

Universidad Nacional de La Plata

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

TESIS

GRUPO DE RENORMALIZACION EN EL

ESPACIO REAL Y MODELOS $Z(Q)$

José Alejandro Riera

1985

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

TESIS

"APLICACION DE TECNICAS DEL GRUPO DE RENORMALIZACION EN
EL ESPACIO REAL A MODELOS CON SIMETRIA GLOBAL $Z(Q)$ "

José Alejandro Riera

Director Oscar Sergio Zandron

1985

INDICE

INTRODUCCION	1
<u>Capítulo 1</u> TRANSICIONES DE FASES Y FENOMENOS CRITICOS	
1 - 1 . Aspectos básicos de los fenómenos críticos. Longitud de correlación. Universalidad.	8
1 - 2 . Modelos de spin en el retículo.	11
1 - 3 . Orden y simetría.	15
1 - 4 . Exponentes críticos.	18
1 - 5 . Relaciones entre exponentes críticos.	21
Notas al Capítulo 1	23
<u>Capítulo 2</u> GRUPO DE RENORMALIZACION	
2 - 1 . Idea básica de la transformación GR.	25
2 - 2 . Dos formas de realizar el programa GR - Referencias básicas.	28
2 - 3 . Formalismo general.	31
2 - 4 . Cálculo de los exponentes críticos y de la energía libre.	37
2 - 5 . Transiciones de fases de primera especie en la teoría del Grupo de Renormalización.	42
Notas al Capítulo 2.	44
<u>Capítulo 3</u> TECNICAS EN EL ESPACIO REAL	
3 - 1 . El esquema de decimación.	46

3 - 2 . El esquema de bloques de spines.	51
3 - 3 . Otras técnicas que contienen aspectos de los dos esquemas precedentemente estudiados.	55
3 - 4 . Reescaleo entre sistemas finitos.	58
3 - 5 . Aplicación de las técnicas del GRER a modelos con interacciones aleatorias.	63
Notas al Capítulo 3.	67

Capítulo 4 : PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS MODELOS ESTUDIADOS

4 - 1 . Generalidades sobre modelos con simetría global $Z(q)$.	70
4 - 2 . Principales características del modelo de Potts.	74
4 - 3 . Principales características del modelo $Z(4)$ spin.	78

Capítulo 5 APROXIMACION DE MIGDAL - KADANOFF

5 - 1 . Descripción del método.	84.
5 - 2 . Aplicación al modelo de Potts y al modelo $Z(4)$ usando las transmisividades. Límite $b \rightarrow 1$ y dualidad.	89
5 - 3 . Cálculo directo sobre el modelo de Potts en presencia de un campo externo.	94
5 - 4 . Correcciones de Martinelli - Parisi.	97

Capítulo 6 GRAFOS DE DOS TERMINALES

- 6 - 1 . Reducción de bloques a grafos de dos terminales. Grafos autoduales. 100
- 6 - 2 . Relación de recursión de Fortuin - Kasteleyn para el modelo de Potts. 103
- 6 - 3 . Técnica de apertura - colapso. Aplicación al bloque "puente de Wheatstone". 107
- 6 - 4 . Generalización del resultado de Fortuin - Kasteleyn al modelo $Z(4)$. 112
- 6 - 5 . Técnica de apertura - colapso para el modelo $Z(4)$. 116

Capítulo 7 TECNICA MIXTA GRUPO DE RENORMALIZACION - CAMPO MEDIO

- 7 - 1 . Aproximación campo medio. Justificación de la técnica mixta. 121
- 7 - 2 . Aplicación de la técnica MK - CM al modelo de Ising. 127
- 7 - 3 . Aplicación de la técnica MK - CM al modelo $Z(4)$ 136
- Notas al Capítulo 7. 144

Capítulo 8 REESCALEO ENTRE SISTEMAS FINITOS CON CAMPOS MEDIOS

- 8 - 1 . Descripción del método 150
- 8 - 2 . Algunas aplicaciones de este método. Dis-

cusión y comentarios.	154
8 - 3 . Aplicación al modelo $Z(4)$ spin.	164
CONCLUSIONES	174
REFERENCIAS	177

INTRODUCCION

El tema central de esta Tesis es, tal como lo indica su título, el estudio de la aplicación de diversas técnicas basadas en la transformación del grupo de renormalización (GR), en particular dentro de las realizadas en el espacio de las posiciones o "espacio real", a un cierto conjunto de problemas que presentan transiciones de fases y fenómenos críticos.

La elección de este tema se basa en las siguientes consideraciones. En primer lugar, para los que como el autor han centralizado su interés científico en las transiciones de fases y en especial en los fenómenos críticos, la transformación GR tiene una gran importancia teórica puesto que en su origen yace precisamente el aspecto esencial del comportamiento crítico, a saber, la invariancia de escala. En segundo lugar, dentro de la enorme variedad de técnicas basadas en dicha transformación, el autor considera que las que se efectúan en el espacio real continúan siendo objeto de un intenso trabajo el cual ha producido recientemente algunos avances significativos (Burkhardt y van Leeuwen, 1982). En tercer término, se ha intentado explotar algunas técnicas propuestas en estos últimos años, y que comentaremos luego, aplicándolas a la importante familia de modelos con simetría global $Z(N)$.

Antes de precisar los objetivos de esta Tesis efectuemos una rápida revisión del surgimiento y desarrollo de la teoría del grupo de renormalización y, a continuación, una breve descripción de los modelos $Z(N)$.

A mediados de la década del sesenta la situación en la teoría de las transiciones de fases y más precisamente de los fenómenos críticos es, a grandes rasgos, la siguiente. Muy pocos de los modelos microscópicos propuestos para describir di-

cha clase de fenómenos, como los modelos de Ising o de Heisenberg, han sido resueltos o al menos entendidos satisfactoriamente. Es decir, no se ha logrado extraer de ellos la predicción de propiedades macroscópicas como, por ejemplo, la magnetización espontánea o la susceptibilidad, particularmente en la zona crítica. Entre los métodos teóricos utilizados cabe mencionar en primer lugar la aproximación del campo medio, la cual arroja en general resultados correctos desde el punto de vista cualitativo sobre todo respecto a los diagramas de fases. Desde el punto de vista cuantitativo los exponentes críticos calculados en esta aproximación son muy pobres cuando se los compara con los provenientes de las soluciones exactas, como la del modelo de Ising en dos dimensiones (Onsager, 1944) o con los estimados mediante otros métodos. Entre éstos ocupan un lugar destacado los desarrollos en altas temperaturas (ver por ejemplo, Domb, 1974) los cuales conducen a valores muy precisos de los exponentes críticos pero desafortunadamente no ayudan a un entendimiento cualitativo de los fenómenos críticos.

En esta situación irrumpe en el terreno teórico la transformación del grupo de renormalización (Kadanoff, 1966). La idea esencial de la transformación GR consiste en una reducción sucesiva del enorme número de grados de libertad cuyo comportamiento cooperativo da lugar a los fenómenos críticos. En la formulación inicial de Kadanoff esta reducción se logra mediante el pasaje de bloques de spines de la red inicial a spines de la red transformada. Esta transformación implica un conjunto de relaciones entre los exponentes críticos, las cuales habían sido adelantadas por Widom (1965). La invariancia del sistema frente a esta transformación o invariancia de escala se logra mediante una redefinición de las constantes de interacción presentes en el hamiltoniano inicial.

Dada la enorme variedad de técnicas basadas en esta idea nos limitaremos en lo subsiguiente a las líneas de trabajo más importantes, teniendo como objetivo la ubicación dentro de ellas de las técnicas del grupo de renormalización en el espacio real (GRER) estudiadas en esta Tesis.

Los conceptos subyacentes que generan las técnicas GRER se encuentran ya en las primeras publicaciones de Kadanoff con las cuales comienza el trabajo en la teoría del GR tal como se indicó anteriormente. Sin embargo, como es sabido, el esfuerzo principal se deriva hacia la utilización de las transformadas de Fourier para obtener el hamiltoniano efectivo en el espacio de los momentos lo cual permite a su vez la incorporación de técnicas hasta entonces utilizadas en el ámbito de la Teoría Cuántica de Campos. Son fundamentalmente los trabajos de Wilson (1971) los que marcan el camino en esta dirección. Las técnicas del GR en el espacio de los momentos, y en particular la expansión ϵ , han proporcionado valores extremadamente precisos de los exponentes críticos de diversos sistemas tridimensionales (Le Guillou y Zinn Justin, 1977, 1980).

La búsqueda de realizaciones de la transformación del GR que involucren directamente al hamiltoniano microscópico en el espacio de las coordenadas resurge en la segunda mitad de los años setenta a partir de los trabajos de Niemeijer y van Leeuwen (1974, 1976). Las técnicas propuestas por estos autores fueron rápidamente explotadas para analizar un gran número de sistemas, particularmente aquellos con variables de spin discretas y en bajas dimensiones donde las fluctuaciones críticas son muy fuertes y las expansiones ϵ no son muy útiles (ver Cap. 3).

Paralelamente o a continuación de esta línea de Niemeijer y van Leeuwen se desarrolla una versión variacional (Ka-

danoff y Houghton, 1975; Kadanoff, Houghton y Yalabik, 1976). y un esquema de aproximación que por su inigualada simplicidad matemática ha resultado de una mayor permanencia en el tiempo, sugerido por Migdal (1975) y generalizado y corregido por Kadanoff (1976, 1977). Ambos métodos están basados en el corrimiento de ligaduras (ver Cap. 5) y por lo tanto conducen a cotas inferiores de la energía libre exacta.

Por esta época también renacen un conjunto de técnicas cuya idea central es el "reescaleo" entre sistemas finitos y son a veces considerados bajo el título de "renormalización fenomenológica". También en este caso la concepción tempranamente adelantada por Fisher (1971) se había retirado de la escena para retornar recién tras las contribuciones de Barber y Fisher (1974) y fundamentalmente de Nightingale (1976). Este conjunto de técnicas representa un poderoso instrumento de cálculo a la vez que proporciona la posibilidad de estimar los errores del método.

Para cerrar este breve recuento histórico, sin pretender que el mismo sea exhaustivo ni mucho menos, y para ubicar el restante método abordado en el presente trabajo, mencionemos como caso particular de la técnica de bloques de Niemeijer y van Leeuwen, la utilización de bloques que respeten las propiedades de dualidad de los retículos y por lo tanto resultan especialmente aptos para el tratamiento de modelos autoduales. Surge así la técnica del "puente de Wheatstone" iniciada por Bernasconi (1978) y desarrollada por Stinchcombe y colaboradores (1979).

Los modelos con simetría $Z(N)$ aparecen como una ruptura de simetría parcial del modelo $O(2)$ planar (el modelo XY clásico). Este tipo de modelos, de los cuales estudiaremos dos casos particulares: el modelo de Potts y el modelo $Z(4)$ (o modelo Ashkin-Teller simétrico), han sido objeto de un in-

tenso estudio motivado por un interés principalmente teórico. En primer lugar, en dos dimensiones, estos modelos presentan importantes propiedades de dualidad (Alcaraz y Köberle, 1980). En segundo lugar, siempre en el caso bidimensional, el comportamiento crítico de los mismos cambia dramáticamente para $N \geq 5$. En efecto, el carácter continuo de las transiciones de fases para $N \leq 4$ pasa a discontinuo para $N > 4$ (Baxter, 1973) a lo largo de la línea de Potts (ver Cap. 4). Además, para $N \geq 5$ aparece una nueva transición de fases a lo largo de la línea de Villain lo cual indica la presencia de una nueva fase (E-litzur et al, 1979). Esto coincide con la suposición de que para $N \geq 5$ los modelos $Z(N)$ pertenecen a la misma clase de universalidad que el modelo $O(2)$ (Cardy, 1980).

Desde el punto de vista experimental se está produciendo un creciente interés en este tipo de modelos en el contexto de la física de la materia condensada. Numerosos sistemas físicos que presentan transiciones orden-desorden, como flúidos adsorbidos sobre sustratos cristalinos, son descritos por estos modelos como se indicará en el Cap. 4.

Podemos ahora completar y precisar los objetivos de esta Tesis esbozados al comienzo de esta Introducción. En primer lugar se pretende revisar y extender una técnica de decimación de bloques autoduales, la técnica de apertura-colapso desarrollada en estos últimos años (Tsallis y Levy, 1981) aplicándola al modelo $Z(4)$.

En segundo lugar se explorará la posibilidad de combinar la transformación del grupo de renormalización con la aproximación campo medio. La intención es lograr técnicas mixtas que mejoren los diagramas de fases obtenidos con tales esquemas por separado. Los diagramas de fases son particularmente interesantes cuando se trata de transiciones de fases orden-desorden a las que, como mencionamos anteriormente, se

refieren particularmente los modelos $Z(N)$. Mediante estas técnicas también se han obtenido algunos resultados originales sobre el modelo $Z(4)$. Como un comentario final digamos que la mayor parte de las técnicas que se han considerado en este trabajo, están hoy en el centro de la atención en este campo siendo la fuente de nuevas técnicas similares así como de generalizaciones destinadas a ampliar el rango de su aplicación al estudio de modelos más realistas como, por ejemplo, aquellos con interacciones aleatorias.

En base a estos objetivos se desarrollado el siguiente contenido. En el Capítulo 1, a modo de introducción complementaria, se describe la formulación mecanoestadística de las transiciones de fases y los fenómenos críticos mediante modelos microscópicos en retículos regulares. En el Cap. 2 se efectúa una revista de los fundamentos de la teoría del grupo de renormalización. El autor de esta Tesis considera que sobre los aspectos generales de dicha teoría existe suficiente material bibliográfico como para realizar un examen demasiado exhaustivo de la misma. Consecuentemente, el desarrollo de dichos aspectos, el cual ocupa los dos primeros capítulos y parte del tercero, se ha reducido al mínimo indispensable para poder discutir posteriormente los temas relacionados con los objetivos propuestos. En el Cap. 3 se separan las técnicas de bloques de spines reteniendo principalmente las técnicas de decimación y mixtas. En el capítulo siguiente se establecen los modelos estudiados y se describen las propiedades más importantes de los mismos. El Cap. 5 está consagrado a la formulación y discusión de una de las técnicas usadas en esta Tesis: la aproximación de Migdal-Kadanoff. Hasta aquí el trabajo es esencialmente monográfico. En el próximo capítulo se desarrolla la técnica de apertura-colapso, y el autor considera un aporte original la extensión

de dicha técnica al modelo $Z(4)$. En el Cap. 7 se plantea la aproximación campo medio y la combinación de la misma con la aproximación Migdal-Kadanoff propuesta por Baracca et al (1982). En el último capítulo se formula y se aplica una técnica basada en el reescalado entre sistemas finitos con condiciones de borde que rompen la simetría del modelo (Indekeu, Maritan y Stella, 1982). También aquí aparecen relaciones con la aproximación del campo medio.-

CAPITULO 1

TRANSICIONES DE FASES Y FENOMENOS CRITICOS

1 - 1 . Aspectos básicos de los fenómenos críticos. Longitud de correlación. Universalidad.

En Mecánica Estadística se estudian fenómenos relativos a cuerpos macroscópicos los cuales son sistemas caracterizados por un número del orden 10^{23} de grados de libertad.

En determinadas circunstancias tales fenómenos pueden ser explicados o determinados por un número muchísimo menor de grados de libertad. Por ejemplo, debido al carácter extensivo o intensivo de cantidades físicas como la energía interna y la densidad, se pueden reconstruir las propiedades macroscópicas de un sistema a partir de una muestra relativamente microscópica del mismo.

En general, el comportamiento macroscópico de un sistema dado en un estado termodinámico puede ser explicado estudiando un subsistema cuya longitud característica debe ser, por definición, mayor que la "longitud de correlación". Un subsistema cuya longitud fuese menor que la longitud de correlación sería incapaz de reproducir las propiedades esperadas. La longitud de correlación ξ depende en consecuencia del estado del sistema. Bajo circunstancias extremadamente favorables ξ se reduce a unos pocos espaciamentos atómicos. Esto es equivalente a considerar pocos grados de libertad. Por ejemplo, un cristal ferromagnético o un gas pueden estudiarse en ciertas condiciones considerando unos pocos spines o moléculas respectivamente.

Por el contrario, existen situaciones para las cuales la longitud de correlación es muchísimo mayor que el espaciamiento de la red si no prácticamente infinita. Tal es el caso de los fenómenos críticos. Para los ejemplos considerados anteriormente, la transición ferromagneto - paramagneto o la gas-lí

quido respectivamente tiene un comportamiento crítico caracterizado por la aparición de singularidades en las magnitudes termodinámicas. Precisamente en la transición, es decir en el punto crítico, la longitud de correlación es infinita.

La longitud de correlación infinita que caracteriza a los fenómenos críticos tiene varios significados. En primer lugar, si una ξ finita indica una escala privilegiada característica de un fenómeno, una ξ infinita indica, por el contrario, que todas las escalas son igualmente importantes. Es decir que el fenómeno crítico es un fenómeno independiente de escala. La independencia o invariancia de escala es un concepto esencial incorporado en la teoría del grupo de renormalización en general y en el concepto del punto fijo en particular.

En segundo lugar, ξ infinita indica una participación esencial de infinitos grados de libertad actuando en forma cooperativa. Este comportamiento cooperativo implica que la mayoría de los detalles microscópicos del sistema, por ejemplo la forma de la interacción entre spines o moléculas, son irrelevantes en lo que respecta a la determinación de los exponentes críticos correspondientes a las singularidades de las cantidades termodinámicas. Esta característica de los fenómenos críticos conduce a la hipótesis de universalidad. De acuerdo con esta hipótesis solamente dos cantidades determinan las propiedades críticas de la mayoría de los sistemas: el número "d" de dimensiones espaciales y la dimensión "n" del parámetro de orden, el cual refleja la simetría del sistema (ver secc. 1 - 3).

El conjunto de sistemas caracterizados por un dado par de valores (d, n) se dice que constituyen una clase de universalidad. Las clases de universalidad han sido extensivamente estudiadas en el contexto del modelo n-vectorial (Stanley, 1976). Desde el punto de vista experimental se ha verificado la universalidad para un gran número de sistemas tales como líquidos bi-

narios, magnetos uniaxiales, flúidos en la transición gas - líquido, etc. (ver, por ejemplo, Stanley, 1971; Sengers, 1980).

En la sección siguiente se revisará en forma bastante sucinta la formulación mecano-estadística de modelos clásicos sobre redes que describen el comportamiento termodinámico de sistemas y en particular sus transiciones de fases. En las dos últimas secciones de este capítulo se definirán los principales exponentes críticos y las relaciones entre los mismos.

Algunos aspectos discutidos en esta sección constituyen el punto de partida para la formulación de la transformación del grupo de renormalización que se efectuará en el capítulo siguiente.-

1 - 2 . Modelos de spin en el retículo

En Mecánica Estadística los efectos colectivos, entre los cuales incluimos a las transiciones de fases, se describen mediante un conjunto de magnitudes físicas que pueden ser derivadas de la función de partición a la que denominaremos Z .

Para definir esta función se considera un retículo regular - aquí sólo tendremos en cuenta retículos hipercúbicos d -dimensionales - y en cada vértice del mismo se coloca una variable aleatoria real o compleja de n componentes, la variable de spin:

$$\sigma_i^{(\alpha)} \equiv \sigma^{(\alpha)}(\bar{r}_i)$$

donde $\alpha = 1, \dots, n$ y \bar{r}_i es la posición de cualquier vértice del retículo. A su vez, cada componente $\sigma_i^{(\alpha)}$ puede tomar un conjunto discreto de valores o variar continuamente en cierto dominio.

La función de partición se define como la suma sobre todas las configuraciones de los factores de Boltzmann asociados a cada configuración los cuales están relacionados a las probabilidades de las mismas:

$$P[\{\sigma_i^{(\alpha)}\}] \equiv P[\sigma] \approx \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma]) \quad (1 - 1)$$

donde $\beta = 1/k_B \cdot T$; $\mathcal{H}[\sigma] (\equiv \mathcal{H}[\{\sigma_i^{(\alpha)}\}])$ es el hamiltoniano de interacción (k_B es la constante de Boltzmann).

Los modelos analizados en este trabajo corresponden al caso particular de una variable de spin compleja de una sola componente σ_i que toma un conjunto de valores discretos (ver Capítulo 4).

Resulta útil introducir las cantidades:

$$S_m^{(r)} = \operatorname{Re} \prod_{i \in M} \sigma_i^r \quad (1 - 2)$$

donde m es un cierto subconjunto de sitios del retículo y $r = 1, 2, \dots$. Luego, una forma de hamiltoniano suficientemente general para nuestros propósitos se puede expresar como:

$$\mathcal{H}[\sigma] = \sum_{\alpha} \sum_{m_{\alpha}} \sum_r J_{m_{\alpha}}^{(r)} S_{m_{\alpha}}^{(r)} \quad (1 - 3)$$

donde α indica la clase geométrica a la que pertenecen los subconjuntos m_{α} . Excepto en el capítulo 3 en el que mencionamos a los modelos con interacciones aleatorias, nuestro estudio se centrará en modelos homogéneos para los cuales el hamiltoniano (1 - 3) puede ser reescrito como:

$$\mathcal{H}[\sigma] = \sum_{\alpha} \sum_{m_{\alpha}} \sum_r J_{\alpha}^{(r)} S_{m_{\alpha}}^{(r)} \quad (1 - 4)$$

Para una red cuadrada las primeras clases geométricas se pueden ver por ejemplo en Kadanoff y Houghton (1975). Dichas clases pueden involucrar a un número par de spines o a un número impar de spines. Para una variable de Ising, $\sigma_i = \pm 1$, y tomando únicamente $r = 1$, se cumple que las interacciones con un número par de spines permanecen invariantes frente a un cambio de signo de todos los spines de la red.

Por el contrario, las interacciones con un número impar de spines cambian de signo. Esto conduce a que, para una simetría $Z(2)$, las interacciones pares y las impares tengan un rol muy diferente (ver secc. 2 - 4). En general, para otras simetrías (por ejemplo la $Z(q)$, $q > 2$), las interacciones se clasifican según conserven o rompan dichas simetrías.

Es conveniente explicitar el primer término en α de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}[\sigma] = \sum_r h^{(r)} \sum_i \text{Re } \sigma_i^r + \sum_{\alpha > 1} \sum_{m_{\alpha}} \sum_r J_{\alpha}^{(r)} S_{m_{\alpha}}^{(r)} \quad (1 - 5)$$

puesto que $R_{\alpha} \sigma_i^r$ estará relacionado con el parámetro de orden y $h^{(r)}$ con su conjugado termodinámico o "campo externo".

El primer término de (1 - 5) al que llamaremos término de fuente, para valores adecuados de r , es un típico término de ruptura de simetría. Para el modelo de Ising ($r = 1$), usado para describir la transición ferromagneto - paramagneto, h puede ser identificado con un campo magnético externo.

Con todos estos elementos definidos se puede expresar la función de partición como:

$$Z[\{K_{\alpha}^{(r)}\}] = c \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma]) \quad (1 - 6)$$

donde $K_{\alpha}^{(r)} \equiv \beta J_{\alpha}^{(r)}$ ($H^{(r)} \equiv \beta h^{(r)}$) y c es una constante de normalización. Alternativamente se usará el subíndice a (b, c, \dots), en lugar del par (α, r) ($(\beta, s), \dots$) y también conviene introducir el vector \bar{K} de componentes K_a .

La energía libre se define como:

$$F[K_a] = - \ln Z[K_a] \quad (1 - 7)$$

donde se ha simplificado un tanto la dependencia respecto de K_a . Observar que $F = -\beta G$, donde G es la energía libre de Helmholtz tal como se la define usualmente (ver, por ejemplo, Stanley, 1971).

En Mecánica Estadística las funciones termodinámicas están dadas por los valores medios de funciones $A[\sigma]$ definidos como:

$$\langle A[\sigma] \rangle = \frac{1}{Z[K]} \sum_{\{\sigma\}} A[\sigma] \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma]) \quad (1 - 8)$$

los cuales se traducen a su vez en relaciones operatoriales

sobre la energía libre F . Por ejemplo, la energía interna resulta (Huang, 1963):

$$U = \langle \mathcal{H}[\sigma] \rangle = - \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

y por lo tanto se puede expresar el calor específico de la siguiente manera:

$$C \equiv \frac{\partial U}{\partial T} = k_B \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = k_B \beta^2 \langle (\mathcal{H}[\sigma])^2 \rangle \quad (1 - 9)$$

Con vistas a los análisis que se efectuarán en las siguientes secciones se darán las definiciones termodinámicas de otras magnitudes físicas. En primer lugar, la magnetización está dada por:

$$M^{(r)} = - \left(\frac{\partial F}{\partial H^{(r)}} \right)_T \quad (1 - 10)$$

y su expresión mecanoestadística se verá en la sección siguiente. Por último, definimos la susceptibilidad como:

$$\chi_{rs} = \beta \left(\frac{\partial M^{(r)}}{\partial H^{(s)}} \right)_T = - \beta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial H^{(r)} \partial H^{(s)}} \right)_T$$

En la formulación de la función de partición sobre el retículo y teniendo en cuenta el hamiltoniano (1 - 5) resulta:

$$\chi_{rs} = \beta \sum_i \sum_j \left(\langle \text{Re } \sigma_i^r \text{ Re } \sigma_j^s \rangle - \langle \text{Re } \sigma_i^r \rangle \langle \text{Re } \sigma_j^s \rangle \right)$$

donde ambas sumatorias se extienden sobre todo el retículo.-

1 - 3 . Orden y simetría

Para generalizar el estudio del comportamiento que hemos ilustrado mediante los ejemplos de un gas - líquido y de un ferromagneto es conveniente introducir el concepto de parámetro de orden. El parámetro de orden es una medida de la cantidad y el tipo de ordenamiento que aparece en una transición de fases.

Para el caso del ferromagneto el parámetro de orden es la magnetización con campo magnético externo nulo, es decir:

$$M_0(T) = M(H=0, T)$$

mientras que la transición gas - líquido se describe mediante el parámetro de orden $(\rho - \rho_c)$ donde ρ es la densidad y ρ_c es la densidad crítica. Las respectivas magnitudes conjugadas o campos aplicados son el campo magnético y la presión.

El elemento esencial de una transición orden - desorden es la ruptura o reducción de una simetría al pasar de la fase desordenada a la ordenada. En la formulación de modelos sobre una red dicha simetría debe estar contenida en el hamiltoniano del modelo considerado y, en particular, en los posibles valores que puede tomar la variable de spin σ_i . Luego, el surgimiento de un cierto tipo de ordenamiento consiste en que dicha ruptura de simetría se revele a escala macroscópica. Esto sugiere que tal ordenamiento, o la ausencia del mismo, estará descrito por la cantidad, en general, vectorial:

$$M_0^{(r)} = \left\langle \sum_i R_e \sigma_i^r \right\rangle = - \left(\frac{\partial F}{\partial H^{(r)}} \right)_{T, H=0} \quad (1 - 11a)$$

donde F y $H^{(r)}$ han sido definidos en la sección anterior. Esta magnitud es usualmente llamada magnetización espontánea. Para pasar al límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ es necesario consi-

derar la magnitud correspondiente por spin:

$$m^{(r)} = \frac{M_0^{(r)}}{N} = \langle \text{Re } \nabla_i^r \rangle = - \left(\frac{\partial f}{\partial H^{(r)}} \right)_{T, H=0} \quad (1 - 11b)$$

donde f es la energía libre por spin y se ha tenido en cuenta la invariancia traslacional de la red. Por debajo de la temperatura crítica, en la fase ordenada, alguna componente $m^{(r)}$ o una combinación de dichas componentes será no nula. Al pasar a la fase desordenada dicha cantidad se anulará. Luego, $m^{(r)}$ puede ser considerado el parámetro de orden del modelo.

Sin embargo, dicho parámetro de orden no necesariamente está describiendo un comportamiento crítico. Para que esto suceda, la transición de fases debe ser de segunda especie, es decir, el parámetro de orden se debe acercar a cero continuamente a medida que $T \rightarrow T_c$ por debajo.

Si por el contrario en este límite aparece un salto o discontinuidad en el parámetro de orden la transición de fases es de primera especie. Este tipo de transiciones no presenta fenómenos críticos, concretamente, una longitud de correlación infinita. Una forma de visualizar las diferencias entre las transiciones de primera y de segunda especie es estudiando, en las proximidades de la temperatura de transición, la energía libre de Helmholtz proporcional a la función:

$$\mathcal{F} [m] = F [H] + \sum_s H^{(s)} m^{(s)} \quad (1 - 12)$$

donde $H^{(s)} = \partial \mathcal{F} / \partial m^{(s)}$ y se ha obviado en \mathcal{F} y F la dependencia respecto de las constantes de interacción K_a . Los comportamientos correspondientes a los dos tipos de transición se indican en la fig. 1 - 1. Por ende, también las funciones de respuesta, como el calor específico y la susceptibilidad, tienen distintos tipos de comportamiento en ambas transiciones según

se puede ver por ejemplo en Stanley (1971).

Para detectar una transición de fase de primera especie se suele calcular el calor latente definido por:

$$\Delta Q = \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right)_{T_E^+} - \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right)_{T_E^-} \quad (1-13)$$

para una sola cte. de acoplamiento y T_E es la temperatura de transición. ΔQ es igual a cero ($\neq 0$) para una transición continua (discontinua).-

Volvamos a la cuestión de un ordenamiento de largo rango. Una forma alternativa de describirlo es mediante la función de correlación

$$\begin{aligned} \Gamma^{(r)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, T) &= \langle \text{Re} (\sigma_i^r \sigma_j^{r*}) \rangle \\ &= \Gamma^{(r)}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, T) \end{aligned} \quad (1-14)$$

donde la segunda igualdad es válida para un sistema infinito (invariancia traslacional). En una fase ordenada

$$\Gamma^{(r)}(\infty, T) = \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Gamma(|\vec{r}|, T) \quad (1-15)$$

debe existir y ser distinta de cero al menos para algún valor de "r". Es particularmente importante el comportamiento de la función de correlación en la región crítica (T próximo a T_c).

Usualmente se define ^[1] la longitud de correlación $\xi(T)$ como

$$\Gamma^{(r)}(|\vec{r}|, T) - \Gamma^{(r)}(\infty, T) \approx \exp[-|\vec{r}|/\xi(T)] \quad (1-16)$$

para $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ y $T > T_c$. La longitud de correlación mide la distancia sobre la cual los spines están significativamente correlacionados. Como se verá en la siguiente sección ξ tiene un comportamiento crítico en T_c .

1 - 4 . Exponentes críticos

En primer lugar, siendo T_c la temperatura crítica, definamos la temperatura reducida

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (1 - 17)$$

de tal modo que $T > T_c$ ($< T_c$) $\Rightarrow t > 0$ (< 0).-

Luego se define el exponente crítico de una magnitud termodinámica f como:

$$x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln f(t)}{\ln t} \quad (1 - 18)$$

Como una abreviatura de (1 - 18) se suele escribir ^[1]

$$f(t) \sim t^x \quad (1 - 19a)$$

la cual no necesariamente supone $f(t) = A t^x$ sino

$$f(t) = A t^x (1 + B t^\gamma + \dots) \quad (1 - 19b)$$

Recordemos que

$x < 0$ divergencia infinita en el punto crítico,

$x > 0$ $f(t) \rightarrow 0$ en el punto crítico. Si $f(|t|)$ como veremos más abajo, aparece un punto cuspidal;

$x = 0$ i) Divergencia logarítmica

ii) punto cuspidal

iii) función perfectamente analítica, a lo sumo con una discontinuidad de salto.-

Para decidir en este último caso, se define otro parámetro

$$x_s = j + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln |f^{(j)}(t)|}{\ln t}$$

donde "j" es el menor entero tal que diverge para $t \rightarrow 0$

$$f^{(j)}(t) \equiv \frac{\partial^j f}{\partial t^j}$$

Los exponentes críticos de las principales magnitudes termodinámicas (las cuales serán ocasionalmente designadas con términos propios de los sistemas magnéticos) se definen del siguiente modo:

i) exponente α del calor específico

Sobre la isocora crítica: $H = 0$; $m = 0$

$$C \sim \begin{cases} t^{-\alpha} & t \rightarrow 0^+ \\ (-t)^{-\alpha'} & t \rightarrow 0^- \end{cases} \quad (1 - 20a)$$

donde el calor específico C ha sido definido en ec. (1 - 10) .

ii) exponente β del parámetro de orden

A lo largo de la curva de coexistencia o de transición de fases

$$m \sim (-t)^\beta \quad t \rightarrow 0^- \quad (1 - 21)$$

donde m es alguna de las $m^{(r)}$ definidas en la sección anterior o una combinación de las mismas como se verá en el capítulo siguiente (ver también el Cap. 4).

iii) exponente δ de la susceptibilidad o función de respuesta

A lo largo de la isocora crítica

$$\chi \sim t^{-\delta} \quad t \rightarrow 0^+ \quad (1 - 22a)$$

según la línea de transición de fases

$$\chi \sim (-t)^{-\delta'} \quad t \rightarrow 0^- \quad (1 - 22b)$$

donde; si u_H es una combinación de las componentes $H^{(r)}$ como se indicará en la secc. 2-5, resulta:

$$\chi = \beta \left(\frac{\partial M}{\partial \mu_H} \right)_T = -\beta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu_H^2} \right)_T \quad (1 - 22c)$$

$$(M = N \cdot m)$$

iv) exponente δ de la ecuación de estado
sobre la isoterma crítica: $T = T_c$, $H^{(r)} = 0$,

$$M \sim \mu_H^{1/\delta} \quad (1 - 23)$$

v) exponente ν de la longitud de correlación
según la isocora crítica

$$\xi \sim \begin{cases} t^{-\nu} & t \rightarrow 0^+ \\ (-t)^{-\nu'} & t \rightarrow 0^- \end{cases} \quad (1 - 24)$$

vi) exponente η de la función de correlación

En el punto crítico:

$$\Gamma(r) \sim r^{-d+2-\eta} \quad (1 - 25)$$

donde $\Gamma(r)$ es alguna de las componentes de la función de correlación definida en (1 - 14).

vii) exponente Δ
isocora crítica

$$F^{(4)}(r) \equiv \frac{\partial^4 F}{\partial \mu_H^4} \approx \frac{\partial^2 \chi_T}{\partial \mu_H^2} \sim t^{-\delta-2\Delta} \quad t \rightarrow 0^+ \quad (1 - 26)$$

línea de transición de fases

$$F^{(4)}(r) \sim t^{-\delta'-2\Delta'} \quad t \rightarrow 0^- \quad (1 - 26b)$$

1 - 5 . Relaciones entre exponentes críticos

Existe un conjunto de relaciones entre los exponentes críticos (Fisher, 1967) que reduce a dos el número de exponentes independientes. Podemos adoptar la siguiente clasificación de estas relaciones según las condiciones en que han sido definidos los exponentes (Baker, 1980):

i) relación entre exponentes definidos para $t < 0$

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' = 2 \quad (1 - 27a)$$

ii) relaciones que involucran a exponentes definidos sobre la isoterma crítica y a exponentes definidos para

$$t < 0 \quad \alpha' + \beta(1 + \delta) = 2 \quad (1 - 27b)$$

$$t > 0 \quad \delta = \frac{\Delta}{\Delta + \gamma} \quad (1 - 27c)$$

iii) relaciones que contienen exponentes críticos de las dos regiones de temperaturas

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' & \gamma &= \gamma' \\ \Delta &= \Delta' \end{aligned} \quad (1 - 27d)$$

iv) relaciones entre los exponentes de las correlaciones

$$\begin{aligned} \gamma &= (2 - \nu) \nu \\ \gamma' &= (2 - \nu') \nu' \end{aligned} \quad (1 - 27e)$$

v) relación que involucra a la dimensión espacial o hiper-
escaleo

$$d\nu = 2 - \alpha \quad (1 - 27f)$$

la cual, combinada con las anteriores relaciones, puede

tomar las siguientes formas:

$$2 - \nu = d \frac{(\delta - 1)}{\delta + 1} \quad (1 - 28a)$$

$$2 \Delta = \alpha \nu + \gamma \quad (1 - 28b)$$

Existe un conjunto de argumentos de plausibilidad para justificar estas relaciones pero ellos no pueden constituirse en una derivación rigurosa de las mismas. (Barber, 1977). Desde el punto de vista numérico existe evidencia acerca de la validez de dichas relaciones excepto sobre la relación de hiperescaleo (Baker, 1982). La mayor parte de las relaciones entre exponentes críticos han sido probadas rigurosamente pero como desigualdades (Stanley, 1971).

La validez de las relaciones (1 - 27) tiene gran importancia teórica porque, como se verá en la sección 2 - 4, dichas relaciones aparecen como consecuencia necesaria de las hipótesis que dan lugar al grupo de renormalización, en particular de la hipótesis de "escaleo" (Widom, 1965).-

Notas al Capítulo 1

1 - Más formalmente, se puede definir la longitud de correlación como (Wilson y Kogut, 1975)

$$\xi^2 = \frac{\int d\vec{r} |\vec{r}|^2 \Gamma(|\vec{r}|)}{\int d\vec{r} \Gamma(|\vec{r}|)}$$

donde se ha adoptado una versión continuizada del vector posición. Manteniendo la estructura discreta del retículo, la definición equivalente a la anterior es la siguiente (Baker, 1982) :

$$\xi^2 = \frac{\sum_{\vec{r}} \chi^2 (\langle \text{Re } \sigma_0 \text{Re } \sigma_{\vec{r}} \rangle - \langle \text{Re } \sigma_0 \rangle^2)}{\chi_1}$$

donde χ_1 es la susceptibilidad por spin introducida en la sección 1 - 2. En ambas expresiones la integración o la suma se extiende sobre todo el retículo.

2 - En todo este trabajo distinguiremos el símbolo \sim definido en el texto, del símbolo:

$$f(t) \cong t^x$$

el cual significa:

$$f(t) = A t^x$$

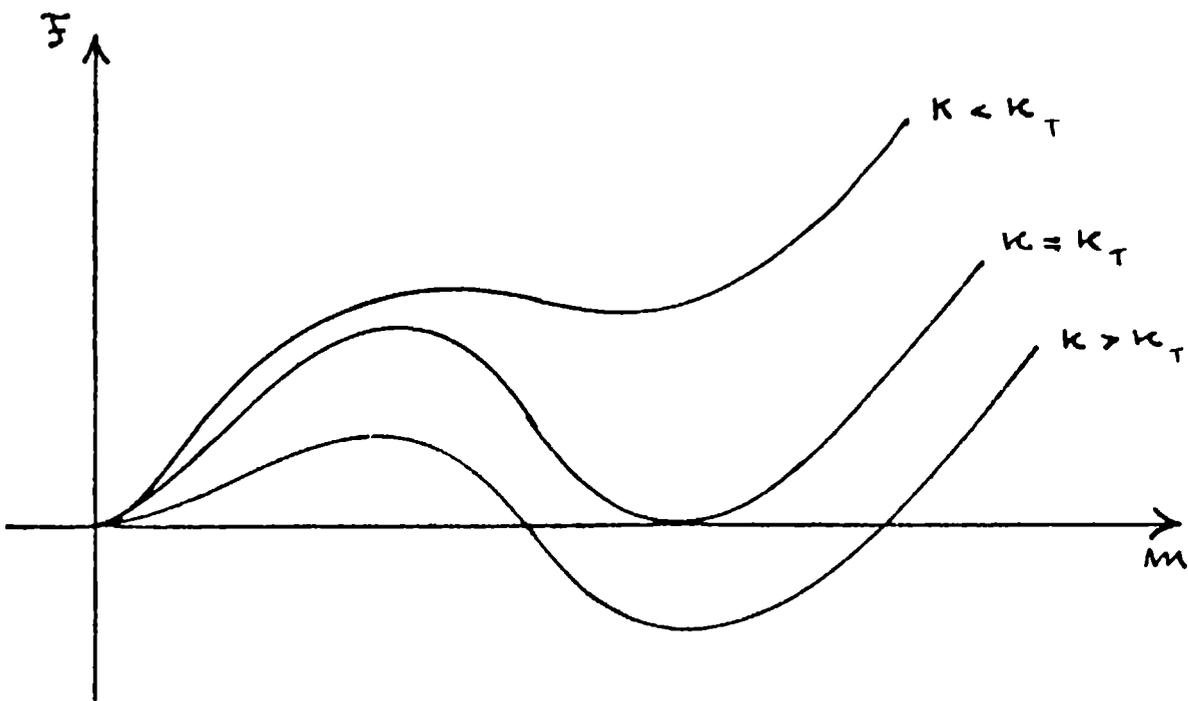


Fig. 1-la Gráficas de la energía libre versus la magnetización para varios valores de la cte. de interacción indicando una transición de primera especie.

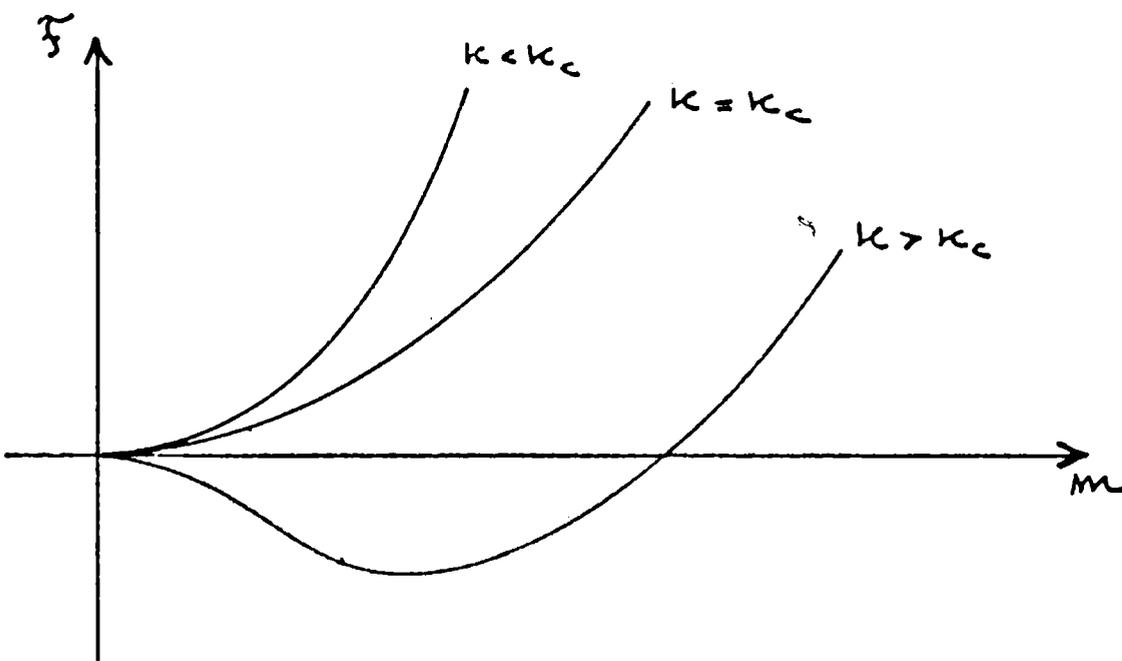


Fig. 1-lb : Gráficas de la energía libre versus la magnetización para varios valores de la cte. de interacción indicando una transición de segunda especie. En el punto crítico $K = K_c$ $\frac{\partial^2 F}{\partial m^2} = 0$

CAPITULO 2

GRUPO DE RENORMALIZACION

2 - 1 . Idea básica de la transformación GR

La transformación grupo de renormalización surge como respuesta directa a las características de los fenómenos críticos señaladas en secc. 1 - 1. En síntesis, en dicha sección se había establecido que los fenómenos críticos están caracterizados por una longitud de correlación infinita la cual indica la invariancia de escala de dichos fenómenos. Luego, el punto crítico aparecería como un punto invariante o "fijo" en una transformación que implique un cambio de escala. La transformación GR tiene esencialmente esta característica.

La idea del GR es básicamente la de reemplazar, en cada paso de transformación, el número original de grados de libertad por un conjunto menor de grados de libertad efectivos de tal manera que las propiedades físicas del sistema permanezcan invariantes. Esta condición, expresada como invariancia de la función de partición, conduce a una transformación de las constantes de interacción.

Con esta idea se persiguen simultáneamente dos objetivos. El primero, más inmediato, es el de poder hacer manejables desde el punto de vista del cálculo a sistemas con un enorme número de grados de libertad. El segundo objetivo es el de explicar cómo surgen los aspectos cualitativos del comportamiento cooperativo de dichos grados de libertad.

Considerando la formulación de los modelos de spin sobre retículos, podemos definir una transformación GR como el resultado de dos operaciones:

i) un cambio de escala: si L_0 es la separación entre spines en el retículo original, en el nuevo sistema tendremos una separación:

$$L'_0 = b L_0 \quad (2 - 1)$$

donde $b > 1$ es el factor de reescaleo.-

ii) un cambio en el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_e \rightarrow \mathcal{H}_e' = R^b \mathcal{H}_e \quad (2-2a)$$

al que alternativamente podemos describir como un cambio de los parámetros de interacción

$$\vec{R} \longrightarrow \vec{R}' = R^b [\vec{R}] \quad (2-2b)$$

Esta última relación se denomina relación de recursión y en ella, la función $R^b[\vec{R}]$ es, a diferencia de las magnitudes termodinámicas, una función regular aún en el punto crítico $K_c^{[1]}$.

Al nuevo hamiltoniano \mathcal{H}_e' le corresponde un nuevo factor de Boltzmann $P'[\sigma']$, según ec. (1 - 1) donde σ' son las variables de spin del sistema transformado. Luego, habrá una transformación de los valores medios de las magnitudes calculados con el anterior factor de Boltzmann $P[\sigma]$ según ec. (1 - 8) a los valores medios de las magnitudes transformadas $A'[\sigma']$ calculados con $P'[\sigma']$. Se deduce que la relación linealizada entre dichos valores medios debe reproducir la relación de reescaleo (1 - 28) en sentido inverso de modo que la transformación resultante (i) e (ii) deje invariantes a las magnitudes termodinámicas.-

Para que la transformación (2-2) forme un grupo (más precisamente un subgrupo ya que no está definida la transformación inversa) debe verificarse

$$R^b R^{b'} \mathcal{H}_e = R^{bb'} \mathcal{H}_e$$

Como con toda transformación es necesario analizar los puntos que permanecen invariantes ante tal transformación. Estos puntos invariantes son denominados puntos fijos y por lo previamente dicho

$$\vec{R}^* = R^b [\vec{R}^*] \quad (2-3)$$

Supongamos que un sistema tiene un punto fijo. Una forma heurística de mostrar la relación entre tal punto fijo y el punto crítico es la siguiente. Observemos que ante la transformación de escala (2-3) la longitud de correlación en unidades del espaciamento de la red escalea como:

$$\xi'[\vec{k}'] = b^{-1} \xi[\vec{k}] \quad (2-4)$$

Ahora, en el punto crítico \vec{k}_c , $\xi[\vec{k}_c]$ es infinita y, por (2-4), $\xi'[\vec{k}']$, donde $\vec{k}' = R^b[\vec{k}_c]$, es también infinita. Luego, por la supuesta regularidad de R^b , \vec{k}_c debe ser solución de (2-3). Es decir, el punto crítico debe ser un punto fijo. La inversa, como se verá más adelante, no es cierta.

En general, debido a la existencia de parámetros "irrelevantes" (ver su definición en la sección 2 - 3), los sistemas con $\xi = \infty$ generan una superficie en el espacio de las interacciones llamada superficie crítica o de criticalidad. Por (2-4) se ve que todo punto perteneciente a la superficie de criticalidad genera por sucesivas aplicaciones de (2-2) un conjunto de puntos - una trayectoria - perteneciente a la superficie de criticalidad de tal modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{k}^{(n)} = \vec{k}^*$$

Por el contrario, si el punto donde comienza la trayectoria no pertenece a dicha superficie, ξ será finita y por (2-4) $\xi' < \xi$, es decir que en una longitud de correlación existe un número menor de grados de libertad con lo cual se estará más lejos de la situación crítica.

En las secciones 2-3 y 2-4 se brindarán mayores precisiones sobre el comportamiento crítico. Previamente, en la sección 2-2, se mencionarán las dos posibles formas de realizar la transformación GR, con el objeto de concentrar el estudio en una de dichas formas, la que se realiza en el espacio real.-

2 - 2 . Dos formas de realizar el programa GR - Referencias básicas

Como adelantamos en la Introducción, la primera forma práctica de realizar la idea del GR, debida a Wilson (1971 a, b), se formula en el espacio de los momentos. En este esquema, se parte de un hamiltoniano "de graneado grueso" en el cual se han eliminado los detalles irrelevantes al comportamiento crítico universal. Este hamiltoniano es función de las transformadas de Fourier de las variables de spin $\vec{\sigma}(\vec{k})$. La reducción de los grados de libertad se realiza eliminando la parte de $\vec{\sigma}(\vec{k})$ más rápidamente fluctuantes. Esto se logra integrando los momentos $|\vec{k}|$ mayores que algún valor preestablecido Δ . La transformación G de R se completa con un reescaleo de $\vec{\sigma}(\vec{k})$ y una redefinición de las constantes de interacción pero no es nuestro objetivo discutir este formalismo.-

La segunda forma de llevar a cabo la idea de la transformación RG consiste en trabajar directamente con el hamiltoniano microscópico en el espacio de las posiciones de los spins en el retículo. Algunas técnicas dentro de este formalismo serán desarrolladas a partir del capítulo siguiente. En esta sección solamente queremos mencionar ciertas ventajas o desventajas relativas entre ambos esquemas las cuales hacen que debamos considerarlos como complementarios.-

Algunas ventajas de trabajar en el espacio de los momentos son las siguientes: (Wallace y Zia, 1978):

- i) fácil identificación de la dimensión crítica superior d_s , es decir, la dimensión a partir de la cual la aproximación del campo medio es exacta.
- ii) capacidad de continuación analítica en la dimensión y de generar expansiones en $\epsilon = d - d_s$, las cuales conducen a valores extraordinariamente precisos de los exponentes críticos

gracias al aprovechamiento de técnicas desarrolladas en teoría de campos.

iii) analiticidad en otros parámetros de la teoría como, por ejemplo, en el número de componentes de la variable de spin.

Las técnicas del GR en el Espacio Real (GRER) tienen las siguientes ventajas (Wallace y Zia, 1978):

- i) simplicidad conceptual y técnica.
- ii) posibilidad de realización en cualquier dimensión espacial en particular para $d = 2$ donde se dispone de resultados exactos para establecer comparaciones.
- iii) capacidad de calcular cantidades no universales como la temperatura crítica, o en general diagramas de fases. Estos aspectos son importantes para el estudio de las transiciones de fases orden - desorden (ver Cap. 4) (Schick, 1982).
- iv) posibilidad de incluir distribuciones aleatorias de las constantes de interacción con el objeto de estudiar sistemas diluidos o frustrados (ver secc. 3 - 5).
- v) capacidad de describir transiciones de fases de primer orden, lo cual se discutirá en secc. 2 - 5.

El inconveniente principal de las técnicas GRER es la carencia de un parámetro natural que justifique los truncamientos que se deben efectuar necesariamente para implementar tales técnicas debido a la proliferación de interacciones (ver Cap. 3) (Burkhardt y van Leeuwen, 1982). Consecuentemente no está claro como mejorar sistemáticamente la mayoría de las transformaciones aproximadas con el objeto de estudiar su convergencia (ibídem).

Otra desventaja relativa, esto es, la posible existencia de singularidades en las relaciones de recursión obtenidas mediante transformaciones GRER, es mencionada en la Nota 1.

Si bien el formalismo general que desarrollaremos en las siguientes secciones de este capítulo tiene casi en su totalidad validez para ambas formulaciones de la teoría GR queremos indicar algunas de las más importantes fuentes bibliográficas dedicadas a las técnicas en el espacio de los momentos.

Por orden cronológico ellas son (las referencias completas se dan al final de esta Tesis):

- Ma, S. K. (1973)
- Wilson K. G. y J. Kogut (1975)
- Domb C. y M. S. Green - editores (1976), - varios artículos, entre ellos:
 - Brezin E., J. C. Le Guillou y J. Zinn Justin
- Ma S. k. (1976)
- Barber M. N. (1977)
- Brezin E. y J. Zinn Justin (1980)

2 - 3 . Formalismo general

En esta sección desarrollaremos el formalismo general de la transformación sugerida en la primera sección de este capítulo.-

Trabajaremos directamente en el espacio real, en el cual tenemos definido al sistema mediante su función de partición

$$Z [K_a] = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H} [K_a; \sigma]) \quad (2 - 5)$$

donde el cambio de notación respecto a la usada en (1-6) tiene de a hacer más claros los conceptos. La transformación GR conduce a un nuevo sistema de spines $\{\sigma'_i\}$ que poseen la misma dimensionalidad que los spines originales y están ubicados en una nueva red de N' sitios con la misma dimensión espacial que la red original de N sitios. Este nuevo sistema de spines interactúa con un hamiltoniano que posee las mismas simetrías que el hamiltoniano de partida pero con constantes de acoplamiento \bar{K}' de distinta magnitud que las originales \bar{K} .-

En síntesis, luego de la transformación GR tendremos

$$Z' [K'_a] = C \sum_{\{\sigma'_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H} [K'_a; \sigma']) \quad (2 - 6)$$

donde C es una constante respecto de las configuraciones de los spines (pero depende de las K_a) que mantiene la normalización de la función de partición y tal que:

$$Z [K_a] = Z' [K'_a] \quad (2 - 7)$$

o bien si definimos a las energías libres:

$$F = - \ln Z \quad (2 - 8a)$$

$$F' = - \ln \left\{ \sum_{\{\sigma'_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H} [K'_a; \sigma']) \right\} \quad (2 - 8b)$$

resulta

$$F[K_a] = G[K_a] + F'[K'_a] \quad (2 - 9)$$

donde $G = \ln C^{[2]}$

La relación (2 - 9) o la anterior (2 - 7) puede ser considerada como una transformación de los parámetros K_a a los K'_a es decir

$$K'_a = R_a(\{K_b\}) = R_a[K] \quad (2 - 10)$$

lo cual se denomina relación de recursión.-

Antes de continuar con el análisis de (2 - 10) volvamos a (2 - 9). En el límite termodinámico $N, N' \rightarrow \infty$, con $N/N' = b^{-d}$ donde b es el ya definido factor de reescalado, se supone que:

$$F[K_a] = N f[K_a] \quad F'[K'_a] = N' f[K'_a] \quad (2 - 11a)$$

donde f es la misma función en ambos casos. Además en el límite termodinámico, G también aparece como:

$$G[K_a] = N g[K_a] \quad (2 - 11b)$$

Introduciendo las relaciones (2-11) en (2 - 9) se obtiene la relación de renormalización básica:

$$f[K_a] = g[K_a] + b^{-d} f[K'_a] \quad (2 - 12)$$

En este momento se efectúa la suposición esencial de la teoría GR de que las funciones g y K'_a sean funciones regulares de su argumento K_a aún en el punto crítico. Luego la estrategia del método GR consiste en extraer las singularidades de la energía libre por spin $f[K_a]$ a partir de las funciones regulares $g[K_a]$ y $R_a[K_a]$. -

Un punto fijo K_a de la relación de recursión(2-10) es tal que

$$K_a^* = R_a^b[K^*] \quad (2 - 13)$$

Supondremos (y esto se verifica para los modelos tratados en esta Tesis) que existe un conjunto de puntos fijos aislados. Estos puntos fijos pueden pertenecer a tres clases: a) $K_a = 0$ para todo a , triviales; b) algún K_a infinito; c) algún K_a finito no nulo. Los puntos a) y b) caracterizan las fases del modelo (ver por ejemplo, secc 4-3). Entre los puntos c) están los puntos críticos.

Debido a la supuesta analiticidad de $R_a[\bar{K}]$ es posible linealizar la relación de recursión alrededor del punto fijo, resultando:

$$K'_a - K_a^* = \sum_b T_{ab}^* (K_b - K_b^*) \quad (2 - 14a)$$

donde

$$T_{ab}^* \equiv \left(\frac{\partial K_a}{\partial K_b} \right)_{\bar{K}^*} \quad (2 - 14b)$$

es una matriz real, en general no simétrica. Sea T_{ab}^* diagonalizable y sean λ_i sus autovalores con autovectores izquierdos φ_a^i definidos por

$$\sum_a \varphi_a^i T_{ab}^* = \lambda_i \varphi_b^i$$

Si se construyen coordenadas "normales" u_i como

$$u_i = \sum_a \varphi_a^i (K_a - K_a^*) \quad (2 - 15)$$

se obtienen las ecuaciones desacopladas

$$u_i' \equiv u_i [K'_a] = \lambda_i u_i [K_a] \quad (2 - 16)$$

Esta última relación sugiere que el conjunto $\{u_i(\bar{K})\}$ puede ser considerado como las coordenadas curvilíneas adaptadas a la transformación. Notar que estos u_i , a los que de aquí en adelante denominaremos "campos de escaleo", están determinados a menos de un factor multiplicativo, lo cual es característico de los autovectores.

En este nuevo conjunto de coordenadas, la relación de re-normalización básica puede ser reescrita como

$$f(u_1, u_2, \dots) = g(u_1, u_2, \dots) + b^{-\alpha} f(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots) \quad (2 - 17)$$

La suposición básica es que los campos de escaleo sean funciones regulares de los parámetros de interacción y que $g[u_i]$ sea función regular de los campos de escaleo.-

Observar que la reiteración de la transformación (2 - 16) conduce a

$$u_i [K_2^{(n)}] = \lambda_i^n u_i [K_2] \quad (2 - 18)$$

por lo cual es importante clasificar a los campos u_i en relevantes o irrelevantes según escaleen con $\lambda_i > 1$ o < 1 respectivamente. Si $\lambda_i = 1$ el campo se denomina marginal. Bajo repetición de la transformación (2-16) los campos relevantes aumentan con lo cual de (2 - 15) se ve que \bar{K} se aleja de \bar{K}^* , es decir, indican una dirección de inestabilidad. Por el contrario un campo irrelevante disminuye indicando una dirección de estabilidad según la cual \bar{K} se aproxima a \bar{K}^* . Luego, los autovectores irrelevantes correspondientes a un punto fijo determinado generan un subespacio en el espacio de los parámetros llamado dominio de atracción de dicho punto fijo o superficie de criticalidad. Está claro que el dominio de atracción está definido por:

$$u_1 = u_2 = \dots = u_m = 0$$

donde u_1, \dots, u_m son los campos relevantes. Si el número de campos de escaleo es n , la dimensión de dicho subespacio será $(n - m)$. El punto fijo está determinado por la anulación de todos los campos de escaleo. En la figura (2 - 1) se mues-

tra el espacio de un modelo de tres ctes. de interacción K_1 , K_2 , K_3 con dos campos relevantes que generan una superficie de criticalidad correspondiente a un punto fijo no trivial. El modelo Z (4) discutido en capítulos 4, 7 y 8 también presenta una interesante configuración de puntos fijos y flujo de trayectorias.-

La identificación de superficie de criticalidad con dominio de atracción o de estabilidad surge de la identificación del punto crítico con el punto fijo no trivial juntamente con el significado físico de la transformación GR, aspectos que han sido discutidos en la primera sección de este capítulo.-

Finalmente, es importante como se verá en la sección siguiente, clasificar a los campos de escaleo sobre la base de la simetría. Como se vió en el capítulo anterior el hamiltoniano $\mathcal{H}[\sigma]$ consta de una parte simétrica (\mathcal{H}^S), es decir invariante frente a una rotación de todos los spines y de una parte que rompe dicha simetría (\mathcal{H}^R).-

El hamiltoniano renormalizado $\mathcal{H}[\bar{K}', \sigma']$ también tendrá una parte \mathcal{H}'^S y una parte \mathcal{H}'^R . Supongamos que la transformación GR es tal que a una rotación de los spines σ_i le corresponda una idéntica rotación de los spines σ'_i . Luego frente a una rotación, ambos $\mathcal{H}^S[\bar{K}, \sigma]$ y $\mathcal{H}^S[\bar{K}', \sigma']$ permanecen invariantes y, $\mathcal{H}^R[\bar{K}, \sigma]$ y $\mathcal{H}^R[\bar{K}', \sigma']$ varían.-

Luego es evidente que $\bar{K}'_s = \bar{K}'_s[\bar{K}_s]$ y no de \bar{K}_R . Por supuesto no se puede afirmar algo semejante respecto a $\bar{K}_R \leftrightarrow \bar{K}'_R$. Si el punto fijo pertenece al subespacio de las interacciones \bar{K}_s es decir $\bar{K}'_R = 0$ lo cual se cumple en los modelos que son considerados también se debe verificar que en las inmediaciones de este punto fijo, $\bar{K}'_R = \bar{K}'_R[\bar{K}_R]$. Esto conduce a una división de la matriz T_{ab}^* en una parte "simétrica" T_{s_1, s_2}^* y una parte de "ruptura de simetría" T_{R_1, R_2}^* definidas mediante las relaciones:

$$K'_{s_1} - K^*_{s_1} = \sum_{s_2} T^*_{s_1 s_2} (K_{s_2} - K^*_{s_2}) \quad (2 - 19a)$$

$$K'_{R_1} - K^*_{R_1} = \sum_{R_2} T^*_{R_1 R_2} (K_{R_2} - K^*_{R_2}) \quad (2 - 19b)$$

con la consecuente división de autovectores y autovalores.-

2 - 4 . Cálculo de los exponentes críticos y de la energía libre.

Puesto que $g(u_1, u_2, \dots)$ es una función regular, la parte singular de la relación de renormalización básica (2-17) resulta:

$$f_{\text{sing}}(b^{y_1} u_1, b^{y_2} u_2, \dots) = b^d f_{\text{sing}}(u_1, u_2, \dots) \quad (2-20)$$

donde ciertas consideraciones físicas (ver por ej. Niemeijer y van Leeuwen, 1976) determinan que solo los campos relevantes sean considerados (finitud de la energía libre) y que (Wegner 1972)

$$\lambda_i = b^{y_i} \quad (2-21)$$

(independencia de los exponentes críticos del factor de reescalado b).-

Para los sistemas magnéticos en condiciones de máxima universalidad solo están implicados dos campos de escaleo relevantes u_T (relacionado con la temperatura) y u_H (relacionado con el campo magnético) cuyos autovalores son respectivamente $\lambda_T (= b^{y_T})$ y $\lambda_H (= b^{y_H})$

Volvamos a considerar un punto fijo perteneciente al subespacio $\{K_S\}$. Un cambio de temperatura es un cambio en la magnitud de todas las constantes de interacción K_a . En particular una variación de temperatura en el punto fijo mantiene al hamiltoniano en el subespacio $\{K^S\}$ con lo cual podemos considerar la temperatura acoplada a las interacciones simétricas.-

Luego el campo u_T debe buscarse como autovector de T_{S_1, S_2}^* . Si este sector de la matriz de linealización posee varios autovalores relevantes, es decir:

$$\lambda_1^s > \lambda_2^s > \dots > 1$$

lógicamente se debe identificar λ_T con λ_1^s .-

Por el contrario, la introducción de un campo magnético produce una ruptura de simetría, por lo cual el autovector u_H debe buscarse en la parte T_{R_1, R_2}^* de la matriz de linealización. Aquí también vale el comentario anterior respecto al caso de existencia de varios autovalores relevantes.-

En general, la argumentación anterior es válida tanto para la simetría completa del hamiltoniano como para una simetría residual, es decir la simetría que aún posee el hamiltoniano después de una ruptura parcial de simetría (p. ej. algún $K = 0$). Esto se ve claramente en el análisis del modelo Z (4), por ej. caps. 4 y 8.-

Para estos dos campos relevantes, (2 - 20) se puede reescribir como (Widom 1965 a, b):

$$f_{\text{sing}}(b^{\gamma_T} u_T, b^{\gamma_H} u_H) = b^\alpha f_{\text{sing}}(u_T, u_H) \quad (2 - 22)$$

cuyas posibles soluciones son:

$$f_{\text{sing}}(t, H) \cong |t|^{\alpha/\gamma_H} f_1(H/t^{\gamma_H/\gamma_T}) \quad (2 - 23a)$$

$$f_{\text{sing}}(t, H) \cong |H|^{\alpha/\gamma_H} f_2(t/H^{\gamma_T/\gamma_H}) \quad (2 - 23b)$$

La relación entre los exponentes γ_T e γ_H por una parte y los exponentes críticos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ por otra se establece a partir de (2 - 23) y de las definiciones de las magnitudes termodinámicas involucradas dadas en el capítulo 1.- Tomemos el calor específico. De ec. (1 - 20) y (2 - 23a) resulta:

$$c_H \cong - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \sim |t|^{\frac{\alpha}{\gamma_T} - 2}$$

luego

$$\alpha = \alpha' = 2 - \frac{\alpha}{\gamma_T} \quad (2 - 24a)$$

Analogamente para el coeficiente β , teniendo en cuenta (1 - 11) (1 - 21) y (2 - 23a) se obtiene:

$$\beta = \frac{\alpha - \gamma_H}{\gamma_T} \quad (2 - 24b)$$

para el coeficiente γ , de (1 - 22) y (2 - 23a)

$$\gamma = \gamma' = \frac{2\gamma_H - \alpha}{\gamma_T} \quad (2 - 24c)$$

y para el coeficiente δ , de (1 - 11), (1 - 23) y (2 - 23b):

$$\delta = \frac{\gamma_H}{\alpha - \gamma_H} \quad (2 - 24d)$$

Observar que las relaciones (2 - 24a/d) satisfacen automáticamente las relaciones de escaleo e hiperescaleo (1 - 27e), (1 - 27f). En síntesis estas relaciones, en la teoría del GR se derivan de la relación (2 - 22).-

La inclusión de esta derivación se justifica por cuanto en el capítulo siguiente se mencionará una formulación en la que están involucrados sistemas de tamaño finito (ver secc. 3-4).-

Finalmente incluimos el cálculo de la energía libre que utilizaremos en el capítulo 7. Siguiendo a Niemeijer - van Leeuwen (1976) y Wallace - Zia (1978) consideramos un solo campo de escaleo relevante u perteneciente al subespacio \mathcal{H}^s . La generalización a cualquier número de campos de escaleo es sumamente directa. La ecuación (2 - 17) toma la forma

$$f(u) = g(u) + b^{-\alpha} f(\lambda u) \quad (2 - 25)$$

la cual iterada n veces conduce a

$$f(u) = \sum_{j=0}^{n-1} b^{-j\alpha} g(\lambda^j u) + b^{-n\alpha} f(\lambda^n u) \quad (2 - 26)$$

Consideremos el siguiente comportamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{-n\alpha} f(\lambda^n u) = 0 \quad (2 - 27)$$

Esta condición está basada en la suposición de que la energía libre se comporta suficientemente bien para valores grandes de los campos de modo no pueda compensar la potencia $b^{-n\alpha}$. - Entonces (2 - 26) se reduce a:

$$f(u) = \sum_{j=0}^{\infty} b^{-j\alpha} g(\lambda^j u) \quad (2 - 28)$$

Para un número arbitrario de campos de escaleo, la condición (2 - 27) se generaliza como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{-nd} f(\lambda_1^n u_1, \lambda_2^n u_2, \dots) = 0 \quad (2 - 29)$$

y la ec. (2 - 28) como:

$$f(u_1, u_2, \dots) = \sum_{\delta=0}^{\infty} b^{-\delta d} g(\lambda_1^\delta u_1, \lambda_2^\delta u_2, \dots) \quad (2 - 30)$$

Esto es todo lo que necesitamos para el capítulo 7. Simplemente por completitud, y volviendo al caso de un solo campo u , se indicará que tanto la parte regular como la parte singular de la energía libre f pueden ser calculadas a partir de la función g . En efecto, como $g(u)$ es una función regular,

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n u^n \quad (2 - 31)$$

Luego, la parte regular de f se expresa como:

$$f_{reg}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u^n \quad (2 - 32)$$

donde

$$f_n = \frac{g_n}{1 - b^{-d} \lambda^n}$$

Si se divide (2 - 31) como

$$g(u) = \sum_{n=0}^{n_0-1} g_n u^n + g_{rest}(u)$$

donde n_0 es la primera potencia para la cual $\lambda^n > b^{d}$, se puede demostrar que

$$f_{sing}(u) = \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} b^{-\delta d} g_{rest}(\lambda^\delta u) \quad (2 - 33)$$

la cual satisface la ecuación de homogeneidad (2 - 22).

Dejamos aquí la teoría general de la transformación GR en el espacio real. Queda a un lado el análisis de la magnetización y de las funciones de correlación dentro del contexto del GRER, por cuanto estas magnitudes físicas no son relevantes en las técnicas que han sido estudiadas. No obstante, queremos señalar que el análisis de las funciones de correlación es formalmente importante debido a ciertos problemas que afectan a las funciones de peso lineales (ver secc. 3 - 2 y Nota 3 - 2).

Para los aspectos arriba señalados y que son soslayados en esta Tesis remitimos al lector a los trabajos de Niemeijer y van Leeuwen (1976) y Martín (Tesis, 1980).-

2 - 5 . Transiciones de fases de primera especie en la teoría del grupo de renormalización.-

En esta Tesis se estudian modelos que, como se verá en el capítulo 4, presentan en algunos casos transiciones de fases de primera especie o discontinuas. En general los métodos del GRER dan cuenta de estas transiciones pero omitiendo su carácter discontinuo, es decir, describiéndolas como de segunda especie. Así, esta descripción errónea permite calcular como de costumbre los "exponentes críticos" aunque éstos por supuesto tienen un significado puramente formal. Esto sucede por ejemplo en la aplicación al modelo de Potts de la técnica de Migdal-Kadanoff (Nienhuis et al, 1981) y de la técnica del "puente de Wheatstone" (Levy y Tsallis, 1981).-

Si bien en esta Tesis en general se pasará por alto el carácter de las transiciones se pretende a continuación mencionar algunas discusiones sobre este tema.-

Uno de los primeros intentos de detectar una transición de fase de primera especie dentro del contexto de la teoría del grupo de renormalización es el realizado por Nienhuis y Nauenberg (1975). En este trabajo se dan condiciones suficientes sobre los puntos fijos y los autovalores de la matriz de linealización para que generen un parámetro de orden discontinuo para temperaturas T por debajo de una temperatura crítica T_c .-

Siguiendo a estos autores, consideremos un hamiltoniano genérico del tipo analizado en secc. 1-2. Por simplicidad, supondremos que el parámetro de orden "m" tiene una sola componente. Frente a una transformación GR se presupone, en primer lugar, la existencia de un punto fijo K_a^* , correspondiente a $H = 0$ con un comportamiento crítico normal.-

Se supone luego que existe otro punto fijo K_a^{**} con $H = 0$ para $T < T_c$. Este punto fijo es un punto de discontinuidad si

i) Su autovalor λ_H^{**} asociado al campo externo H resulta igual a b^d es decir $\gamma_H^{**} = d$

ii) $\lim_{\kappa \rightarrow \kappa^{**}} \Delta m(\kappa) \neq 0$

donde $\Delta m(\kappa) = m_+(\kappa) - m_-(\kappa)$

$$m_{\pm}(\kappa) = \lim_{H \rightarrow 0^{\pm}} \left[- \frac{\partial f(\kappa, H)}{\partial H} \right]$$

El subsiguiente progreso en esta cuestión se da en el contexto de las técnicas Monte Carlo - grupo de renormalización. Blöte y Swendsen (1979) han señalado que para el modelo de Potts de 3 estados en $d = 3$ o 4 no se detecta un punto fijo de discontinuidad con las características arriba señaladas. Estos autores encuentran que la transición de fases es de primera especie describiéndola como un cruce de las energías libres de la fase metaestable y de la fase ordenada a la misma temperatura como se indicó en secc. 1.-

Por último Nienhuis et al (1979) han reforzado la idea de que las fallas de las técnicas GR en describir transiciones de fases discontinuas no son inherentes a la concepción del GR sino que surgen de una realización incompleta de dicha concepción. Consecuentemente han propuesto una nueva técnica GRER en la que se introducen vacancias mediante la cual han mostrado exitosamente la presencia de transiciones de fase de primera especie en el modelo de Potts.-

Notas al Capítulo 2

- 1 - Se ha señalado (Griffiths y Pearce, 1979) que para la mayor parte de las técnicas GRER esta suposición no es válida globalmente en todo el espacio de parámetros en el límite termodinámico. Esta peculiaridad debe ser considerada una desventaja de las técnicas en el espacio real ya que las fluctuaciones que dan lugar a las singularidades en las relaciones de recursión son eliminadas en la formulación en el espacio de los momentos. No obstante, para la mayoría de las técnicas del GRER más usadas no se han encontrado hasta ahora singularidades en la región crítica. (Burkhardt y van Leeuwen, 1982).

- 2 - La constante C , y por lo tanto g , pueden ser consideradas como provenientes de una interacción constante, es decir en la expresión del hamiltoniano (1 - 3), la interacción correspondiente a $r = 0$. No obstante, preferimos extraerla de la función de partición porque dicha constante juega un papel singular en la teoría como se verá más adelante. Por otra parte, su significado físico es bastante claro. Por ejemplo, en la transformación de bloque de spin representa la energía libre de cada bloque.

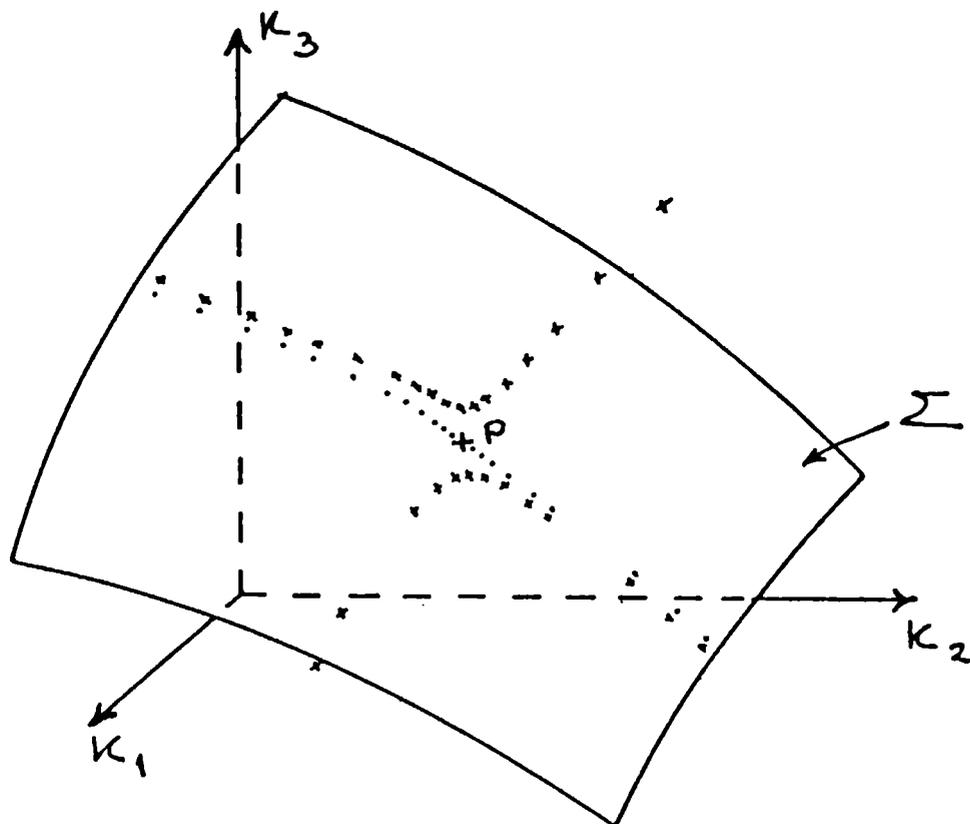


Fig. 2 - 1 La superficie Σ indicada es el dominio de atracción del punto fijo P . Con cruces se señalan trayectorias obtenidas a partir de puntos próximos a dicha superficie mediante la aplicación de sucesivas transformaciones GR. Tales trayectorias se acercan al punto fijo para luego alejarse de Σ . Con puntos se indican trayectorias que, comenzando en puntos pertenecientes a Σ , se mantienen sobre esta superficie y finalizan en el punto fijo.

CAPITULO 3

TECNICAS EN EL ESPACIO REAL

3 - 1 . El esquema de decimación^[1]

En este esquema la transformación GR se realiza dividiendo el retículo en un conjunto de spines $\{\mu_i\}$ que constituyen un retículo de la misma forma que el original (más adelante analizaremos la técnica de Tatsumi en la cual este requerimiento no se cumple sino indirectamente) y el conjunto complementario $\{\bar{\sigma}_i\}$. -

Por supuesto, el pasaje del retículo original al retículo de las variables μ significa un reescaleo en un factor b , con lo cual se satisface una de las condiciones que definen una transformación grupo de renormalización. El pasaje se realiza efectuando las sumas sobre los spines $\bar{\sigma}$. Algunas posibles elecciones de $\{\mu_i\}$ y $\{\bar{\sigma}_i\}$, para una red cuadrada, se muestran en la Fig. 3-1. -

Las técnicas pertenecientes a este esquema de decimación pueden ser descritas genericamente mediante el operador de decimación $T[\mu, \sigma]$ definido como:^[2]

$$T[\mu, \sigma] = \prod_i \delta(\mu_i - \sigma_i) \quad (3 - 1)$$

donde la productoria se extiende sobre todos los sitios de la red resultante. Luego, la transformación puede ser establecida como

$$\exp(-\beta \mathcal{H}'[\mu]) = \sum_{\{\sigma_i\}} T[\mu, \sigma] \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma]) \quad (3 - 2a)$$

$$= \sum_{\{\bar{\sigma}_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H}[\mu, \bar{\sigma}]) \quad (3 - 2b)$$

donde $\mathcal{H}'[\mu]$ es el hamiltoniano renormalizado (efectivo). -

Puesto que:

$$\sum_{\{\mu\}} T[\mu, \sigma] = 1 \quad (3 - 3)$$

se verifica automáticamente la segunda condición que define a una transformación GR a saber, la conservación de la función de partición, es decir:

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma]) = \sum_{\{\mu_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H}'[\mu]) \quad (3 - 4)$$

Imponiendo que \mathcal{H}' posea las mismas simetrías que \mathcal{H} , es decir que posea la misma forma, ec. (3 - 4) puede entonces ser considerada como una transformación de las constantes de interacción, es decir, puede ser reescrita como una relación de recursión:

$$K'_a = R_a(\bar{K}) \quad (3 - 5)$$

Uno de los principales inconvenientes del esquema de decimación, es que, a partir de un hamiltoniano con un conjunto finito de interacciones, después de un paso de transformación GR, se generan, en general, nuevas interacciones no contenidas en el hamiltoniano inicial. Estas interacciones espúreas, en el siguiente paso de transformación, generan nuevas interacciones y así sucesivamente. Puesto que este proceso debe ser repetido infinitas veces, el hamiltoniano efectivo, en general, estará constituido por infinitas interacciones no triviales independientes. La necesidad de un hamiltoniano con un número finito de interacciones, unidos a las dificultades de cálculo que conlleva el método exacto de decimación, conduce a la formulación de alguna aproximación. En el capítulo siguiente se estudiará una de las aproximaciones más usadas, la de Migdal - Kadanoff.-

Para finalizar esta sección indicaremos el origen de las aproximaciones usadas en algunos trabajos clásicos como el de Wilson (1975) y el de Kadanoff - Houghton (1975) para establecer posteriormente la diferencia con la naturaleza de la aproximación de Migdal - Kadanoff que puede ser concebida como el orden cero de la expansión de Martinelli - Parisi.-

En los trabajos antes mencionados, básicamente se tiene

en cuenta que en $T \rightarrow \infty$ el hamiltoniano $\mathcal{H}_0 = 0$ es un punto fijo por lo cual es razonable realizar una expansión alrededor de las constantes de interacción iguales a cero, es decir una expansión en alta temperatura. Mas concretamente, la idea es que el cortar las relaciones de recursión en determinado orden de las constantes de interacción implica considerar un espacio de interacciones también finito. Por ejemplo en el trabajo de Wilson (1975) donde para el modelo de Ising la renormalización se realiza según la fig. 3 - 1b, en el orden más bajo solamente deben ser retenidas la cte. K de vecinos próximos y la cte. L de vecinos próximos siguientes.-

Una forma en que se generan estas expansiones en alta temperatura se puede ver en el otro trabajo citado (Kadanoff y Houghton, 1975). Aquí se tienen en cuenta 17 interacciones que involucran conjuntos de hasta cinco spines. La expresión (3 - 2b) puede ser reescrita como:

$$e^{-\beta \mathcal{H}'[\mu]} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}_d[\sigma]} \frac{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}_{rest}[\sigma]} e^{-\beta \mathcal{H}_0[\sigma]}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}_0[\sigma]}}$$

$$= e^{-\beta \mathcal{H}'_0[\mu]} \langle \exp(-\beta \mathcal{H}_{rest}[\sigma]) \rangle_0 \quad (3 - 6)$$

donde $\mathcal{H}_0[\sigma]$ contiene las interacciones que pueden ser exactamente calculables. Para el modelo de Ising decimando según la fig. 3-1a estas interacciones son la constante y la de vecinos próximos. El $\mathcal{H}_{rest}[\sigma]$ contiene todas las restantes interacciones que se quieran incluir. Luego (3 - 6) conduce a:

$$\mathcal{H}'[\mu] = \mathcal{H}'_0[\mu] + \mathcal{H}'_1[\mu] \quad (3 - 7a)$$

donde

$$\mathcal{H}'_1[\mu] = \ln \langle \exp(-\beta \mathcal{H}_{rest}[\sigma]) \rangle_0 \quad (3 - 7b)$$

Desarrollando este último exponencial alrededor de $\beta = 0$

y después de efectuar la usual transformación de van der Waerden resulta para \mathcal{H}'_a un desarrollo en serie de potencias de $\tanh K_a$ cuyos coeficientes son los cumulantes de (3 - 7b).-

A partir de este punto es necesario pasar a un cálculo diagramático para determinar las relaciones de recursión, pero // esto ya excede los objetivos de esta exposición antes planteados.

Dentro de este tipo de técnicas mencionaremos por último la interesante variante debida a Tatsumi (1978), desarrollada para sistemas tridimensionales, especialmente con interacciones aleatorias, para las cuales los métodos originales de Miemeijer - van Leeuwen y de Kadanoff no dan resultados satisfactorios.-

En el método de Tatsumi la transformación de decimación R_{ij} conduce de un sistema i a un sistema j , por ejemplo de una red cúbica simple a una red cúbica centrada en el cuerpo o a una red cúbica centrada en las caras de tal modo que tras sucesivas transformaciones se recobra el sistema original. En la fig. 3 - 2 se indica el proceso que conduce de sc a bcc y viceversa. Para un proceso de dos etapas los parámetros renormalizados resultan:

$$K'_i = G_{ij}(K_i) = R_{ij}(R_{ji}(K_i)) \quad (3 - 8)$$

y para una transformación de tres pasos

$$K'_i = G_{ijk}(K_i) = R_{ik}(R_{kj}(R_{ji}(K_i))) \quad (3 - 9)$$

Si el sistema i y j tienen el mismo número de puntos fijos y un punto fijo no trivial, los puntos fijos no triviales están mutuamente relacionados por la ecuación:

$$K^*_i = R_{ij}(K^*_j) \quad (3 - 10)$$

Es fácil verificar que:

$$\lambda_{ij} = R'_{ij}(K^*_j) R'_{ji}(K^*_i) \quad (3 - 11)$$

donde las primas denotan la derivada parcial con respecto a las constantes de interacción. K_i . Como sabemos, el autovalor

térmico λ_{ij} está relacionado con el exponente térmico ν

$$\nu = \frac{1}{y_T} = \frac{\ln b}{\ln \lambda_{ij}} \quad (3 - 12)$$

donde y_T es el índice de escaleo térmico. Ecuación (3 - 11) nos indica que los exponentes críticos de dos sistemas i y j de la misma dimensionalidad son iguales, lo cual está de acuerdo con la hipótesis de universalidad. Para la transformación de tres pasos es necesario tener un poco de cuidado puesto que los puntos fijos no triviales (inestables), y por lo tanto los autovalores térmicos, dependen del orden en que se realizan las transformaciones. Lo que se puede afirmar es que tres sistemas tienen los mismos exponentes críticos para el mismo proceso cíclico de transformaciones.-

Se puede ver en un trabajo reciente (Benyousef - Boccara, 1983) una aplicación de este método al modelo de Ising con dilución y frustración en las ligaduras, en el cual podría aparecer una fase de vidrio de spin.-

3 - 2. El esquema de bloques de spines

En este esquema el reescalado de la red se realiza reemplazando un conjunto de spines conformando un bloque o celda en la red original por un único spin en la red transformada. Para una red dada existe una gran variedad de bloques o celdas que pueden ser elegidos y que tienen la propiedad de conservar las simetrías de la red original. Ejemplos para redes cuadrada y triangular se ilustran en figs. 3 - 3 y 3 - 4 respectivamente.-

Por otra parte los nuevos spines toman valores aleatoriamente sobre el mismo conjunto que los spines originales. Un cambio en este conjunto de valores conduciría, como discutimos en el capítulo 1 a una modificación del comportamiento crítico.-

Existen diversas formas de asignar un valor al nuevo spin (o spin - bloque) a partir de los spines originales que constituyen el bloque. La más sencilla adoptada originalmente por Niemeier - van Leeuwen (1974) para el modelo de Ising, es la regla del signo o regla de la mayoría formulada como

$$\mu = \text{sgn} \sum_{i \in B(\mu)} \sigma_i \quad (3-13) ,$$

donde $B(\mu)$ es el conjunto de sitios del bloque μ . Si el número de sitios del bloque es par se debe tomar una convención por ejemplo para un bloque cuadrado "desempata" el spin del vértice inferior izquierdo.-

El formalismo general de una transformación bloque de spines puede establecerse mediante la ecuación (3-2a) de la sección anterior donde $T[\mu, \sigma]$ conocida como "función de peso" debe satisfacer (3-3). También se impone:

$$T[\mu, \sigma] \geq 0 \quad (3-14)$$

para asegurar el carácter real del hamiltoniano efectivo $\mathcal{H}'[\mu]$. Cada forma de asignar un bloque - spin a partir de los spins iniciales, se traduce en una expresión particular de la función $T[\mu, \sigma]$.-

Para una variable de spin de Ising la forma más simple que puede tener la función de peso es

$$T[\mu, \sigma] = \prod_{i'} \frac{1}{2} (1 + \mu_{i'} t_{i'}[\sigma]) \quad (3-15)$$

donde i' designa los sitios de la red transformada y $t_{i'}$ indica la forma de vincular el spin - bloque con los spins originales.-

Tradicionalmente las transformaciones según (3-15) se dividen en lineales y no lineales.-

a) Transformaciones de bloque lineales, por ejemplo, para una red triangular fig. 3 - 4:

$$t_{i'}[\sigma] = p (\sigma_{i'}^{(1)} + \sigma_{i'}^{(2)} + \sigma_{i'}^{(3)}) \quad (3-16)$$

Se ha señalado (Bukhardt - van Leeuwen, 1982) que toda función de peso lineal es inconsistente con las propiedades esperadas de escaleo de las funciones de correlación en el punto fijo a menos que un parámetro de acoplamiento p sea incorporado a la función de peso y que dicho parámetro tome la forma

$$p = b^{(d-2+\nu)/2} \quad (3-17)$$

b) Transformaciones de bloque no lineales. Ejemplo para la red triangular

$$t_{i'}[\sigma] = p (\sigma_{i'}^{(1)} + \sigma_{i'}^{(2)} + \sigma_{i'}^{(3)}) + q \sigma_{i'}^{(1)} \sigma_{i'}^{(2)} \sigma_{i'}^{(3)} \quad (3-18)$$

Ahora no hay restricciones sobre los posibles valores de p y q . Para $p = -q = \frac{1}{2}$ se recupera la regla del signo (3-13).-

La regla de la mayoría puede generalizarse por ejemplo para variables de spin vectoriales (Knops 1975) o pertenecientes al grupo $Z(N)$ pero es necesario tener ciertas precauciones. Consideremos spines de Potts que pueden ser del grupo $Z(N)$. La regla de la mayoría aplicada directamente a un bloque es cuestionable cuando muchos o todos los spines están en estados diferentes. En estas situaciones ^{al} asignar un determinado estado al spin - bloque se sobreestimaría la tendencia al orden lo cual a su vez implica una sobreestimación de la interacción con los spin - bloques vecinos. Por el contrario un spin - bloque altamente desordenado tiene una muy débil interacción con los vecinos, es decir se comporta como una vacancia.-

Este inconveniente ha sido salvado en una interesante forma por Nienhuis et al (1979) considerando una transformación que mapea el modelo de Potts usual en un sistema diluido introduciendo otro conjunto de variables ζ_i que pueden tomar los valores 0 (sitio vacante) ó 1 (sitio ocupado).-

Volviendo al formalismo general de este tipo de técnicas señalemos que, similarmente a lo que sucede con las técnicas de decimación, el proceso de spin - bloques generan infinitas interacciones. Luego nuevamente el espacio de los parámetros de interacción debe ser truncado mediante alguna técnica de aproximación. Las técnicas standard

- a) Redes de tamaño finito (nada que ver con el método que más adelante veremos de reescaleo entre sistemas de tamaño finito).
- b) Expansión en cumulantes: la misma idea de la expansión que vimos en la sección anterior. Hipótesis de parámetros pequeños (alta temperatura).-

c) Aproximación en racimos ("Clusters"): en esta técnica no se efectúa la hipótesis de parámetros pequeños,

han sido claramente expuestas en Niemeijer y van Leeuwen (1976) y exhaustivamente analizadas en Martín (1980). De acuerdo con el espíritu general de esta Tesis, dichas técnicas no serán estudiadas en más detalle por cuanto a) el autor considera que la aplicabilidad de las mismas ha sido suficientemente demostrada mediante numerosos trabajos y b) no forman parte de los cálculos desarrollados en esta Tesis.-

3 - 3 . Otras técnicas que contienen aspectos de los dos esquemas precedentemente estudiados

En la literatura sobre este tema de rápido y sostenido desarrollo se han sugerido otras técnicas que contienen aspectos de los dos esquemas analizados en las secciones precedentes o son combinaciones de los mismos o son de difícil clasificación.

En primer lugar, incluiremos en esta categoría intermedia un conjunto de técnicas que desarrollaremos con mayor detenimiento en el capítulo 6. Estas técnicas pueden considerarse aproximaciones tanto de un esquema de decimación como de un esquema de bloques. En ellas se divide a la red en bloques los cuales son reducidos a bloques más pequeños decimando algunos de los spines del bloque inicial. Los restantes spines del bloque original pasan intactos al bloque final.

El proceso de decimación puede ser acompañado por una aproximación intermedia de deformación del bloque inicial. Esta deformación se realiza de tal modo de preservar determinada propiedad, por ejemplo, para una red cuadrada, la de autodualidad.

Una técnica similar pero en la que el pasaje del bloque inicial al final se realiza con la ayuda de un desplazamiento de ligaduras (ver Capítulo 5) ha sido propuesto por Kirkpatrick (1977) para el tratamiento de modelos con interacciones aleatorias (ver secc. 3 - 5).

Si bien como anticipamos en la Introducción nuestro objetivo es el de ubicar a las técnicas que hemos aplicado dentro del contexto del GRER, un pantallazo sobre este tema no sería mínimamente completo si no se mencionara el método de renormalización Monte Carlo (RMC).

Las principales características de la RMC son las si-

güentes(re-vistas con numerosas referencias, Swendsen 1980, 1982). Se realiza una simulación numérica del modelo considerado en un retículo finito generando según el conocido algoritmo de Metropolis et al (1953) una secuencia de configuraciones distribuidas según el factor de Boltzmann, ec (1 - 1). Puesto que el método MC conserva memoria del estado de cada spin de cada una de las configuraciones seleccionadas se puede utilizar exactamente una transformación de decimación o de bloque de // spin a cada una de las mismas. Luego, se obtiene una secuencia de configuraciones correspondiente al hamiltoniano renormalizado $\mathcal{H}^{(1)}$ el cual contiene en principio todas las interacciones que entran en la red finita adoptada.-

Si a cada una de estas nuevas configuraciones se las vuelve a someter al mismo proceso de transformación se obtiene una nueva secuencia de configuraciones correspondiente a un nuevo hamiltoniano $\mathcal{H}^{(2)}$ y así sucesivamente. Observar que no hay cálculos para los que sea necesario explicitar los hamiltonianos $\mathcal{H}^{(1)}$, $\mathcal{H}^{(2)}$,..., de modo que estos implícitamente contienen varios miles de interacciones para los tamaños de red usuales.-

Teniendo en cuenta las secuencias de configuraciones antes y después de un paso de transformación resulta muy directo el cálculo de los elementos de matriz T_{ab}^* (ver ec. (2 - -10)) y por lo tanto de los auto valores y exponentes. Ahora es necesario un segundo truncamiento sobre la matriz T_{ab}^* . Generalmente se incluyen algunas pocas interacciones en este cálculo.-

Si la temperatura del sistema original era muy próxima a la crítica, después de pocos pasos de transformación, estos exponentes llegan a una zona de meseta, en las proximidades de los valores en el punto fijo.-

Fuera de las dificultades propias del método MC (ver re-vistas de Binder (1976) y (1979)) que provienen de la extrapolación de un sistema finito a un sistema infinito especialmente en el punto crítico, el método RMC posee como principal ventaja respecto de otras técnicas GRER el poder controlar y estimar el efecto de truncar las interacciones del hamiltoniano. En efecto este método tiene la posibilidad de chequearse internamente modificando una serie de parámetros como el tamaño del retículo, el factor de reescaleo, el no. de transformaciones RG, el no. de interacciones incluidas y la temperatura a la que se realiza la simulación.-

3 - 4 . Reescalado entre sistemas finitos

Al margen de los esquemas revisados en las secciones precedentes, es conveniente incluir dentro de este capítulo consagrado al GRER otro conjunto de técnicas basadas en un concepto totalmente diferente al de dichos esquemas.-

La idea central de este conjunto de técnicas (Fisher 1971) es establecer una relación para el reescalado de alguna magnitud física entre dos sistemas de tamaños finitos diferentes.-

Una primera formulación de esta idea (en el cap.8 analizaremos una alternativa basada en el reescalado de la magnetización), en conjunción con la técnica de la matriz de transferencia, fué desarrollada por Nightingale (1976) para el modelo de Ising en una red cuadrada. En esta formulación se parte de la relación entre las energías libres (2 - 9) a la que reescribimos como (tenemos ahora solamente una constante de // interacción):

$$f_N(K) = \mathcal{G}_{N,b}(K) + b^{-d} f_{N'}(K_{N,b}) \quad (3-19)$$

donde f_N , $\mathcal{G}_{N,b}$ y $f_{N'}$ son las magnitudes por spin correspondientes a F , G y F' . Al tomar el límite termodinámico en ambos miembros de (3 - 19) se recupera la relación de renormalización básica (2 - 12) a la que transcribimos para mayor comodidad:

$$f(K) = \mathcal{G}(K) + b^{-d} f(K') \quad (3-20)$$

La idea del RSF surge de que las funciones $\mathcal{G}_{N,b}$ y $f_{N,b}$ de ec. (3-19) son funciones analíticas de su argumento K ya que las mismas se refieren a sistemas finitos en los cuales no hay singularidades. Puesto que, además, en el capítulo anterior se supuso que g y K' son analíticas, todas sus propiedades relevantes pueden ser aproximadas por las co-

respondientes propiedades de $g_{N,b}$ y $K_{N,b}$. A partir de este punto se sigue un procedimiento que se puede considerar "fenomenológico". Se toman dos sistemas finitos de N y N' sitios y se calcula de alguna manera sus funciones de partición, y luego, f_N y $f_{N'}$. Luego $g_{N,b}$ y $K_{N,b}$ se definen de modo que f_N y $f_{N'}$ estén relacionadas mediante (3 - 19).- Es evidente que es necesaria una segunda relación de reescalamiento para determinar $g_{N,b}$ y $K_{N,b}$. En el trabajo citado de // , Nightingale se adopta la relación entre las longitudes de correlación de ambos sistemas finitos:

$$\xi_{N'}(K_{N,b}) = b^{-1} \xi_N(K) \quad (3 - 21)$$

donde las funciones involucradas conducen a la función ξ de ec. (1 - 16) en el límite termodinámico. Está claro que (3 - 21) a diferencia de (2 - 4) no implica una longitud de correlación infinita cuando es calculada en el punto fijo.-

Resuelto el sistema (3 - 19) / (3 - 21) para cada par de valores N y b se determina el punto fijo mediante:

$$K^* = K_{N,b}(K^*) \quad (3 - 22)$$

y luego, el exponente térmico γ_T y la amplitud crítica del calor específico se calculan a partir de las expresiones linealizadas a partir de K siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo anterior.-

Si se considera un modelo con varias constantes de interacción K_a ($a = 1, \dots, p$) y sólo interesa calcular el punto fijo \vec{K}^* y los exponentes críticos basta con calcular la expresión (3 - 21) convenientemente generalizada como

$$\xi_{N'_i}(\vec{K}_{N_i,b}) = b_i^{-1} \xi_{N_i}(\vec{K}) \quad (3 - 23)$$

para p pares distintos de retículos $(N_1, N'_1), (N_2, N'_2), \dots, (N_p, N'_p)$ (Barber 1983).

Volvamos al trabajo de Nightingale (1976). El modelo de Ising en una red cuadrada es un ejemplo privilegiado tanto para ilustrar el método como para analizar el efecto de finitud de los sistemas considerados por cuanto se dispone de la solución exacta de Onsager para cualquier sistema finito. Esta solución exacta se aprovecha expresando la función de partición del modelo de Ising, para un retículo de m filas de n sitios cada una, como:

$$Z_{n,m} = \text{Tr} (V_n)^m$$

donde V_n , la "matriz de transferencia" (Domb, 1960), es una matriz simétrica de $2^n \times 2^n$ con autovalores:

$$\omega_1^{(m)} > \omega_2^{(m)} > \dots > \omega_{2^n}^{(m)}$$

Luego,

$$Z_{n,m} = \sum_{s=1}^{2^n} (\omega_s^{(m)})^m$$

lo cual se reduce a $(\omega_1^{(m)})^m$ para $m \gg 1$. Por tanto, en este límite, es decir considerando una tira de longitud infinita de ancho n sitios, se tiene:

$$f_n(k) = -\frac{1}{m} \ln \omega_1^{(m)}(k) \quad (3 - 24)$$

y, utilizando un resultado de Domb (1960),

$$\left[\xi_n(k) \right]^{-1} = \ln \frac{\omega_1^{(m)}(k)}{\omega_2^{(m)}(k)}$$

Los autovalores $\omega_1^{(m)}$ y $\omega_2^{(m)}$, hallados por Onsager para n genérico, se calculan para n y n' y de este modo se determinan $f_n, f_{n'}, \xi_n$ y $\xi_{n'}$ involucrados en (3 - 17) y

y (3 - 19). A partir de aquí se continua con el procedimiento anteriormente prescripto.-

En un trabajo posterior (Nightingale y Blote, 1980) se aplicó una variante de este método al modelo de Potts de q - estados. En esta variante también se emplea la matriz de transferencia para evaluar la función de partición de cada uno de los sistemas finitos sólo que para $q > 2$ sus autovalores deben ser calculados numéricamente. A partir de la función de // partición se calculan el calor específico y la susceptibilidad mediante diferenciación numérica, en el punto crítico exacto (ver secc. 4 - 2).-

Supongamos que x sea una cantidad (por ejemplo, la // energía libre) que escala con un exponente γ_x , es decir

$$x' = b^{\gamma_x} x$$

donde x' es la cantidad reescalada y b el factor de reescalado como siempre. Sea x_k la derivada de orden k de x // respecto a un parámetro u que reescalda como

$$u' = b^{\gamma} u$$

luego, x_k satisface

$$x_k \sim n^{k\gamma + \gamma_x} \quad (3 - 25)$$

donde n es la dimensión lineal del sistema finito y x_k es función de las interacciones fijadas en sus valores críticos correspondientes al sistema infinito. Suzuki (1976) ha obtenido (3 - 25) con argumentos GR considerando a ($1/n$) como un campo de escaleo con un exponente $\gamma_n = 1$; los restantes campos de escaleo dependen analíticamente de $1/n$.-

Como la energía libre escala con un exponente ($-\alpha$), (ver ecc.(2 - 22)) y teniendo en cuenta las usuales relaciones termodinámicas, (3 - 25) conduce a:

$$C_H \sim n^{2\gamma_T - \alpha} \quad (3 - 26 a)$$

$$X \sim M^{2\gamma_H - d} \quad (3 - 26b)$$

A partir de los exponentes γ_T e γ_H se determinan los exponentes críticos $\alpha, \beta, \nu, \delta$ según las ecuaciones (2 - 24).-

Luego los valores de $C_H(n)$ y $X(n)$ calculados a partir de la función de partición mediante la matriz de transferencia en función de n se sustituyen en la expresión:

$$C_H(n) = a \frac{M^{2\gamma_T - d} - 1}{2\gamma_T - d} + b \quad (3 - 27)$$

obtenido a partir de (3-26a) con la adición de una constante para tener en cuenta la parte regular del calor específico.

Para tres valores sucesivos de n se determinan a, b e γ_T . En forma similar se trata la susceptibilidad.-

Los resultados obtenidos tanto en este trabajo como en el anterior muestran que:

- 1) Los valores críticos de la cte. de interacción, exponentes y amplitudes se aproximan a los valores exactos a medida que i) $N \rightarrow \infty$, ii) $b \rightarrow 1$.-
- 2) Los valores obtenidos por extrapolación son comparables o incluso mejores que los obtenidos con otros métodos (por ej. Monte Carlo), aún con N relativamente pequeño.-
- 3) La precisión de estos valores puede ser establecida internamente teniendo en cuenta la convergencia hacia los valores extrapolados en función del tamaño del retículo empleado.- Esta convergencia ha sido investigada recientemente para varios modelos por Nightingale y Blöte (1983) y mediante técnicas de teoría de campos por Luck (1984). Finalmente, debido a la finitud de los sistemas considerados este formalismo es especialmente adecuado para ser tratado con técnicas Monte Carlo. (ver por ejemplo, Barber et al, 1983).-

3 - 5 . Aplicación de las técnicas del GRER a modelos con interacciones aleatorias.

Debido a que las técnicas del GRER conservan la información de las constantes de interacción del retículo que ha sido transformado, dichas técnicas son sumamente adecuadas para el tratamiento de modelos "templados" ("quenched") con constantes de interacción aleatorias. Estos modelos son usados para describir sistemas desordenados, entre los cuales incluimos a los sistemas diluidos y a los sistemas con interacciones competitivas ferro- y antiferromagnéticas.

En general, en el contexto de los sistemas magnéticos, las interacciones aleatorias aparecen como consecuencia de la introducción en materiales magnéticos de impurezas magnéticas o no magnéticas. Los modelos con interacciones aleatorias han sido considerados también en el contexto de los sistemas conductores, por ejemplo para describir mezclas de materiales conductores y superconductores. (Kirkpatrick, 1977). En este caso, las constantes de interacción sobre las ligaduras tienen el significado físico de conductancias.

Antes de avanzar en la descripción más detallada de sistemas particulares se verá a continuación el tratamiento general de este tipo de modelos dentro del formalismo del GRER. Este tratamiento se basa en el hecho de que en un sistema templado las impurezas están "congeladas" en una configuración aleatoria y, a diferencia de un sistema "recocido" ("annealed"), no alcanzan un equilibrio térmico con el material base. Luego, el promedio sobre el desorden se realiza sobre promedios termodinámicos (por ejemplo, sobre la energía libre) más que sobre la función de partición.

Consideremos dos bloques de N y N' ligaduras, relacionados entre sí por una transformación GRER. Sean $\{K_i\}$ y $\{K'_i\}$ dos configuraciones genéricas de las constantes de interacción

en dichos bloques. Estas últimas dependen entre sí mediante las relaciones de recursión:

$$K'_i = R(K_{i_1}, \dots, K_{i_m}) \equiv R_{i_1}(\{K\}) \quad (3-28)$$

donde K_{i_1}, \dots, K_{i_m} son las constantes de interacción del bloque original cuya constante efectiva es K'_i . Nos estamos refiriendo a modelos con c. de i. de una sola componente pero todo el formalismo puede generalizarse a c. de i. de cualquier número de componentes en forma directa.

Sea además $P(\{K_i\})$ la distribución de probabilidad de una configuración $\{K_i\}$ dada. Luego el formalismo del GRER aplicado a un modelo con constantes de interacción aleatorias templado se establece imponiendo que el efecto de la transformación sobre la distribución $P(\{K_i\})$ es una nueva distribución:

$$P'(\{K'_i\}) = \int \left(\prod_i^N dk_i \right) \left(\prod_{i'}^{N'} \delta(K'_{i'} - R_{i'}(\{K\})) \right) P(\{K_i\}) \quad (3-29)$$

Luego, si al introducir impurezas en un modelo inicialmente puro aparecen nuevos comportamientos críticos, éstos deben corresponder a formas invariantes de escala de la distribución $P(\{K_i\})$. Estas son distribuciones "fijas" que se pueden determinar siguiendo la evolución según (3-29) tras sucesivas transformaciones (Andelman y Berker, 1984).

Hasta el presente todos los trabajos en este tema se han limitado a considerar que las constantes de interacción son variables aleatorias independientes entre sí y que además el proceso de renormalización no genera correlaciones apreciables entre las mismas. Bajo estas hipótesis, la distribución de probabilidad se factoriza según distribuciones por ligaduras, por ejemplo:

$$P(\{K_i\}) = \prod_i^N p(K_i) \quad (3-30)$$

con lo cual la transformación (3-29) se reduce a:

$$p'(K'_i) = \int \left[\prod_i^m \alpha_{K_i} p(K_i) \right] \delta(K'_i - R_{i'}(\{K\})) \quad (3-31)$$

Como se verá más abajo, modelos simples para sistemas diluidos o con interacciones competentes de distinto signo se obtienen como casos particulares de la distribución de probabilidad por ligadura:

$$p(K_i) = p \delta(K_i - K_1) + (1-p) \delta(K_i - K_2) \quad (3-32)$$

Se ve fácilmente que al introducir (3-32) en (3-31), teniendo en cuenta (3-28) resulta una expresión que contiene 2^n funciones delta. Al efectuar nuevos pasos de transformación el número de términos de la distribución renormalizada crece de tal modo que los cálculos se tornan sumamente tediosos si no imposibles. Por esto es necesario recurrir a una nueva aproximación. Siguiendo a Young y Stinchcombe (1976) se propone una distribución aproximada de la misma forma que la original, es decir:

$$P'_{2p}(K'_i) = p' \delta(K'_i - K'_1) + (1-p') \delta(K'_i - K'_2) \quad (3-33)$$

y se determinan las nuevas constantes p' , K'_1 y K'_2 igualando los primeros momentos de la distribución (3-33) a los de la distribución completa que resulta de (3-31). De este modo se obtienen las relaciones de recursión que permiten proseguir con el formalismo del GRER en la forma usual.

Los sistemas diluidos corresponden a situaciones en las que $K_1 \gg K_2$ de modo tal que se puede tomar a esta última como igual a cero. Luego se tiene, como caso particular de (3-32) la distribución:

$$p(K_i) = p \delta(K_i - K) + (1-p) \delta(K_i) \quad (3-34)$$

Si el sistema contiene interacciones competitivas, iguales en valor absoluto y de signo contrario, la distribución (3-32) pasa a ser:

$$p(k_i) = p \delta(k_i - \kappa) + (1-p) \delta(k_i + \kappa) \quad (3-35)$$

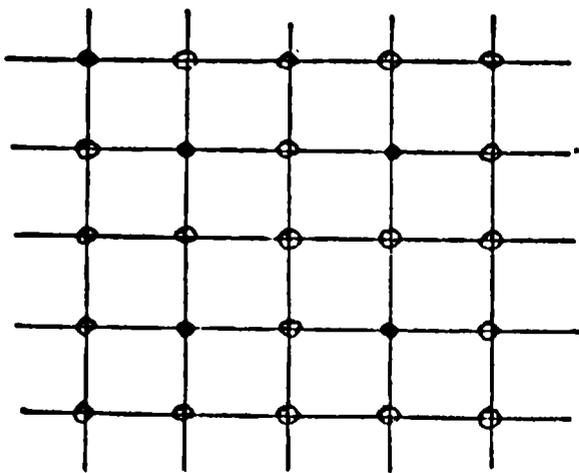
La presencia de interacciones negativas en un ferromagneto genera "frustraciones" (Kinzel y Domany, 1981) las cuales, para modelos de Ising, reducen la temperatura de transición y conducen al menos para altas dimensiones al surgimiento de una fase "vidrio de spin" (ver, por ejemplo, Binder 1982, de Dominici 1983, con referencias a trabajos anteriores). Para este problema, la dimensión crítica superior $d_s = 6$ con lo cual un tratamiento tipo expansión ϵ para llevarlo a $d = 3$ es totalmente impracticable. Este es un poderoso incentivo que induce a estudiar el problema del vidrio de spin mediante las técnicas del grupo de renormalización en el espacio real.-

Notas al Capítulo 3

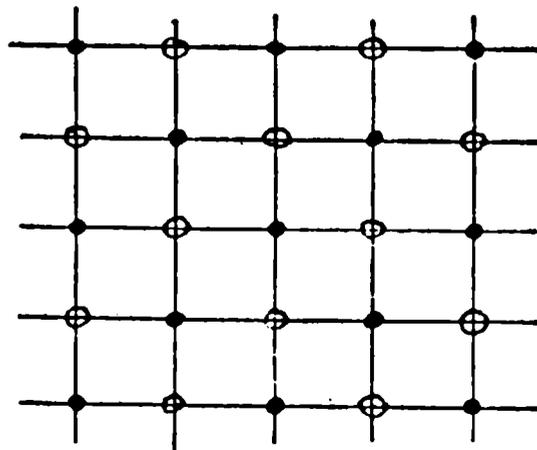
- 1 - El término "decimación" tiene en esta Tesis el significado restringido dado por Kadanoff y Houghton (1975) y Kadanoff (1976). Otros autores, por ejemplo Wallace y Zia (1978) le otorgan un significado más general que abarca conceptos que en esta Tesis han sido incluidos dentro del esquema de los bloques de spin.
- 2 - Para una variable de Ising, $\sigma_i = \pm 1$, el operador (3 - 1) tiene la expresión:

$$T[\mu, \sigma] = \prod_i \frac{1}{2} (1 + \mu_i \sigma_i)$$

con lo cual evidentemente puede ser considerado como un caso particular de la función de peso introducida en la sección 3 - 2. Observar que por ser lineal está afectada por la " $\mu = 2 - d$ catástrofe" la cual, como se indica en la secc. 3 - 2, se cura mediante la introducción de un parámetro adecuado.



a



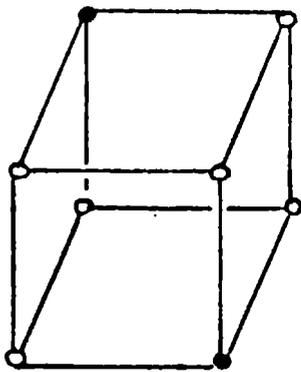
b

Fig. 3 - 1 Dos posibles esquemas de decimación:

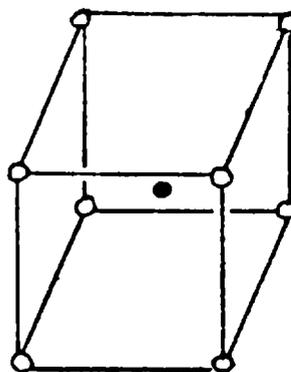
a) con factor de reescaleo $b = 2$; b) con $b = \sqrt{2}$.

Los spines sumados se indican con círculos vacíos.

En la nomenclatura del texto: $\bullet = \mu_i$, $\circ = \bar{\sigma}_i$.



a



b

Fig. 3 - 2 : Transformaciones de decimación en redes cúbicas:

a) $cs \longrightarrow bcc$; b) $bcc \longrightarrow cs$

Se suman los spines indicados con círculos vacíos.

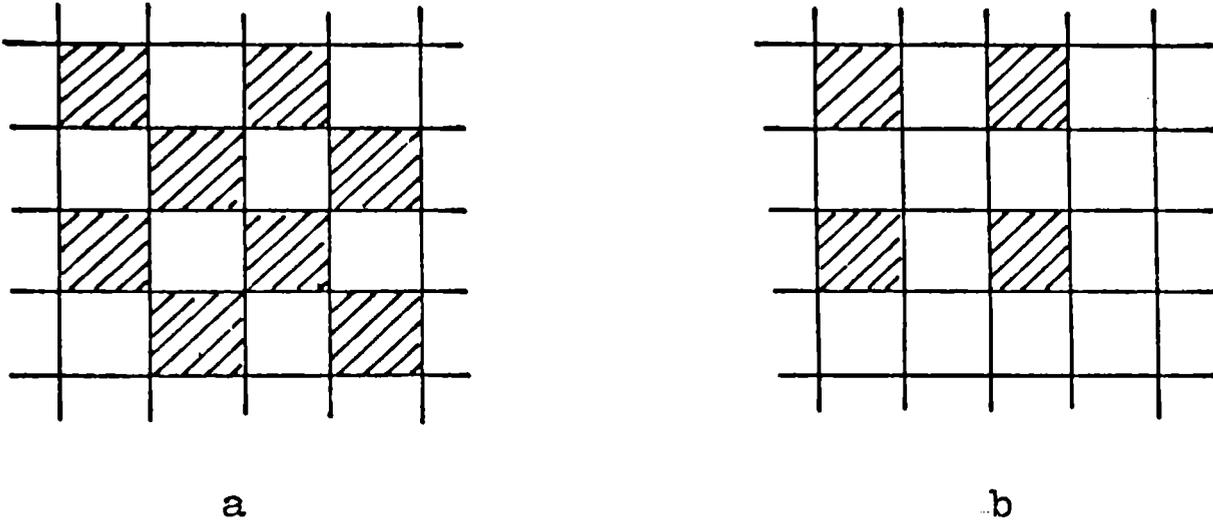


Fig. 3 - 3 Transformaciones de bloques de spines:
 a) $b = 2$; b) $b = \sqrt{2}$
 Los nuevos spines se asocian a los bloques rayados.

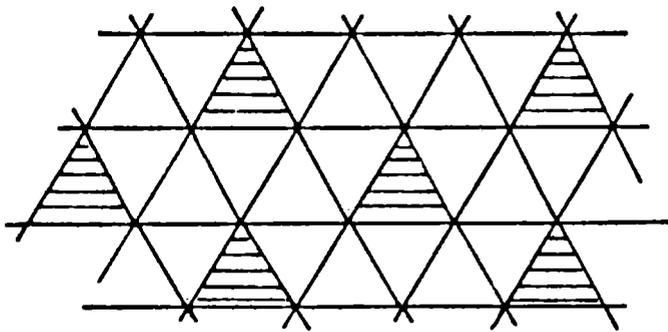


Fig. 3 - 4 : Transformación de bloques de spines para la red triangular, $b = \sqrt{3}$.

CAPITULO 4

PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS MODELOS ESTUDIADOS

4 - 1 . Generalidades sobre modelos con simetría global $Z(q)$

Habiendo desarrollado en los capítulos precedentes las principales características de las técnicas GREER creemos oportuno plantear los modelos sobre los cuales estudiaremos en detalle la aplicación de algunos métodos específicos (ver caps. 6, 7 y 8). Estos modelos, el de Potts de q estados y el modelo $Z(q)$, son casos particulares del modelo con simetría global $Z(q)$ cuya importancia tanto teórica como experimental fue reseñada en la Introducción. La forma más general de este modelo, considerando solamente vecinos próximos, está dada por el hamiltoniano:

$$\mathcal{H}[\sigma] = - \text{Re} \sum_{\langle i, j \rangle} \sum_{r=1}^{\bar{q}} K_{ij}^{(r)} (\sigma_i \sigma_j^*)^r \quad (4 - 1)$$

donde $\sigma_j = \exp(2\pi i n_j / q)$, $n_j = 0, 1, \dots, q-1$ y donde \bar{q} es la parte entera de $q/2$ si $q \geq 2$, y en el límite $q \rightarrow 1$, $\bar{q} = 1$. Si el sistema es homogéneo $K_{ij}^{(r)} = K^{(r)}$ para todos los pares (i, j) de vecinos próximos.

El hamiltoniano del modelo de Potts de q estados (Potts, 1952) es:

$$\mathcal{H}[\sigma] = - \sum_{\langle i, j \rangle} K_{ij} (q \delta_{\sigma_i, \sigma_j} - 1) \quad (4 - 2)$$

Teniendo en cuenta la identidad:

$$q \delta_{z, 1} = 1 + \sum_{r=1}^{q-1} z^r \quad (4 - 3a)$$

y las relaciones

$$\sigma_i^* = \sigma_i^{-1} \quad \sigma_i^l = [\sigma_i^{q-l}]^* \quad (4 - 3b)$$

resulta (4-2) como caso particular de (4-1) cuando

$$K^{(1)} = K^{(2)} = \frac{1}{2} \left[3 + (-1)^q \right] K^{(q)} = 2' K_{\text{Potts}} \quad (4-4)$$

donde se han omitido los subíndices i, j .

Otro modelo que se puede obtener como caso particular de (4-1) es el modelo de Potts vectorial para el cual r toma solamente el valor 1. El hamiltoniano de este modelo es usualmente expresado como

$$\mathcal{H}[\sigma] = - \sum_{\langle i, j \rangle} K_{ij} \cos \left[\frac{2\pi}{q} (m_i - m_j) \right] \quad (4-5)$$

donde, como antes, $n = 0, 1, \dots, q - 1$.

Como es bien sabido, para $q = 2$, $\sigma_i = \pm 1$, todos estos modelos reproducen el modelo de Ising. También para $q = 3$ ($\bar{q} = 1$) estos modelos son equivalentes. Para $q = 4$ la situación es ya diferente y será analizada en la sección 4 - 3.

Analizaremos a continuación la autodualidad del modelo $Z(q)$. Recordemos que una transformación de dualidad en una red hipercúbica en d - dimensiones se obtiene desplazando la red una longitud igual a la mitad del espaciamiento en cada una de las direcciones lo cual equivale a intercambiar cada simplex de orden s (Savit 1980) de la red original por un simplex de orden $(d-s)$ de la red transformada. Luego la función de partición del modelo original se reescribe con nuevas variables definidas sobre simplexes de la red dual. Así se obtiene el modelo dual al dado. Si el hamiltoniano del modelo dual tiene la misma forma que el original, éste se denomina autodual.

Para el estudio de la autodualidad del modelo $Z(q)$ conviene introducir la variable transmisividad (Tsallis y Levy, 1981) definida como (Alcaraz y Köberle, 1981):

$$t^{(s)} = \frac{1}{\sum_{r=0}^{q-1} e^{-h(r)}} \sum_{r=0}^{q-1} e^{-h(r)} e^{i \frac{2\pi}{q} r s} \quad (4-6a)$$

donde $s = 0, 1, \dots, q - 1$, y

$$h(r) = - \operatorname{Re} \sum_{u=1}^{\bar{q}} K^{(u)} e^{i \frac{2\pi}{q} u r} \quad (4-6b)$$

Observar que $t^{(0)} = 1$ y $t^{(s)} = t^{(q-s)} = t^{(s)*}$

Consecuentemente con lo afirmado anteriormente, la transmisividad de un s - simplex de la red original está relacionada con la transmisividad (denotada \vec{t}^D) del $(d - s)$ - simplex de la red dual a través de la ecuación:

$$t^{(s)D} = \frac{1}{\sum_{r=0}^{q-1} t^{(r)}} \sum_{r=0}^{q-1} t^{(r)} e^{-i \frac{2\pi}{q} r s} \quad (4-7)$$

Ecs. (4-6) y (4-7) son fácilmente generalizables para sistemas inhomogéneos. -

Si tenemos en cuenta la autodualidad de la red cuadrada (ligaduras son transformadas en ligaduras) generalizando el argumento de Kramers-Wannier (1941), se tiene que la frontera crítica autodual en el espacio de los parámetros está unívocamente determinada por:

$$\vec{t} = \vec{t}^D \quad (4-8)$$

Las implicancias de esta relación se verán con mayor detalle en las secciones siguientes. Podemos adelantar que la

relación particular (4-4) es conservada por la transformación de dualidad, es decir, el modelo de Potts es autodual. Por el contrario, para $q > 4$ el modelo de Potts vectorial no es autodual.-

Para finalizar esta sección indicaremos dos propiedades de las variables \vec{t} y \vec{t}^D que simplifican enormemente el cálculo de decimación como se mostrará en los capítulos 5 y 6.-

Estas propiedades son las siguientes (Alcaraz - Tsallis, 1982 y Levy - Tsallis, 1981). Consideremos la fig. 4-1a en la que se tienen dos ligaduras en serie, cuyas transmisividades son \vec{t}_1 y \vec{t}_2 . Luego, la transmisividad equivalente \vec{t}_s // obtenida decimando el spin C , como se indica en la fig. 4-1b, resulta

$$t_s^{(r)} = t_1^{(r)} t_2^{(r)}$$

Si en cambio se tiene un conjunto en paralelo, fig. 4-2, la transmisividad dual equivalente resulta

$$t_p^{(r)D} = t_1^{(r)D} t_2^{(r)D}$$

4 - 2 . Principales características del modelo de Potts

El modelo de Potts es una generalización del modelo de Ising a más de dos componentes. El número de componentes q se transforma en un nuevo grado de libertad lo cual significa una mayor riqueza en su contenido, particularmente en su comportamiento crítico, a la vez que su realización en una gran variedad de sistemas físicos.

Si bien durante muchos años el modelo de Potts fue considerado como un modelo que presenta una transición orden - desorden de interés fundamentalmente teórico, se ha reconocido en estos últimos años que existen numerosos sistemas que pueden considerarse como correlatos materiales de dicho modelo (Wu, 1982). Las realizaciones experimentales del modelo de Potts se pueden ordenar según las clases de universalidad. Para $d = 2$ y $q = 2$ (Ising) se tienen sustancias magnéticas diversas, y para $q = 2, 3$ y 4 , se incluyen sustancias adsorbidas sobre sustratos cristalinos con distintas simetrías (Schick, 1982).

En $d = 3$ se estudian experimentalmente, entre otros, los siguientes sistemas: ferromagnetos cúbicos, compuestos de tierras raras, sustancias con transiciones de fases estructurales y mezclas de fluidos, todos ellos correspondientes a $q = 3$, y ciertos antiferromagnetos, correspondientes a $q = 4$.

Teniendo en cuenta la definición de este modelo, ec. (4 - 2), es evidente que la variable σ_i puede tener muchas otras representaciones como, por ejemplo: $\sigma_i = 1, 2, \dots, q$. Con la representación adoptada sólo hemos tenido la intención de establecer su relación con el modelo de simetría global $Z(q)$ más general. Adoptando otra representación es posible concebir el modelo de Potts como un caso particular del modelo de spin $s = (q - 1) / 2$

$$\mathcal{H}[s] = \sum_{\langle i, j \rangle} \sum_{\alpha, \beta} K_{\alpha\beta} (s_i^\alpha s_j^\beta + s_i^\beta s_j^\alpha) + \sum_i \sum_{\alpha} L_{\alpha} s_i^\alpha$$

donde las potencias α y β toman valores desde 0 hasta $q - 1$, y $s_i = -(q-1)/2, -(q-3)/2, \dots, (q-1)/2$.

Volviendo al hamiltoniano (4 - 2), para estudiar el parámetro de orden de este modelo, es necesario agregarle el término de fuente

$$-\frac{h}{q-1} \sum_i (q^{\delta_{\sigma_i,1}} - 1) \quad (4 - 9)$$

el cual resulta también independiente de la representación. Según el procedimiento prescrito en la secc. 1 - 2, se obtiene el parámetro de orden $m = \langle \sigma_i \rangle$, después de usar (4 - 3a) y tomar:

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_i^2 \rangle = \dots = \langle \sigma_i^{q-1} \rangle$$

Por supuesto, el comportamiento crítico se determina estudiando la ruptura espontánea de m , es decir con $h = 0$.

Las propiedades críticas del modelo de Potts en función de la dimensión espacial del retículo son:

- i) $d = 1$: no hay transición de fases para ningún q .
- ii) $d = 2$ se sabe exactamente (Baxter, 1973) que el modelo ferromagnético ($K > 0$) presenta transiciones de fases para $q > 1$. De i) e ii) se concluye que, por definición, la dimensión crítica inferior $d_i = 1$ para todo q .

Para la estimación del punto crítico es conveniente obtener la expresión particular de la transmisividad para el modelo de Potts. Teniendo en cuenta (4 - 6) y (4 - 4) resulta:

$$t^{(s)} = t = \frac{1 - e^{-q^k}}{1 + (q-1)e^{-q^k}} \quad (4 - 10a)$$

para $s = 1, 2, \dots, q - 1$. Además (4 - 7) se reduce a

$$t^{(s)D} = t^D = \frac{1-t}{1+(q-1)t} = e^{-qK} \quad (4-10b)$$

Para un sistema no homogéneo se tendrá sobre cada ligadura "l" la constante de interacción K_l y t_l , t_l^D dados por las relaciones anteriores.

En $d = 2$ según el argumento de dualidad dado anteriormente, el punto crítico está determinado por la relación (4-8) la cual, después de reemplazar (4-10a, b) resulta:

$$qK_c = \ln(1 + \sqrt{q}) \quad (4-11)$$

Este resultado ha sido confirmado exactamente para las redes cuadrada, triangular y hexagonal (Wu, 1983).

Si bien no existen soluciones exactas en $d = 2$ excepto para $q = 2$, sí se conoce exactamente la energía libre, la energía interna y el calor latente en el punto crítico (4-11) para todo q . Se encuentra que el calor latente es nulo para $q \leq 4$ y no nulo para $q > 4$, lo cual indica que la transición pasa de continua para $q \leq 4$ a primera especie para $q > 4$ (Baxter, 1973).

La dimensión crítica superior d_s es la dimensión más baja a partir de la cual el sistema comienza a comportarse como lo predice la teoría del campo medio. Luego, como la aproximación campo medio predice una transición de fases de primer orden para $q > 2$, se deduce que la dimensión crítica para $q = 4$ es $d_s(4) = 2$.

Los exponentes críticos del modelo de Potts están bien definidos cuando la transición es continua. Más aún, para $d=2$ y $q \leq 4$, se conocen exactamente los exponentes térmico y magnéticos (den Nijs, 1979, 1983). Ellos están dados por:

$$\alpha = \frac{2(1-2\mu)}{3(1-\mu)}$$

y:

$$\eta = \frac{(1 - \mu^2)}{2(2 - \mu)}$$

donde:

$$0 \leq \mu = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{q}}{2} \leq 1$$

iii) d = 3 : no existen resultados exactos en esta dimensión.

Ha habido un gran interés en elucidar la naturaleza de la transición para $q = 3$. La mayor parte de los resultados obtenidos empleando diversos métodos indican que esa transición es de primera especie (Wu, 1982, 1983).

iv) d = 4 la teoría del campo medio es cualitativamente correcta. Luego $d_s(q = 2) = 4$. Cálculos realizados con varias técnicas para $q = 3$, $d = 4$ y para $q = 4$ y $d = 4$ indican transiciones de primer orden.

Hemos utilizado el modelo de Potts mayormente para plantear y/o ilustrar diversas técnicas que luego generalizamos al modelo $Z(4)$ el que es estudiado en mayor detalle. Por ello no brindaremos al lector más información sobre el modelo de Potts y remitimos al lector a las revistas de Wu (1982 y 1983).

4 - 3 Principales características del modelo Z (4) spin

Como caso particular de (4-1) cuando $q = 4$ se obtiene:

$$\mathcal{H}_e[\sigma] = -\kappa_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \text{Re}(\sigma_i \sigma_j^*) - \kappa_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^2 \sigma_j^2 \quad (4-12a)$$

el cual puede ser reescrito como:

$$\mathcal{H}_e[\sigma] = -\kappa_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \cos \left[\frac{\pi}{2} (m_i - m_j) \right] - \kappa_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \cos \left[\pi (m_i - m_j) \right] \quad (4-12b)$$

La transmisividad \vec{t} tiene dos componentes

$$t_1 = \frac{1 - t_2^D}{1 + 2t_1^D + t_2^D} \quad , \quad t_2 = \frac{1 - 2t_1^D + t_2^D}{1 + 2t_1^D + t_2^D} \quad (4-13)$$

donde

$$t_1^D = e^{-2\kappa_2 - \kappa_1} \quad t_2^D = e^{-2\kappa_1} \quad (4-14)$$

Para $2\kappa_2 = \kappa_1$ resulta $t_1^D = t_2^D$ y $t_1 = t_2$ con lo cual se recupera el modelo de Potts de cuatro estados.-

Se obtiene mayor información sobre el modelo Z (4) reescribiendo el hamiltoniano (4-12a) en términos de las variables μ_i y ν_i ($\mu_i, \nu_i = \pm 1$) definidas como (Alcaraz y Tsallis, 1982):

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mu_i e^{-i\pi/4} + \nu_i e^{i\pi/4} \right) \quad (4-15a)$$

Entonces

$$\mathcal{H}_e[\mu, \nu] = - \sum_{\langle i, j \rangle} \left[\frac{\kappa_1}{2} (\mu_i \mu_j + \nu_i \nu_j) + \kappa_2 \mu_i \nu_i \mu_j \nu_j \right] \quad (4-15b)$$

indica que el modelo Z_4 puede ser considerado como dos modelos Ising acoplados. Observar que el modelo de Potts vectorial de cuatro estados correspondiente a $K_2 = 0$ se reduce a un par de modelos de Ising idénticos no interactuantes. A su vez el hamiltoniano (4-15b) es un caso particular del modelo de Ashkin-Teller (1943).

$$\mathcal{H}_e[\mu, \nu] = - \sum_{\langle i, j \rangle} \left[\frac{\kappa_{11}}{2} \mu_i \mu_j + \frac{\kappa_{12}}{2} \nu_i \nu_j + \kappa_2 \mu_i \mu_j \nu_i \nu_j \right] \quad (4-16)$$

Por esto al modelo Z_4 se lo suele denominar modelo Ashkin - Teller simétrico.-

Las distintas fases del modelo Z_4 son caracterizadas por el comportamiento del parámetro de orden de dos componentes (m_1, m_2) definidas como:

$$\begin{aligned} m_1 &= \langle \sigma_i \rangle = \langle \cos \left(\frac{\pi}{2} m_i \right) \rangle \\ m_2 &= \langle \sigma_i^2 \rangle = \langle \cos (\pi m_i) \rangle \end{aligned} \quad (4-17)$$

donde la segunda igualdad se debe a la paridad del hamiltoniano, evidente bajo la forma (4-12b). Alternativamente, las fases se pueden describir mediante las variables $\langle \mu_i \rangle$ ($\langle \nu_i \rangle$ es indistinto) y $\langle \mu_i \nu_i \rangle$.-

Para estudiar el parámetro de orden (4-17) se agrega al hamiltoniano (4-12a) el término de fuente:

$$- \sum_i \left[H_1 \text{Re } \sigma_i + H_2 \sigma_i^2 \right] \quad (4-18)$$

de donde se obtiene (4-17) según ecs. (1-10).-

El diagrama de fases en el plano (t_1, t_2) presenta las

siguientes características (ver fig. 4-1)

i) Las fases son tres (Wu y Lin, 1974)

I - fase paramagnética: $m_1 = m_2 = 0$

ó bien: $\langle \mu_i \rangle = \langle \nu_i \rangle = \langle \mu_i \nu_i \rangle = 0$

II - fase intermedia $m_1 = 0$, $m_2 \neq 0$

$\langle \mu_i \rangle = \langle \nu_i \rangle = 0$; $\langle \mu_i \nu_i \rangle \neq 0$

III - fase ferromagnética: $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$

$\langle \mu_i \rangle \neq 0$; $\langle \nu_i \rangle \neq 0$; $\langle \mu_i \nu_i \rangle \neq 0$

ii) Las líneas de transición I - II y II - III se transforman entre sí ante el intercambio de \vec{E} con \vec{E}^D . Estas líneas son de tipo Ising en el sentido de que en ellas se produce la ruptura de una de las componentes del parámetro de orden (4-17), esto es, una ruptura parcial del parámetro de orden. La línea de transición I-III es autodual ya que forma parte de la línea

$$2t_1 + t_2 = 1$$

solución de la ecuación (4-8). El punto crítico del modelo de Potts P_4 y el punto crítico de desacoplamiento $K_2 = 0$, I_3 , están ubicados sobre esta línea. Esto indica que la línea I-III es una línea de puntos críticos (Knops, 1975, Alcaraz y Koberle 1980). Por consideraciones de simetría se puede inducir que esta línea crítica autodual se bifurca precisamente en el punto P_4 . Se volverá a analizar la criticalidad de esta línea en el capítulo 8.-

iii) Algunos puntos del diagrama de fases pueden ser ubicados exactamente ya que las líneas $t_1 = 0$ ($K_2 \rightarrow +\infty$), $t_2 = 1$ ($K_1 = 0$) y $t_2 = t_1^2$ ($K_2 = 0$) corresponden a modelos de Ising. Luego

$$I_1 = (0, \sqrt{2} - 1)$$

$$I_2 = (\sqrt{2} - 1, 1)$$

$$I_3 = (\sqrt{2} - 1, 3 - 2\sqrt{2})$$

Además $t_1 = t_2$ corresponde al modelo de Potts con $q = 4$, con lo cual

$$P_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Esta estructura de fases indica que una transformación GR debe poseer siete puntos fijos (con $H_1 = H_2 = 0$): el punto P totalmente inestable es decir con dos campos de escaleo relevantes, los puntos I_1 , I_2 , I_3 inestables en una sola dirección y cuyos dominios de atracción son las líneas I - II, II - III y I - III respectivamente y los puntos fijos estables (triviales) $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$ cuyos dominios de atracción son las fases I, II y III respectivamente.-

Notas al Capítulo 4

1 - Por completitud creemos conveniente introducir el concepto de simplex (Savit, 1980). Un simplex de dimensión s es un elemento s -dimensional de una red hipercúbica. Luego, un simplex de dimensión cero es un vértice del retículo, un simplex de dimensión uno es una ligadura que une dos vértices vecinos próximos de la red, un simplex de dimensión 2 es una malla elemental de la red o "plaqueta", etc.. Obviamente en un retículo hipercúbico d -dimensional existen simplexes de dimensión $s \leq d$.

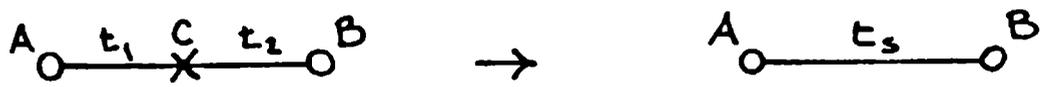


Fig. 4 - 1

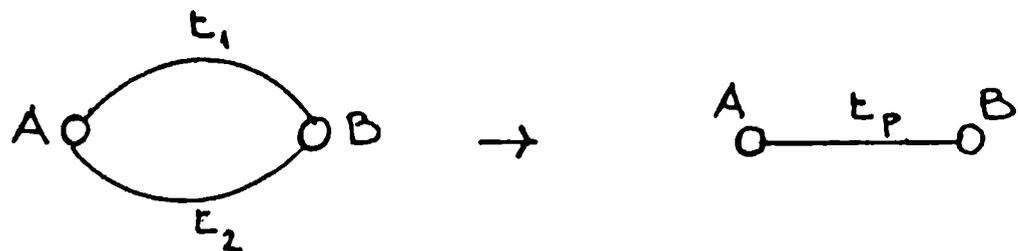


Fig. 4 - 2

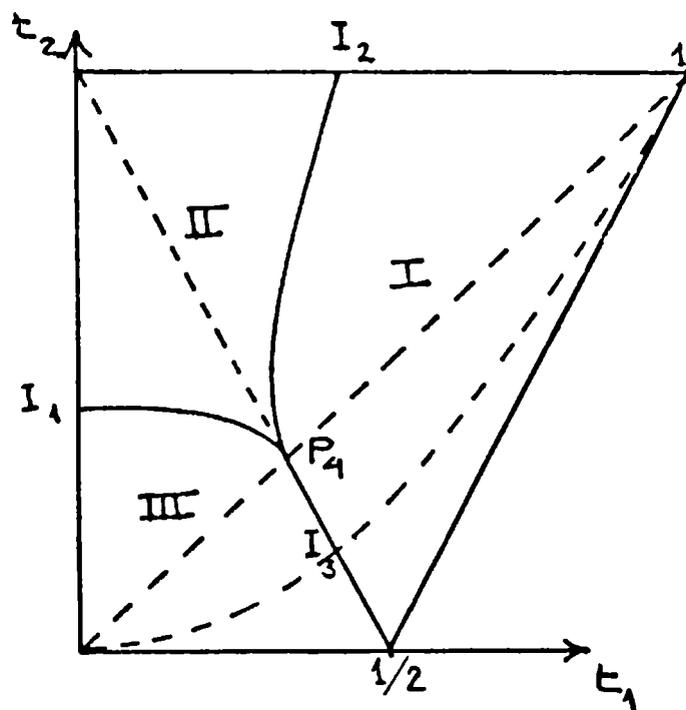


Fig. 4 - 3 Diagrama de fases del modelo $Z(4)$ spin en dos dimensiones. P_4 es el punto crítico del modelo de Potts; I_1, I_2, I_3 son los puntos críticos "tipo Ising".

CAPITULO 5

APROXIMACION DE MIGDAL - KADANOFF

5 - 1 . Descripción del método

Como se indicó en la sección 3 - 1, la técnica de decimación cuando se realiza en forma exacta, además de las dificultades de cálculo, genera un hamiltoniano efectivo con infinitas interacciones no triviales, con lo cual se hace absolutamente imprescindible efectuar alguna aproximación. Entre las técnicas de aproximación, existe una a la que por diversas propiedades, que señalaremos más abajo, y por su relativa sencillez, ha gozado de la predilección de los trabajadores de este campo: la técnica propuesta por Migdal (1975) y revisada y desarrollada por Kadanoff (1976), y que es conocida como aproximación de Migdal - Kadanoff (M-K). Esta técnica ha sido desarrollada para el caso de interacciones entre vecinos próximos. En cierto sentido, la expansión de Martinelli y Parisi (1981) (ver sección 5-3) representa una manera de incluir otras interacciones. En el resto de esta sección nos limitaremos al caso de una única interacción entre vecinos próximos.-

La técnica M-K tiene dos variantes. En ambas el proceso consiste en un "corrimiento o desplazamiento de ligaduras", concepto introducido por Kadanoff en el trabajo antes citado, y luego en la eliminación por suma o integración de los spins que han sido parcialmente desconectados. En forma genérica si expresamos la transformación (3-2b) en forma sintética como:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{R}[\mathcal{H}]$$

luego la aproximación M-K puede ser establecida como

$$\mathcal{H}' \approx \mathcal{H}'_{MK} = \mathcal{R}[\mathcal{H} + \tilde{\mathcal{H}}] \quad (5-1)$$

donde $\tilde{\mathcal{H}}$ es el "operador de corrimiento de ligaduras". Las dos variantes se originan según como actúa este operador. En la figura 5-1, se muestra para una red cuadrada el corrimiento realiza-

do simultáneamente en ambas direcciones correspondiente a un factor de reescaleo $b = 2$. Como resultado se observan spines que quedan totalmente desconectados y spines que quedan con solo dos vecinos. El valor de la cte. de interacción entre estos últimos pasa a ser igual a $2K$. En general, si se desplazan $(b - 1)$ ligaduras la cte. de interacción sobre las ligaduras "reforzadas" resulta igual a bK . Esto se suele sintetizar diciendo que el número de interacciones de la red se conserva durante el corrimiento.-

La decimación de los spines parcialmente desconectados es decir interactuantes unidimensionalmente, es ahora una operación muy sencilla y se realiza simultáneamente en todas las direcciones. Kadanoff demostró que con esta operación se recupera la técnica propuesta originalmente por Migdal. Esta variante puede ser utilizada también para aproximar decimaciones con otro tipo de redes, como por ejemplo la red triangular (Berker, Ostlund and Putnam, 1978; Caracciolo, 1981). En este caso, el procedimiento es ilustrado en la fig. 5 - 2 .

En la segunda variante, propuesta por Kadanoff como alternativa superadora de la transformación original de Migdal, se desconectan $(b-1)$ spines en una cierta dirección, por ejemplo la x en la figura 5-3, mediante el corrimiento de las ligaduras en las restantes direcciones en forma paralela a la dirección x . Nuevamente las interacciones se conservan, es decir, el valor de las ctes. de interacción sobre las ligaduras reforzadas es igual a bK . A continuación se deciman los spines parcialmente desconectados. Luego se repite toda la operación sucesivamente para cada una de las direcciones restantes y, z, \dots . Esta transformación introduce una anisotropía en las constantes de interacción. Sea $K_p, p = 1, 2, \dots, d$, la constante de interacción de un hamiltoniano, en general anisotrópico, en

la dirección x, y, \dots . Como resultado de la transformación en la versión refinada de Kadanoff correspondiente a un factor de reescaleo b es:

$$K'_l = b^{d-l} R^b (b^{l-1} K_l) \quad (5 - 2)$$

En la versión original de Migdal, la transformación daría en todas las direcciones el mismo resultado igual a la expresión (5 - 2) para $l = d$.

Cuando se realizan ambas transformaciones para el modelo de Ising anisotrópico en dos dimensiones (ver sección siguiente) resulta que la versión Kadanoff reproduce exactamente la curva crítica

$$\sinh 2 K_{x_c} \sinh 2 K_{y_c} = 1 \quad (5 - 3)$$

mientras que, evidentemente, la versión Migdal conduce a un resultado erróneo. Este es el argumento presentado por el primer autor para preferir la variante "anisotrópica" sobre la "isotrópica".-

Algunas de las propiedades de este método son las siguientes:

1 - La aproximación conserva el número de ligaduras o aristas. Esta propiedad, además de ser importante en el tratamiento de modelos con interacciones aleatorias (ver secc. 3-4) conduce al siguiente resultado (Kadanoff, 1976):

$$F'_{MK} \leq F' = F \quad (5 - 4)$$

donde F y F' son las energías libres exactas del sistema original y del renormalizado y F'_{MK} es la energía libre estimada con la aproximación del corrimiento de ligaduras en la que está basada la técnica M-K. Puesto que esta propiedad será usada en el método estudiado en el capítulo 7 creemos importante esbozar su demostración. Teniendo en cuenta la relación (5-1) y las definiciones introducidas en la secc. 3-1, resulta:

$$Z'_{MK} = \sum_{\{\sigma'\}} \exp(-\beta \mathcal{H}'_{MK}[\sigma']) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ -\beta \left(\mathcal{H}_0[\sigma] + \tilde{\mathcal{H}}_0[\sigma] \right) \right\} \\
&\geq \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}_0[\sigma]} \left(1 + \tilde{\mathcal{H}}_0[\sigma] \right)
\end{aligned}$$

donde se tuvo en cuenta que $e^x \geq 1+x$. La desigualdad anterior puede ser reescrita como:

$$Z_{MK} \geq Z \left(1 + \langle \tilde{\mathcal{H}}_0 \rangle \right)$$

Se puede ver que si $\tilde{\mathcal{H}}_0$ es un operador que sustrae interacciones en algún lugar de la red para sumarla en otro lugar de la misma, es decir si se conservan las interacciones de la red, debido a la invariancia traslacional de la misma $\langle \tilde{\mathcal{H}}_0 \rangle = 0$ luego, $Z'_{MK} \geq Z$ de donde sigue (5-4).-

2 - La aproximación es exacta en ambos límites de altas y bajas temperaturas. Lo segundo es evidente para un sistema ferromagnético puesto que en el estado fundamental están todos los spins paralelos de modo que la energía del mismo permanece invariante frente a un corrimiento de ligaduras.-

3 - La mayor precisión de las predicciones obtenidas con este método se alcanza para dimensiones próximas a la dimensión crítica inferior es decir a la dimensión a partir de la cual en el sentido creciente comienza a aparecer un punto crítico.-

4 - Puesto que las diferentes direcciones de interacción son desacopladas, esta aproximación puede ser considerada como un buen punto de partida para el análisis de problemas altamente anisotrópicos.-

5 - En el límite $b \rightarrow 1$, o sea cuando la perturbación de la red

es infinitesimal se conservan las propiedades de la misma, en particular para una red cuadrada, su autodualidad. Como se verificará en el ejemplo siguiente, esto conduce a la reproducción exacta del punto crítico, si el modelo es dual.-

La sencillez de los cálculos se examinará en la siguiente sección. Pero antes de pasar a ella y para finalizar esta sección creemos importante mencionar que el corrimiento de ligaduras ha sido también incorporado a las técnicas de bloques de spin dando origen a las llamadas técnicas variacionales de Kadanoff (Kadanoff, Houghton y Yalabik, 1976). Estas técnicas variacionales son revisadas en Burkhardt(1982).-

5 - 2 . Aplicación al modelo de Potts y al modelo Z(4) usando las transmisividades. Límite $b \rightarrow 1$ y dualidad.

Vamos a mostrar algunas características de la técnica MK mediante su aplicación al modelo de Potts cuyo hamiltoniano ha sido definido en la ec. (4-2)

Consideremos en primer lugar la implementación de la variante Kadanoff. Resulta luego sencillo establecer el resultado obtenido mediante la variante Migdal. Tomemos para simplificar el caso de una red cuadrada y consideremos un factor de reescaleo genérico $b = 1 + \lambda$. La generalización a una red hipercúbica d -dimensional es bastante directa. El sistema es homogéneo con una magnitud K de la cte. de interacción en todas las ligaduras.-

Después de realizar el corrimiento de ligaduras según la dirección x , las ctes. de interacción en la dirección y tienen el valor

$$K_y^{(1)} = bK$$

y han quedado un conjunto de spines parcialmente desconectados tal como se indica en fig. 5-3.-

La decimación de estos spines se simplifica enormemente mediante el uso de las transmisividades que se han definido en el capítulo anterior. Teniendo en cuenta la propiedad de un arreglo en serie de un conjunto de transmisividades establecido en la secc. 4-1 podemos escribir directamente el resultado de la decimación como:

$$t_x^{(1)} = t^b(\kappa) = \left[\frac{1 - e^{-q\kappa}}{1 + (q-1)e^{-q\kappa}} \right]^b \quad (5-5a)$$

luego según las relaciones vistas en secc. 4-2

$$K_x^{(1)} = \frac{1}{q} \ln \left[\frac{1 + (q-1)t^b(\kappa)}{1 - t^b(\kappa)} \right] \quad (5-5b)$$

A continuación se realiza el corrimiento de ligaduras según la dirección "y". Las ctes. de interacción sobre las ligaduras en dirección "x" toman el valor:

$$K_x^{(2)} = b K_x^{(1)} = \frac{b}{q} \ln \left[\frac{1 + (q-1)t^b(k)}{1 - t^b(k)} \right], \quad (5-6)$$

Para decimar los spines parcialmente desconectados aplicamos nuevamente la propiedad de las transmisividades en serie, obteniéndose:

$$t_y^{(2)} = (t_2^{(1)})^b = \left[\frac{1 - e^{-bqk}}{1 + (q-1)e^{-bqk}} \right]^b = [t(bk)]^b \quad (5-7a)$$

de donde

$$K_y^{(2)} = \frac{1}{q} \ln \left[\frac{1 + (q-1)t^b(bk)}{1 - t^b(bk)} \right] \quad (5-7b)$$

Aquí terminó el proceso de renormalización para $d = 2$ de modo que: $K_x^{(2)} = K'_x$, $K_y^{(2)} = K'_y$. Observar que si el sistema es inicialmente anisotrópico, $K'_x = R_x(K_x)$ y $K'_y = R_y(K_y)$ sin mezclarse las direcciones. Para $q = 2$ se obtiene (5-3). Si el sistema es inicialmente isótropo, la restitución de la isotropía se puede realizar definiendo,

$$K' = \frac{K'_x + K'_y}{2} \quad (5-8)$$

A partir de (5-6) y (5-7b) es fácil ver que la cte. de interacción renormalizada en la dirección \mathcal{L} ($\mathcal{L} = 1, 2, \dots$, d) para una red hipercúbica d -dimensional resulta:

$$K'_\ell = \frac{b^{\alpha-\ell}}{q} \ln \left[\frac{1 + (q-1)t^b(b^{\ell-1}k)}{1 - t^b(b^{\ell-1}k)} \right] \quad (5-9)$$

lo cual coincide con la expresión general (5-2).

La relación de recursión obtenida en la variante //

Migdal, es:

$$K' = \frac{1}{q} \ln \left[\frac{1 + (q-1) t^b (b^{d-1} k)}{1 - t^b (b^{d-1} k)} \right] \quad (5 - 10)$$

para todas las direcciones.

Volviendo al caso de la red cuadrada veamos la conexión de la transformación de Migdal - Kadanoff con la autodualidad del modelo de Potts tomando el límite $b \rightarrow 1$ en (5 - 5b) (en este límite todas las direcciones son equivalentes y por lo tanto equivalentes al resultado de la variante Migdal). Para ello desarrollando (5 - 6) alrededor de $b=1$ se obtiene:

$$K'_x (b = 1 + \Delta) = K + \frac{dK'_x}{db} (b=1, k) \cdot \Delta + O(\Delta^2) \quad (5 - 11)$$

En el punto fijo: $K'_x = K^*$, por lo tanto

$$\frac{dK'_x}{db} (b=1, K^*) = 0$$

la cual tiene una única solución no trivial

$$t^* = t^{D*} = e^{-qK^*}$$

esto es, la solución exacta, tal como se vio en el capítulo anterior.

Para el modelo $Z(4)$ el proceso de decimación puede también ser efectuado teniendo en cuenta la propiedad de las transmisividades en serie con las variables definidas en la sección 4 - 3. Consideraremos solamente una red cuadrada. Después del corrimiento de ligaduras, las transmisividades equivalentes en la variante Migdal resultan:

$$t'_1 = t_1^b (b\vec{k}) = \frac{1 - e^{-2bk_1}}{1 + 2e^{(-2k_2 - k_1)b} + e^{-2bk_1}} \quad (5 - 12a)$$

$$t_2' = t_2^b(b, \vec{k}) = \frac{1 - 2 e^{(-2\kappa_2 - \kappa_1)b} + e^{-2\kappa_1 b}}{1 + 2 e^{(-2\kappa_2 - \kappa_1)b} + e^{-2\kappa_1 b}} \quad (5 - 12b)$$

En el límite $b \rightarrow 1$, trabajando directamente sobre las transmisividades, se determinan los puntos fijos imponiendo:

$$\frac{dt_1'}{db} (b=1, \vec{k}^*) = 0 \quad (5 - 13a)$$

$$\frac{dt_2'}{db} (b=1, \vec{k}^*) = 0 \quad (5 - 13b)$$

Después de reemplazar (5 - 12) en (5 - 13) resulta:

$$t_1 \left\{ \ln t_1 + \frac{2 e^{-\kappa_1}}{1 - e^{-2\kappa_1}} \left[t_1 e^{-2\kappa_2} (2\kappa_2 + \kappa_1) + (1 + t_1) e^{-\kappa_1} \kappa_1 \right] \right\} = 0$$

$$t_2 \left\{ \ln t_2 + \frac{2 e^{-\kappa_1}}{1 - e^{-2\kappa_2 - \kappa_1} + e^{-\kappa_1}} \left[(1 + t_2) e^{-2\kappa_2} (2\kappa_2 + \kappa_1) - (1 - t_2) e^{-\kappa_1} \kappa_1 \right] \right\} = 0$$

Es fácil verificar que este sistema posee como solución a los siete puntos fijos del modelo $Z(4)$ analizados en el capítulo anterior. La línea de transición de fases autodual de este modelo no es solución de este sistema lo cual era de esperar ya que ella no es una línea de puntos fijos. Para obtener las líneas de transición de fases se debe tener en cuenta que las expresiones (5 - 10) y (5 - 12) son funciones continuas en b y conducen monótonamente a los valores críticos exactos a medida que b tiende a uno. Basta por lo tanto tomar un valor de b suficientemente próximo a uno y determinar en la forma

usual, mediante el flujo de trayectorias, las líneas de transiciones de fases.

Como un último comentario a esta sección se debe mencionar que las estimaciones del exponente térmico y_T son cada vez peores a medida que el factor de reescalado b tiende a uno (cálculos numéricos del autor).-

5 - 3 . Cálculo directo sobre el modelo de Potts en presencia de un campo externo.

Si bien la técnica de las transmisividades desarrollada en la sección precedente facilita enormemente los cálculos de las relaciones de recursión para un b genérico, la misma no nos da información sobre la constante C de la ec. (2 - 6) y por lo tanto tampoco sobre la función $g(K)$ de (2 - 12), la cual se analizó luego en la sección 2 - 4 y se usará en el método desarrollado en el capítulo 7 . Otra limitación de dicha técnica es que, siendo la transmisividad una variable de ligadura, no puede incorporar la información de una magnitud acoplada a cada sitio como es el campo magnético o en general, el campo externo, el cual, como se discutió en la sección 2 - 4, es esencial para el cálculo del exponente magnético γ_H .

Por todo esto es interesante mostrar una aplicación más directa de la aproximación M-K en la variante Migdal, con el objetivo de calcular además de las constantes de interacción efectivas la constante que se extrae de la función de partición después de cada paso de transformación . Consideramos una red hipercúbica d -dimensional y efectuamos un reescaleo con $b = 2$. Tomamos nuevamente el modelo de Potts con un hamiltoniano algo más simplificado que el de ec. (4 - 2), con el término de fuente dado en ec. (4 - 9) también simplificado y con el agregado de un término de interacción generado por la transformación GR. Por tanto, la función de partición inicial es:

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1}{q^N} \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left(\sum_{\langle i,j \rangle} [K \delta_{\sigma_i, \sigma_j} + L \delta_{\sigma_i, 1} \delta_{\sigma_j, 1}] + \sum_i H \delta_{\sigma_i, 1} \right) = \\
 &= \frac{1}{q^N} \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\mathcal{H}_T[\sigma]) \qquad (5 - 14)
 \end{aligned}$$

El campo magnético puede ser tratado de dos maneras en la etapa de corrimiento de ligaduras. En la primera de ellas, que es la que adoptaremos, el campo magnético es decimado exactamente tanto en los spines parcialmente desconectados como en los spines totalmente desconectados. La manera alternativa consiste en mover al campo magnético participando del corrimiento de las ligaduras (Migdal, 1975b). En algunos casos este segundo procedimiento conduce a mejores predicciones del exponente γ_H (Burkhardt, 1982).

Después del corrimiento de ligaduras; con los consiguientes cambios de las constantes de interacción sobre las ligaduras reforzadas $K \rightarrow 2^{d-1} K$, $L \rightarrow 2^{d-1} L$, se tiene:

$$Z = \frac{1}{q^{N_{desc}}} \sum_{\{\sigma_{desc}\}} \frac{1}{q^{N'}} \sum_{\{\mu\}} \frac{1}{q^{N_{dec}}} \sum_{\{\bar{\sigma}\}} \exp(-\mathcal{H}_T[\sigma_{desc}, \mu, \bar{\sigma}])$$

donde $N' = N / 2^d$, $N_{dec} = N' \cdot d$, y $N_{desc} = N - N' - N_{dec}$. La suma sobre los spines desconectados conduce a:

$$\frac{1}{q^{N_{desc}}} \prod_{i=1}^{N_{desc}} \sum_{\sigma_{desc_i}} \exp(H \delta_{\sigma_{desc_i}, 1}) = \left(\frac{e^H + q^{-1}}{q} \right)^{N_{desc}} [1 - 2^{-d} (1+d)]^{N_{dec}}$$

(5 - 15)

Para obtener las restantes contribuciones al factor externo y para determinar el hamiltoniano efectivo, es suficiente con considerar a cualquiera de los spines decimados $\bar{\sigma}$ junto a sus vecinos próximos μ_1 y μ_2 . De este modo se puede luego evaluar bastante sencillamente la expresión:

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \sum_{\bar{\sigma}} \exp \left\{ 2^{d-1} K (\delta_{\bar{\sigma}, \mu_1} + \delta_{\bar{\sigma}, \mu_2}) + 2^{d-1} L (\delta_{\mu_1, \bar{\sigma}} \delta_{\mu_1, \lambda} + \delta_{\bar{\sigma}, \mu_2} \delta_{\bar{\sigma}, \lambda}) + H \delta_{\bar{\sigma}, 1} \right\} \equiv \sum_{1,2}$$

resultando:

$$\sum_{1,2} = \sum_{\mu_1, \mu_2} \left\{ R \delta_{\mu_1,1} \delta_{\mu_2,1} + S \delta_{\mu_1, \mu_2} (1 - \delta_{\mu_1,1}) + T (\delta_{\mu_1,1} + \delta_{\mu_2,1}) \right. \\ \left. + (1 - \delta_{\mu_1, \mu_2}) + U (1 - \delta_{\mu_1,1}) (1 - \delta_{\mu_1, \mu_2} - \delta_{\mu_2,1}) \right\} \quad (5 - 16)$$

donde:

$$R = e^{2^\alpha (K+L) + H} + q - 1$$

$$S = e^H + e^{2^\alpha K} + q - 2$$

$$T = e^{2^{\alpha-1} (K+L) + H} + e^{2^{\alpha-1} K} + q - 2$$

$$U = e^H + 2 e^{2^{\alpha-1} K} + q - 3$$

Después de exponenciar y reagrupar convenientemente se obtiene:

$$\sum_{1,2} = U \sum_{\mu_1, \mu_2} \exp \left\{ \ln \frac{S}{U} \delta_{\mu_1, \mu_2} + \ln \frac{RU^2}{ST^2} \delta_{\mu_1,1} \delta_{\mu_1, \mu_2} + \ln \frac{T}{U} (\delta_{\mu_1,1} + \delta_{\mu_2,1}) \right\}$$

por lo tanto

$$K' = \ln \frac{S}{U}$$

$$L' = \ln \frac{RU^2}{ST^2}$$

(5 - 17)

$$H' = H + 2 \alpha \ln \frac{T}{U}$$

Es fácil verificar que para $H = L = 0$ se recuperan las expresiones previamente halladas correspondientes a $b = 2$.

Finalmente, el factor total que se extrae de la función de partición está dado por el factor (5 - 15) multiplicado por:

$$\left(\frac{U}{q} \right)^{N_{dec}} = \left(\frac{e^H + 2 e^{2^{\alpha-1} K} + q - 3}{q} \right)^{N \alpha / 2^\alpha} \quad (5 - 18)$$

5 - 4 . Correcciones de Martinelli - Parisi

Siguiendo a Martinelli - Parisi(1981) la aproximación M-K puede ser generalizada introduciendo en (3-1) un parámetro ϵ , $0 \leq \epsilon \leq 1$, del siguiente modo:

$$\mathcal{H}'_{\epsilon} = R_{\epsilon} [\mathcal{H}_0] = R [\mathcal{H}_0 + (1 - \epsilon) \tilde{\mathcal{H}}_0] \quad (5 - 19)$$

donde $\tilde{\mathcal{H}}_0$ sigue siendo el operador de corrimiento de ligaduras definido en la secc. 5-1. Obviamente para $\epsilon = 0$ se recobra la transformación M-K mientras que para $\epsilon = 1$ se obtiene la transformación de decimación exacta definida por (3-2). Para todo $\epsilon \neq 0$ el corrimiento de ligaduras correspondiente a $b = 2$ efectuado según fig. 5-3 conduce a que las ctes. de interacción de las ligaduras verticales indicadas con doble línea valgan $(2 - \epsilon)K$ mientras que las de las ligaduras indicadas con líneas de trazos sean iguales a ϵK . Observar que sigue habiendo una conservación de las interacciones. Luego al decimar los spines indicados con cruces se generarán nuevas interacciones. Lógicamente tras sucesivas (infinitas) transformaciones se generan infinitas interacciones es decir, un espacio de interacciones de dimensión infinita.-

Martinelli y Parisi observaron que partiendo de un hamiltoniano con una sola interacción entre vecinos próximos las interacciones generadas luego de n transformaciones eran por lo menos de orden ϵ^n .-

Esto los condujo a proponer para el hamiltoniano un desarrollo en serie de potencias de ϵ . Luego si se quiere trabajar hasta un cierto orden en ϵ , digamos ϵ^m , es suficiente con realizar un número finito de transformaciones GR para generar todas las interacciones hasta dicho orden. Esto significa un truncamiento del espacio de las interacciones. Un nuevo paso de transformación generaría solamente interacciones de orden ϵ^{m+1} .

Por supuesto, todas las interacciones hasta ϵ^m deben ser incluidas desde el principio del cálculo si se pretende obtener el hamiltoniano del punto fijo.-

Por ejemplo, para el modelo de Ising en una red cuadrada si se trabaja hasta el primer orden en ϵ es suficiente con tomar de partida además de la interacción entre vecinos próximos la interacción entre siguientes vecinos próximos. Si se quiere trabajar hasta el orden ϵ^2 se debe transformar un hamiltoniano que posea además de las interacciones mencionadas las interacciones entre cuatro spines y las interacciones de terceros y cuartos vecinos.-

A partir de las relaciones de recursión se obtienen el punto crítico $K_c(\epsilon)$ y el exponente crítico $\nu(\epsilon)$ también en potencias de ϵ .-

Lo interesante de esta expansión propuesta por Martignelli y Parisi es que en el truncamiento ϵ no se supone que los parámetros de interacción son pequeños, hipótesis en la que se basan otros métodos como por ejemplo la expansión en cumulantes.-

El inconveniente de este método, hasta tanto se desarrolle una tecnología del cálculo, es que su tediosidad hace prácticamente imposible llegar a órdenes mayores que ϵ es decir la primera conexión a la aproximación MK. Esto sucede con los trabajos de Caracciolo y Patanello (1983) con el modelo de Potts, y de Roberts (1984) para el modelo Z (4). Estas series sumamente cortas hacen a su vez muy difícil la extrapolación de los resultados a $\epsilon = 1$ que es el límite en que se recupera la transformación RG exacta.-

De todos modos la expansión de M-P da un punto de partida para por lo menos estimar los errores involucrados en la aproximación M-K.-

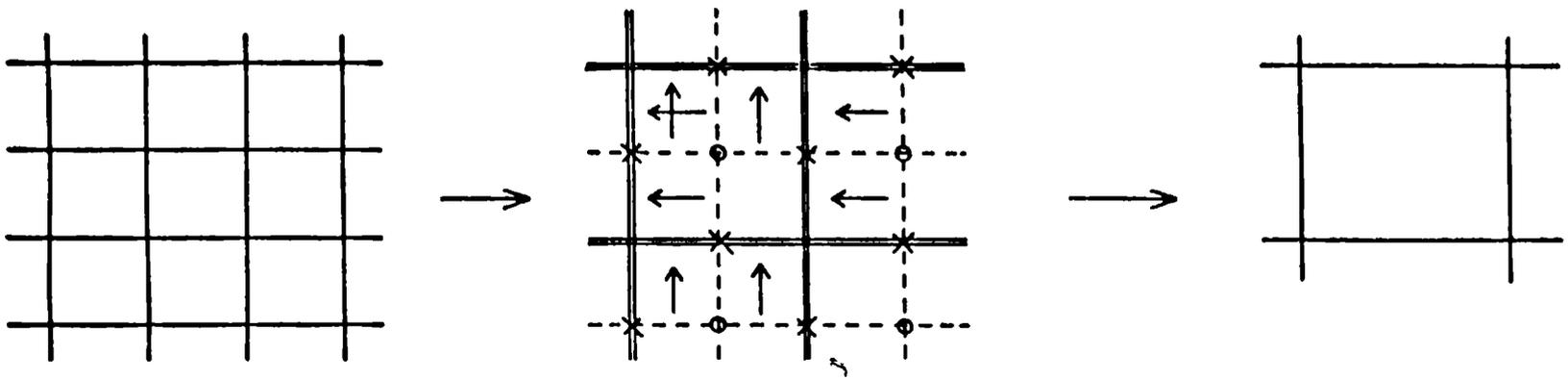


Fig. 5-1: Transformación GR en la aproximación de Migdal: corrimiento de las ligaduras simultáneamente en todas las direcciones; $b = 2$.

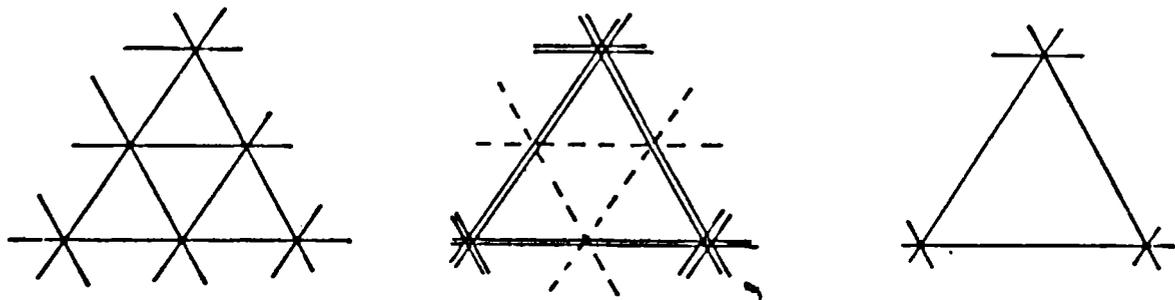


Fig. 5-2: Transformación GR en la aproximación de Migdal para una red triangular con $b = 2$.

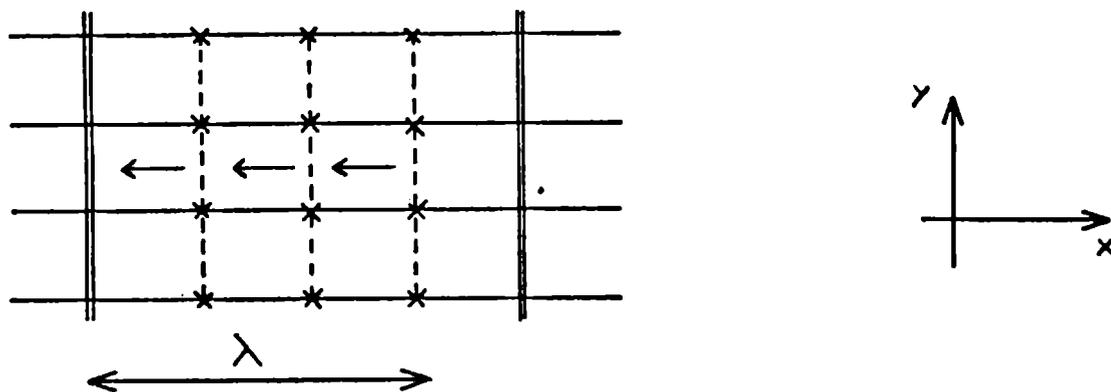


Fig. 5-3: Corrimiento de ligaduras seguido de decimación según el eje x en la versión de Kadanoff.

CAPITULO 6

GRAFOS DE DOS TERMINALES

6 - 1 . Reducción de bloques a grafos de dos terminales.

Grafos autoduales.

En el capítulo 3 se ha caracterizado al método que desarrollaremos a continuación como un método que combina aspectos de las técnicas de decimación y de bloques de spines.

Tomemos el caso de dos dimensiones espaciales aunque, en principio, el método podría formularse para cualquier número de dimensiones. En un primer paso consideremos a la red construída mediante bloques como el indicado en la fig. 6 - 1a. La transformación de renormalización consiste en pasar al bloque de fig. 6 - 1c con el cual reconstituimos la red correspondiente a un factor de reescaleo $b = 2$.

La constante de interacción renormalizada se obtiene en cada dimensión deformando el bloque inicial según se indica en la fig. 6 - 1b (Bernasconi, 1978) y decimando los spines internos C y D. Para $b = 3$ el proceso se ilustra en fig. 6 - 2.

Este método puede ser también usado para el tratamiento de sistemas con interacciones entre vecinos próximos y vecinos segundos, ya sea sobre redes cuadradas como sobre redes tipo "4 - 8" (de Magalhaes, Tsallis y Schwachheim, 1981).

El proceso de deformación del bloque inicial que genera el grafo de dos terminales se realiza fijando dos raíces y colapseando las entradas y las salidas según lo indican las flechas en fig. 6 - 1a. Las ligaduras irrelevantes deben ser eliminadas.

La etapa de decimación de grafos de dos terminales se simplifica sumamente mediante el uso del método de ruptura (o apertura) - colapso que desarrollaremos en las secciones siguientes. Para la implementación de este método conviene explotar las propiedades de dualidad y autodualidad de este tipo de

grafos.

Es importante recordar el concepto de dualidad de grafos (Essam y Fisher 1971, Tsallis y Levy 1980, Martín 1980) "dos grafos planares de dos terminales G y G^D se dicen duales si pueden ser superimpuestos de tal forma que cada ligadura de uno de los grafos cruce una y solo una ligadura del otro y además cada vértice interno no terminal de un grafo resulte rodeado por una malla elemental del otro".

Un grafo es autodual si G y G^D son idénticos. Es fácil verificar que los grafos representados en las figs. 6 - 1b y 6 - 2b son autoduales. Es decir que esta transformación preserva la autodualidad de la red cuadrada. Luego es de esperar que los puntos críticos de modelos autoduales como por ejemplo el modelo de Potts y el modelo $Z(4)$ (ver Savit 1980) sean exactamente obtenidos de las relaciones de recursión correspondientes a esta transformación.

Esta transformación se puede realizar con valores arbitrarios de las constantes de interacción en cada ligadura. Luego, como se indicó en la secc. 3 - 5, es factible el tratamiento de modelos con interacciones aleatorias (ver por ejemplo, Yeomans y Stinchcombe 1979, Costa y Tsallis 1983). También se han considerado dentro de este formalismo a sistemas anisotrópicos (da Silva, Schwachheim y Tsallis, 1983).

En este capítulo, a diferencia de trabajos anteriores (Martín 1980) en los que se deciman directamente los spines interiores, incluso en la presencia de un campo magnético (Martín y Tsallis 1981), se utiliza la técnica de apertura - colapso, la cual simplifica dicho proceso. El autor ha considerado interesante extender dicha técnica a un modelo con dos constantes de interacción como es el modelo $Z(4)$. Por otra parte este modelo, en una red cuadrada posee importantes propiedades de dualidad, por lo cual por lo dicho más arriba, es de esperar

que su diagrama de fases sea exactamente reproducido.

Se debe observar además que la técnica de apertura - colapso conduce a una rápida estimación de la función $g[K]$ que contribuye a la energía libre según ec. (2 - 12). Luego, se puede continuar con el cálculo usual de otras magnitudes como, entre otras, la energía interna.

Como desventaja de dicha técnica respecto del método directo se puede computar la imposibilidad de la inclusión del campo magnético en aquel formalismo, al menos, de una manera simple.-

6 - 2. Relación de recursión de Fortuin - Kasteleyn para el modelo de Potts.-

En esta sección se expondrá la demostración de un importante resultado debido a Fortuin y Kasteleyn (1972) el cual indica la posibilidad de que un grafo de dos terminales para un hamiltoniano dado pueda ser resuelto mediante la técnica de // ruptura - colapso.-

Utilizaremos en gran parte la terminología de estos autores. Consideremos un grafo G en un número arbitrario de dimensiones espaciales. Sea $V(G)$ el conjunto de vértices v, v' , de G y sea $E(G)$ el conjunto de ligaduras e, e', \dots .-

Definamos como de costumbre la variable de spin en cada vértice v como σ_v la cual para el modelo de Potts de q - estados toma q valores diferentes:

$$\sigma_v = e^{i \frac{2\pi}{q} m_v} \quad m_v = 0, 1, \dots, q-1 \quad (6 - 1)$$

En cada ligadura se tiene una constante de interacción J_e . El grafo puede ser cualquiera siempre que entre dos vértices del mismo no haya más de una sola ligadura.-

El hamiltoniano del modelo de Potts de q - estados que adoptamos ahora es: (comparar con el de secc. 4-1)

$$\mathcal{H}[\sigma] = - \sum_{e' \in E(G)} q J_{e'} (\delta_{\sigma_v \sigma_{v'}} - 1) \quad (6 - 2)$$

v y v' son los extremos de la ligadura e' . Para simplificar la notación definimos $K_{e'} = \beta q J_{e'}$ y $\sigma_{e'} = \delta_{\sigma_v \sigma_{v'}}$ de modo que la función de partición resulta:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{q^N} \sum_{\{\sigma_v\}} \exp \{ - \beta \mathcal{H}[\sigma] \} = \\ &= \frac{1}{q^N} \sum_{\{\sigma_v\}} \exp \left\{ \sum_{e' \in E(G)} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1) \right\} \quad (6 - 3) \end{aligned}$$

Consideremos una ligadura cualquiera e . La suma sobre todas las configuraciones $\sigma \equiv \{\sigma_v\}$ puede ser descompuesta en la suma de todas las configuraciones en las que $\sigma_e = 1$ más la suma de todas las configuraciones con $\sigma_e = 0$. Es decir:

$$Z = Z[\sigma_e = 1] + Z[\sigma_e = 0] \quad (6 - 4a)$$

donde:

$$Z[\sigma_e = 1] = \frac{1}{q^N} \sum_{\sigma: \sigma_e = 1} \exp \sum_{e' \in E(G)} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1) \quad (6 - 4b)$$

$$= \frac{1}{q^N} \sum_{\sigma: \sigma_e = 1} \exp \sum_{e' \in E(G) - e} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1)$$

$$Z[\sigma_e = 0] = \frac{1}{q^N} \sum_{\sigma: \sigma_e = 0} \exp \sum_{e' \in E(G)} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1) \quad (6 - 4c)$$

$$= \frac{e^{-K_e}}{q^N} \sum_{\sigma: \sigma_e = 0} \exp \sum_{e' \in E(G) - e} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1)$$

donde evidentemente $E(G) - e$ indica el conjunto de ligaduras de G excluyendo la ligadura e .

El caso $\sigma_e = 1$ que ocurre cuando σ_v y $\sigma_{v'}$ están en el mismo estado, puede ser interpretado como una contracción o colapso de la ligadura e de modo que como resultado de la misma los dos vértices v y v' coinciden. Luego, definiendo:

$$Z(G_e) = \frac{1}{q^{N-1}} \sum_{\sigma'} \exp \sum_{e' \in E(G_e)} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1) \quad (6 - 5a)$$

donde $\mathcal{C}_e G$ es el "grafo contraído" que resulta de contraer la ligadura e y σ indica las configuraciones de las variables de spin sobre los vértices de $\mathcal{C}_e G$, resulta:

$$Z[\sigma_e = 1] = \frac{1}{q} Z(\mathcal{C}_e G) \quad (6 - 5b)$$

Consideremos ahora el "grafo abierto" $\mathcal{A}_e G$, es decir el grafo que se obtiene a partir del grafo G eliminando o "rompiendo" la ligadura e . Es obvio que $V(\mathcal{A}_e G) = V(G)$ de modo que las configuraciones o estados de spin de $\mathcal{A}_e G$ son los mismos que los de G , por lo cual la suma sobre todas las configuraciones puede ser dividida como antes, es decir:

$$Z(\mathcal{A}_e G) = \sum_{\sigma: \sigma_e = 1} \exp \sum_{e' \in E(G) - e} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1) + \sum_{\sigma: \sigma_e = 0} \exp \sum_{e' \in E(G) - e} K_{e'} (\sigma_{e'} - 1) \quad (6 - 6a)$$

donde hemos usado $E(\mathcal{A}_e G) = E(G) - e$. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriormente discutidas podemos reescribir (6 - 6a) como:

$$Z(\mathcal{A}_e G) = \frac{1}{q} Z(\mathcal{C}_e G) + e^{K_e} Z[\sigma_e = 0] \quad (6 - 6b)$$

Finalmente con (6 - 4), (6 - 5) y (6 - 6) obtenemos la relación de recursión buscada:

$$Z(G) = \frac{(1 - u_e)}{q} Z(\mathcal{C}_e G) + u_e Z(\mathcal{A}_e G) \quad (6 - 7)$$

$$\text{donde: } u_e = \exp(-K_e) = \exp(-\beta q J_e) \quad (6 - 8)$$

La relación (6 - 7) conduce a una interpretación sencilla de $Z(\mathcal{A}_e G)$ y $Z(\mathcal{C}_e G)$ a las que denotaremos en forma simplificada Z^A y Z^C respectivamente. Esta interpretación es:

$$Z^A(G) = \lim_{J_e \rightarrow 0} Z(G)$$

$$Z^C(G) = \lim_{J_e \rightarrow \infty} Z(G) \quad (6-9)$$

Por supuesto que la relación de recursión (6-7) puede ser aplicada a $Z^A(G)$ y $Z^C(G)$ tomando otra ligadura e'' y así sucesivamente hasta considerar a la totalidad de las ligaduras. En la siguiente sección trasladaremos la relación (6-7) entre las funciones de partición de los tres grafos a la relación entre las constantes de acoplamiento efectivas de cada uno de ellos suponiendo que son grafos de dos terminales.-

6 - 3 . Técnica de apertura - colapso. Aplicación al bloque "puente de Wheatstone".-

Continuamos considerando el modelo de Potts de q - estados. Supongamos que G es un grafo en el que dos vértices pertenecientes al contorno del mismo han sido destacados como "terminales". Llamemos a estos dos vértices A y B . Los restantes vértices serán considerados "internos", v_i .-

Cualquiera sea el grafo G es fácil ver que la función de partición, después de decimar los spines internos, tiene la expresión

$$Z(G) = \sum_{\sigma_A, \sigma_B} \left[R \delta_{\sigma_A \sigma_B} + S (1 - \delta_{\sigma_A \sigma_B}) \right] \quad (6 - 10)$$

donde R y S como se verá en el ejemplo tratado al final de esta sección son funciones de las constantes de interacción de todas las ligaduras de $E(G)$. La expresión (6 - 10) puede ser reescrita como

$$Z(G) = R \sum_{\sigma_A, \sigma_B} \exp \left\{ \ln \frac{R}{S} (\delta_{\sigma_A \sigma_B} - 1) \right\} \quad (6 - 11)$$

de donde la constante de interacción efectiva resulta

$$K_{ef} = q J_{ef} = \ln \frac{R}{S} \quad (6 - 12a)$$

o bien, en términos de la cantidad definida en (6 - 8):

$$\mu_{ef} = \frac{S}{R} \quad (6 - 12b)$$

Análogamente, para el grafo obtenido contrayendo una ligadura e , $\mathcal{C}_e G$, se obtiene:

$$Z^c(G) \equiv Z(\mathcal{C}_e G) = \sum_{\sigma_A \sigma_B} \left[R_e^c \delta_{\sigma_A \sigma_B} + S_e^c (1 - \delta_{\sigma_A \sigma_B}) \right] \quad (6-13)$$

y para el grafo $A_e G$, en el cual se ha abierto la misma ligadura:

$$Z^A(G) \equiv Z(A_e G) = \sum_{\sigma_A \sigma_B} \left[R_e^A \delta_{\sigma_A \sigma_B} + S_e^c (1 - \delta_{\sigma_A \sigma_B}) \right] \quad (6-14)$$

Sustituyendo (6-13) y (6-14) en la relación de recursión de // Fortuin - Kasteleyn y comparando la expresión resultante con (6-10) se obtiene

$$R = \left(\frac{1 - u_e}{q} \right) R_e^c + u_e R_e^A \quad (6-15a)$$

$$S = \left(\frac{1 - u_e}{q} \right) S_e^c + u_e S_e^A \quad (6-15b)$$

La técnica de apertura - colapso consiste en la reducción interactiva de un grafo a subgrafos abiertos y contraídos y en la utilización de las relaciones (6-15 a y b) para el cálculo de la constante de acoplamiento efectiva.-

Si expresamos la transmisividad efectiva del grafo G y de los subgrafos abierto y contraído como

$$t = \frac{N}{D} \quad , \quad t^A = \frac{N_e^A}{D_e^A} \quad ; \quad t^c = \frac{N_e^c}{D_e^c} \quad (6-16)$$

respectivamente donde N, N^A, N^c y D, D^A, D^c son funciones de

las transmisividades de sus ligaduras y recordando la relación adelantada en el cap. 4:

$$t_i = \frac{1 - u_i}{1 + (q-1)u_i} \quad (6-17)$$

donde $t_i = t, t_e^A, t_e^C$ y $u_i = u, u_e^A, u_e^C$, resulta sencillo demostrar que:

$$N = (1 - t_e) N_e^A + t_e N_e^C \quad (6-18a)$$

$$D = (1 - t_e) D_e^A + t_e D_e^C \quad (6-18b)$$

Comparando (6-15) con (6-18) se observa que, absorbiendo la cte. $1/q$ en R_e^C y S_e^C , ambas expresiones tienen la misma forma excepto que los factores asociados al grafo contraído han intercambiado sus posiciones con los factores asociados al grafo abierto.-

A continuación aplicaremos este método al grafo de dos terminales "puente de Wheatstone" mostrado en fig. 6-1b cuya autodualidad fue mencionada en la secc. 6-1. Consideraremos el caso no homogéneo con transmisividades t_i ($i = 1, \dots, 5$). Los grafos abierto (A) y contraído (C) obtenidos eliminando ó contrayendo la ligadura 5 respectivamente son mostrados en fig. 6-4a, b. Es fácil verificar que estos grafos son duales entre sí.-

Utilizando las propiedades de la transmisividad en serie y en paralelo mencionadas en secc. 4-1 es fácil obtener la transmisividad del grafo A como la transmisividad en paralelo.

$$t_p^D = t_{s_1}^D t_{s_2}^D$$

donde $t_{s_1} = t_1 t_2$ y $t_{s_2} = t_3 t_4$

Invirtiendo t_p^D se obtiene

$$t^A = \frac{N^A}{D^A} = \frac{t_1 t_2 + t_3 t_4 + (q-2) t_1 t_2 t_3 t_4}{1 + (q-1) t_1 t_2 t_3 t_4} \quad (6-19a)'$$

La transmisividad del grafo G se obtiene como la transmisividad en serie

$$t_s = t_{P_1} t_{P_2}$$

donde t_{P_1} y t_{P_2} se obtienen invirtiendo

$$t_{P_1}^D = t_1^D t_3^D \qquad t_{P_2}^D = t_2^D t_4^D$$

El resultado es

$$t^c = \frac{N^c}{D^c} = \frac{t_1 t_2 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_3 t_4 + (q-2)^2 t_1 t_2 t_3 t_4 + (q-1)(t_1 t_3 + t_2 t_4) + (q-2)(t_1 t_2 t_3 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 + t_2 t_3 t_4) + (q-1)^2 t_1 t_2 t_3 t_4}{(6-19b)}$$

Luego, utilizando (6-18a, b) se obtiene

$$N = t_1 t_2 + t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + (q-2)(q-3) t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + (q-2)(t_1 t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_4 t_5) \quad (6-20)$$

$$D = 1 + (q-1)(t_1 t_3 t_5 + t_2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_4) + (q-1)(q-2) t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$$

Por supuesto el caso homogéneo se recupera para $t_1 = \dots = t_5 = t$. En este caso Levy y Tsallis (1981) han calculado el exponente crítico $\nu(q)$ utilizando este método para $b = 2$ y $b = 3$. De acuerdo a lo discutido en secc. 4-2, para $q > 4$ el exponente $\nu(q)$ tiene un significado puramente formal.

Utilizando las expresiones (6 - 20) Yeomans y Stinchcombe estudiaron el modelo de Potts diluido, según el método adelantado en secc. 3-5. Observar que la distribución de probabilidades en términos de las transmisividades tiene la misma expresión que la de ec. (3 -

$$P(t_i) = p \delta(t_i - t_0) + (1 - p) \delta(t_i)$$

Una última observación, importante para la sección 6 - 5. Si se escribe t^C en forma factorizada como:

$$t^C = \frac{[t_1 + t_3 + (q-2)t_1 t_3][t_2 + t_4 + (q-2)t_2 t_4]}{[1 + (q-1)t_1 t_3][1 + (q-1)t_2 t_4]} \quad (6-21)$$

se observa que se obtiene t^A descartando los productos "cruzados" en el numerador y denominador de (6-21).-

6 - 4 . Generalización del resultado de Fortuin - Kasteleyn al modelo Z(4).

En esta sección nos proponemos realizar un tratamiento sobre la función de partición del modelo Z (4) análogo al realizado para el modelo de Potts con el objetivo de facilitar la decimación de bloques como los de dos terminales analizados en la sección anterior.-

Consideramos un grafo G y adoptamos la terminología de la sección 6-2. Para simplificar las expresiones denotamos al hamiltoniano de la siguiente manera (ver secc. 4-3):

$$\mathcal{H} = - \sum_{e'} (h_{1e'} + h_{2e'})$$

con:

$$h_{1e'} = K_{1e'} (\text{Re } \sigma_{e'} - 1)$$

$$h_{2e'} = K_{2e'} (\sigma_{e'}^2 - 1)$$

donde β ha sido absorbido en las constantes de interacción y $\sigma_{e'} = \sigma_v \sigma_{v'}$

Repetimos el proceso de sección 6-2 en dos etapas. En la primera de ellas dividimos la función de partición del modelo respecto de una ligadura arbitraria "e" de la siguiente manera:

$$Z = Z[\sigma_e^2 = +1] + Z[\sigma_e^2 = -1] \quad (6-22)$$

donde

$$Z[\sigma_e^2 = +1] = \frac{1}{4^N} \sum_{\sigma: \sigma_e^2 = +1} \exp \left\{ \sum_{e' \in E(G)} (h_{1e'} + h_{2e'}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4^N} \sum_{\sigma: \sigma_e^2 = +1} \exp \left\{ \sum_{e' \in E(G)} h_{1e'} + \sum_{e' \in E(G)-e} h_{2e'} \right\} \quad (6-23a)$$

y

$$\begin{aligned} Z[\sigma_e^2 = -1] &= \frac{1}{4^N} \sum_{\sigma: \sigma_e^2 = -1} \exp \left\{ \sum_{e' \in E(G)} (h_{1e'} + h_{2e'}) \right\} = \\ &= \frac{1}{4^N} \sum_{\sigma: \sigma_e^2 = -1} \exp \left\{ \sum_{e' \in E(G)} h_{1e'} + \sum_{e' \in E(G)-e} h_{2e'} \right\} \end{aligned} \quad (6-23b)$$

En la segunda etapa realizamos una separación de configuraciones en $Z[\sigma_e^2 = +1]$ similar a la anterior:

$$Z[\sigma_e^2 = +1] = Z[\sigma_e = +1] + Z[\sigma_e = -1]$$

donde

$$\begin{aligned} Z[\sigma_e = +1] &= \frac{1}{4^N} \sum_{\sigma: \sigma_e = +1} \exp \left\{ \sum_{E(G)-e} (h_{1e'} + h_{2e'}) \right\} \quad (6-24a) \\ &\equiv Z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z[\sigma_e = -1] &= \frac{e^{-2\kappa_{1e}}}{4^N} \sum_{\sigma: \sigma_e = -1} \exp \left\{ \sum_{E(G)-e} (h_{1e'} + h_{2e'}) \right\} \quad (6-24b) \\ &\equiv e^{-2\kappa_{1e}} Z_2 \end{aligned}$$

y a su vez reescribimos $Z[\sigma_e^2 = -1]$ como:

$$\begin{aligned} Z[\sigma_e^2 = -1] &= \frac{e^{-2\kappa_{2e} - \kappa_{1e}}}{4^N} \sum_{\sigma: \sigma_e = \pm 1} \exp \left\{ \sum_{E(G)-e} (h_{1e'} + h_{2e'}) \right\} \\ &\equiv e^{-2\kappa_{2e} - \kappa_{1e}} Z_3 \end{aligned} \quad (6-24c)$$

Debido a que $\sigma_e = +1$ implica que σ_v y $\sigma_{v'}$ están en el mismo estado es decir v y v' coinciden resulta:

$$Z_1 = \frac{1}{4} Z_1(\mathcal{C}_e G) \quad (6-25a)$$

Considerando nuevamente el grafo $A_e G$ en el que la ligadura e ha sido eliminada (o sea tomando sobre ella $K_{1e} = K_{2e} = 0$) se tiene

$$Z(A_e G) = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad (6-25b)$$

Pero ahora a diferencia del modelo de Potts es necesario considerar un tercer grafo $\mathcal{B}_e G$ obtenido a partir de G abriendo "parcialmente" la ligadura e , tomando $K_{1e} = 0$ y contrayéndola parcialmente tomando $K_{2e} = \infty$. En otras palabras, esta ligadura solo distingue $\sigma_e = +1$ ó $\sigma_e = -1$, con lo cual

$$\frac{1}{2} Z(\mathcal{B}_e G) = Z_1 + Z_2 \quad (6-25c)$$

(el factor $1/2$ corresponde a la variable parcialmente eliminada).-

Finalmente, reuniendo (6-22/25) resulta la expresión que generaliza la relación de recursión (6-17)

$$Z = \left(\frac{1 - e^{-2\kappa_1}}{4} \right) Z_1^C + \left(\frac{e^{-2\kappa_1} - e^{-2\kappa_2 - \kappa_1}}{2} \right) Z_1^B + e^{-2\kappa_2 - \kappa_1} Z_1^A$$

donde hemos simplificado algo la notación. Más aun, utilizando las variables definidas en secc. 4-3 a las que transcribimos para mayor comodidad

$$t_1^D = e^{-2\kappa_2 - \kappa_1} \equiv \omega^{(1)} \quad (6-26a)$$

$$t_2^D = e^{-2\kappa_1} \equiv \omega^{(2)} \quad (6-26b)$$

resulta la expresión

$$Z_1 = \left(\frac{1 - \omega^{(2)}}{4} \right) Z^C + \left(\frac{\omega^{(2)} - \omega^{(1)}}{2} \right) Z^B + \omega^{(1)} Z^A \quad (6-27)$$

la cual es coherente con la relación (6-17) con $q = 2$ para los límites Ising del modelo $Z(4)$:

i) $K_1 = 0 \Rightarrow \omega^{(2)} = 1$ y $Z^B = Z^C$ en la variable restante

ii) $K_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \omega^{(1)} = 0$ y $Z^B = Z^A$ en la variable restante

(hay un factor $1/2$ que corresponde al doble recubrimiento)

iii) $K_2 = 0 \Rightarrow \omega^{(2)} = \omega^{(1)2}$ y $Z^B = Z^A$ en la variable restante

(aquí es necesario estudiar el modelo como dos Ising desacoplados haciendo $K_2 = 0$ en ec. (4-15b))

y con $q = 4$ para la situación en que reproduce el modelo de Potts:

iv) $K_1 = 2 K_2 \Rightarrow \omega^{(1)} = \omega^{(2)}$ y Z^C, Z^A tienen la interpretación dada en ecs. (6-9).-

6 - 5 . Técnica de apertura - colapso para el modelo Z(4)

Observemos que la función de partición para cualquier grafo de dos terminales con el modelo Z(4) se puede expresar como:

$$Z(G) = \sum_{\sigma_A \sigma_B} \left[R_1 \delta_{\sigma_A \sigma_B} + R_2 (1 - \delta_{\sigma_A \sigma_B}) \delta_{\sigma_A^2 \sigma_B^2} + R_3 (1 - \delta_{\sigma_A \sigma_B}) (1 - \delta_{\sigma_A^2 \sigma_B^2}) \right] \quad (6-2)$$

Los coeficientes R_α ($\alpha = 1, 2, 3$) determinan las constantes de interacción de la ligadura simple equivalente entre las terminales A y B mediante las ecuaciones:

$$\omega^{(1)} = \frac{R_3}{R_1} \quad (6-29a)$$

$$\omega^{(2)} = \frac{R_2}{R_1} \quad (6-29b)$$

donde $\omega^{(1)}$ y $\omega^{(2)}$ han sido definidas en (6-26).-

Eligiendo una ligadura cualquiera se generan nuevos grafos AG, BG y CG siguiendo las prescripciones establecidas en la sección anterior. Las funciones de partición $Z(AG)$, $Z(BG)$ y $Z(CG)$ también tendrán la forma de la ec.(6-28) con coeficientes R_α^A, R_α^B y R_α^C respectivamente. Las constantes de interacción equivalente $\vec{K}^A, \vec{K}^B, \vec{K}^C$, están relacionadas con los respectivos coeficientes mediante expresiones análogas a (6-29).-

Reemplazando en (6-26) $Z(G), Z(AG), Z(BG)$ y $Z(CG)$ por sus respectivas expresiones y reordenando términos se obtienen:

$$R_\alpha = \left(\frac{1 - \omega_e^{(1)}}{4} \right) R_\alpha^A + \left(\frac{\omega_e^{(1)} - \omega_e^{(2)}}{2} \right) R_\alpha^B + \omega_e^{(1)} R_\alpha^C \quad (6-30)$$

Esta relación permite reemplazar el grafo original por

grafos relativamente más sencillos, y el proceso puede ser aplicado iterativamente cuantas veces se desee.-

La relación (6-30) puede ser transcripta en términos de las transmisividades $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ dadas por las expresiones

$$t^{(1)} = \frac{1 - \omega^{(2)}}{1 + \omega^{(2)} + 2\omega^{(1)}} \equiv \frac{X_3}{X_1}$$

$$t^{(2)} = \frac{1 + \omega^{(2)} - 2\omega^{(1)}}{1 + \omega^{(2)} + 2\omega^{(1)}} \equiv \frac{X_2}{X_1} \quad (6-31)$$

donde X_α son funciones de las transmisividades de las ligaduras de los grafos respectivos. La relación buscada es:

$$X_\alpha = t_e^{(1)} X_\alpha^A + (t_e^{(2)} - t_e^{(1)}) X_\alpha^B + (1 - t_e^{(2)}) X_\alpha^C \quad (6-32)$$

la cual comparada con (6-30) parece indicar nuevamente una inversión de los significados de los grafos abierto y contraído.-

Pasamos seguidamente a analizar el puente de Wheatstone ya considerado en la sección anterior. Los grafos abierto y contraído pueden ser resueltos sencillamente en términos de las \vec{E}_i (i designa las ligaduras 1, ..., 4) ó de sus duales $\vec{\omega}_i$ utilizando las propiedades de arreglos en serie y paralelo. No parece existir un algoritmo semejante para tratar el grafo con la ligadura 5 abierta, contraída. Se ha determinado $\Xi(\mathcal{B}\mathcal{G})$ mediante la suma explícita sobre las configuraciones.

Los resultados obtenidos, en términos de las variables duales son los siguientes:

$$R_1^A = (1 + \omega_1^{(2)} \omega_2^{(2)} + 2 \omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)}) (1 + \omega_3^{(2)} \omega_4^{(2)} + 2 \omega_3^{(1)} \omega_4^{(1)})$$

$$R_2^A = (\omega_1^{(2)} + \omega_2^{(2)} + 2 \omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)}) (\omega_3^{(2)} + \omega_4^{(2)} + 2 \omega_3^{(1)} \omega_4^{(1)})$$

$$R_3^A = \left[\omega_2^{(1)} (1 + \omega_1^{(2)}) + \omega_1^{(1)} (1 + \omega_2^{(2)}) \right] \left[\omega_3^{(1)} (1 + \omega_4^{(2)}) + \omega_4^{(1)} (1 + \omega_3^{(2)}) \right] \quad (6-33)$$

$$\begin{aligned}
R_1^B &= (1 + \omega_1^{(2)} \omega_2^{(2)}) (1 + \omega_3^{(2)} \omega_4^{(2)}) + 4 \omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)} \omega_3^{(1)} \omega_4^{(1)} \\
R_2^B &= (\omega_1^{(2)} + \omega_2^{(2)}) (\omega_3^{(2)} + \omega_4^{(2)}) + 4 \omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)} \omega_3^{(1)} \omega_4^{(1)} \\
R_3^B &= (1 + \omega_1^{(2)}) (1 + \omega_3^{(2)}) \omega_2^{(1)} \omega_4^{(1)} + (1 + \omega_2^{(2)}) (1 + \omega_4^{(2)}) \omega_1^{(1)} \omega_3^{(1)}
\end{aligned}
\tag{6 - 34}$$

$$\begin{aligned}
R_1^C &= 1 + \omega_1^{(2)} \omega_2^{(2)} \omega_3^{(2)} \omega_4^{(2)} + 2 \omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)} \omega_3^{(1)} \omega_4^{(1)} \\
R_2^C &= \omega_2^{(2)} \omega_4^{(2)} + \omega_1^{(2)} \omega_3^{(2)} + 2 \omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)} \omega_3^{(1)} \omega_4^{(1)} \\
R_3^C &= (1 + \omega_1^{(2)} \omega_3^{(2)}) \omega_2^{(1)} \omega_4^{(1)} + (1 + \omega_2^{(2)} \omega_4^{(2)}) \omega_1^{(1)} \omega_3^{(1)}
\end{aligned}
\tag{6 - 35}$$

Nuevamente se verifica, ahora en términos de las $\vec{\omega}_i$ la eliminación de productos cruzados al pasar de (6-33) a (6-34) y de (6-34) a (6-35). Ignoramos si esta regla tiene carácter general, pero de ser así bastaría el cálculo del grafo abierto para obtener todos los demás. Observar también lo siguiente. Los grafos abierto y contraído son mutuamente duales e intercambian sus roles cuando $\{\vec{t}_i\} \longleftrightarrow \{\vec{\omega}_i\}$. El grafo abierto-contraído conserva la autodualidad por lo cual R_α en términos de las $\vec{\omega}_i$ tiene la misma forma que X_α en función de las \vec{t}_i .

Finalmente, las relaciones de recursión para el sistema homogéneo, en términos de las transmisividades resultan:

$$t^{(1)'} = \frac{2}{D} t^{(1)2} \left(1 + t^{(1)} + 2 t^{(1)} t^{(2)} + 3 t^{(2)2} + t^{(1)} t^{(2)2} \right)
\tag{6 - 36}$$

$$t^{(2)'} = \frac{2}{D} \left(t^{(1)4} + t^{(1)4} t^{(2)} + t^{(2)2} + t^{(2)3} + 4 t^{(1)3} t^{(2)} \right)$$

donde:

$$D = 1 + t^{(2)4} + 2 t^{(1)4} + 2 t^{(1)} (t^{(2)2} + t^{(1)4}) + 4 t^{(1)3} (1 + t^{(2)2})$$

Como era de esperar, debido a las propiedades de dualidad del

modelo, estas relaciones de recursión generan exactamente todos los puntos fijos del mismo descritos en el Capítulo 4. Además es posible calcular, siguiendo la prescripción usual, el exponente crítico $\nu = 1/\gamma_T$ en cada uno de los puntos fijos no triviales. El resultado es:

- i) para los puntos fijos tipo Ising: 1.149 (exacto: 1)
- ii) para el punto triple: 0.948 (exacto, conjeturado, 2/3)

Finalmente, puesto que la línea $P_4 - I_3$ (ver Cap. 4) es reproducida exactamente por las relaciones de recursión (6 - 36), y puesto que dicha línea aparece como una línea de puntos críticos, se ha calculado la variación continua del exponente γ_T a lo largo de la misma. Se ha encontrado una variación monótonamente creciente, similar a la graficada en la Fig. 8 - 5, entre el valor 0.871 (correspondiente a I_3) y el valor 1.054 (correspondiente a P_4). Una ulterior discusión de estos resultados se dará en la secc. 8 - 3 .-

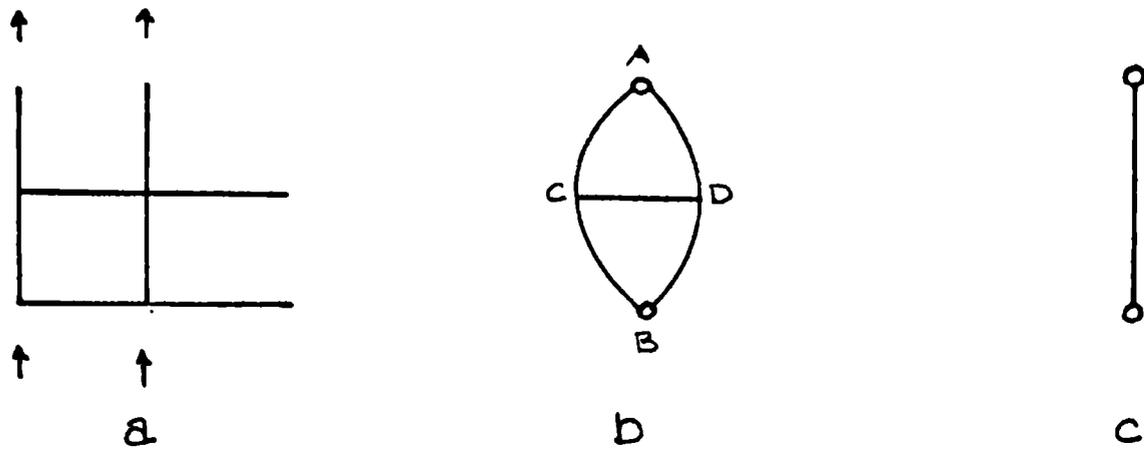


Fig. 6 - 1: Construcción del grafo de dos terminales; $b = 2$

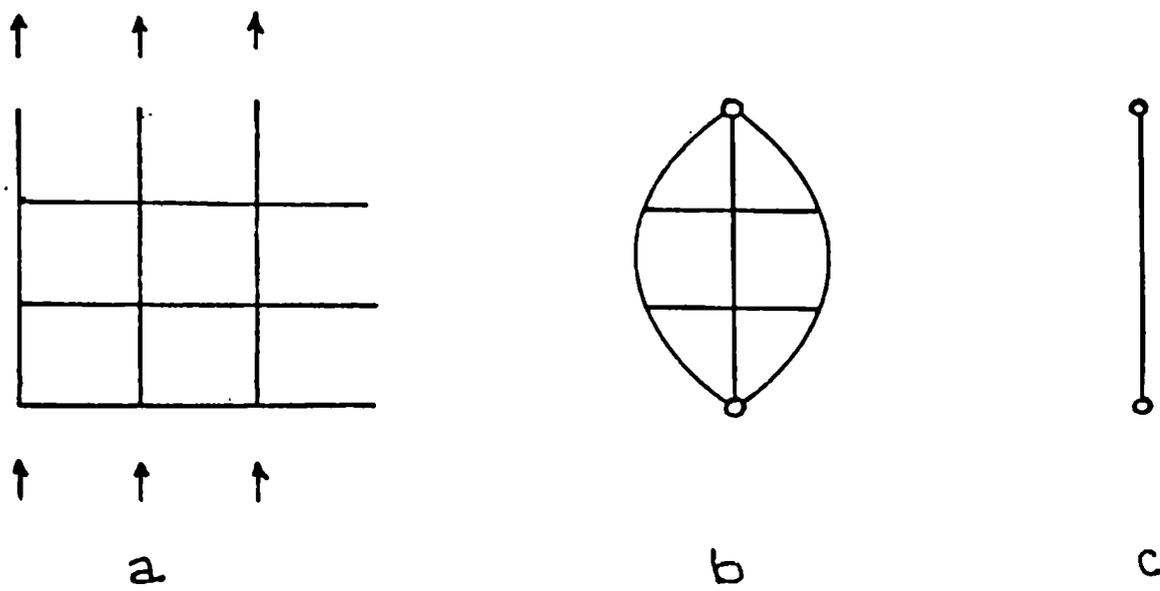


Fig. 6 - 2: Construcción del grafo de dos terminales; $b = 3$



Fig. 6 - 3: Grafos abierto (a) y contraído (b) correspondientes al grafo de fig. 6 - 1b. Estos grafos son mutuamente duales.

CAPITULO 7

TECNICA MIXTA GRUPO DE RENORMALIZACION - CAMPO MEDIO

7 - 1 . Aproximación campo medio - Justificación de la técnica mixta

Una de las primeras técnicas desarrolladas para evaluar la suma múltiple que contiene la función de partición (ec. (1-6)) es la que se conoce como aproximación del campo medio (CM) o también, por razones históricas, aproximación del campo molecular o teoría de Weiss. La aproximación CM posee una gran sencillez matemática y a menudo brinda una información cualitativamente correcta de las principales características de un modelo dado. Básicamente la idea del CM es la de reemplazar el hamiltoniano del modelo considerado por el de un único spin interactuando con un campo medio que representa el efecto de los restantes spines de la red. Una versión mejorada consiste en reemplazar el único spin por un bloque de spines, el cual se resuelve exactamente sumergido en un campo medio con el mismo significado de antes.-

La formulación de la aproximación CM se realiza de la siguiente manera. Sea \mathcal{H} el hamiltoniano del modelo real y \mathcal{H}_0 el hamiltoniano del modelo spin (o bloque de spines) - campo medio. La función de partición puede ser llevada a la forma (ver secc.5-1):

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma]) = Z_0 \langle \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma] + \beta \mathcal{H}_0[\sigma]) \rangle_0 \quad (7-1)$$

donde:

$$Z_0 = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta \mathcal{H}_0[\sigma]) = \exp(-N f_0) \quad (7-2a)$$

y:

$$\langle Q \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \sum_{\{\sigma\}} Q[\sigma] \exp(-\beta \mathcal{H}_0[\sigma]) \quad (7-2b)$$

Recordando la desigualdad de Peierls

$$\langle e^Q \rangle \geq e^{\langle Q \rangle}$$

se puede, a partir de (7-1), establecer una cota inferior a la función de partición de la siguiente manera:

$$Z \geq Z_0 \exp \langle -\beta (\mathcal{H}[\sigma] - \mathcal{H}_0[\sigma]) \rangle_0 \equiv Z_{CM} \quad (7-3)$$

y por lo tanto una cota superior a la energía libre por spin como:

$$f = -\frac{1}{N} \ln Z \leq f_0 - \frac{1}{N} \langle -\beta (\mathcal{H}[\sigma] - \mathcal{H}_0[\sigma]) \rangle_0 \equiv f_{CM} \quad (7-4)$$

Consideremos modelos con simetría global $Z(q)$ (ver secc.(4-1)) formulados en términos de variables de spin complejos pertenecientes al grupo $Z(q)$. El hamiltoniano \mathcal{H}_0 más simple, esto es de un-spin^[2], tiene la forma:

$$-\beta \mathcal{H}_0[\sigma] = \sum_{r=1}^{\bar{q}} \sum_i \operatorname{Re} (B_i^{(r)*} \sigma_i^r) \quad (7-5)$$

donde $B_i^{(r)}$ es el campo medio.^[1]

Luego el primer término de f_{CM} puede ser evaluado directamente de (7-2a) y (7-5)

$$f_0[B] = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega(\vec{B}_i) \quad (7-6a)$$

donde

$$\omega(\vec{B}_i) = \ln \left\{ \frac{1}{q} \sum_{\sigma_i} \exp \left[\sum_{r=1}^{\bar{q}} \operatorname{Re} (B_i^{(r)*} \sigma_i^r) \right] \right\} \equiv \omega_i \quad (7-6b)$$

De (7-2b) y (7-5) se puede ver que, simplificando un poco la notación

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle_0 &= \frac{1}{Z_0} Q \left[\frac{\partial}{\partial B_i^{(r)}} \right] Z_0 = \frac{1}{Z_0} Q \left[\frac{\partial Z_0}{\partial B_i^{(r)}} \right] = \\ &= Q \left[-\omega_i^{(r)} \right] \end{aligned}$$

donde:

$$\omega_i^{(r)} \equiv \frac{\partial f_0}{\partial B_i^{(r)*}} \quad \omega_i^{(r)*} \equiv \frac{\partial f_0}{\partial B_i^{(r)}}$$

puesto que tratamos a todas las potencias σ_i^r como variables independientes. Calculando de este modo el segundo término de f_{CM} , ec.(7-4), es fácil ver que

$$f_{CM} [B] = -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\omega_i - \sum_r \operatorname{Re} (B_i^{(r)*} \omega_i^{(r)}) \right] - \beta \mathcal{H} [\omega_i^{(r)}] \right\} \quad (7-7)$$

Puesto que el campo magnético en \mathcal{H} está acoplado a las variables σ_i^r de igual forma que $B_i^{(r)}$, el valor medio del spin por sitio ó parámetro de orden es:

$$\langle \sigma_i^r \rangle = m_i^{(r)} = - \frac{\partial f_{CM}}{\partial H_i^{(r)}} = \frac{\partial \omega_i}{\partial B_i^{(r)*}} = \omega_i^{(r)} \quad (7-8)$$

Para finalizar esta breve revisión de la aproximación CM señalemos que es más conveniente discutir el problema en términos del parámetro de orden y de su correspondiente potencial termodinámico $\mathcal{F}[m]$ proporcional a la energía libre de Helmholtz obtenida mediante la transformación de Legendre dada por ec.(1-12). Por supuesto con campo externo nulo \mathcal{F} y F // coinciden después de eliminar en esta última $B_i^{(r)}$ invirtiendo ec.(7-8). Es decir

$$\frac{1}{N} \mathcal{F}_{CM}[m] = f_{CM} [B(m), H=0] = -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\omega_i - \vec{B}(m_i) \cdot \vec{m}_i \right] - \beta \mathcal{H} [m, H=0] \right\} \quad (7-9)$$

Como se discutió en la secc.(1-3) para estudiar las transiciones de fases es necesario determinar los mínimos de (7-9).^[1]

Ahora bien, la técnica mixta grupo de renormalización (Migdal-Kadanoff)- campo medio (MK - CM) consiste en efectuar

un tratamiento tipo grupo de renormalización a la función de partición previamente a la aproximación CM. El hecho que sugiere una combinación de este tipo es que puesto que la aproximación MK proporciona una cota superior de la energía libre, ec.(5-4) y la aproximación CM una cota inferior, ec.(7-4), esto es:

$$f_{MK} \leq f \leq f_{CM}$$

resulta natural suponer que tal combinación representaría una superación simultánea de ambas aproximaciones. Otra motivación para realizar esta fusión surge de que la aproximación MK como es obvio, es exacta para $d \rightarrow 1$ mientras que por el contrario la aproximación CM es exacta para $d \rightarrow \infty$. Luego es de esperar que una técnica mixta conduzca a buenos resultados para dimensiones intermedias.-

La técnica MK - CM se realiza del siguiente modo. Consideremos por simplicidad un modelo con una sola constante de interacción K , además del campo magnético H . En el hamiltoniano del modelo se incorpora un parámetro variacional " v " de tal modo que pueda ser identificado con el valor CM del parámetro de orden. Después de " l " pasos de transformación GR, realizados con aproximación MK se tendrá según ec.(2-26) la siguiente expresión de la energía libre:

$$f(K, H, v) = \sum_{j=0}^{l-1} b^{-j\alpha} g_j(K_j, H_j; v) + b^{-l\alpha} f(K_l, H_l; v) \quad (7-10)$$

donde se ha optado por trabajar con las constantes de interacción en lugar de los campos " u ", y $K_0 \equiv K$, $L_0 \equiv L$. Sabemos que con un adecuado comportamiento del segundo término de (7-10) (ver (2-27)) la energía libre resulta

$$f(K, H; v) = \sum_{j=0}^{\infty} b^{-j\alpha} g_j(K_j, H_j; v) \quad (7-11)$$

Debido a la forma altamente complicada de la función g es imposible sumar la serie (7-11) directamente. Lo que se puede hacer es estudiar la suma finita

$$f_{\ell}(K, H; \nu) = \sum_{j=0}^{\ell-1} b^{-j\alpha} g(K_j, H_j; \nu) \quad (7-12)$$

para valores grandes de ℓ , comenzando con $H_0 = 0$ y para diferentes valores de K_0 . Por lo señalado en la secc.(1-3) para detectar una transición de fase es necesario estudiar los mínimos de $\mathcal{F}[m]$ ó lo que es lo mismo, de $f_{\ell}(K, H; \nu \equiv m)$. Luego en esta variante variacional se podría esperar un mínimo de (7-12) para $m \neq 0$ correspondiente a algún $K > K_c$. Baracca

et al (1982). han realizado este cálculo para retículos enormemente grandes (hasta $N = 2^{100}$) con condiciones de borde periódicas y encontraron que en cualquier d el mínimo estaba siempre en $m = 0$ para diferentes K . Luego en esta forma directa esta versión variacional de la técnica MK es ineficaz.-

La técnica mixta MK - CM es una forma bastante sencilla y razonable propuesta como solución de estos problemas. Esta técnica consiste en efectuar ℓ pasos de transformación MK en su versión variacional y evaluar la energía libre restante en la aproximación CM con la identificación adicional

$$\nu = \langle \sigma \rangle_{CM} = m \quad (7-13)$$

Luego, en esta técnica, la expresión (7-10) para la energía libre debe ser reemplazada por

$$f(K, H; \nu) = \sum_{j=0}^{\ell-1} b^{-j\alpha} g(K_j, H_j; \nu) + b^{-\ell\alpha} f_{CM}(K_{\ell}, H_{\ell}; \nu) \quad (7-14)$$

De esta forma el problema de truncar la serie (7-11) es eliminado ya que la aproximación CM representa el efecto de

una red infinita.

Es importante destacar que si el parámetro $v = m$ no se introdujera desde el principio del cálculo, el primer término de (7-14) sería una constante (independiente de v) totalmente irrelevante para el cálculo de mínimos. El resultado sería el del CM usual con el único cambio de K por K_q lo cual daría una interpolación naive entre el valor crítico de K obtenido con CM y el obtenido con MK. Esta interpolación no tiene ningún valor porque, como veremos en la sección siguiente, ambos valores están por debajo de los valores exactos o más precisos.

Por el contrario, veremos que la técnica MK - CM tal como ha sido formulada mejora simultáneamente a ambas aproximaciones cuando se aplican separadamente.-

7 - 2 . Aplicación de la técnica MK - CM al modelo de Ising

Vamos a analizar más detalladamente la técnica esbozada en la sección anterior en su aplicación al modelo de Ising ya que este es de lejos el modelo más conocido en cuanto a sus propiedades críticas se refiere para diversas dimensiones espaciales.

El hamiltoniano del modelo de Ising con campo magnético es:

$$\mathcal{H}[\sigma] = K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + H \sum \sigma_i \quad (7-15)$$

donde la cte. $(-\beta)$ ha sido absorbida en K y H y $\sigma_i = \pm 1$. - La función de partición normalizada es la usual

$$Z[K, H] = \frac{1}{2^N} \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \mathcal{H}[\sigma] \quad (7-16)$$

donde N es como siempre el número de sitios del retículo original. -

Para efectuar la versión variacional de la transformación MK introducimos el parámetro variacional v reescribiendo el término de interacción en (7-15) en función de las fluctuaciones de σ_i alrededor de v de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\sigma] \equiv \mathcal{H}[\sigma, v] &= K \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i - v)(\sigma_j - v) + \\ &+ (2\alpha v K + H) \sum_i \sigma_i - N\alpha K v^2 \end{aligned} \quad (7-17)$$

luego si $|v| \leq 1$ es natural identificar a v con el parámetro de orden $\langle \sigma_i \rangle$. Este parámetro se incorporará en un modo no trivial en las constantes de interacción efectivas que resultan de una transformación GR. Dentro de la aproximación MK adoptamos la variante Migdal tal como fué descrita en el capítulo 5, con $b = 2$. Supongamos que se han realizado n pasos de transformación a raíz de lo cual se tiene:

$$Z[K, H; v] = z_1 \dots z_n Z_{res}[K_n, H_n; v] \quad (7-18a)$$

donde

$$Z_{res} = \frac{1}{2^{N/2^{nd}}} \sum_{\{\sigma_i\}} \exp^{He}[K_n, H_n; \nu] \quad (7-18b)$$

y efectuamos la transformación (n + 1). La suma sobre los spines desconectados genera un factor similar a (5 - 15) donde H debe ser reemplazada por (2dνK + H)/2 es decir:

$$Z_{n+1}^{(desc)} = \left[\cosh(2d\nu K + H) \right]^{N[1 - 2^{-\alpha}(1 + \alpha)] / 2^{nd}} \quad (7-19)$$

La suma sobre los spines parcialmente desconectados se realiza según el procedimiento indicado en secc.(5-2) solo que ahora las expresiones son algo más complicadas. Las constantes efectivas y el factor que se extrae fuera de la sumatoria están dados por las expresiones:

$$K_{n+1} = \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{R_1^{(n)} R_3^{(n)}}{R_2^{(n)}} \right\} \quad (7-20a)$$

$$H_{n+1} = H_n + \alpha K_n \nu (2 - 2^\alpha) + \frac{\alpha}{2} \ln \left\{ \frac{R_1^{(n)}}{R_3^{(n)}} \right\} \quad (7-20b)$$

$$Z_{n+1}^{(dec)} = \left[R_1^{(n)} R_2^{(n)} R_3^{(n)} \right]^{N\alpha / 4 \cdot 2^{\alpha(n+1)}} \quad (7-20c)$$

donde

$$R_\alpha^{(n)} = \cosh \left[2^\alpha K_n (\alpha - 2 - \nu) + 2d\nu K_n + H_n \right] \quad (7-20d)$$

Resumiendo los factores dados en (7-19) y (7-20c) y según la definición (2-11b) resulta

$$g(K_n, H_n; \nu) = - 2^{\alpha(n+1)} \ln \left[Z_{n+1}^{(desc)} Z_{n+1}^{(dec)} \right] =$$

$$= - \left\{ \frac{d}{4} \ln \left[R_1^{(n)} R_2^{(n)} R_3^{(n)} \right] + (2^d - d - 1) \ln R_2^{(n)} \right\}$$

(7-21)

Después de "1" pasos de transformación GR sólo queda por evaluar mediante la aproximación CM la función de partición dada por (7-18b) con $n = 1$ y $\mathcal{H}_e[K_e, H_e]$ en la forma original (7-15). Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior sólo es necesario introducir un campo medio B_i . La función ω_i definida por (7-6b) vale:

$$\omega_i \equiv \omega(B_i) = \ln \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp(B_i \sigma_i) \right\} = \ln \cosh B_i \quad (7-22)$$

y reemplazada en (7-7) conduce a:

$$f_{CM}[B] = - \frac{1}{N'} \left\{ \sum_{i=1}^{N'} \left[\ln \cosh B_i - (B_i + H_e) \tanh B_i + K_e \sum_{\langle i, j \rangle} \tanh B_i \tanh B_j \right] \right\} \quad (7-23)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (7-8) y (7-22) se obtiene el parámetro de orden:

$$\langle \sigma_i \rangle_{CM} = \frac{d\omega_i}{dB_i} = \tanh B_i$$

Imponiendo invariancia traslacional y rotacional y efectuando la identificación

$$\langle \sigma_i \rangle_{CM} = v$$

se puede reescribir (7-23) como:

$$f_{CM} = - \left\{ d K_e v^2 + H_e v - \frac{1}{2} (1+v) \ln(1+v) + \frac{1}{2} (1-v) \ln(1-v) \right\} \quad (7-24)$$

Finalmente reemplazando (7-21) y (7-24) en (7-14) se determina totalmente la expresión de la energía libre en la aproximación MK - CM . La transición de fase se determina buscando los puntos estacionarios de $f(K, H=0; v)$ es decir imponiendo:

$$\frac{\partial f(K, H=0, v)}{\partial v} = 0 \quad (7-25)$$

cuya solución es la ecuación de estado $v = v(K)$ (ver Nota). Por supuesto hace falta otra ecuación que puede provenir de la exigencia de que dicha transición sea de segunda especie y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f(K_c, H=0; v_c)}{\partial v^2} = 0$$

o más directamente efectuando un desarrollo de (7-25) hasta el primer orden no nulo de v . Por supuesto uno puede verificar que la transición es efectivamente de segunda especie graficando $f(K, H=0; v)$ en función de v para distintos valores de K .-

Los resultados obtenidos de los diversos análisis efectuados sobre esta técnica son exhibidos en las Tablas al final de este capítulo.-

En la tabla 7-I se comparan los valores críticos de la constante de acoplamiento K que resultan del método MKCM con $\eta = 1$, con los obtenidos previamente con CM, GR-Migdal y GR - Migdal - Kadanoff, y a su vez con los resultados exactos o más confiables disponibles para $d = 2, 3, 4$. En primer lugar se observan los comportamientos conocidos de la // aproximación CM: da mejores predicciones a medida que d crece, y de los métodos GR : solo da resultados aceptables para $d = 2$. En segundo lugar, se debe destacar que para $2 \leq d \leq 4$ el método MKCM con $\eta = 1$ no es una simple interpolación en-

tre CM y GR (lo cual sí sería de no introducir el parámetro variacional v desde el inicio, ver tabla 7-4) sino que los supera a ambos.

En la tabla 7 - 2 se comparan los resultados provenientes del MKCM, $\ell = 1$, con los que se obtienen con el método de expansión alrededor del punto estacionario (EPE)(Riera, 1983), cuyo orden cero es el CM.

Del análisis de las tablas 7-3 y 4 surgen ciertos indicios de que la combinación de los métodos CM y GR no es del todo armónica. Por ejemplo en tabla 7-3 se exhiben los resultados obtenidos con MKCM pero con la transformación GR realizada según la versión refinada de Kadanoff observándose que, si bien esta última es superior a la versión de Migdal (columnas 3a. y 2a. de la tabla 7-1 respectivamente), la MKCM con Migdal-Kadanoff da peores resultados que la MKCM con Migdal. Por completitud se han agregado los valores obtenidos con Migdal-Kadanoff con factor de reescaleo $b \rightarrow 1$.

Por otra parte, en la tabla 7-4 se manifiesta el rápido desmejoramiento de los resultados obtenidos con MKCM que aparece al tomar $\ell > 1$. Este comportamiento, que relacionamos con el señalado respecto a la tabla 7-3, puede ser explicado recordando que la transformación GR extrae de la función de partición cierta información referida al comportamiento crítico dejando a dicha función, y por lo tanto a la energía libre "empobrecida".

Con vistas a la aplicación del método MKCM al modelo $Z(4)$ spin concluimos que la transformación GR según Migdal es la más favorable tratando de perturbar la energía libre lo mínimo posible, es decir, limitándonos a $\ell = 1$.

El comportamiento de los resultados obtenidos con esta técnica ha sido confirmado mediante su aplicación al modelo de Potts de q - estados (Baracca et al, 1982).

Para este modelo se encuentra que en $d = 2$ se obtiene una transición de fases de primera especie para $q > 2$ lo cual contradice el resultado exacto de Baxter (1973) comentado en el Capítulo 4. No obstante, los citados autores han verificado que el salto en el parámetro de orden a través de la transición para $q = 3$ y 4 es menor calculado con MKCM que con la aproximación CM directa. La misma correcta tendencia se observa en el cálculo del calor latente (Baracca et al, 1982).

Pasemos al análisis de los exponentes críticos. En lo sucesivo nos limitaremos al caso $n = 1$, es decir, efectuamos un solo paso de renormalización. En este caso, la condición (7-25) para H genérico toma la expresión:

$$\begin{aligned}
 A(k, H, v) = & \frac{d}{4} (t_1 + t_2 + 2t_3) (2d - 2^d) k + (2^d - d - 1) t_0 2^d k + \\
 & + \frac{d}{2} \ln(R_1 R_2 R_3^{-2}) v + \frac{d}{4} (t_1 + t_2 - 2t_3) (2d - 2^d) k v^2 + H + \\
 & + 2d(2 - 2^d) k v + \frac{d}{2} \ln(R_1 R_2^{-1}) + \frac{d}{2} (t_1 - t_2) (2d - 2^d) k v - \\
 & - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = 0
 \end{aligned} \tag{7-26a}$$

donde t_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) son las tangentes hiperbólicas de los argumentos respectivos de las ecs. (7-20d) y (7-21). La condición (7-25b), la cual determina el valor de K_c pasa a ser:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A}{\partial v}(k_c, 0, 0) = & \frac{d}{4} \left[\frac{1}{\text{ch}^2(2^d k)} + 1 \right] (2d - 2^d)^2 k_c^2 + (2^d - d - 1) (2^d k_c)^2 + \\
 & + d \ln \text{ch}(2^d k) + 2d(2 - 2^d) k + 2d \text{th}(2^d k) - 1 = 0
 \end{aligned} \tag{7-26b}$$

Calculamos en primer lugar la magnetización la cual, a diferencia de lo que sucede en la aproximación CM, ya no coincide con el parámetro v . En efecto, por definición

$$m = \frac{\partial f}{\partial H} = \left(\frac{\partial f}{\partial H} \right)_v (k, H, v(k, H))$$

donde se ha impuesto en la segunda igualdad la condición (7-25). En las proximidades del punto crítico, en el orden más bajo en v resulta: ($H=0$)

$$m \cong \Theta(k) v$$

donde

$$\Theta(k) = \frac{\alpha}{2} (2^\alpha - 2^\alpha) \left[\frac{1}{ch^2(2^\alpha k)} + 1 \right] k + (2^\alpha - \alpha - 1) 2^\alpha k + 1 + \alpha th(2^\alpha k)$$

A continuación desarrollamos (7-26a) alrededor de $v=0$ obteniéndose, después de tomar $H=0$,

$$N(k) v - \frac{1}{6} D(k) v^2 = 0$$

de donde, desarrollando a su vez alrededor de $K = K_c$

$$v^2 = \frac{N(k)}{\frac{1}{6} D(k)} \cong \frac{N(k_c)}{D(k_c)} + \left(\frac{N}{k} \right)'(k_c) (k - k_c)$$

Es fácil verificar que $N(K_c)$ coincide con el primer miembro de (7-26b) y por lo tanto es nulo. Finalmente se tiene

$$m \cong \Theta(k_c) \sqrt{\frac{N'(k_c) \cdot k_c}{D(k_c)}} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/2}$$

obteniéndose de este modo la amplitud crítica β y el exponente crítico $\beta = 1/2$ que es el mismo que resulta de la aproximación CM. Esta coincidencia parece estar originada por la imposición en ambas teorías (CM y MKCM) de la condición estacionaria (por ej., ec. (7-25a)).

Un comportamiento análogo encontramos para la susceptibilidad:

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \left(\frac{\partial m}{\partial H} \right)_v + \left(\frac{\partial m}{\partial v} \right)_H \frac{\partial v}{\partial H}$$

donde a su vez:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial H}\right) = - \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial H}\right)_v}{\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_H}$$

Siguiendo en líneas generales el mismo procedimiento anterior, en las proximidades del punto crítico ($T < T_c$) desarrollamos las derivadas:

$$\left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_v ; \left(\frac{\partial m}{\partial v}\right)_H ; \left(\frac{\partial A}{\partial H}\right)_v$$

primero en v alrededor de cero y luego en K alrededor de K_c . En el orden no nulo más bajo resulta

$$\left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_v \approx \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_v (K_c, 0, 0) \neq 0$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial v}\right)_H \approx \left(\frac{\partial m}{\partial v}\right)_H (K_c, 0, 0) = \Theta(K_c)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial H}\right)_v \approx \left(\frac{\partial A}{\partial H}\right)_v (K_c, 0, 0) = S(K_c)$$

Similar tratamiento se da a la restante derivada, la cual resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_H &= \left[N(K_c) + N'(K_c)(K - K_c) + \dots \right] - \frac{1}{2} D(K_c) v^2 + \dots \\ &\approx - 2 N'(K_c)(K - K_c) \end{aligned}$$

Finalmente, reuniendo todas las expresiones se obtiene:

$$\chi \approx \frac{\Theta(K_c) S(K_c)}{2 N'(K_c) K_c} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{-1}$$

a partir de la cual resulta el exponente crítico $\gamma' = 1$, nuevamente coincidente con el valor de la teoría CM.

El cálculo en la región $T > T_c$ sigue los mismos pasos

excepto que cuando se hace $H = 0$ se debe tomar también $v = 0$. Esta única diferencia se traduce en la obtención de una amplitud crítica \mathcal{C} igual al doble de la anterior \mathcal{C}' . Esta relación es por supuesto, la misma que aparece en la aproximación CM.

Como conclusión de este análisis de exponentes críticos según el cual dichos exponentes no se apartan de sus valores CM, el autor no abordará el cálculo de los mismos en la siguiente aplicación del método MKCM. Por otra parte, la intención primordial que motiva dicha aplicación es el mejoramiento, tanto cualitativo como cuantitativo de los diagramas de fases que resultan tanto de la aproximación CM como de la técnica MK. Para la discusión de los resultados obtenidos se remite al lector a las Conclusiones al final de esta Tesis.-

7 - 3 . Aplicación de la técnica MKCM al modelo Z(4)

Resulta interesante aplicar la técnica desarrollada en las secciones precedentes al modelo Z(4) spin debido a que este modelo, por poseer dos constantes de interacción y un parámetro de orden de dos componentes, presenta un diagrama de fases y un comportamiento crítico sumamente complejo.-

Recordemos el hamiltoniano de este modelo en presencia de campos magnéticos tal como fué formulado en las ecs. (4-12a) y (4-18):

$$-\beta \mathcal{H}[\sigma] = \sum_{\langle i, j \rangle} \left[J_1 \operatorname{Re} (\sigma_i \sigma_j^*) + J_2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \right] + \sum_i \left[h_1 \operatorname{Re} \sigma_i + h_2 \sigma_i^2 \right] \quad (7-27)$$

donde $J_\alpha = \beta K_\alpha$, $h_\alpha = \beta H_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), $\sigma_i = 1, -1, +i, -i$.

El retículo inicial Λ es hipercúbico d -dimensional con N sitios. Generalizando ligeramente lo realizado en la sección anterior, introducimos dos parámetros variacionales v y u (Riera, 1984 a), reduciendo el problema al estudio de las fluctuaciones de σ_i alrededor de v y de σ_i^2 alrededor de u . Posteriormente en la etapa CM del cálculo dichos parámetros serán identificados con $\langle \sigma_i \rangle$ y $\langle \sigma_i^2 \rangle$ respectivamente. Por lo tanto, suponemos que v y u son números reales y que $|v| \leq 1$, $|u| \leq 1$. Entonces, reescribamos (7-27) de la siguiente manera:

$$-\beta \mathcal{H}[\sigma; v, u] = \sum_{\langle i, j \rangle} \left\{ \frac{J_1}{2} \left[(\sigma_i - v)(\sigma_j - v) + (\sigma_i - v)(\sigma_j - v) \right] + J_2 (\sigma_i^2 - u)(\sigma_j^2 - u) \right\} + \sum_i \left[(h_1 + 2\alpha v J_1) \operatorname{Re} \sigma_i + (h_2 + 2\alpha u J_2) \sigma_i^2 \right] - \alpha N (v^2 J_1 + u^2 J_2) \quad (7-28)$$

Basándonos en la discusión realizada en la secc. anterior, efectuaremos solamente un paso de renormalización y adoptaremos la variante Migdal, con $b=2$. Después de este paso, la función de partición

$$Z = \frac{1}{4^N} \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta \mathcal{H}[\sigma]) \quad (7-29a)$$

resultará:

$$Z = z_1(J_1, J_2, h_1, h_2; v, u) Z_{res} \quad (7-29b)$$

donde

$$Z_{res} = \frac{1}{4^{N'}} \sum_{\{\sigma'\}} \exp(-\beta \mathcal{H}'[\sigma'; v, u]) \quad (7-29c)$$

será evaluada en la aproximación CM. Finalmente tendremos para la energía libre, en lugar de (7-14)

$$f = g + 2^{-\alpha} f_{CM} \quad (7-30)$$

donde $g = -\ln z_1/N$ y las tres cantidades f , g y f_{CM} dependen, en última instancia, de J_1, J_2, h_1, h_2, v, u .

La transformación GR en la versión Migdal consta como siempre en un proceso de corrimiento de ligaduras el cual se realiza como en fig. 5 seguido de la suma sobre todos los spines desconectados. La suma sobre los spines totalmente desconectados da lugar a un factor que contribuye a Z_1 :

$$z_{1(desc)} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\exp(\tilde{h}_2) \cosh(\tilde{h}_1) + \exp(-\tilde{h}_2) \right] \right\}^{N_{desc}} \quad (7-31)$$

donde

$$\tilde{h}_1 = h_1 + 2\alpha v J_1 \quad \tilde{h}_2 = h_2 + 2\alpha u J_2$$

y

$$N_{desc} = N / [1 - 2^{-\alpha} (1 + \alpha)]$$

Estudiemos a continuación la suma sobre los spines parcialmente desconectados. Observemos previamente que la presencia de los campos h_1 y h_2 destruye la simetría del modelo y por lo tanto al renormalizar se generan nuevas interacciones. Estas nuevas interacciones deberían incluirse al principio del cálculo si interesara el estudio del punto fijo del modelo, pero no es este el caso. Partiendo del hamiltoniano (7-28) se ve que al decimar un spin parcialmente desconectado, para reconstruir el hamiltoniano efectivo se deben tener en cuenta los siguientes estados entre los vecinos próximos

(μ_1, μ_2) :

- 1 - (1, 1)
- 2 - (1, -1), (-1, 1)
- 3 - (-1, -1)
- 4 - (1, $\pm i$), ($\pm i$, 1)
- 5 - (-1, $\pm i$), ($\pm i$, -1)
- 6 - (i, i), (-i, -i)
- 7 - (i, -i), (-i, i)

Luego la suma sobre estos spines contribuye con un factor

$$Z_{1(dec)} = \left[A_1 A_2^2 A_3 A_4^4 A_5^4 A_6^2 A_7^2 \right]^{N\alpha/16 \cdot 2^\alpha} \quad (7-32)$$

y genera el siguiente hamiltoniano efectivo:

$$-\beta \mathcal{H}'[\sigma'; \nu, \mu] = \sum_{\langle i, j \rangle} \left\{ J'_1 \operatorname{Re}(\sigma'_i \sigma'_j)^* + J'_2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 + \right. \\ \left. + J'_3 \left[\sigma_i^2 (\sigma'_j + \sigma'_j)^* + \sigma_j^2 (\sigma'_i + \sigma'_i)^* \right] + \right. \\ \left. + J'_4 (\sigma'_i \sigma'_j + \sigma'_i \sigma'_j)^* \right\} +$$

$$+ \sum_i \left[h'_1 \operatorname{Re}(\sigma'_i)^2 + h'_2 \sigma'_i{}^2 \right]$$

(7-33)

donde:

$$J'_1 = \frac{1}{16} \ln \left[\Delta_1 \Delta_2^{-2} \Delta_3 \Delta_6^2 \Delta_7^{-2} \right]$$

$$J'_2 = \frac{1}{16} \ln \left[\Delta_1 \Delta_2^2 \Delta_3 \Delta_4^{-4} \Delta_5^{-4} \Delta_6^2 \Delta_7^2 \right]$$

(7-34)

$$J'_3 = \frac{1}{16} \ln \left[\Delta_1 \Delta_3^{-1} \Delta_4^{-2} \Delta_5^2 \right]$$

$$J'_4 = \frac{1}{8} \ln \left[\Delta_1 \Delta_2^{-2} \Delta_3 \Delta_6^{-2} \Delta_7^2 \right]$$

$$h'_1 = h_1 - dv(2 - 2^\alpha) J_1 + \frac{\alpha}{8} \ln \left[\Delta_1 \Delta_3^{-1} \Delta_4^2 \Delta_5^{-2} \right]$$

$$h'_2 = h_2 - du(2 - 2^\alpha) J_2 + \frac{\alpha}{8} \ln \left[\Delta_1 \Delta_2^2 \Delta_3 \Delta_6^{-2} \Delta_7^{-2} \right]$$

y a su vez: $(\tilde{J}_1 = 2^\alpha J_1; \tilde{J}_2 = 2^{\alpha+1} J_2)$

$$2 \Delta_n = e_2 c_n + e_2^{-1} k_0 \quad n = 1, 2, 3$$

$$2 \Delta_n = e_1 c_n + e_1^{-1} k_1 \quad n = 4, 5$$

$$2 \Delta_6 = e_0 c_2 + e_0^{-1} k_2$$

$$2 \Delta_7 = e_0 c_2 + e_0^{-1} k_0$$

$$e_\alpha = \exp \left[\tilde{J}_2 (\alpha - 1 - u) + 2 \tilde{h}_2 \right] \quad \alpha = 0, 1, 2$$

$$c_n = \cosh \left[2 \tilde{J}_1 (n - 2 - v) + 2 \tilde{h}_1 \right] \quad n = 1, 2, 3$$

$$c_n = \cosh \left[2 \tilde{J}_1 (9 - 2n - v) + 2 \tilde{h}_1 \right] \quad n = 4, 5$$

$$k_\alpha = \cosh (\alpha \tilde{J}_1) \quad \alpha = 0, 1, 2$$

Reuniendo (7-31) y (7-32), y usando la definición de g se obtiene

$$g = \frac{1}{2^d} \left\{ (2^d - 1 - d) \ln \left[\frac{e^{\tilde{h}_2} \cosh \tilde{h}_1 + e^{-\tilde{h}_2}}{2} \right] + \frac{d}{16} \ln \left[\Delta_1 \Delta_2^2 \Delta_3 \Delta_4^4 \Delta_5^4 \Delta_6^2 \Delta_7^2 \right] \right\} \quad (7-35)$$

La energía libre se obtiene según (7-30) sumando a (7-35) la cantidad que proviene de estimar en la aproximación CM la función de partición (7-29c) con el hamiltoniano (7-33). La aproximación CM se genera a partir del hamiltoniano:

$$-\beta \mathcal{H}_0[\sigma] = \sum_i \left[B_{1,i}^* \sigma_i + B_{1,i} \sigma_i^* + B_{2,i} \sigma_i^2 \right]$$

donde $B_{2,i}$ se supone real. La función relativa a 1-spin, dada en ec. (7-6b) resulta:

$$\omega_i = \ln \left\{ \frac{1}{2} \left[\exp B_{2,i} \cosh (B_{1,i}^* + B_{1,i}) + \exp B_{2,i} \cos (B_{1,i}^* - B_{1,i}) \right] \right\} \quad (7-36)$$

Luego la función energía libre resulta de realizar, en el hamiltoniano $[-\beta(\mathcal{H} - \mathcal{H}_0)]$ las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} \mu_i &\longrightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial B_{1,i}^*} & \mu_i^* &\longrightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial B_{1,i}} \\ \mu_i^2 &\longrightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial B_{2,i}} \end{aligned}$$

Nada impide tomar $B_{1,i} = B_{1,i}^*$ con lo cual resulta, teniendo en cuenta (7-8) y efectuando las usuales hipótesis de invariancia traslacional y rotacional:

$$\frac{\partial \omega}{\partial B_1} = \frac{\partial \omega}{\partial B_1^*} = v = \frac{e^{B_2} \sinh 2B_1}{e^{B_2} \cosh 2B_1 + e^{-B_2}} \quad (7-37a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial B_2} = u = \frac{e^{B_2} \cosh 2B_1 - e^{-B_2}}{e^{B_2} \cosh 2B_1 + e^{-B_2}} \quad (7-37b)$$

Finalmente, invirtiendo las relaciones (7-37) se pueden eliminar del hamiltoniano los campos B_1 y B_2 y como resultado se obtiene la energía libre en términos del parámetro de orden (v, u) :

$$\begin{aligned} f_{CM} = & d J_1' v^2 + d J_2' u^2 + 4d J_3' uv + 2d J_4' v^2 + \\ & + h_1' v + h_2' u - \left(\frac{1+u}{2}\right) \ln(1+u) - \left(\frac{1-u}{2}\right) \ln(1-u) - \left(\frac{1+u}{4}\right) \\ & \times \left[\left(1 + \frac{2v}{1+u}\right) \ln\left(1 + \frac{2v}{1+u}\right) + \left(1 - \frac{2v}{1+u}\right) \ln\left(1 - \frac{2v}{1+u}\right) \right] \quad (7-38) \end{aligned}$$

Todo el análisis del modelo se realiza sobre la energía libre obtenida reemplazando (7-35) y (7-38) en (7-30) y tomando $h_1 = h_2 = 0$

En primer lugar se estudia el caso $d = 2$. Tanto el diagrama obtenido con la aproximación CM como el obtenido con la técnica MKCM indican correctamente la existencia de las tres fases mencionadas en secc. 4-3:

- fase I $u = v = 0$
- fase II $v = 0, u \neq 0$
- fase III $v \neq 0, u \neq 0$

Estos dos diagramas se muestran en la fig. 7-1 juntamente con el diagrama teórico del modelo $Z(4)$ en $d=2$. Desde el punto de vista cuantitativo teniendo en cuenta los resultados exactos, se deduce que los resultados del MKCM son sustancialmente mejores que los del CM.-

Por completitud incluimos los diagramas obtenidos directamente con los métodos GR - Migdal y GR - MK, ambos con

$b = 2$. Como era previsible a partir de los análisis efectuados para el modelo de Ising, MKCM mejora los resultados de GR-Migdal pero es inferior a la versión de Kadanoff (la cual es exacta para $b \rightarrow 1$ en $d = 2$ para el modelo de Ising).-

En cuanto al carácter de las transiciones de fase, el MKCM reproduce algunos aspectos ya presentados por el CM:

- la t de f. I - II es de tipo Ising, es decir de segunda especie.-
- la t de f. II - III es de 1º especie cerca del punto triple y pasa a continua para valores de $J_2 \rightarrow \infty$
- la t de f. I - III es de primer orden con los valores medios $(v_c, u_c) \rightarrow (0, 0)$ a medida que J_2 tiende a cero. De esta forma el punto $J_2 = 0$ coincide con un punto crítico (transición continua).-

Para el punto crítico correspondiente al modelo de // Potts, obtenido haciendo $J_1 = 2 J_2$, MKCM da el valor $J_{1c} = .286$ contra el valor exacto $J_{1c} = .275$. Además, como se notó en la sección anterior la transición predicha por MKCM es de 1era. especie en desacuerdo con el carácter continuo de la misma que ha sido rigurosamente establecido. Para este punto son válidas las comparaciones referentes al salto al parámetro de orden y al calor latente entre MKCM y CM realizados por Baracca et al (op. cit) y mencionados en la sección precedente.-

Consideramos a continuación el caso $d=3$. La fig. 7-2 muestra el diagrama de fases del modelo $Z(4)$ obtenido con la técnica MKCM. Para establecer comparaciones se ha incluido en dicha figura el diagrama obtenido con GR-MK con $b = 2$.- Las técnicas CM y RG - M conducen a resultados sumamente pobres de modo que no serán tenidos en cuenta. Además hemos indicado tres puntos de referencia para analizar la calidad del

diagrama MKCM. Estos puntos son los puntos críticos de los modelos de Ising límites y el punto $J_1 = 2 J_2$. -

Cualitativamente el diagrama de fases MKCM presenta aspectos idénticos a los del obtenido en $d = 2$. Para el punto de transición del modelo de Potts, MKCM especifica nuevamente un carácter discontinuo: pero en $d=3$ este es el comportamiento correcto. -

Por los argumentos señalados en la primera sección de este capítulo la técnica MKCM debería ser confiable en $d = 3$ y podría ser aplicada a otros modelos con parámetros de orden de varias componentes que tengan un comportamiento interesante en esta dimensión. -

Notas al Capítulo 7

1 - Los mínimos de (7-9) se obtienen imponiendo la condición de punto estacionario

$$\frac{\partial f_{cm}}{\partial m_j^{(r)}} = 0 \quad (7-39)$$

cuya solución $m_j^{(r)} = m_j^{(r)}[\vec{K}]$ se denomina ecuación de estado o, por razones que veremos más abajo, de autoconsistencia. Más aún, la ecuación (7-39) indica el verdadero significado de la aproximación CM, el cual no es evidente en la derivación adoptada en el texto.

Consideremos para simplificar un modelo con un parámetro de orden de una sola componente. Sea además:

$$-\beta \mathcal{H} [m, H=0] = J \sum_{\langle i, j \rangle} m_i m_j = J \sum_{i=1}^N \sum_{\mu=1}^d m_{i+\bar{\mu}} m_i$$

Luego, teniendo en cuenta (7-9) y (7-8), resulta:

$$\frac{\partial f_{cm}}{\partial m_j} = -\frac{1}{N} \left\{ -B_j + J \sum_{\mu=1}^d (m_{j+\bar{\mu}} + m_{j-\bar{\mu}}) \right\} = 0$$

o sea:

$$B_j = J \sum_{\mu=1}^d (m_{j+\bar{\mu}} + m_{j-\bar{\mu}}) \quad (7-40)$$

es decir, B_j representa el "campo medio" que sobre el spin "j" ejercen sus vecinos "j + $\bar{\mu}$ " y "j - $\bar{\mu}$ ". La generalización de (7-40) a modelos con parámetros de orden multicomponentes y otros tipos de interacciones es inmediata.

2 - Observando que (7-40) equivale a hacer $\langle \mathcal{H}_j \rangle = 2 \langle \mathcal{H} \rangle$ se puede obtener la ec. de estado CM de una manera mucho más directa que la desarrollada en el texto. Para ello basta con

tomar

$$Z_{CM} = \sum_{\sigma_j} \exp \left\{ \left[J \sum_{\mu} (m_{j+\mu} + m_{j-\mu}) + H \right] \sigma_j \right\} \quad (7-41a)$$

o bien, imponiendo invariancia traslacional y rotacional ($B = 2 d J m$):

$$Z_{CM} = \sum_{\sigma_j} \exp \left\{ (2 d J m + H) \sigma_j \right\} \quad (7-41b)$$

Las expresiones (7-41) justifican el nombre de "hamiltoniano de 1-spin" dado al \mathcal{H}_0 de ec. (7-5). Nótese además que

$$m = - \frac{\partial f_{CM}}{\partial H} (H=0) = \frac{\partial (\ln Z_{CM})}{\partial H} (H=0)$$

de donde resulta $m = m(J)$, coincide con (7-39) y justifica la denominación de "ecuación de autoconsistencia".

Por otra parte la aproximación (7-41) sugiere la posibilidad de mejorar los resultados tomando un hamiltoniano de n-spines en el cual se consideren exactamente las interacciones de "n" spines pertenecientes a un bloque el cual se considera sumergido en un "campo medio" que simula el efecto de los spines exteriores al mismo. Estas versiones mejoradas de la aproximación CM serán consideradas en el capítulo siguiente.-

Abreviaturas utilizadas en las tablas

CM : aproximación campo medio.

GR - M : transformación GR en la aproximación original de Migdal (Fig. 7 - 1) y factor de reescalado $b = 2$. Los cálculos fueron realizados usando ec. (5 - 10).

GR - MK la transformación GR se aproxima según la versión de Kadanoff (Fig. 7 - 2). Nuevamente $b = 2$. Cálculos según (5 - 6), (5 - 7b) y (5 - 8).

GR - MK₁ : la misma aproximación anterior pero con $b \rightarrow 1$. Datos de Droz y Mlaspinas (1980).

MkCM - M y MKCM - MK la primera etapa del método MKCM se realiza según la versión de Migdal o la modificada de Kadanoff respectivamente. Cálculos del autor .

EPE método de expansión alrededor del punto estacionario. El orden cero de esta expansión coincide con la aproximación CM. Hasta el orden (d^{-4}) incluido se tiene (Riera, 1983) :

$$K_c \cong \frac{1}{2d} + \frac{1}{(2d)^2} + \frac{7}{3(2d)^3} + \frac{8}{(2d)^4}$$

Tabla 7 - 1

d	CM	GR - M	GR - MK	MKCM - M	exacto
2	.250	.3046	.4293	.3785	.4407
3	.167	.0653	.1162	.2397	.2217
4	.125	.0160	.343	.1611	.1499

Tabla 7 - 2

d	MKCM - M	EPE - d^{-3}	EPE - d^{-4}	exacto
2	.3785	.3490	.3802	.4407
3	.2397	.2052	.2114	.2217
4	.1611	.1452	.1471	.1499

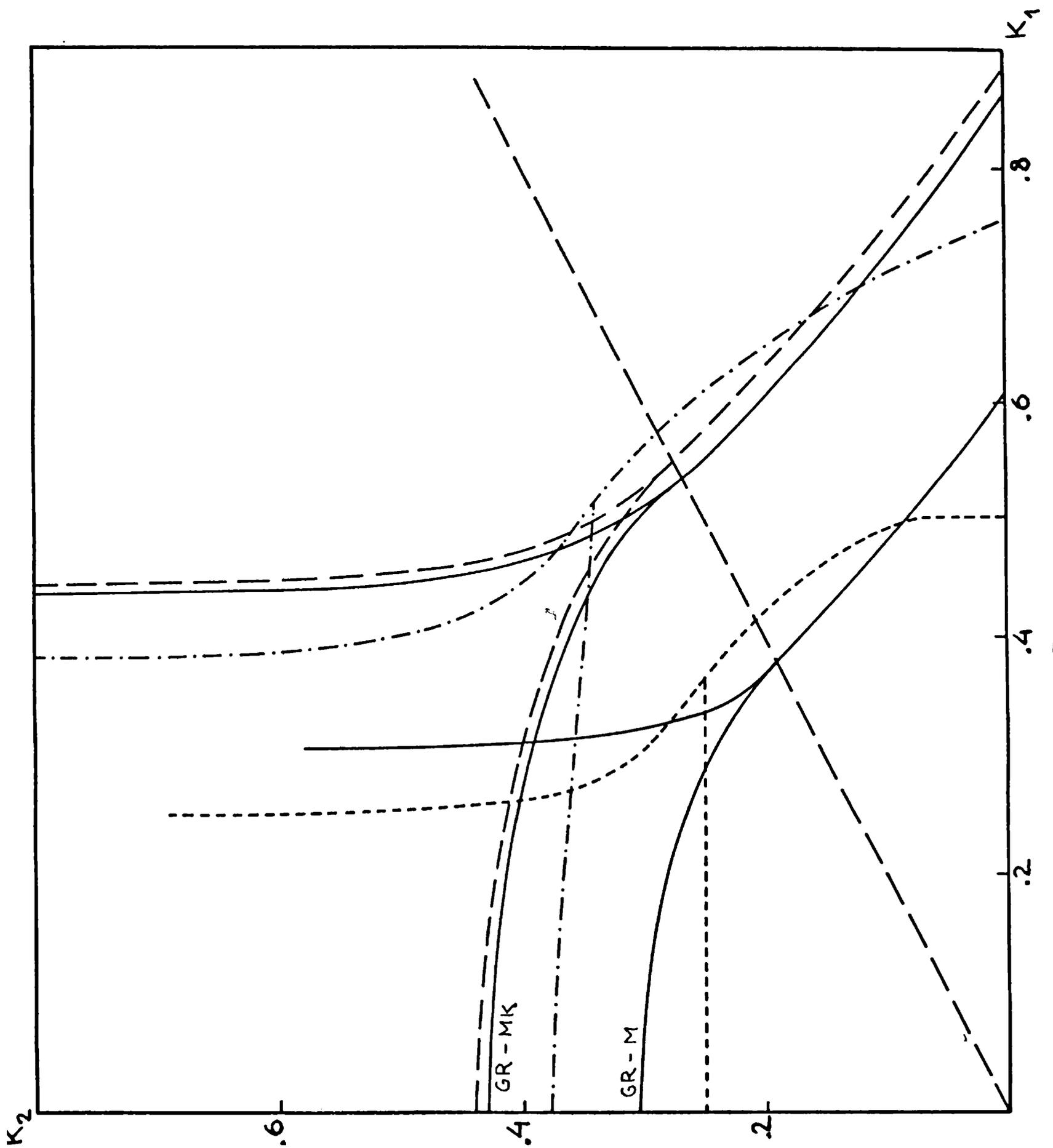
Tabla 7 - 3

d	MKCM - M	MKCM - MK	GR - MK ₁
2	.3785	.3450	.4407
3	.2397	.2052	.1398
4	.1611	.1190	.0501

Tabla 7 - 4

1	MKCM - M
0 (CM)	.250
1	.3785
2	.3518

Fig. 7 - 1 : Diagrama de fases del modelo $Z(4)$ spin en $d = 2$
 Obtenido con GR - MK ($b \rightarrow 1$)^a: — — —; CM : - - - - -;
 MKCM : - . - . - .; GR - M y GR - MK : ——— .



a : Ruján et al (1981)

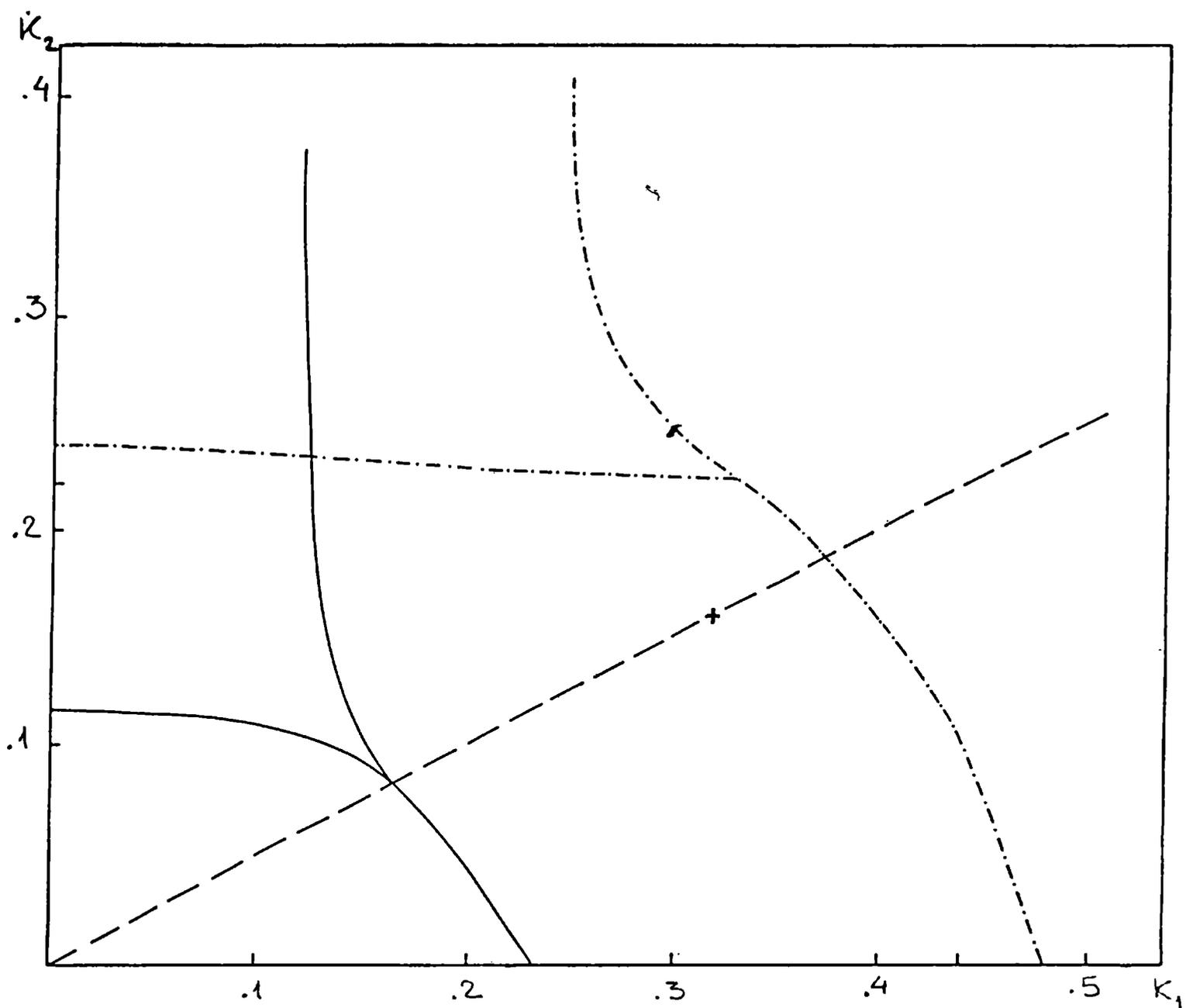


Fig. 7 - 2 Diagrama de fases del modelo $Z(4)$ spin en $d = 3$.
 Resultado del MKCM : - . - . - ; resultado de GR - MK
 (cálculo del autor) : ——— .

CAPITULO 8

REESCALEO ENTRE SISTEMAS FINITOS CON CAMPOS MEDIOS

8 - 1 . Descripción del método

En este capítulo se analiza una técnica basada en las ideas del reescaleo entre sistemas de tamaños finitos propuesta por Indekeu, Maritan y Stella (1982) y a la que en lo subsiguiente abreviaremos como IMS.-

De igual forma que el conjunto de técnicas estudiadas en la secc.(3-4) la técnica IMS está basada en la comparación de dos sistemas de distintos tamaños pero a diferencia de dichas técnicas la magnitud física involucrada no es la energía libre ni la longitud de correlación sino que es el parámetro de orden (al que también ocasionalmente nos referiremos como magnetización por spin). Para ambos sistemas comparados se computa la magnetización por spin en presencia de condiciones de borde que rompen la simetría del modelo. Estas condiciones de borde se establecen mediante un campo medio el cual a su vez, simula el efecto de la red infinita. La imposición de la relación de reescaleo usual entre magnetizaciones conduce después de ser linealizada a la relación entre las ctes. de interacción de los dos sistemas la cual según la concepción de las técnicas de reescaleo entre sistemas de tamaño finito es tomada como la relación de recursión. A partir de este punto se continua con el procedimiento usual de una transformación GR.-

Veamos más detalladamente esta técnica en su aplicación a un modelo de una sola constante de interacción K' y un parámetro de orden de una sola componente como el modelo de Potts o el de Ising en particular. Sean N y N' ($N' < N$) el número de spines de cada uno de los sistemas considerados.

Los spines del borde del primero de dichos sistemas interactúan con spines exteriores fijados a un valor v mientras que los spines del borde del segundo lo hacen con spines fijados al valor v' . Se supone además que v y v' son números reales. Si admitimos la presencia de un campo magnético h para el primer sistema y h' para el segundo se dispondrá de la información necesaria para el cálculo de todos los exponentes críticos como se estudió en secc. (2-4).-

La función de partición, por ejemplo para el sistema de N spines se puede escribir como:

$$Z_N[K, h; v] = C_N \sum_{\{\sigma_i\}_N} \exp \left\{ -\beta \sum_{i,j} [I(\sigma_i, \sigma_j) + I(\sigma_i, v)] \right\} \quad (8-1)$$

donde C_N es la constante de normalización, $I(\sigma_i, \sigma_j)$ es la interacción, cuya forma no nos interesa explicitar, entre vecinos próximos y $I(\sigma_i, v)$ es la interacción entre un spin del borde del sistema y uno de los spines externos que actúan como el campo medio b . A partir de (8-1) se obtiene la energía libre por spin $f_N(K, h; v)$ y la magnetización por spin m_N :

$$m_N(K, h; v) = - \frac{\partial f_N}{\partial h} \quad (8-2)$$

La identificación de m_N con v conduce a la aproximación campo medio analizada en el capítulo anterior donde el hamiltoniano \mathcal{H}_0 , como se ve en (8-1) contempla la interacción entre N spines. Como se señaló en las notas al capítulo 7 la ecuación $m_N(K, h; v) = v$ coincide con la ecuación de autoconsistencia o ecuación de estado obtenida imponiendo la condición (7-25).-

Analogamente a (8-1) se puede escribir la función de

partición Z_N , K' , h' , v' para el sistema de N' spines, a partir de la cual se puede calcular la energía libre por spin $f_{N'}(K', h'; v')$ y la correspondiente magnetización por spin $m_{N'}(K', h'; v')$. Nuevamente la identificación

$$m_{N'}(K', h'; v') = v' \quad (8-3)$$

es equivalente a una aproximación CM con un hamiltoniano que contiene en este caso una interacción entre N' spines.

Sin embargo, optamos por generar una transformación GR del tipo de reescaleo entre sistemas de tamaños finitos imponiendo

$$m_{N'}(K', h'; v') = b^{-a} m_N(K, h; v) \quad (8-4)$$

donde a es la dimensión del spin o de la magnetización

$$a = \frac{2 - d - \nu}{2}$$

donde ν es el exponente crítico de la función de correlación definido en ec.(1-25). Por supuesto también se debe imponer

$$v' = b^{-a} v \quad (8-5)$$

Consideremos ahora transiciones de fases de segunda especie. En estos casos en las proximidades del punto crítico es válido desarrollar ambos miembros de (8-4) alrededor de v' y v iguales a cero. Es evidente que estos desarrollos tienen la forma

$$m_{N'} = \left. \frac{\partial m_{N'}}{\partial v'} \right|_{v'=0} v' + O(v'^2) \quad m_N = \left. \frac{\partial m_N}{\partial v} \right|_{v=0} v + O(v^2) \quad (8-6)$$

Por lo tanto en primer orden, reemplazo (8-6) en (8-4) y teniendo en cuenta (8-5) resulta la relación de recursión

$$\frac{\partial M_{N'}}{\partial v'} (K', h'=0, v'=0) = \frac{\partial M_{N}}{\partial v} (K, h=0, v=0) \quad (8-7)$$

la cual es independiente del factor de reescaleo b . A partir de esta relación se determinan los puntos críticos, el exponente γ_T y el flujo de trayectorias tal como se indicó en el // capítulo 2.-

Alternativamente puesto que $v'(v)$ y $h'(h)$ son variables independientes podemos fijar $v = v' = 0$ y desarrollar (8-4) alrededor de h' y h igual a cero obteniéndose en el orden más bajo

$$\frac{\partial M_{N'}}{\partial h'} (K', h'=v'=0) h' = \frac{\partial M_{N}}{\partial h} (K, h=v=0) b^{-2} h \quad (8-8).$$

A partir de (8-8) se determina el exponente γ_H definido por

$$h' = b^{\gamma_H} h \quad (8-9)$$

imponiendo la relación de hiperescaleo (1-27 f) la cual es conveniente reescribirla como

$$\gamma_H = 2 + d \quad (8-10)$$

A partir de γ_T e γ_H se pueden calcular los exponentes críticos según la prescripción dada en secc.(2-4).-

En la sección siguiente se discutirán las ventajas y desventajas de este método a través de su aplicación a modelos con una sola cte. de acoplamiento. En la última sección se extenderá esta técnica al modelo $Z(4)$ el cual tiene un parámetro de orden de dos componentes.-

8 - 2 . Algunas aplicaciones de este método. Discusión y comentarios.-

En primer lugar siguiendo el trabajo original aplicaremos la técnica IMS al modelo de Ising. Consideramos el recaleo entre sistemas formulados en cuadrados de L y L' spins por lado

$$N = L^2 \quad , \quad N' = L'^2 \quad , \quad L' < L$$

La posición de cada spin es indicada con un par de subíndices (i, j) según las dos direcciones de la red.-

Es conveniente expresar el hamiltoniano del sistema mayor como

$$-\beta \mathcal{H}[\sigma] = K \Sigma_1 + h \Sigma_2 + K_V \Sigma_3 \quad (8-11)$$

donde

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=1}^L (\sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} + \sigma_{ji} \sigma_{j+1,i}) \quad (8-12a)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \sigma_{ij} \quad (8-12b)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{i=1}^L (\sigma_{1i} + \sigma_{i1} + \sigma_{Li} + \sigma_{iL}) \quad (8-12c)$$

Para el sistema menor resultan expresiones similares a (8-11) y (8-12) con los reemplazos $(K \rightarrow K', L \rightarrow L', \text{etc.})$ Las funciones de partición respectivas tendrán 2^N y $2^{N'}$ términos, cada término caracterizado por la terna $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ ó $(\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3)$. Evidentemente habrá muchos términos que aparecen repetidos, es decir con una cierta multiplicidad. Por supuesto las consideraciones de simetría reducen considerablemente el esfuerzo de cálculo. Sin embargo incluso para L relativamente pequeños es imprescindible recurrir a una computadora. Así y todo el

tiempo que demanda un cálculo de este tipo obliga a efectuar una selección en las configuraciones más probables lo cual de hecho implica caer en una variedad de la técnica grupo de re-normalización - Monte Carlo. En $d = 3$ la forma del hamiltoniano es la misma de (8-11) solo que ahora es necesario tener en cuenta otra coordenada en las expresiones (8-12).-

Damos a continuación las expresiones de la magnetización para los valores más bajos de L y L' esto es 2 y 1 respectivamente. En el primer caso tenemos

$$M = \frac{e^{4K} \sinh [4(2Kv+h)] + 2 \sinh [2(2Kv+h)]}{e^{4K} \cosh [4(2Kv+h)] + 4 \cosh [2(2Kv+h)] + e^{-4K} + 2} \quad (8-13a)$$

y para el segundo

$$m' = \tanh (4K'v' + h') \quad (8-13b)$$

Las aproximaciones CM de 4-spines y de 1-spin obtenidas imponiendo $m = v$ y $m' = v'$ dan como resultado, después de la linealización usual

$$K_{CM(L=1)}^* = 0.250 \quad K_{CM(L=2)}^* = 0.286$$

Por el contrario, según la técnica IMS se obtiene $K_{IMS}^* = 0.361$ lo cual representa una drástica aproximación hacia el valor exacto respecto de los valores anteriores. Algo similar ocurre en $d = 3$ donde se obtiene

$$K_{CM(L=1)}^* = 0.167 \quad \text{y} \quad K_{IMS}^* = 0.207$$

$$K_{CM(L=2)}^* = 0.182$$

En las tablas 8-1 y 8-2 se muestran los resultados obtenidos por IMS para el modelo de Ising en $d = 2$ y 3 y para distintos valores de L y L' .

En primer lugar tal como señalan estos autores los mejores resultados se obtienen para $L' = L - 1$ y $L \rightarrow \infty$. Este comportamiento tal como acotamos en el capítulo 3 es característico de las técnicas basadas en el reescaleo entre tamaños finitos. En $d = 2$ incluimos los resultados obtenidos por Nightingale (1976) los cuales son superiores a los provenientes del método IMS. Pero tengamos presente que el trabajo de Nightingale 1) está basado en la solución exacta de Onsager, 2) no ofrece información sobre el reescaleo del campo magnético es decir sobre el exponente γ_H , 3) no se conoce su performance en $d = 3$ donde el método IMS, por incluir una aproximación CM, produce los resultados notablemente buenos acotados en la tabla 8-1.-

La segunda aplicación que comentaremos la cual también aparece en el artículo original tiene como objetivo analizar el comportamiento del método en función de la dimensión espacial. Estudiaremos el modelo de Potts de q - estados en presencia de un campo magnético.-

Adoptamos los bloques mostrados en fig. 8-1 considerablemente más sencillos que los anteriores pero como es evidente, para $d > 1$, son anisotrópicos. La anisotropía es inconveniente para obtener valores confiables de los exponentes críticos por lo cual se puede optar por los bloques mostrados en fig. 8-1c. El hamiltoniano de partida está dado por la suma de las expresiones de (4 - 2) y (4 - 9). Utilizando el hecho de que $\langle \sigma^r \rangle = v$ para $r = 1.., q-1$, se puede expresar el hamiltoniano del bloque de fig. 8-1c como:

$$\begin{aligned}
 -\beta \mathcal{H}_0 = & K \sum_{i=1}^{2d} (q \delta_{\sigma_i, \sigma_0} - 1) + h \sum_{i=0}^{2d} (q \delta_{\sigma, 1} - 1) + \\
 & + (2d - 1) K v \sum_{i=1}^{2d} (q \delta_{\sigma, 1} - 1)
 \end{aligned} \tag{8-14}$$

y se obtiene la siguiente relación de recursión del reescaleo entre los sistemas de fig.(8-1a) y (8-1 c)

$$K' = \left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1} \right) K \left[(2\alpha-1)t^2 + t + 1 \right] \quad (8-15)$$

donde t es la transmisividad definida en ec.(4-10). En el punto fijo se tiene:

$$K_c = K^* = \frac{1}{q} \ln \left[\frac{q + 2(\alpha-1)}{2(\alpha-1)} \right] \quad (8-16)$$

esta es exactamente la misma expresión obtenida por IMS mediante el reescaleo entre los sistemas (8-1b) y (8-1a). Este resultado no debe sorprendernos puesto que el sistema de (8-1c) no presenta una cooperación entre los spines más intensa que la de fig.(8-1b). En la tabla 8-3 se comparan los resultados obtenidos mediante (8-16) con los resultados teóricos más confiables disponibles (Wu, 1982). Se ve que los resultados son muy buenos pese a la pequeñez de los sistemas considerados. Por // ejemplo, y para completar el comentario iniciado anteriormente para $d = 2$ y 3 , en $d = 4$ se obtiene para $q = 2$, $K_{CM_{(L=1)}}^* = .125$, $K_{CM_{(N=5)}}^* = .1291$ y $K_{IMS}^* = .1438$. Además es interesante notar que para $d = 2$ y $q = 4$ en la ec.(8 - 10) da el valor exacto de K_c .-

En cambio, los valores del exponente térmico γ_T son muy pobres comparados por ejemplo con los obtenidos mediante una técnica de reescaleo entre sistemas finitos más convencionales (Nightingale y Blöte, 1980).-

Por otra parte se debe notar que la expresión (8-16) es exactamente la misma obtenida mediante la aproximación de Bethe -Peierls (ver, por ejemplo, Huang 1963). En esta aproximación considerando el bloque de fig. 8-1c, sumergido en igual forma que antes en un campo medio v , se logra una ecuación de

autoconsistencia para este parámetro imponiendo que el valor medio del spin en la posición central "0" sea igual al valor medio del spin en los sitios de la periferia del bloque. Por supuesto, la aproximación de Bethe - Peierls (BP) no proporciona una relación de recursión y por lo tanto no se puede continuar con el formalismo usual de la transformación GR. Por otra parte la expresión (8-16) resulta también, como se señaló anteriormente, de considerar el bloque (8-1b) con un cálculo muchísimo más sencillo lo cual representa otra ventaja respecto a la aproximación B-P.-

Finalmente ha sido enfatizado por los autores del artículo original (IMS) que la constante de acoplamiento crítica dada por (8-16) tiene un comportamiento correcto en $d \rightarrow 1$, es decir $K_c \rightarrow \infty$. Además, para $q = 2$ y $d \rightarrow \infty$

$$K_c = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)$$

lo cual concuerda hasta el segundo orden con la expansión en $1/2 d$ (Fisher y Gaunt, 1964).

El aspecto más interesante de la técnica IMS, esto es, la imposición de condiciones de borde que rompen la simetría del modelo, puede ser aprovechada para describir sistemas diluidos o vidrios de spin, los cuales como se vió en secc. 3-5 corresponden a modelos con distribuciones aleatorias de spin. Estos problemas han sido considerados por Droz, Maritan y Stella (1982) de la siguiente manera. Tomemos el modelo de Ising y calculemos nuevamente la magnetización del bloque de fig. 8-1a en las mismas condiciones de antes.

El resultado es

$$\langle \sigma \rangle = v' \sum_{i=1}^{2\alpha} k_{i_0} + O(v'^3) \quad (8-17)$$

donde K_{i0} es la constante de interacción entre el spin central y el spin periférico "i". El parámetro de orden para un modelo con interacciones aleatorias es

$$m' = \int \prod_{\langle i,j \rangle} P'(k'_{ij}) \langle \sigma \rangle \quad (8-18)$$

donde para un sistema diluido se tiene la ya comentada distribución de probabilidad:

$$P'(k'_{ij}) = (1-p') \delta(k'_{ij}) + p' \delta(k'_{ij} - k') \quad (8-19)$$

Reemplazando (8-19) y (8-17) en (8-18) se obtiene

$$m' = 2^{\alpha} p' v' k' + O(v'^3) \quad (8-20)$$

Considerando ahora el bloque de fig. (8-1b) se obtiene para el valor medio termodinámico del spin:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{v \left[(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) e^{k_{12}} + (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2) e^{-k_{12}} \right]}{e^{k_{12}} + e^{-k_{12}}} \quad (8-21)$$

donde

$$\tilde{K}_i = \sum_{j=1}^{2\alpha-1} K_{ij}$$

y K_{ij} es la cte. de interacción entre un spin central ($i=1,2$) y uno de sus spines periféricos. K_{12} es la cte. de interacción entre los dos spines centrales. El parámetro de orden correspondiente se obtiene mediante una expresión similar a (8-18), con el $\langle \sigma \rangle$ de (8-21) y una distribución de probabilidad $P(K_{ij})$ con parámetros p y K . El resultado es

$$m = (2\alpha - 1) p v K (p \tanh K + 1) \quad (8-22)$$

Como siempre en el tratamiento GRER de un sistema con interacciones aleatorias se ha supuesto una transformación de (K, p) en (K', p') . Una de las dos relaciones de recursión necesarias proviene de imponer como en la técnica IMS usual el reescaleo de la magnetización. Los autores arriba citados no dan una prescripción para obtener la restante relación. De todos modos en el punto fijo es natural suponer que $p = p'$ y la única relación de recursión

$$2\alpha p k^* = (2\alpha - 1) p k^* (p \tanh k^* + 1) \quad (8-23)$$

nos da los posibles puntos fijos y por lo tanto críticos del sistema.-

Para un sistema que presenta una fase de vidrio de spin el problema anterior desaparece ya que el parámetro de orden necesario para describir dicha fase tiene dos componentes

$$\begin{aligned} m_1 &= \overline{\langle \sigma \rangle} \\ m_2 &= \overline{\langle \sigma^2 \rangle} \end{aligned} \quad (8-24)$$

siendo la segunda componente el parámetro de orden de Edwards-Anderson. En este caso es necesario considerar constantes de interacción aleatorias con la distribución de probabilidad vista en secc. 3-5

$$P(k_{ij}) = p \delta(k_{ij} - k) + (1-p) \delta(k_{ij} + k) \quad (8-25)$$

y además es necesario considerar en cada spin periférico en campo medio con los siguientes momentos

$$\overline{v_i} = v, \quad \overline{v_i v_j} = \tilde{v}^2, \quad \overline{v_i v_j v_k} = 0, \quad (8-26)$$

Luego, el promedio sobre el desorden, simbolizado en (8-24) con la barra horizontal significa promediar sobre los K_{ij} según la distribución (8-25) y promediar respecto los v_i según los momentos (8-26).-

Puesto que el parámetro de orden tiene dos componentes, dados por ec.(8-24) la prescripción dada en la primera sección debe ser levemente generalizada considerando las siguientes relaciones de reescaleo:

$$\begin{aligned} m_1' &= b^{-a} m_1 \\ m_2' &= b^{-2a} m_2 \end{aligned} \tag{8-27}$$

donde las cantidades primadas se refieren como antes al sistema de menor tamaño. Las relaciones de recursión buscadas se obtienen desarrollando las cantidades m_1 (m_1') en v y \tilde{v}^2 (v' y \tilde{v}'^2) hasta el orden no nulo más bajo, presuponiendo transiciones de fase de segunda especie. A partir de las relaciones de recursión se continua con el formalismo usual de la transformación GR. Los resultados obtenidos y la relativa simplicidad de los cálculos son, según los autores, muy alentadores y se comparan ventajosamente con otros métodos de similar complejidad.-

Otra aplicación de la técnica IMS a modelos con parámetros de orden multicomponente fué realizada por Slotte (1983) al modelo de Ising antiferromagnético sobre una red triangular. En realidad en el ejemplo visto anteriormente también se debe tener en cuenta la posibilidad de una fase antiferromagnética por lo cual es necesario agregar otro componente a (8-24).-

Como es bien sabido el antiferromagnetismo se descri-

be mediante dos redes interpenetrantes para el caso hipercúbico cada una de las cuales posee un tipo de variables A o B. Para el caso de una red triangular existen tres tipos de redes interpenetrantes caracterizadas respectivamente por variables A, B y C. Considerando solo en acoplamiento entre vecinos próximos todo spin perteneciente a un tipo de red interactúa con spines de la/s restante/s red/es. Se supone además que al tender el campo magnético a cero cada red tiende a magnetizarse en sentido opuesto para el caso de red hipercúbica, y dos redes en un mismo sentido y la tercera en el opuesto para una red triangular.-

Esta descomposición en redes interpenetrantes debe ser respetada en cada uno de los bloques que intervienen en el reescaleo. La misma estructura debe ser mantenida para los spines que rodean al bloque y externos a él fijándolos en valores v_A y v_B para la red hipercúbica, y v_A, v_B, v_C para la triangular. Alternativamente para este último caso Slotte (op.cit.) ha propuesto considerar en lugar de las magnetizaciones de las tres subredes un parámetro de orden cuyas componentes son la magnetización media

$$m = \frac{1}{3} (m_A + m_B + m_C) \quad (8-28)$$

y las dos diferencias linealmente independientes entre dichas magnetizaciones

$$\Theta_1 = \frac{1}{4} (m_A + m_B - 2 m_C) \quad (8-28)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{4} (m_A - 2 m_B + m_C)$$

Como de costumbre estas componentes sobre el manto exterior de los bloques es fijada en valores medios

$v (= \frac{1}{3} (v_A + v_B + v_C))$, ω_1 y ω_2 . El procedimiento de aquí en más no difiere mayormente de los anteriormente considerados

El diagrama de fases en el plano temperatura - campo magnético, obtenido con la técnica IMS reescalando sistemas de (6-15) spines se aproximan notablemente a primeros resultados obtenidos con MC sobre todo fuera de la región de bajas temperaturas.-

8 - 3 . Aplicación al modelo Z (4) spin

Consideramos a continuación el modelo Z (4) spin cuyo hamiltoniano está dado por la expresión (4-12a). Para generar el parámetro de orden a partir de la función de partición se debe incluir como es usual el término de fuente (4-18) Se seguirá en líneas generales un trabajo previo del autor (Riera, 1984 b).-

Los dos sistemas que son comparados son el bloque de un spin de fig. 8-1a. y el bloque mostrado en fig. 8-2 el cual en $d > 2$ es anisotrópico pero en menor grado que el utilizado por IMS (fig. 8-2).-

Como se vió en la sección 4-3, para describir todas las fases de este modelo, se debe considerar un parámetro de orden de dos componentes (m_1, m_2) donde $m_1 = \langle \sigma_i \rangle$ y $m_2 = \langle \sigma_i^2 \rangle$. Los correspondientes parámetros de los spines que rodean al único spin se fijan en los valores v_1' y v_2' . Análogamente, cada uno de los cuatro spines del bloque más grande interactúa con 2 (4) spines exteriores al mismo para $d = 2(3)$, los cuales se fijan a otros valores medios v_1 y v_2 .

A continuación se calculan los parámetros de orden para ambos sistemas. En el sistema más pequeño las constantes de interacción tienen los valores K_1' , K_2' y las dos componentes del campo magnético H_1' y H_2' . Todas estas cantidades contienen el factor $(-\beta)$. El tratamiento de este sistema no posee ninguna dificultad y se obtienen las siguientes componentes del parámetro de orden (manteniendo h_1' y h_2' distintos de cero.)

$$m_1' = \frac{1}{S'} \left[e^{2\alpha K_2' v_2' + H_2'} \sinh(2\alpha K_1' v_1' + H_1') \right] \quad (8-29a)$$

$$m'_2 = \frac{1}{S'} \left[e^{2\alpha K'_2 v'_2 + H'_2} \cosh(2\alpha K'_1 v'_1 + H'_1) - e^{-2\alpha K'_2 v'_2 - H'_2} \right] \quad (8-29b)$$

donde

$$S' = e^{2\alpha K'_2 v'_2 + H'_2} \cosh(2\alpha K'_1 v'_1 + H'_1) + e^{-2\alpha K'_2 v'_2 - H'_2} \quad (8-29c)$$

El sistema más grande tiene sobre cada ligadura constantes de interacción K_1 y K_2 y sobre cada sitio campos magnéticos H_1 y H_2 . El cálculo de la función de partición es considerablemente más tedioso que antes ya que se tiene que sumar sobre $4^4 = 256$ configuraciones. Por supuesto debido a consideraciones de simetría el número de configuraciones con distinto factor de Boltzmann se reduce a 32. Las expresiones resultantes de las magnetizaciones m_1 y m_2 son demasiado complicadas para transcribirlas en este trabajo.-

Las relaciones de reescaleo entre m_1 y m'_1 y entre m_2 y m'_2 son las adelantadas en ecs.(8-27) con $b = 2$, es decir

$$m'_1 = 2^{-2} m_1 \quad (8-30a)$$

$$m'_2 = 2^{-2a} m_2 \quad (8-30b)$$

Las relaciones (8-30a y b) se imponen también entre v_1 y v'_1 , y entre v_2 y v'_2 respectivamente. Luego, desarrollando los parámetros de orden hasta el primer orden en las ctes., v_1 , v'_1 y v_2 , v'_2 resulta

$$\frac{\partial m'_1}{\partial v'_1} = \frac{\partial m_1}{\partial v_1} \quad (8-31a)$$

$$\frac{\partial m'_2}{\partial v'_2} = \frac{\partial m_2}{\partial v_2} \quad (8-31b)$$

las cuales calculadas en $H_i = H'_i = 0$ ($i = 1, 2$) conducen a las relaciones de recursión:

$$K'_1 = \frac{k_2 k_1}{S} \left[e^{4k_2} (e^{4k_1} + 1) + 2 e^{-4k_2} + 7 e^{2k_1} + e^{-2k_1} + 8 \right] \quad (8-32a)$$

$$K'_2 = \frac{k_2 k_2}{S} \left[e^{4k_2} (e^{4k_1} + 6 + e^{-4k_1}) + 2 (e^{k_1} + e^{-k_1})^2 \right] \quad (8-32b)$$

donde

$$S = e^{4k_2} (e^{4k_1} + 6 + e^{-4k_1}) + 8 e^{-4k_2} + 12 (e^{k_1} + e^{-k_1})^2 \quad (8-32c)$$

y la constante k toma los valores 2 en $d = 2$ y $8/3$ en $d=3$. Como se ha señalado anteriormente la identificación directa del parámetro de orden (m'_1, m'_2) con los valores (v'_1, v'_2) conduce a la aproximación CM. Análogamente la identificación (m_1, m_2) con (v_1, v_2) conduce a una aproximación CM mejorada en la que se tienen en cuenta las fluctuaciones dentro de los bloques de la fig. 8-2.-

Es conveniente estudiar las relaciones de recursión (8-32) en términos de las variables transmisividades duales definidas en ec.(4-14) y (6-26). Por lo visto en el cap. 4 las propiedades de dualidad del modelo $Z(4)$ son más transparentes en el espacio $(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$.-

En este espacio, y considerando solo la región $J_1, J_2 > 0$ la transformación que se esté analizando presenta los siete puntos fijos mencionados en la secc. 4-3. El dibujo de trayectorias generado por las relaciones (8-32) reproduce las características de estabilidad correctas de dichos puntos fijos y por lo tanto muestra la presencia de las tres fases del modelo $Z(4)$ las cuales ya han sido previamente consideradas (ver fig. 8-3 y 8-4). En $d = 2$, se puede verificar numéricamente que las propiedades de dualidad de este modelo no son reflejadas median-

te la técnica que hemos empleado. La estimación de los puntos críticos mediante la técnica IMS es mucho mejor que las provenientes de otros métodos de similar complejidad, por ejemplo la técnica GRER usada por Knops (1975) en $d=2$ ó la aproximación de Migdal - Kadanoff con $b=2$. En particular, en el caso bidimensional, el punto triple, como fué anticipado al tratar el modelo de Potts, toma el valor exacto. En $d=3$, a pesar de la anisotropía y la pequeñez del bloque los puntos críticos tipo Ising y triple difieren de los valores aceptados en no más del 5 % (ver tabla 8-4). Esta mejora en la determinación de los puntos críticos con la dimensión es, como era de esperar debido a la hipótesis CM subyacente en la técnica IMS.-

Pasamos al cálculo de los exponentes críticos. Para ello se determinan los autovalores de la matriz $(\partial \kappa_i / \partial \kappa_j)(\vec{\kappa}^*)$ ($\equiv M_{i,j}$) obtenida mediante linealización de la transformación (8-32). Luego se determina el exponente térmico γ_T a partir del mayor autovalor λ_1 tal como se prescribió en secc. 2-4.-

En dos dimensiones, para los puntos fijos tipo Ising, resulta el valor $\gamma_T = 0.693$ el cual conduce a $\alpha = 2 - d/\gamma_T$ negativo lo cual es cualitativamente incorrecto. Lo mismo ocurre para el punto triple, donde se halla $\gamma_T = 0.836$. El autovector correspondiente al mayor autovalor posee como es esperado la dirección según la línea de Potts ($\kappa_1 = 2\kappa_2$).-

Para calcular el exponente magnético γ_H basta con desarrollar, por ejemplo, (8-30a) alrededor de H_i y H'_i iguales a cero y haciendo $v_1 = v'_1 = v_2 = v'_2 = 0$, calcular la expresión resultante en el punto triple ó en los puntos críticos tipo Ising O_1 u O_2 . Esta operación es sencilla porque las variables v_i, v'_i y las variables h_i, h'_i aparecen siempre juntas en cierto tipo de expresiones. Es fácil convencerse que en

todos los casos

$$(\lambda_H)^2 = 8$$

donde se ha usado la relación de hiperescaleo ($\gamma_H = a + d$)

Luego $\gamma_H = 1.5$

Una forma alternativa de obtener el diagrama de fases es (Ruján et al, 1981) graficando la función

$$B = (G_1^2 + G_2^2)^{-1/2}$$

donde ($i = 1, 2$)

$$G_i = \kappa'_i(\kappa_1, \kappa_2) - \kappa_i$$

La función B es una medida de la proximidad de un punto fijo y es interesante notar que la línea $P - O_1$ se comporta como una línea de puntos fijos. Esto sugiere la posibilidad de calcular los exponentes γ_T e γ_H continuamente a lo largo de esta línea. Los resultados exhibidos en la fig. 8-5 son presumiblemente incorrectos ya que los modelos que cortan la línea $P - O_1$ como se deduce de lo indicado en seccs. 4-1 y 4-3 pertenecen a la misma clase de universalidad. Este comportamiento universal es reproducido correctamente mediante la técnica Migdal - Kadanoff infinitesimal, es decir en el límite $b \rightarrow 1$ (Creutz y Roberts, 1982) incluso en la región $\kappa_2 < 0$.

El cálculo de los exponentes críticos en $d = 3$ no ha sido realizado debido a la anisotropía del sistema de mayor tamaño. Los cálculos para un cubo o sistemas de mayor tamaño que son en general bastante tediosos, para las variables $Z(4)$ se tornan prácticamente prohibitivos. Quizás estas dificultades puedan ser solucionadas con la ayuda de técnicas Monte Carlo como ha sido sugerido por IMS.

Tabla 8 - 1 : Resultados para el modelo de Ising en $d = 2$

L	L'	técnica IMS			Nightingale (1975)	
		K_c	y_T	y_H	K_c	y_T
2	1	.361	.69	1.50	-	-
3	2	.381	.78	1.57	.4224	1.079
4	3	.393	.82	1.60	.4309	1.059
5	4	.401	.84	1.62	.4360	1.037
exactos		.4407	1.000	1.875		

Tabla 8 - 2 Resultados para el modelo de Ising en $d = 3$

L	L'	técnica IMS		
		K_c	y_T	y_H
2	1	.207	.82	.2.00
3	2	.212	.95	2.08
		.2217 ^a	1.587 ^b	2.485

a ; Barber et al (1983)

b Le Guillou y Zinn Justin (1980)

Tabla 8 - 3 : Constante de acoplamiento crítica para el modelo de Potts. Resultados obtenidos de la ec.(8 - 16).

d	q =	2	3	4
	2		.3466	.3054
		(.4407)	(.3350)	(.2747)
3		.2027	.1865	.1733
		(.2217)	(.1841)	(.1604)
4		.1438	.1352	.1277
		(.1497)	(.1291)	(.1191)

Nota: Los valores entre paréntesis son promedios no pesados de diversas estimaciones extraídas de Wu (1983).

Tabla 8 - 4a : Estimaciones numéricas de la coordenada $w^{(2)}$
de los puntos P y O_2 en $d = 2$.

	este trabajo	Knops	Migdal - Kadanoff	exactos
P	1/3	.207	.344	1/3
O_2	.486	.315	.424	2 - 1

Tabla 8 - 4b : Estimaciones numéricas de la coordenada $w^{(2)}$
de los puntos P y O_2 en $d = 2$.

	este trabajo	Migdal - Kadanoff	otros métodos
P	.502	.718	.523 ^a
O_2	.664	.793	.6482 ^b

a Kim y Joseph (1975)

b : Sykes, Gaunt, Roberts y Wyles (1972)

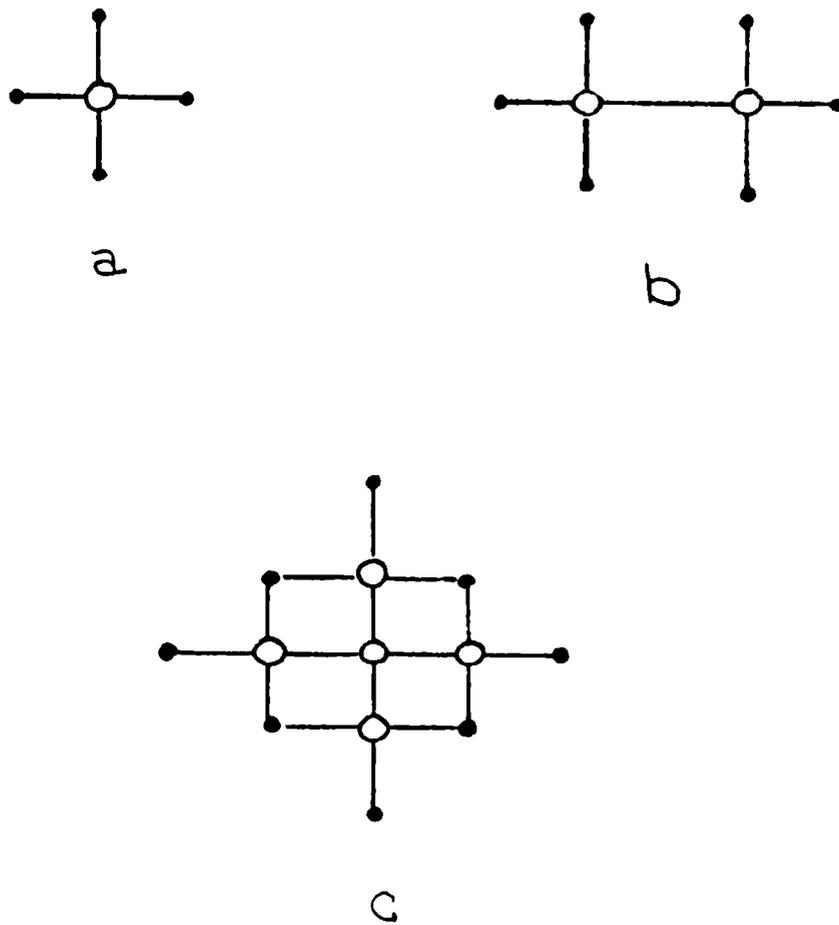


Fig. 8 - 1 Bloques de 1, 2 y 5 spines "vivos" (indicados con círculos vacíos) empleados en las relaciones de re-escalado.

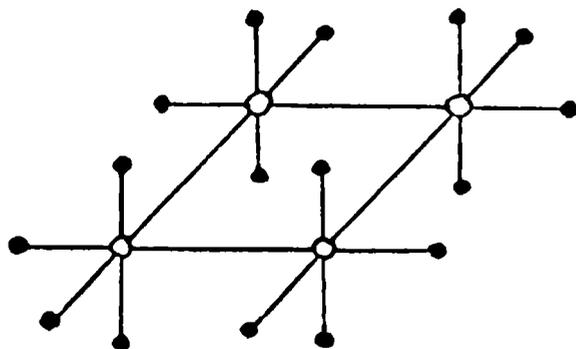


Fig. 8 - 2 Bloque empleado en el estudio del modelo $Z(4)$. Es evidente su anisotropía para $d > 2$. Tanto en esta figura como en la anterior los spines fijados a sus valores medios se indican con círculos llenos.

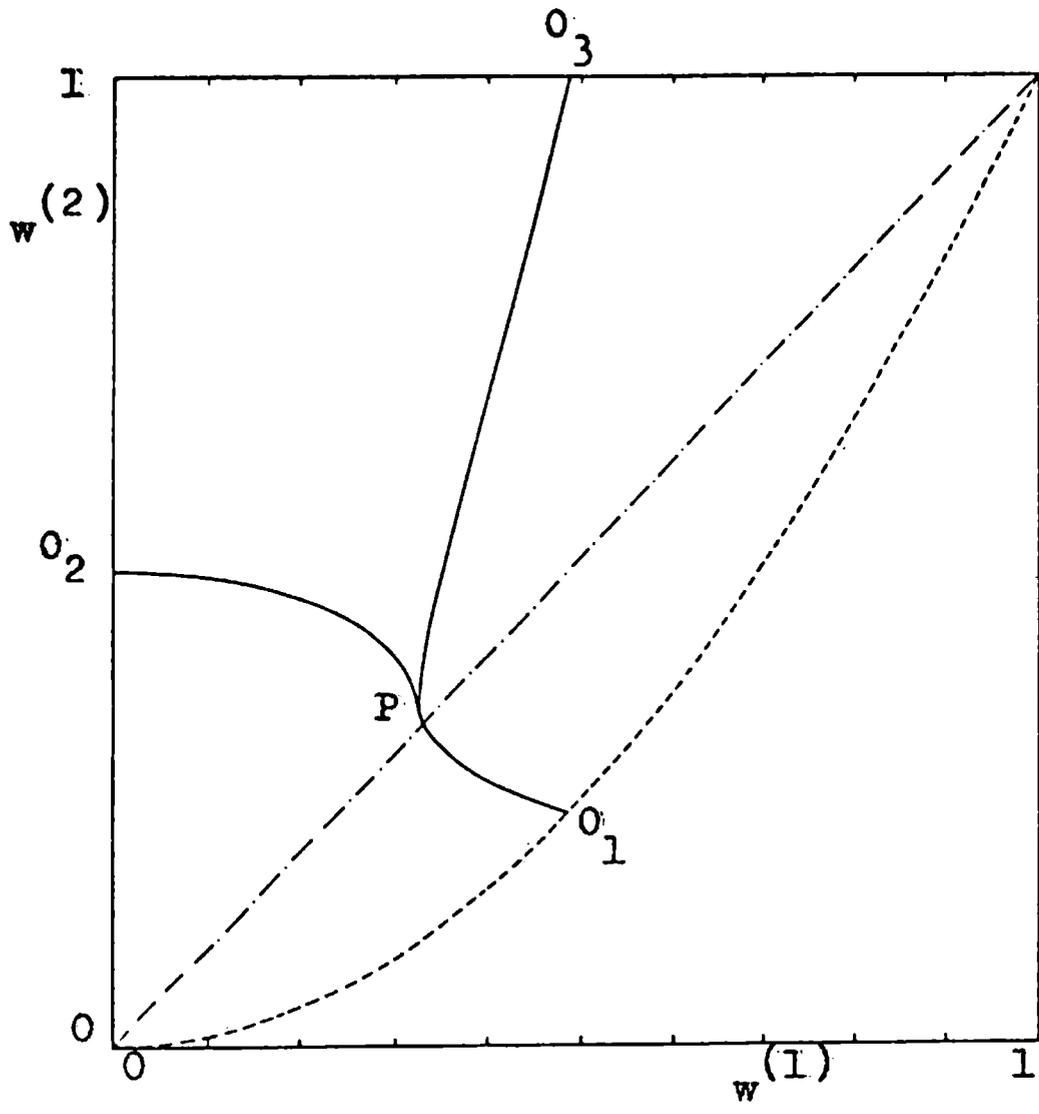


Fig. 8 - 3

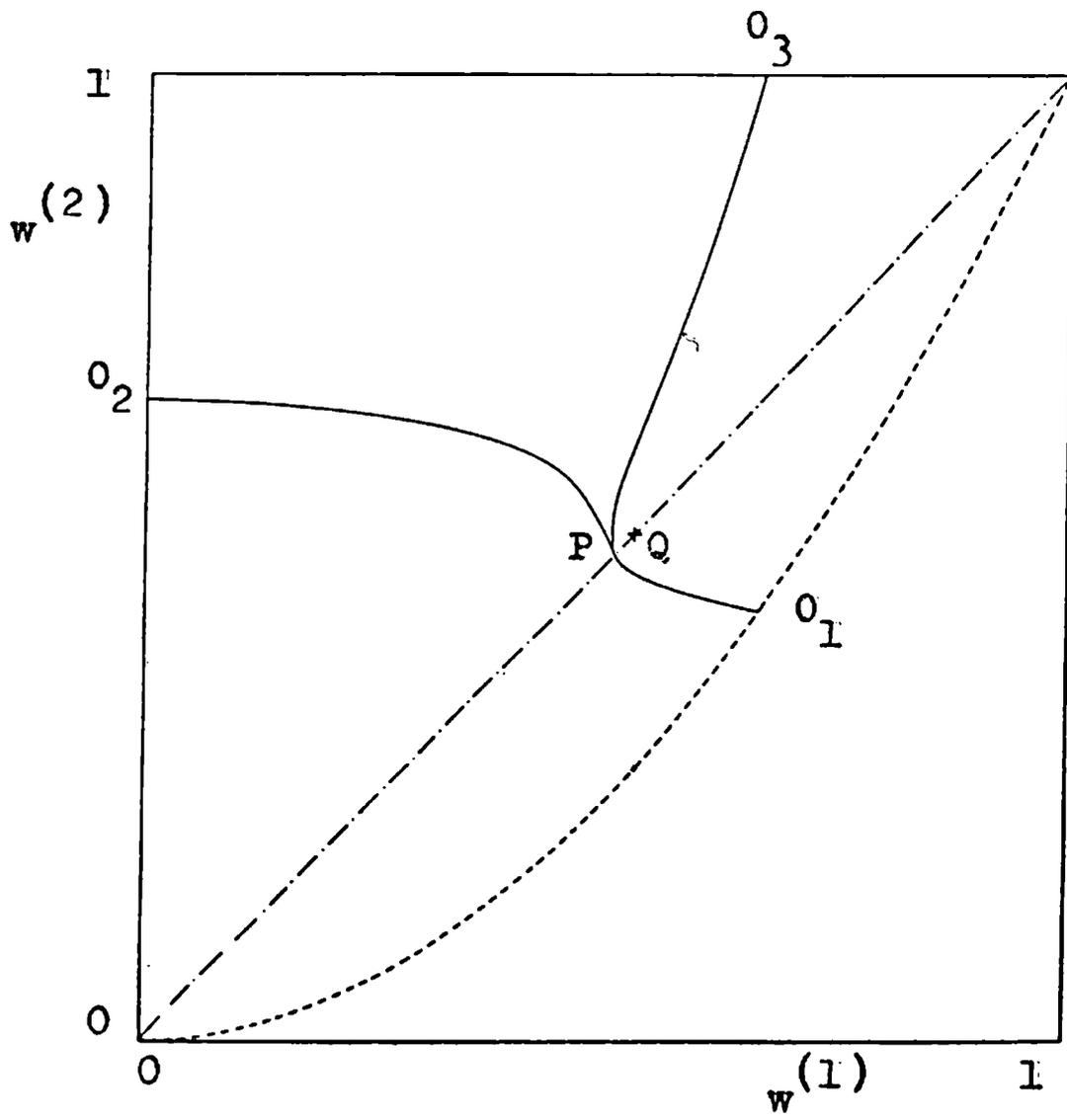


Fig. 8 - 4

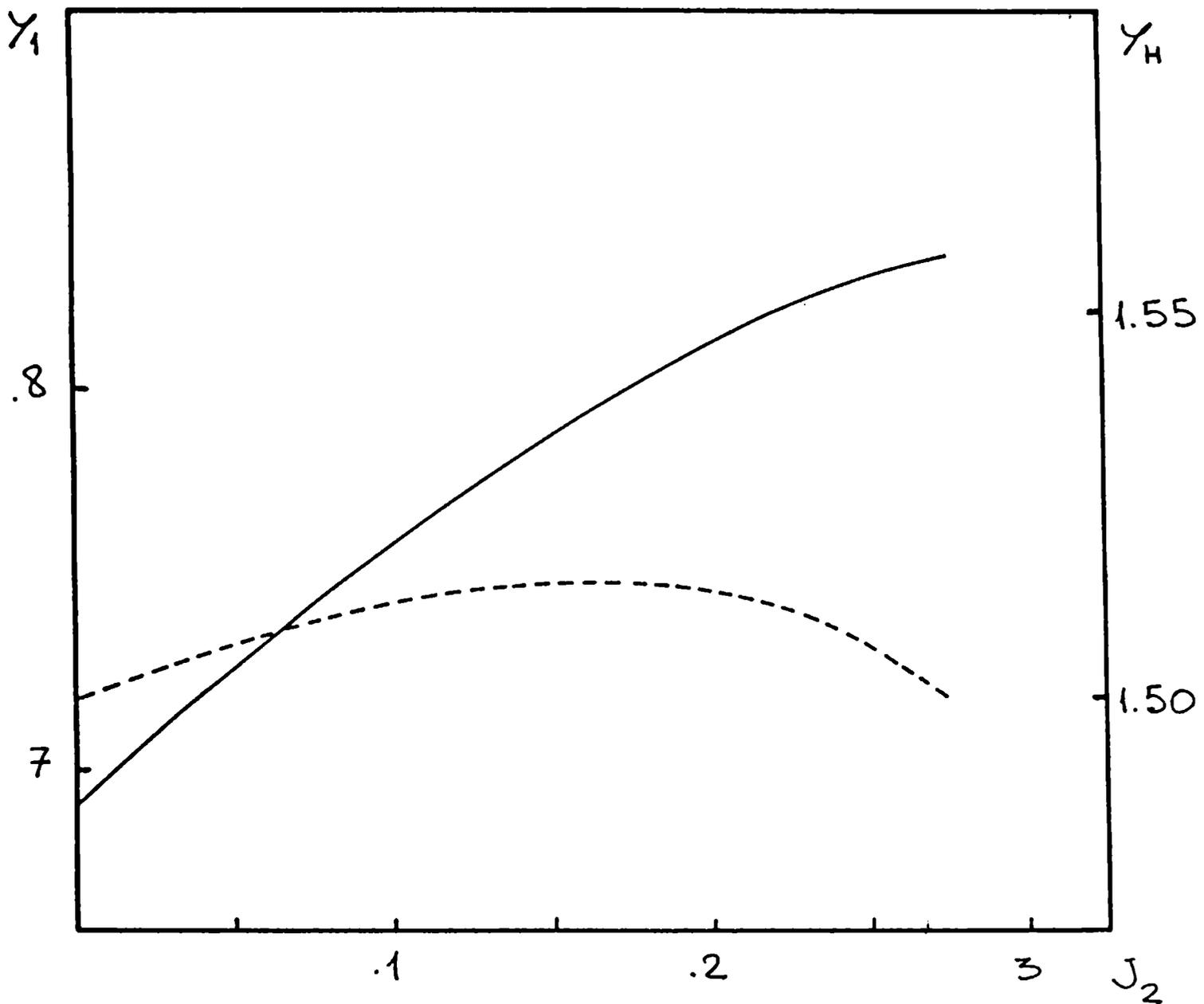


Fig. 8 - 5 : Exponentes t\u00e9rmico y_1 (l\u00ednea llena) y magn\u00e9tico y_H (l\u00ednea de trazos) vs. J_2 a lo largo de la curva $P - O_I$.

CONCLUSIONES

A pesar de ciertas dificultades formales que afectan en general a la teoría del grupo de renormalización en el espacio real, señaladas en el Capítulo 2 (Nota 1), es válida la intención de analizar la calidad de los resultados que arrojan dichas técnicas cuando se las aplica a modelos concretos. También es válido el esfuerzo de construir nuevas técnicas que conduzcan a mejores determinaciones de cantidades universales y no universales de la variedad más amplia posible de modelos de spin.

El autor cree que esta Tesis contribuye a dichos objetivos. En primer lugar, los estudios realizados en el Capítulo 6 indican la posibilidad de emplear la técnica de apertura-colapso para la decimación de grafos autoduales para modelos con varias constantes de interacción. En particular es importante aplicar dicha técnica a modelos con interesantes propiedades de dualidad como los modelos de spin $Z(q)$. Para $q \geq 5$ esta técnica deberá ser complementada con un modelo con vacancias (Nienhuis et al, 1979) para poder describir transiciones de fases de primera especie. Existe también la posibilidad de considerar a tales modelos diluidos (Alcaraz y Tsallis, 1982). Por otra parte, los grafos de dos terminales pueden ser empleados para generar redes jerárquicas (Burkhardt, 1982) sobre las cuales algunas técnicas del GRER conducen a resultados exactos.

Cálculos más concretos e inmediatos se pueden llevar a cabo con la técnica MK - CM analizada en el Capítulo 7. Como conclusión de dicho capítulo y, en particular, de la aplicación al modelo $Z(4)$, señalamos que la técnica MK - CM conduce a mejoras de los diagramas de fases obtenidos por las dos técnicas que se combinan, la basada en la aproximación campo medio y la basada en el esquema de Migdal-Kadanoff, cuando se las aplica

por separado. Respecto de la aproximación CM las mejoras son tanto de índole cualitativa - porque indica que algunas transiciones detectadas como de primera especie son en realidad continuas - como cuantitativas porque conduce a estimaciones más precisas de los puntos críticos y de las líneas de transición. Respecto de la técnica MK las mejoras son cuantitativas las cuales son aún más importantes en tres dimensiones. Desde el punto cualitativo el estudio del modelo Z(4) no es apropiado por cuanto este modelo presenta sólo transiciones continuas , de modo que sería conveniente un estudio del modelo Z(5) donde la técnica MK falla en reflejar el carácter discontinuo de algunas de sus líneas de transición de fases. Desde el punto de vista operacional, puesto que sólo se efectúan unas pocas transformaciones GR y no es necesario buscar los puntos fijos, la técnica MK - CM puede ser también ventajosamente aplicada a modelos en los cuales la aproximación de Migdal-Kadanoff conduce a una proliferación de nuevas interacciones. Entre estos modelos se encuentra el de Blume-Capel sobre el cual no existen aún resultados exactos.

El método descrito y aplicado en el capítulo 8 es en opinión del autor el de mejores perspectivas dentro de los analizados en esta Tesis. En primer lugar porque se inscribe en el marco de las técnicas de reescalado entre sistemas de tamaño finito las cuales reciben creciente atención por parte de los investigadores en este campo. Como se ha señalado en la sección 3 - 4, las principales ventajas de este conjunto de técnicas son i) el evitar la proliferación de interacciones, ii) el permitir la evaluación de los errores cometidos debido a la finitud del sistema considerado.

En particular, la técnica de reescalado entre sistemas de tamaño finito con condiciones de borde que rompen la simetría del modelo, como se puede concluir de su aplicación al

modelo de spin $Z(4)$, conduce a diagramas de fases cuantitativamente mejores que los producidos por otras técnicas de similar dificultad de cálculo mencionadas en la sección 8 - 3. Como se ha señalado en la aplicación al modelo de Potts, también los exponentes críticos son mejorados por esta técnica. Por otra parte el considerar retículos de mayor tamaño no ofrece dificultades teóricas y desde el punto de vista numérico sólo existen limitaciones provenientes de la capacidad de memoria de la computadora. Al igual que la técnica MK - CM, debido al carácter de campo medio que poseen las condiciones de contorno, los resultados son óptimos en dimensiones intermedias, por ejemplo, $d = 3$.

Entre las perspectivas de esta técnica queremos señalar en primer lugar la posibilidad de estudiar el efecto de diversas condiciones de borde o de introducir condiciones adecuadas para el estudio de interfases o paredes de dominio. Su principal limitación hasta el presente , esto es la dificultad inherente, tal cual ha sido formulada, de describir transiciones de fases de primera especie (dificultad que poseen todas las técnicas de reescalado entre sistemas de tamaño finito) podría ser superada considerando el reescalado de otra magnitud termodinámica.-



REFERENCIAS

- Alcaraz F C y R Köberle (1980) J Phys A 13, L 153
- (1981) J Phys A 14, 1169
- Alcaraz F C y C Tsallis (1982) J Phys A 15, 582
- Andelman D y A N Berker (1984) Phys Rev B 29, 2630
- Ashkin J y E Teller (1943) Phys Rev 64, 178
- Baker G A (1980) en "Phase transitions - Cargese 1980" ed.
por M Levy, J C Le Guillou y J Zinn Justin (Plenum, London and New York)
- Baracca A, R Livi, F Marchesoni, A Maritan, G Parisi y S Ruffo (1982) Nucl Phys B 201, 1 / 14
- Barber M N (1977) Phys Rep 29, 1 / 84
- (1983) preprint Inst. for Theoretical Phys.,
Univ. of California at Santa Barbara, NSF-ITP-83-
-17
- Barber M N, R B Pearson, D Toussaint y J L Richardson (1983)
preprint Inst. for Theor. Phys., Santa Barbara,
NSF-ITP-83-44
- Baxter R J (1973) J Phys C 6, L445
- Benyousef A y N Boccara (1983) Phys Lett 93 A, 351
- Berker A N, S Ostlund y F A Putnam (1978) Phys Rev B 17, 3650
- Bernasconi J (1978) Phys Rev B 18, 2185
- Binder K (1976) en "Phase transitions and critical phenomena"
vol 5b, ed. por C Domb y M S Green (Academic, New
York)
- (1979) editor, "Monte Carlo Methods in Statistical
Physics" (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,
New York)
- (1982) Z Phys B 48, 319 / 334
- Blöte H W J y R H Swendsen (1979) Phys Rev Lett 43, 799

- Brezin E (1980) en "Phase transitions - Cargese 1980", obra citada
- Brezin E, J C Le Guillou y J Zinn Justin (1976) en "Phase transitions and critical phenomena", obra citada, vol 6
- Burkhardt T W y J M J van Leeuwen (1982) en "Real-Space Renormalization", ed. por T W Burkhardt y J M J van Leeuwen (Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York)
- Caracciolo S (1981) Nucl Phys B 180 (FS2), 405 / 416
- Caracciolo S y S Patarnello (1983) preprint Scuola Normale Superiore, Pisa, N° 9
- Cardy J (1980) J Phys A 13, 1507
- Costa U M S y C Tsallis (1983) preprint Centro Bras.de Pesq. Físicas, Rio de Janeiro, CBPF-NF-039/83
- Creutz M y L E Roberts (1983) Nucl Phys B 215 (FS7), 447 / 457
- da Silva L R, C Tsallis y G Schwachheim (1983) preprint CBPF-NF-062/83
- de Dominicis C (1983) preprint CEN - Saclay, 'Gif-sur-Yvette, SPhT/83/69
- de Magalhaes A C N, C Tsallis y G Schwachheim (1981) J Phys C 14, 1393 / 1408
- den Nijs M P M (1979) J Phys A 12, 1857
- (1983) Phys Rev B 27, 1674
- de Oliveira P M C y C Tsallis (1982) J Phys A 15, 2865
- Domb C (1960) Adv Phys 9, 149
- (1974) en "Phase transitions and critical phenomena", obra citada, vol 2
- Droz M y A Malaspinas (1980) J Phys C 13, 4365
- Droz M, A Maritan y A Stella (1982) Phys Lett 92 A, 287/289
- Elitzur S, R B Pearson y J Shigenitsu (1979) Phys Rev D 19,

- Essam J W y M E Fisher (1970) Rev Mod Phys 42, 272
- Fisher M E (1967) J Appl Phys 38, 981
 - (1971) en "Critical Phenomena" - Proceedings of
 the Enrico Fermi Int. School of Physics, ed. por
 M S Green (Academic, New York)
- Fortuin C M y P W Kasteleyn (1971) Physica 57, 536
- Huang K (1963) "Statistical Mechanics" (John Wiley & Sons,
 New York)
- Indekeu J O, A Maritan y A L Stella (1982) J Phys A 15, L 291
- Kadanoff L P (1966) Physics 2, 263
 - (1976) Annals of Physics 100, 359
- Kadanoff L P, W Götze, D Hamblen, R Hecht, E A S Lewis, V V
 Palciauskas, M Rayl y J Swift (1967) Rev Mod Phys
 39, 395
- Kadanoff L P y A Houghton (1975) Phys Rev B 11, 377
- Kadanoff L P, A Houghton y M C Yalabik (1976) J Stat Phys,
 14, 171
- Kinzel W y E Domany (1981) Phys Rev B 23, 3421
- Kirkpatrick S (1977) Phys Rev B 15, 1533
- Knops H J F (1975) J Phys A 8, 1508
- Le Guillou J C y J Zinn Justin (1977) Phys Rev Lett 39, 95
 - (1980) Phys Rev B 21, 3976
- Livi R, A Maritan y S Ruffo (1982) J Phys A 15, L 299/L 303
 - (1983) J Phys A 16, 2225
- Luck J M (1984) preprint CEN - Saclay, Gif-sur-Yvette, SPH-
 T/84/52
- Ma S K (1973) Rev Mod Phys 45, 589
 - (1976) "Modern Theory of Critical Phenomena"
 (Benjamin, New York)
- Mártin H O (1980) Tesis, Universidad Nacional de La Plata

- Mártin H O y C Tsallis (1981) Z Phys B 44, 325 / 331
 - (1983) J Phys C 16, 2787 / 2795
- Martinelli G y G Parisi (1981) Nucl Phys B 180, 201
- Metropolis N, A W Rosenbluth, M N Rosenbluth, A H Teller y E Teller (1953) J Chem Phys 21, 1087
- Migdal A A (1975) Zh Eks Teor Fiz 69, 810
 - (1975) Zh Eks Teor Fiz 69, 1457
- Niemeijer Th y J M J van Leeuwen (1974) Physica 71, 17 / 40
 - (1976) en "Phase transitions and critical phenomena", obra citada, vol 6
- Nienhuis B, A N Berker, E K Riedel y M S Schick (1979) Phys Rev Lett 43, 737
- Nienhuis B y M Nauenberg (1975) Phys Rev Lett 35, 477
- Nienhuis B, E K Riedel y M Schick (1981) Phys Rev B 23, 6055 / 6060
- Nightingale M P (1976) Physica 83 A, 561 / 573
- Nightingale M P y H W J Blöte (1980) Physica 104 A, 352/357
- Onsager L (1944) Phys Rev 65, 117
- Plischke M y D Zobin (1977) J Phys C 10, 4571
- Potts R B (1952) Proc Camb Phil Soc 48, 106
- Riera J A (1983) publicación Instituto de Física de Rosario
 - (1984a) J Phys C (en prensa)
 - (1984b) J Phys A 17, 2885
- Roberts L E (1984) Nucl Phys B 230 (FS 10) 385 / 406
- Ruján P, G O Williams, H L Frisch y G Forgács (1981) Phys Rev B 23, 1362 / 1370
- Savit R (1980) Rev Mod Phys 52, 453
- Schick M (1982) en "Real-Space Renormalization", obra citada
- Sengers J V (1980) en "Phase Transitions - Cargese 1980", obra citada
- Slotte P A (1983) preprint Trondheim N° 13
- Stanley H E (1976) en "Phase transitions and critical pheno-

- mena", obra citada, vol 3
- (1971) "Introduction to Phase Transitions and
Critical Phenomena (Clarendon Press, Oxford)
- Suzuki M (1977) Prog Theor Phys 58, 1142
- Swendsen R H (1980) en "Phase Transitions - Cargese 1980" o-
bra citada
- (1982) en "Real-Space Renormalization" , obra
citada
- Tatsumi T (1978) Prog Theor Phys 59, 714
- Tsallis C y S V F Levy (1981) Phys Rev Lett 47, 950
- Wallace D J y R K P Zia (1978) Rep Prog Phys 41, 1
- Wegner F J (1972) Phys Rev B 5, 4529
- Widom B (1965a) J Chem Phys 43, 3892
- (1965b) J Chem Phys 43, 3898
- Wilson K (1971a) Phys Rev B 4, 3174
- (1971b) Phys Rev B 4, 3184
- (1975) Rev Mod Phys 47, 773 / 840
- Wilson K y J Kogut (1974) Phys Rep 12 C, 75
- Wu F Y (1982) Rev Mod Phys 54, 235
- (1983) J Appl Phys
- Wu F Y y K Y Lin (1974) J Phys C 7, L 181
- Young A P y R B Stinchcombe (1975) J Phys C 8, L 535
- Yeomans J M y R B Stinchcombe (1980) J Phys C 13, L 239 /
L 244
- Zinn Justin J (1980) en "Phase Transitions - Cargese 1980"
obra citada