kadanoff, /

1976).

___ Si bien en la determinación de la energía libre del sistema a través de la técnica del campo promedio no se hace ninguna suposición previa sobre el valor de β , los resultados obtenidos muestran que dicha técnica es especialmente apta para el estudio de la fase fría de la teoría ($\beta \gg 1$). En dicha fase reproduce el desarrollo en acoplamiento débil ($g^2 \sim 1/\beta \approx 0$) (Rühl, 1982), aunque el esfuerzo de cálculo es sensiblemente menor que el requerido por las técnicas usuales de desarrollo en serie para bajas temperaturas ($\beta \rightarrow \infty$).

Ello se debe al particular manejo que la técnica del campo promedio hace de las integrales en el grupo, que quedan finalmente reducidas al cálculo de la función w de (3.5).

___ La técnica del campo promedio ha sido aplicada con éxito al estudio de TCM sobre redes con materia bosónica (Dagotto, 1984; Boucaud, 1984, etc.) Se ha adaptado también al caso de TCM con materia fermiónica (Bonini y Marchesini, 1982; Alessandrini et al, 1983; Martin, 1983, etc.).

Ultimamente se han estudiado mediante dicha técnica TCM sobre redes a temperatura finita (Trincherro, 1983; Alessandrini y Boucaud, 1983).

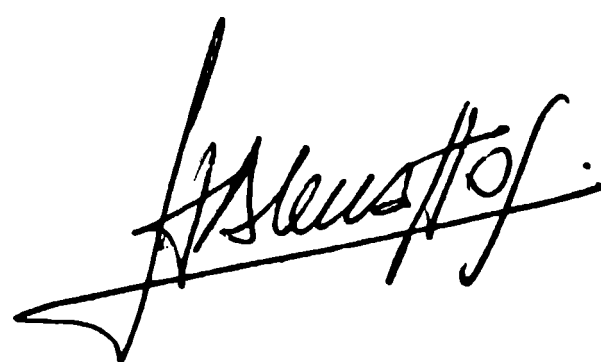
___ Los resultados más importantes de esta Tesis los constituyen la tabla (4.2) y los diagramas de figs. (5.2), (5.3) y (6.2).

La tabla (4.2) muestra que el gauge natural de la teoría de coordenadas colectivas resulta menos eficiente para el estudio de TCM sobre redes basadas en grupos no-abelianos que para el caso de teorías basadas en grupos abelianos, a juzgar por la creciente discrepancia que tienen los resultados obtenidos para $U(1)$ y $U(\infty)$ con los correspondientes valores proporcionados por el método de Monte Carlo. A idéntica conclusión han arribado otros autores (trabajo no publicado citado en Alessandrini y Boucaud, 1983). Para grupos no abelianos se obtienen mejores resultados fijando a orden cero la medida axial (Müller et al, 1983).

Las figs. (5.2) y (5.3) indican, tal como era esperado, la no existencia de conexiones analíticas entre las fases confinante y no confinante de la QED compacta. Es decir, de acuerdo con la hipótesis de universalidad, aún para acciones extendidas del tipo (5.4b) la teoría presenta una fase no-confinante bien diferenciada dentro de la cual el límite continuo reproduciría las características usuales de la QED.

A la inversa, el diagrama de la fig. (6.2) presenta una conexión analítica de ambas fases. Ello implica, también de acuerdo con la hipótesis de universalidad, la coexistencia de los fenómenos de libertad asintótica y confinamiento para acciones mixtas del tipo (6.1). Por otro lado, la proximidad al eje fundamental ($\beta_A = 0$) del punto crítico terminal de la línea de transiciones de primer orden que separa parcialmente las fases A y C, explica la observación de un pico en el calor específico en las simulaciones de Monte Carlo del modelo standard (Bhanot y Creutz, 1981). Si bien estos resultados corresponden a un modelo con simetría SU(2), la analogía ya señalada que dicho modelo tiene con la QCD sobre redes (basada en el grupo SU(3)), permite esperar el mismo comportamiento de esta última teoría.

Finalmente, la buena concordancia entre los resultados predichos por la técnica del campo promedio y los correspondientes al método de Monte Carlo reafirma la confiabilidad de dicha técnica analítica, que puede ser utilizada para el estudio de modelos con acciones más complejas (multiparamétricas), que requerirían un excesivo tiempo de computación en un análisis puramente numérico. Debe destacarse la capacidad de la técnica del campo promedio generalizada de acuerdo con lo visto en el capítulo 5 de predecir las fases parcialmente confinantes B de los diagramas de figs. (5.2) y (6.2), si bien en el primero de dichos diagramas no diferencia el orden de las transiciones.



REFERENCIAS

- Abers E. y Lee B., (1973), Phys. Rep. V9, N° 1, 1.
- Alberty J., Flyvbjerg H. y Lautrup B., (1983), Nucl. Phys. B220, 61.
- Alessandrini V., (1982), Phys. Lett. 117B, 423.
- Alessandrini V., (1983), Nucl. Phys. B215, 337.'
- Alessandrini V., Hakim V. y Krzywicki A., (1983), Nucl. Phys. B215 (FS7), 109.
- Alessandrini V. y Boucaud Ph., (1983), Nucl. Phys. B227, 303.
- Alessandrini V. y Boucaud Ph., (Dec. 1983), "Mean Field Theory for lattice / gauge systems at finite temperature", LPTHE Orsay 83/38.
- Balian R., Drouffe J. M. y Itzykson C., (1974), Phys. Rev. D10, 3376.
- Bander M., (1981), Phys. Rep. V75, N° 4, 205.
- Bars I. y Green F., (1979), Phys. Rev. D20, 3311.
- Berezin, (1966), "The method of second quantization", Academic Press, N.Y.
- Bhanot G. y Creutz M., (1980), Phys. Rev. D21, 2892.
- Bhanot G. y Creutz M., (1981), Phys. Rev. D24, 3212.
- Bhanot G., (1982a), Nucl. Phys. B205 (FS5), 168.
- Bhanot G., (1982b), Phys. Lett. 117B, 431.
- Bhanot G. y Dashen R., (1982), Phys. Lett. 113B, 299.
- Binder K., (1979), "Monte Carlo methods in Statistical Physics", Springer / Verlag.
- Bitar K., Gottlieb S. y Zachos C., (1982), Phys. Rev. D26, 2853.
- Bitar K., Gottlieb S. y Zachos C., (1983), Phys. Lett. 121B, 163.
- Bohr H. y Moriarty K.J.M., (1981), Phys. Lett. 104B, 217.
- Bonini M. y Marchesini G., (1982), Phys. Lett. 110B, 275.
- Boucaud Ph., (1984), Nucl. Phys. B230, 172.
- Brézin E., Le Guillou J.C. y Zinn-Justin J., (1976), "Phase transition and / critical phenomena", V6, Eds. C. Domb y M. Green, Academic Press.
- Brézin E. y Drouffe J.M., (1982), Nucl. Phys. B200, 93.

Caldi D.G., (1982), "How well do Monte Carlo simulations distinguish between U(1) and SU(2)?", Max Planck Inst. preprint MPI-PAE/PTh 64/82.

Camarata C., Epele L., Franchiotti H. y García Canal C., (1983), La Plata / preprint.

Ceccatto H.A. y Giacomini H., (1982), "Teorías de medida sobre redes", IFIR-11/82.

Ceccatto H.A. y Giacomini H., (1983), "Corrections to U(N) and SU(N) mean / field approximations with collective coordinate methods", IFIR-9/83 (aceptado para su publicación en *Matematicae Notae*).

Ceccatto H.A., (1984), "Improved mean field approach to compact QED with an extended lattice action", IFIR-4/84 (aceptado para su publicación en *Matematicae Notae*).

Ceccatto H.A., Dagotto E. y Moreo A., (1984), "Gaussian corrections around / the mean field approximation for the mixed SU(2) lattice gauge theory", Centro Atómico Bariloche preprint (aceptado para su publicación en *Phys. Rev. D*).

Creutz M., (1977), *Phys. Rev.* D15, 1128.

Creutz M., Jacobs L. y Rebbi C., (1979a), *Phys. Rev. Lett.* 42, 1390.

Creutz M., Jacobs L. y Rebbi C., (1979b), *Phys. Rev.* D20, 1915.

Creutz M., (1979), *Phys. Rev. Lett.* 43, 553.

Creutz M., (1980), *Phys. Rev. Lett.* 45, 313.

Creutz M., (1981), *Phys. Rev. Lett.* 46, 1441.

Creutz M. y Moriarty K.J.M., (1982), *Phys. Rev.* D25, 1724.

Cvitanovic P., Greensite J. y Lautrup B., (1981), *Phys. Lett.* 105B, 197.

Dagotto E., (1984), "Mean field with corrections approach to the mixed U(1) Lattice gauge theory", Centro Atómico Bariloche preprint.

Dagotto E., (1984b), *Phys. Lett.* 136B, 60.

De Bruijn, (1956), "Asymptotic methods in analysis", North Holland.

Drouffe J.M. y Itzykson C., (1978), *Phys. Rep.* 38, 133.

Drouffe J.M., (1980), *Nucl. Phys.* B170, 211.

Drouffe J.M., (1981), *Phys. Lett.* 105B, 46.

Drouffe J.M., (1982), *Nucl. Phys.* B205, 27.

Drouffe J.M. y Zuber J.B., (1983), *Phys. Rep.* 102, 1.

Elitzur S., (1975), Phys. Rev. D12, 3978.

Faddeev L.D. y Popov V., (1967), Phys. Lett. 25B, 29.

Faddeev L.D. y Slavnov A.A., (1980), "Gauge Fields-Introduction to quantum theory", Benjamín.

Feynman R., (1948), Rev. Mod. Phys. 20, 367.

Flyvbjerg H., Lautrup B. y Zuber J.B., (1982), Phys. Lett. 110B, 279.

Flyvbjerg H., Mansfield P. y Soderberg B., (1983), "High precision mean field results for lattice gauge theories", Nordita preprint 83/53.

Flyvbjerg H., (1984), Nucl. Phys. B235 (FS11), 331.

Gervais J.L. y Sakita B., (1975), Phys. Rev. D11, 2943.

Gilmore, (1974), "Lie Groups and Lie Algebras and some of their applications", John Wiley and Sons.

Ghoroku K., (1983), Progr. Theor. Phys. 70, 1091.

Greensite J. y Lautrup B., (1981), Phys. Lett. 104B, 41.

Greensite J., Hansson T., Hari Dass N. y Lauwers P., (1981), Phys Lett. 105B, 201.

Gross D. y Wilczek F., (1973), Phys. Rev. Lett. 30, 1343.

Gross D.J., (1975), "Lecture at the Les Houches Summer School", Ed. R. Balian, North Holland.

Halliday I.G. y Schwimmer A., (1981), Phys. Lett. 101B, 327.

Hasenfratz P., (1983), "Lattice QCD", CERN preprint Ref. TH-3737.

Jurkiewicz J. y Zalewski K., (1983), Acta Phys-Polonica B14, 517.

Jurkiewicz J., Korthals Altes C.P. y Dash J.W., (1983), "Large N universality of variant actions", CERN preprint Ref. TH-3621.

Kadanoff L.P., (1976), Ann. Phys. 100, 359

Kadanoff L.P., (1977), Rev. Mod. Phys. 49, 267.

Kawamoto N. y Shigemoto K., (1982), Phys. Lett. 114B, 42.

Kawamoto N. y Shigemoto K., (1983), Niels Bohr Inst. preprint HE-83-02.

Kleinert H., (1983), Lett. al N. Cimento V37, N° 12, 425.

Kogut J. y Susskind L., (1975), Phys. Rev. D11, 395.

Kogut J., (1979a), Rev. Mod. Phys. 51, 659.

Kogut J., (1979b), "A sunday seminar on lattice gauge theories", Univ. of Illinois preprint ILL-(TH)-79-21.

Kogut J., (1980), Phys. Rev. V67, N° 1, 67.

Lautrup B. y Nauenberg M., (1980a), Phys. Lett. 95B, 63.

Lautrup B. y Nauenberg M., (1980b), Phys. Rev. Lett. 45, 1755.

Lautrup B., (1982), "Saddle point methods in lattice field theories", Bohr/Inst. Lecture Notes.

Lautrup B. y Rühl W., (1983), "Higher order mean field expansions for lattice gauge theories", Kaiserslautern preprint.

Ma S.K., (1976), "The Modern Theory of critical phenomena", Benjamín.

Makeenko Y.M. y Polikarpov M.I., (1982), Nucl. Phys. B205 (FS5), 386.

Marciano W. y Pagels H., (1978), Phys. Rep. V36, N° 3, 137.

Martin O., (1983), Phys. Lett. 130B, 411.

Migdal A.A., (1976), Sov. Phys. - JETP 42, 743.

Montvay I., (1983), "QCD on the lattice", DESY preprint Ref. 83-001.

Moriarty K.J.M., (1981), Phys. Lett. 106B, 130.

Müller V.F. y Rühl W., (1982a), Nucl. Phys. B210 (FS6), 289.

Müller V.F. y Rühl W., (1982b), "Numerical results for phase transitions of mean field approximations to U(N) and SU(N) gauge theories on lattices", Kaiserslautern preprint.

Müller V.F., Raddarz T. y Rühl W., (1983), Phys. Lett. 122B, 148.

Osterwalder K. y Schrader R., (1975), Commun. Math. Phys. 42, 289.

Poljakov A.M., (1977), Nucl. Phys. B120, 429.

Pritchard D.J., (1981), Phys. Lett. 106B, 193.

Rühl W., (1982), "The mean field perturbation theory of lattice gauge models with covariant gauge fixing", Kaiserslautern preprint.

Samuel S., (1982), Phys. Lett. 112B, 237.

Schaposnik F. y Solomin J., (1980), Lett. al N. Cimento, V27, N° 14, 467.

Stanley H.E., (1971), "Introduction to phase transition and Critical Phenomena", Oxford Univ. Press (N.Y.).

Trincherro R.C., (1983), "Mean field approach to finite temperature gauge systems", Univ. Bielefeld preprint BI-TP 83/21.

Utiyama R., (1956), Phys. Rev. 101, 1597.

Wegner F., (1971), J. Math. Phys. 12, 2259.

Weyl H., (1939), "The classical groups", Princeton Univ. Press.

Wick G.C., (1954), Phys. Rev. 96, 1124.

Wilson K., (1974), Phys. Rev. D14, 2455.

Wilson K., (1975), 'Erice Lecture Notes.

Yang C. y Mills R., (1954), Phys. Rev. 96, 1605.

Yu Makeenko M. y Polikarpov M.I., (1982), Nucl. Phys. B205 (FS5), 386.

Zheng X-T, Tan C-I y Chen T-L, (1982), Phys. Rev. D26, 2843.

Zheng X-T y Tan C-I, (1983), Phys. Rev. D28, 3141.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer término al Dr. Oscar Zandron por brindarme la posibilidad de trabajar en el Grupo de Teoría de Campos y Física de Altas Energías del IFIR.

Agradezco también a los Dres. H. Fanchiotti y C. García Canal por sugerirme el tema de Tesis y por su constante apoyo moral y comprensión. En particular agradezco al Dr. C. García Canal la cuidadosa lectura del manuscrito de esta Tesis y sus numerosas indicaciones.

Agradezco especialmente a H. Giacomini, E. Dagotto y A. Moreo su colaboración en parte de los trabajos aquí desarrollados y las numerosas discusiones personales con las que me he beneficiado.

Agradezco, finalmente, a todos aquellos que de una u otra manera contribuyeron a mi formación científica a lo largo de estos últimos años y al CONICET por su apoyo económico.