

FENOMENOS ELASTICOS Y ANELASTICOS EN METALES
Y ALEACIONES BAJO DEFORMACIONES MULTIAXIALES.

MODULO DE POISSON DINAMICO

RAUL EDUARDO BOLMARO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

- 1986 -

Finalmente resultó simple.....

como toda cosa tonta.

-
A mis padres, y a los padres de mis padres porque
ellos son la verdadera génesis de
este trabajo.

A Liliana, que de esto no entiende demasiado pero
tiene la suerte de que no le importe.

A Bárbara, que mira azorada el presente, en la
esperanza de que el futuro no la asombre.

los hijos que de mis hijos vengan.....

INDICE

Introducción.....	1
CAPITULO I Teoría elástica del módulo de	
Poisson.....	3
1.1. Promedio en policristales isótropos.....	5
1.1.1. Invariantes tensoriales y promedio de constantes elásticas.....	8
1.1.1.1. Invariantes tensoriales para diversas simetrías.....	12
1.1.1.2. Determinación de promedios para diversos materiales.....	14
1.1.2. Discusión.....	16
1.1.3. Conclusiones.....	23
1.2. Promedio en policristales anisótropos.....	25
1.2.1. El módulo de Poisson en materiales de simetría cúbica.....	31
1.2.2. El módulo de Poisson en materiales de simetría hexagonal.....	35
1.2.3. Discusión y conclusiones.....	38
CAPITULO II Teoría anelástica del módulo	
de Poisson.....	62
2.1. Simetría cúbica. Tensión longitudinal.....	63
2.2. Simetría cúbica. Torsión.....	68
2.3. Simetría hexagonal. Tensión longitudinal.....	69
2.4. Simetría hexagonal. Torsión.....	72
2.5. Disipación anelástica.....	73
2.6. Materiales isótropos.....	76
2.7. Conclusiones.....	77

CAPITULO III : Revisión de métodos de me-	
	dición. Procedimiento expe-
	rimental utilizado..... 84
3.1.	Métodos experimentales..... 84
3.1.1.	Métodos directos..... 86
3.1.1.1.	Métodos estáticos..... 86
3.1.1.2.	Métodos dinámicos..... 87
3.1.2.	Métodos indirectos..... 89
3.1.2.1.	Métodos estáticos..... 90
3.1.2.2.	Métodos dinámicos..... 91
3.2.	Elección del método experimental..... 93
3.2.1.	Excitación y detección por acoplamiento me- cánico..... 94
3.2.2.	Excitación y detección por corrientes indu- cidas..... 94
3.2.3.	Excitación y detección electromagnética..... 95
3.2.4.	Excitación y detección por cristal piezoe- léctrico..... 95
3.2.5.	Excitación y detección electrostática..... 96
3.3.	Descripción del equipo y disposición experi- mental..... 97
3.3.1.	Equipo electrónico..... 97
3.3.2.	Banco de medición..... 98
3.3.3.	Horno eléctrico..... 98
3.3.4.	Evaluación de las características electrome- cánicas..... 99
3.3.4.1.	Fuerza entre electrodos y probeta..... 99
3.3.4.2.	Amplitud de deformación..... 101
3.3.4.3.	Capacidad..... 102
3.3.4.4.	Amplitud de señal a detectar..... 103
3.3.4.5.	Modificación de frecuencia por el modo de sujeción..... 103
3.3.4.6.	Correcciones por variación de temperatura.... 104
3.3.4.7.	Evaluación de errores..... 106

CAPITULO IV		Módulo de Poisson en vainas	
		y barras de zircaloy-4.....	123
4.1.	Resultados experimentales previos.....		124
4.2.	Ondas longitudinales en barras y tubos.....		127
4.3.	Resultados experimentales.....		130
4.4.	Discusión.....		132
4.5.	Conclusiones.....		138
CAPITULO V		Transición orden-desorden y	
		módulo de Poisson en acero	
		AISI-1080.....	174
5.1.	Aspectos experimentales previos.....		175
5.2.	Aspectos teóricos previos.....		177
5.3.	Resultados experimentales.....		181
5.4.	Teoría.....		182
5.5.	Discusión.....		186
5.6.	Conclusiones.....		190
CAPITULO VI		Conclusiones generales y	
		proyecciones.....	204
6.1.	Resumen y conclusiones.....		204
6.2.	Proyecciones y trabajo futuro.....		207
APENDICE A		Comportamiento anelástico de	
		los materiales.....	210
APENDICE B		Elasticidad y anelasticidad	
		en medios anisotrópicos.....	220
APENDICE C		Propagación de ondas elásticas	
		en materiales isótropos.....	228
Agradecimientos.....			239

INTRODUCCION

Una deformación ϵ_l en la dirección longitudinal de una probeta es acompañada por una deformación de signo opuesto ϵ_t en la dirección perpendicular. La razón entre las dos deformaciones

$$\nu = - \frac{\epsilon_t}{\epsilon_l} \quad \text{I. 1.}$$

es el llamado módulo o razón de Poisson.

Esta cantidad es característica de los materiales elásticos isotrópicos y está relacionada en forma sencilla con los módulos clásicos de corte G , de Young E y volumétrico K . Por esta razón, quizás, ha sido tomada como de interés secundario en la investigación y estudio de los materiales, a pesar de su importancia tecnológica. Por otro lado, ha resultado una magnitud de difícil medición directa y aprehensión teórica. Generalmente aparece en todos los trabajos como un resultado residual del que difícilmente pueda sacarse información microscópica acerca de mecanismos anelásticos o propiedades elásticas y anisotropía del material. Tan es así que se ha optado por adjudicar las diferencias entre valores de distintos investigadores a las propias, y por lo demás ciertas, dificultades experimentales. Además se comete frecuentemente el error de considerarlo un módulo más, conjuntamente con los clásicos E , G y K , sin tener en cuenta sus características particulares. Habitualmente el módulo de Poisson es considerado una magnitud obscura, de difícil evaluación experimental y cuyas variaciones y anomalías no resultan fácilmente explicables en términos de la teoría de la elasticidad lineal.

Pocos trabajos de revisión han sido dedicados a este problema. El último [1], según nuestro conocimiento, efectúa una revisión general de resultados pero deja intacto, a nuestro juicio, el problema de la alta dispersión de resultados y baja densidad de información obtenida de los mismos.

Nuestro trabajo contribuye a la clarificación de estos aspectos. En el Capítulo I se analizan las consecuencias teóricas de la anisotropía sobre el comportamiento del módulo de Poisson. En primer lugar se hace un estudio sobre los métodos de promedio en policristales, efectuándose aportes originales sobre estos métodos y sus fundamentos básicos.

En el Capítulo II se hace una extensión de los fenómenos anelásticos al módulo de Poisson, basándose en el concepto de tensiones y deformaciones simetrizadas [Apéndice B].

En el Capítulo III se efectúa una revisión sobre métodos de medición de constantes elásticas y del módulo de Poisson en particular. Se describe el método y equipamiento utilizado conjuntamente con una justificación de la elección del mismo y una discusión de los errores cometidos.

El Capítulo IV muestra los aspectos experimentales del trabajo desarrollados en zircaloy-4. Los resultados obtenidos son explicados en términos de la teoría desarrollada en el Capítulo I y de la teoría de propagación de ondas en materiales hexagonales.

El Capítulo V muestra una aplicación al problema de transformaciones orden-desorden en acero AISI-1080. Al respecto se propone un modelo original que describe el fenómeno en términos de la teoría de Landau de transformaciones de fase de segundo orden.

Las conclusiones particulares se hallan al final de cada capítulo en tanto que las conclusiones generales, proyectos y trabajo futuro se encuentran en el Capítulo VI.

El uso de zircaloy-4 y acero AISI-1080 como materiales de trabajo tiene una justificación tecnológica más que teórica. Las mediciones en zircaloy-4 se efectuaron directamente sobre vainas de elementos combustibles de reactores nucleares en un trabajo conjunto con la Comisión Nacional de Energía Atómica.

Los trabajos sobre acero se efectuaron a pedido de la empresa siderúrgica Acindar S.A. sobre un material de su fabricación y de uso frecuente en aplicaciones industriales.

Los aspectos teóricos quedarían, quizás, más claros trabajando en un material más limpio, con fenómenos elásticos y anelásticos más estudiados. De todos modos el desafío de entender materiales más complejos y de uso habitual en tecnología fue afrontado con éxito y eso abre el camino para estudios más restringidos y puntuales.

1. Köster, W. and Franz, H., Metallurgical Reviews, Vol. 6, 21 [1961] 1.

CAPITULO I TEORIA ELASTICA DEL
MODULO DE POISSON

El módulo de Poisson es una cantidad característica de materiales elásticos isótropos definida por la relación I.1. Está relacionada con los módulos clásicos de corte G, de Young E y volumétrico K por

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad 1.1$$

$$\nu = \frac{3K - E}{6K} \quad 1.2$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad 1.3$$

De 1.2 y 1.3 puede verse que $-1 \leq \nu \leq 1/2$ pero en materiales isótropos, aceptando que no puede haber dilatación transversal para una elongación longitudinal, es siempre $\nu \geq 0$

Esto no ocurre en materiales anisótropos donde el módulo de Poisson pasa a ser una magnitud dependiente de la orientación en el cristal. Definimos

$$\nu_{k1} = - \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{kk}} \quad 1.4$$

como el módulo de Poisson que mide la contracción en la dirección 1 para una tensión aplicada en la dirección k. [No debe sumarse sobre los índices repetidos].

Para un sistema de ejes cualesquiera

$$\nu'_{k1} = - \frac{\epsilon'_{11}}{\epsilon'_{kk}} \quad 1.5$$

$$\nu'_{k1} = - \frac{\epsilon'_{11kk}}{\epsilon'_{kkkk}} \quad 1.6$$

donde las deformaciones y coeficientes primados se obtienen con las leyes clásicas de transformación tensorial (Apéndice B).

Cuando se intenta calcular tanto este módulo como los de corte y de Young para un agregado policristalino suelen utilizarse varios métodos. Algunos de ellos parten del supuesto de encontrarse con un material en el que la distribución de los granos dentro del policristal es tan azarosa como para producir una muestra isótropa. Dos de los más conocidos son los modelos de promedio de Voigt [1] y de Reuss [2]. El primero supone igual deformación en todos los granos en tanto que el segundo considera que la tensión aplicada en cada uno es la misma. Hill [3] demuestra que estos dos promedios constituyen los límites superior e inferior para un policristal y sugiere el uso de algún valor medio como el promedio aritmético o geométrico entre ambos. En el estudio de estos promedios, y otros del mismo tipo, para el caso del módulo de Poisson se centra el trabajo del punto 1.1.. Se efectúa una generalización de los modelos de Voigt y de Reuss basada en primeros principios y postulados más rigurosos.

Otros modelos más realistas intentan tener en cuenta las anisotropías reales de los policristales y obtener información sobre su textura. Los promedios se calculan teniendo en cuenta los "pesos" de las distintas orientaciones, información que se saca a partir de las figuras de densidad de polos obtenidas por difracción de rayos X. Una discusión de este tipo de promedios y sugerencias sobre su uso se incluyen en el punto 1.2.. También se incluyen cálculos de ν en función de la dirección para diversos materiales cúbicos y para Zry-4 que muestran la alta anisotropía elástica de este módulo. [4,5].

1. 1. PROMEDIO EN POLICRISTALES ISOTROPOS

Una descripción, alternativa a la de matrices 6x6 desarrollada en el Apéndice B, es obtenida reduciendo los tensores de cuarto orden de las constantes elásticas a una matriz 9x9 con las siguientes correspondencias entre subíndices [6]

$$\begin{array}{cccccccccc}
 ij \text{ ó } kl & 11 & 22 & 33 & 23 & 31 & 12 & 32 & 13 & 21 \\
 h \text{ ó } g & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9
 \end{array} \tag{1.7}$$

De este modo la ecuación B. 2 queda reducida a

$$\sigma_h = c_{hg} \epsilon_g \tag{1.8}$$

Esta matriz 9x9 de las constantes elásticas sufre una transformación ortogonal cuando el sistema de coordenadas de referencia es rotado un ángulo arbitrario. Para hacer consistente todo el tratamiento debe definirse la matriz unidad como

$$\{s\} \cdot \{c\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \{I\} \tag{1.9}$$

con la cual resulta $\{c\}^{-1} = \{s\}$ y $\{\epsilon_g\} = \{I\} \cdot \{\epsilon_g\}$

La cuestión principal es saber si conviene promediar sobre las constantes elásticas C_{ijkl} o sobre los coeficientes elásticos S_{ijkl} . El primero es apropiado para policristales donde los granos tienen todos el mismo estado de deformaciones como muestra la Figura 1.1.. Este promedio, debido a Voigt [1928], hace uso de la invariancia de la traza de la matriz 9x9 de las constantes elásticas c_{hg}

$$I_1^* = c_{ijij} = \text{constante} \tag{1.10}$$

El segundo invariante proviene de la invariancia de la energía de deformación. Para el caso especial de una expansión homogénea $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1/3 \epsilon_{ii}$ y $\epsilon_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Luego puede deducirse

$$I_1 = c_{iijj} = \text{constante} \quad 1.11$$

Para un sólido isotrópico la correspondiente matriz 9x9 es

$$c_{hg} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad 1.12$$

donde λ y μ son los coeficientes de Lamé. De esta matriz se deduce

$$I_1^* = 3 (\lambda + 4\mu) \quad 1.13$$

$$I_1 = 3 (3\lambda + 2\mu) \quad 1.14$$

Igualando de a pares se llega a las expresiones

$$\mu = 1/30 (3 c_{ijij} - c_{iijj}) = 1/30 (3 I_1^* - I_1) \quad 1.14$$

$$\lambda = 1/15 (2 c_{iijj} - c_{ijij}) = 1/15 (2 I_1 - I_1^*) \quad 1.15$$

que representan los valores promedio para las constantes elásticas del policristal en función de las constantes elásticas de un cristal simple.

El segundo promedio debido a Reuss [1929] es apropiado cuando todos los granos están sometidos a la misma tensión como muestra la Figura 1.2. Se hace uso de la invariancia de la traza

de la matriz 9x9 {s} obtenida a partir de 1.9. y de la invariancia de la energía bajo una presión hidrostática. La primera resulta

$$J_1^* = s_{ijij} = \text{constante} \quad 1.16$$

y la segunda

$$J_1 = s_{iijj} = \text{constante} \quad 1.17$$

teniendo en cuenta que para una presión hidrostática $\sigma_{11} = \sigma_{22} =$

$$\sigma_{33} = 1/3 \sigma_{ii} \text{ y } \sigma_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j$$

For el mismo procedimiento puede calcularse el valor de los invariantes para un sólido isótropo.

$$J_1^* = 3 [4\mu + 5\lambda] / 2\mu [2\mu + 3\lambda] \quad 1.18$$

$$J_1 = 3 / [2\mu + 3\lambda] \quad 1.19$$

Igualando de a pares se obtiene

$$\mu = 5/2 [J_1^* - \frac{J_1}{3}]^{-1} \quad 1.20$$

$$\lambda = 2/5 \mu [\frac{J_1^*}{J_1} - 2] \quad 1.21$$

Podemos aún efectuar una comparación entre ambos tipos de promedio. Notemos con $\{\bar{c}\}$ el promedio isótropo de {c} y con $\{\delta c\}$ la medida de la anisotropía de {c}. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \{c\} &= \{\bar{c}\} + \{\delta c\} \\ &= \{I\} + \{\delta c\} \{\bar{c}\}^{-1} \end{aligned} \quad 1.22$$

La inversa de esta ecuación es

$$\{c\}^{-1} = \{\bar{c}\}^{-1} \{ \{I\} + \{\delta c\} \{\bar{c}\}^{-1} \}^{-1} \quad 1.23$$

Desarrollando en potencias de $\{\delta c\}$ llegamos a

$$\{ \{I\} + \{\delta c\} \{\bar{c}\}^{-1} \}^{-1} = \{I\} - \{\delta c\} \{\bar{c}\}^{-1} + \{ \{\delta c\} \{\bar{c}\}^{-1} \}^2$$

que combinado con la ecuación 1.23 nos da

$$\{c\}^{-1} = \{\bar{c}\}^{-1} - \{\bar{c}\}^{-1} \{ \delta c \} \{\bar{c}\}^{-1} + \{\bar{c}\}^{-1} \left\{ \{ \delta c \} \{\bar{c}\}^{-1} \right\}^2 \quad 1.25$$

Promediando 1.25 sobre todas las orientaciones y recordando que $\{ \delta \bar{c} \} = 0$ y $\{\bar{c}\}^{-1}$ son invariantes ante rotaciones, se halla

$$\overline{\{c\}^{-1}} = \{\bar{c}\}^{-1} + \overline{\{\bar{c}\}^{-1} \left\{ \{ \delta c \} \{\bar{c}\}^{-1} \right\}^2} \quad 1.26$$

El segundo término del segundo miembro es de segundo orden en la anisotropía. Luego

$$\{\bar{s}\} = \overline{\{c\}^{-1}} = \{\bar{c}\}^{-1} \quad 1.27$$

en el primer orden de anisotropía.

Hill [3] ha mostrado que estos promedios proveen límites superiores e inferiores para el módulo de corte $\mu = G$ y para el módulo volumétrico K . Su propuesta de utilización de un valor promedio, aritmético o geométrico, entre ambos, tiene sólo una validez empírica. Habitualmente los valores experimentales de materiales no texturados se encuentran entre estos dos límites. Cuando esto no ocurre se supone la existencia de alguna orientación preferencial o la acumulación de errores experimentales. Otra fuente de error es el hecho de que ambos promedios involucran 9 de las 21 constantes elásticas. Esto puede no ser importante para cristales de alta simetría pero no ocurre lo mismo para los cristales de menor simetría. En el siguiente punto se efectuará un estudio de este tipo de promedios ante la posibilidad de que permitan una explicación de la alta dispersión de los valores del módulo de Poisson.

1. 1. 1. INVARIANTES TENSORIALES Y PROMEDIO DE CONSTANTES ELASTICAS

En los modelos de Voigt y de Reuss la invariancia de la traza de la matriz 9x9 es usada para obtener dos de las ecuaciones. Las otras dos ecuaciones son obtenidas a partir de consideraciones acerca de la invariancia de la energía de deformación. En nuestra opinión la invariancia ante rotaciones ortogonales de los promedios de constantes elásticas y coeficientes

elásticos es suficientemente fuerte como para limitar su número y expresión. Cualquier policristal, macroscópicamente isótropo, debe manifestarse elásticamente por medio de constantes elásticas que sean función de las constantes elásticas del monocristal. Estas funciones deben ser independientes de la orientación del agregado policristalino y por lo tanto deben ser invariantes ante rotaciones.

Por medio de la simple operación de contracción de índices (7,8) pueden obtenerse seis tensores de segundo orden a partir de c_{ijkl} . Por condiciones de simetría estos seis tensores son reducibles a dos: c_{iikl} y c_{ijjl} . Además estos dos tensores son simétricos y producen cada uno tres invariantes escalares: la traza o invariante lineal, el invariante cuadrático y el determinante o invariante cúbico. Sus expresiones son las siguientes:

$$I_1 = c_{iijj} \quad 1.28$$

$$I_2 = (c_{ii11} c_{hh22} - c_{ii12}^2) + (c_{ii11} c_{hh33} - c_{ii13}^2) + (c_{ii22} c_{hh33} - c_{ii23}^2) = \text{Tr} [\text{adj } c_{iikl}] \quad 1.29$$

$$I_3 = \left| c_{iikl} \right| \quad 1.30$$

para el primero y

$$I_1^* = c_{ijij} \quad 1.31$$

$$I_2^* = (c_{1j1j} c_{2p2p} - c_{1j2j}^2) + (c_{1j1j} c_{3p3p} - c_{1p3p}^2) + (c_{2j2j} c_{3p3p} - c_{2j3j}^2) = \text{Tr} [\text{adj } c_{ijjl}] \quad 1.32$$

$$I_3^* = \left| c_{ijjl} \right| \quad 1.33$$

Los mismos invariantes para un sólido isótropo son

$$I_1 = 3 (3\lambda + 2\mu) \quad 1.34$$

$$I_2 = 3 (3\lambda + 2\mu)^2 \quad 1.35$$

$$I_3 = (3\lambda + 2\mu)^3 \quad 1.36$$

$$I_1^* = 3 (\lambda + 4\mu) \quad 1.37$$

$$I_2^* = 3(\lambda + 4\mu)^2 \quad 1.38$$

$$I_3^* = (\lambda + 4\mu)^3 \quad 1.39$$

El promedio conocido de Voigt es obtenido a partir de I_1 e I_1^*
Además, a partir I_2 e I_2^*

$$\mu = \left\{ (3 I_2^*)^{1/2} - I_2/3 \right\} / 10 \quad 1.40$$

$$\lambda = (I_2^*/3)^{1/2} - 4 \quad 1.41$$

y a partir de I_3 e I_3^*

$$\mu = \left\{ 3 I_3^*^{1/3} - I_3^{1/3} \right\} / 10 \quad 1.42$$

$$\lambda = I_3^*^{1/3} - 4 \quad 1.43$$

Un procedimiento similar es aplicado al tensor s_{ijkl} , lo que permite obtener los siguientes tres invariantes, con sus correspondientes valores para el sólido isótropo, para cada uno de los tensores:

$$J_1 = s_{iijj} = 3 / (2\mu + 3\lambda) \quad 1.44$$

$$J_2 = \text{Tr} (\text{adj } s_{iikl}) = 3 / (2\mu + 3\lambda)^2 \quad 1.45$$

$$J_3 = |s_{iikl}| = (2\mu + 3\lambda)^{-3} \quad 1.46$$

$$J_1^* = s_{ijij} = 3(4\mu + 5\lambda) / 2\mu(2\mu + 3\lambda) \quad 1.47$$

$$J_2^* = \text{Tr} (\text{adj } s_{ijjl}) = 3(4\mu + 5\lambda)^2 / 4\mu^2(2\mu + 3\lambda)^2 \quad 1.48$$

$$J_3^* = |s_{ijjl}| = (4\mu + 5\lambda)^3 / 8\mu^3(2\mu + 3\lambda)^3 \quad 1.49$$

La combinación de J_1 y J_1^* provee el conocido promedio de Reuss. Además, a partir de J_2 y J_2^* se obtiene

$$\mu = 5/2 \left\{ (3J_2^*)^{1/2} - (J_2/3)^{1/2} \right\}^{-1} \quad 1.50$$

$$\lambda = 2\mu/5 \left\{ (J_2^*/J_2)^{1/2} - 2 \right\} \quad 1.51$$

y a partir de J_3 y J_3^*

$$\mu = 5/2 \left(3 J_3^*{}^{1/3} - J_3^{1/3} \right)^{-1} \quad 1.52$$

$$\lambda = 2\mu/5 \left\{ \left(J_3^*/J_3 \right)^{1/3} - 2 \right\} \quad 1.53$$

Además, otros escalares o invariantes ante rotaciones pueden ser obtenidos por saturación de índices. Serán invariantes de orden superior al tercero y para c_{ijkl} toman la forma:

$$M_1 = c_{ijkl} c_{ijkp} c_{omnl} c_{omnp} \quad 1.54$$

$$M_1^* = c_{ijkl} c_{ijmn} c_{opkl} c_{opmn} \quad 1.55$$

$$M_2 = c_{iijk} c_{hhim} c_{oolk} c_{pplm} \quad 1.56$$

$$M_2^* = c_{ijjk} c_{imml} c_{hppk} c_{hssl} \quad 1.57$$

$$M_3 = c_{ijkl} c_{inkp} c_{mnop} c_{mjol} \quad 1.58$$

$$M_3^* = c_{iijk} c_{hhjk} c_{oomn} c_{ppmn} \quad 1.59$$

Para s_{ijkl} los invariantes de cuarto grado toman la forma

$$L_1 = s_{ijkl} s_{ijkp} s_{omnl} s_{omnp} \quad 1.60$$

$$L_1^* = s_{ijkl} s_{ijmn} s_{opkl} s_{opmn} \quad 1.61$$

$$L_2 = s_{iijk} s_{hhjm} s_{oolk} s_{pplm} \quad 1.62$$

$$L_2^* = s_{ijjk} s_{imnl} s_{hppk} s_{hssl} \quad 1.63$$

$$L_3 = s_{ijkl} s_{inkp} s_{mnop} s_{mjol} \quad 1.64$$

$$L_3^* = s_{iijk} s_{hhjk} s_{oomn} s_{ppmn} \quad 1.65$$

Cada invariante representa una situación física donde los cristalitos están orientados según una cierta distribución en el agregado. Además, como cada invariante resulta igualado a una función de las dos constantes de Lamé, o alguna función de dos cualesquiera de las constantes elásticas de materiales isótropos, debemos seleccionar dos invariantes para calcular los promedios. De allí que las situaciones físicas representadas por cada invariante deben ser equivalentes o, al menos, no contradictorias. La selección de pares implícita en las ecuaciones 1.54 a 1.65 es

sólo tentativa. Una evaluación de la compatibilidad de las situaciones físicas involucradas y del significado de las mismas debería ser hecha cuidadosamente.

A título de ejemplo podemos hacer la evaluación de M_2 y M_2^* para sólidos isotrópicos:

$$M_2 = 3 [3\lambda + 2\mu]^4 \quad 1.66$$

$$M_2^* = 3 [\lambda + 4\mu]^4 \quad 1.67$$

Tales ecuaciones, resueltas para μ y λ , nos llevan a:

$$\mu = \left\{ 3[M_2^*/3]^{1/4} - [M_2/3]^{1/4} \right\} / 10 \quad 1.68$$

$$\lambda = [M_2^*/3]^{1/4} - 4\mu \quad 1.69$$

Si en cambio trabajamos a partir de L_2 y L_2^* obtenemos:

$$\mu = 5/2 \left\{ 3[L_2^*/3]^{1/4} - [L_2/3]^{1/4} \right\}^{-1} \quad 1.70$$

$$\lambda = (27 L_2)^{-1/4} - 2\mu/3 \quad 1.71$$

1.1.1.1. INVARIANTES TENSORIALES PARA DIVERSAS SIMETRÍAS

Calcularemos los invariantes tensoriales para diversas simetrías con el objeto de utilizarlos en el párrafo siguiente en la evaluación numérica de promedios.

Para cristales cúbicos los invariantes están dados por

$$I_1 = 3 [c_{11} + 2 c_{12}] \quad 1.72$$

$$I_2 = 3 [c_{11} + 2 c_{12}]^2 \quad 1.73$$

$$I_3 = [c_{11} + 2 c_{12}]^3 \quad 1.74$$

$$I_1^* = 3 [c_{11} + 2 c_{44}] \quad 1.75$$

$$I_2^* = 3 [c_{11} + 2 c_{44}]^2 \quad 1.76$$

$$I_3^* = [c_{11} + 2 c_{44}]^3 \quad 1.77$$

$$J_1 = 3 [s_{11} + 2 s_{12}] \quad 1.78$$

$$J_2 = 3 [s_{11} + 2 s_{12}]^2 \quad 1.79$$

$$J_3 = [s_{11} + 2 s_{12}]^3 \quad 1.80$$

$$J_1^* = 3(s_{11} + s_{44}/2) \quad 1.81$$

$$J_2^* = 3(s_{11} + s_{44}/2)^2 \quad 1.82$$

$$J_3^* = (s_{11} + s_{44}/2)^3 \quad 1.83$$

$$M_2 = 3(c_{11} + 2 c_{12})^4 \quad 1.84$$

$$M_2^* = 3(c_{11} + 2 c_{44})^4 \quad 1.85$$

$$L_2 = 3(s_{11} + 2 s_{12})^4 \quad 1.86$$

$$L_2^* = 3(s_{11} + s_{44}/2)^4 \quad 1.87$$

Para cristales de simetría hexagonal los invariantes pueden escribirse:

$$I_1 = 2 c_{11} + 2 c_{12} + 4 c_{13} + c_{33} \quad 1.88$$

$$I_2 = (c_{11} + c_{12} + c_{13}) (c_{11} + c_{12} + 5 c_{13} + 2 c_{33}) \quad 1.89$$

$$I_3 = (c_{11} + c_{12} + c_{13})^2 (2 c_{13} + c_{33}) \quad 1.90$$

$$I_1^* = 2 c_{11} + 2 c_{66} + 4 c_{44} + c_{33} \quad 1.91$$

$$I_2^* = (c_{11} + c_{44} + c_{66}) (c_{11} + 5 c_{44} + 2 c_{33} + c_{66}) \quad 1.92$$

$$I_3^* = (c_{11} + c_{44} + c_{66})^2 (2 c_{44} + c_{33}) \quad 1.93$$

$$J_1 = 2 s_{11} + 2 s_{12} + 4 s_{13} + s_{33} \quad 1.94$$

$$J_2 = (s_{11} + s_{12} + s_{13}) (s_{11} + s_{12} + 5 s_{13} + 2 s_{33}) \quad 1.95$$

$$J_3 = (s_{11} + s_{12} + s_{13})^2 (2 s_{13} + s_{33}) \quad 1.96$$

$$J_1^* = 2 s_{11} + s_{44} + s_{66}/2 + s_{33} \quad 1.97$$

$$J_2^* = 1/16 (4 s_{11} + s_{44} + s_{66}) (4 s_{11} + 5 s_{44} + 8 s_{33} + s_{66}) \quad 1.98$$

$$J_3^* = 1/16 (4 s_{11} + s_{44} + s_{66})^2 (s_{44}/2 + s_{33}) \quad 1.99$$

$$M_2 = 2 (c_{11} + c_{12} + c_{13})^4 + (c_{33} + 2 c_{13})^4 \quad 1.100$$

$$M_2^* = 2 (c_{11} + c_{44} + c_{66})^4 + (c_{33} + 2 c_{44})^4 \quad 1.101$$

$$L_2 = 2 (s_{11} + s_{12} + s_{13})^4 + (s_{33} + 2s_{13})^4 \quad 1.102$$

$$L_2^* = 2 (s_{11} + s_{44}/4 + s_{66}/4)^4 + (s_{33} + s_{44}/2)^4 \quad 1.103$$

Los invariantes para simetrías más bajas pueden ser obtenidos de la misma manera. Debemos puntualizar que para clases de menor simetría los promedios incluirán elementos del tensor de constantes o coeficientes elásticos no incluidos en los promedios de Voigt o de Reuss. Por ejemplo, I_3 e I_3^* toman la forma:

$$I_3 = \begin{vmatrix} c_{11} + c_{12} + c_{13} & c_{16} + c_{26} + c_{36} & c_{15} + c_{25} + c_{35} \\ c_{16} + c_{26} + c_{36} & c_{12} + c_{22} + c_{23} & c_{14} + c_{24} + c_{34} \\ c_{15} + c_{25} + c_{35} & c_{14} + c_{24} + c_{34} & c_{13} + c_{23} + c_{33} \end{vmatrix} \quad 1.104$$

$$I_3^* = \begin{vmatrix} c_{11} + c_{66} + c_{55} & c_{16} + c_{26} + c_{45} & c_{15} + c_{46} + c_{35} \\ c_{16} + c_{26} + c_{45} & c_{66} + c_{22} + c_{44} & c_{56} + c_{24} + c_{34} \\ c_{15} + c_{46} + c_{35} & c_{56} + c_{24} + c_{34} & c_{55} + c_{33} + c_{44} \end{vmatrix} \quad 1.105$$

Si I_3 e I_3^* son combinados para obtener las constantes elásticas del agregado todas las constantes del monocristal estarán incluidas en el promedio.

1.1.1.2. DETERMINACION DE PROMEDIOS PARA DIVERSOS MATERIALES

Las constantes elásticas para agregados de cristales de simetría cúbica como el níquel se presentan en la Tabla 1.I. El tipo de combinación de invariantes utilizado para el promedio está indicado en la primera columna. La fila indicada por VRH (Voigt -Reuss-Hill) representa el promedio aritmético sugerido por Hill. La fila indicada con Pr da el valor obtenido por el procedimiento propuesto por Peresada (9) el cual supone la validez de las siguientes relaciones

$$K = (K_V K_R)^{1/2} \quad 1.106$$

$$G = D_{cr} \quad 1.107$$

donde K es el módulo volumétrico del policristal, K_V y K_R

son los valores del mismo módulo calculados mediante los métodos de Voigt y Reuss respectivamente. D y D_{cr} son los determinantes de la matriz 6×6 (c_{ij}) formada por los módulos elásticos del policristal y del monocristal. Este promedio será analizado en el párrafo siguiente.

Finalmente, la fila indicada con Exp. muestra los valores experimentales informados para policristales del mismo metal.

Debido a que solamente dos de las constantes elásticas son promediadas en forma directa el resto debe ser calculado por medio de las relaciones clásicas de la elasticidad de los medios isótropos

$$\begin{aligned} K &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3} && 1.108 \\ D &= \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} && 1.109 \\ E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\mu + \lambda} && 1.110 \end{aligned}$$

además de las ya consignadas 1.1 a 1.3 y la ecuación 8.15.

Las Tablas 1.2, 1.3 y 1.4 dan los promedios obtenidos para tres metales hexagonales: cinc, circonio y berilio. Las ecuaciones 1.88 a 1.103 fueron utilizadas para calcular los diferentes promedios para el policristal y se informan también valores experimentales previos a los fines de comparación. La relación c/a para una estructura hexagonal perfecta tiene un valor de 1.666 en tanto que las de los tres metales calculados es 1.86, 1.59 y 1.57 respectivamente. Siendo esta razón una medida de la diferencia entre el modelo de esferas rígidas y las estructuras reales, puede verse que se ha procurado examinar valores extremos del mismo. El circonio se ha incluido por ser objeto de estudio de este trabajo a través de una de sus aleaciones.

La Tabla 1.5 muestra los promedios calculados para policristales de nitrato de sodio, material de simetría trigonal. Las constantes elásticas monocristalinas informadas por Bhimasenachar [10] fueron utilizadas para calcular los invariantes.

La Tabla 1.6 muestra los valores promedios para un policristal de simetría monoclinica. Las constantes elásticas de monocristal corresponden al ácido tartárico y fueron informadas por Mason [11].

1.1.2. DISCUSION

De acuerdo a los ejemplos calculados por Peresada y a los que pueden verse en las Tablas de este trabajo los promedios calculados con las ecuaciones 1.106 y 1.107 son bastante próximos a los obtenidos mediante los promedios sugeridos por Hill. Vamos a hacer un análisis de este método de promediar y una comparación más extensa con el promedio de Hill. Para cristales cúbicos la matriz 6x6 de las constantes elásticas tiene la forma

$$\{c_{ij}\} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \quad 1.111$$

y el determinante formado por esta matriz está dado por

$$D_{cr} = c_{44}^3 (c_{11} - c_{12})^2 (c_{11} + 2c_{12}) \quad 1.112$$

Si el sistema de coordenadas ortogonales es rotado, y la transformación se da en términos de los parámetros independientes de Euler, el determinante se transforma a

$$\begin{aligned} D'_{cr} = D_{cr} + H (c_{11} + 2c_{12}) & \left\{ c_{44}^3 (c_{12} - c_{11}) F_1(\theta, \psi, \phi) + c_{44}^2 c_{12} \right. \\ & \left. (c_{12} - c_{11}) F_2(\theta, \psi, \phi) \right\} + H^2 (c_{11} + 2c_{12}) c_{44} \left\{ c_{44}^2 F_3(\theta, \psi, \phi) \right. \\ & c_{44} (c_{12} - c_{11}) F_4(\theta, \psi, \phi) + c_{44} c_{12} F_5(\theta, \psi, \phi) + c_{11} (c_{12} - c_{11}) \\ & \left. F_6(\theta, \psi, \phi) \right\} + H^3 (c_{11} + 2c_{12}) \left\{ c_{44}^2 F_7(\theta, \psi, \phi) + c_{44} (c_{12} - c_{11}) \right. \\ & \left. F_8(\theta, \psi, \phi) + c_{44} c_{11} F_9(\theta, \psi, \phi) + (c_{12} - c_{11}) F_{10}(\theta, \psi, \phi) \right\} + \\ & H^4 (c_{11} + 2c_{12}) \left\{ c_{44} F_{11}(\theta, \psi, \phi) + (c_{12} - c_{11}) F_{12}(\theta, \psi, \phi) \right\} + \\ & H^5 F_{13}(\theta, \psi, \phi) \end{aligned} \quad 1.113$$

donde $H = 2c_{44} - c_{11} + c_{12}$ es el llamado factor de anisotropía de los materiales cúbicos (12) y las $F_i(\theta, \psi, \phi)$ son funciones com-

plejas de los ángulos de Euler. El primer término de la ecuación 1.113 es el determinante original y los términos siguientes son potencias crecientes de H. Para un cristal con H=0 el determinante constituye un invariante. Esto era de esperar dado que si H=0 el cristal es isótropo y cualquier combinación de sus constantes elásticas será un invariante. Por ejemplo para una rotación de 45° alrededor del eje x obtenemos

$$D'_{cr} = D_{cr} + c_{44}^2 H [c_{44}(c_{11}^2 - 2c_{12}^2 + c_{11}c_{12}) - 1/2(c_{11} - c_{12})^2] - 1/2 c_{44}^2 H^2 [c_{11}^2 - 2c_{12}^2 + c_{11}c_{12}] \quad 1.114$$

lo cual muestra claramente que el determinante de la matriz no es un invariante a menos que H=0. De todas maneras μ_{Pr} tiene valores muy cercanos a $\mu_H = [\mu_V \mu_R]^{1/2}$. Si escribimos el promedio de Peresada de la siguiente forma

$$\mu_{Pr} = c_{44} \left\{ [2 - H/c_{44}]^2 / 4 \right\}^{1/5} = A^{-2/5} c_{44} \quad 1.115$$

y el de Hill

$$\begin{aligned} \mu_H &= c_{44} \left\{ [2 - H/c_{44}] [5 - H/c_{44}] / [10 - 3H/c_{44}] \right\}^{1/2} = \\ &= c_{44} [3A + 2] / A [2A + 3]^{1/2} \quad 1.116 \end{aligned}$$

donde $A = 2c_{44} / [c_{11} - c_{12}]$ es la llamada razón de anisotropía; podemos hacer un análisis de la similitud de los valores. La Figura 1.3 muestra la diferencia relativa entre los promedios de Peresada y de Hill en función de la razón de anisotropía. Podemos ver que aún para altos valores de la razón de anisotropía la diferencia entre ambos promedios es del orden del 6%. En la mayor parte de los casos, como puede verse en las Tablas presentadas, los diferentes promedios no muestran valores substancialmente diferentes. Esto podría sugerir que las situaciones físicas involucradas son, esencialmente, las mismas. En los siguientes párrafos analizaremos esa posibilidad.

La energía elástica acumulada en un volumen elemental de un cuerpo deformado está dada por

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad 1.117$$

La función densidad de energía se obtiene por integración de 1.117

$$W = 1/2 \sigma_{kl} \epsilon_{kl} = 1/2 c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad 1.118$$

Esta función es un escalar y, por lo tanto, invariante ante rotaciones, y es la base de la interpretación física de los promedios de Voigt y de Reuss.

Habitualmente se reconoce que en materiales isótropos, para cualquier tipo de proceso termodinámico que involucre deformaciones, la energía acumulada puede escribirse como una función de los tres invariantes clásicos del tensor de deformaciones [12]

$$W = W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad 1.119$$

donde

$$\varphi_1 = \text{Tr} \{ \epsilon \}$$

$$\varphi_2 = \text{Tr} \{ \text{Adj} \epsilon_{ij} \} \quad 1.120$$

$$\varphi_3 = | \{ \epsilon \} |$$

En particular, para pequeñas deformaciones elásticas

$$\begin{aligned} W &= 1/2 \lambda \{ \text{Tr} \{ \epsilon \} \}^2 + \mu \text{Tr} \{ \epsilon \}^2 = \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{2} \{ \text{Tr} \{ \epsilon \} \}^2 - 2\mu \text{Tr} \{ \text{Adj} \epsilon_{ij} \} \end{aligned} \quad 1.121$$

dado que los productos de tres deformaciones, representados por el determinante, se desprecian al desarrollar la energía sólo hasta potencias de segundo grado en la deformación. Además debe tenerse en cuenta que existen diversas relaciones entre conjuntos de invariantes independientes tales como

$$\text{Tr} \{ \text{Adj} \epsilon_{ij} \} = \{ \text{Tr} \{ \epsilon \} \}^2 - \text{Tr} \{ \epsilon \}^2 \quad 1.122$$

$$| \{ \epsilon \} | = \{ \text{Tr} \{ \epsilon \} \}^3 - 3 \text{Tr} \{ \epsilon \} \text{Tr} \{ \epsilon \}^2 + 2 \text{Tr} \{ \epsilon \}^3 \quad 1.123$$

Para simetrías más bajas el número de invariantes, ante las operaciones de simetría del grupo, crece y la energía tiene una expresión más compleja. Por ejemplo, para materiales con isotropía transversal, ésto es para materiales que son completamente isótropos alrededor de un eje de simetría, los invariantes a considerar, para deformaciones finitas, son [13,14, 15]

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 \quad 1.124$$

Supongamos tener un conjunto finito de tensores simétricos de segundo orden en tres dimensiones $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \dots$ y un conjunto de vectores tridimensionales $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ también finito. Si

$$\{A\}' = Q \cdot \{A\} \cdot Q^t$$

$$\bar{a}' = Q \cdot \bar{a}$$

donde Q es una transformación ortogonal, y $F \{[A], [B], [C], \dots, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\}$ es una función polinomial de las componentes de los tensores y los vectores que cumple

$$F \{[A]'; [B]'; [C]'; \dots, \bar{a}', \bar{b}', \bar{c}', \dots\} = F \{[A], [B], [C], \dots, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\} \quad 1.125$$

para cada Q perteneciente a un grupo de simetría G , se dice que F es un invariante ante este grupo de transformaciones. El problema consiste en encontrar el conjunto de invariantes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ de modo que cualquier invariante F pueda ser desarrollado en una forma polinómica de tales invariantes [16, 17, 18]. Este conjunto de invariantes se denomina base integral para un conjunto de tensores y de vectores ante las operaciones de simetría de un grupo dado. Se dice que es irreducible cuando ninguno de sus elementos puede ser expresado como una forma polinomial en los restantes. Los vectores $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ son característicos de las simetrías del grupo. Por ejemplo, un material reforzado con fibras con dirección privilegiada dada por el vector \bar{a} tendrá una función densidad de energía función de la deformación $\{\mathcal{E}\}$ y el vector \bar{a}

$$W = W \{ \{\mathcal{E}\}, \bar{a} \} \quad 1.126$$

Para este material, de isotropía transversal, tendremos invariantes ante las operaciones del grupo, que pueden escribirse como

$$\text{Tr} \{\mathcal{E}\}, \text{Tr} \{\mathcal{E}\}^2, \text{Tr} \{\mathcal{E}\}^3, \bar{a} \cdot \{\mathcal{E}\} \cdot \bar{a}, \bar{a} \cdot \{\mathcal{E}\}^2 \cdot \bar{a} \quad 1.127$$

que son reducibles a los dados por 1.124.

Para estos invariantes la energía puede escribirse en forma polinomial como

$$W = 1/2 \lambda \left\{ \text{Tr} \{ \mathcal{E} \} \right\}^2 + \mu_T \text{Tr} \{ \mathcal{E} \}^2 + \alpha (\bar{a} \cdot \{ \mathcal{E} \} \cdot \bar{a}) \text{Tr} \{ \mathcal{E} \} + 2 (\mu_L - \mu_T) \bar{a} \cdot \{ \mathcal{E} \}^2 \cdot \bar{a} + 1/2 \beta (\bar{a} \cdot \{ \mathcal{E} \} \cdot \bar{a})^2 \quad 1.128$$

donde $\lambda, \mu_T, \mu_L, \alpha$ y β son constantes

Como podemos ver el número de constantes involucradas es cinco. Esto no debe extrañar ya que es una situación análoga a los cristales de simetría hexagonal debido a que todo tensor de orden n resulta isótropo ante rotaciones alrededor de un eje de simetría de orden $m > n$. [Isotropía transversal respecto del eje senario $\langle c \rangle$].

Como vemos, en esta teoría la energía es desarrollada en función de los invariantes del tensor de deformaciones y de los vectores que caracterizan la simetría. Esto es entendible cuando se trata de hallar la función densidad de energía para deformaciones finitas y hasta de carácter plástico, donde las ecuaciones constitutivas no están bien definidas y por lo tanto los coeficientes que afectan a los invariantes no pueden determinarse fácilmente. Para deformaciones elásticas infinitesimales, en cambio, el tensor de proporcionalidad está bien determinado. Nuestra propuesta consiste en desarrollar la energía en función de los invariantes de $\{\mathcal{V}\}$ y $\{\mathcal{E}\}$ o, lo que es lo mismo, de $\{c\}$ y $\{\mathcal{E}\}$. No efectuaremos aquí el desarrollo, por lo demás muy arduo, sino que daremos únicamente la fundamentación física de modo de justificar la utilización de los invariantes de $\{c\}$ y $\{\mathcal{E}\}$ para promediar las constantes elásticas.

Si W es un invariante ante las operaciones de simetría, como surge de 1.118, debe poderse escribir como función de los invariantes de $\{\mathcal{V}\}$, $\{\mathcal{E}\}$, \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , ... donde los vectores caracterizan los ejes de simetría del grupo. Una forma alternativa consiste en escribirla como función de los invariantes de $\{c\}$, $\{\mathcal{E}\}$, \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} ,Esta forma es más clara debido a que evita tener que introducir "a priori" las constantes elásticas como en el caso de 1.128. En suma, la energía para una dada simetría está dada por una función de invariantes de $\{c\}$ y $\{\mathcal{E}\}$. En el caso de los materiales isótropos el número de invariantes de $\{c\}$ debe ser necesariamente dos y la ecuación 1.121 puede escribirse

$$W = 1/18 I_1 \left\{ \text{Tr} \{ \mathcal{E} \} \right\}^2 + 1/30 \left(3 I_1^* - I_1 \right) \left\{ 2/3 \left(\text{Tr} \{ \mathcal{E} \} \right)^2 - 2 \text{Tr} \{ \text{Adj} \mathcal{E}_{ij} \} \right\} \quad 1.129$$

donde el primer término de la derecha representa una compresión hidrostática y el segundo un corte puro.

Para la simetría cúbica puede escribirse la energía como

$$W = 1/2 c_{1111} [\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2] + c_{1122} [\epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{22} \epsilon_{33} + \epsilon_{11} \epsilon_{33}] + 2 c_{2323} [\epsilon_{23}^2 + \epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2] \quad 1.130.$$

que puede llevarse a la forma

$$\begin{aligned} W &= 1/2 [c_{1111} + 2 c_{1122}] (\text{Tr} \{ \epsilon \})^2 - [c_{1111} + 2 c_{2323}] \\ &\quad \text{Tr} \{ \text{Adj} \epsilon_{ij} \} + c_{1111} \text{Tr} \{ \text{Adj} \epsilon_{ij} \} - c_{1122} (\text{Tr} \{ \epsilon \})^2 \\ &\quad + [2 c_{2323} + c_{1122} - c_{1111}] I_c \{ \epsilon \} = \\ &= 1/2 I_1 (\text{Tr} \{ \epsilon \})^2 - I_1^* \cdot \text{Tr} \{ \epsilon_{ij} \} + c_{11} \text{Tr} \{ \text{Adj} \epsilon_{ij} \} \\ &\quad - c_{12} (\text{Tr} \{ \epsilon \})^2 + H I_c \{ \epsilon \} \quad 1.131. \end{aligned}$$

donde $H = 2 c_{44} + c_{12} - c_{11}$ es el factor de anisotropía y

$$I_c \{ \epsilon \} = \epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{22} \epsilon_{33} + \epsilon_{11} \epsilon_{33}$$

es un invariante ante las operaciones de simetría del sistema cúbico.

Los dos primeros términos son invariantes ante cualquier rotación infinitesimal, en tanto que los restantes lo son sólo ante las operaciones de simetría del sistema cúbico. Tenemos así dividida la energía total en una parte correspondiente al material tomado como isótropo y otra parte a la asimetría propia de cada celda.

Como vemos la parte de la energía que resulta invariante ante rotaciones continuas necesita para ser escrita únicamente de dos invariantes en $\{c\}$. Es de esperar entonces que no pueda hallarse otro invariante esencialmente diferente a los dos encontrados. Es posible también que de hallarse otro se encuentre combinado con un invariante del tensor de deformaciones ante las operaciones de simetría del sistema cúbico de modo que el térmi-

mino resulte invariante solamente ante estas últimas operaciones y no ante cualquier rotación.

Como las simetrías más bajas tienen más términos en el desarrollo de su función densidad de energía la igualación de los coeficientes de cada invariante de $\{\epsilon\}$, los que son a su vez invariantes de $\{c\}$, equivale a desprestigiar otros términos de energía. En el caso de los promedios de Voigt y Reuss se toman los términos que representan las mayores energías de deformación, o sea las que provienen de considerar el cuerpo como isótropo. Esto representa una aproximación tanto más burda cuanto menor es la simetría del material. Podemos ver, por ejemplo, que en el caso de la simetría cúbica los invariantes calculados son todos iguales a dos diferentes de ellos I_1 e I_1^* . Es de esperar que alguno de los invariantes de orden superior refleje la existencia de tres constantes elásticas independientes. Entre tanto los promedios calculados son representativos de la misma aproximación física, aquella que resulta de desprestigiar los términos que tengan como coeficiente a ese invariante diferente.

La obtención de todos los invariantes de un tensor de 4to. orden es un trabajo que ha sido encarado por G. Verchery [19] e informado, aparentemente, en una publicación interna de la Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Palaiseau, Francia. Lamentablemente el mismo no ha podido ser conseguido. De todos modos debiera probarse si ello es equivalente a la obtención de los invariantes de $\{c\}$, $\{\epsilon\}$ o de $\{s\}$, $\{\nu\}$ en forma conjunta.

Como puede verse en la Tablas presentadas los promedios obtenidos a partir de I_2 , I_3 , J_2 y J_3 parecen obedecer, en la mayor parte de los casos, la proposición de Hill en el sentido de que los promedios de Voigt y Reuss son límites superiores e inferiores para K , G y E en policristales isótropos. Esto no ocurre para los invariantes L y M , de los que se han obtenido valores superiores e inferiores pero aún dentro de los límites de los resultados experimentales. La constante de Lamé λ no muestra una tendencia particular marcada mientras que el módulo de Poisson muestra una alta dispersión en el caso del cinc y el berilio y una uniformidad muy grande en el caso del circonio. El berilio fue seleccionado por tener los valores medidos de ν , K y G fuera de los límites de Voigt y Reuss. Además es uno de los pocos materiales de estructura simple que tiene una de sus constantes elásticas negativa. Esto podría haber alterado los promedios en forma substan-

Otra fundamentación ha sido sugerida durante el desarrollo del trabajo. Las constantes elásticas de un policristal isótropo han de ser invariantes ante rotaciones y por lo tanto serán combinaciones de invariantes de las constantes elásticas del monocristal. Cuando se calculan las constantes elásticas de un monocristal en función de la dirección se obtienen expresiones que son combinaciones lineales de las constantes elásticas referidas al sistema de ejes principales. Una combinación de todas las orientaciones presentes en el policristal, con sus respectivos pesos, produciría también una combinación lineal de esas constantes elásticas. Si el policristal posee una distribución de orientaciones tal que le otorga isotropía esa combinación debiera ser reducible a una función lineal de los invariantes de las constantes del monocristal. Generalmente los materiales policristalinos son anisotrópicos debido a los procesos de fabricación intervinientes. Los materiales reales, especialmente si su anisotropía es baja, pueden ser representados apropiadamente por combinaciones lineales de invariantes más un término de segundo orden representante de la anisotropía.

1. 1. 3. CONCLUSIONES

Se ha mostrado como pueden ser utilizados los invariantes de los tensores de constantes y coeficientes elásticos para calcular promedios de materiales policristalinos. Los promedios de Voigt y Reuss son casos particulares de esos promedios. El promedio de Peresada, a pesar del acuerdo mostrado con el promedio de Hill, no surge del uso de invariantes y no representa por lo tanto a los agregados isótropos.

Se ha efectuado un análisis del significado físico de los promedios propuestos y, aunque un trabajo más detallado sería de utilidad, se ha interpretado con claridad el significado de los invariantes de Voigt y Reuss.

Una comparación de los valores experimentales con los diversos modos de promedio muestra que, en algunos casos, los primeros no se hallan entre los límites esperados. En el punto 1.2 se analizará la influencia de la textura del material en la anisotropía de las propiedades elásticas. El módulo de Poisson presenta un comportamiento imprevisible y en algunos casos caótico. Esto indicaría que debe descartarse la posibilidad de que en un mate-

rial isótopo, cualquiera sea la distribución de orientaciones que le de origen, podamos encontrar diferencias significativas en el módulo de Poisson, al menos en cuanto a las aleaciones de circonio se refiere. Volveremos sobre este punto en el futuro, cuando analicemos los datos experimentales obtenidos.

1. 2. PROMEDIO EN POLICRISTALES ANISOTROPOS

Cuando los agregados policristalinos poseen alguna orientación preferencial de los cristalitas se apela a diversos métodos para la descripción de sus propiedades elásticas ó físicas en general (29-34). Las propiedades macroscópicas medidas en un policristal son un cierto valor promedio de las correspondientes a un monocristal. Este debe tener en cuenta la distribución de las orientaciones de los granos dentro del agregado. Si la distribución no es totalmente aleatoria resultará una anisotropía en la propiedad de que se trata. Además de la textura (distribución de orientaciones) algunos otros parámetros estructurales pueden influir en la anisotropía de las propiedades. Estas pueden ser, por ejemplo, la distribución de fases en un material polifásico, la presencia de poros o huecos y fisuras, la forma de los cristalitas y la microestructura interna de los mismos. Debido a que las aleaciones consideradas en esta tesis son de las denominadas microaleaciones, consideraremos la presencia de una sola fase con ausencia de estructura interna de importancia.

Las propiedades que dependen únicamente de una dirección cristalina se denominan propiedades uniaxiales. Un ejemplo importante de propiedad uniaxial es el módulo de Young medido en la dirección cristalina $h=(h_1, h_2, h_3)$. Estas propiedades quedan descritas en función de dos parámetros de orientación independientes. Uno de ellos resulta ser el ángulo \varnothing de rotación alrededor del eje cristalográfico principal x_i . El otro es el ángulo θ entre el eje cristalográfico principal x_i y la dirección x'_i a lo largo de la cual se calcula la propiedad (Figura nº 1. 4). Estos dos ángulos identifican únicamente la dirección del eje h coincidente con la dirección x'_i . Por comparación con la descripción clásica de rotaciones dada por los parámetros de Euler, podemos ver que se halla ausente el ángulo ψ de rotación alrededor de la dirección x'_i , ésto es, no depende de la orientación del plano perpendicular a la dirección de medición.

Como las propiedades físicas se encuentran, en general, descritas por tensores no isótopos éstas pueden depender no sólo de una dirección cristalina sino de todos los parámetros de orientación del sistema primado respecto del sistema de ejes principal; ésto es, incluirá también, en la descripción de Euler, el tercer ángulo ψ . Estas propiedades se denominan triaxiales.

Una propiedad física uniaxial E puede ser descripta en función de la dirección cristalográfica x_i' como una función de los ángulos \varnothing y θ

$$E' = E'(\varnothing, \theta) \quad 1.132$$

La propiedad macroscópica correspondiente dependerá de la dirección \bar{r} que tomemos en la muestra

$$\bar{E} = \bar{E}(\bar{r}) \quad 1.133$$

Se supone que el valor $\bar{E}(\bar{r})$ de la propiedad en la dirección \bar{r} es el valor medio de las propiedades del monocristal en la dirección cristalina x_i' con una función peso $I(\varnothing, \theta)$ que indica la fracción de cristales que tienen su dirección x_i' en la dirección \bar{r} de la muestra. La propiedad del policristal puede entonces expresarse como

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \int E'(\varnothing, \theta) I(\varnothing, \theta) \sin \theta \, d\varnothing \, d\theta \quad 1.134$$

En ciertos casos la textura puede ser determinada por mediciones individuales de la orientación. En otros casos la función de distribución de orientaciones $I(\varnothing, \theta)$ puede ser idealizada con un número reducido de orientaciones. En ambos casos la discretización se efectúa mediante

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{n=1}^N E'_n(\varnothing, \theta) I_n \quad 1.135$$

donde I_n es la fracción de volúmen de cristales que tienen la n -ésima dirección elegida (\varnothing, θ) paralela al eje \bar{r} .

Para un caso general la fracción de volúmen que, dentro de una muestra, tiene una orientación entre g y $g+dg$ está dada por

$$\frac{dV}{V} = f(g) \, dg \quad 1.136$$

con una condición evidente de normalización

$$\int f(g) \, dg = 1 \quad 1.137$$

En el supuesto de la utilización de los ángulos de Euler el dg del "espacio" de las orientaciones toma la forma

$$dg = \frac{1}{8\pi^2} \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, d\psi \quad 1.138$$

Cuando estas orientaciones se determinan a partir de las figuras de polos por difracción de rayos X la fracción de volúmen de cristales con orientación h en la dirección \bar{r} de la muestra queda dada por

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{4\pi} P_h(\bar{r}) \, dr \quad 1.139$$

Las densidades de polos determinadas por difracción de rayos X no discriminan entre todas las posibles posiciones del plano perpendicular a la dirección \bar{r} . La densidad de polos es entonces la integral de la función de distribución $f(g)$ efectuada sobre un ángulo χ alrededor de la dirección \bar{r} .

$$P_h(\bar{r}) = \frac{1}{2\pi} \int f(g) \, d\chi \quad 1.140$$

Resulta evidente que $f(g)$ no queda determinada por una única figura de polos sino que la información perdida puede ser recuperada por un conjunto infinito de figuras de polos.

Para propiedades dependientes de una única dirección o uniaxiales las figuras de polos únicas representan suficiente información y resulta

$$P_h(\bar{r}) = I(\phi, \theta) \quad 1.141$$

de donde

$$\bar{E}(\bar{r}) = \int E(g) f(g) \, dg = \frac{1}{8\pi^2} \int E(\phi, \theta) f(g) \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, d\psi \quad 1.142$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int E(\phi, \theta) \left[\frac{1}{2\pi} \int f(g) \, d\psi \right] \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad 1.143$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int E(\phi, \theta) I(\phi, \theta) \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad 1.144$$

Para propiedades triaxiales han sido desarrollados métodos que permiten calcular las funciones de distribución $f(g)$ combinando varias figuras de polos diferentes. En estos métodos la función distribución es desarrollada en serie de armónicos esféricos generalizados y la figura de polos en serie de armónicos esféricos de superficie. La ecuación 1.140 tiene soluciones conocidas para

este tipo particular de funciones

$$\frac{1}{2\pi} \int T_l^{mn}(g) d\chi = \frac{2}{2l+1} K_l^{*m}(\vartheta, \theta) K_l^n(\vartheta, \theta) \quad 1.145$$

donde los $T_l^{mn}(g)$ y $K_l^n(\vartheta, \theta)$ son los armónicos esféricos generalizados y de superficie respectivamente. Puede demostrarse que $f(g)$ puede desarrollarse en una serie de armónicos esféricos generalizados

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l C_l^{mn} T_l^{mn}(g) \quad 1.146$$

reduciéndose el problema al cálculo de los C_l^{mn} .

Este método no será utilizado aquí sino que nos limitaremos a cálculos teóricos que no necesitan de la utilización de las figuras de polos experimentales.

La ecuación 1.134 supone que las propiedades son simplemente un cierto promedio pesado de las propiedades del monocristal. Analizando las propiedades elásticas podremos ver que ésto no es estrictamente así. En cada borde de grano deben ser satisfechas condiciones de equilibrio mecánico. Determinadas componentes de la tensión, entonces, deben igualarse. Simultáneamente no pueden existir solapamientos ni grietas entre los mismos, lo que indica que deben igualarse las componentes de la deformación. Como las c_{ijkl} y s_{ijkl} no se mantienen constantes en todo el volumen de la muestra, sino que cambian abruptamente en el borde de grano, tampoco se mantienen constantes las tensiones y las deformaciones. En un policristal lo que podemos medir son las tensiones y deformaciones promedio sobre todo el volumen

$$\bar{\sigma}_{ij} = \int \sigma_{ij}(x, y, z) dV \quad 1.147$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \int \epsilon_{ij}(x, y, z) dV \quad 1.148$$

Estos promedios están relacionados unos con otros mediante las constantes elásticas macroscópicas del policristal

$$\bar{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} \quad 1.149$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = s_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl} \quad 1.150$$

Por otro lado dado que (Apéndice B)

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad 1.151$$

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \quad 1.152$$

podemos tomar los promedios volumétricos

$$\bar{\sigma}_{ij} = \int c_{ijkl}(x,y,z) \epsilon_{kl}(x,y,z) dV \quad 1.153$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \int s_{ijkl}(x,y,z) \sigma_{kl}(x,y,z) dV \quad 1.154$$

Como generalmente el promedio del producto no es equivalente al producto de los promedios

$$c_{ijkl}^* \neq \bar{c}_{ijkl} \quad 1.155$$

$$s_{ijkl}^* \neq \bar{s}_{ijkl} \quad 1.156$$

Con las suposiciones de Voigt y Reuss de deformación y tensión constante, respectivamente, podemos escribir

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\epsilon}_{kl} \int c_{ijkl}(x,y,z) dV \quad \text{Voigt} \quad 1.157$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \bar{\sigma}_{kl} \int s_{ijkl}(x,y,z) dV \quad \text{Reuss} \quad 1.158$$

de donde

$$c_{ijkl}^* \approx \bar{c}_{ijkl}^V = \int c_{ijkl} dV \quad 1.159$$

$$s_{ijkl}^* \approx \bar{s}_{ijkl}^R = \int s_{ijkl} dV \quad 1.160$$

Estos valores promedio son generalizaciones de los promedios isotropos definidos en el punto 1.1. Describen la situación de granos con una disposición geométrica dada también por las figuras 1.1. y 1.2. pero con una distribución de orientaciones tal que no produce anisotropía. Los valores de estos promedios difieren en general siendo la diferencia tanto mayor cuanto mayor es la anisotropía del material. Un promedio del tipo de Hill suele representar bastante bien las propiedades del material.

$$\bar{c}_{ijkl}^H = 1/2 \left(\bar{c}_{ijkl}^V + \bar{c}_{ijkl}^R \right) \quad 1.161$$

$$\bar{s}_{ijkl}^H = 1/2 \left(\bar{s}_{ijkl}^V + \bar{s}_{ijkl}^R \right) \quad 1.162$$

donde

$$\left[\bar{c}_{ijkl}^R \right] = \left[\bar{s}_{ijkl}^R \right]^{-1} \quad 1.163$$

$$\left[\bar{s}_{ijkl}^V \right] = \left[\bar{c}_{ijkl}^V \right]^{-1} \quad 1.164$$

Ambos valores medios difieren generalmente muy poco, por lo que se suele hablar de un único promedio de Hill. No obstante las diferencias hacen pensar que no han podido eliminarse totalmente las dificultades de cálculo que proceden de la anisotropía. Cálculos utilizando modelos teóricos más satisfactorios pueden ser utilizados [35] pero esto complica e incrementa considerablemente el tiempo de computación[36].

En el punto 1.2.1 efectuaremos un análisis de las características del promedio a efectuar para el caso del módulo de Poisson. Además se calculan algunos valores del mismo módulo, para diferentes materiales de simetría cúbica, para diversas orientaciones.

En el punto 1.2.2 se calcula el módulo de Poisson en función de la dirección y de la temperatura para monocristales de circonio. Se efectúa, además, el promedio para una distribución aleatoria y se compara con resultados experimentales previos.

1. 2. 1. EL MÓDULO DE POISSON EN MATERIALES DE SIMETRÍA CÚBICA

Siendo el módulo de Poisson una medida de la relación entre dos deformaciones, una longitudinal en la dirección de aplicación de la tensión y otra transversal a ella, debe pertenecer sin duda a la categoría de propiedades triaxiales. Se necesitarán por lo tanto más de una figura de polos, dependiendo su número de las simetrías del material.

De la ecuación 1.6. y teniendo en cuenta la ecuación de transformación B.6 para tensores de cuarto rango

$$\nu'_{kl} = - \frac{a_{li} a_{lj} a_{kp} a_{kq} s_{ijpq}}{a_{ki} a_{kj} a_{kp} a_{kq} s_{ijpq}} \quad 1.165$$

donde la ley de suma de índices se aplica sólo sobre los términos del numerador y denominador por separado.

Para el caso de materiales cúbicos los coeficientes elásticos en función de la dirección toman la forma

$$s'_{11} = s_{11} - 2 J \nu_{11} \quad 1.166$$

$$s'_{22} = s_{11} - 2 J \nu_{22} \quad 1.167$$

$$s'_{33} = s_{11} - 2 J \nu_{33} \quad 1.168$$

$$s'_{12} = s_{12} + J \nu_{12} \quad 1.169$$

$$s'_{13} = s_{12} + J \nu_{13} \quad 1.170$$

$$s'_{23} = s_{12} + J \nu_{23} \quad 1.171$$

$$s'_{44} = s_{44} + 4 J \nu_{23} \quad 1.172$$

$$s'_{55} = s_{44} + 4 J \nu_{13} \quad 1.173$$

$$s'_{66} = s_{44} + 4 J \nu_{12} \quad 1.174$$

donde $J = s_{11} - s_{12} - s_{44} / 2$

Además pasan a ser diferentes de cero las componentes s_{ij} con $i \leq 3, j > 3$ y las s_{ij} con $i, j > 3$ e $i \neq j$. Estas componentes son características de direcciones no principales y su significado físico puede buscarse en el Apéndice B.

Los factores de orientación pueden escribirse en términos de las componentes de la matriz de rotación

$$\rho_{11} = a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{11}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{13}^2 \quad 1.175$$

$$\rho_{22} = a_{21}^2 a_{22}^2 + a_{21}^2 a_{23}^2 + a_{22}^2 a_{23}^2 \quad 1.176$$

$$\rho_{33} = a_{31}^2 a_{32}^2 + a_{31}^2 a_{33}^2 + a_{32}^2 a_{33}^2 \quad 1.177$$

$$\rho_{12} = a_{11}^2 a_{21}^2 + a_{12}^2 a_{22}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2 \quad 1.178$$

$$\rho_{13} = a_{11}^2 a_{31}^2 + a_{12}^2 a_{32}^2 + a_{13}^2 a_{33}^2 \quad 1.179$$

$$\rho_{23} = a_{21}^2 a_{31}^2 + a_{22}^2 a_{32}^2 + a_{23}^2 a_{33}^2 \quad 1.180$$

Para una orientación x_3' podemos calcular el módulo de Young promedio con una función distribución $I(\varnothing, \theta)$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I(\varnothing, \theta)}{s_{33}'} \sin \theta \, d\varnothing \, d\theta \quad 1.181$$

donde, en función de los ángulos de Euler,

$$s_{33}' = s_{11} - 2 (s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) (\sin^4 \theta \sin^2 \varnothing \cos^2 \varnothing + \sin^2 \theta \cos^2 \varnothing) \quad 1.182$$

lo que muestra la dependencia de una única dirección (\varnothing, θ) y no del ángulo ψ .

Para el módulo de Poisson, para una deformación transversal paralela al eje x_2' , la expresión a integrar es

$$\nu_{23}' = - \frac{s_{23}'}{s_{33}'} \quad 1.182$$

En función de los ángulos de Euler tenemos

$$s_{23}' = s_{12} + (s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) [2 \sin^2 \theta \sin^2 \varnothing \cos^2 \varnothing \sin^2 \psi + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \varnothing (1 - \sin^2 \varnothing \cos^2 \varnothing) + 2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varnothing - \cos^2 \varnothing) \cos \varnothing \sin \varnothing \cos \theta \sin \psi \cos \psi] \quad 1.183$$

lo que muestra el carácter de propiedad triaxial del módulo de Poisson,

La expresión general del promedio es

$$\bar{\nu} = - \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{\epsilon'_{23}}{\epsilon'_{33}} I(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi \quad 1.184$$

Para el caso típico de una textura de alambre, o sea con isotropía de revolución alrededor de un eje, la distribución es aleatoria para el ángulo ψ . Este puede ser integrado en forma independiente y el módulo de Poisson pierde su característica de propiedad triaxial

$$\bar{\nu} = - \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{\epsilon_{12} + \nu_{23}}{\epsilon_{11} - 2\nu_{33}} I(\varphi, \theta) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\psi \quad 1.185$$

Dado que puede demostrarse que

$$\nu_{33} = \frac{\int_0^{2\pi} \nu_{23} \, d\psi}{\int_0^{2\pi} d\psi} \quad 1.186$$

la expresión para el promedio del módulo de Poisson, en el caso de isotropía transversal, queda reducida a

$$\bar{\nu} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\epsilon_{12} + \nu_{33}}{\epsilon_{11} - 2\nu_{33}} I(\varphi, \theta) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \quad 1.187$$

Para el caso de un monocristal solicitado según la dirección (φ, θ) la deformación transversal ocurre según direcciones caracterizadas por todos los valores de ψ comprendidos entre 0 y 2π . Si consideramos que lo que se mide es un promedio sobre todas estas deformaciones el módulo de Poisson resultaría de un promedio simple sobre ψ .

$$\nu = - \frac{\epsilon_{12} + \nu_{33}}{\epsilon_{11} - 2\nu_{33}} \quad 1.188$$

Esta expresión resulta también dependiente, únicamente, del eje longitudinal x_3 .

Debido a que el módulo de Poisson es un cociente entre deformaciones, el tensor de segundo rango que las representa será isótropo ante rotaciones alrededor de ejes de simetría de orden 3 y 4. Podemos escribir los factores de orientación en función de los índices de Miller para el caso de orientaciones discretas:

$$\nu_{33} = [h_3^2 k_3^2 + h_3^2 l_3^2 + k_3^2 l_3^2] / (h_3^2 + k_3^2 + l_3^2)^2 \quad 1.189$$

$$\nu_{23} = [h_3^2 h_2^2 + k_3^2 k_2^2 + l_3^2 l_2^2] / (h_3^2 + k_3^2 + l_3^2) (h_2^2 + k_2^2 + l_2^2) \quad 1.190$$

donde $[h_3 k_3 l_3]$ son los índices de la orientación del eje x_3' y $[h_2 k_2 l_2]$ son los de la dirección transversal x_2' . No debe esperarse, por lo tanto, variación alguna para el módulo de Poisson cuando las sollicitaciones se ejercen según los ejes $\langle 100 \rangle$ y $\langle 111 \rangle$

No efectuaremos aquí promedio alguno para materiales cúbicos, pero resulta interesante calcular el módulo de Poisson para algunas direcciones particulares. Este constituye el paso previo a la integración numérica de 1.184. Por lo demás, una integración analítica de la misma resulta prácticamente imposible, salvo alguna función distribución muy particular que la simplifique.

La tabla 1.7 muestra valores calculados para el módulo de Poisson de Ag, Nb y Na. Estos materiales presentan razones A de anisotropía muy diferentes. La dirección de aplicación de la tensión es la $\langle 110 \rangle$ y la dirección transversal ha sido variada en forma arbitraria. Pueden verse valores muy diferentes para un mismo material, incluso negativos en algunos casos. Esto es particularmente crítico para el Na con un factor de anisotropía muy alto.

Queda claro hasta aquí la imposibilidad de hacer uso de la ecuación 1.1 para materiales isótropos en el caso de encontrarse presente alguna textura en el material. Veremos más adelante que en algunos casos ni siquiera el cálculo del promedio adecuado puede preveer los valores a medir.

1. 2. 2. EL MÓDULO DE POISSON EN MATERIALES DE SIMETRÍA HEXAGONAL.

Para el caso de materiales hexagonales algunos de los coeficientes elásticos en función de la dirección son

$$\epsilon'_{33} = a_{33}^4 \epsilon_{33} + (1 - a_{33}^2) a_{33}^2 (2 \epsilon_{13} + \epsilon_{44}) + (1 - a_{33}^2)^2 \epsilon_{11} \quad 1.191$$

$$\begin{aligned} \epsilon'_{23} = & a_{23}^2 a_{33}^2 (\epsilon_{11} + \epsilon_{33} - \epsilon_{44}) + (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})^2 \epsilon_{12} + \\ & (a_{33}^2 + a_{23}^2 - 2 a_{23}^2 a_{33}) \epsilon_{13} \end{aligned} \quad 1.192$$

$$\begin{aligned} \epsilon'_{13} = & a_{13}^2 a_{33}^2 (\epsilon_{11} + \epsilon_{33} - \epsilon_{44}) + (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})^2 \epsilon_{12} + \\ & (a_{33}^2 + a_{13}^2 - 2 a_{33}^2 a_{13}) \epsilon_{13} \end{aligned} \quad 1.193$$

donde las a_{ij} son las componentes de la matriz de rotación.

Análogamente al caso de los materiales cúbicos podemos calcular el módulo de Young promedio con una función distribución de orientaciones $I(\varnothing, \theta)$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I(\varnothing, \theta)}{\epsilon'_{33}} \sin \theta \, d\varnothing \, d\theta \quad 1.194$$

donde ϵ'_{33} puede escribirse, en función de los ángulos de Euler definidos en la Figura n° 1.5, como

$$\epsilon'_{33} = \cos^4 \theta \epsilon_{33} + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (2 \epsilon_{13} + \epsilon_{44}) + \sin^4 \theta \epsilon_{11} \quad 1.195$$

que muestra nuevamente la dependencia de E solamente de la dirección del eje x'_3 y no de la orientación de la base perpendicular al mismo. Se agrega además el hecho de la isotropía de la celda hexagonal alrededor de su eje senario, lo que elimina la dependencia con el ángulo \varnothing . Esto simplificará los cálculos tanto de los promedios macroscópicos de constantes elásticas como del módulo de Poisson en función de la dirección.

Para el cálculo del módulo de Poisson en función de la dirección debe apelarse a las expresiones de ϵ'_{23} y ϵ'_{13} escritas en términos de los ángulos de Euler.

$$\nu'_{32} = - \left\{ \cos^2 \psi \sin^2 \theta \cos^2 \theta (s_{11} + s_{33} - s_{44}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos 2\theta \cos^2 \psi) s_{13} + \sin^2 \theta \sin^2 \psi s_{12} \right\} / s'_{33} \quad 1.196$$

$$\nu'_{31} = - \left\{ \sin^2 \psi \sin^2 \theta \cos^2 \theta (s_{11} + s_{33} - s_{44}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos 2\theta \sin^2 \psi) s_{13} + \sin^2 \theta \cos^2 \psi s_{12} \right\} / s'_{33} \quad 1.197$$

Los valores de los coeficientes elásticos del monocristal de circonio fueron extraídos del trabajo de Fisher y Renken [37] quienes han informado los valores de c_{ij} para Zr- α para un rango de temperaturas comprendido entre 4 K y 1073 K. Los coeficientes s_{ij} son obtenidos por inversión por Rosenbaum and Lewis [38]. Las Figuras 1.6 a y b muestran ν'_{31} y ν'_{32} como función de θ para diferentes ψ . Las mismas cantidades se grafican en las Figuras 1.7 a y b como función de ψ y θ como parámetro. Estos valores fueron calculados a 4 K. Valores similares poseen las curvas a temperatura ambiente. Puede observarse que el módulo de Poisson es fuertemente dependiente de la orientación con un mínimo del orden de 0.25 y un máximo del orden de 0.41. Extremos similares pueden encontrarse a temperatura ambiente como puede verse en la Figura n° 1.8 que muestra la variación con la temperatura para ciertas orientaciones particulares. Puede también observarse una mayor dispersión de los valores a medida que crece la temperatura.

El promedio del módulo de Poisson se obtendrá con una ecuación análoga a 1.184. En éste caso no existirá la dependencia con θ y la integral sobre θ , por simetría de la red hexagonal, podremos reducirla a calcularla entre 0 y $\pi/2$. De esta forma se obtiene:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \nu'(\theta, \psi) \sin \theta \, d\theta \, d\psi \quad 1.198$$

Como únicamente el numerador de 1.182 es función de ψ puede procederse a su integración independiente, sin función peso en esta variable, en los siguientes casos: 1) Distribución aleatoria de todas las variables. 2) Textura característica de alambre, con isotropía transversal. 3) Monocristal con dirección de sollicitación mecánica dada por θ , si consideramos que la deformación transver-

sal medida es un promedio de todas las posibles. En estos tres casos podemos promediar previamente la variable U en forma análoga a la situación presentada en la simetría cúbica.

$$\frac{1}{2\pi} \int \varepsilon'_{23} d\psi = a_{33}^4 \varepsilon_{13} + (1-a_{33}^2) (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})/2 + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} - \varepsilon_{44}) (1-a_{33}^2) a_{33}^2/2 \quad 1.199$$

Aún con estas simplificaciones la integración de 1.184 es difícil. Sólo es posible efectuarla analíticamente para los casos más simples de función distribución I(θ). Suponiendo distribución aleatoria puede calcularse el módulo de Poisson correspondiente a un material isótropo. Los valores obtenidos son los que se muestran en la figura n^o 1.8 para seis temperaturas diferentes [cuadrados negros]. Un camino alternativo consiste en promediar los ε'_{ij} con la función distribución adecuada mediante

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \varepsilon'_{ij}(\theta, \psi) I(\theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi \quad 1.200$$

Obtenidos estos valores puede utilizarselos para calcular el módulo de Poisson adecuado. Este es el camino seguido por Rosebaum and Lewis [38] para la textura característica de vainas combustibles de Zry-4. Los valores obtenidos para distintas temperaturas se muestran en la Tabla 1.8 y las texturas informadas para esas vainas en la Figura n^o 1.9. Para una tensión aplicada según la dirección coincidente con el eje de la vaina y una deformación normal a la pared de la misma [radial] se obtiene ν_{pn} . Para la misma tensión y contracción según una dirección tangente a la pared de la vaina se obtiene ν_{pt} . Ambos cálculos fueron efectuados y se muestran en la figura n^o 1.8 con triángulos y circunferencias respectivamente. La línea llena indicada con ν_R que yace por debajo de los cuadrados llenos es la resultante de efectuar el mismo cálculo para una distribución totalmente aleatoria. Podemos observar una diferencia sistemática que debe adjudicarse al conocido hecho de que no resulta lo mismo efectuar el promedio de los cocientes $-\varepsilon'_{23}/\varepsilon'_{33}$ que el cociente de los promedios de ε'_{23} y ε'_{33} . Debiera esperarse que la diferencia fuera más acentuada para el caso de materiales texturados.

1. 2. 3. DISCUSION y CONCLUSIONES

Hemos analizado las características de los promedios a efectuar en materiales de simetría cúbica y hexagonal para obtener el módulo de Poisson de un policristal anisótropo. Además de la conclusión general de que se trata de una propiedad esencialmente triaxial hemos podido observar la mayor simpleza del cálculo de este módulo para el caso de la celda hexagonal. Esto ocurre, a pesar de la menor simetría de la celda, debido a la existencia del eje senario lo que le confiere simetría elástica de orden ∞ alrededor del mismo.

Northwood et al. [39] han calculado el módulo de Young y de corte como función de la temperatura y del ángulo θ para circonio α monocristalino utilizando los coeficientes elásticos de Fisher y Renken [24]. En la dirección [0002] estos módulos, en función de la temperatura, tienen una expresión dada por

$$E_{[0002]} = 162.3 - 0.0398 [T-273] \quad \text{GPa} \quad 1.201$$

$$G_{[0002]} = 34.15 - 0.0232 [t-273] \quad \text{GPa} \quad 1.202$$

donde la temperatura está dada en grados Kelvin. De acuerdo con estos autores y debido a la isotropía basal de la celda hexagonal el módulo de Poisson debiera poder ser calculado para esta dirección a partir de la ecuación para medios isótropos 1.1. Haciéndolo así, el módulo de Poisson decrece linealmente desde .436 a 298 K hasta .138 a 773 K. De la gráfica de la Figura nº 1.8 podemos ver que el mismo crece desde .29 a 4K hasta .344 a 1130 K para $\theta=0$. Queda claro que ni aún en estos casos aparentemente tan simples puede obviarse el uso de la ecuación correcta de los medios anisótropos.

Schwenk et al. [40] midieron el módulo de Poisson en Zry-4 recocido por medio del método clásico de deformación en tensión con strain gages y extensómetros adheridos a la probeta. Sus medidas, efectuadas entre temperatura ambiente y 589 K, arrojan valores prácticamente independientes de la temperatura con un valor a temperatura ambiente de .406. Este valor es difícil de compatibilizar con los obtenidos para un monocristal ya que corresponde prácticamente al valor máximo para $\theta = \pi/4$ y $\psi = \pi/2$. Si, como puede deducirse de los resultados de Northwood et al.

[39] y Rosinger et al.[41], las constantes elásticas no cambian substancialmente por la presencia de aleantes en baja concentración, los valores reportados por Schwenk et al. podrían estar influenciados por deformaciones plásticas o anelásticas.

La Figura n^o 1.8. muestra también el aumento de la anisotropía con el incremento de temperatura. Uno podría esperar que esta diferencia entre los valores del módulo de Poisson, para las distintas direcciones, se manifestara en una importante dispersión de los valores calculados para policristales isótropos. Como puede verse en la Tabla n^o 1.9. ésto no ocurre así. Los valores del módulo de Poisson calculados por los diferentes modos de promedio no presentan a 1073 K mayor dispersión que los calculados a temperatura ambiente. Esto indicaría que la diferencia observada en otros materiales no es indicativa de su anisotropía sino, tal vez, de la exactitud de los datos experimentales. Solamente un aumento del promedio, por influencia de la orientación $\psi=0$, $\psi=\pi/2$, es observable.

Tabla 1.1

Constantes elásticas de níquel policristalino calculadas a partir de constantes de monocristal a temperatura ambiente. Valores expresados en GPa. [22]. Simetría cúbica.

Promedio	λ	μ	E	K	ν
I_1, I_1^*	117,26	94,66	241,70	180,37	0,2767
I_2, I_2^*	117,26	94,66	241,70	180,37	0,2767
I_3, I_3^*	117,26	94,66	241,70	180,37	0,2767
J_3, J_3^*	127,44	77,66	203,58	179,21	0,3107
J_2, J_2^*	127,44	77,66	203,58	179,21	0,3107
J_1, J_1^*	127,44	77,66	203,58	179,21	0,3107
VRH	120,97	86,16	222,64	179,79	0,2920
Fr	122,32	86,24	223,06	179,79	0,2932
M_1, M_1^*	115,70	99,96	253,55	182,34	0,2683
M_2, M_2^*	117,26	94,66	241,70	180,37	0,2767
L_2, L_2^*	127,44	77,66	203,58	179,21	0,3107
Exp.			212,9 [7]		
			205,3 [21]		

Tabla 1.2

Constantes elásticas de cinc policristalino calculadas a partir de constantes elásticas de monocristal a temperatura ambiente. Valores expresados en GPa. [23]. Simetría hexagonal.

Promedio	λ	μ	E	K	ν
I_1, I_1^*	40,393	46,060	113,640	71,100	0,2336
I_2, I_2^*	40,345	45,183	111,680	70,467	0,2359
I_3, I_3^*	40,533	43,751	108,543	69,700	0,2405
J_3, J_3^*	65,119	36,860	97,258	89,692	0,3193
J_2, J_2^*	52,202	36,009	93,328	76,208	0,2959
J_1, J_1^*	32,440	35,186	87,250	55,897	0,2399
VRH	36,404	40,623	100,445	63,498	0,2363
Fr	35,215	41,743	102,587	63,042	0,2288
M_1, M_1^*	39,860	52,299	127,217	74,726	0,2162
M_2, M_2^*	40,300	51,074	124,674	74,350	0,2205
L_2, L_2^*	11,138	30,053	68,233	31,174	0,1352
Exp. [23]		47,0	97,5	60,2	0,262

Tabla 1.3

Constantes elásticas de circonio policristalino calculadas a partir de constantes de monocristal a temperatura ambiente. Valores expresados en GPa. (24). Simetría hexagonal.

Promedio	λ	μ	E	K	ν
I_1, I_1^*	71,106	36,407	96,926	95,378	0,3311
I_2, I_2^*	71,108	36,385	96,839	95,365	0,3308
I_3, I_3^*	71,110	35,365	96,791	94,687	0,3308
J_3, J_3^*	71,682	35,683	95,190	95,471	0,3338
J_2, J_2^*	71,565	35,678	95,165	95,354	0,3337
J_1, J_1^*	71,456	35,673	95,140	95,238	0,3335
VRH	70,718	36,071	96,029	95,308	0,3311
Pr	71,281	36,001	95,922	95,308	0,3322
M_1, M_1^*	70,889	36,920	98,126	95,505	0,3289
M_2, M_2^*	71,095	36,540	97,209	95,454	0,3302
L_2, L_2^*	70,833	35,640	95,001	95,596	0,3326
Exp. (25)		33,7	95,8		0,406 [26]

Tabla 1.4

Constantes elásticas para berilio policristalino calculadas a partir de constantes de monocristal a temperatura ambiente. Valores expresados en GPa. (27,28). Simetría hexagonal.

Promedio	λ	μ	E	K	ν
I_1, I_1^*	42,070	137,773	307,68	133,89	0,117
I_2, I_2^*	39,980	138,24	307,39	131,98	0,112
I_3, I_3^*	51,650	118,60	273,17	130,72	0,152
J_3, J_3^*	57,500	122,98	285,14	139,49	0,159
J_2, J_2^*	35,000	125,50	278,37	118,69	0,109
J_1, J_1^*	36,840	125,25	278,97	120,34	0,114
VRH	39,441	131,49	293,32	127,11	0,115
Pr	39,370	131,34	292,97	126,93	0,115
M_1, M_1^*	71,020	133,24	312,50	159,84	0,174
M_2, M_2^*	54,470	134,71	308,21	144,28	0,144
L_2, L_2^*	14,325	128,38	270,74	101,26	0,050
Exp. (22)		147	309	115	

Tabla 1.5

Constantes elásticas de nitrato de sodio policristalino calculadas a partir de constantes de monocristal a temperatura ambiente. Valores expresados en GPa. (10) Simetría trigonal.

Promedio	λ	μ	E	K	ν
I_1, I_1^*	165,600	263,933	629,620	341,555	0,1928
I_2, I_2^*	163,891	259,784	620,060	337,080	0,1934
I_3, I_3^*	161,811	254,395	607,690	331,408	0,1944
J_3, J_3^*	199,900	224,238	555,340	349,392	0,2340
J_2, J_2^*	178,485	222,312	543,630	326,693	0,2227
J_1, J_1^*	147,102	220,524	529,290	294,118	0,2001
VRH	156,285	242,230	579,455	317,772	0,1961
Pr	156,079	241,308	577,193	316,950	0,1964
M_2, M_2^*	174,317	283,779	675,143	363,503	0,1903
L_2, L_2^*	67,763	207,473	466,027	206,079	0,1231

Tabla 1.6

Constantes elásticas de ácido tartárico policristalino calculadas a partir de constantes de monocristal a temperatura ambiente. Valores expresados en GPa. [11]. Simetría monoclínica.

Promedios	λ	μ	E	K	ν
I_1, I_1^*	259,87	112,87	304,42	335,11	0,3468
I_2, I_2^*	249,68	106,19	286,88	320,47	0,3508
I_3, I_3^*	237,20	103,31	278,58	306,08	0,3483
J_3, J_3^*	104,23	79,50	204,11	157,24	0,2837
J_2, J_2^*	441,29	75,54	215,58	491,65	0,4269
J_1, J_1^*	117,77	78,01	202,84	169,78	0,3004
VRH	183,43	95,44	253,65	252,44	0,3289
Fr	176,37	93,24	247,7	238,53	0,3271
M_2, M_2^*	308,54	145,35	389,0	405,44	0,3399
L_2, L_2^*	29,22	80,20	181,33	82,69	0,1335

Tabla 1.7

Módulo de Poisson para tensiones aplicadas según la dirección $\langle 110 \rangle$. Coeficientes elásticos de Ag, Nb y Na monocristalino tomados de [22].

$h_2k_2l_2$	ν_{23}	Ag	Nb	Na
$[\bar{1}\bar{1}0]$	1/2	-9.3×10^{-2}	0.606	-0.732
$[\bar{1}\bar{1}1]$	1/3	0.212	0.476	-4.9×10^{-2}
$[\bar{1}\bar{2}1]$	1/6	0.517	0.345	0.634
$[\bar{1}\bar{1}3]$	1/11	0.655	0.286	0.945
$[\bar{2}\bar{2}1]$	4/9	8.8×10^{-3}	0.562	-0.504
$[\bar{3}\bar{3}1]$	9/19	-4.5×10^{-2}	0.585	-0.62
Razón de anisotropía A		3.01	0.51	8.15

Tabla 1.8

Coeficientes elásticos computados por Rosenbaum and Lewis (38) para textura característica de vainas combustibles. Valores en $10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$.

Temp. ($^{\circ}\text{C}$)	s_{11}	s_{22}	s_{33}	s_{44}	s_{55}	s_{66}	$-s_{12}$	$-s_{13}$	$-s_{23}$
25	9.66	10.48	10.68	28.46	29.15	27.86	3.244	3.153	3.681
100	10.01	11.10	11.33	30.59	31.33	29.17	3.399	3.334	4.118
200	10.45	11.96	12.27	33.68	34.48	30.80	3.571	3.560	4.770
300	10.95	12.97	13.37	37.30	38.19	32.70	3.777	3.830	5.539
400	11.46	14.07	14.57	41.25	42.22	34.65	3.977	4.107	6.381

Tabla 1.9

Módulos de Poisson del circonio, calculados mediante diferentes modos de promedio, a 1073 K.

Promedios	λ	μ	ν
I_1, I_1^*	83.293	18.31	0.4099
I_2, I_2^*	83.335	18.156	0.4106
I_3, I_3^*	83.369	18.020	0.4111
J_3, J_3^*	75.289	18.324	0.4021
J_2, J_2^*	75.308	18.045	0.4034
J_1, J_1^*	75.299	17.827	0.4043
M_2, M_2^*	83.033	19.235	0.4059
L_2, L_2^*	75.108	16.89	0.4085

REFERENCIAS

1. Voigt, W..Lehrbuch der Kristallphysik. B.G.Teubner Verlag, Leipzig.(1928)
2. Reuss, A.Z.. Z.Angew. Math. Mech. 9 [1929] 49.
3. Hill, R.. Proc. Phys. Soc. London. A 65[1952] 349.
4. Herakovich, Carl T., J.Comp.Mat., 18 [1984] 447.
5. Gunton, D.J. and Saunders, G.A., J.Mat. Sci., 7 [1972] 1061.
6. Hirth, J.P. and Lothe, J..Theory of Dislocations. Mc Graw-Hill. New York [1968].
7. Temple, G..Cartesian Tensors. Butler & Taner Ltd.London[1960].
8. Goodbody, A.M..Cartesian Tensors. Ellis Horwood Ltd..Chichester.(1982).
9. Peresada, G.I..Phys. Stat. Sol.[a].4 [1971] K23.
10. Bhimasenachar, J..Proc. Indian Acad. Sci. A22[1945] 199.
11. Mason, W.P..Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics. Van Nostrand, New York [1950].
12. Adkins, J.E..Progress in Solid Mechanics.I.N.Snedon and R.Hill eds...North-Holland Pub.Co.Vol.II Chap.I.[1961].
13. Ericksen, J.L. and Rivlin, R.S..J.Rat.Mech.Anal. 3 [1954] 281.
14. Adkins, J.E..Proc.Roy. Soc. A229 [1955] 119.
15. Adkins, J.E..Archive Rat. Mech. Anal. 4 [1960] 193.
16. Pipkin, A.C. and Rivlin, R.S.. Arch.Rat.Mech.Anal. 4 [1959] 129.
17. Spencer, A.J.M..Theory of Invariants. In Continuum Physics. 1. Academic Press [1971] 239-353.
18. Spencer, A.J.M. Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids. Editions du CNRS.Proc.of the Euromech Colloquium 115. [1979] Session 1. Pág.3.

19. Verchery, G. Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids. Editions du CNRS. Proc.of the Euromech Colloquium 115.(1979) Session 1. Pág.93.
20. Armstrong, P.E. and Brown, H.L. .Trans. AIME 230 (1964) 962.
21. Zacharias, J.. Phys.Rev. 44 (1933) 116.
22. Hearmon, R.F.S.. Phil. Mag. Suppl.Vol.5 .19 (1956) 343.
23. Ledbetter, H.M.. J.Phys.Chem. Ref. Data .Vol.6, 4 (1977) 1181.
24. Fisher, E.S. and Renken, C.J.. Phys. Rev. A 135 (1964) 482.
25. Northwood, D.O., London, I.M and Bahen, L.E.. J. Nucl. Mat. 55 (1975) 299.
26. Schwenk, E.B., Wheeler, K.R., Shearer, G.D. and Webster, R.T.. J. Nucl. Mat. 73 (1978) 129.
27. Gold, L. Phys.Rev. 77 (1950) 390.
28. Gold, L. J. Appl. Phys.. 21 (1950) 541.
29. Bunge, H.J. ,Mber. dtSCH. Akad. Wiss. 3 (1961) 97.
30. Bunge, H.J., Matematische Methoden der Texturanalyse. Berlin Akademie Verlag (1969).
31. Bunge, H.J., Z. Metallkunde, 56 (1965) 872.
32. Hans-Rudolf Wenk Ed.. Preferred Orientation in Deformed Metals and Rocks: An Introduction to Modern Texture Analysis. Academic Press Inc.. Florida (1985).
33. Bunje, H.J. and Esling, C. Edits..Quantitative Texture Analysis. Deutsche Gesellschaft für Metallkunde. Germany (1982).
34. Roe, R.J.. J.Appl. Phys. 36 (1965) 2024.
35. Kröner, E., Z. Phys. 151 (1958) 504.
36. Morris, P.R., Int.J. Eng. Sci. 9 (1971) 917.

37. Fisher, E.S. and Renken, C.J., Phys. Rev. 135 [1964] A 482.
38. Rosenbaum, H.S. and Lewis, J., J. Nucl. Mater. 4 [1961] 311.
39. Northwood, D.O., London, I.M. and Bahen, L.E.; J. Nucl. Mater. 55 [1975] 299.
40. Schwenk, E.B., Wheeler, K.R., Shearer, G.D. and Webster, R. T.; J. Nucl. Mater. 73 [1978] 129.
41. Rosinger, H.E., Ritchie, I.G. and Shillinglaw, A.J.; Atomic Energy of Canada Limited, Report AECL-5231 [September 1975].

LÉYENDAS DE FIGURAS

1. 1. Policristal bajo tensión simple. Bordos de grano paralelos al eje de tensión. Deformación uniforme.
1. 2. Policristal bajo tensión simple. Bordos de grano perpendiculares al eje de tensión. Tensión uniforme.
1. 3. Diferencia relativa entre los promedios de Peresada y Hill, para cristales cúbicos, en función de la razón de anisotropía.
1. 4. Sistema de ejes principales y rotados en una celda cristalina de simetría cúbica. Detalle de los ángulos de Euler utilizados.
1. 5. Sistema de ejes principales y rotados en una celda cristalina de simetría hexagonal. Detalle de los ángulos de Euler utilizados.
1. 6. a) ν'_{31} y b) ν'_{32} para Zr- α monocristalino en función de θ y diferentes valores de ψ , a 4 K.
1. 7. a) ν'_{31} y b) ν'_{32} para Zr- α monocristalino en función de ψ y diferentes valores de θ , a 4 K.
1. 8. Módulo de Poisson ν'_{31} para Zr- α monocristalino en algunas direcciones particulares. ν_R , $\nu_{?n}$ y $\nu_{?t}$ son los valores calculados a partir de los coeficientes elásticos informados en [38] para una distribución aleatoria y una textura característica de vainas combustibles de Zry-4 [n: contracción radial o normal; t: contracción tangencial o transversal]. Los cuadrados llenos indican los valores de material isótropos calculados mediante 1.184.
1. 9. Figuras de polos de vainas de Zry-4. Informadas por Rosenbaum and Lewis [38] para sus propios cálculos. x'_1 : n, x'_2 : t, x'_3 : l a) Polos [0002]; b) Polos $\{10\bar{1}0\}$.

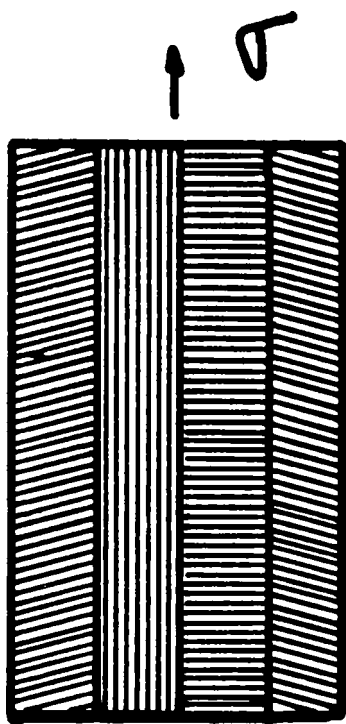


Fig.n° 1.1

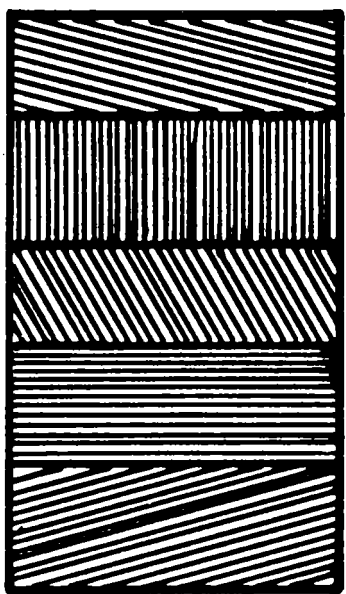
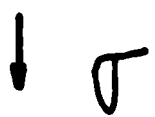
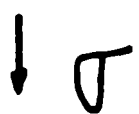


Fig.n° 1.2



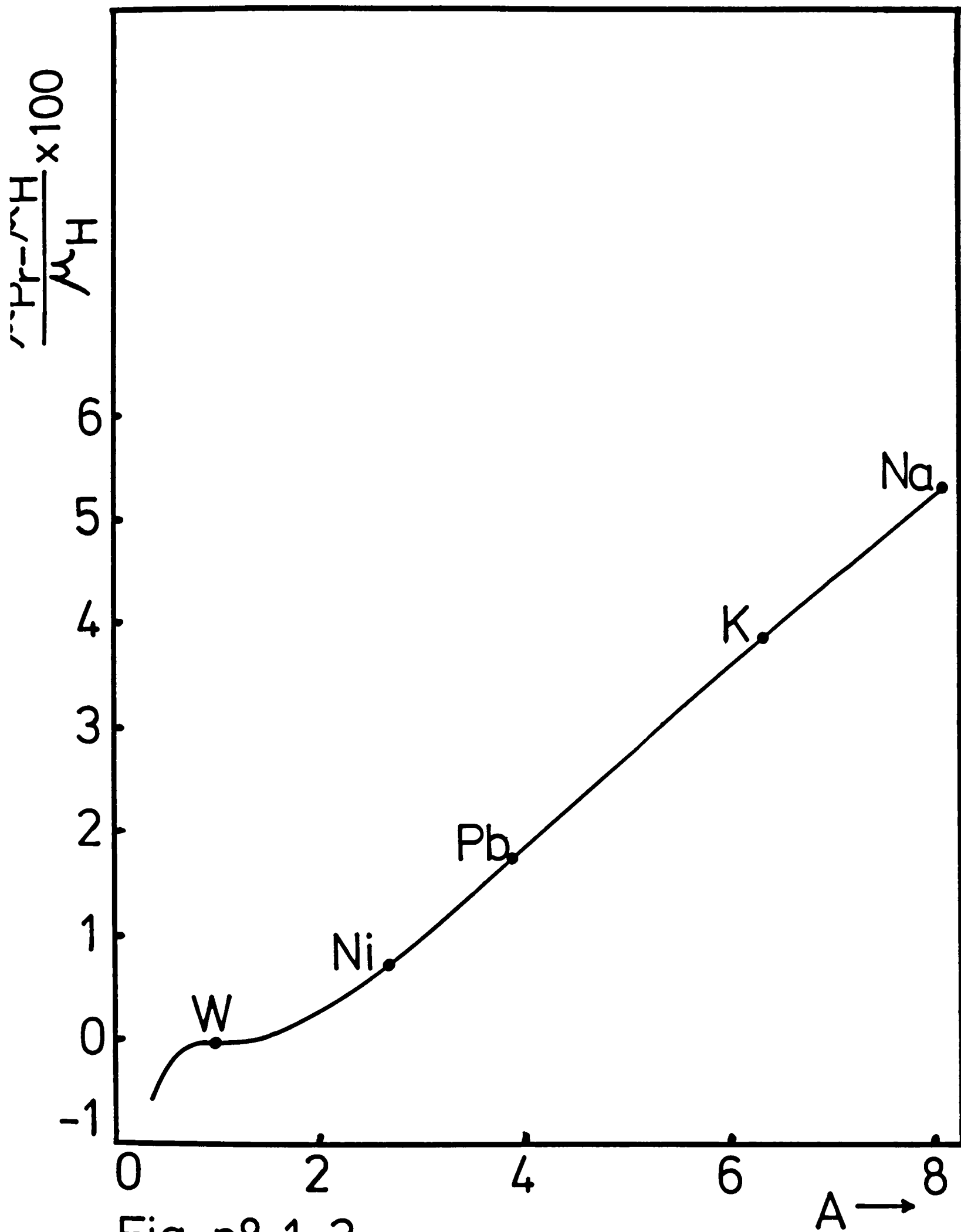


Fig. n° 1.3

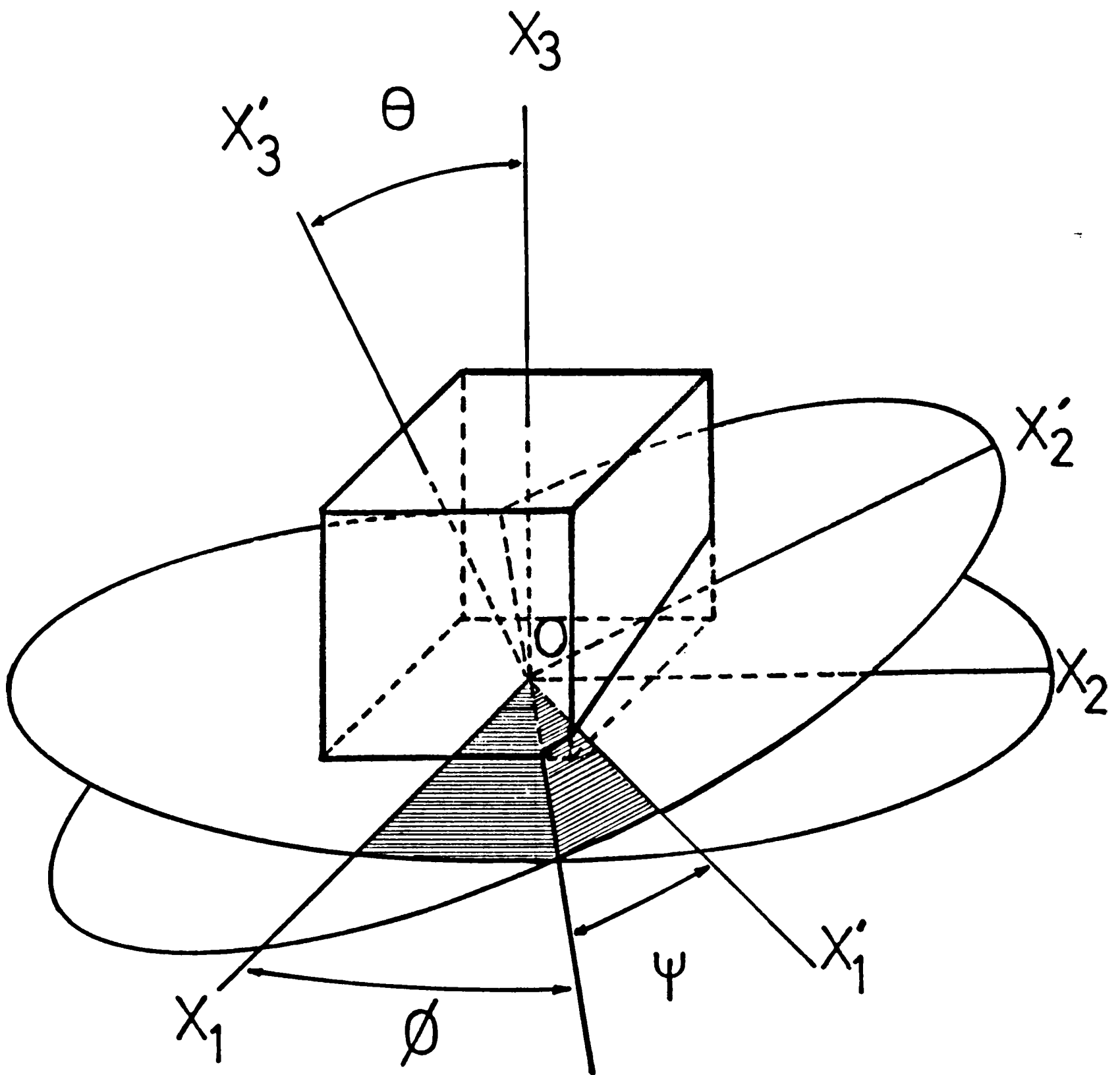


Fig.n° 1.4

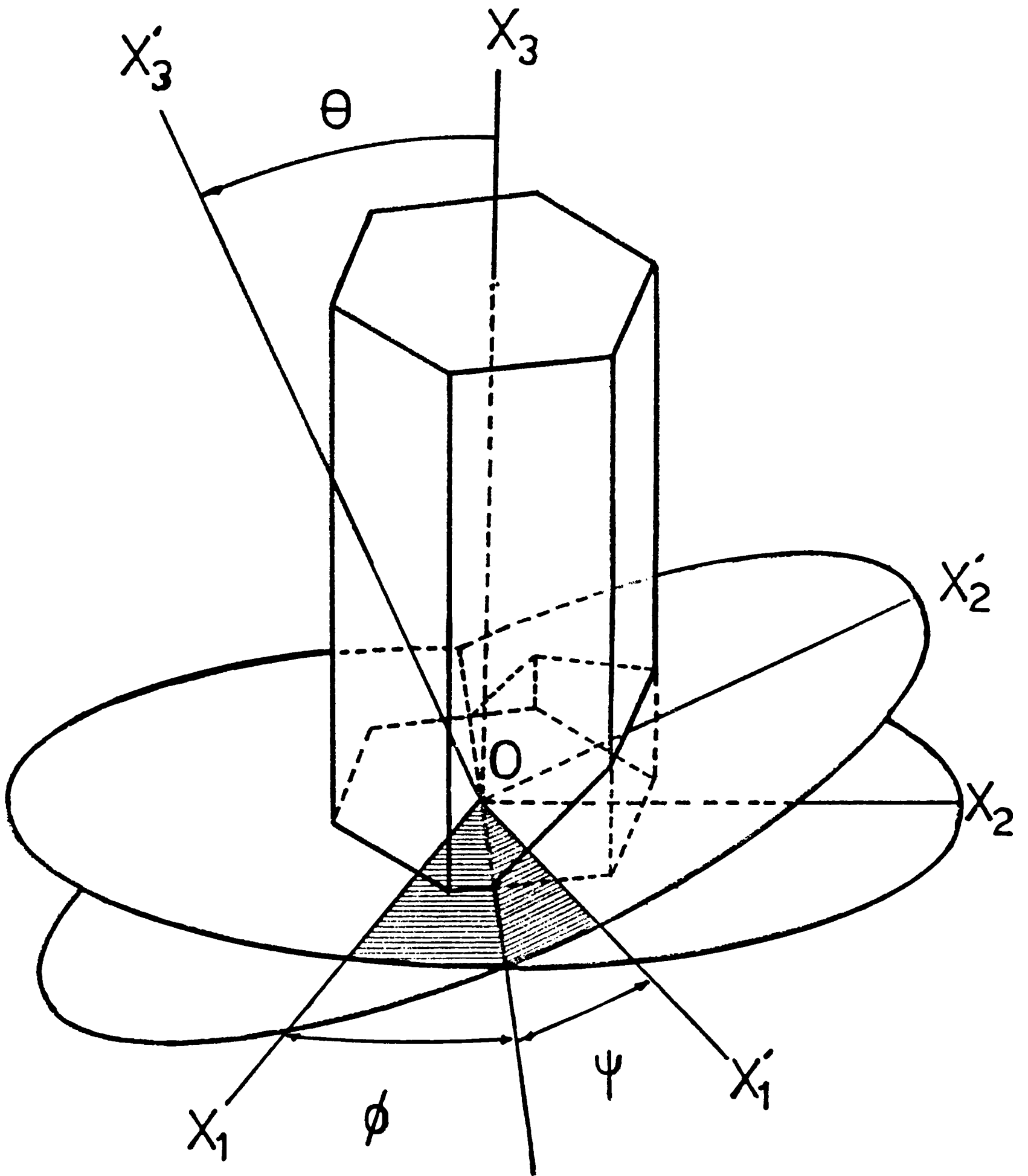


Fig. n° 1 5.

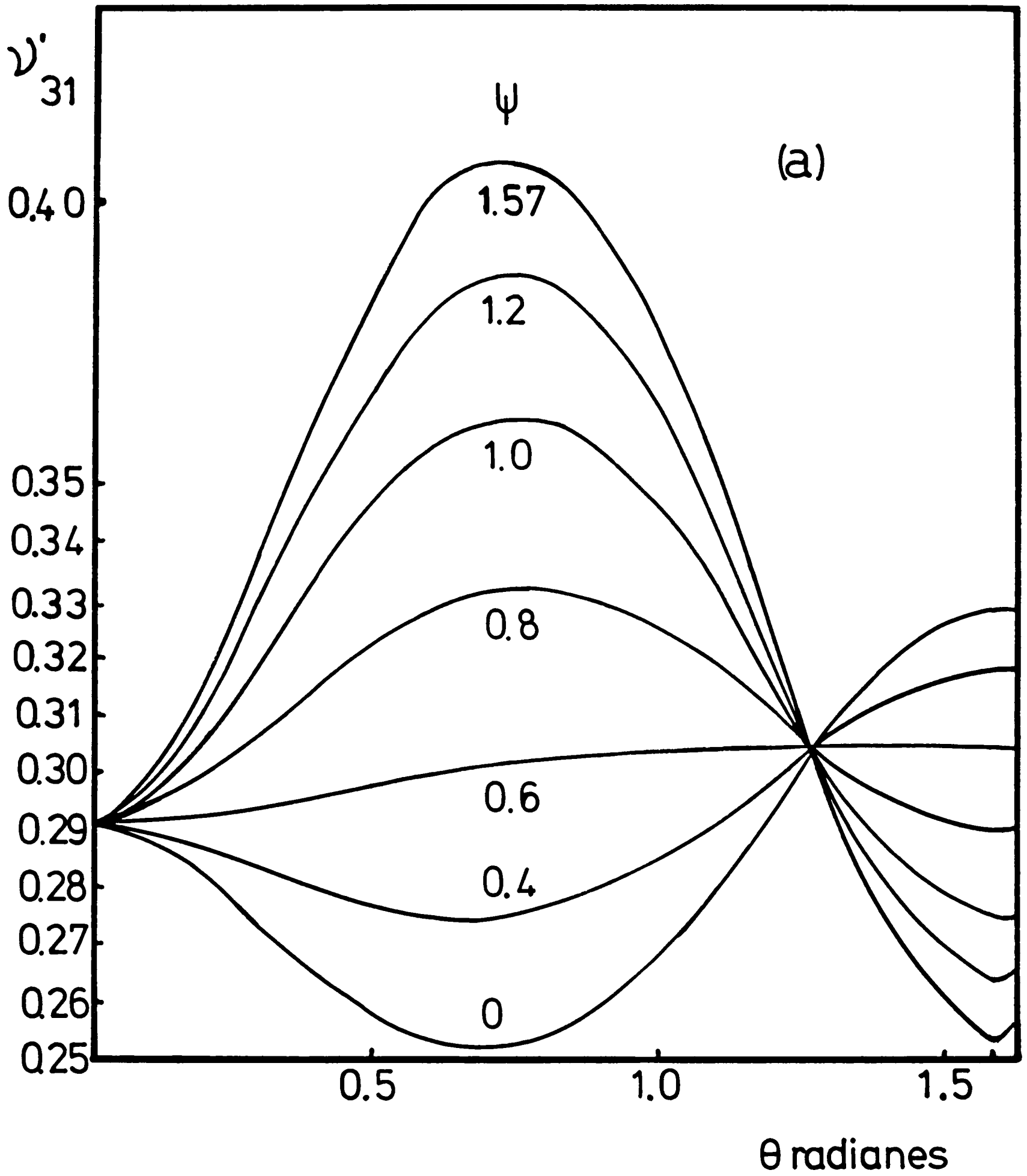


Fig. nº 1. 6. a.

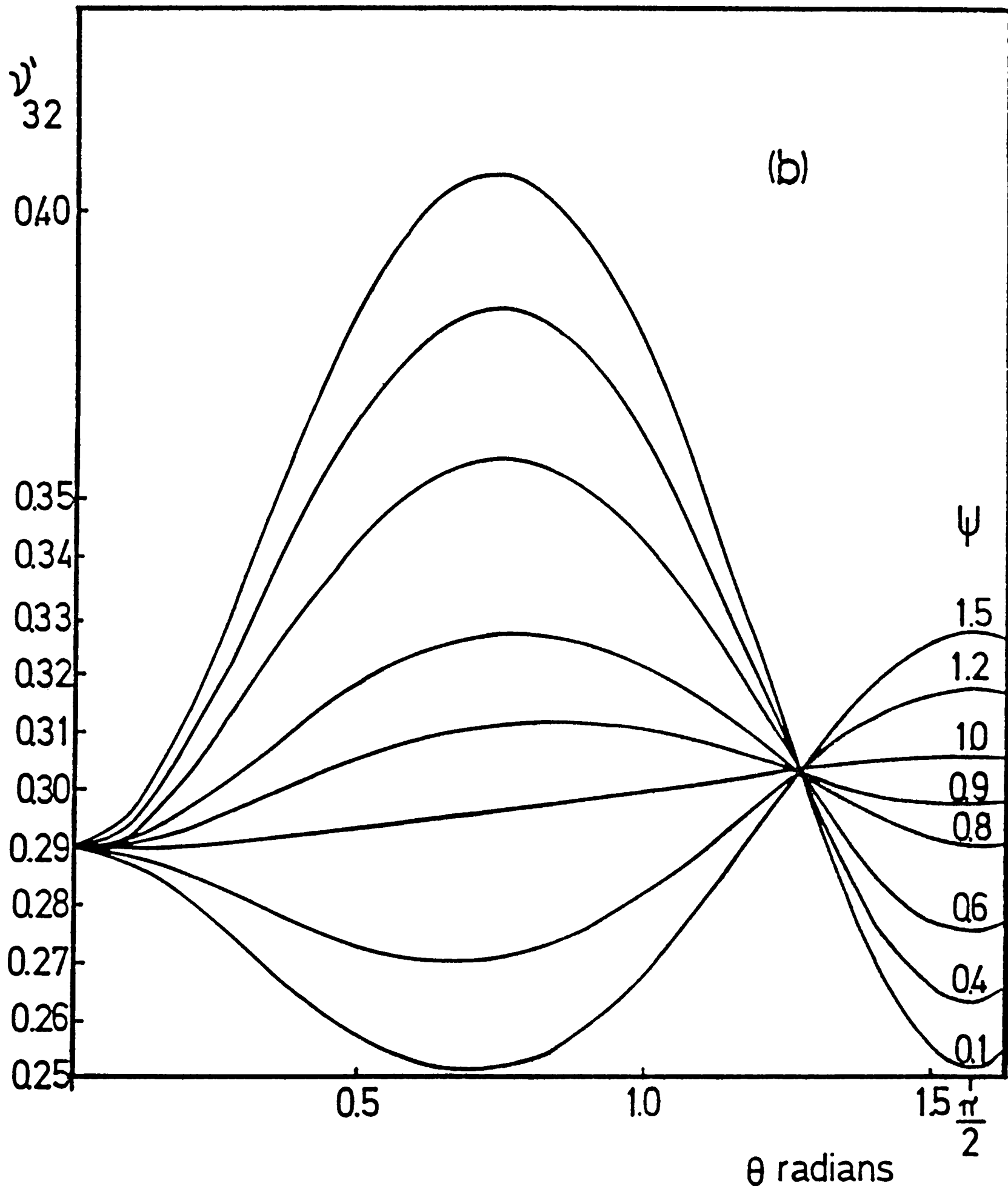


Fig.n° 1 6. b

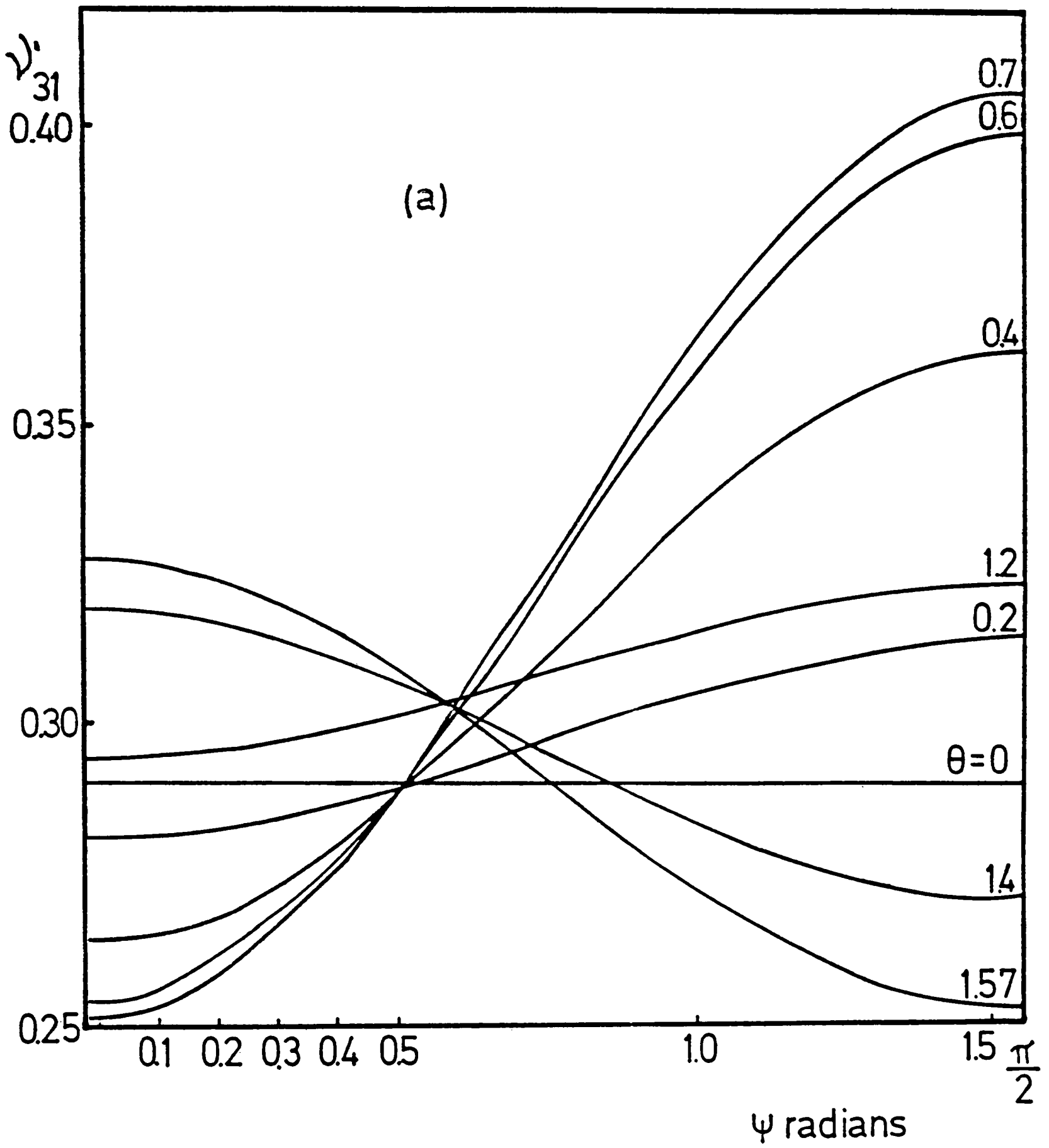


Fig.n° 1 7 a

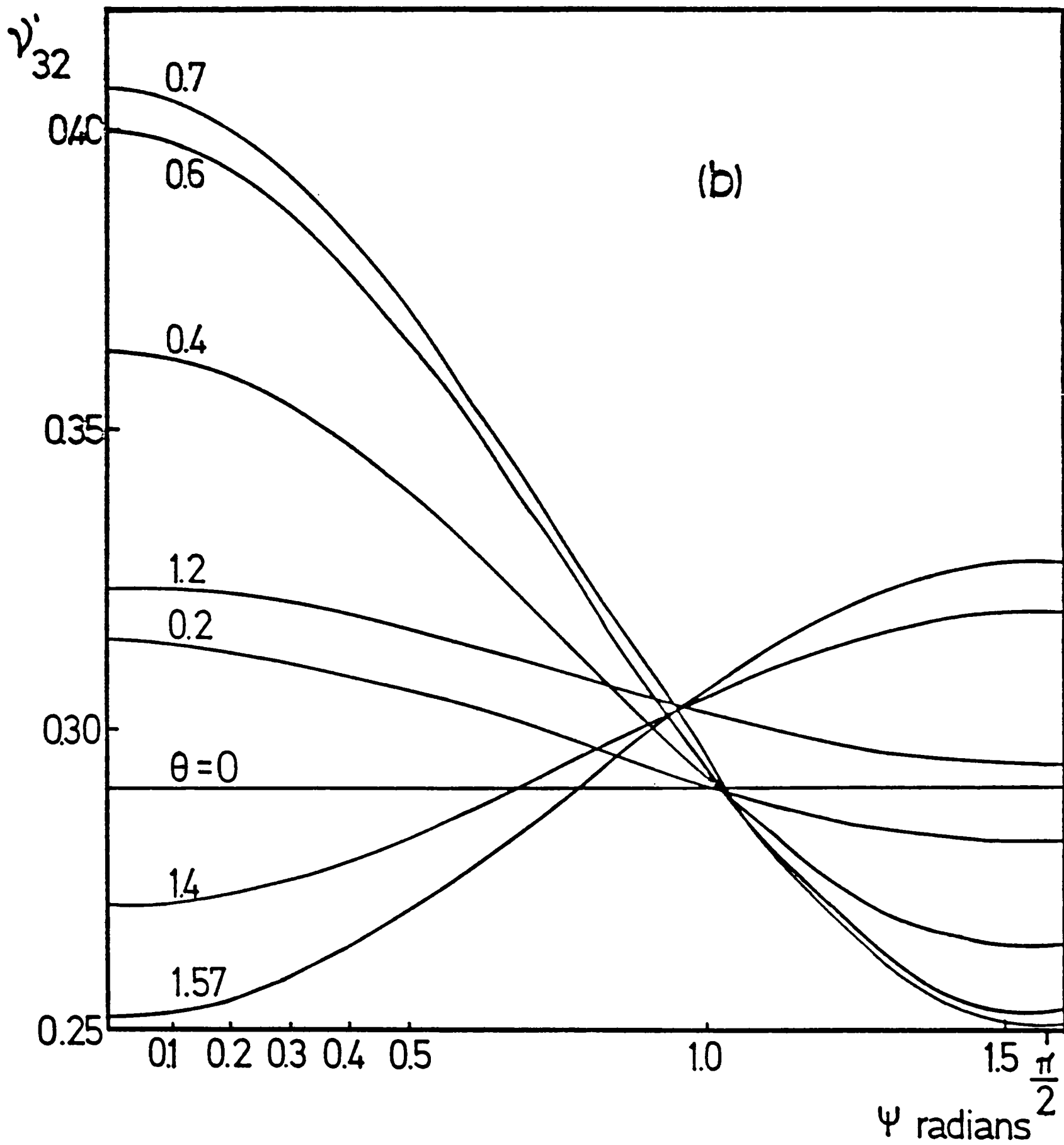
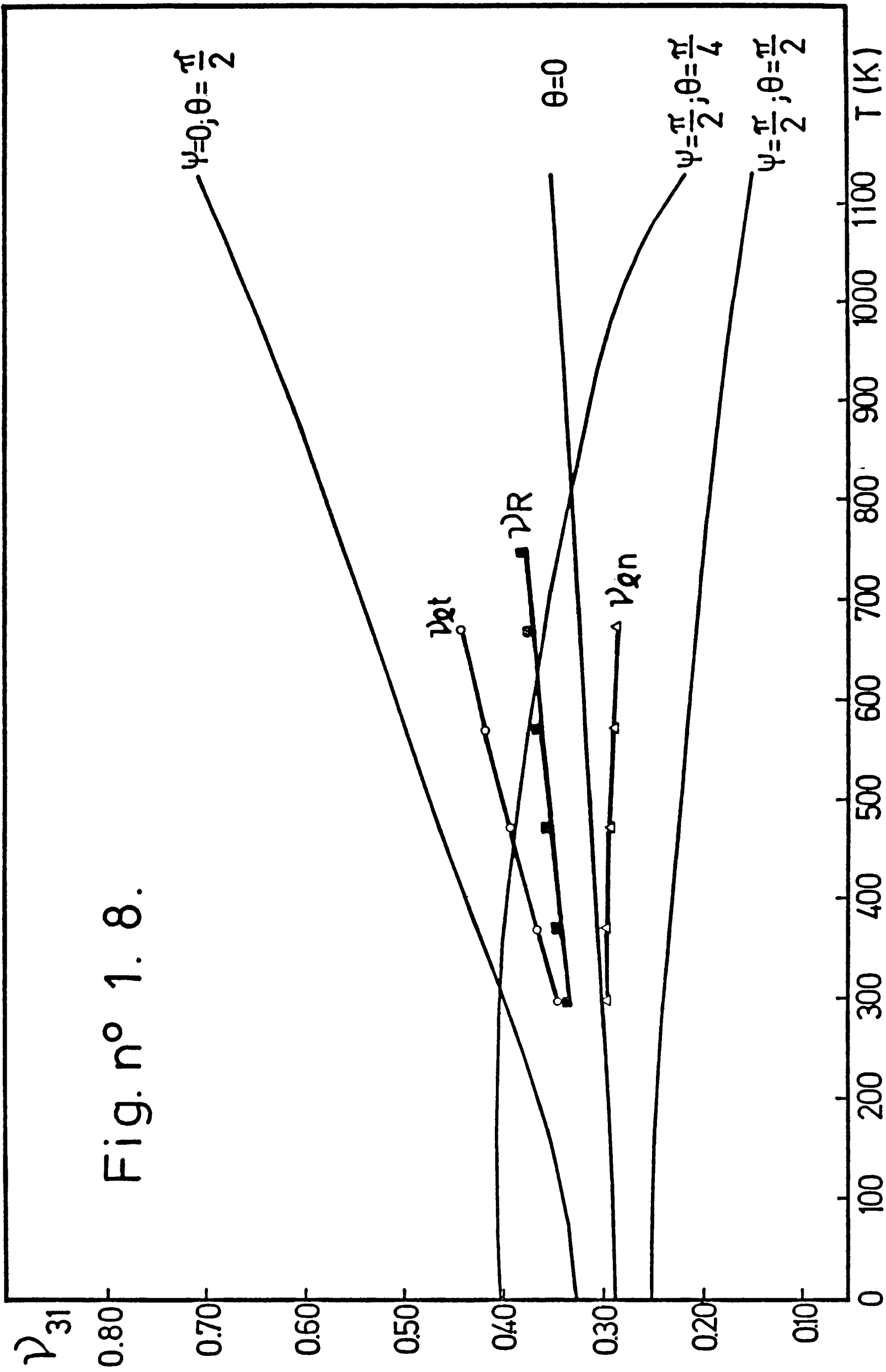


Fig.n° 1. 7 b



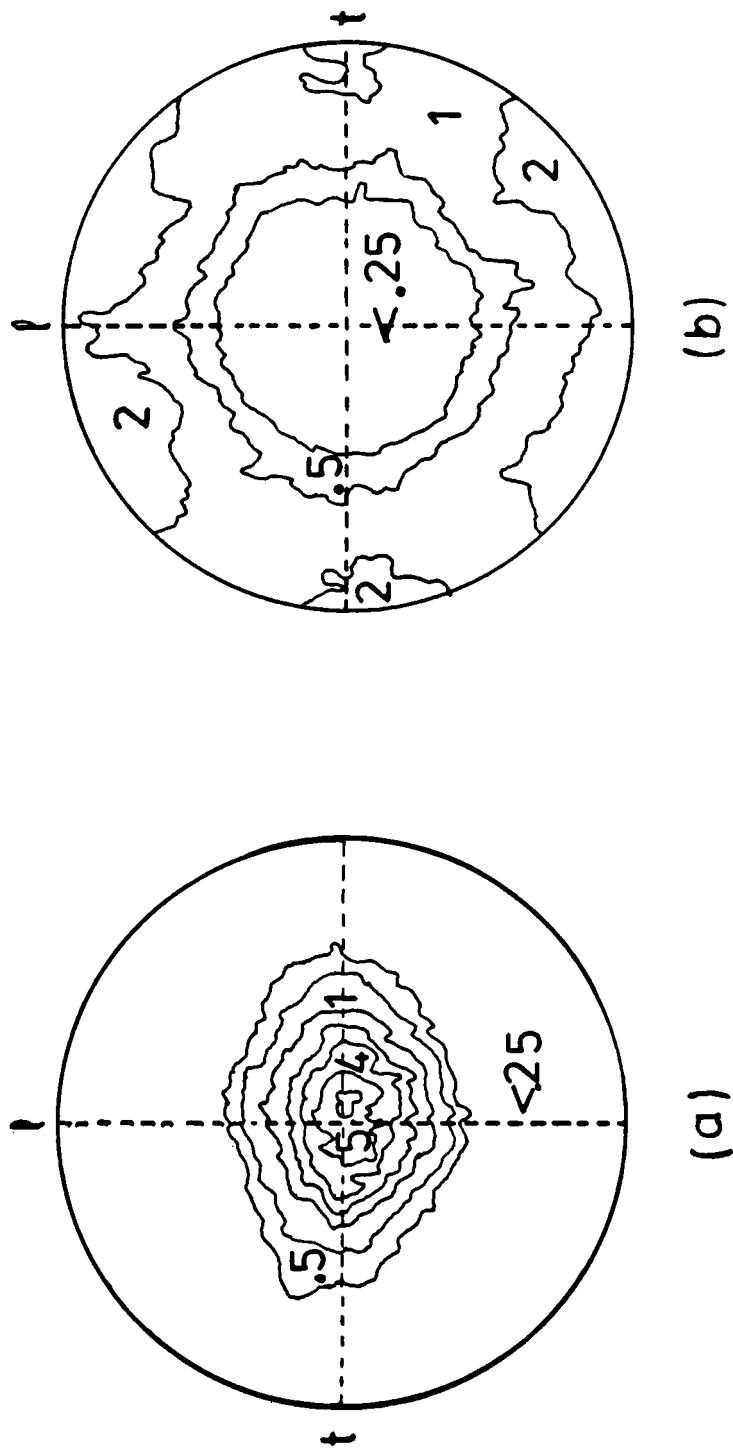


Fig. n° 1 9

CAPITULO II TEORIA ANELASTICA DEL MODULO DE POISSON

El comportamiento anelástico de los materiales es usualmente bien descrito mediante el modelo del sólido anelástico lineal estándar (1) [Apéndice A]. Aún cuando el ajuste con la experiencia se ha mostrado particularmente bueno en el caso de fenómenos que involucran relajaciones de defectos puntuales, otros fenómenos de relajación pueden interpretarse como superposiciones, discretas o continuas, de sólidos lineales estándar. Además este modelo se muestra particularmente adecuado para interpretar los parámetros más importantes del fenómeno de relajación en estudio.

Las relaciones clásicas de este modelo son generalmente usadas para representar el comportamiento anelástico de muestras excitadas en forma simple: vibraciones longitudinales, torsión y relajación volumétrica. En estas situaciones experimentales se obtienen las relajaciones de los módulos de Young, de corte o volumétrico. Además, para cristales simples, solamente la dependencia con la orientación de la intensidad de relajación de los dos primeros módulos es obtenida. Los casos más complicados de tensiones multiaxiales han sido considerados, desde un punto de vista más bien ingenieril, por Lazan (2) y Alfrey y Gurnee (3). Por otro lado algunas consideraciones introductorias fueron hechas por C. Wert (4) para el caso de deformaciones multiaxiales.

En este capítulo extenderemos el formalismo del sólido lineal estándar a todas las constantes elásticas para materiales de simetría cúbica y hexagonal. La obtención de expresiones de intensidad de relajación en función de la dirección y de la frecuencia permite estudiar el comportamiento en direcciones perpendiculares a aquella correspondiente a una excitación longitudinal. Se obtienen las expresiones para el módulo de Poisson relajado y no relajado y se efectúa una interpretación energética de las diferencias de fase obtenidas.

Las expresiones obtenidas para las intensidades de relajación en corte y en deformación longitudinal son generalización de las informadas por Ino et al.(5) y D.Polder (6), respectivamente.

Finalmente se consideran algunas simetrías de defectos y algunas orientaciones como caso particular del formalismo general presentado.

$$2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = (S_{11} - S_{12}) (2 a_{11}^{+2} - a_{21}^{+2} - a_{31}^{+2}) \sigma_1'$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = (S_{11} - S_{12}) (a_{21}^{+2} - a_{31}^{+2}) \sigma_1'$$

$$\varepsilon_4 = S_{44} a_{31}^+ a_{21}^+ \sigma_1'$$

2. 3.

$$\varepsilon_5 = S_{44} a_{31}^+ a_{11}^+ \sigma_1'$$

$$\varepsilon_6 = S_{44} a_{21}^+ a_{11}^+ \sigma_1'$$

La generalización dependiente del tiempo de estas ecuaciones es

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \tau_{\sigma(S_{11} + 2S_{12})} (\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3) = (S_{11} + 2S_{12}) \sigma_1' +$$

$$\left[(S_{11} + 2S_{12}) - \delta_{(S_{11} + 2S_{12})} \right] \tau_{\sigma(S_{11} + 2S_{12})} \dot{\sigma}_1'$$

$$(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \tau_{\sigma(S_{11} - S_{12})} (2\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3) = (2a_{11}^{+2} - a_{21}^{+2} - a_{31}^{+2})$$

$$\left\{ (S_{11} - S_{12}) \sigma_1' + \left[(S_{11} - S_{12}) - \delta_{(S_{11} - S_{12})} \right] \tau_{\sigma(S_{11} - S_{12})} \dot{\sigma}_1' \right\}$$

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \tau_{\sigma(S_{11} - S_{12})} (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3) = (a_{21}^{+2} - a_{31}^{+2}) \left\{ (S_{11} - S_{12}) \sigma_1' +$$

2. 4.

$$\left[(S_{11} - S_{12}) - \delta_{(S_{11} - S_{12})} \right] \tau_{\sigma(S_{11} - S_{12})} \dot{\sigma}_1' \right\}$$

$$\varepsilon_4 + \tau_{\sigma S_{44}} \dot{\varepsilon}_4 = a_{31}^+ a_{21}^+ \left[S_{44} \sigma_1' + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \tau_{\sigma S_{44}} \dot{\sigma}_1' \right]$$

$$\varepsilon_5 + \tau_{\sigma S_{44}} \dot{\varepsilon}_5 = a_{31}^+ a_{11}^+ \left[S_{44} \sigma_1' + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \tau_{\sigma S_{44}} \dot{\sigma}_1' \right]$$

$$\varepsilon_6 + \tau_{\sigma S_{44}} \dot{\varepsilon}_6 = a_{21}^+ a_{11}^+ \left[S_{44} \sigma_1' + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \tau_{\sigma S_{44}} \dot{\sigma}_1' \right]$$

donde los subíndices denotan la constante simetrizada correspondiente a τ_{σ} y δ

Para una tensión sinusoidal y una respuesta análoga en deformación, esto es para

$$\sigma_1' = \sigma_{o1} e^{i\omega t}$$

$$\varepsilon_j = (\varepsilon_j^{(1)} - \varepsilon_j^{(2)}) e^{i\omega t} \quad j=1, \dots, 6 \quad 2. 5.$$

y teniendo en cuenta que $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ es una deformación de Tipo I, por lo que $\mathcal{C}_{\sigma_{[s_{11}+2s_{12}]}}=0$ y $\delta_{[s_{11}+2s_{12}]}=0$, después de un largo pero simple tratamiento analítico y algebraico, puede mostrarse que

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ (s_{11} - s_{12}) (3 a_{11}^{+2} - 1) + (s_{11} + 2s_{12}) + \left\{ (s_{11} - s_{12}) - \delta_{(s_{11} - s_{12})} \right\} (3 a_{11}^{+2} - 1) + (s_{11} + 2s_{12}) \right\} \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}} \delta_{(s_{11} - s_{12})} (3 a_{11}^{+2} - 1) \left. \right\} \cdot$$

$$\frac{\sigma_1'}{3} (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}}^2)$$

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ (s_{11} - s_{12}) (3 a_{21}^{+2} - 1) + (s_{11} + 2s_{12}) + \left\{ (s_{11} - s_{12}) - \delta_{(s_{11} - s_{12})} \right\} (3 a_{21}^{+2} - 1) + (s_{11} + 2s_{12}) \right\} \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}} \delta_{(s_{11} - s_{12})} (3 a_{21}^{+2} - 1) \left. \right\} \cdot$$

$$\frac{\sigma_1'}{3} (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}}^2)$$

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ (s_{11} - s_{12}) (3 a_{31}^{+2} - 1) + (s_{11} + 2s_{12}) + \left\{ (s_{11} - s_{12}) - \delta_{(s_{11} - s_{12})} \right\} (3 a_{31}^{+2} - 1) + (s_{11} + 2s_{12}) \right\} \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}} \delta_{(s_{11} - s_{12})} (3 a_{31}^{+2} - 1) \left. \right\} \cdot$$

$$\frac{\sigma_1'}{3} (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(s_{11} - s_{12})}}^2)$$

2. 6.

$$\mathcal{E}_4 = \frac{s_{44} + (s_{44} - \delta s_{44}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}} \delta s_{44}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2} a_{31}^+ a_{21}^+ \sigma_1'$$

$$\mathcal{E}_5 = \frac{s_{44} + (s_{44} - \delta s_{44}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}} \delta s_{44}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2} a_{31}^+ a_{11}^+ \sigma_1'$$

$$\mathcal{E}_6 = \frac{s_{44} + (s_{44} - \delta s_{44}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}} \delta s_{44}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2} a_{21}^+ a_{11}^+ \sigma_1'$$

Son de nuestro interés las deformaciones \mathcal{E}_j que pueden obtenerse a partir de

$$\mathcal{E}_{jk} = a_{j1} a_{km} \mathcal{E}_{1m}$$

2. 7.

Luego, combinando las ecuaciones 2.6 y 2.7 podemos obtener las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_1 = & \left| \left\{ (s_{11} + 2s_{12}) + 2(s_{11} - s_{12})(1 - 3\Gamma_{11}) + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma(s_{11}-s_{12})}^2 \left\{ (s_{11} + 2s_{12}) \right. \right. \right. \\ & + 2 \left. \left. \left[(s_{11} - s_{12}) - \delta_{(s_{11}-s_{12})} \right] (1 - 3\Gamma_{11}) \right\} - i 2\omega \mathcal{C}_{\sigma(s_{11}-s_{12})} \right. \\ & \left. \delta_{(s_{11}-s_{12})} (1 - 3\Gamma_{11}) \right\} / 3 (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma(s_{11}-s_{12})}^2) + \\ & \Gamma_{11} \left[s_{44} + (s_{44} - \delta_{s_{44}}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2 - i \omega \delta_{s_{44}} \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}} \right] / \\ & (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2) \Big| \cdot \sigma'_1 \end{aligned}$$

2. 8.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_2 = & \left| \left\{ (s_{11} + 2s_{12}) - (s_{11} - s_{12})(1 - 3\Gamma_{12}) + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma(s_{11}-s_{12})}^2 \left\{ (s_{11} + 2s_{12}) \right. \right. \right. \\ & - \left. \left. \left[(s_{11} - s_{12}) - \delta_{(s_{11}-s_{12})} \right] (1 - 3\Gamma_{12}) + i \omega \mathcal{C}_{\sigma(s_{11}-s_{12})} \delta_{(s_{11}-s_{12})} \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot (1 - 3\Gamma_{12}) \right\} / 3 (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma(s_{11}-s_{12})}^2) - \Gamma_{12} \left[s_{44} + (s_{44} - \delta_{s_{44}}) \right. \right. \\ & \left. \left. \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}} \delta_{s_{44}} \right] / 2 (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2) \right| \cdot \sigma'_1 \end{aligned}$$

donde Γ_{11} y Γ_{12} son los factores de orientación característicos de la estructura cúbica definidos por 1.175 y 1.178.

Las ecuaciones 2. 8. pueden escribirse también de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_1 = & \left[\frac{s'' + s'_u (1 - 3\Gamma_{11})}{3} + \Gamma_{11} s_{44} u \right] + \frac{\frac{2}{3} (1 - 3\Gamma_{11}) \delta_{s'}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s'}}^2} \\ & + \frac{\Gamma_{11} \delta_{s_{44}}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2} - i \left[\frac{\frac{2}{3} (1 - 3\Gamma_{11}) \delta_{s'} \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s'}}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s'}}^2} + \frac{\Gamma_{11} \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}} \delta_{s_{44}}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2} \right] \end{aligned}$$

2. 9.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_2 = & \frac{s'' - \frac{1}{2} s'_u (1 - 3\Gamma_{12})}{3} - \frac{\Gamma_{12} s_{44} u}{2} + \frac{\frac{1}{3} (1 - 3\Gamma_{12}) \delta_{s'}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s'}}^2} \\ & - \frac{\Gamma_{12} \delta_{s_{44}} / 2}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2} + i \left[\frac{(1 - 3\Gamma_{12}) \delta_{s'} \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s'}}}{3(1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s'}}^2)} - \frac{\Gamma_{12} \omega \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}} \delta_{s_{44}}}{2(1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{s_{44}}}^2)} \right] \end{aligned}$$

donde $S' = 2(S_{11} - S_{12})$ y $S'' = S_{11} + 2S_{12}$ y ν tiene el mismo significado que en la ecuación A.9., esto es se trata del coeficiente elástico no relajado. Estas ecuaciones son formalmente idénticas a A.28 y A.29, o sea que su comportamiento es el mismo que el del modelo de cinco parámetros descrito en el apéndice A y en [1].

Además si $\Gamma'_{11} = \Gamma'_{12} = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon'_1 &= \frac{S_{11} + \left[S_{11} - \frac{2}{3} \delta(S_{11} - S_{12}) \right] \omega^2 c_{\sigma(S_{11} - S_{12})}^2 - i\omega c_{\sigma(S_{11} - S_{12})} \frac{2}{3} \delta(S_{11} - S_{12})}{1 + \omega^2 c_{\sigma(S_{11} - S_{12})}^2} \sigma'_1 \\ \epsilon'_2 &= \frac{S_{12} + \left[S_{12} + \frac{1}{3} \delta(S_{11} - S_{12}) \right] \omega^2 c_{\sigma(S_{11} - S_{12})}^2 - i\omega c_{\sigma(S_{11} - S_{12})} \frac{1}{3} \delta(S_{11} - S_{12})}{1 + \omega^2 c_{\sigma(S_{11} - S_{12})}^2} \sigma'_1 \quad 2.10. \end{aligned}$$

y el módulo de Poisson dinámico puede escribirse como

$$\nu_{12} = \nu^{(1)} - i \nu^{(2)} = - \epsilon'_2 / \epsilon'_1 \quad 2.11.$$

donde

$$\nu^{(1)} = - \frac{S_{11} S_{12} + \left(S_{12} + \frac{\delta(S_{11} - S_{12})}{3} \right) \left(S_{11} - \frac{2}{3} \delta(S_{11} - S_{12}) \right) \omega^2 c_{\sigma(S_{11} - S_{12})}^2}{S_{11}^2 + \left(S_{11} - \frac{2}{3} \delta(S_{11} - S_{12}) \right)^2 \omega^2 c_{\sigma(S_{11} - S_{12})}^2} \quad 2.12.$$

y

$$\nu^{(2)} = \frac{\omega c_{\sigma(S_{11} - S_{12})} \delta(S_{11} - S_{12}) (S_{11} + 2S_{12})}{S_{11}^2 + \left(S_{11} - \frac{2}{3} \delta(S_{11} - S_{12}) \right)^2 \omega^2 c_{\sigma(S_{11} - S_{12})}^2} \quad 2.13.$$

Para estas expresiones es muy simple mostrar que

$$\text{si } \omega c_{\sigma(S_{11} - S_{12})} \rightarrow 0 \quad \nu^{(1)} \approx - \frac{S_{12}}{S_{11}} \quad ; \quad \nu^{(2)} = 0 \quad 2.14.$$

$$\omega c_{\sigma(S_{11} - S_{12})} \rightarrow \infty \quad \nu^{(1)} \approx - \frac{S_{12} + \delta(S_{11} - S_{12})/3}{S_{11} - \frac{2}{3} \delta(S_{11} - S_{12})} \quad ; \quad \nu^{(2)} = 0 \quad 2.15.$$

Las curvas de relajación descritas por las ecuaciones 2.12 y 2.13 son similares a aquellas que describen el módulo de Young y el módulo de corte en función de la frecuencia, para materiales isótropos. Por lo demás

$$\frac{\partial \nu^{(2)}}{\partial (\omega \tau_{\sigma})} = 0 \implies \omega \tau_{\sigma}^{(s_{11}-s_{12})} = \frac{s_{11}}{s_{11} - \frac{2}{3} \delta(s_{11}-s_{12})} \quad 2.16.$$

lo que muestra que $\nu^{(2)}$ tiene un máximo en $\omega \tau_{\sigma} \cong 1$ como en una curva de Debye. Además, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial^2 \nu^{(2)}}{\partial (\omega \tau_{\sigma})^2} = 0 \implies \omega \tau_{\sigma}^{(s_{11}-s_{12})} = \frac{s_{11}}{\sqrt{3} (s_{11} - \frac{2}{3} \delta(s_{11}-s_{12}))} \quad 2.17.$$

puede verse que la curva que describe el módulo de Poisson en función de la frecuencia tiene un punto de inflexión en $\omega \tau_{\sigma} = 1/\sqrt{3}$, valor éste levemente desplazado respecto de los valores clásicos en el módulo de Young y de corte. El comportamiento descrito puede observarse en la gráfica de la Figura nº 2.1.

Desde otro punto de vista, de acuerdo a la teoría elástica de medios anisótropos [7] [Apéndice B], para simetría cúbica tenemos

$$\nu'_{12} = -\frac{s'_{12}}{s'_{11}} = -\frac{s_{12} + (s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44}) \Gamma_{12}}{s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44}) \Gamma_{11}} \quad 2.18.$$

y usando el mismo procedimiento que en el caso de teoría de errores, para $\delta \nu'_{12} \ll \nu'_{12}$, puede mostrarse que

$$\frac{\delta \nu'_{12}}{\nu'_{12}} = -\frac{\frac{1}{3} (\delta s'' - \delta s') + (\delta s' - \delta s_{44}/2) \Gamma_{12}}{s_{12} + (s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) \Gamma_{12}} - \frac{\frac{1}{3} (\delta s'' + 2 \delta s') - (2 \delta s' - \delta s_{44}) \Gamma_{11}}{s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) \Gamma_{11}} \quad 2.19.$$

Si $\Gamma_{11} = \Gamma_{12} = 0$ y $\delta_{(s_{11}+2s_{12})} = 0$ la ecuación 2.19 se reduce a:

$$\delta \nu_{12} = -\frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3 s_{11}} \left(1 + 2 \frac{s_{12}}{s_{11}}\right) \quad 2.20.$$

Además, si $\delta_{(s_{11}-s_{12})} \ll (s_{11}-s_{12})$, la ecuación 2.15 nos lleva a:

$$\nu_{12}^{(1)} \approx - \frac{s_{12}}{s_{11}} - \frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3s_{11}} \left(1 + 2 \frac{s_{12}}{s_{11}} \right) \quad 2.21.$$

y

$$\delta \nu_{12} \approx - \frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3s_{11}} \left(1 + 2 \frac{s_{12}}{s_{11}} \right) \quad 2.22.$$

coincidente con la ecuación 2.20 y que constituye la intensidad de relajación del módulo de Poisson.

2. 2. SIMETRIA CUBICA. TORSION

Si una tensión σ'_{23} es aplicada en una celda cúbica, un procedimiento similar al utilizado en el párrafo precedente, nos permite obtener la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{23} = & \frac{2 \Gamma_{23} (s_{11}-s_{12}) + [(s_{11}-s_{12}) - \delta(s_{11}-s_{12})] \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2 - i \delta s_{11}-s_{12} \omega \rho_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}}{1 + \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2} \\ & + \frac{1-2 \Gamma_{23}}{2} \frac{s_{44} + (s_{44} - \delta s_{44}) \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{44}}}^2 - i \omega \rho_{\sigma_{s_{44}}} \delta s_{44}}{1 + \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{44}}}^2} \end{aligned} \quad 2.23$$

Para una probeta con simetría cilíndrica debe efectuarse una integración sobre ψ entre 0 y 2π . Luego, si $\sigma'_{23} = 2 \sigma'_4$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_4 = & \frac{4 \Gamma_{33} (s_{11}-s_{12}) + [(s_{11}-s_{12}) - \delta(s_{11}-s_{12})] \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2 - i \delta s_{11}-s_{12} \omega \rho_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}}{1 + \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2} \\ & + (1-2 \Gamma_{33}) \frac{s_{44} + (s_{44} - \delta s_{44}) \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{44}}}^2 - i \omega \rho_{\sigma_{s_{44}}} \delta s_{44}}{1 + \omega^2 \rho_{\sigma_{s_{44}}}^2} \end{aligned} \quad 2.24.$$

si $\omega \rho_{\sigma} \rightarrow 0$

$$\mathcal{E}'_4 = \left[4(s_{11}-s_{12}) \Gamma_{33} + (1-2 \Gamma_{33}) s_{44} \right] \sigma'_4 \quad 2.25.$$

y si $\omega \rho_{\sigma} \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}'_4 = \left\{ 4 [(s_{11}-s_{12}) - \delta(s_{11}-s_{12})] \Gamma_{33} + (1-2 \Gamma_{33}) (s_{44} - \delta s_{44}) \right\} \sigma'_4 \quad 2.26.$$

Además, como el módulo de corte está dado por

$$G^{-1} = \mathcal{E}'_4 / \sigma'_4 \quad 2.27.$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \delta G^{-1} &= G_{\omega^2 \rightarrow \infty}^{-1} - G_{\omega^2 \rightarrow 0}^{-1} = \\ &= 4 \nu_{33} \delta(\epsilon_{11} - \epsilon_{12}) + (1 - 2 \nu_{33}) \delta \epsilon_{44} \end{aligned} \quad 2.28.$$

que es la expresión comunmente encontrada en la literatura para la intensidad de relajación del módulo de corte.

2. 3. SIMETRIA HEXAGONAL. TENSION LONGITUDINAL

El tratamiento para cristales hexagonales bajo tensiones longitudinales sinusoidales puede efectuarse del mismo modo, partiendo de las relaciones elásticas de las Tablas I y II del Apéndice B. Las relaciones elásticas, en términos de las tensiones y deformaciones simetrizadas, son

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 + \epsilon_2) &= \sqrt{2} S_{13} \sigma_3 + (S_{11} + S_{12}) \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{2}} \\ \epsilon_3 &= S_{33} \sigma_3 + S_{13} (\sigma_1 + \sigma_2) \\ \epsilon_1 - \epsilon_2 &= (S_{11} - S_{12}) (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \epsilon_4 &= S_{44} \sigma_4 \\ \epsilon_5 &= S_{44} \sigma_5 \\ \epsilon_6 &= 2 (S_{11} - S_{12}) \sigma_6 \end{aligned} \quad 2.29.$$

Si la tensión es aplicada a lo largo del eje x_3' (Ver Figura n° 1. 5.) las relaciones anelásticas asociadas con las ecuaciones 2.29 están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 + \epsilon_2) &= \left[\sqrt{2} a_{33}^{+2} S_{13} + \frac{(a_{13}^{+2} + a_{23}^{+2})}{\sqrt{2}} (S_{11} + S_{12}) \right] \sigma_3' \\ \epsilon_3 &= \left[a_{33}^{+2} S_{33} + (a_{13}^{+2} + a_{23}^{+2}) S_{13} \right] \sigma_3' \\ (\epsilon_1 - \epsilon_2) + 2 \sigma_{(S_{11} - S_{12})} (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) &= (a_{13}^{+2} - a_{23}^{+2}) (S_{11} - S_{12}) \sigma_3' + [(S_{11} - S_{12}) - \dot{\epsilon}_{(S_{11} - S_{12})}] \\ &\quad 2 \sigma_{(S_{11} - S_{12})} (a_{13}^{+2} - a_{23}^{+2}) \dot{\sigma}_3' \end{aligned} \quad 2.30.$$

$$\mathcal{E}_4 + \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} \dot{\mathcal{E}}_4 = a_{23}^+ a_{33}^+ S_{44} \mathcal{T}_3' + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} a_{23}^+ a_{33}^+ \dot{\mathcal{T}}_3'$$

$$\mathcal{E}_5 + \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} \dot{\mathcal{E}}_5 = a_{13}^+ a_{33}^+ S_{44} \mathcal{T}_3' + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} a_{13}^+ a_{33}^+ \dot{\mathcal{T}}_3'$$

$$\frac{\mathcal{E}_6}{2} + \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}} \frac{\dot{\mathcal{E}}_6}{2} = a_{13}^+ a_{23}^+ (S_{11}-S_{12}) \mathcal{T}_3' + [(S_{11}-S_{12}) - \delta_{(S_{11}-S_{12})}] \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11}-S_{12}}} a_{13}^+ a_{23}^+ \dot{\mathcal{T}}_3'$$

No existen términos derivados en las dos primeras ecuaciones de 2.30 debido a que involucran solamente deformaciones del Tipo I. A partir de estas ecuaciones podemos obtener, después de un tratamiento arduo pero simple,

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \left[(a_{31}^2 S_{11} + a_{32}^2 S_{12} + a_{33}^2 S_{13}) + \left[(a_{31}^2 S_{11} + a_{32}^2 S_{12} + a_{33}^2 S_{13}) - \frac{(a_{31}^2 - a_{32}^2)}{2} \delta_{(S_{11}-S_{12})} \right] \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}^2 \right] / (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}^2) - \frac{i \omega (a_{31}^2 - a_{32}^2) \delta_{(S_{11}-S_{12})} \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}}{2 (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}^2)} \right\} \cdot \mathcal{T}_3'$$

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ \left[(a_{31}^2 S_{12} + a_{32}^2 S_{11} + a_{33}^2 S_{13}) + \left[(a_{31}^2 S_{12} + a_{32}^2 S_{11} + a_{33}^2 S_{13}) + \frac{(a_{31}^2 - a_{32}^2)}{2} \delta_{(S_{11}-S_{12})} \right] \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}^2 \right] / (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}^2) + \frac{i \omega (a_{31}^2 - a_{32}^2) \delta_{(S_{11}-S_{12})} \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}}{2 (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{(S_{11}-S_{12})}}^2)} \right\} \cdot \mathcal{T}_3'$$

2.31.

$$\mathcal{E}_3 = [a_{33}^2 S_{33} + (1 - a_{33}^2) S_{13}] \mathcal{T}_3'$$

$$\mathcal{E}_4 = \frac{S_{44} + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} \delta_{S_{44}}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}}^2} a_{33} a_{32} \mathcal{T}_3'$$

$$\mathcal{E}_5 = \frac{S_{44} + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} \delta_{S_{44}}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}}^2} a_{33} a_{31} \mathcal{T}_3'$$

$$\mathcal{E}_6 = \frac{(S_{11} - S_{12}) + [(S_{11} - S_{12}) - \delta_{S_{11} - S_{12}}] \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}} \delta_{(S_{11} - S_{12})}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}}^2} \\ 2 a_{31} a_{32} \sigma_3'$$

Partiendo de estas expresiones y utilizando 2.7. obtenemos

$$\mathcal{E}'_1 = \left\{ \left[S_I + (S_I - \delta_{S_I}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}} \delta_{S_I} \right] / (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}}^2) \right. \\ \left. - a_{13}^2 a_{33}^2 \frac{S_{44} + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} \delta_{S_{44}}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}}^2} \right\} \sigma_3'$$

$$\mathcal{E}'_3 = \left\{ \left[S_{III} + (S_{III} - \delta_{S_{III}}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}} \delta_{S_{III}} \right] / (1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{11} - S_{12}}}^2) \right. \\ \left. + a_{33}^2 (1 - a_{33}^2) \frac{S_{44} + (S_{44} - \delta_{S_{44}}) \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}}^2 - i \omega \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}} \delta_{S_{44}}}{1 + \omega^2 \mathcal{C}_{\sigma_{S_{44}}}^2} \right\} \sigma_3' \quad 2.32.$$

donde

$$S_I = a_{13}^2 a_{33}^2 S_{11} + (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})^2 S_{12} + \left[a_{13}^2 (1 - a_{33}^2) + a_{33}^2 (1 - a_{13}^2) \right] S_{13} \\ + a_{13}^2 a_{33}^2 S_{33}$$

$$\delta S_I = \left[a_{13}^2 a_{33}^2 - (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})^2 \right] \frac{\delta(S_{11} - S_{12})}{2}$$

$$S_{III} = (1 - a_{33}^2)^2 S_{11} + 2 a_{33}^2 (1 - a_{33}^2) S_{13} + a_{33}^4 S_{33}$$

$$\delta S_{III} = (1 - a_{33}^2)^2 \frac{\delta(S_{11} - S_{12})}{2}$$

Si escribimos $[a_{ij}]$ en función de los ángulos de Euler y tomamos $\psi = \theta = 0$ obtenemos

$$\mathcal{E}'_3 = S_{33} \sigma_3' \quad 2.33$$

y

$$\mathcal{E}'_1 = S_{13} \sigma_3' \quad 2.34.$$

De estas expresiones puede obtenerse

$$E^{-1} = \frac{\epsilon_3'}{\sigma_3'} = S_{33}' (\omega^2 \tau) \quad 2.35.$$

y

$$\nu_{13} = \nu_{13}^{(1)} - \nu_{13}^{(2)} = -\frac{\epsilon_1'}{\epsilon_3'} = -\frac{S_{13}}{S_{33}} \quad 2.36.$$

Esta última expresión resulta invariante ante cambios de frecuencia.

2. 4. SIMETRIA HEXAGONAL. TORSION

Supondremos que σ_{23}' es la tensión de corte impuesta sobre una probeta cilíndrica. Del mismo modo que en la sección 2.2 debemos efectuar una integración sobre ψ , de manera de obtener el módulo de corte promedio sobre la muestra. Además supondremos la presencia de defectos simples. Bajo estas condiciones

$$G^{-1} = \frac{\int_0^{2\pi} S_{44}' d\psi}{2\pi} = \left\{ S_{II}' + \left[S_{IV}' - (1 - a_{33}^2) \delta_{(s_{11} - s_{12})} \right] \omega^2 \tau_{(s_{11} - s_{12})}^2 - i\omega \tau_{(s_{11} - s_{12})} \frac{(1 - a_{33}^2)^2}{(1 + \omega^2 \tau_{(s_{11} - s_{12})}^2)} + \frac{(1 + a_{33}^2) - 2(1 - a_{33}^2)a_{33}^2}{2} \right. \\ \left. \cdot \left[S_{44} + (S_{44} \delta_{s_{44}}) \omega^2 \tau_{s_{44}}^2 - i\omega \tau_{s_{44}} \delta_{s_{44}} \right] / (1 + \omega^2 \tau_{s_{44}}^2) \right\} \quad 2.37.$$

donde

$$S_{II}' = (1 - a_{33}^2) \left[(s_{11} - s_{12}) + 2 a_{33}^2 (s_{11} - 2s_{13} + s_{33}) \right] \quad 2.38.$$

Estas ecuaciones resultan solamente función de θ y constituyen una generalización de las ecuaciones de la elasticidad y de la expresión que da la intensidad de relajación en una deformación de corte.

2. 5. DISIPACION ANELASTICA

La energía elástica de un medio anisótropo está dada por

$$W = 1/2 c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad 2.39.$$

de donde

$$dW = c_{ijkl} \epsilon_{ij} d\epsilon_{kl} \quad 2.40.$$

Cuando la deformación está en un máximo, la energía total entregada en un cuarto de ciclo es

$$W = \frac{\omega}{4} \int_0^T c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dt \quad 2.41.$$

y la energía disipada por ciclo está dada por

$$\Delta W = \int_0^T c_{ijkl} \epsilon_{ij} d\epsilon_{kl} \quad 2.42.$$

Bajo tensiones uniaxiales periódicas

$$\epsilon_{ij} = (S_{ij}^R - i S_{ij}^I) \sigma_{01} e^{i\omega t} \quad 2.43.$$

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \omega (S_{kl}^I + i S_{kl}^R) \sigma_{01} e^{i\omega t}$$

y en términos del tensor de tensiones obtenemos

$$W = \frac{\omega}{4} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_{kl} \epsilon_{kl} dt = \sigma_{kl} \frac{\pi}{4} \sigma_{01} S_{kl11}^R \quad 2.44.$$

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} dt = \sigma_{kl} \pi \sigma_{01} S_{kl11}^I \quad 2.45.$$

Cuando las expresiones 2.44 y 2.45 son desarrolladas cuidadosamente se obtiene

$$\Delta W = \sigma_0 \pi \left[\sigma_{11} S_{1111}^I + \sigma_{22} S_{2211}^I + \sigma_{33} S_{3311}^I + \right. \\ \left. + 2 \left(\sigma_{12} S_{1211}^I + \sigma_{13} S_{1311}^I + \sigma_{23} S_{2311}^I \right) \right] \quad 2.46.$$

y

$$W = \frac{\sigma_0 \pi}{4} \left[\sigma_{11} S_{1111}^R + \sigma_{22} S_{2211}^R + \sigma_{33} S_{3311}^R + \right. \\ \left. + 2 \left(\sigma_{12} S_{1211}^R + \sigma_{13} S_{1311}^R + \sigma_{23} S_{2311}^R \right) \right] \quad 2.47.$$

Cada término de estas ecuaciones describe la pérdida y almacenamiento de energía, respectivamente, para cada modo particular de deformación. En una notación de dos índices, que no indica carácter tensorial, ambas ecuaciones pueden ser escritas

$$\Delta W = \Delta W_{11} + \Delta W_{12} + \Delta W_{13} + \Delta W_{14} + \Delta W_{15} + \Delta W_{16} \quad 2.48$$

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{15} + W_{16} \quad 2.49$$

Los siguientes cocientes indican la fricción interna debida a cada modo particular de deformación

$$\begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \frac{\Delta W_{11}}{W_{11}} = \frac{S_{11}^I}{S_{11}^R} & \tan \varphi_2 &= \frac{\Delta W_{12}}{W_{12}} = \frac{S_{12}^I}{S_{12}^R} \\ \tan \varphi_3 &= \frac{\Delta W_{13}}{W_{13}} = \frac{S_{13}^I}{S_{13}^R} & \tan \varphi_4 &= \frac{\Delta W_{14}}{W_{14}} = \frac{S_{14}^I}{S_{14}^R} \\ \tan \varphi_5 &= \frac{\Delta W_{15}}{W_{15}} = \frac{S_{15}^I}{S_{15}^R} & \tan \varphi_6 &= \frac{\Delta W_{16}}{W_{16}} = \frac{S_{16}^I}{S_{16}^R} \end{aligned} \quad 2.50.$$

donde los φ_i son los ángulos de desfase entre la tensión longitudinal y la correspondiente deformación. Por ejemplo, φ_1 es el ángulo definido por la ecuación A.23 del problema unidimensional más restringido.

Los resultados de las ecuaciones 2.10 a 2.13 pueden ser utilizados como ejemplo de esta interpretación. Las medidas de las disipaciones de energía correspondientes a la deformación longitudinal y a la contracción lateral pueden calcularse como

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-\omega \varepsilon_{\sigma(s_{11}-s_{12})} \frac{2 \delta(s_{11}-s_{12})}{3}}{s_{11} + \left(s_{11} - \frac{2}{3} \delta(s_{11}-s_{12})\right) \omega^2 \varepsilon_{\sigma(s_{11}-s_{12})}^2} \quad 2.51.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega \varepsilon_{\sigma(s_{11}-s_{12})} \frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3}}{s_{12} + \left(s_{12} + \frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3}\right) \omega^2 \varepsilon_{\sigma(s_{11}-s_{12})}^2} \quad 2.52.$$

y las ecuaciones 2.10. pueden escribirse en forma alternativa de la siguiente forma:

$$\varepsilon_1 = |\varepsilon_{01}| e^{-i\varphi_1} e^{i\omega t} \quad 2.53.$$

$$\varepsilon_2 = |\varepsilon_{02}| e^{-i\varphi_2} e^{i\omega t} \quad 2.54.$$

El diagrama de módulos y fases correspondiente se muestra en la Figura n° 2.2. Puede, además, verse fácilmente que

$$\operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\nu^{(2)}}{\nu^{(1)}} = - \frac{\omega \varepsilon_{\sigma(s_{11}-s_{12})} \frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3} (s_{11} + 2s_{12})}{s_{11}s_{12} + \left(s_{11} - \frac{2}{3} \delta(s_{11}-s_{12})\right) \left(s_{12} + \frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3}\right) \omega^2 \varepsilon_{\sigma(s_{11}-s_{12})}^2} \quad 2.55.$$

es el ángulo de desfase entre la deformación longitudinal y la transversal.

Esta curva posee un máximo en

$$\omega \varepsilon_{\sigma} = \frac{s_{11} s_{12}}{\left(s_{11} - \frac{2}{3} \delta(s_{11}-s_{12})\right) \left(s_{12} + \frac{\delta(s_{11}-s_{12})}{3}\right)} \approx 1 \quad 2.56.$$

y, además, si

$$\omega \varepsilon_{\sigma} \longrightarrow 0 \quad \frac{\nu^{(2)}}{\nu^{(1)}} \longrightarrow 0$$

$$\omega \varepsilon_{\sigma} \longrightarrow \infty \quad \frac{\nu^{(2)}}{\nu^{(1)}} \longrightarrow 0 \quad 2.57.$$

Este comportamiento se muestra cualitativamente en la Figura n^o 2.1. y algunos valores característicos, indicados con los números 1 a 6 en la gráfica, se listan en la tabla 2.1.

2. 6. MATERIALES ISOTROPOS

Para el caso de materiales isótropos las constantes elásticas se reducen a

$$s_{11} - s_{12} = s_{44} = 1/2G \quad 2.58.$$

$$s_{11} + 2s_{12} = 1/3K \quad 2.59.$$

Además

$$\delta[s_{11} - s_{12}] = \delta[1/2G] = 1/2 \delta[1/G] = 3/2 \delta[1/E] \quad 2.60.$$

$$\delta[\nu/E] = 1/2 \delta[1/E] \quad 2.61.$$

Por lo tanto de las ecuaciones 2.12. y 2.13. puede obtenerse

$$\begin{aligned} \nu^{(1)} &= \frac{\frac{\nu_R}{E_R} + \frac{\nu_u}{E_u} \omega^2 \tau_\sigma^2}{\frac{1}{E_R} + \frac{1}{E_u} \omega^2 \tau_\sigma^2} = \frac{\nu_R + \nu_u \frac{E_R^2}{E_u} \omega^2 \tau_\sigma^2}{1 + \frac{E_R^2}{E_u} \omega^2 \tau_\sigma^2} = \\ &= \frac{\nu_R + \nu_u \omega^2 \tau_\epsilon^2}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon^2} \quad 2.62. \end{aligned}$$

$$\nu^{(2)} = \frac{(1 - 2\nu_R) \cdot E_u \delta\left(\frac{\nu}{E}\right) \omega \tau_\epsilon}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon^2} \quad 2.63.$$

donde R y u tienen el significado de módulo relajado y no relajado, como en los casos anteriores, y el tiempo de relajación a deformación constante está definido por [1]

$$\tau_\epsilon = \frac{E_R}{E_u} \tau_\sigma \cong \tau_\sigma \quad 2.64.$$

A partir de estas expresiones si

$$\begin{aligned} \omega \varepsilon \longrightarrow 0 & \quad \nu^{(1)} = \nu_R \\ \omega \varepsilon \longrightarrow \infty & \quad \nu^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad 2.65.$$

$$\begin{aligned} \omega \varepsilon \longrightarrow \infty & \quad \nu^{(1)} = \nu_u \\ & \quad \nu^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad 2.66.$$

y

$$\frac{\partial \nu^{(2)}}{\partial (\omega \varepsilon)} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega \varepsilon = 1 \quad 2.67.$$

$$\frac{\partial^2 \nu^{(1)}}{\partial (\omega \varepsilon)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega \varepsilon = 1/\sqrt{3} \quad 2.68.$$

En consecuencia, al igual que en la simetría cúbica, $\nu^{(1)}$ tiene un punto de inflexión levemente desplazado respecto del correspondiente al módulo de Young y $\nu^{(2)}$ tiene un máximo en $\omega \varepsilon = 1$. Las curvas son, además, similares a las curvas clásicas obtenidas para el módulo de Young o el módulo de corte de materiales isótropos.

2. 7. CONCLUSIONES

El aspecto más interesante de la teoría desarrollada es el que concierne a la interpretación energética dada en el párrafo 2.5.. Es usual encontrar en la literatura valores experimentales de fricción interna en vibraciones longitudinales no acompañados por la correspondiente relajación del módulo de Young. Esto es atribuible, sin duda, a las pérdidas de energía ocasionadas por la relajación de otros modos de deformación distintos del longitudinal. La medición cuidadosa del módulo de Poisson en función de la frecuencia y/o temperatura puede aportar mayor información sobre el fenómeno microscópico que produce la relajación.

Además, el comportamiento anelástico del módulo de Poisson podría ser una de las causas de la alta dispersión de los valores experimentales del mismo. Aún cuando el módulo de Young o de corte no presenten una relajación apreciable el módulo de Poisson podría ser afectado por la temperatura o la frecuencia debido a efectos anelásticos. Para obtener un mejor conocimiento del material en estudio se procura obtener valores del módulo y la disi-

pación de todas las constantes dinámicas del mismo (8).

Por último, un conjunto de ecuaciones que permiten calcular la relajación y la fricción interna como función de la dirección son mostradas como resultado adicional. Funciones distribución adecuadas podrían ser usadas para el cálculo de los promedios en policristales.

REFERENCIAS

1. A.S. Nowick and B.S. Berry, Anelastic Relaxation in Crystalline Solids. Academic Press [1972] New York.
2. Lazan, B.J. , Damping of Materials and Members in Structural Mechanics [1968] Pergamon Press.
3. Alfrey, T. and Gurnee, E.F., Rheology. Theory and Applications. F.R.Eirich Eds.. Vol. 1. Ch. 11. J.Wiley and Sons, Inc.[1957].
4. Wert, C., Physical Acoustics, W.P.Mason Eds.,Academic Press, New York. Vol. 3A, Ch.2.[1966].
5. Ino, H., Takagi, S. and Sugeno, T., Acta. Met. 15 [1967] 29.
6. Polder, D., Philips Res. Reps. 1 [1945] 5.
7. Hearmon, R.F.S., Reviews of Modern Physics, 18 [1946] 409.
8. Yee, A.F. and Takemori, M.T., J. of Polymer Sci., Polymer Physics Ed. , Vol. 20,[1982] 205-224. J. Wiley and Sons,Inc.

Tabla 2.1.

Valores característicos del comportamiento del módulo de Poisson. Puntos indicados con los números 1 a 6 en la Figura 2.1.

1	$s_{11} / \sqrt{3} (s_{11} - 2 \delta(s_{11} - s_{12}) / 3)$
2	$s_{11} / (s_{11} - 2 \delta(s_{11} - s_{12}) / 3)$
3	$\left\{ s_{11} s_{12} / \left[\left(s_{11} - \frac{2 \delta(s_{11} - s_{12})}{3} \right) \left(s_{12} + \frac{\delta(s_{11} - s_{12})}{3} \right) \right] \right\}^{1/2}$
4	$- \left[s_{12} + \delta(s_{11} - s_{12}) / 3 \right] / \left[s_{11} - 2 \delta(s_{11} - s_{12}) / 3 \right]$
5	$\left\{ s_{11} s_{12} / \left[\left(s_{11} - \frac{2 \delta(s_{11} - s_{12})}{3} \right) \left(s_{12} + \frac{\delta(s_{11} - s_{12})}{3} \right) \right] \right\}^{1/2} \cdot \frac{s_{11} + 2 s_{12}}{2 (s_{11} + s_{12})}$
6	$\delta(s_{11} - s_{12}) \cdot (s_{11} + 2 s_{12}) / \left[6 s_{11} \left(s_{11} - \frac{2 \delta(s_{11} - s_{12})}{3} \right) \right]$

LEYENDAS DE FIGURAS

2. 1. Módulo de Poisson complejo y $\text{tg} [\phi_2 - \phi_1]$ vs. $\ln \omega E_0$. Algunos valores característicos, indicados con los números de 1 a 6, se dan en la Tabla 2.1.
2. 2. Diagrama de fases para la deformación longitudinal, tensión y deformación transversal en la simetría cúbica. x_1' coincidente con x_1 .

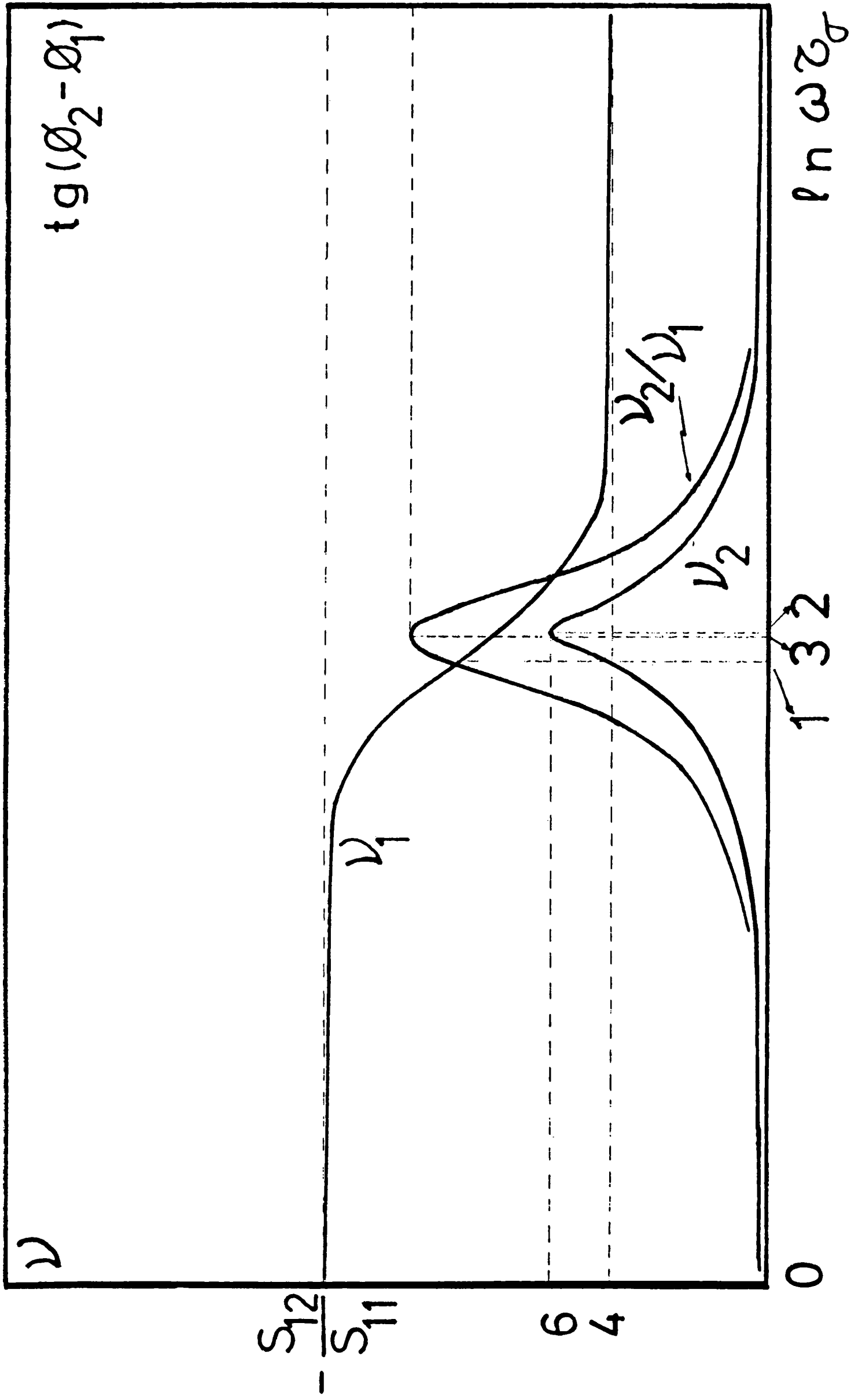


Fig. n° 2. 1.

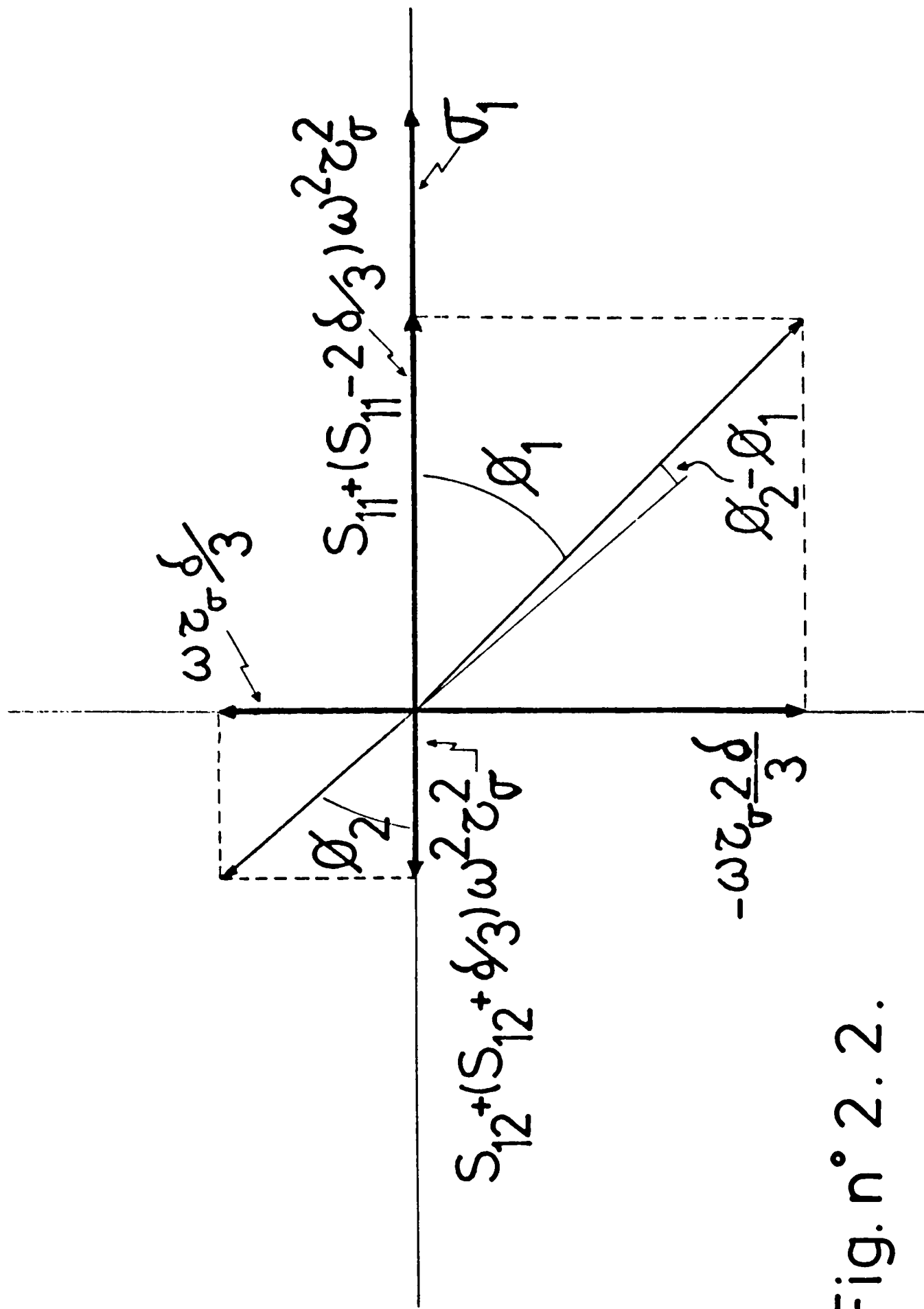


Fig. n° 2. 2.

CAPITULO III REVISION DE METODOS DE MEDICION.
PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL UTILIZADO.

En el punto 3.1. se efectuará una revisión general de los métodos experimentales, que pueden encontrarse en la literatura, usualmente utilizados para la medición del módulo de Young, la razón de Poisson y el módulo de corte. Se hará especial mención de los procedimientos aptos para la medición del módulo de Poisson pero debe entenderse que la mayor parte de ellos no son más que una disposición experimental modificada de los utilizados para la medición de los otros dos. Tan es así que la gran mayoría de los perfeccionamientos ideados en época reciente pueden ser inmediatamente trasladados, prácticamente sin modificación, a la medición del módulo de Poisson. Tales modificaciones se refieren, principalmente, a los dispositivos de captación y procesamiento de los datos y rara vez implican un cambio en los fenómenos físicos involucrados. Si debe hacerse esta salvedad es debido a que no podrá encontrarse información reciente muy abundante sobre mediciones de este módulo. De hecho el último trabajo de revisión sobre el tema, repetidamente citado, data del año 1961 [1]. Posteriormente ha primado la opinión, discutida a lo largo de toda esta tesis, de que se trata de una variable de difícil evaluación experimental. En la mayor parte de los casos se informa sólo como dato accesorio se soslayan explicaciones sobre las anomalías que puedan observarse.

En el punto 3.2. se efectuará una descripción más detallada de variantes de uno de los métodos a los fines de fundamentar la elección del dispositivo utilizado.

En el punto 3.3. se describe el equipamiento experimental y se hace una evaluación de las características electromecánicas del mismo así como de las prestaciones esperadas.

3. 1. METODOS EXPERIMENTALES

En la determinación experimental de las constantes elásticas debe hacerse una primera distinción entre métodos directos e indirectos y dentro de cada uno de ellos entre métodos estáticos y dinámicos. En el caso del módulo de Poisson se habla de métodos directos no sólo cuando éste es medido directamente a partir de la deformación longitudinal y la contracción

transversal sino cuando se mide cualquier otro efecto que dependa directamente del valor de ν . Los métodos indirectos son aquellos en los cuales alguna de las constantes, particularmente ν , es obtenida a partir de la medición de las restantes.

En los métodos estáticos las constantes son determinadas a partir de las deformaciones producidas por fuerzas independientes del tiempo. Pequeñas velocidades de deformación permiten intercambios de calor de deformación con el medio ambiente, por lo que las constantes obtenidas son las denominadas isotérmicas. Por los métodos dinámicos, los cuales implican estudios bajo vibración, se obtienen las denominadas constantes adiabáticas.

Si ocurren movimientos dentro de un cuerpo deformado la temperatura no será, en general, constante ni uniforme sino que variará tanto en el tiempo como en el espacio. Esto complica considerablemente la solución exacta de las ecuaciones en el caso de movimientos arbitrarios. Usualmente el problema se puede simplificar considerando que la transmisión de calor dentro del cuerpo [por simple conducción térmica] ocurre muy lentamente y es despreciable para intervalos de tiempo del orden del período de los movimientos oscilatorios. Puede considerarse entonces cualquier parte del cuerpo como térmicamente aislada, o sea que el movimiento puede considerarse un proceso adiabático. En las deformaciones adiabáticas σ_{ij} se obtiene a partir de ϵ_{ij} mediante las fórmulas usuales con la única diferencia de que hay que reemplazar los valores de las constantes elásticas isotérmicas por sus correspondientes valores adiabáticos. Para el caso del módulo de Young y del módulo de Poisson ambos tipos de módulo están relacionados por (2)

$$E_{isot} = \frac{E_{ad}}{1 + \frac{E_{ad}}{9 \nu^2 c_p}} \quad 3.1.$$

$$\nu_{isot} = \frac{\nu_{ad} - \frac{E_{ad}}{9 \nu^2 c_p}}{1 + \frac{E_{ad}}{9 \nu^2 c_p}} \quad 3.2.$$

donde c_p es la capacidad calorífica por unidad de volumen a pre-

ción constante y α es el coeficiente de dilatación volumétrica.

En la práctica el término dependiente de T es pequeño y basta con aproximar con

$$E_{\text{isot}} \cong E_{\text{ad}} - E_{\text{ad}}^2 \frac{T \alpha^2}{g c_p} \quad 3.3.$$

$$\nu_{\text{isot}} \cong \nu_{\text{ad}} - (1 + \nu_{\text{ad}}) E_{\text{ad}} \frac{T \alpha^2}{g c_p} \quad 3.4.$$

Ecuaciones similares pueden ser obtenidas para las constantes elásticas de materiales anisótropos con el cuidado de hacer uso de los coeficientes de dilatación anisotrópicos.

3. 1. 1. METODOS DIRECTOS

3. 1. 1. 1. METODOS ESTATICOS

3. 1. 1. 1. 1. DEFORMACION LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL

En este método varillas o alambres de una longitud del orden de los 100 mm son sometidos a tensiones o, menos frecuentemente, compresiones longitudinales. La medición de la deformación longitudinal permite el cálculo inmediato del módulo de Young. Mientras esta medida puede hacerse con suficiente exactitud la medición de la contracción lateral no es simple. Las dificultades provienen no sólo del orden de magnitud menor de esta deformación sino de la inhomogeneidad de la misma. Los métodos de medición apelan a mecanismos que amplifican esta deformación hasta hacerla perceptible como en el caso del uso de espejos que amplifican angularmente la misma. (3)

Otros métodos utilizan el fenómeno de interferencia mediante el cual se mide el cambio de la distancia de la superficie lateral a placas fijas (4).

El perfeccionamiento de los equipos de extensometría comerciales ha hecho usual, recientemente, la medición directa de la deformación transversal. La precisión obtenida es extremadamente alta, del orden de 1 A en la deformación transversal (5).

Otros métodos incorporan el uso de "strain gages" a resistencia [6] o el más clásico método de medir los desplazamientos laterales de marcas con un catetómetro [7].

3. 1. 1. 1. 2. FLEXION EN PLACAS Y BARRAS

Este método ha sido usado frecuentemente en el pasado para medir el módulo de Poisson en vidrios. Si un material es flexionado, en un lado de su plano neutro la contracción transversal ocurre como resultado de una elongación en tanto que del otro lado la expansión transversal es el resultado de la compresión longitudinal. Estas distorsiones perpendiculares a la dirección de la tensión y al eje longitudinal de la probeta producen una segunda curvatura perpendicular a aquella en el plano de flexión. Como resultado la superficie de la placa toma la forma de una ensilladura o, en el caso de barras de sección rectangular, las caras laterales se curvan hacia adentro. Si r_1 es el radio de curvatura en el plano de flexión y r_2 el del plano perpendicular puede obtenerse

$$\nu = \frac{r_1}{r_2} \quad 3.5.$$

Las dificultades que se presentan son las mismas que para el método anterior, esto es, la medición de longitudes con una precisión muy alta.

3. 1. 1. 2. METODOS DINAMICOS

En los métodos dinámicos se mide la velocidad o la frecuencia de resonancia de distintos tipos de ondas. En el caso de materiales isótropos las ecuaciones de propagación contienen el módulo de Poisson como una conexión de segundo orden. En el caso de materiales anisótropos se miden las constantes c_{ijkl} a partir de las cuales se puede calcular el módulo de Poisson en función de la dirección. Como hemos visto en los capítulos anteriores, el uso de las constantes elásticas para calcular E y G y un posterior cálculo de ν mediante la ecuación que conecta estas constantes en materiales isótropos no es correcto. A pesar de ello sigue siendo común entre diversos investigadores hacerlo así. El cálculo de ν para materiales anisó-

tropos es de todas maneras indirecto puesto que implica el cálculo previo de las c_{ijkl} .

3. 1. 1. 2. 1. VIBRACIONES TRANSVERSALES EN PLACAS

A partir de su teoría de vibraciones transversales libres de una placa cuadrada, Ritz [8] mostró la posibilidad de determinar el módulo de Poisson a partir de este tipo de vibraciones. Similar posibilidad puede mostrarse para el caso de placas circulares. Con el objeto de evaluar experimentalmente esta posibilidad se han llevado a cabo diversos trabajos [9]. Infortunadamente las ecuaciones de evaluación contienen una serie que converge muy lentamente y que hace poco práctico este método.

3. 1. 1. 2. 2. VIBRACIONES LONGITUDINALES DE BARRAS

Las vibraciones longitudinales en barras o varillas están acompañadas por vibraciones transversales acopladas que producen una modificación en la velocidad o frecuencia de resonancia. En las ecuaciones de evaluación aparece entonces una serie de términos que contienen el módulo de Poisson y que permiten su evaluación. La medición de los diferentes armónicos de una barra es el método más común. Esto requiere una gran precisión en la determinación de las frecuencias naturales, esto es del orden 10^{-3} si se quiere una precisión en ν del orden del 1%. Como este será finalmente el método elegido en este trabajo mayor detalle puede encontrarse en el Apéndice C y en la discusión del resto del capítulo y los capítulos subsiguientes.

3. 1. 1. 2. 3. VIBRACIONES DE BARRAS EN FLEXION

La ecuación de vibraciones en el modo de flexión de barras cilíndricas también tiene un factor de corrección dependiente de ν . A partir de las frecuencias naturales de vibración en flexión puede también determinarse este módulo [10].

3. 1. 1. 2. 4. VELOCIDAD DE PROPAGACION DE ONDAS DE ALTA FRECUENCIA

Mediante pulsos de ondas impuestos en una proba-

ta, con la geometría adecuada para poder considerarlos como propagándose en un medio infinito, podemos medir las principales constantes elásticas de un medio isótropo calculándolas a partir de las velocidades de propagación(11). Las frecuencias de trabajo se hallan entre 100 kHz y 1 GHz y las ecuaciones que relacionan las velocidades con las constantes elásticas son

$$C_p = \rho c_l^2 \quad 3.6.$$

$$G = \rho c_t^2 \quad 3.7.$$

$$K = \rho \left[c_l^2 - \frac{4}{3} c_t^2 \right] \quad 3.8.$$

$$E = 3 G \rho / (C_p - G) \quad 3.9.$$

$$\nu = 1/2 (C_p - 2 G) / (C_p - G) \quad 3.10.$$

donde C_p es el llamado módulo longitudinal en ausencia de contracciones laterales, c_p es la velocidad de propagación longitudinal y c_t es la velocidad de propagación de ondas transversales. Debido al acentuado desarrollo en equipamiento electrónico este método ha tomado creciente importancia. Además de su precisión permite mediciones en probetas de reducido tamaño. La medición de ν puede considerarse directa dado que en la ecuación 3.10. el módulo de corte G puede substituirse por la velocidad transversal y el módulo longitudinal C_p por la velocidad longitudinal. (12-16).

3. 1. 2. METODOS INDIRECTOS

Como puede encontrarse en la literatura y surge de las ecuaciones 3.6.-3.10. el módulo de Poisson está relacionado con el resto de las constantes elásticas mediante ecuaciones sencillas. ν puede obtenerse entonces a partir de dos cualesquiera de ellas. Sin embargo este método debe utilizarse sólo bajo los siguientes recaudos: a) Las dos constantes elásticas deben ser medidas en probetas de la misma composición e historia termomecánica. La mejor solución es, por supuesto, el uso de la misma pieza de material.

b) Por el hecho de que las mediciones está-

ticas llevan a las constantes isotérmicas y los métodos dinámicos a las constantes adiabáticas, el método de medición debe ser el mismo para ambas constantes elásticas.

c) El material a estudiar debe ser isótropo, de modo de permitir la aplicación de las ecuaciones apropiadas.

En el caso de materiales anisótropos, la determinación de los c_{ijkl} para calcular a posteriori el módulo ν debe considerarse también un método indirecto. En este caso la condición c) de isotropía debe ser cambiada por la condición de homogeneidad de todas las probetas utilizadas.

Describiremos aquí solamente aquellos métodos que permiten el uso de la misma probeta para la determinación de las dos constantes elásticas de los materiales isótropos y el método de medición de las c_{ijkl} de los materiales anisótropos.

3. 1. 2. 1. METODOS ESTATICOS

3. 1. 2. 1. 1. CAMBIO DE VOLUMEN Y LONGITUD

Este método está basado en la relación existente entre el módulo de Poisson y los módulos de Young y volumétrico. La probeta es traccionada en un medio líquido de modo de observar los cambios de volumen como cambios en el nivel del mismo. Este método no es muy preciso obteniéndose valores con un error del orden del 5 % [17].

Un modo alternativo de llevar a cabo estas mediciones es la medida de la variación de la resistencia eléctrica de la probeta. Para ello se debe suponer que las propiedades eléctricas no son función del estado de tensiones sino sólo de la geometría modificada. Esto en general no es cierto y se obtienen valores que difieren hasta en un 20 % de los obtenidos por otros métodos [18].

3. 1. 2. 1. 2. DETERMINACION COMBINADA DEL MODULO DE YOUNG Y DE CORTE A PARTIR DE EXPERIENCIAS DE FLEXION Y TORSION

Sea una barra fija en un extremo que soporta una carga en el otro. En este último extremo se fija un espejo que registra, simultáneamente, la flexión y la torsión de la barra por medio de un haz de luz. Este método se ha utilizado generalmen-

te para la medición de la variación con la temperatura del módulo ν [19].

3.1.2.1.3. RESORTES HELICOIDALES

En este caso se presentan deformaciones simultáneas por flexión y torsión. Usando la teoría de deformaciones de resortes de Thomson y Tait, Ayrton Ferry [20] midieron la razón entre el módulo de Young y de corte a partir del movimiento de un marcador en un resorte.

3.1.2.2. METODOS DINAMICOS

3.1.2.2.1. ULTRASONIDO

En este método se miden las longitudes de onda longitudinal y transversal de un tren de ondas. Si λ_l y λ_t son esas longitudes el módulo de Poisson puede obtenerse como

$$\nu = \frac{x^2 - 2}{2(x^2 - 1)}, \quad 3.11.$$

donde $x = \lambda_l / \lambda_t$.

Esta técnica requiere una probeta de material transparente pero con una modificación adecuada puede ser aplicada a metales. En este caso se mide la velocidad de propagación del tren de ondas tal como se ha descrito en el punto 3.1.1.2.4.. Esta técnica aplicada a monocristales de cualquier naturaleza permite la medición de las constantes c_{ijkl} a partir de las cuales pueden calcularse todas las constantes elásticas de mono- y policristales incluido ν . La determinación de las c_{ijkl} exige mediciones en tantas más direcciones cuanto menor es la simetría del cristal. Las ecuaciones necesarias pueden encontrarse en la literatura, así como descripciones detalladas de los dispositivos experimentales [21]. Un detalle de las ecuaciones intervinientes puede derivarse, para materiales hexagonales, del tratamiento del apéndice D.

3.1.2.2.2. FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACION

El módulo de Young y el módulo de corte pueden ser determinados mediante las frecuencias naturales de vibración longitudinales $[f_l]$ y de torsión $[f_t]$ de barras y alambres. Las técnicas experimentales son variadas (21) pero todas apelan a la ecuación

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{f_l}{f_t} \right)^2 - 1 \right], \quad 3.12.$$

que resulta, en primera aproximación, independiente de las dimensiones de la probeta.

3. 1. 2. 2. 3. VIBRACION DE RESORTES

Correspondiendo al método estático en resortes puede medirse el módulo de Poisson mediante la determinación de las frecuencias longitudinales y torsionales. Este método es de interés industrial dado que las variables que entran en el cálculo son generalmente de difícil determinación. Además los materiales de los que se construyen los resortes, por el trabajo mecánico y tratamiento térmico, difícilmente resulten isótropos.

3. 1. 2. 2. 4. FRECUENCIAS DE RESONANCIA EN FLEXION

El módulo de Young puede ser determinado no sólo a partir de las frecuencias longitudinales sino también de las de flexión. Un conjunto de sistemas utilizan péndulos de flexión acoplados. La dificultad mayor surge de la determinación de la longitud efectiva de vibración de la pieza.

En flexión también pueden excitarse vibraciones de alta frecuencia. En las ecuaciones intermedias las dimensiones de la probeta juega un papel fundamental y generalmente los errores cometidos no pueden ser despreciados.

3. 1. 3. COMPARACION DE LOS DIVERSOS METODOS

En contraste con los métodos dinámicos, los métodos estáticos tienen la desventaja de tener que ser extrapolados a tensiones nulas. No siempre puede garantizarse que la deformación impuesta no se encuentra en el comienzo del rango plástico. Por otro lado constituye la única forma de medición del módulo

de Poisson a partir de las deformaciones transversales y longitudinales. Además es indiscutible en la medición de este módulo en el rango de deformación plástica.

Los métodos dinámicos tienen la ventaja de eliminar laboriosos ajustes de instrumentos por lo que las probetas pueden ser ensayadas en rápida sucesión. Además pueden efectuarse mediciones a alta temperatura sin mayor complicación. Por otro lado, en algunos modos de vibración, particularmente en vibraciones longitudinales, la orientación superficial de los granos de un policristal no influye mayormente. Sólo un promedio sobre todo el volumen es detectado.

Una desventaja seria de los métodos dinámicos es el hecho de que se encuentran basados en efectos de segundo orden y como además en las ecuaciones el módulo de Poisson aparece, generalmente, a la segunda potencia o superiores, esto introduce considerables fuentes de error.

Las mayores dificultades en los métodos indirectos provienen de la necesidad de satisfacer las condiciones de isotropía u homogeneidad de las probetas. Aún hoy, para materiales isótropos, pueden hallarse valores de $\nu > .5$ lo que es una muestra de la anisotropía del material pero no de una efectiva medición de ν .

En cuanto a los métodos indirectos de medición, puede demostrarse que el cálculo que adolece de menores errores es el que surge de la medición del módulo de Young y del módulo volumétrico. Las dificultades inherentes a este método, sin embargo, hacen aconsejable el uso de otra metodología (1).

3. 2. ELECCION DEL METODO EXPERIMENTAL

La elección del método experimental estuvo condicionada principalmente por los siguientes factores:

- a) Las mediciones debían realizarse dentro del límite de deformaciones elásticas (Pequeñas amplitudes de deformación).
- b) El sistema debía poder adaptarse fácilmente a mediciones con variación de temperatura, vacío o atmósfera controlada
- c) Las probetas de uno de los materiales estudiados debían ser cortadas de tubos, conservando su simetría cilíndrica.
- d) El método debía ser, en lo posible, no destructivo, de modo de permitir mediciones sucesivas.

Con estas consideraciones se hace indiscutible la elección de un método dinámico. Dentro de ellos el método de propagación de ondas ultrasónicas presentaba dos inconvenientes. Uno de ellos está relacionado con la geometría de las probetas que no permiten la propagación de ondas que puedan considerarse propagándose en un medio infinito. La otra razón era de orden técnico y económico. La electrónica necesaria para el montaje de un método de resonancia en barras estaba accesible con facilidad. Este fue el dispositivo que finalmente se adoptó, quedando reducido el problema a la determinación del método de excitación y detección a utilizar. Los posibles métodos se detallan en los párrafos siguientes.

3. 2. 1. EXCITACION Y DETECCION POR ACOPPLAMIENTO MECANICO

Este sistema utiliza dos finos alambres que sirven de soporte a la muestra al mismo tiempo que como excitadores y detectores de la señal. El excitador vibra a consecuencia de una señal impuesta por un dispositivo electromagnético en tanto que la vibración mecánica del detector es observada a través de la corriente inducida en una bobina sobre la que actúa un campo magnético permanente. En general, el método de excitación y detección de la vibración mecánica del alambre puede cambiarse por alguno de los que se describen en los puntos siguientes.

Este sistema es fácilmente adaptable a mediciones con variación de temperatura debido a que las bobinas pueden ubicarse lejos de la zona del horno. Si simultáneamente se desea hacer vacío, la disposición experimental se hace más compleja. El método es frecuentemente usado en equipos de flexión en barras pero no en vibraciones longitudinales. [22]. Una adaptación de este método para excitación pero con captación óptica ha sido desarrollada por Ritchie et al. [23,24]. Los detalles del equipo original pueden observarse en la Figura nº 3.1.

3. 2. 2. EXCITACION Y DETECCION POR CORRIENTES INDUCIDAS

En estos dispositivos la excitación y detección de las vibraciones es efectuada por medio de la acción de corrientes inducidas en especímenes metálicos. La excitación es obtenida por la aplicación simultánea de un campo magnético alterno y o-

tro estático en las vecindades del punto de máximo desplazamiento (antinodo). El campo magnético alterno, el cual debe ser sintonizado a la frecuencia de resonancia de la muestra, induce corrientes locales que interactúan con el campo de polarización generando una fuerza alterna que produce la vibración. Un proceso similar tiene lugar en el dispositivo detector. Este sistema es fácilmente adaptado a cualquier modo de vibración y a operaciones en vacío pero la presencia de bobinas y campos magnéticos permanentes lo desaconseja para altas temperaturas. Detalles alternativos de la disposición experimental pueden observarse en la Figura n^o 3.2. [25].

3. 2. 3. EXCITACION Y DETECCION ELECTROMAGNETICA

Para materiales de muy alta fricción interna se necesita producir una alta transferencia de energía con el objeto de obtener una razonable amplitud de vibración. Este sistema utiliza campos magnéticos constantes y alternos con el objeto de producir polarización y fuerzas alternas sobre el espécimen ferromagnético o sobre armaduras auxiliares pegadas a las probetas. Haciendo uso de distintos arreglos experimentales puede lograrse excitación longitudinal, torsional o de flexión. Nuevamente la presencia de bobinas e imanes permanentes dificulta la utilización del sistema en experiencias que exijan variación de temperatura en un rango muy amplio. Algunos arreglos experimentales pueden observarse en la Figura n^o 3.3. [26].

3. 2. 4. EXCITACION Y DETECCION POR CRISTAL PIEZOELECTRICO

En este dispositivo un cristal piezoeléctrico de dimensiones adecuadas es pegado a la muestra de modo de producir una vibración mecánica al ser excitado eléctricamente. La longitud del cristal es adaptada de manera de que tenga la misma frecuencia de resonancia de la muestra. Como detector puede utilizarse el mismo (Figura n^o 3.4.) u otro cristal piezoeléctrico [Figura n^o 3.5.]. Si se hace uso de la segunda alternativa, el cristal detector va adherido conjuntamente con el cristal de excitación, aún cuando existen trabajos donde los cristales son adheridos en extremos opuestos.

La adaptación del método a mediciones a alta temperatura

se efectúa mediante el fijado de una barra cerámica entre la probeta y el cristal emisor-detector. La principal dificultad de este método reside en la obtención de cristales de dimensiones y forma adecuadas a los tubos utilizados como probetas [27,28,29]. Además resulta dificultoso el ajuste de las dimensiones de las probetas y cristales para una resonancia conjunta.

3. 2. 5. EXCITACION Y DETECCION ELECTROSTATICA

Las principales ventajas del método electrostático son su posibilidad de ser usado a bajas y altas temperaturas, ancho rango de frecuencias, bajo nivel de ruidos y alta sensibilidad. La principal desventaja es la dificultad para excitar materiales de alta fricción interna.

El sistema de micrófono electrostático utiliza el acoplamiento capacitivo entre la muestra y sendos electrodos fijos enfrentados a las caras para el caso de excitación longitudinal. Diferentes arreglos adaptan el método a la excitación y captación de vibraciones de flexión y torsión.

El método de excitación electrostático más potente y de uso más común es el que emplea un dispositivo excitador polarizado con una fuente de corriente continua de potencial V_0 aplicado entre el espécimen y el electrodo excitador. Este potencial es modulado con una señal $v = v' \sin \omega t$ proveniente de un generador de frecuencias [$v' < V_0$]. La probeta experimenta una fuerza variable de frecuencia ω y magnitud proporcional a $v' \times V_0$. Un esquema de esta disposición se muestra en la Figura nº 3.6. [30,31].

Otro método de excitación, no polarizado, provoca en el espécimen fuerzas de atracción máxima dos veces por ciclo de la señal de entrada. Luego, la resonancia se obtiene sintonizando el oscilador a la mitad de la frecuencia de resonancia de la muestra. La eficiencia de este método es baja pero permite el filtrado de la onda de salida en el circuito de detección y la eliminación de cualquier señal introducida directamente por el electrodo emisor.

Sin cambiar el método de excitación y detección, sistemas más elaborados hacen uso de la variación de capacidad para modular la salida de un oscilador de alta frecuencia (~ 60 MHz). La señal modulada es llevada a un receptor de FM, amplificada y conducida a un circuito discriminador que convierte la señal de

FM en una señal AM. Es necesario un solo electrodo como emisor y captor de la señal. Su alta sensibilidad permite detectar desplazamientos de .5 a 1 Å y amplitudes de deformación de 10^{-9} . [32,33].

3. 3. DESCRIPCION DEL EQUIPO Y DISPOSICION EXPERIMENTAL

3. 3. 1. EQUIPO ELECTRONICO

El diagrama de bloques de la electrónica utilizada en esta tesis se muestra en la Figura n^o 3. 7.. Los instrumentos responden a las siguientes características:

- Sintetizador de frecuencias: General Radio Company mod. 1162-A , 0-1MHz. Variable 0-9 dígito por dígito con .01 Hz de paso mínimo.

- Amplificador: Krohn Hite mod. DCA-10, 0-1 MHz, 10 w.

- Adaptador de Impedancias: Krohn Hite mod. MT 56, 30 Hz-500 kHz, 50 w.

- Milivoltímetros: Hewlett-Packard mod. 400 FL, 20 Hz-4 MHz.

- Osciloscopio: Hewlett-Packard mod. 120 B, 5 seg/cm.

- Frecuencímetro: Hewlett-Packard mod. 5345A, 500 MHz.

- Fuente Polarizadora: Fuente 300 V c.c. (Figura n^o 3.8.)

- Filtro: Pasa bajo a condensador y resistencias. Frecuencia de corte aproximada 1KHz.

- Regulador de temperatura: Proporcional con circuito de potencia y compensador automático de cero desarrollado en el laboratorio. 0-1200°C.

- Registrador: x-t TDK, Rikadenki.

- Microvoltímetro: 4 1/2 dígitos. (Desarrollo U.N.R.).

- Seguidor de Tensiones: Dispositivo captor desarrollado en la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la U.N.R. [34]. El circuito se muestra en la Figura n^o 3.9.. Su impedancia de entrada es del orden de 100 GΩ . Esta es la principal característica dado que fue desarrollado originalmente para el seguimiento de potenciales biológicos. La adaptación armada en este caso permite la detección de las bajas señales esperadas. Las capacidades parásitas han tenido que ser reducidas a niveles muy bajos para hacerlas compatibles con las bajas capacidades puestas en juego en los electrodos. Esto se logró con un do-

ble blindaje de todo el circuito. Dado que la probeta es sometida a altas temperaturas el doble mallado debió extenderse hasta una distancia de 70 cm. Se construyó con dos tubos de latón y un alambre concéntricos aislados entre sí con cuentas de vidrio para evitar fugas. El detalle del blindaje se muestra en la Figura n^o 3.10.

3. 3. 2. BANCO DE MEDICION

Un esquema simplificado del banco se muestra en la Figura n^o 3.11, en tanto que las fotografías de las Figuras n^o 3.12., 3.13. y 3.14. son una vista general y dos detalles de los electrodos y cuchillas respectivamente.

El banco fue integralmente construído en Zircaloy-4 dado que el mayor interés se centraba en las propiedades de las vainas de este material. De este modo la dilatación producida en la probeta sería automáticamente compensada por la dilatación del banco. Para otros materiales se previó poder mover los electrodos mediante dos tornillos micrométricos. Los electrodos son mantenidos fijos por la acción conjunta de los tornillos y dos resortes sostenidos con seguros "seager" a los pasantes de emisor y captor. Los bloques que sirven de soporte a los electrodos y a los tornillos de aproximación se encuentran separados y aislados de la base por mica y cuentas refractarias. De la misma forma han sido aisladas las cuchillas que, con un tornillo pasante, se conectan a la fuente de 300 V c.c..

Los caños que llevan la señal de entrada y salida se encuentran conectados por uniones muy flexibles dado que actuaban como antenas captando las ondas mecánicas del medio ambiente. Asimismo se hizo necesario blindar el electrodo receptor y utilizar cables blindados y conectores BNC para evitar la introducción de ruidos y señal directa. La eliminación de señales espúreas, del medio y por filtrado directo, fue uno de los principales problemas, especialmente a altas frecuencias. El electrodo captor fue también blindar con una lámina de cobre y el bobinado del horno funcionó, accidentalmente, como buen aislante de las señales del medio.

3. 3. 3. HORNO ELECTRICO

El horno se construyó con bobinado de alambre de Kanthal tipo A-1 de 1.3 mm de diámetro sobre un tubo de cemento refractario de alúmina. El tubo fue construido en el laboratorio sobre un núcleo de parafina que se fundió luego mediante el paso de corriente. De esta forma se consiguió el diámetro adecuado a las dimensiones del banco de medición. Tubos de silimanite de diámetro similar no se hallaban en el mercado.

El bobinado fue calculado para 1200°C aún cuando las necesidades inmediatas no iban más allá de los 450-500°C. Las dimensiones finales del horno fueron: 60 cm de longitud, 7 cm de diámetro interior y 29 cm de diámetro exterior. La potencia disipada se calcula, a 1200°C, en 2 Kw a 210 V y 9 A. Regulando a 450°C el gradiente longitudinal presentó una zona plana de 20 cm de longitud ubicada a 19 cm de uno de sus extremos. El ΔT en esa zona fue de $\pm 1^\circ\text{C}$.

Para la aislación del horno se utilizó perlita y como cubierta exterior un caño de fibrocemento con el objeto de disminuir al máximo las grandes superficies metálicas cercanas. Se temía por la generación de capacidades parásitas pero, a la luz del filtrado extra que proveyó el bobinado del horno, es posible que una carcasa metálica conectada a tierra hubiera permitido una mejor aislación de los ruidos.

3. 3. 4. EVALUACION DE LAS CARACTERISTICAS ELECTROMECHANICAS

En los siguientes puntos se evaluarán las características electromecánicas del equipo construido a los fines de interpretar los principios de funcionamiento, determinar ajustes de parámetros experimentales y predecir rango de medición del equipo. En la mayoría de los casos tales evaluaciones son sólo aproximadas pero suficientes para los fines perseguidos.

3. 3. 4. 1. FUERZA ENTRE ELECTRODOS Y PROBETA

Si es F la fuerza entre las placas de un condensador será $-F$ la fuerza necesaria para separarlas cuasiestáticamente una distancia dx . El trabajo hecho para separar las placas una distancia dx será $dU = -F \cdot dx$ con $dU =$ variación de la energía almacenada. Aplicado a un condensador de placas paralelas de área A y distancia entre placas x , resulta

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A \cdot \epsilon_0}{x} \quad 3.13.$$

donde C: capacidad, Q: carga sobre las placas, V: diferencia de potencial y ϵ_0 : constante dieléctrica del vacío.

Suponiendo el condensador parcialmente cargado con una carga Q al potencial V, una carga dQ produce una variación de la energía almacenada dada por

$$dU = V \, dQ$$

como además

$$dQ = C \, dV$$

obtenemos

$$U = \int_0^V C \, V' \, dV' = 1/2 \, C \cdot V^2 = 1/2 \, Q \cdot V = 1/2 \, Q^2 / V \quad 3.14.$$

$$U = \frac{Q^2}{2 \, C} = \frac{Q^2 \cdot x}{2 \, \epsilon_0 \cdot A} \quad 3.15.$$

Para un desplazamiento dx tenemos

$$dU = \frac{Q^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A} \cdot dx = - F \cdot dx \quad 3.16.$$

$$F = - \frac{Q^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A} \quad 3.17.$$

Si $Q = \chi \cdot A$ con χ : densidad superficial de cargas

$$F = - \frac{\chi^2 \cdot A}{2 \, \epsilon_0} \quad 3.18.$$

Por la conocida relación:

$$V = \frac{\chi \cdot x}{\epsilon_0} \quad 3.19.$$

se deduce finalmente:

$$F = - \frac{V^2 \cdot A \cdot \epsilon_0}{2 x^2} \quad 3.20.$$

En nuestro caso la d.d.p. aplicada se compone de una polarización continua V_0 y una señal que varía senoidalmente con el tiempo de la forma:

$$V = V_0 + V' \text{sen } \omega t \quad 3.21.$$

de donde la fuerza resulta

$$F = \frac{A}{2 x^2} [V_0^2 + V'^2 \text{sen}^2 \omega t + 2 V_0 \cdot V' \text{sen } \omega t] \quad 3.22.$$

Tal como se observa en las Figuras n^o 3.15. y 3.16., la distorsión en la fuerza aplicada respecto de una senoide desplazada es tanto más pequeña cuanto menor sea la relación V'/V_0 .

Valores de $V' = 150$ V y $V_0 = 300$ V como los utilizados nos indican una distorsión del orden del 25 %.

Para los valores de V_0 y V' mencionados, $A = 19,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ y una distancia entre electrodo y probeta del orden de $3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ resulta

$$\begin{aligned} F_{\text{máx}} &= 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ N} \\ F_{\text{mín}} &= 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \\ \Delta F &= F_{\text{máx}} - F_{\text{mín}} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ N} \end{aligned} \quad 3.23.$$

$$\frac{\Delta F}{A} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \quad 3.24.$$

3. 3. 4. 2. AMPLITUD DE DEFORMACION

Suponiendo deformaciones homogéneas en el extremo de la probeta, supuesta yaciendo a lo largo del eje x_3 , tenemos

$$\sigma_{33} = E \cdot \epsilon_{33} \quad 3.25.$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{\Delta F}{A \cdot E} = \frac{1,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2}{9,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2} =$$

$$= 1,9 \cdot 10^{-8} \quad 3.26.$$

donde el valor del módulo de Young corresponde aproximadamente al del Zry-4 a temperatura ambiente.

En nuestro caso, para una longitud de la probeta de L=15 cm, resulta un desplazamiento máximo en el extremo de la misma que puede aproximadamente calcularse así:

$$\epsilon_{33} = \frac{\Delta L}{L/2} \quad \Delta L = \frac{L}{2} \cdot \epsilon_{33} \quad 3.27.$$

$$\Delta L = 1,4 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad 3.28.$$

Este valor resulta similar a los obtenidos para equipos del mismo tipo por otros investigadores.

3. 3. 4. 3. CAPACIDAD

La capacidad entre electrodo y probeta puede calcularse suponiendo que la distancia entre ambos es lo suficientemente pequeña como para poder suponer que se trata de un capacitor de caras planas, paralelas e infinitas.

$$C = \frac{A \cdot \epsilon_0}{x} = 5,8 \text{ pF} \quad 3.29.$$

Del mismo modo puede calcularse la variación de capacidades ocasionada por la modificación de distancia entre placas

$$\Delta C = C_f - C_i = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ pF} \quad 3.30.$$

Como puede verse las variaciones esperadas en la capacidad son tres órdenes de magnitud menores que la capacidad media. Esta pequeña variación es lo que exige un detector de alta sensibilidad.

3. 3. 4. 4. AMPLITUD DE SEÑAL A DETECTAR

La determinación de la señal esperada a la salida del seguidor de tensiones se hará en forma aproximada debido a que la resolución exacta del circuito no ofrece mayor interés a los fines de una predicción que permita modificar por anticipado los parámetros del equipo.

$$C = Q / V$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dQ/dt}{V} = \frac{i}{V}$$

$$i = \frac{dC}{dt} \cdot V$$

$$V_s = \frac{dC}{dt} \cdot V \cdot R_e \quad 3.31.$$

$$= \frac{2,6 \cdot 10^{-16} \text{ F} \cdot 3 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot 10^8 \Omega}{10^{-4} \text{ s}} = 78 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

El circuito equivalente resuelto puede observarse en la Figura n° 3.17.. R_e se encuentra determinada principalmente por la resistencia de los aisladores de mica y cerámica que se hallan entre el banco de medición y los soportes de los electrodos. Esta resistencia es del orden $10^8 \Omega$ disminuyendo con la aplicación de calor, debido quizás a la disminución de la humedad en la aislación. Deben también incluirse las resistencias internas de los equipos de medición, tanto en serie como en paralelo con C. Estas resistencias son de una gran variación con la frecuencia y resultan difíciles de evaluar.

3. 3. 4. 5. MODIFICACION DE LA FRECUENCIA POR EL MODO DE SUJECION

El punto de suspensión de la probeta, por medio de cuchillas a 120° cuyo detalle se puede ver en la Figura n° 3.18., no coincidirá generalmente con el nodo creado en el centro de la misma. Si bien la masa M del banco es grande la distancia x a que puede considerarse del centro es seguramente pequeña. Las longitudes de las probetas fueron medidas con un error relativo de $1 \cdot 10^{-5}$

y se le efectuó una marca en el punto medio con un error de $2 \cdot 10^{-4}$ m. Esto garantiza que no se altera el modo de vibración de la probeta y puede tomarse como válida la expresión de Lord Rayleigh[35]

$$\frac{f}{f_M} = 1 + \frac{M}{m} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2L} \quad 3.32.$$

donde f es la frecuencia fundamental en ausencia de masas adicionales, f_M la frecuencia modificada por efecto de la masa M y m la masa de la probeta.

En nuestro caso evaluamos $M = 10$ Kg y $m = 0,1$ Kg. Con estos valores la repetibilidad de las mediciones debe estar dada por:

$$\frac{f}{f_M} = 1 + \frac{10}{0,1} \operatorname{sen}^2 \frac{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}} = 1 + 4 \cdot 10^{-4} \quad 3.33.$$

Una mejora del sistema de sujeción incluyó la utilización de láminas delgadas de acero como cuchillas. Con su flexibilidad disminuían el amortiguamiento externo y la modificación de la frecuencia. Los valores de repetibilidad acuerdan bastante bien con las previsiones.

3. 3. 4. 6. CORRECCIONES POR VARIACION DE TEMPERATURA

Las variaciones de temperatura producen en la probeta modificaciones de longitud dadas por

$$L_2 = L_1 (1 + \alpha \Delta T) \quad 3.34.$$

donde los subíndices 1 y 2 indican los valores de L a la temperatura ambiente T_1 y la temperatura T_2 , respectivamente. A su vez la densidad resulta afectada, a partir de la modificación del volumen, por

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{m}{(1 + 3\alpha \Delta T) V_1} \quad 3.35.$$

Si utilizamos, para la evaluación del módulo de Young E a la temperatura T_2 la ecuación C.6. del Apéndice C obtenemos

$$E_{T_2} = 4 L_{T_1}^2 \cdot f_{T_2}^2 \cdot \rho_{T_1} \cdot \frac{(1 + \alpha \cdot \Delta T)^2}{(1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T)} \quad 3.36.$$

Con esta expresión es posible evaluar dos aspectos del problema de la corrección por variación de temperatura. En primer lugar, si consideramos que las máximas variaciones por gradiente de temperatura son del orden de ± 1 °C y un corrimiento térmico de 2 °C durante el proceso de medición de cada punto, podemos considerar el máximo error posible en la medición de temperatura en el orden de 4-5 °C. En el caso del circonio, con un $\alpha = 5,5 \cdot 10^{-6}$, el error cometido por variación incontrolable de temperatura es

$$1 - [1 + \alpha \cdot \Delta T]^2 / [1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T] = 0,00003 \quad 3.37.$$

que resulta un orden de magnitud menor a la repetibilidad de las medidas de frecuencia.

Por otro lado, para el caso de mediciones a altas temperaturas, debemos corregir los valores que obtengamos disminuyéndolos en un factor dado, para una temperatura de trabajo de 500 °C, por

$$[1 + \alpha \cdot \Delta T]^2 / [1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T] = 0,9973 \quad 3.38.$$

Este factor de error es controlable y todas las curvas que se muestran son corregidas por temperatura.

Si para la evaluación del módulo de Young se hace uso de la ecuación corregida C.10., que tiene en cuenta el primer orden de corrección introducido por la contracción lateral, los errores introducidos por variación de temperatura serán un orden de magnitud menor, comparable a la modificación introducida sobre el valor de E. Es decir que si el valor de E es corregido en .3 % por la introducción de este factor, la corrección por variación en temperatura serán modificadas en un .3 %. Si se hace uso de las ecuaciones resueltas en forma numérica las correcciones a introducir en el factor de temperatura serán aún menores.

Para el módulo de Poisson, si se hace uso de la ecuación C.53. del Apéndice C, se simplifican las modificaciones introducidas por la variación de temperatura en la longitud y el radio. Como se trata de una ecuación que contempla el segundo orden de co-

corrección en las dimensiones, cualquier otra ecuación o método numérico introducirá errores por variación de temperatura de, al menos, un orden menor.

3.3.4.7. EVALUACION DE ERRORES

La medición de las longitudes de las probetas se llevó a cabo con un microscopio U.M.M. Aus Jena mod. RU-5367-4777. Los diámetros interiores de las vainas y exteriores de vainas y barras fueron medidos con un microscopio Jena mod. RU-5367/52. Todas las mediciones fueron efectuadas a temperatura ambiente de 25 ± 1 °C. Los errores relativos cometidos son

$$\epsilon_L = 1 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_r = 2 \cdot 10^{-5}$$

La medición de densidades se efectuó por el método clásico de picnómetro utilizando una balanza electrónica Mettler tipo F5 de 160 g de carga máxima. El error cometido en las mediciones hechas a temperatura ambiente de 25 ± 1 °C fue de $5 \cdot 10^{-4}$.

El mayor error lo introduce la reestabilidad de las frecuencias de resonancia que, tal como habíamos evaluado por efecto de la variación del punto de sujeción, se encontró que se distribuyen alrededor del valor medio con un error relativo de $5 \cdot 10^{-4}$. Cuando el punto de sujeción no queda ubicado en el punto medio, el amortiguamiento resulta tan grande que no puede detectarse ninguna señal.

Los errores se evaluarán sólo con las ecuaciones aproximadas, dado que cualquier corrección de segundo orden introducirá también modificaciones de segundo orden en el error cometido.

A partir de la ecuación C.6. el error cometido en la evaluación del módulo de Young puede calcularse como

$$\begin{aligned} e_E &= 2 e_L + 2 e_f + e_\rho = & 3.39. \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} = 1,4 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Para el módulo de Poisson la ecuación utilizada es la C.53., de donde la expresión para la propagación de errores resulta algo más complicada y depende fuertemente de los armónicos que se utilicen para calcular el módulo de Poisson. La expresión obtenida es la siguiente

$$\begin{aligned}
 e_{\nu} = & 1/2 (n_2 \cdot f_1 - n_1 \cdot f_2)^{-1} \cdot (n_2^3 \cdot f_1 - n_1^3 \cdot f_2)^{-1} \cdot \\
 & \left\{ (n_2 \cdot (n_2^3 \cdot f_1 - n_1^3 \cdot f_2) - n_2^3 \cdot (n_2 \cdot f_1 - n_1 \cdot f_2)) \Delta f_1 + \right. \\
 & \left. (n_1 \cdot (n_2^3 \cdot f_1 - n_1^3 \cdot f_2) - n_1^3 \cdot (n_2 \cdot f_1 - n_1 \cdot f_2)) \Delta f_2 \right\} + \\
 & e_L + e_r \qquad \qquad \qquad 3.43.
 \end{aligned}$$

Para los valores de frecuencia de resonancia obtenidos, los errores por propagación son

$n_1 = 1$	$n_2 = 3$	$e_{\nu} = 17\%$
$n_1 = 3$	$n_2 = 5$	9%
$n_1 = 5$	$n_2 = 7$	5%
$n_1 = 7$	$n_2 = 9$	3%
$n_1 = 9$	$n_2 = 11$	7%

Estos valores propagados no son totalmente representativos de las dispersiones por repetibilidad efectivamente encontradas. En la mayor parte de los casos la repetibilidad estuvo en el orden del 5%. A esta disminución en la dispersión contribuye seguramente la simplificación de los errores por temperatura en la longitud y el radio.

De todos modos se debe tener en cuenta que, para poder aplicar este método de medición del módulo de Poisson, deben ser simplificables los módulos de Young de las dos frecuencias de resonancia. Si el módulo de Young no depende de la frecuencia entonces el mismo no aparece como cálculo intermedio. En todos los casos se ha tenido especial cuidado de que esta condición se cumpla. De todos modos cuando no es así los valores resultantes son absurdos y se pone en evidencia la imposibilidad de utilizar esta metodología.

Otra fuente de error importante aparece cuando se elige la ecuación que relaciona la frecuencia medida con el módulo de Young. En este caso se trata de un error sistemático que es corregible con el uso de ecuaciones tan aproximadas como exacta necesitamos que sea la evaluación del módulo de Young. En el Apéndice C se e-

fectúa una discusión de los errores introducidos por el uso de cada una de las aproximaciones. El uso y las correcciones resultantes de la resolución numérica de la ecuación de propagación de ondas están discutidos en los capítulos de resultados experimentales que siguen.

REFERENCIAS

1. Köster, W. and Franz, H., Metallurgical Reviews, Vol. 6, 21 [1961] 1.
2. Landau, L.D. y Lifshitz, E.M., Teoría de la Elasticidad, Curso de Física Teórica, Vol. n^o VII, Edit. Reverté.[1969].
3. Woolman, J.R., J. Iron Steel. Inst., 168 [1951] 273.
4. Hanemann, H. and Yamada, R., Arch. Eisenhüttenwesen, 4 [1930] 353.
5. Dudzinski, N., J. Inst. Metals. , 31 [1952-53] 49.
6. Savage, H.C., U.S.Atomic Energy Commssion Publ.,[1950] ORNL-524.
7. Stang, A.H., Greenspan, M. and Newman, S.B., J. Research Nat. Bur. Stand., 37 [1946] 211.
8. Ritz, W., Ann. Physik, 28 [1909] 737.
9. Waller, M.D., Proc.Phys. Soc., 52 [1940] 710.
10. Wuolijoki, J.R., Publ. State Inst. Tech. Research, Finland, 6 [1948].
11. Brown, F.C., The Physics of Solids, W. A. Benjamin, Inc. New York [1967].
12. Varkey, P. A., Pethe, G.V. and Fadmini, A.R.K.L., Ultrasonics, January 1 [1979] 27.
13. Ledbetter, H.M. and Austin, M.W., Mat. Sci. and Eng., 70 [1985] 143.
14. Ledbetter, H.M. and Austin, M.W., Mat. Sci. and Eng. , 72 [1985] 65.
15. Ledbetter, H.M., J. of Mat. Sci., 20 [1985] 2923.
16. Ledbetter, H.M., Frederick, N.V. and Austin, M.W., J. Appl. Phys.,51 [1980] 305.

17. Wilkins, R.J. , Engineering, 162 [1946] 52.
18. Coutts, J.R.H. and Fairbrother, J.A.V., Proc. Phys. Soc., 64 [1951] 530.
19. Everett, F.L. and Miklowitz, J. , J. Appl. Physics, 15 [1944] 592.
20. Ayrton, W.E. and Perry, J., Proc. Roy. Soc. 36 [1884] 297.
21. Mason, W.P., Physical Acoustics and the Properties of Solids, G.Van Nostrand Company, Inc., New York [1958].
22. Förster, F., Z. für Met. [1937] 109.
23. Ritchie, I.G., J. Sound and Vib. 31[4] [1973] 453.
24. Rosinger, H.E., Ritchie, I.G. and Shillinglaw, A.J., Mat. Sci. and Eng. , 16 [1974] 143.
25. Simpson, H.M. and Wolfe, P.J., Am. J. of Physics, 43 [6]506.
26. Rushforth, S.K. and Selwood, A., J. of Sci. Inst., 35[1958] 340.
27. Spinner, S. and W.E. Tefft., Proc.of The Am. Soc. for Testing Mat., 61, 1221. [1961].
28. Quimby, S.L., Phys. Rev., 25[1925] 558.
29. Rosinger, H.E. and Ritchie, I.G., J.of Test. and Evaluation, [1974] 1-64.
30. Bancroft, D. and Jacobs, R.C., Rev. Sci. Inst.,9 [1938]279.
31. Cabarat, R., Gence, P., Guillet, L. and LeRoux, R., J.of Inst. of Metals, 80 [1951-52] 151.
32. Vernon, E.V., J. of Sci. Instr., 35 [1958] 28.
33. Hinton, T., Rev. of Sci. Inst., 36 [8] [1965] 1114.
34. Olivero, A.J., Milivoltímetro de alta impedancia de entrada para potenciales biológicos. Proyecto Final de Ingeniería. F.C.E. e I., U.N.R. [1974].

35. Rayleigh, J.W.S.(Lord), Theory of Sound. Dover Publications (1945).
36. Nowick, A.S. and Berry, B.S., Anelastic Relaxation in Crystalline Solids. Academic Press. New York (1972).
37. Balamuth, L., Phys. Rev. 45(1934) 715.
38. Marx, J., The Rev. of Sci.Inst. , 22, 7 (1951)502.

LEYENDAS DE FIGURAS

- 3.1 Equipo excitador y detector por acoplamiento mecánico. Extraído de referencia [36].
- 3.2 Equipo excitador y detector por corrientes inducidas. Idem Figura 3.1..
- 3.3 Equipo excitador y detector por campos electromagnéticos inducidos. Idem Figura 3.1..
- 3.4 Equipo de excitación y detección por cristal piezoeléctrico. Extraído de referencia [37].
- 3.5 Equipo de excitación y detección por cristal piezoeléctrico de Marx. Extraído de referencia [38].
- 3.6 Equipo de excitación y detección electrostática. Extraído de referencia [36].
- 3.7 Diagrama de bloques de la electrónica principal.
- 3.8 Fuente polarizadora de 300 V.
- 3.9. Circuito del amplificador seguidor de tensiones utilizado como captor.
- 3.10. Blindaje de amplificador y electrodos captor.
- 3.11. Esquema del banco de medición.
- 3.12. Vista general del equipo de medición.
- 3.13. Detalle de cuchillas de sujeción y electrodos.
- 3.14. Detalle de electrodos captor y receptor.
- 3.15. Diferencias de potencial aplicadas V_0 y V_1 .
- 3.16. Intensidad de la fuerza aplicada. Distorsión.
- 3.17. Circuito equivalente del sistema de excitación y detección.
- 3.18. Detalle de las cuchillas de sujeción.

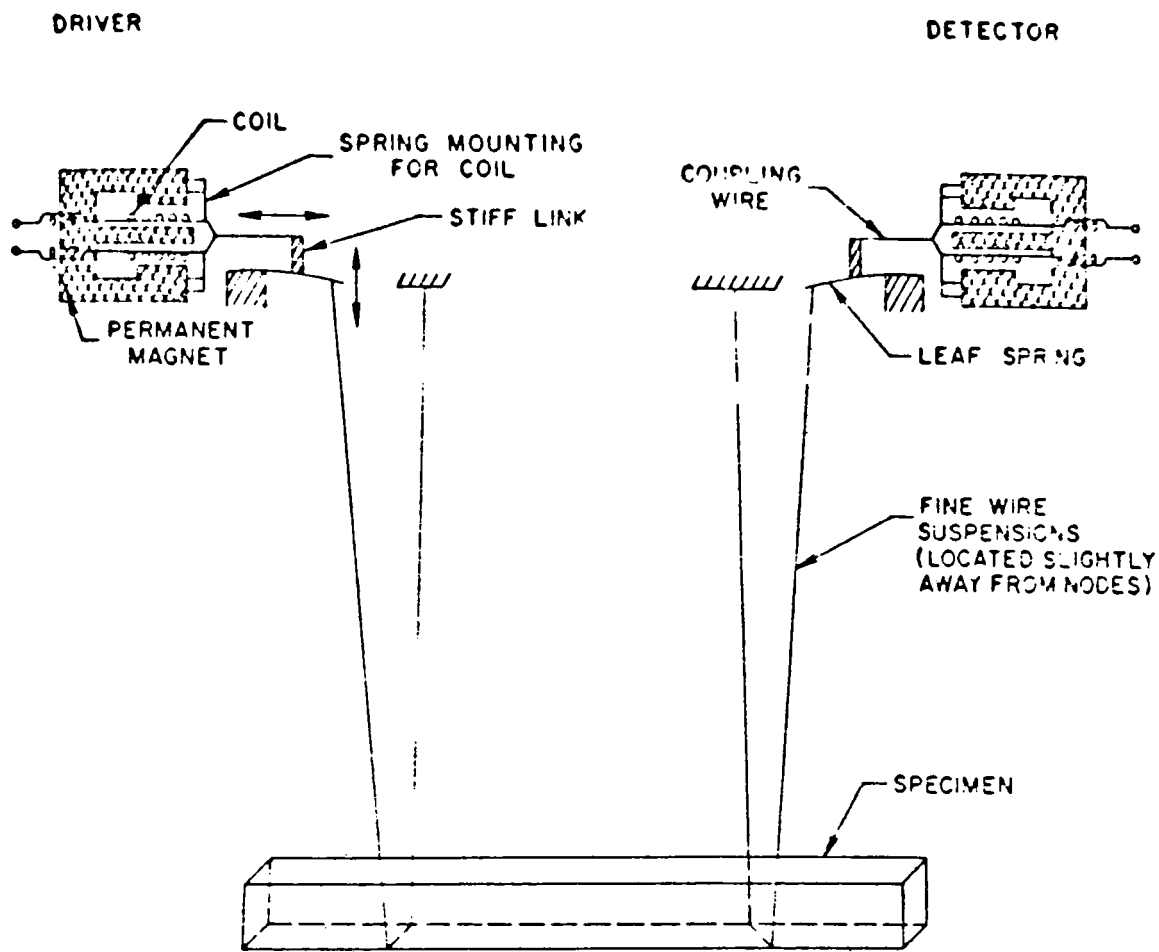


Fig. n° 3 1

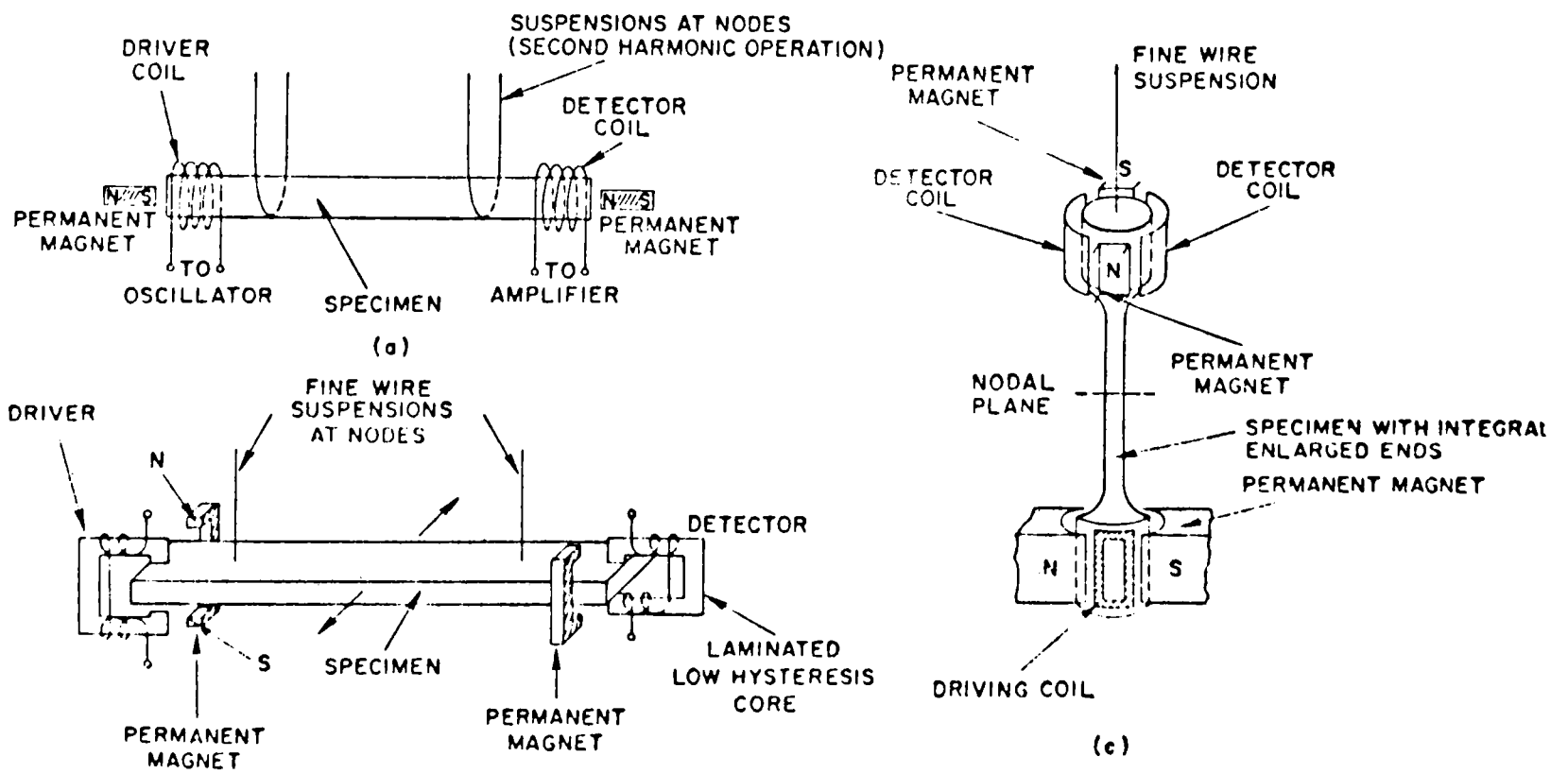


Fig. n° 3 2

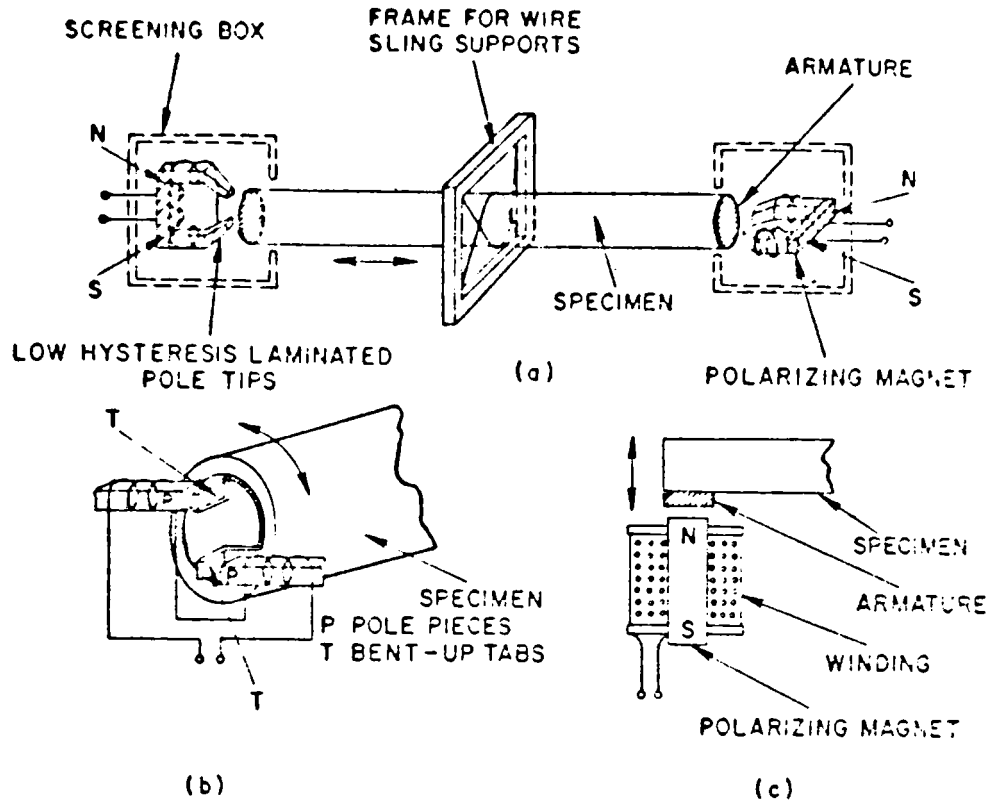


Fig. n° 3.3

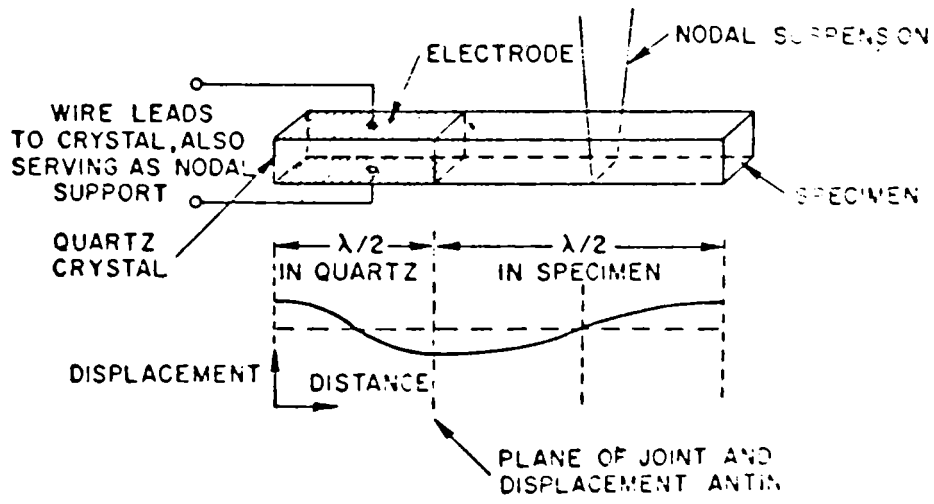


Fig. n° 3 4.

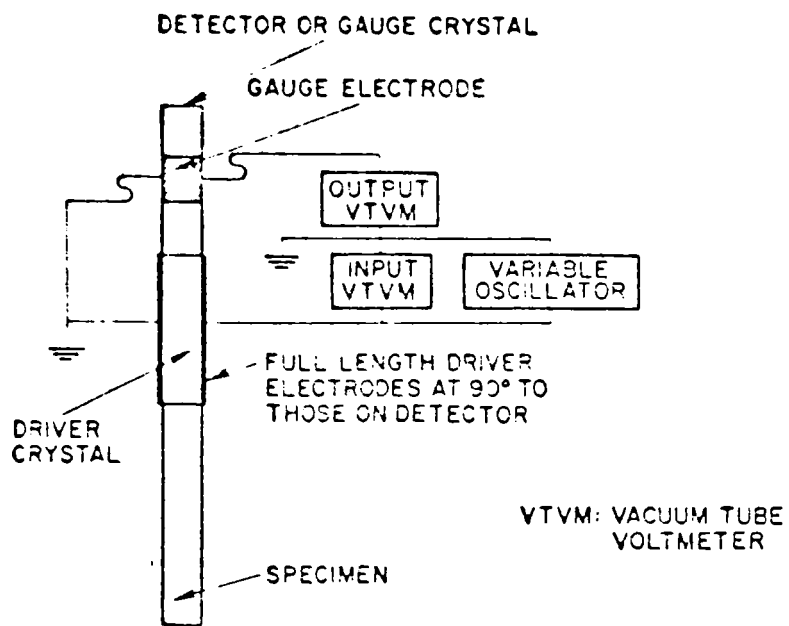
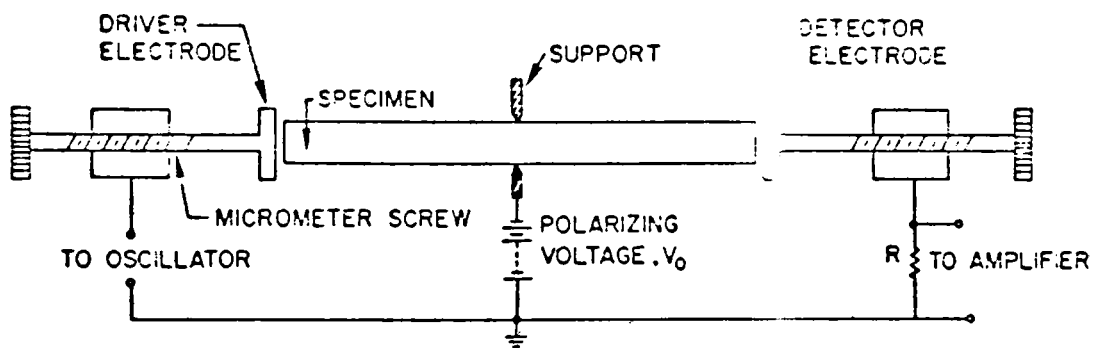
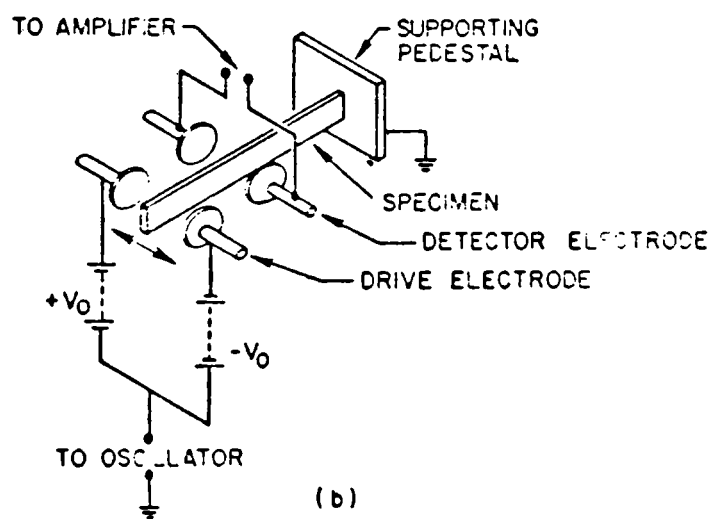


Fig. n° 3.5.



(a)



(b)

Fig. n° 3.6.

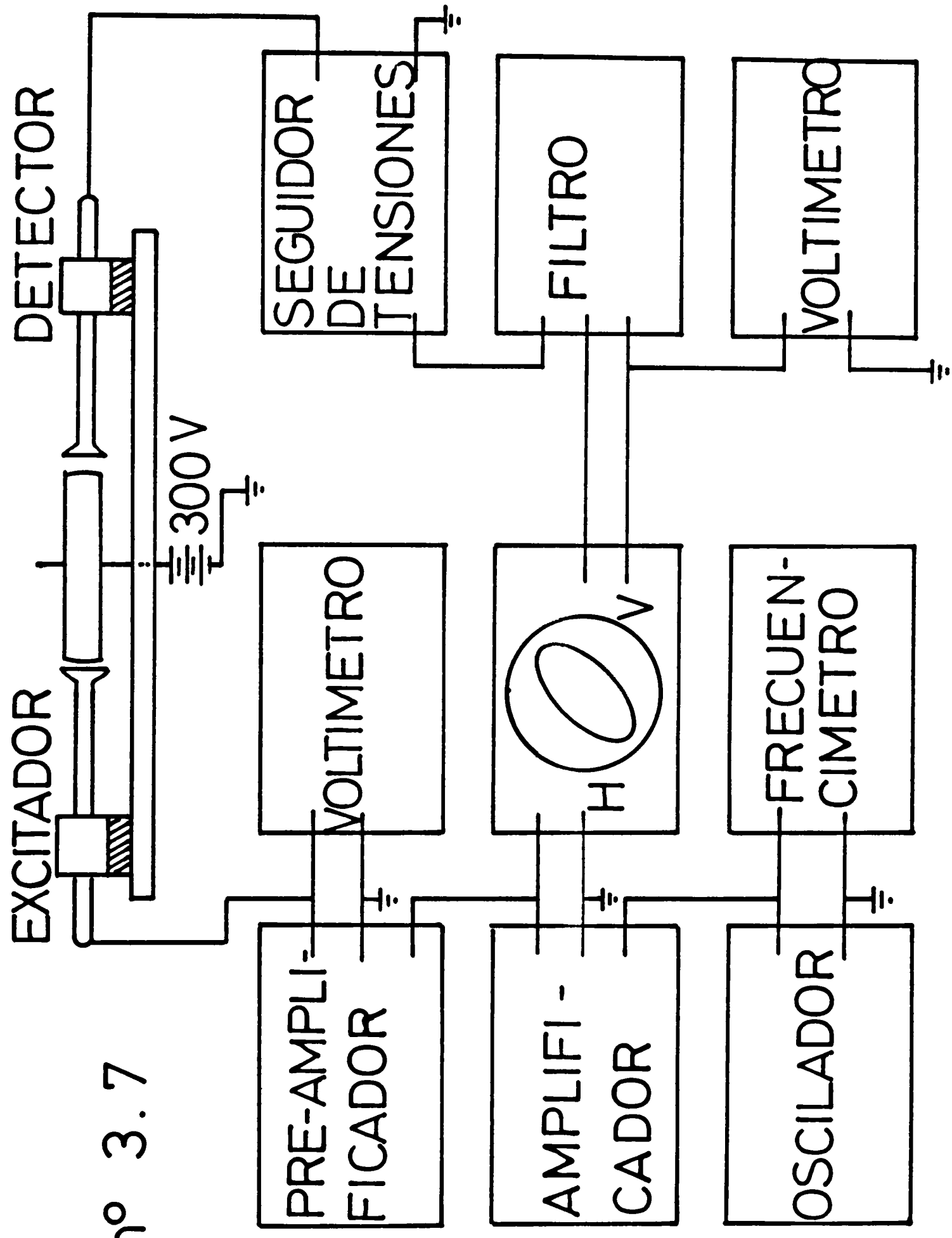


Fig. nº 3.7

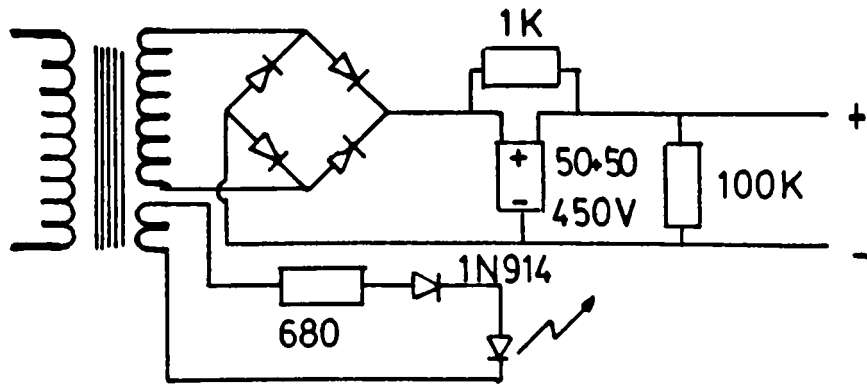


Fig. n° 3. 8.

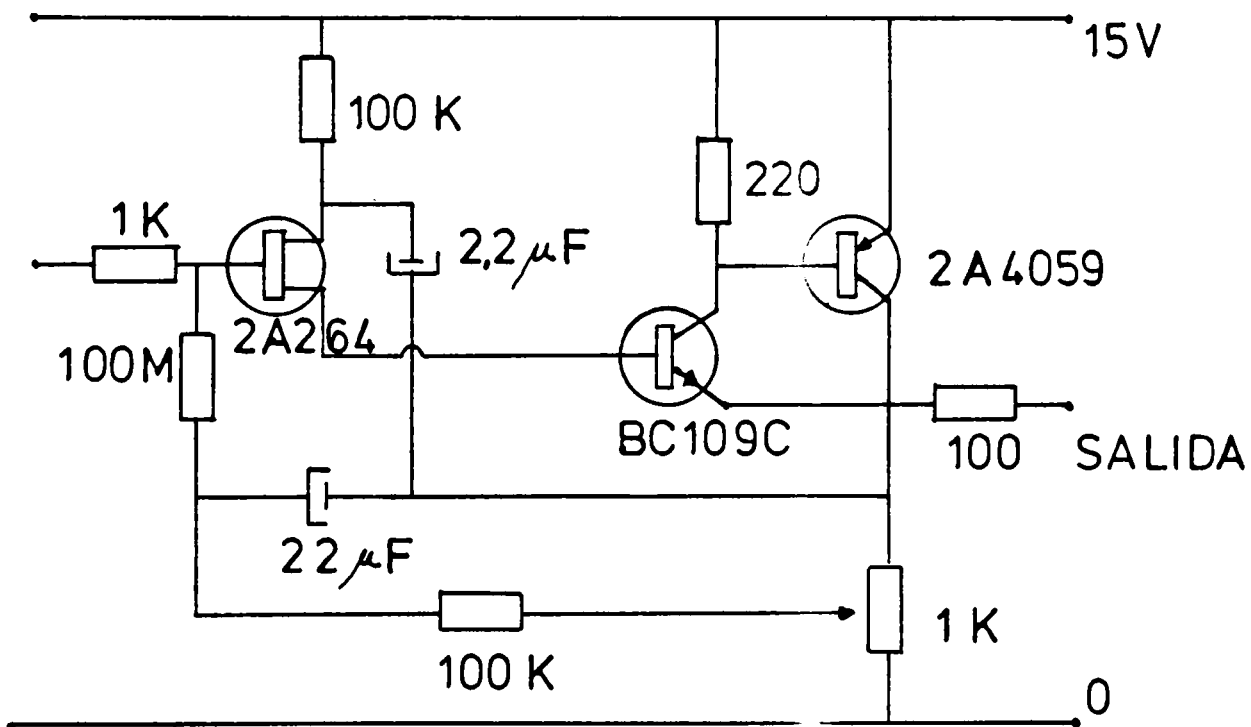


Fig. n° 3. 9

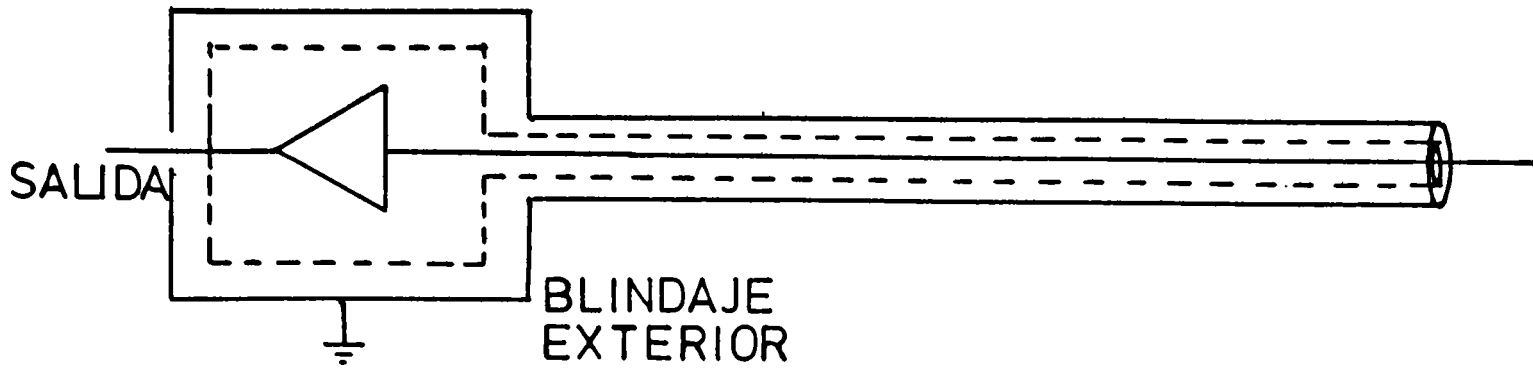


Fig. nº 3.10.

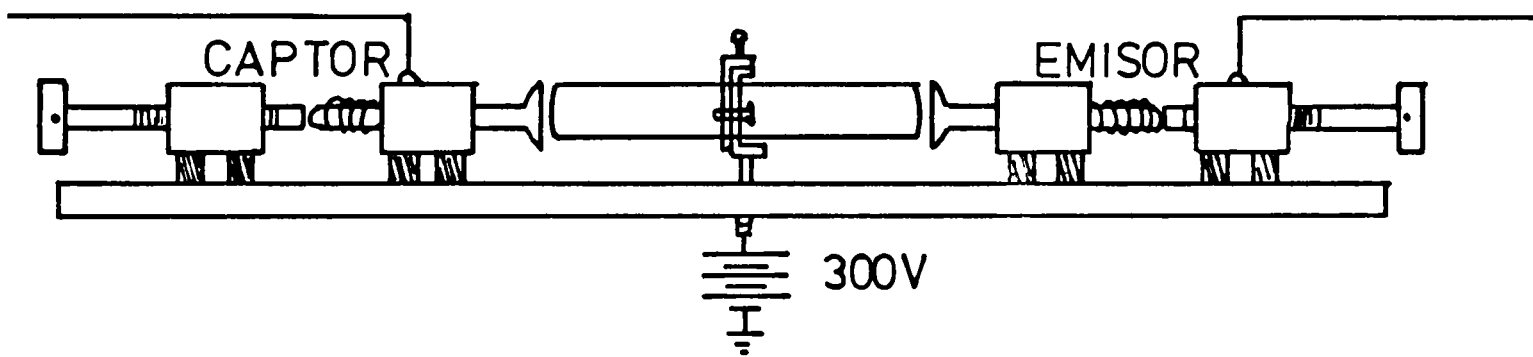


Fig. nº 3.11.

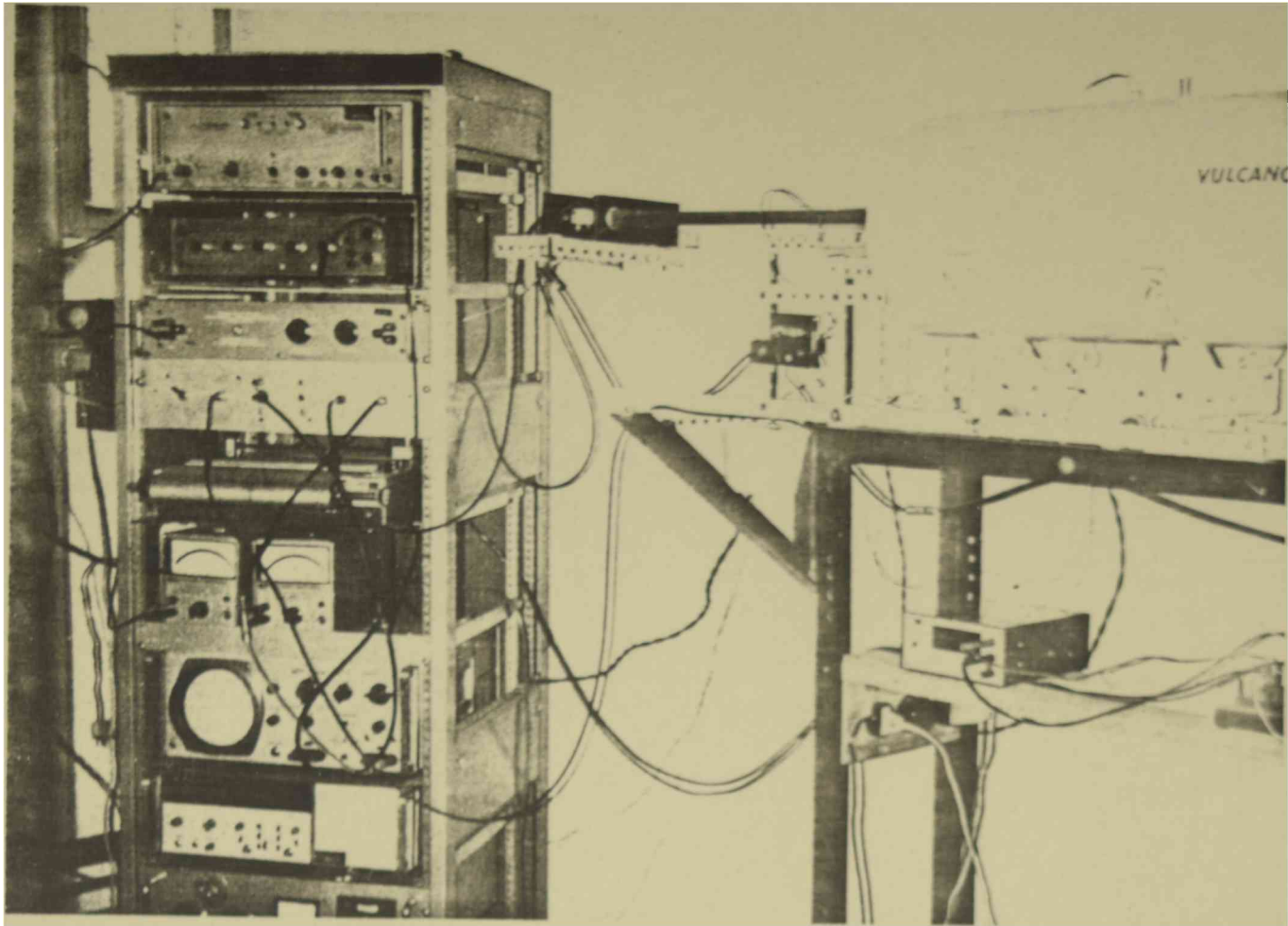


Fig.n° 3.12.

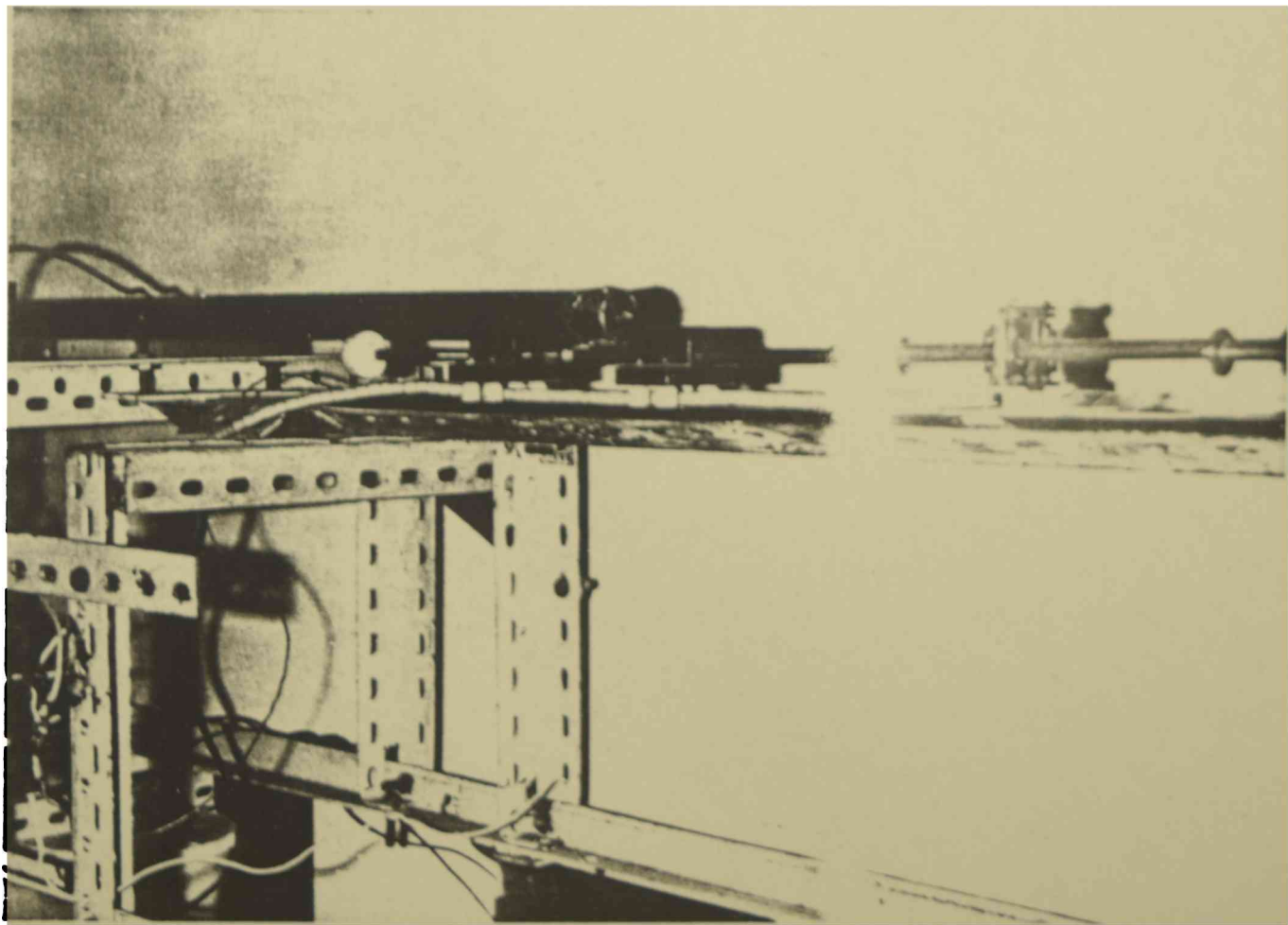


Fig.n° 3.13.

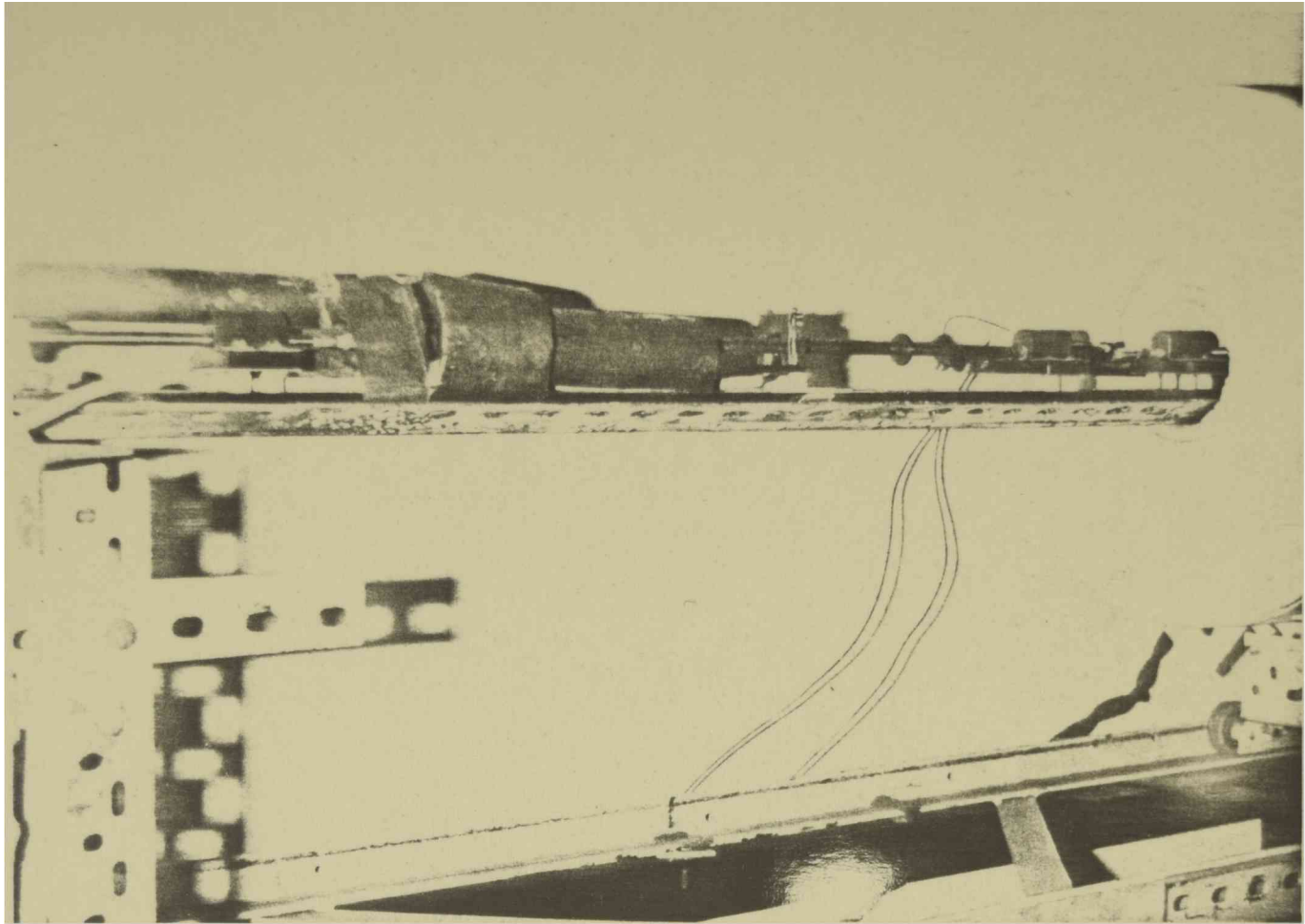


Fig. n° 3 14

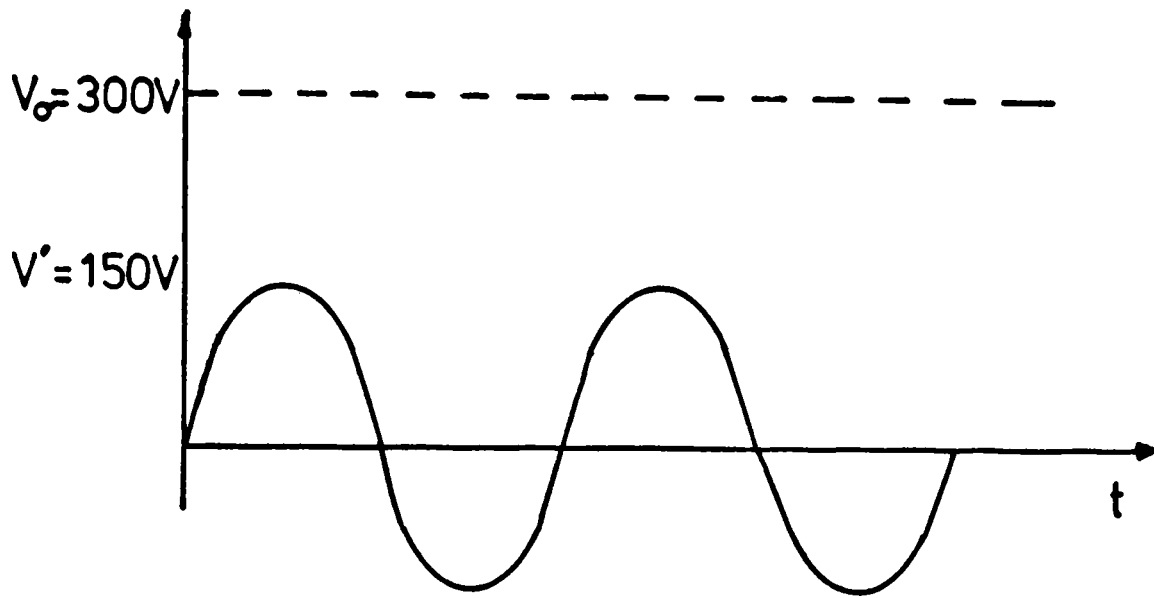


Fig. n° 3.15.

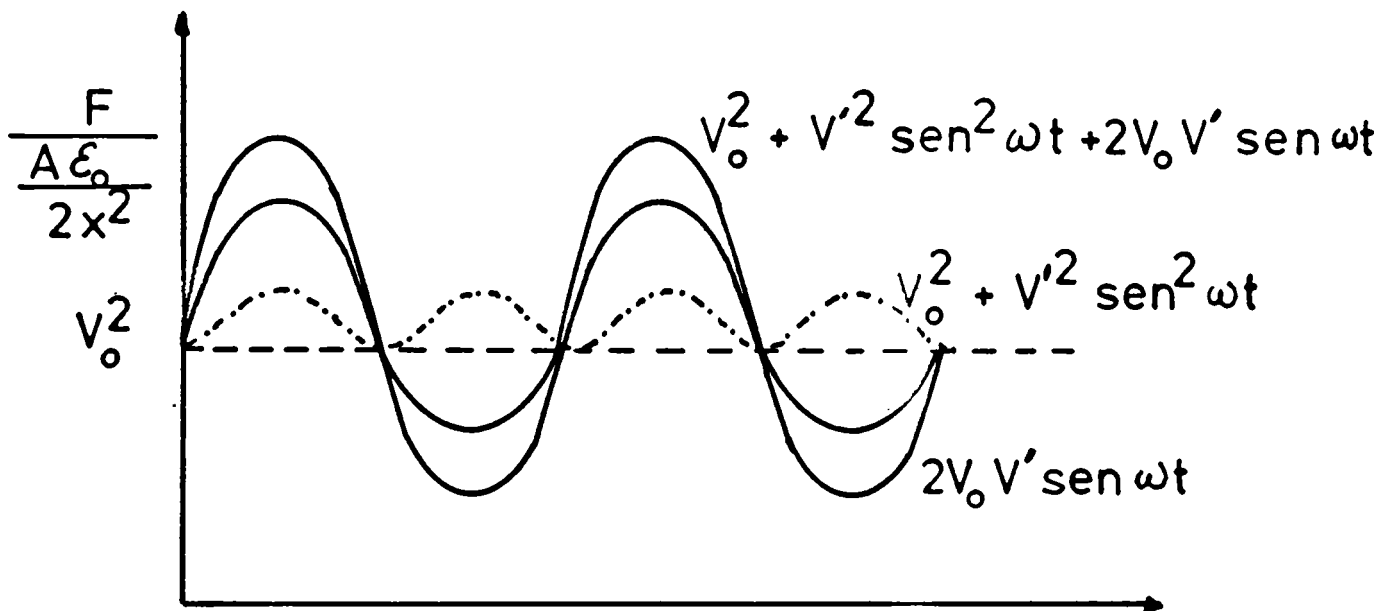


Fig. n° 3.16.

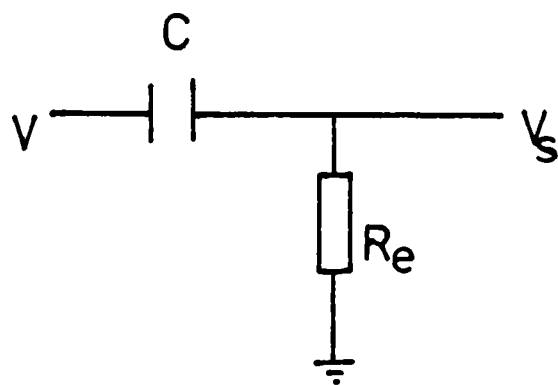


Fig. n° 3.17

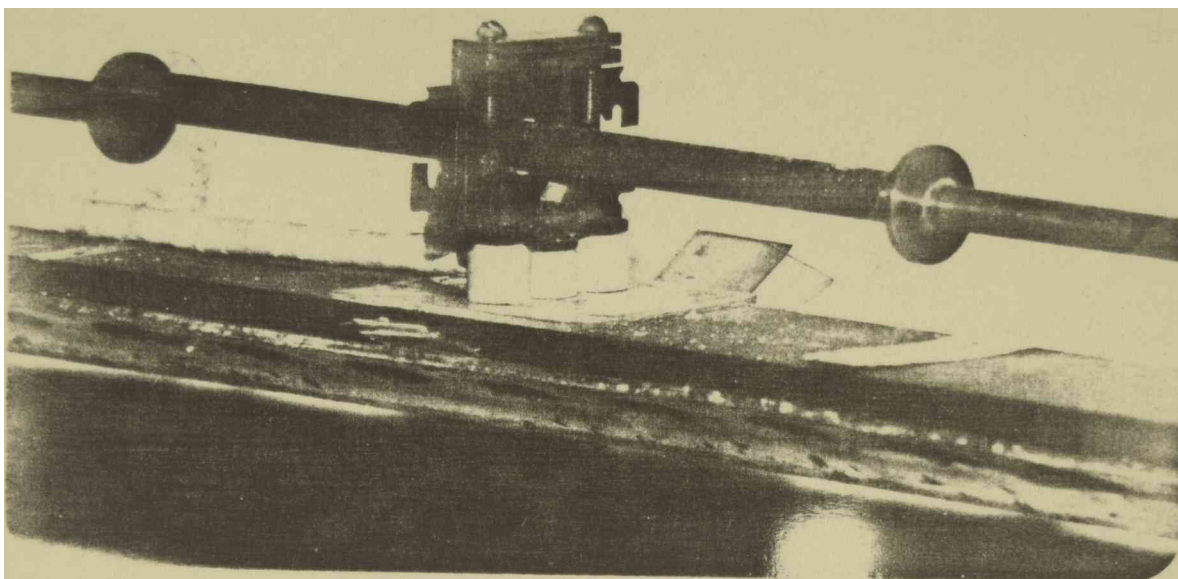


Fig. n° 3.18.

CAPITULO IV MÓDULO DE POISSON EN VAINAS Y BARRAS DE ZIRCONIO-4

Las aleaciones de circonio han sido de uso muy extendido en los últimos años debido a su utilización en la fabricación de componentes en la industria nuclear. Sus propiedades físicas han sido, asimismo, ampliamente estudiadas. Entre ellas, las propiedades elásticas han sido objeto de diversos estudios. No obstante esto y a pesar de tratarse de materiales incorporados definitivamente al conocimiento tecnológico, algunos de sus comportamientos son todavía mal comprendidos. En el caso del módulo de Poisson debe agregarse el hecho de una ausencia casi total de mediciones directas no obstante la importancia de este módulo en el proceso de diseño de componentes. La utilización de márgenes de seguridad amplios ha enmascarado, probablemente, esta deficiencia. No obstante una utilización más racional de este material exigiría un mejor conocimiento de sus propiedades elásticas. Por otra parte, como ya hemos mencionado, esta deficiencia no se limita a las aleaciones de circonio sino que es común a la mayor parte de los metales. En aquellos casos en que las exigencias de diseño son mayores, como por ejemplo en la industria aeronáutica, el conocimiento de la variación del módulo de Poisson con la temperatura y orientación adquiere singular importancia.

En este capítulo presentaremos datos experimentales del módulo de Poisson en vainas y barras de zirconio-4 así como, complementariamente, curvas representativas del comportamiento del módulo de Young en función de la temperatura.

En el punto 4.1. se efectúa una revisión de los trabajos previos en el tema. Podrá observarse la casi total ausencia de datos confiables.

En el párrafo 4.2. se efectúa un cálculo numérico tendiente a establecer la validez y alcance de las ecuaciones de propagación de ondas habitualmente utilizadas como intermediarias entre las frecuencias medidas y los módulos elásticos calculados.

Los resultados experimentales son presentados en el punto 4.3. y un análisis y discusión de los mismos, en términos de la teoría elástica y anelástica desarrollada en los capítulos anteriores, se efectúa en el punto 4.4.. Las conclusiones sobre el tema se precisan en el punto 4.5..

4. 1. RESULTADOS EXPERIMENTALES PREVIOS

Todas las predicciones y mediciones efectuadas para el módulo de Young y el módulo de corte en aleaciones ricas en circonio, como función de la temperatura, yacen en una banda cuyos valores extremos no difieren en más del 25 %. Una revisión bastante completa es efectuada por D.C. Northwood et al. [1] conjuntamente con un cálculo del módulo de Young y el módulo de corte como función de la orientación en un monocristal de circonio. Calcula también valores del módulo de Young y del módulo de corte a partir de las figuras de polos inversas de barras de Zr-2.5% Nb. Los valores obtenidos acuerdan con los valores experimentales con un error no mayor del 5 %. No obstante, cálculos efectuados con los promedios más simples de Voigt y Reuss proveen valores que no difieren en más del 10 %. Su conclusión más importante es la de que el módulo de Young y el módulo de corte no son influenciados en forma apreciable por los aleantes. Los valores obtenidos no difieren substancialmente de los que se obtienen para circonio puro. Por otra parte predice una diferencia del orden del 40 % entre el módulo de Young tangencial a la probeta y el normal. El módulo de Young para la dirección longitudinal se encuentra entre los otros dos y es confirmado experimentalmente. Los valores predichos para el módulo de corte en las tres direcciones de la probeta no difieren en más del 15-20 %.

Posteriormente D.C. Northwood efectúa [2] una predicción de valores del módulo de Young, del módulo de corte y la razón de Poisson de diferentes aleaciones de circonio con diversos tratamientos termomecánicos. Los cálculos son efectuados a partir de las figuras de polos inversas de los distintos materiales utilizando las constantes elásticas de monocristal de E.S. Fisher and C.J. Renken [3]. Este método había sido aplicado ya por H.S. Rosenbaum and J. Lewis [4] mostrando el método de cálculo de las constantes elásticas de un material con simetría transversal. El resultado más importante es la predicción de diferencias del orden del 40-50 % para el módulo de Young y del 20 % para el módulo de corte, según se mida los valores correspondientes a las direcciones longitudinal, tangencial o normal.

Posteriormente H.E. Rosinger et al [5] miden los módulos de Young y de corte para diferentes microaleaciones de circonio. La medición se efectúa por métodos dinámicos y se especifican los tra-

tamientos termomecánicos a que fueron sometidas las probetas. Su conclusión es que no debe esperarse una variación tan grande como la predicha por D.C. Northwood dado que sus valores experimentales no difieren entre sí en más del 10 %. A nuestro juicio esta suposición es errónea puesto que las diferencias predichas por D.C. Northwood corresponden a los valores de las direcciones longitudinal, tangencial y normal de una misma probeta y no a los valores de una misma dirección de diferentes aleaciones. Como Fosinger et al. sólo miden el módulo de Young y el módulo de corte en la dirección longitudinal no pueden detectar estas diferencias. Siendo las diferencias producto de la textura del material y no de los aleantes es dable suponer que todos los materiales presentarán textura similar. Esto es cierto en cuanto a la orientación respecto del eje longitudinal se refiere, dado que es conocido que las aleaciones de circonio presentan una textura predominante con su eje $\langle c \rangle$ en la dirección normal a la dirección de laminación.

A. Fadel et A. Groff presentan [6] valores experimentales del módulo de Young en función de la temperatura hasta 1200 °C. Esta extensión hasta la fase β del circonio muestra una caída del módulo a la temperatura de transición de fase. En el rango correspondiente a la fase α los valores no difieren mayormente de los resultados previos.

F. Fovolo et al [7] miden, por el método clásico de tracción, el módulo de Young longitudinal de laminas de Zry-4 del tipo MZFR. Sus valores no difieren mayormente de los resultados previos.

Una última revisión de las propiedades elásticas de las aleaciones circonio-oxígeno es efectuada por L.R. Burnell et al [8]. Se observan modificaciones importantes con el contenido de oxígeno. Aunque esta variable no es generalmente controlada, valores de 1000 p.p.m. son comunes cuando no se induce voluntariamente la presencia de oxígeno en las aleaciones de circonio. Aún para contenidos muy altos de oxígeno puede observarse un comportamiento similar en todas las curvas de módulos en función de la temperatura, con una pendiente prácticamente constante. Los incrementos en la ordenada al origen son del orden del 50 %, tanto para el módulo de Young como para el de corte, para contenidos de oxígeno de 13,6 %. Solamente en dos casos, de los informados por L.R. Burnell, se observa claramente la transición de fase $\alpha - \beta$.

La conclusión más importante de todos estos trabajos es que no debe esperarse grandes variaciones en el valor del módulo de Young

longitudinal o en el módulo de corte. Esto es debido por un lado a la poca influencia que los aleantes tienen sobre las propiedades elásticas. Las microaleaciones de circonio son, fundamentalmente, una matriz de circonio donde los aleantes pueden considerarse distribuidos como impurezas. Por otro lado, no obstante la anisotropía del módulo de Young y el de corte en un monocristal, las texturas de fabricación presentan gran similitud debido a la fuerte tendencia que presentan los ejes $\langle c \rangle$ de los microcristales a ubicarse en forma perpendicular a la dirección de laminado. Aún en los casos en que se presenta alguna diferencia importante siempre es posible encontrar explicación en la textura particular de la muestra de que se trata. En ese caso es posible aplicar con éxito el cálculo de las constantes elásticas a partir de la distribución experimental de orientaciones cristalinas. En las Figuras nº 4.1. y 4.2. pueden observarse valores del módulo de Young y el de corte, respectivamente, tanto experimentales como predicciones teóricas.

Para el caso del módulo de Poisson la situación es cualitativamente distinta. En primer lugar no existen valores experimentales confiables. Esto es debido a que la mayor parte de los datos son obtenidos en forma indirecta utilizando la ecuación 1.1. a partir de la medición previa de los módulos de Young y de corte. Además la mayor anisotropía de este módulo, debido a su dependencia de dos direcciones en la muestra, podría poner de manifiesto la textura de un material con mayor detalle. De cualquier forma el módulo de Poisson es una variable que, en la mayoría de los casos, se considera de importancia secundaria y se informa como dato residual.

En el trabajo de D.C. Northwood et al [1] no se informa, para los distintos casos, el método exacto de medición y de cálculo. Aún en los casos en que se informa que se lo calcula a partir de la ecuación 1.1. pueden hallarse errores numéricos. Por otro lado su suposición de que, debido a la isotropía basal de la celda hexagonal, puede utilizarse esta ecuación para deformaciones longitudinales según el eje $\langle c \rangle$ ha sido refutada en el capítulo I de esta tesis.

Las predicciones hechas por D.C. Northwood [2] para el módulo de Poisson adolecen del mismo defecto de ser calculadas en el supuesto de isotropía de la muestra. En este caso resultan absurdos los valores $> .5$ obtenidos para algunas texturas y temperaturas. Las diferencias informadas son, en algunos casos, superiores al 100%. Ningún trabajo posterior se ocupa de comprobar experimentalmente

estas diferencias.

Hasta donde nosotros conocemos un único trabajo, el de E.B. Schwenk et al, se ocupa de medir específicamente el módulo de Poisson [9]. El proceso de medida es estático con "strain gages" longitudinales y transversales a una probeta deformada por tracción. Como ya hemos visto los valores obtenidos son incompatibles con los calculados en el Capítulo I para monocristales de circonio.

La Figura 4.3. muestra valores experimentales y predicciones teóricas de este módulo. Puede observarse una alta dispersión en el comportamiento de la variación con la temperatura. Los valores extremos encontrados en la literatura difieren hasta en un 100 %. Generalmente ninguna conexión con la textura o microestructura del material se ha intentado.

4. 2. ONDAS LONGITUDINALES EN BARRAS Y TUBOS

Debido a que uno de los objetivos fue caracterizar elásticamente vainas de Zry-4 sin modificar substancialmente su geometría ni su textura se hizo necesario calcular las frecuencias de resonancia longitudinal para cáscaras de simetría cilíndrica, a partir de la ecuación general de movimiento.

En nuestro caso consideraremos vibraciones longitudinales independientes de la coordenada angular. La ecuación C.52 del Apéndice C nos provee el determinante D_3 para la evaluación de las frecuencias de resonancia. El tipo de ecuaciones de Bessel a ser usadas depende de los parámetros λ_1 y λ_2 . Tomando valores aproximados para las constantes elásticas puede verse fácilmente que debe adoptarse

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -1$$

En estas condiciones los elementos del determinante característico pueden ser escritos

$$d_{11} = -(\beta_1^2 - \xi^2) a I_0(\alpha_1 a) - 2 \alpha_1 I_1(\alpha_1 a) \quad 4.1.$$

$$d_{12} = 2 \beta_1 \xi a J_0(\beta_1 a) - 2 \xi J_1(\beta_1 a) \quad 4.2.$$

$$d_{13} = -(\beta_1^2 - \xi^2) a K_0(\alpha_1 a) + 2 \alpha_1 K_1(\alpha_1 a) \quad 4.3.$$

$$d_{14} = 2\beta_1 \xi a Y_0(\beta_1 a) - 2\xi Y_1(\beta_1 a) \quad 4.4.$$

$$d_{21} = 2\xi \alpha_1 I_1(\alpha_1 a) \quad 4.5.$$

$$d_{22} = -(\beta_1^2 - \xi^2) J_1(\beta_1 a) \quad 4.6.$$

$$d_{23} = -2\xi \alpha_1 K_1(\alpha_1 a) \quad 4.7.$$

$$d_{24} = -(\beta_1^2 - \xi^2) Y_1(\beta_1 a) \quad 4.8.$$

donde

$$\alpha_1^2 = \left[4\pi^2 f_k^2 \rho (1+\nu)(1-2\nu) / E(1-\nu) \right] - \xi^2 \quad 4.9.$$

$$\beta_1^2 = \left[8\pi^2 f_k^2 \rho (1+\nu) / E \right] - \xi^2 \quad 4.10.$$

$$\xi = k\pi/L \quad 4.11.$$

J_n y Y_n son funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente, y I_n y K_n son funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie. Las restantes dos filas del determinante, es decir d_{3i} y d_{4i} , se obtienen por substitución de a por b .

Con estas expresiones para las componentes el determinante nos provee una función implícita trascendental

$$\phi = \phi [f_k, E, \nu, \rho, L, a, b] = 0 \quad 4.12.$$

de donde f_k no puede ser resuelta algebraicamente. En esta función implícita E , ν y ρ caracterizan el material y L , a y b la probeta a través de sus dimensiones. Cualquiera de estas variables puede ser utilizada como parámetro para el cálculo de f_k dejando el resto fijas. En particular, fijando E , ν , ρ , L y b , para el radio interno a variable puede determinarse la frecuencia de resonancia f_k . La resolución numérica fue efectuada por computación para dimensiones características de las probetas utilizadas y constantes elásticas de aleaciones de circonio aproximadas. La Figura

n° 4.4. muestra la variación de la frecuencia de resonancia en función de la razón a/b , para valores corrientes de las dimensiones de las probetas. El módulo de Young y la razón de Poisson utilizados son valores comunes en las aleaciones de circonio a temperatura ambiente. Para $a=0$ obtenemos los valores de resonancia de barras macizas del mismo material. La Figura n° 4.5. muestra la variación de la frecuencia de resonancia, para una probeta cortada de vainas de elementos combustibles, como función de la variación del módulo de Poisson. Puede observarse la baja incidencia de la variación de este módulo en el modo de resonancia fundamental.

La Figura n° 4.6. muestra la variación de la frecuencia de resonancia fundamental en función del radio interior con el módulo de Young como parámetro. Todos los cálculos muestran que la frecuencia de resonancia fundamental depende principalmente del módulo de Young y es influenciada en muy pequeña medida por la variación del módulo de Poisson. Estos resultados ya son conocidos a partir de la ecuación de Lord Rayleigh C.9.. Tampoco resultan importantes las correcciones a introducir debido a la existencia del agujero central en la vaina.

Las Figuras n° 4.7. y 4.8. muestra la variación de las frecuencias de resonancia para diferentes armónicos, en función del módulo de Poisson, para barras macizas y vainas, respectivamente. Las líneas llenas muestran los valores calculados mediante la ecuación aproximada C.12. y las curvas segmentadas la resolución numérica. Los valores de ambas son prácticamente indiscernibles hasta el armónico de orden 7 para las barras macizas pero sólo hasta el orden 3 para las vainas. Puede observarse una mayor influencia del módulo de Poisson en ambos casos y, en el caso de las vainas, un desacuerdo muy importante para los armónicos de orden 9 y 11.

Puede concluirse que no se cometerán errores substanciales en el cálculo del módulo de Young si se utilizan las ecuaciones aproximadas en los armónicos inferiores. Los valores del módulo obtenidos a partir de los armónicos de orden superior deberán ser corregidos. Para ello puede hacerse uso de curvas del tipo de las mostradas en las Figuras n° 4.7. y 4.8. construídas en cada caso con las dimensiones adecuadas. El cálculo del módulo de Poisson exigirá cuidado especial aún en los armónicos inferiores. El efecto de la geometría de la sección transversal podrá ser corregido mediante la construcción de curvas μ_{ap} vs. μ_{real} para cada par de armónicos.

μ_{ap} es el módulo de Poisson calculado mediante la ecuación apro-

ximada C.54.. ν_{real} es el módulo de Poisson calculado numéricamente con las mismas longitudes, radios y frecuencias. Las Figuras n^o 4.9. y 4.10. muestran estas curvas de corrección para barras macizas y vainas de dimensiones comunes en las probetas utilizadas.

4. 3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La Tabla n^o 4.1. indica las dimensiones y densidades de las probetas utilizadas. La discusión de los errores cometidos en la medición de estas magnitudes fue hecha en el capítulo anterior.

Los círculos llenos en las Figuras n^o 4.7. y 4.8. indican los valores experimentales, a temperatura ambiente, de las frecuencias de resonancia de barras y vainas respectivamente. Los valores del módulo de Poisson para cada caso fueron elegidos de modo de obtener una mejor coincidencia simultánea de todas las frecuencias pero deben ser tomados con cuidado. Es evidente la coincidencia de estos valores con las curvas numéricas así como la poca diferencia que presentan, en las barras macizas, con los valores calculados mediante las ecuaciones aproximadas.

En la figura n^o 4.11. se muestran las frecuencias de resonancia diferentes para la probeta P-1-V, normalizadas a la frecuencia de temperatura ambiente. De los nueve armónicos medidos éstas son las que presentan mayor diferencia. La figura n^o 4.12. muestra el módulo de Young como función de la temperatura obtenidos a partir del modo fundamental y el primer y tercer armónico impar. Los valores fueron corregidos por temperatura a partir del cálculo numérico en las frecuencias superiores. Mediante regresión lineal pueden obtenerse expresiones para todas las frecuencias de resonancia medidas. Las expresiones obtenidas están en buen acuerdo con resultados previos y las diferencias entre ellos podrían deberse, además de los errores experimentales, a efectos de forma remanentes. Para la probeta P-1-V obtenemos

$$E_1 = 101,495 - 0,07085 [T - 273 K]$$

$$E_3 = 101,692 - 0,07309 [T - 273 K]$$

$$E_5 = 101,554 - 0,07586 [T - 273 K]$$

4.13.

$$E_7 = 101,077 - 0,07724 [T - 273 K]$$

$$E_9 = 101,083 - 0,07488 [T - 273 K]$$

Mediante la ecuación C.54. y con expresiones lineales, obtenidas por mínimos cuadrados, para cada una de las frecuencias de resonancia podemos obtener ν_{ap} para cada par de frecuencias. La raíz cuadrada es aproximada por polinomios de segundo grado y las expresiones obtenidas son corregidas mediante el cálculo numérico, haciendo uso de gráficas del tipo de la Figura n° 4.10.. La Figura n° 4.13 muestra los valores obtenidos para la probeta F-1-V, representativos del comportamiento general del módulo de Poisson en vainas. Podemos observar un crecimiento con la temperatura para frecuencias bajas y un decrecimiento para altas frecuencias. A temperatura ambiente los valores son prácticamente independientes de la frecuencia de cálculo.

Por otro lado una observación más cuidadosa de los resultados experimentales muestra un ligero desacuerdo con la suposición de comportamiento lineal con la temperatura. En todas las frecuencias y en todas las probetas ensayadas aparece una leve caída del módulo en temperaturas cercanas a 400 K. Aplicamos regresión lineal en dos secciones, con un intervalo entre 400 K y 460 K, el coeficiente de correlación se aproxima más a uno. Aún cuando esto pudiera deberse al menor número de puntos involucrados resulta evidente a simple vista la modificación del comportamiento de las frecuencias entre esas dos temperaturas. La Figura n° 4.14. muestra el comportamiento de dos armónicos normalizados vs. temperatura. Las Figuras n° 4.15. a) y 4.15. b) muestran algunos de los comportamientos del módulo de Poisson a diferentes frecuencias. La línea segmentada indica que ningún cálculo se ha hecho para esas temperaturas, en el supuesto de que existe algún fenómeno de relajación anelástica entre las mismas.

El fenómeno más importante observado es la caída del módulo de Poisson para altas frecuencias y temperaturas. Además resulta llamativo la alta sensibilidad de este módulo a pequeñas modificaciones en las frecuencias de partida. Aún cuando éstas no modifican substancialmente los valores del módulo de Young la influencia sobre el módulo de Poisson es muy grande.

Para barras macizas obtenemos el módulo de Young, mostrado en la Figura n° 4.16., promedio de todas las frecuencias de resonancia y con una expresión dada por

$$E = 99,366 - 0,0642 (T - 273 K)$$

Se observa una ordenada al origen y pendiente similar a las obtenidas en vainas y a las dadas en trabajos previos.

La Figura n^o 4.17. muestra el módulo de Poisson para distintas combinaciones de frecuencias. Puede observarse la ausencia de caída con el aumento de frecuencia de cálculo y la similitud de los valores obtenidos para los distintos pares de cálculo. Todos los valores han sido corregidos numéricamente aún cuando las correcciones son mínimas y prácticamente inexistentes en el módulo de Young.

La barra fue perforada posteriormente con diferentes diámetros interiores y , en cada oportunidad, se midieron las frecuencias de resonancia. Como era de esperar las frecuencias, especialmente los armónicos superiores, comenzaron a decrecer a medida que aumentaba el diámetro de la perforación. Fueron perforados siete diámetros diferentes hasta llegar a un espesor de tubo similar a las vainas de elementos combustibles. Para dos de esos diámetros se muestra el módulo de Poisson en función de la temperatura para diferentes combinaciones de frecuencias de resonancia. De las Figuras n^o 4.18. y 4.19. puede verse que la dispersión aumenta a medida que el diámetro interior crece y que los armónicos superiores proveen un módulo de Poisson que decae a altas temperaturas.

4. 4. DISCUSION

Partiendo de las ecuaciones 2.32. y para $\theta = \pi/2$ obtenemos

$$\epsilon_3' = \frac{S_{11} + \left(S_{11} - \frac{\delta(S_{11}-S_{12})}{2} \right) \omega^2 \epsilon_{\sigma_{S_{11}-S_{12}}}^2 - i\omega \epsilon_{\sigma_{S_{11}-S_{12}}} \frac{\delta(S_{11}-S_{12})}{2}}{1 + \omega^2 \epsilon_{\sigma_{S_{11}-S_{12}}}^2} \quad 4.15.$$

$$\epsilon_1' = \left\{ (S_{12} \cos^2 \psi + S_{13} \sin^2 \psi) + \left[S_{12} \cos^2 \psi + S_{13} \sin^2 \psi + \frac{\delta(S_{11}-S_{12})}{2} \cos^2 \psi \right] \omega^2 \epsilon_{\sigma_{S_{11}-S_{12}}}^2 + i\omega \epsilon_{\sigma_{S_{11}-S_{12}}} \frac{\delta(S_{11}-S_{12})}{2} \cos^2 \psi \right\} \quad 4.16.$$

$$\% \left(1 + \omega^2 \epsilon_{\sigma_{S_{11}-S_{12}}}^2 \right)$$

Estas ecuaciones suponen una tensión aplicada en forma perpendicular al eje $\langle c \rangle$ y una contracción ϵ_1' . Para $\psi = 0$ ϵ_1' es una contracción a lo largo del eje $\langle c \rangle$ y para $\psi = \pi/2$ la contracción se produce sobre un eje contenido en el plano basal.

Si $\psi = 0$

$$\begin{aligned}
 \nu &= -\frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_3} = \nu^{(1)} - i \nu^{(2)} = \\
 &= - \left[s_{11} s_{12} + (s_{11} - \delta_{s_{11}-s_{12}}/2) (s_{12} + \delta_{s_{11}-s_{12}}/2) \omega^2 c_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2 \right. \\
 &\quad \left. + i \omega c_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}} \delta_{s_{11}-s_{12}} (s_{11} + s_{12}) \right] / \left[s_{11}^2 + (s_{11} - \delta_{s_{11}-s_{12}}/2) \omega^2 c_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

de donde si

$$\omega c_{\sigma} \longrightarrow 0$$

$$\nu^{(1)} = -s_{12}/s_{11}$$

$$\omega c_{\sigma} \longrightarrow \infty$$

$$\nu^{(1)} = -\frac{s_{12} + \frac{\delta_{s_{11}-s_{12}}}{2}}{s_{11} - \frac{\delta_{s_{11}-s_{12}}}{2}} \tag{4.18}$$

Para valores clásicos de las constantes elásticas puede observarse que, en general, $\nu^{(1)}$ decrece cuando ωc_{σ} aumenta.

Si $\psi = \pi/2$

$$\nu = -\frac{s_{13} \left[s_{11} + (s_{11} - \frac{\delta_{s_{11}-s_{12}}}{2}) \omega^2 c_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2 + i \omega c_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}} \frac{\delta_{s_{11}-s_{12}}}{2} \right]}{s_{11}^2 + (s_{11} - \frac{\delta_{s_{11}-s_{12}}}{2})^2 \omega^2 c_{\sigma_{s_{11}-s_{12}}}^2} \tag{4.19}$$

de donde si

$$\omega c_{\sigma} \longrightarrow 0$$

$$\nu^{(1)} = -s_{13}/s_{11}$$

$$\omega c_{\sigma} \longrightarrow \infty$$

$$\nu^{(1)} = -\frac{s_{13}}{s_{11} - \frac{\delta_{s_{11}-s_{12}}}{2}} \tag{4.20}$$

En este caso debe esperarse un aumento de $\nu^{(1)}$ cuando ωc_{σ} aumenta.

Por otro lado podemos calcular las pendientes de las relaciones de dispersión $\omega(k)$ en función de k en la zona lineal, para cristales de simetría hexagonal [10]. Estas velocidades pueden ser calculadas mediante la teoría elástica de materiales anisótropos por la ecuación:

$$\left(\rho \omega^2 \delta_{im} - c_{iklm} k_k k_l \right) u_m = 0 \quad 4.21.$$

donde u_m son las componentes del vector desplazamiento, c_{iklm} son las constantes elásticas y k_l las componentes del vector de onda. Con la ecuación secular

$$\left| c_{iklm} k_k k_l - \rho \omega^2 \delta_{im} \right| = 0 \quad 4.22.$$

y $\vec{k} = [k_x, k_y, k_z]$ formando un ángulo θ con el eje $\langle c \rangle$ podemos calcular los tres modos y direcciones normales para algunas direcciones características del cristal.

Si $\theta = \pi/2$, $\vec{k} = [0, k, 0]$ y los tres modos normales son:

$$\begin{aligned} \omega_t = \omega_1 &= k \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho} \right)^{1/2} & \vec{u} &= [1, 0, 0] \\ \omega_p = \omega_2 &= k \left(\frac{c_{11}}{\rho} \right)^{1/2} & \vec{u} &= [0, 1, 0] \\ \omega_t = \omega_3 &= k \left(\frac{c_{44}}{\rho} \right)^{1/2} & \vec{u} &= [0, 0, 1] \end{aligned} \quad 4.23.$$

donde los subíndices p y t significan longitudinal y transversal, respectivamente.

Si $\theta = 0$, $\vec{k} = [0, 0, k]$ y los tres modos normales son

$$\begin{aligned} \omega_t = \omega_3 &= k \left(\frac{c_{44}}{\rho} \right)^{1/2} & \vec{u} &= [1, 0, 0] \\ \omega_t = \omega_3 &= k \left(\frac{c_{44}}{\rho} \right)^{1/2} & \vec{u} &= [0, 1, 0] \\ \omega_p = \omega_c &= k \left(\frac{c_{33}}{\rho} \right)^{1/2} & \vec{u} &= [0, 0, 1] \end{aligned} \quad 4.24.$$

Para estas direcciones los modos normales resultan perpendiculares. La Figura 4.20. muestra las velocidades en función de la temperatura, calculadas con las constantes elásticas de monocristal de circonio. [3]. Las velocidades son obtenidas como

$$v_i = \frac{\partial \omega_i(k)}{\partial k} \quad 4.25.$$

y fueron calculadas entre temperatura ambiente y 723 K.

Cuando se fuerzan vibraciones longitudinales la longitud de onda es determinada por la longitud de la probeta y las frecuencias son impuestas por el dispositivo excitador. La dirección del vector de onda se halla a lo largo del eje longitudinal de la probeta y podemos calcular las "relaciones de dispersión" longitudinales, para cada uno de los armónicos, mediante

$$\frac{\omega(k)}{k} = \frac{2 f_n L}{n} [1 + \alpha \Delta T] \quad 4.26.$$

La Figura nº 4.20. muestra los resultados experimentales obtenidos. Estas "velocidades" resultan ser promedios no sólo sobre la anisotropía longitudinal sino también sobre la transversal, debido al acoplamiento de las vibraciones longitudinales con las transversales.

El mayor acoplamiento entre las vibraciones longitudinales y transversales que presentan las vainas ha sido mostrado en las Figuras nº 4.7. y 4.8.. Los armónicos de orden superior decrecen respecto de los correspondientes a barra maciza. Por otro lado en la Figura nº 1.8. del Capítulo I mostramos la variación del módulo de Poisson en función de la temperatura para varias direcciones características. De aquí puede verse que el acoplamiento, a bajas frecuencias se establece con una dirección transversal a lo largo del eje $\langle c \rangle$ de la celda. Por el contrario, a altas frecuencias, el acoplamiento se establece con una deformación transversal perpendicular al eje $\langle c \rangle$. Estas dos orientaciones particulares están presentes en la vaina como casos extremos. La Figura nº 4.21. muestra la distribución de polos (0002) en una vaina, obtenida por difracción de rayos X. El modo normal transversal perpendicular al eje $\langle c \rangle$ tiene una pendiente $\omega(k)/k$ menor que las otras. El acoplamiento con él ocurre solamente a altas frecuencias, cuando la velocidad promedio $\omega(k)/k$ del policristal es favorable. El módulo de Poisson muestra, entonces, ambos valores extremos, uno para vibraciones transversales del tipo mostrado en la Figura nº 4.22.a) ($\psi = 0$) y otro para vibraciones del tipo mostrado en la Figura nº 4.22.b) ($\psi = \pi/2$). La Figura nº 4.23. muestra la orientación re-

lativa de las celdas hexagonales en cada caso. El acoplamiento entre la vibración longitudinal y ambas transversales se produce a diferentes frecuencias, la primera a bajas frecuencias y la segunda a altas frecuencias. A temperatura ambiente este fenómeno no es obvio debido a la cercanía de los valores del módulo de Poisson para todas las orientaciones.

Las barras cilíndricas macizas presentan un acoplamiento muy pobre con la deformación transversal. Solamente el modo transversal paralelo al eje $\langle c \rangle$ es activado. La figura nº 4.24. muestra la distribución de los polos (0002) , obtenida por difracción de neutrones por S.R. Mac Ewen [11], para barras de Zry-4. Muestra la distribución aleatoria de ejes $\langle c \rangle$ sobre un plano perpendicular al eje longitudinal de la probeta, común a todas las barras de circonio similarmente tratadas. Como puede verse el módulo de Poisson no detecta deformaciones transversales distintas a aquellas sobre el eje $\langle c \rangle$.

Las Figuras nº 4.25 y 4.26. muestran los polos (0002) de cáscaras cilíndricas cortadas de la misma barra que fue perforada y medida. Los diámetros medios son de 3.7 y 5 mm, respectivamente, valores muy cercanos a los que se presentan en las Figuras nº 4.18. y 4.19.. Podemos observar que la textura se acerca a la textura común de vainas cuando el diámetro crece. Los polos (0002) se aproximan a la dirección radial partiendo de una distribución uniforme de los mismos entre la dirección radial y la tangencial. El módulo de Poisson en barras se presenta como único dado que no tiene posibilidad de establecerse otro modo de deformación transversal que el radial. El módulo de Poisson medido en barras macizas sería un promedio de las orientaciones existentes al eje $\langle c \rangle$.

Los efectos anelásticos en el módulo de Poisson podrían estar representados por las curvas mostradas en las Figuras nº 4.15. a) y b). Los aumentos y disminuciones del módulo de Poisson, debidos a efectos anelásticos, estarían bien descritos por las ecuaciones 4.18. y 4.20.. Sin embargo, debido a las dificultades matemáticas y experimentales de evaluación de este módulo, debemos tomar con cuidado estos resultados. Solamente alguna información cualitativa acerca de los mecanismos microscópicos podría ser obtenida.

En cuanto a los valores de los constantes elásticas se reconocen las de circonio puro en las referencias de Rankin [12]

$$\begin{aligned} \nu_0^{(1)}(\omega\tau \rightarrow 0) &= -\frac{S_{12}}{S_{11}} = 0,453 \\ \nu_{\pi/2}^{(1)}(\omega\tau \rightarrow 0) &= -\frac{S_{13}}{S_{11}} = 0,194 \end{aligned} \quad [4.27]$$

Además, si la dependencia de \hat{c} con la temperatura es tomada, como se hace usualmente [18], como

$$\hat{c} = \hat{c}_0 \exp [\Delta H/kT] \quad 4.28$$

donde \hat{c}_0 es el factor pre-exponencial y ΔH la energía de activación, obtenemos

$$\ln(\omega\tau) = \ln(\omega\tau_0) + \Delta H/kT \quad 4.29$$

mostrando que $\ln(\omega\tau)$ cambia linealmente con T^{-1} . Esto significa que si $\omega\tau$ aumenta T^{-1} aumenta [T decrece]. Los datos de la Fig. n° 4.15 a) son graficados en la Fig. n° 4.27 como función de T^{-1} . La Fig. n° 4.28 muestra las curvas obtenidas extrapolando el suave decrecimiento de alta temperatura, considerándolo como un fondo a partir del cual se establece el nuevo fondo de baja temperatura, después del cambio anelástico. Este procedimiento muestra que ν decrece desde aproximadamente 0,374 a 0,354 para los armónicos 3-5. Para los armónicos 1-3, en cambio, ν aumenta desde aproximadamente 0,34 a 0,356. Debe puntualizarse que los valores de las ecuaciones 4.27 corresponden a monocristales en tanto que las curvas obtenidas corresponden a policristales texturados.

La curva 1-3 de la Fig. n° 4.28 muestra el comportamiento típico esperado para $\nu_{\pi/2}^{(1)}$ y la curva 3-5 el comportamiento característico de $\nu_0^{(1)}$. Además, teniendo en cuenta las ecuaciones 4.18 y 4.20 es posible calcular $\delta_{[s_{11}-s_{12}]/[s_{11}-s_{12}]}$ a partir de los valores asintóticos medidos para cada curva. Se obtienen los valores aproximados siguientes:

$$\delta_{[s_{11}-s_{12}]/[s_{11}-s_{12}]} = 1 \times 10^{-1} \quad \text{para la curva 1-3}$$

$$\delta_{(s_{11}-s_{12}) / (s_{11}-s_{12})} = 5 \times 10^{-2} \quad \text{para la curva 3-5}$$

Estos valores, además de ser similares entre sí, son del orden de magnitud de los obtenidos a partir del comportamiento de relajación de los módulos de Young y de corte [18].

Esto confirmaría la hipótesis dada al cambio abrupto observado entre 400 K y 450 K para el módulo de Poisson, esto es, que se produce por una relajación anelástica. Es interesante como las pequeñas perturbaciones presentes en las frecuencias de resonancia [Fig. n° 4.14] se ven magnificadas cuando el módulo de Poisson es considerado. Esto podría indicar que el defecto responsable del efecto anelástico produce una distorsión que es máxima en una dirección perpendicular a la tensión aplicada. Es claro que se necesita mayor información experimental para caracterizar el defecto involucrado en el proceso de relajación.

4. 5. CONCLUSIONES

La anisotropía elástica y anelástica de la deformación transversal, cuando una tensión longitudinal es aplicada, es la razón de la dispersión de los valores experimentales del módulo de Poisson. Puede decirse que los valores que influyen el valor de este módulo son tantos que no existe un valor real independiente de las características del método de medición. Quizás todos los valores previos podrían tomarse como válidos bajo el estado particular de tensiones y deformaciones que implica el método experimental. Más aún, las propiedades elásticas y anelásticas mostradas por el módulo de Poisson no son sólo dependientes de la textura. Los modos como se acoplan las diferentes deformaciones son también importantes y los valores obtenidos son verdaderos dentro de las limitaciones particulares del método. De todos modos es necesario estar seguro de la corrección del tratamiento matemático proporcionado a los datos experimentales. En conclusión, debemos tener en cuenta que el módulo de Poisson obtenido por métodos dinámicos no constituye una medida de una efectiva contracción transversal sino un acoplamiento con diferentes modos de vibración transversal. En nuestro caso un modo es el radial mostrado en la Fig. n° 4.22 a) y el otro el que se muestra en la Fig. n° 4.22 b).

Acerca de los mecanismos que ocasionan el comportamiento anelástico no podemos sugerir ninguno en particular debido a la ausencia de mediciones simultáneas de fricción interna. La literatura especializada en fricción interna en circonio (12-15) describe varios mecanismos que, a la suposición de un comportamiento del tipo Arrhenius, llevarían a relajaciones en el módulo de Young en las temperaturas consideradas. Todos ellos son debidos a H o interacciones H-dislocaciones o H-maclas. El bajo valor de la relajación podría deberse a la relativamente alta temperatura a que estos mecanismos están actuando. El hidrógeno a estas temperaturas difundiría muy rápidamente y su interacción con otros defectos y con la red sería muy pequeña.

TABLA 4. 1.

Dimensiones y densidades de las vainas y barras utilizadas

Probeta	a (mm)	b (mm)	L (mm)	ρ (g cm ⁻³)
P-1-V	5,39	5,95	149,941	6,680
P-2-V			150,017	
P-3-V			149,958	
P-4-V			149,982	
P-5-V			149,745	
P-1-M	6,185		149,863	6,587
P-2-M			149,959	

REFERENCIAS

1. D.O. Northwood, I.M. London and L.E. Bahen. J. of Nucl. Mater. 55 [1975] 299.
2. D.O. Northwood. CRNL-1227. Atomic Energy of Canada Limited. [Dic. 1974].
3. E.S. Fischer and C.J. Renken. Phys.Rev. 135 [1964] A 482.
4. H.S. Rosenbaum and J.E. Lewis. J. of Nucl. Mater., 67 [1977] 273-282.
5. H.E. Rosinger, I.G. Ritchie and A.J. Shillinglaw. AECL- 5231. Atomic Energy of Canada Limited. [Sept. 1975]
6. A. Padel et A. Groff, J. of Nucl. Mater., 59 [1976] 325.
7. F. Povoio, R. Bordoni, J.A. Casario and C. Coroli. Informe Interno. C.N.E.A. [1979].
8. L.R. Burnell, J.L. Bates and G.B. Mellinger. J. of Nucl. Mater., 116 [1983] 219.
9. E.B. Schwenk, K.R. Wheeler, G.D. Shearer and R.T. Webster. J. of Nucl. Mater. 73 [1978] 129.
10. L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Theory of Elasticity. Adison-Wesley. Bristol [1964].
11. S.R. Mac Ewen and C.N. Tomé. Proc. of 7th. Conference on "Zirconium alloys in Nuclear Industry" Strasbourg-France. [1985].
12. F. Povoio and E.A. Bisogni, J. of Nucl. Mater. 29 [1969] 82.
13. E.J. Savino and E.A. Bisogni. J. of Nucl. Mater., 50 [1974] 298.
14. L. Fernandez and F. Povoio. J. of Nucl. Mater., 66 [1977] 79.
15. L. Fernandez and F. Povoio, Phil. Mag., 31. 5 [1975] 1081.
16. P.E. Armstrong and H.L. Brown. Trans. of AIME , 230 [1964] 962.
17. J.A. Rayfield. B. Sc. Thesis. Dep. of Engineering Science. University of Toronto. [1966].

LEYENDAS DE FIGURAS

4.1. Módulo de Young para aleaciones ricas en circonio. Valores experimentales previos y previsiones teóricas.

- — — — — Zr-Cr-Fe (experim.) [1]
- · - · - · - · - Zr policristalino (experim.) [16]
- - - - - - Zry-4 (experim.) [5]
- .. Zry-2 (Experim.) [5]
- ▲ ————— ▲ Promedio de Voigt
- ————— ● Promedio de Reuss
- + ————— + Tubo de presión Zr-2,5Nb. E normal [cálculo a partir de la función distribución de orientaciones cristalinas] [2].

4.2. Módulo de corte para aleaciones ricas en circonio. Valores experimentales previos y previsiones teóricas.

- — — — — Zry-4 Vainas recocidas a 1073 K. (experim.)(8).
- - - - - Zr-Cr-Fe (experim.) [1].
- - - - - Zry-2 (experim.) [1].
- - - - - Zr-2,5 Nb (experim.) [17]
- ▲ ————— ▲ Promedio de Voigt
- ————— ● Promedio de Reuss
- + ————— + Tubo de presión Zr-2,5 Nb. G normal [cálculo a partir de la función distribución de orientaciones cristalinas] [2].

4.3. Módulo de Poisson para aleaciones ricas en circonio. Valores experimentales previos y previsiones teóricas.

- - - - - Zr-Cr-Fe (experim.) [1]
- · - · - · - · - Zry-2 (experim.) [1]
- - - - - Zr- 2,5 Nb (experim.) [1]
- — — — — Zry-4. Vainas recocidas a 1073 K. (experim.) [8].
- ▲ ————— ▲ Promedio de Voigt
- ————— ● Promedio de Reuss
- + ————— + Tubo de presión Zr-2,5 Nb. ν normal [cálculo a partir de E normal y G normal de Figuras nº 4.1. y 4.2.)

4.4. Frecuencia de resonancia en función de la razón radio interior-radio exterior de una barra maciza perforada. Probeta P-2-M.

$\nu = 0,33.$

4. 5. Frecuencia de resonancia fundamental en función del módulo de Poisson para vainas de Zry-4. Probeta F-1-V. $E = 99,8$ GPa.
4. 6. Frecuencia de resonancia fundamental en función del radio interior, para diferentes valores del módulo de Young. Probeta P-1-V. $\nu = 0,33$
4. 7. Frecuencias de resonancia en función del módulo de Poisson para barras macizas. Probeta P-1-M; $E = 98,0$ GPa.
4. 8. Frecuencias de resonancia en función del módulo de Poisson para vainas. Probeta P-1-V; $E = 99,8$ GPa.
4. 9. Curvas de corrección ν_{ap} vs. ν_{real} para barras macizas.
- 4.10. Curvas de corrección ν_{ap} vs. ν_{real} para vainas.
- 4.11. Frecuencias de resonancia normalizadas en función de la temperatura. Armónicos 1ro. y 7mo. probeta P-1-V.
- 4.12. Módulo de Young de probeta P-1-V. Frecuencia fundamental y 1er. y 3er. armónicos impares.
- 4.13. Módulo de Poisson en función de la temperatura para probeta P-1-V.
- 4.14. Frecuencias de resonancia normalizadas en función de la temperatura. Probeta P-1-V. Aproximación lineal en dos secciones para el armónico fundamental y el armónico de orden siete.
- 4.15. Módulo de Poisson de probeta P-1-V suponiendo relajación entre 400 K y 460 K. a) Combinación de 1er. y 3er. armónicos y 3er. y 5to. armónicos.
b) Combinación de 7mo.-9no. armónicos.
- 4.16. Módulo de Young para barras macizas. Promedio de todas las frecuencias de resonancia medidas.
- 4.17. Módulo de Poisson de barras macizas en función de la temperatura. Combinación de diferentes frecuencias de resonancia.
- 4.18. Módulo de Poisson de barra maciza perforada en función de la temperatura. Combinación de diferentes frecuencias de resonancia. $a = 3,5$ mm $b = 6,184$ mm.

- 4.19. Módulo de Poisson de barra maciza perforada en función de la temperatura. Combinación de diferentes frecuencias de resonancia. $a = 4,5$ mm $b = 6,184$ mm.
- 4.20. Velocidad de ondas elásticas en función de la temperatura. para circonio monocristalino. "Velocidades promedio" en vibración longitudinal marcadas con números de 1 a 11 indicativos del armónico.
- 4.21. Distribución de polos (0002) en vainas de Zry-4 obtenida por difracción de rayos X.
- 4.22. Modos de acoplamiento vibratorio transversal en una vaina.
a) Modo radial. b) Modo anular.
- 4.23. Orientación de las celdas hexagonales respecto de la sección transversal de la vaina.
- 4.24. Distribución de polos (0002) para barras macizas de Zry-4 obtenida por difracción de neutrones por S.R. Mac Ewen (11).
- 4.25. Distribución de polos (0002) de barra maciza perforada con un diámetro medio de cáscara de 3,7 mm. Obtenida por difracción de rayos X.
- 4.26. Distribución de polos (0002) para barras macizas de Zry-4 obtenida por difracción de rayos X. Diámetro medio de cáscara: 5 mm.
- 4.27. Módulo de Poisson en función de T^{-1} para diversas combinaciones de armónicos.
- 4.28. Relajación del módulo de Poisson, para dos combinaciones diferentes de frecuencias de resonancia, en función de la inversa de la temperatura absoluta.

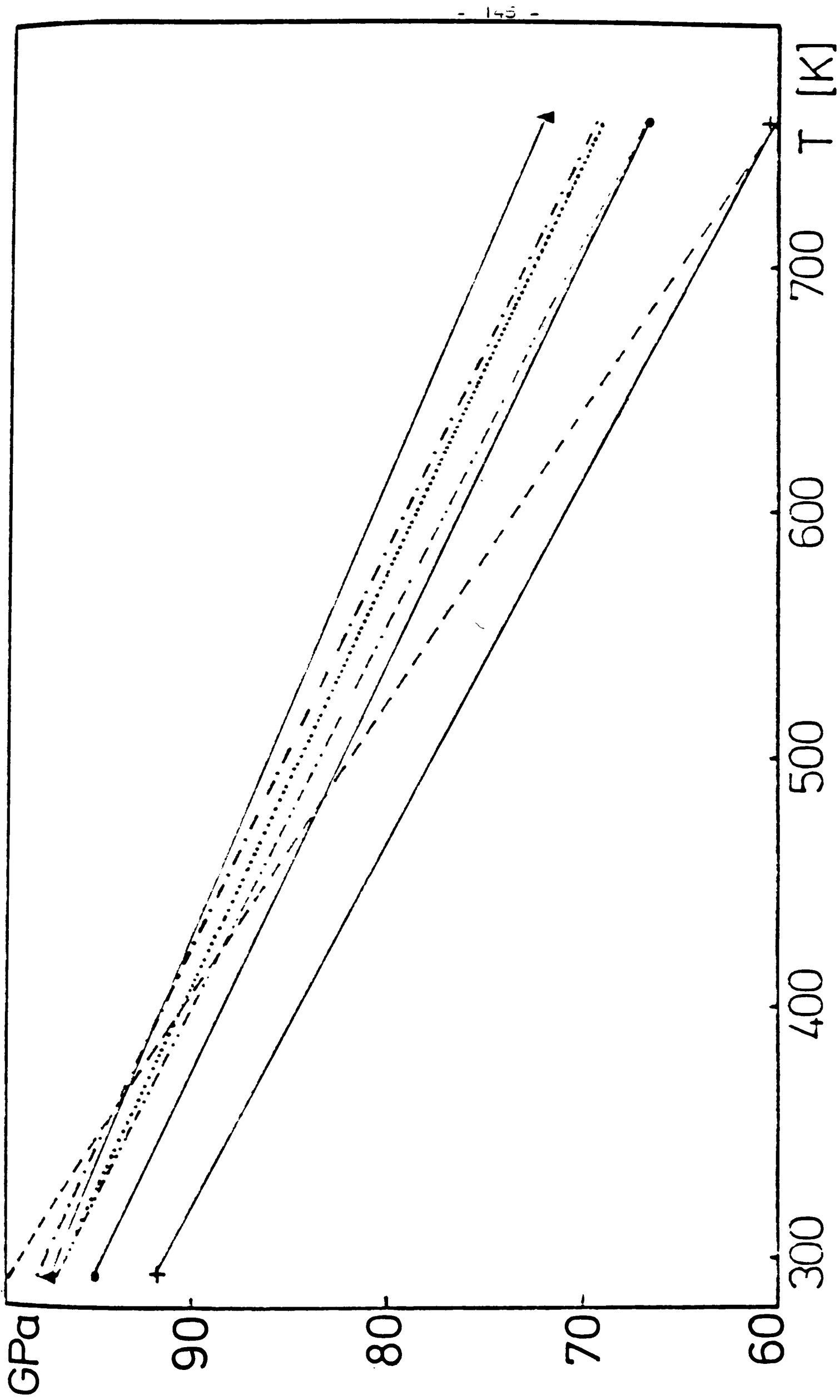


Fig. n° 4.1.

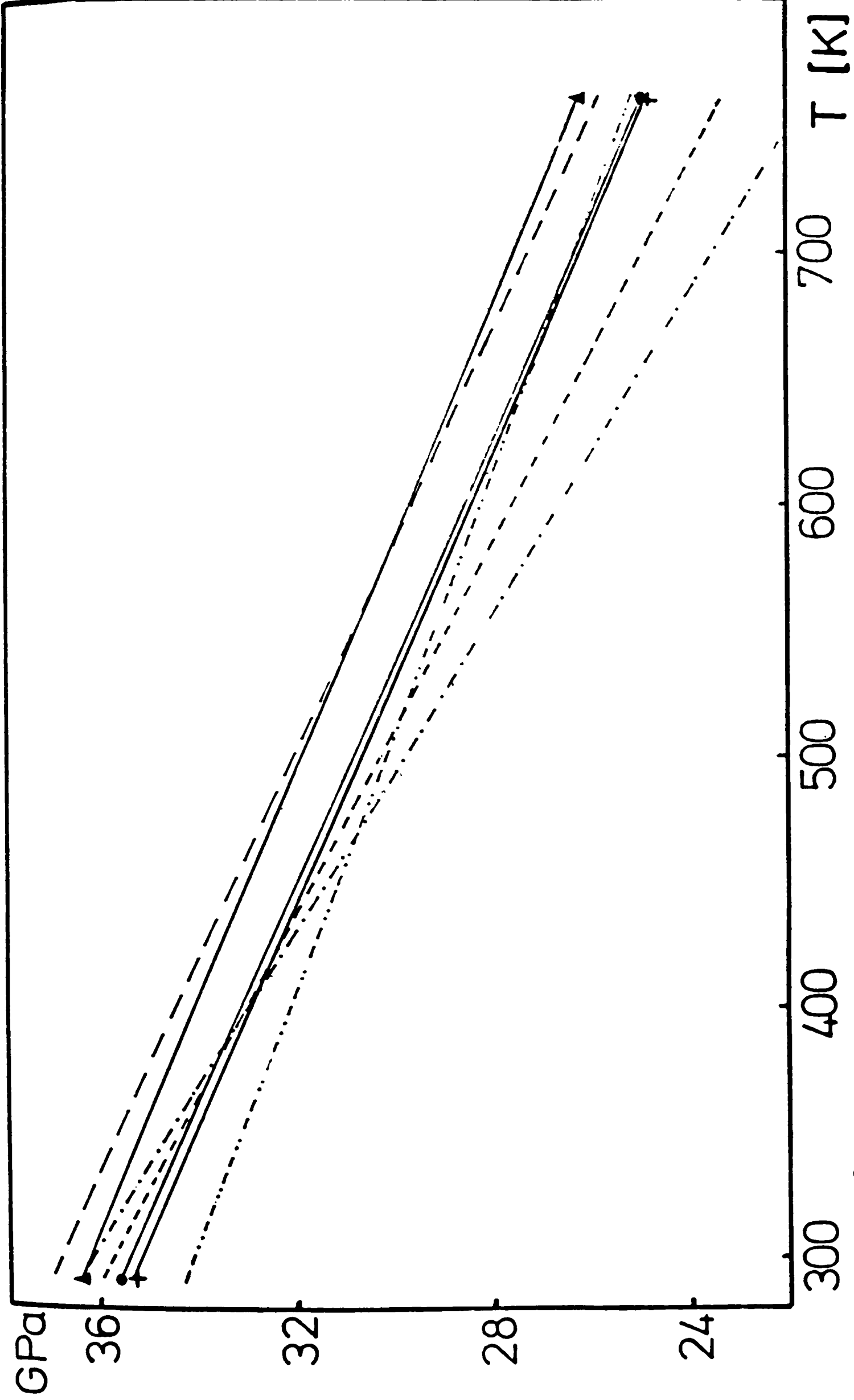


Fig. n° 4. 2.

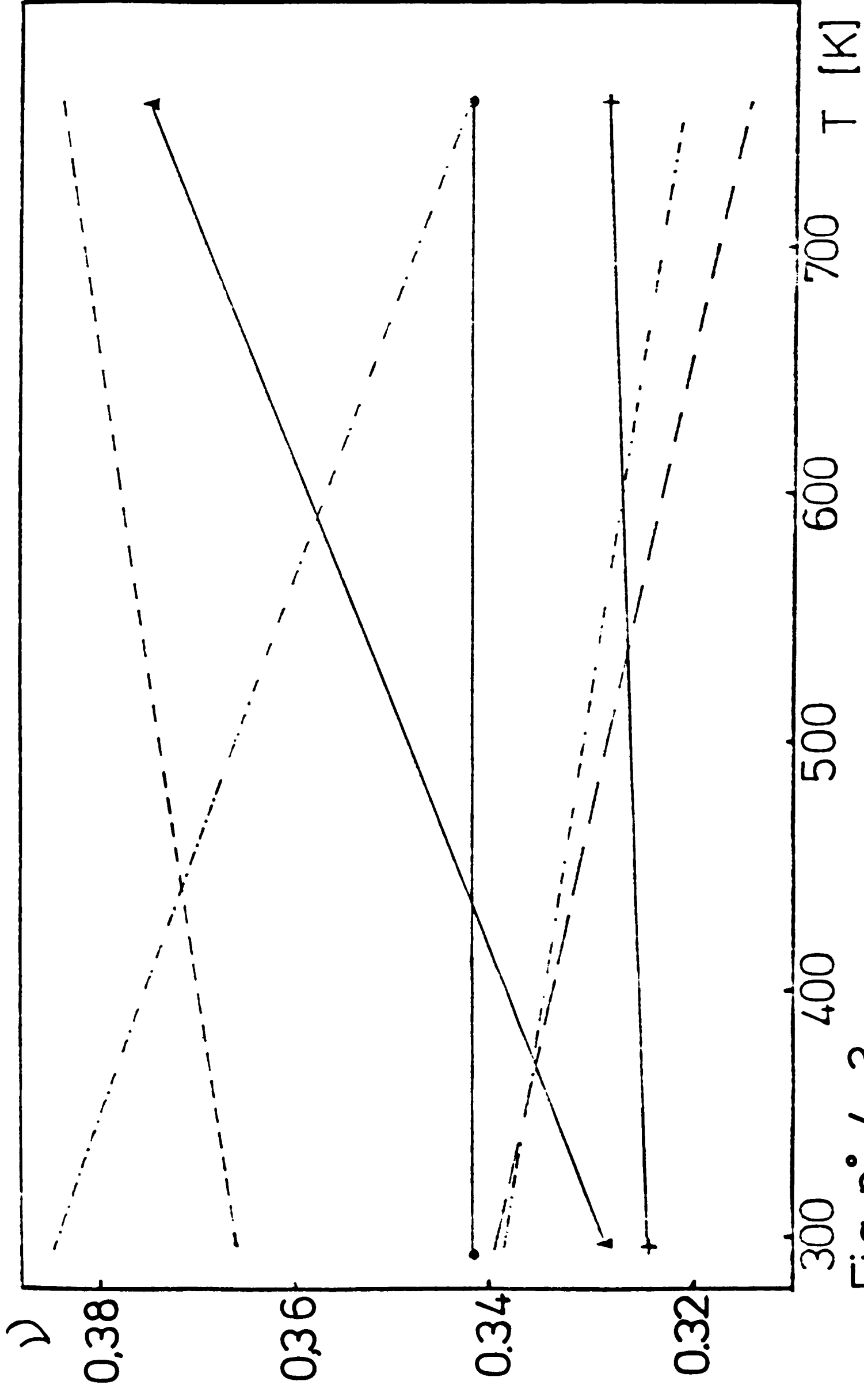


Fig. n° 4. 3.

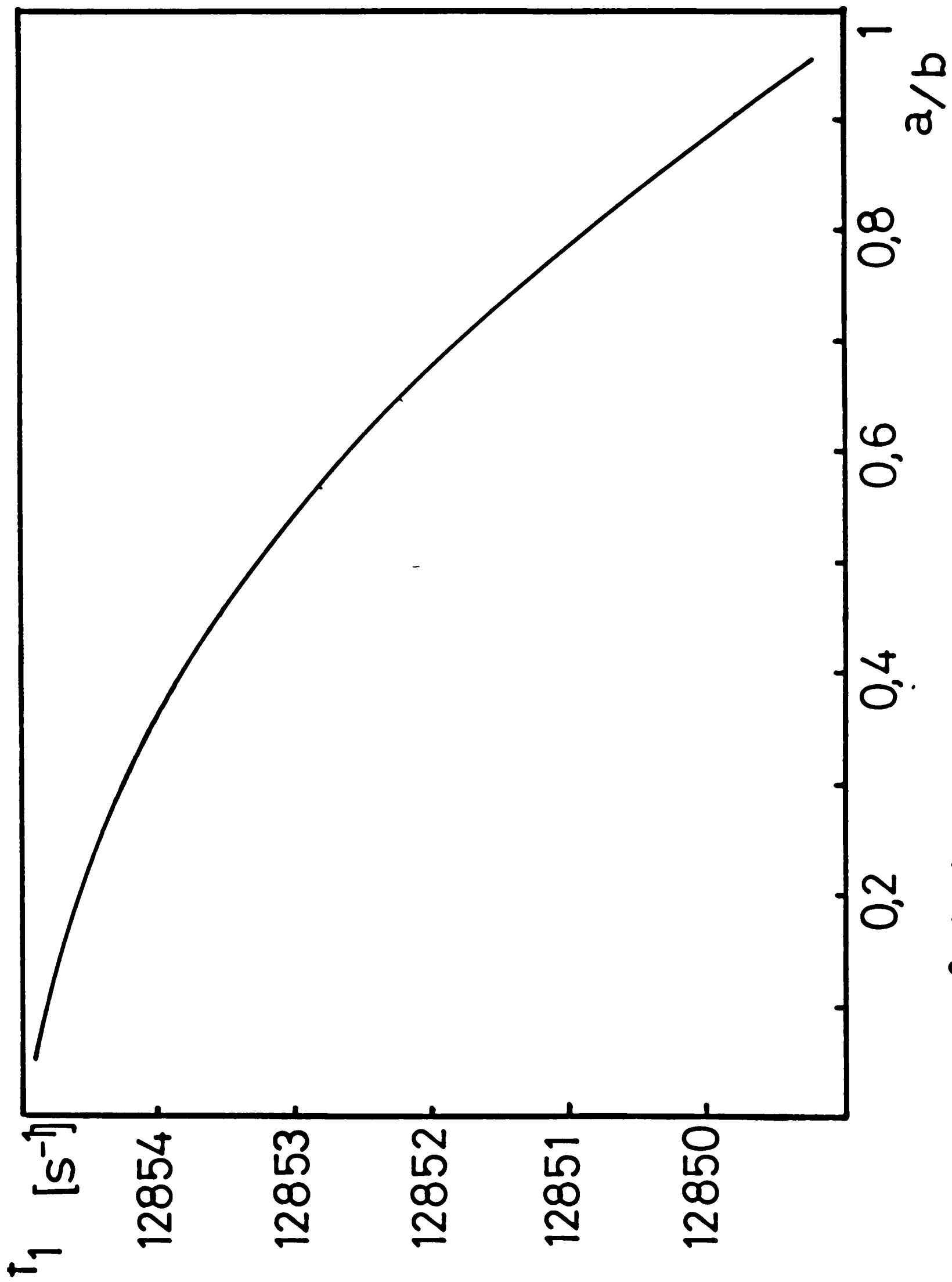


Fig. n° 4.4.

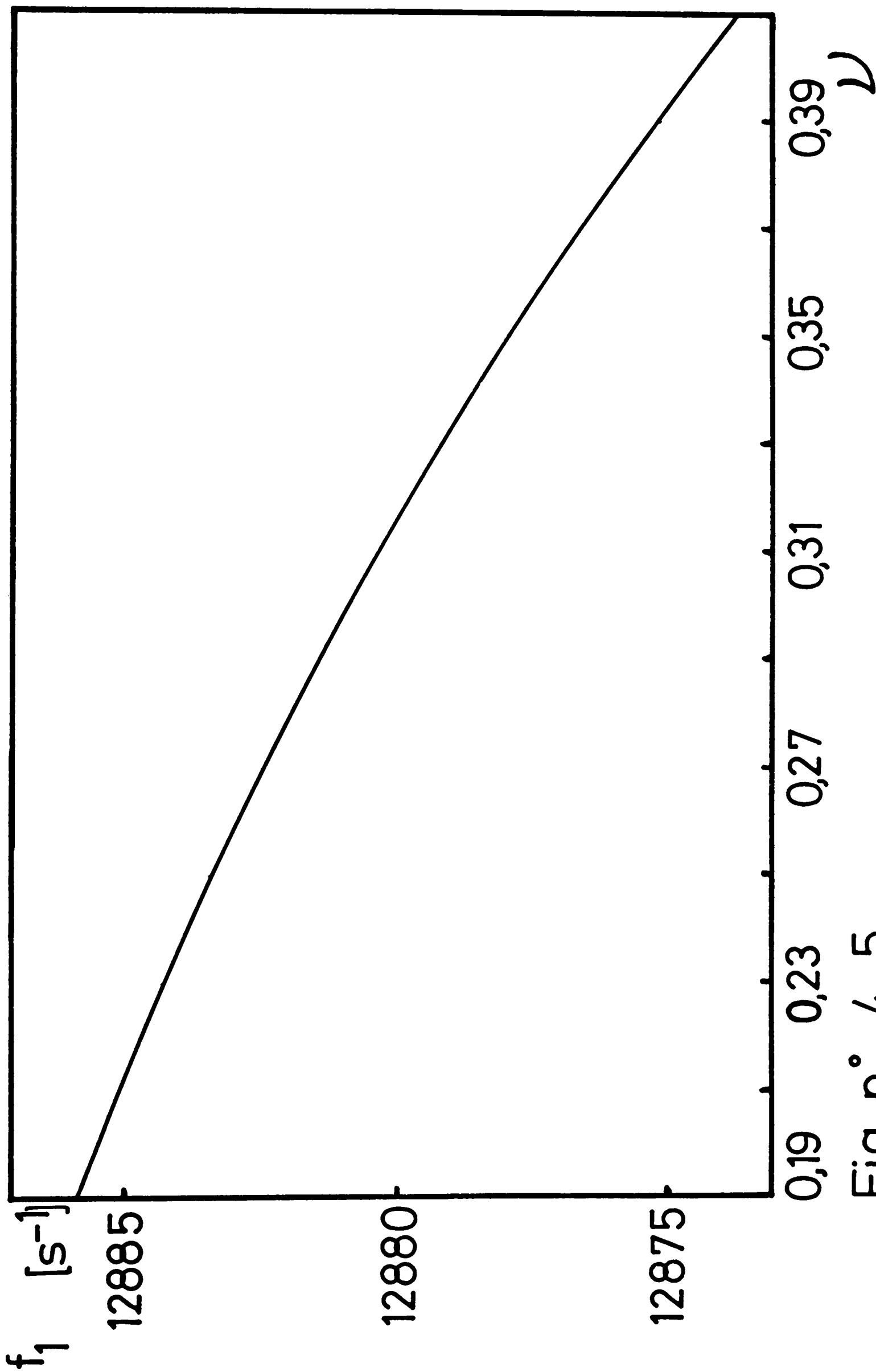


Fig. n° 4.5.

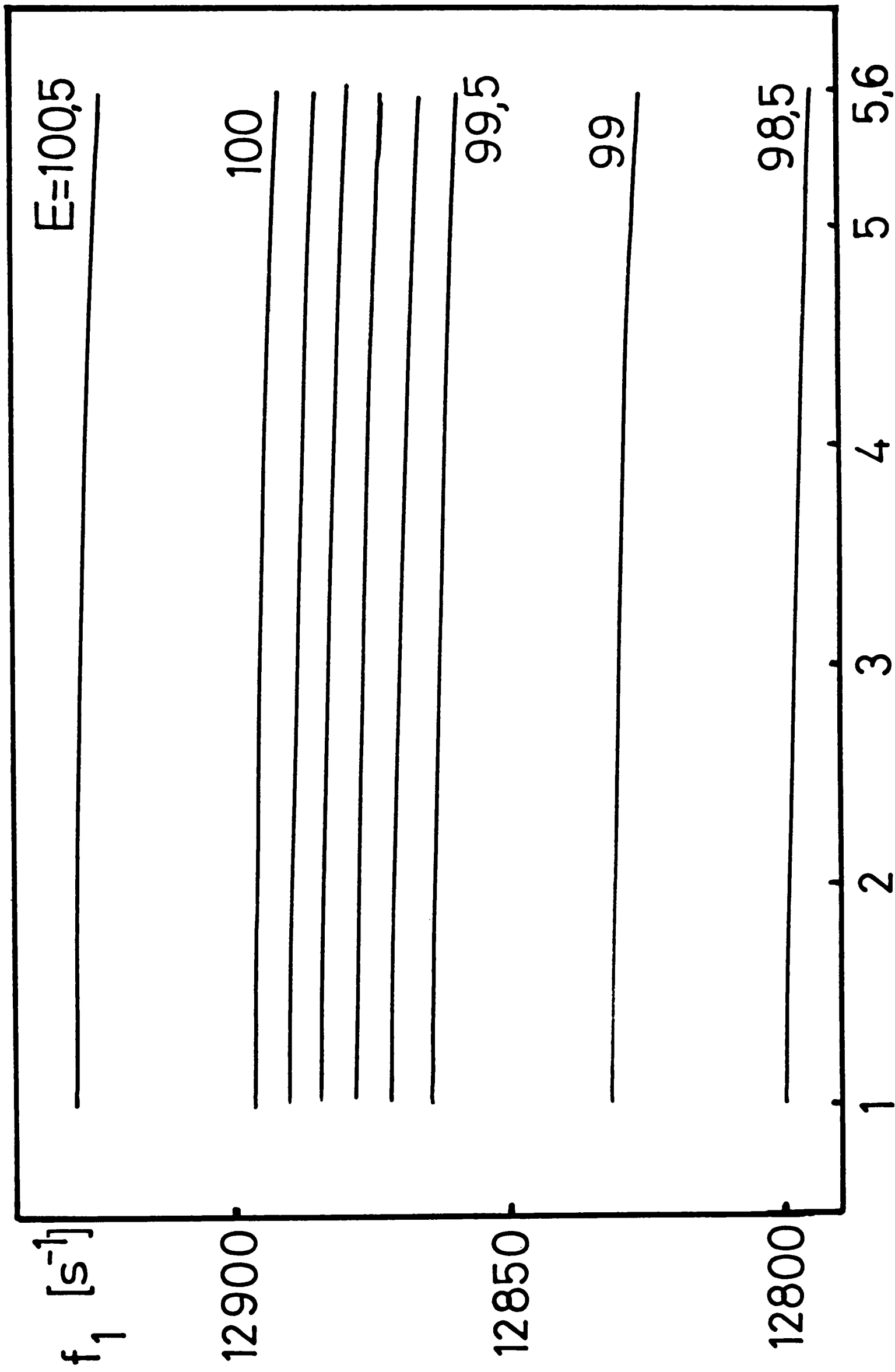
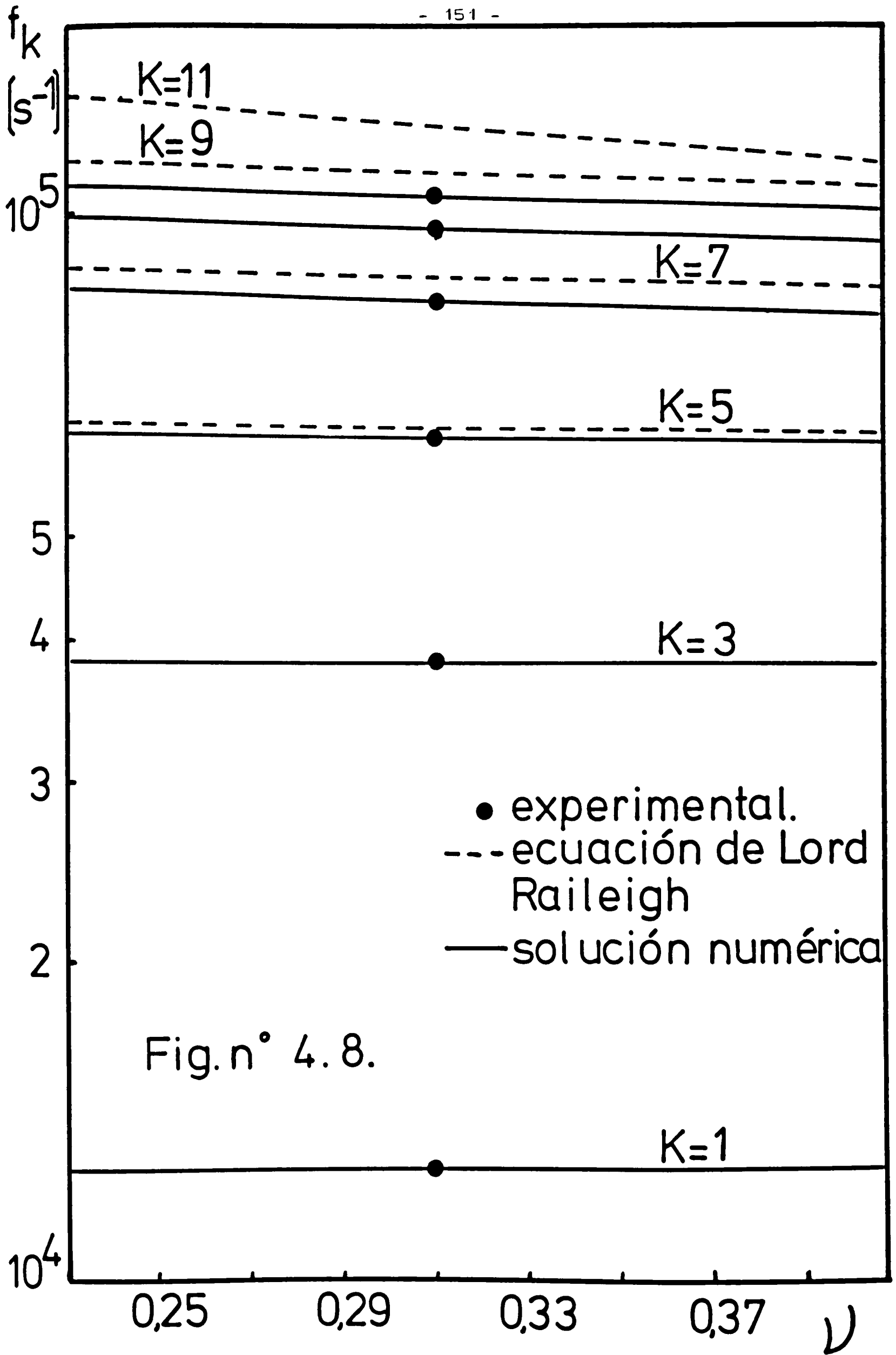


Fig. n° 4.6.



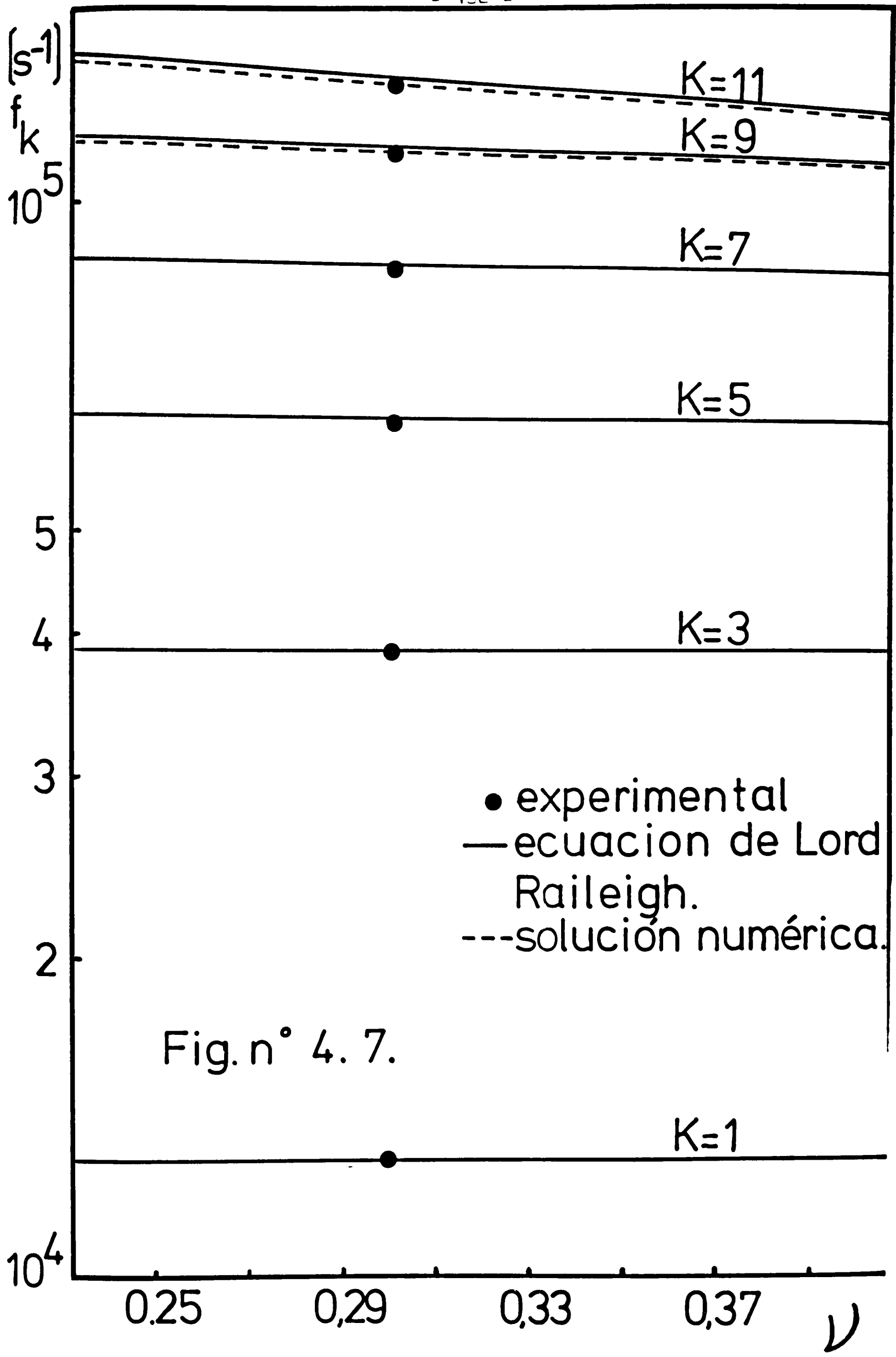


Fig. n° 4. 7.

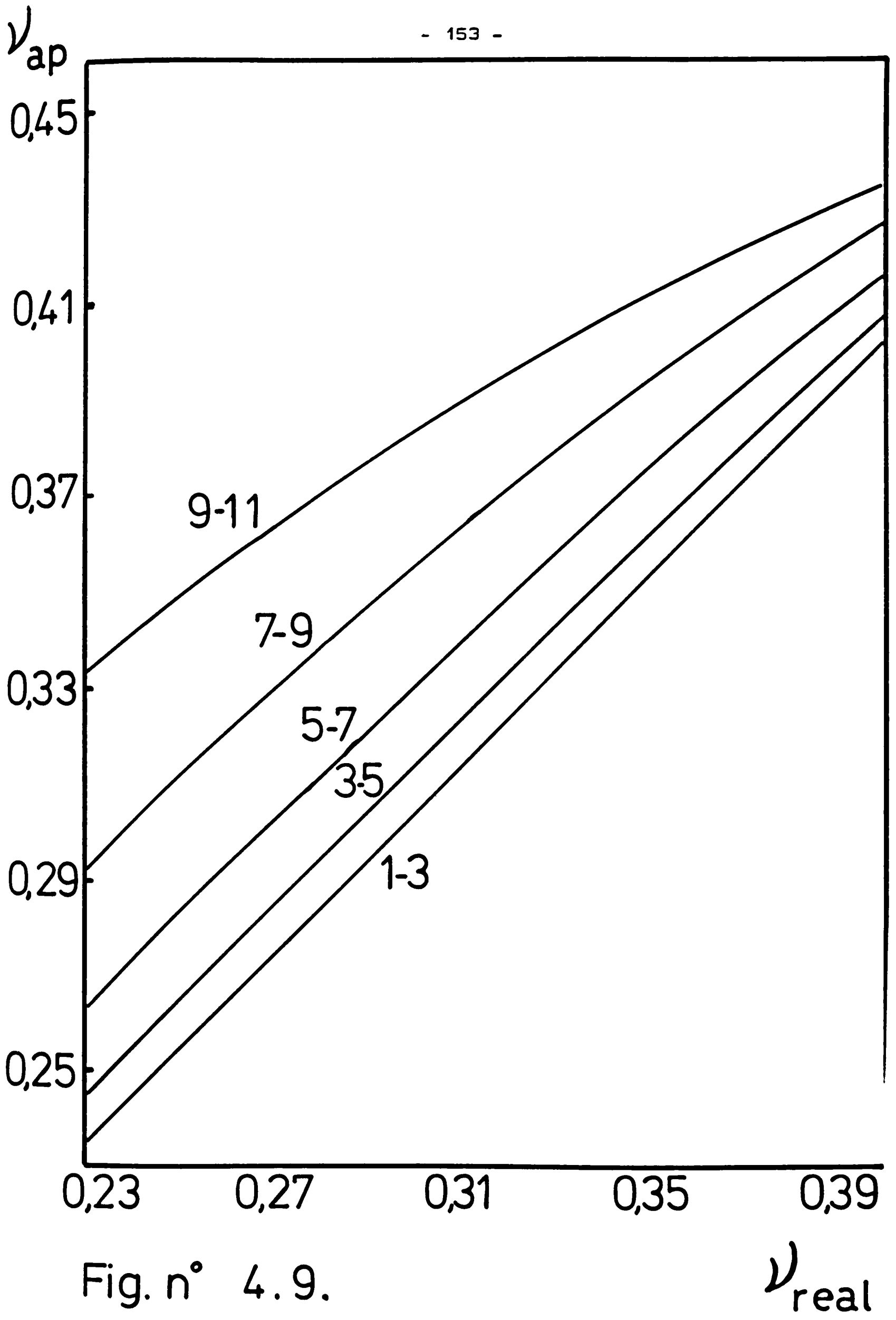


Fig. n° 4.9.

ν_{real}

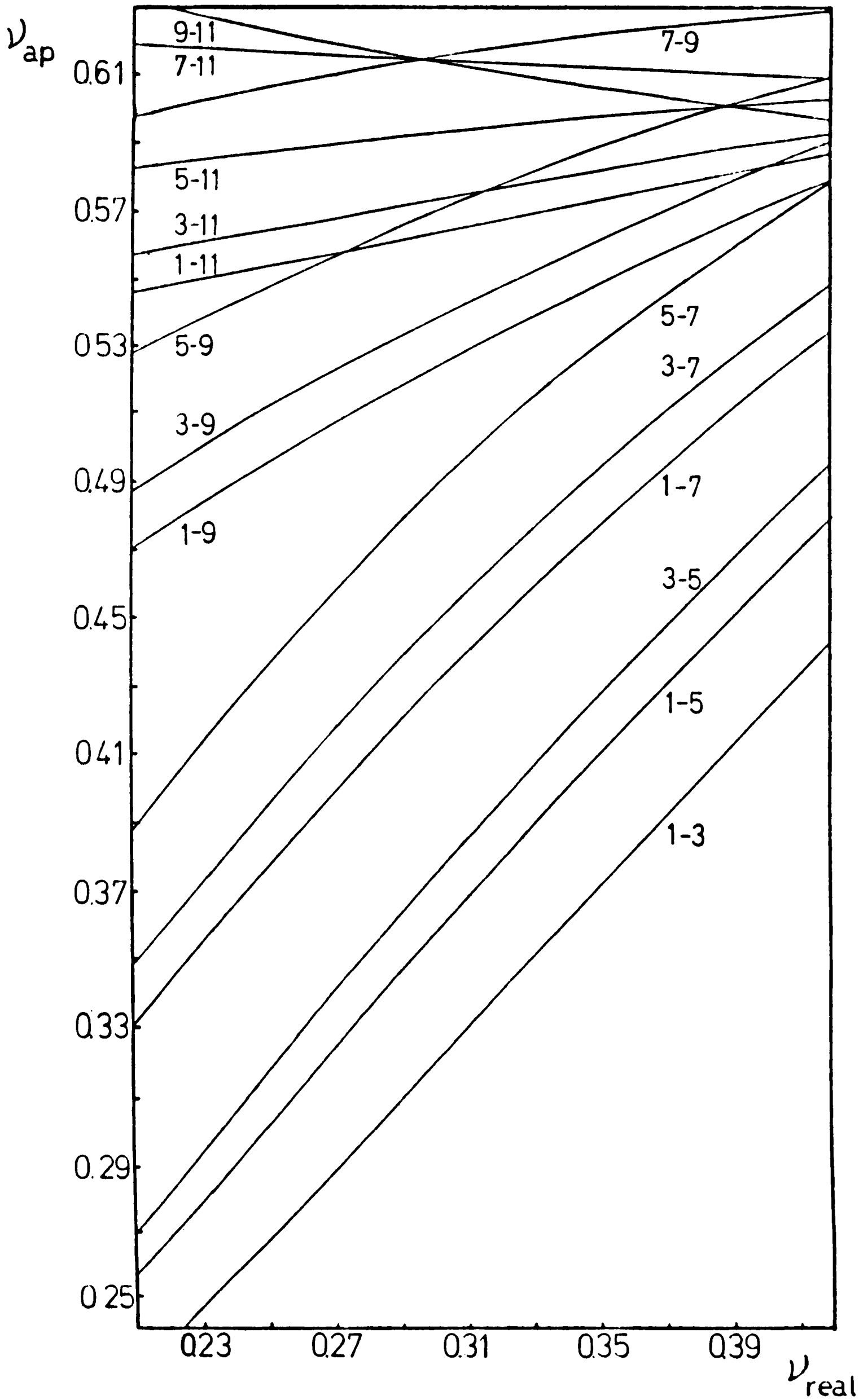


Fig. n° 4.10.

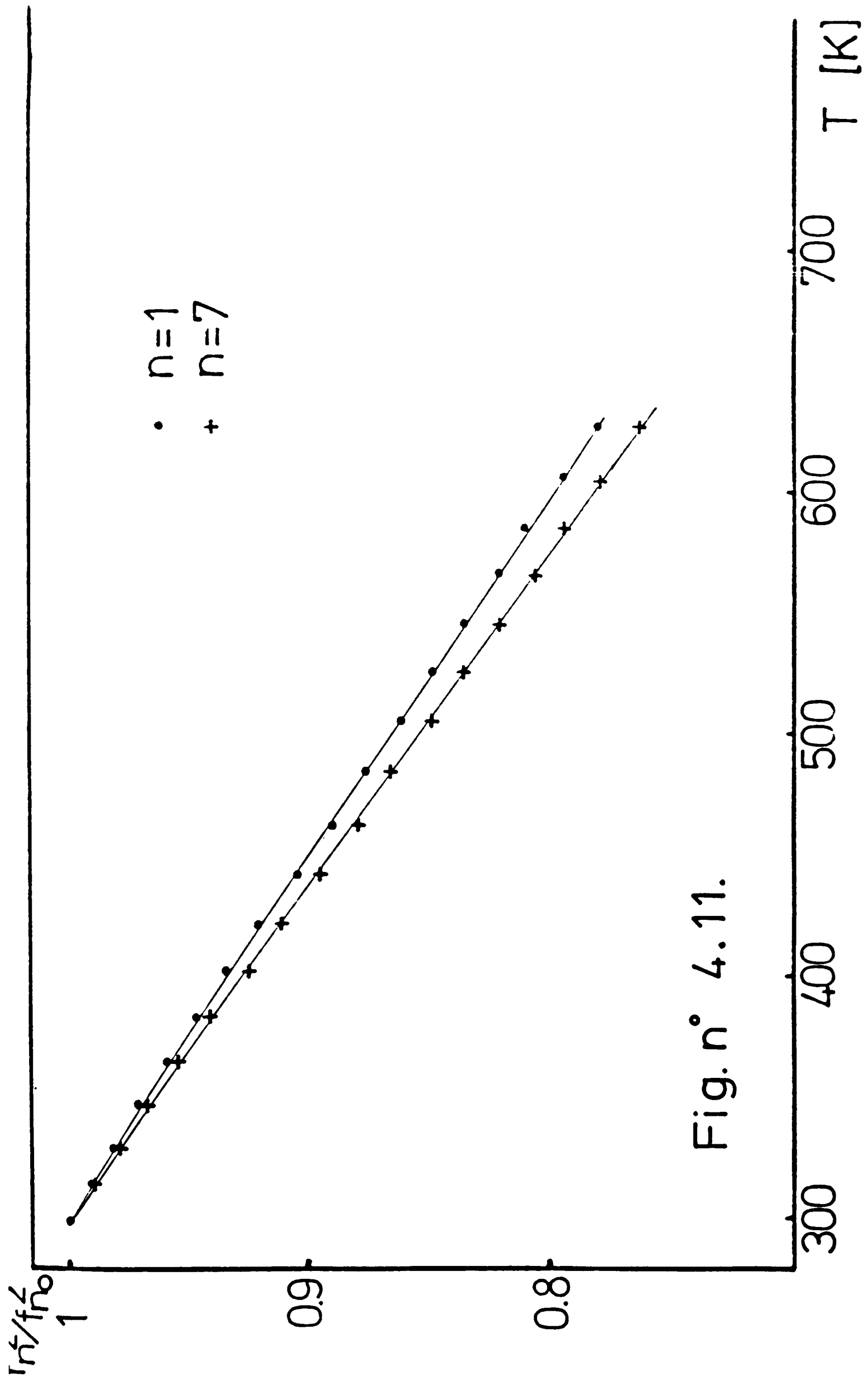


Fig. n° 4.11.

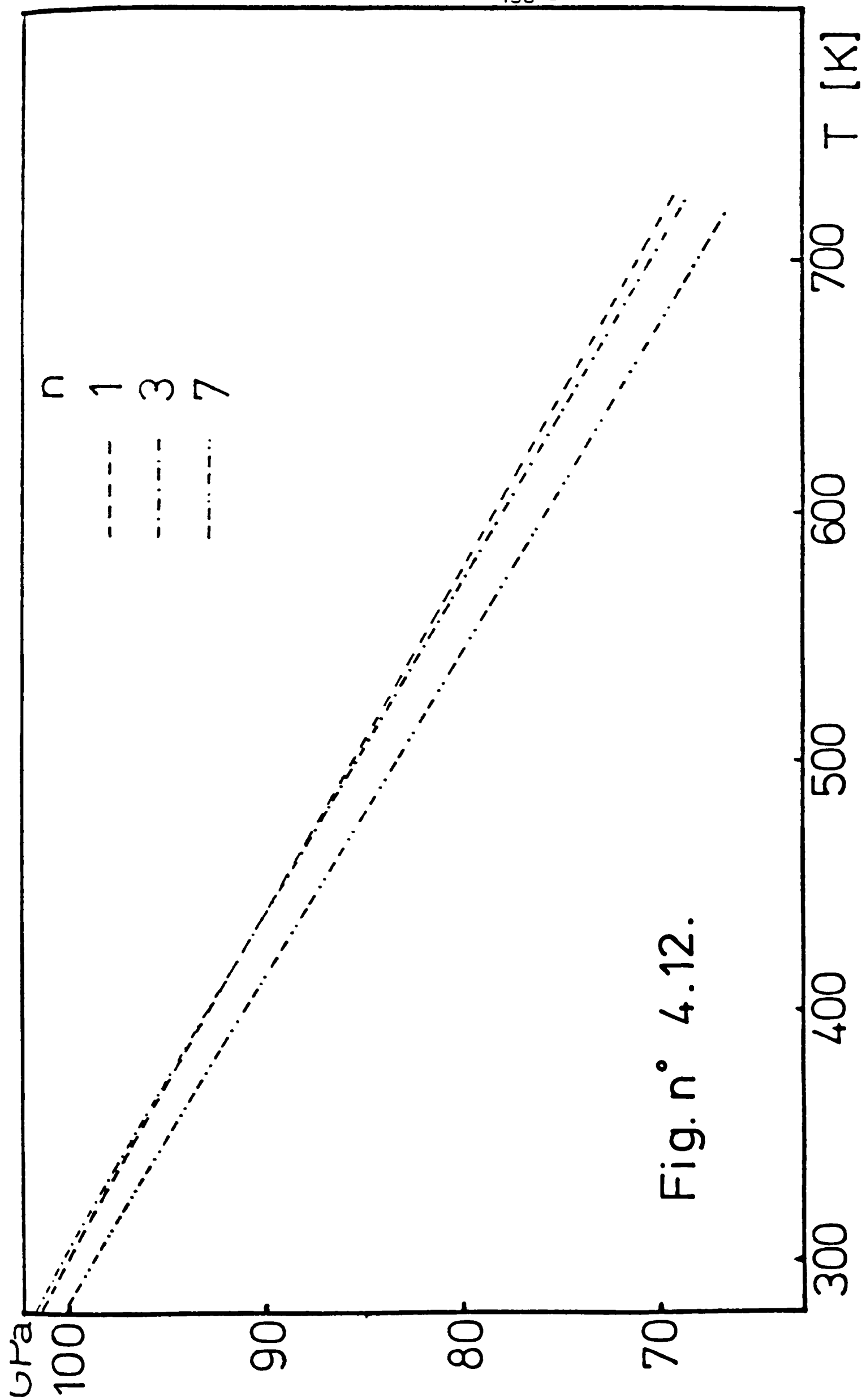


Fig. n° 4.12.

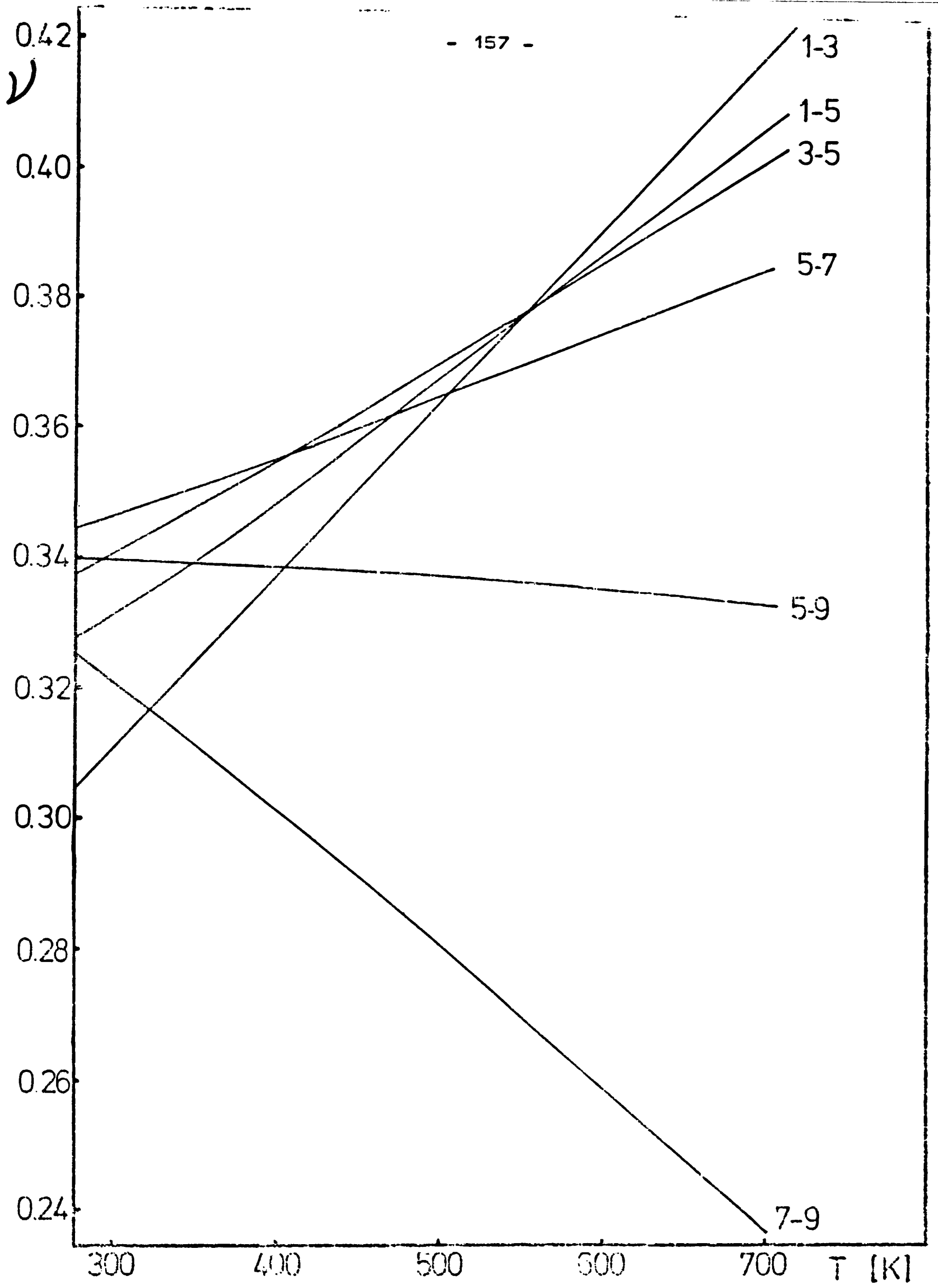


Fig. n° 4.13.

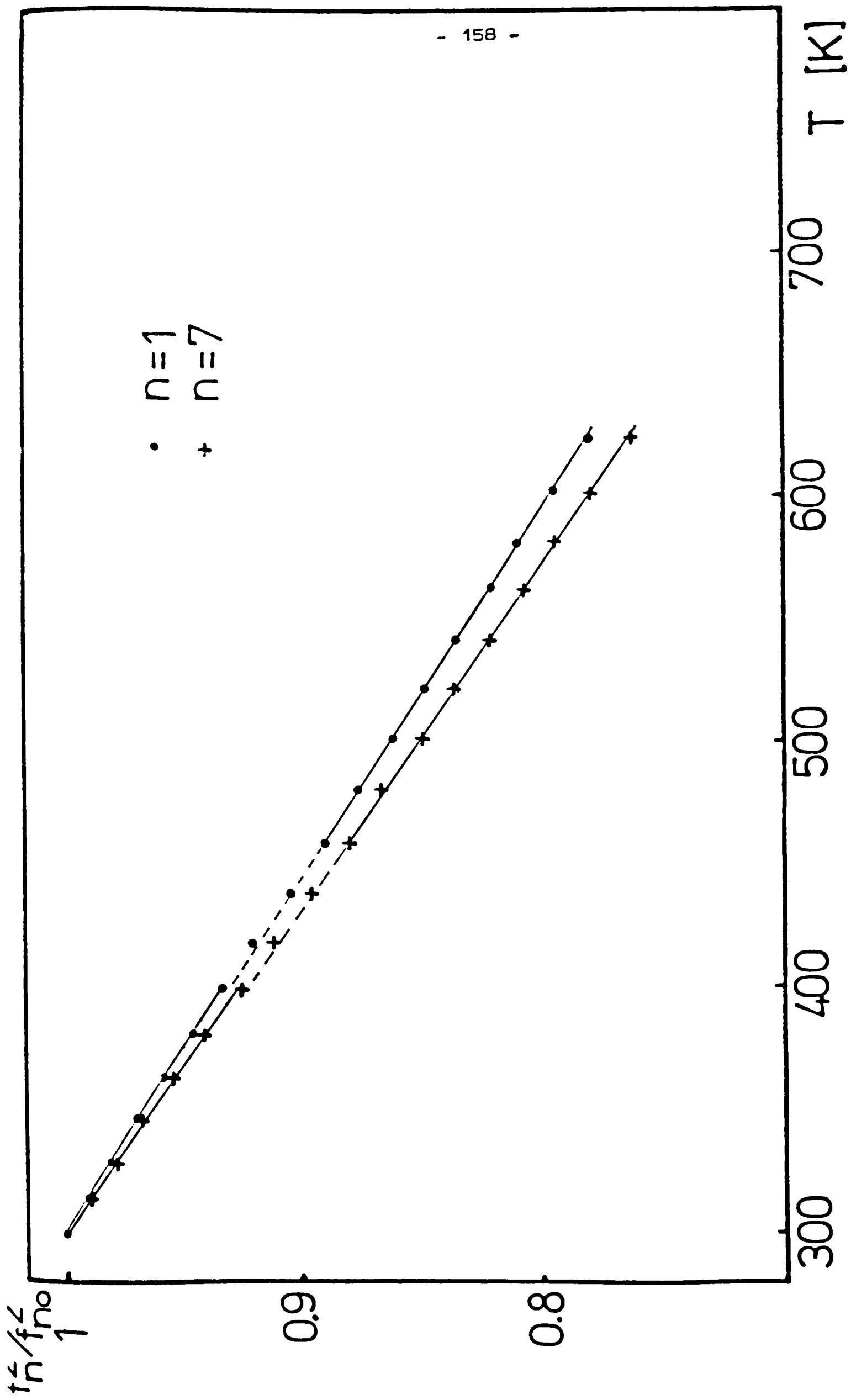


Fig. n° 4.14.

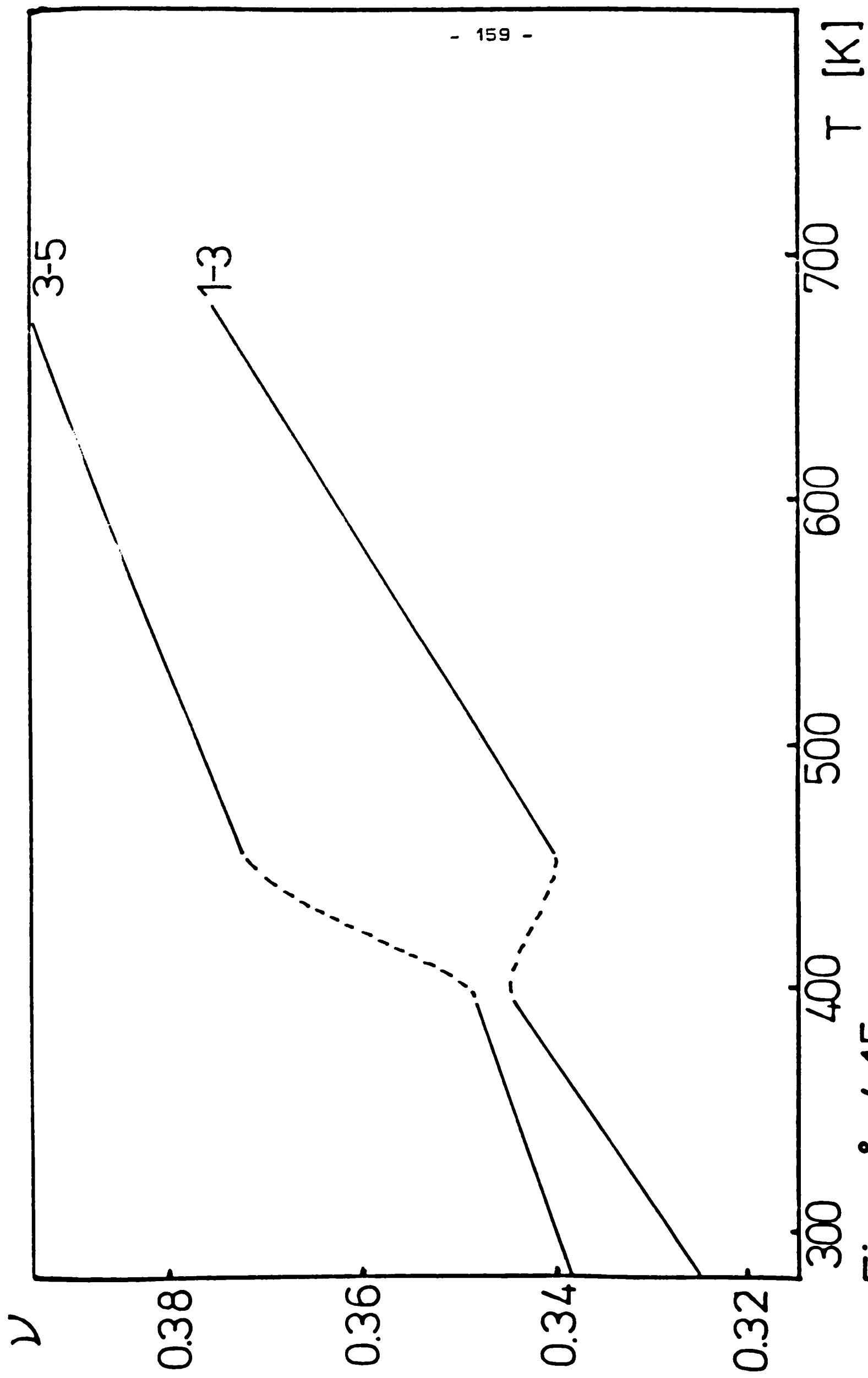


Fig. n° 4.15.a.

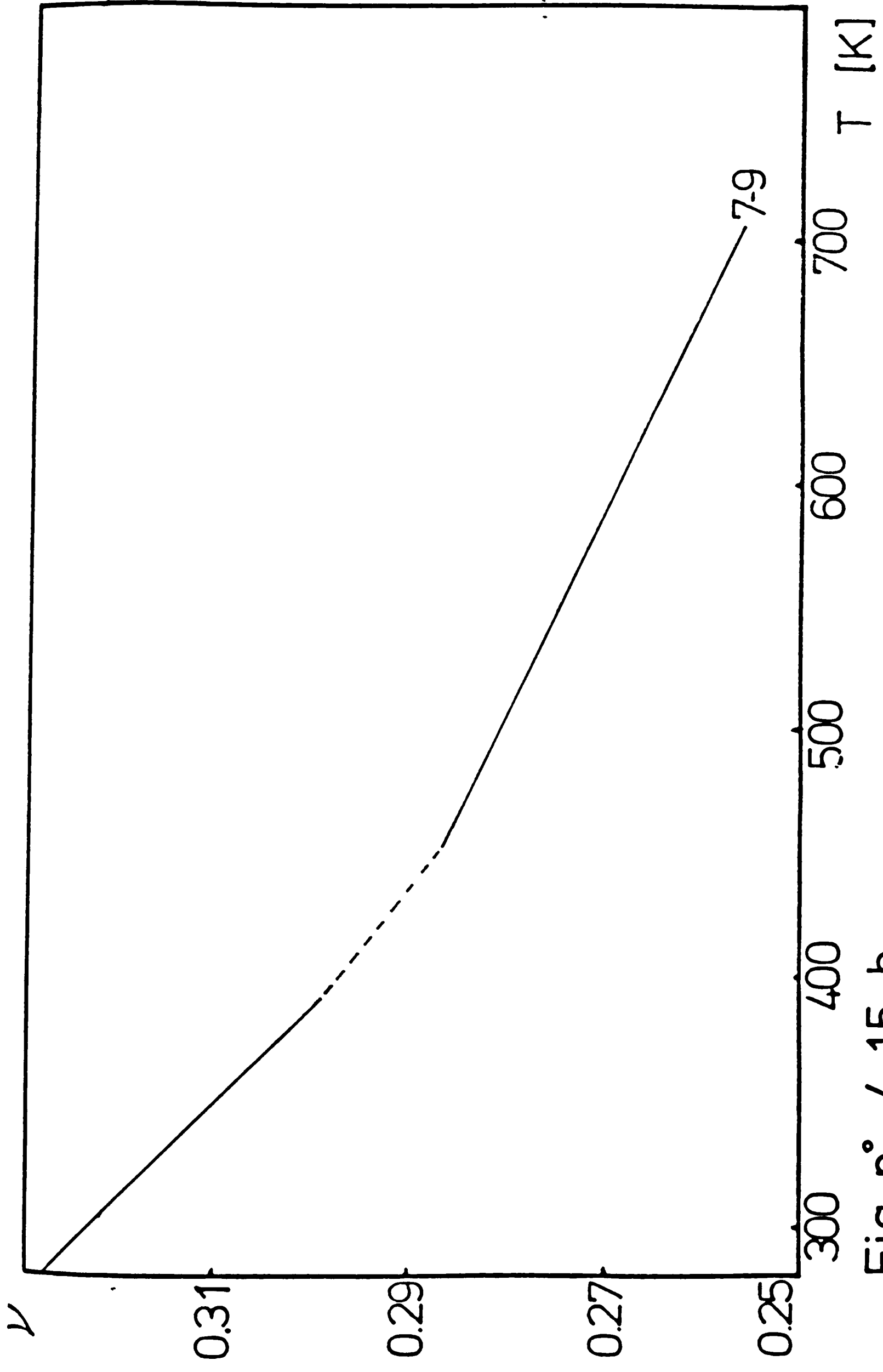


Fig. n° 4.15. b.

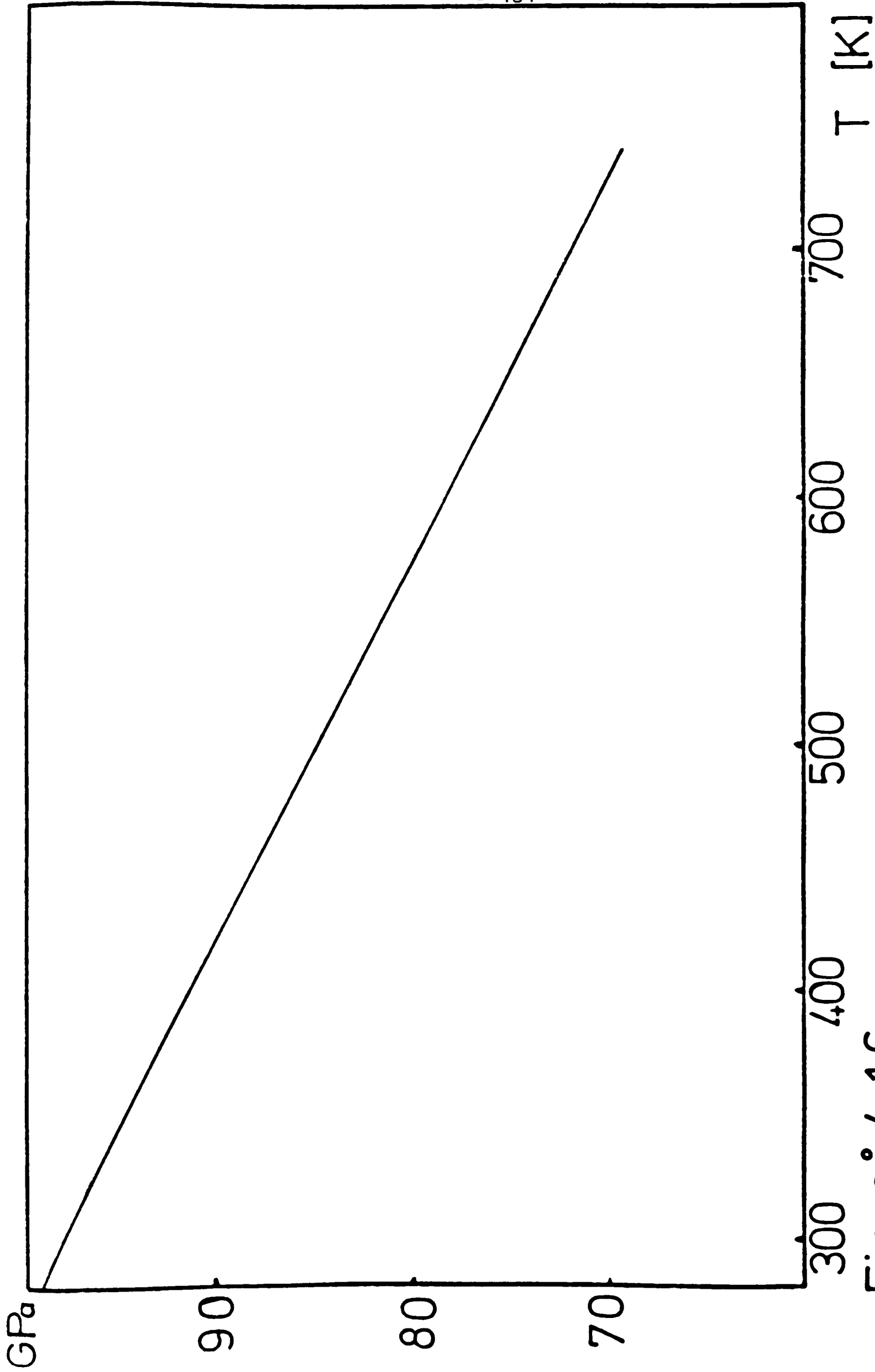


Fig. n° 4.16.

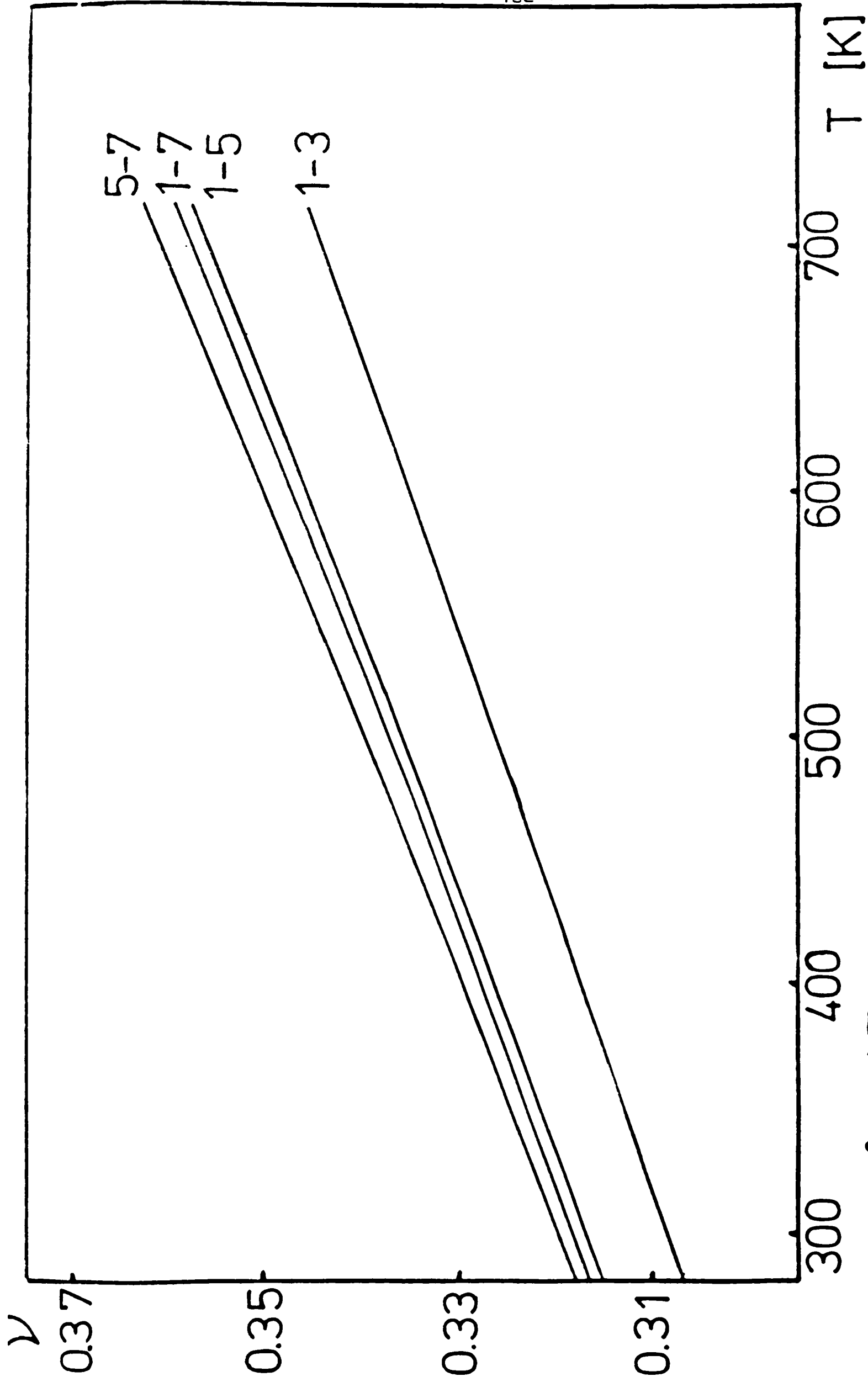
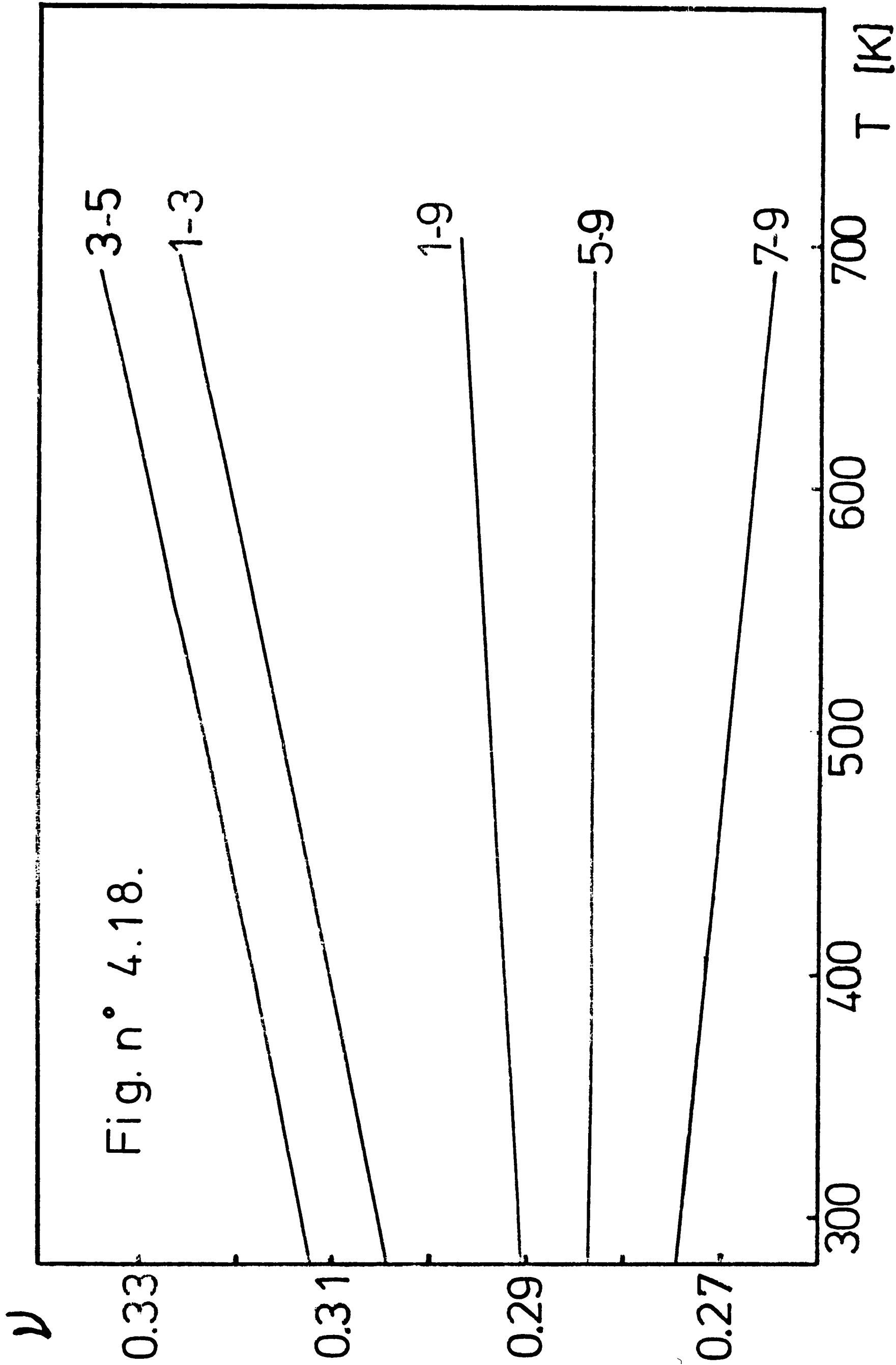


Fig. n° 4.17.



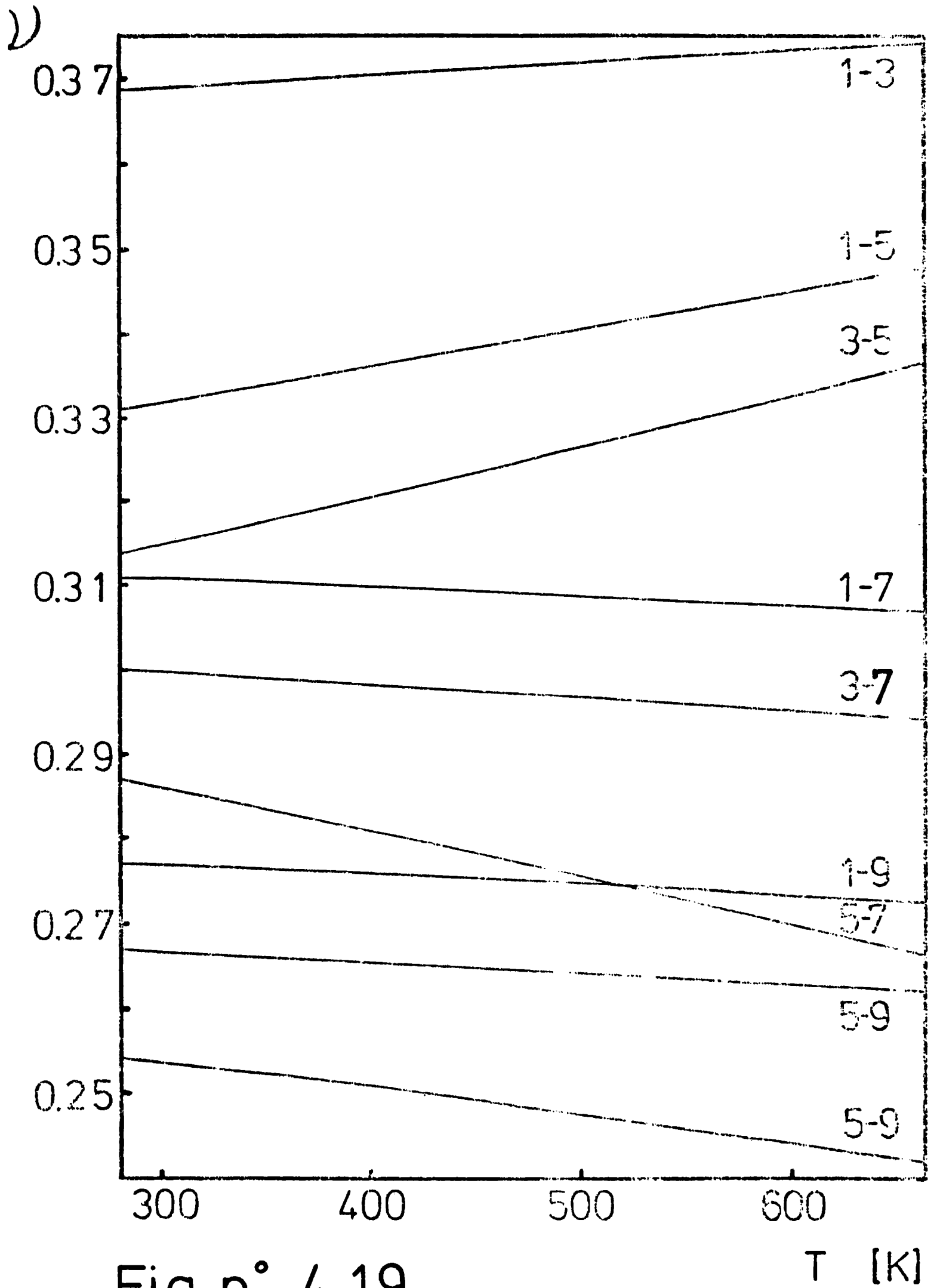


Fig. n° 4.19.

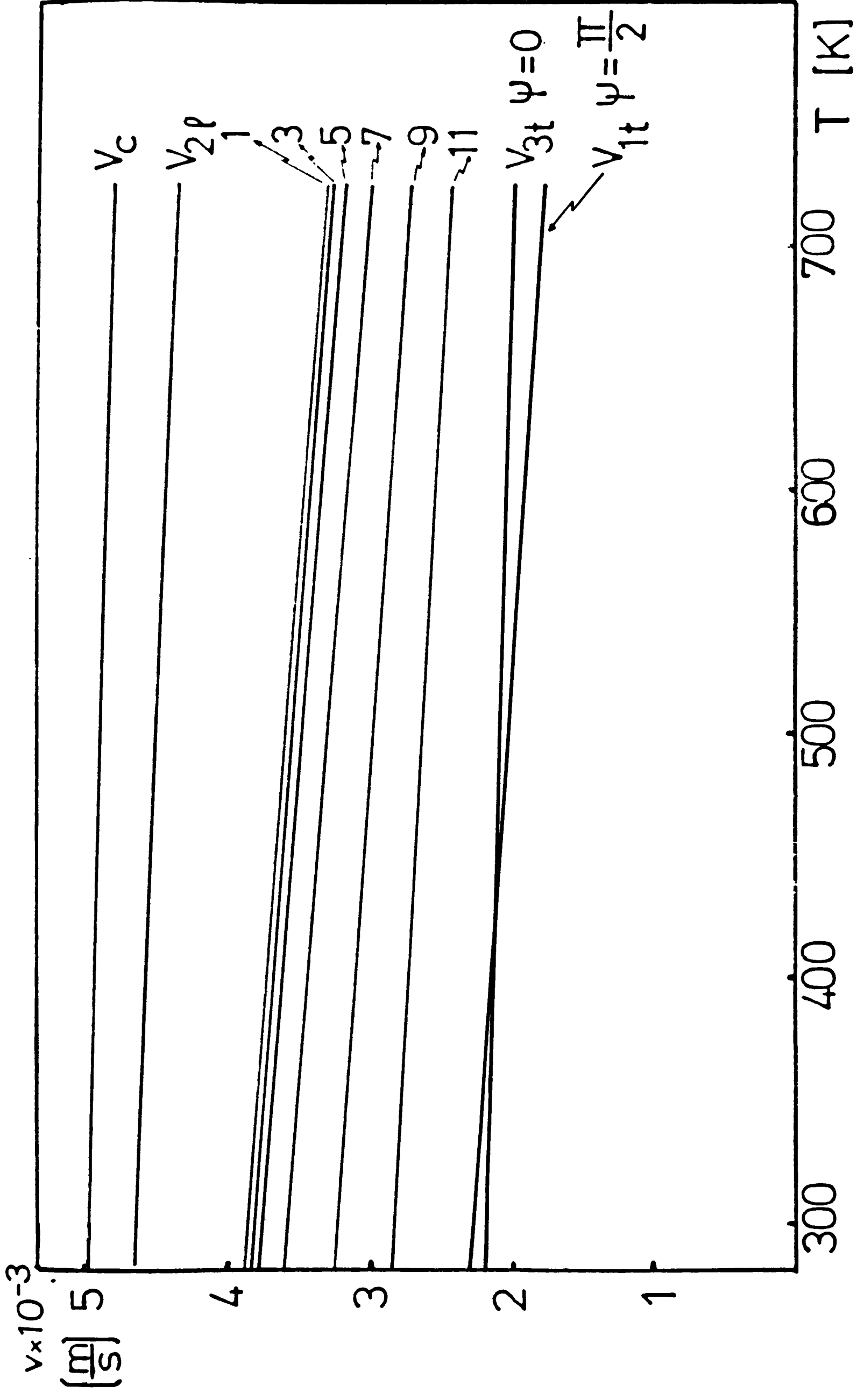


Fig. n° 4.20.

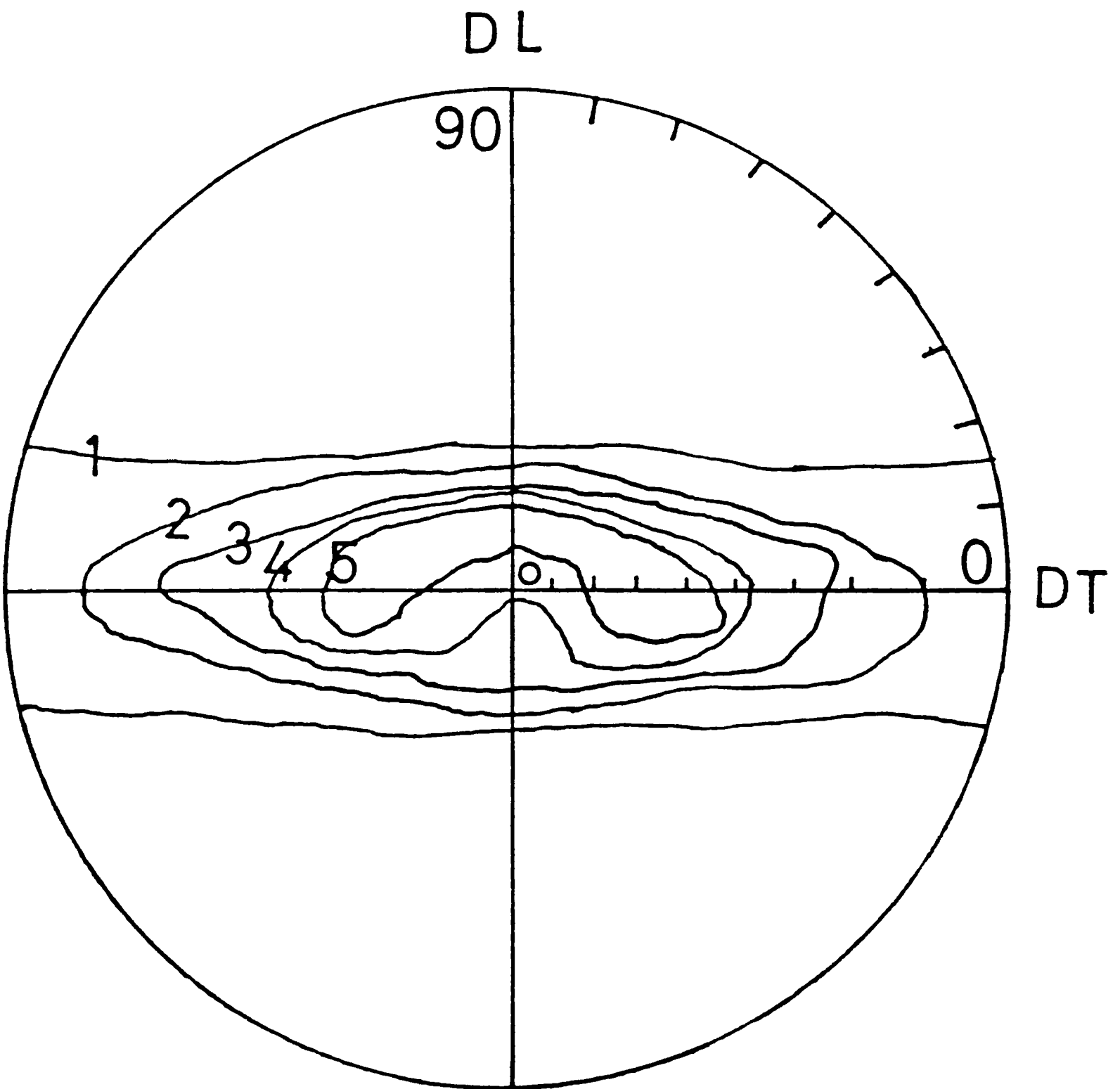


Fig. n° 4.21.

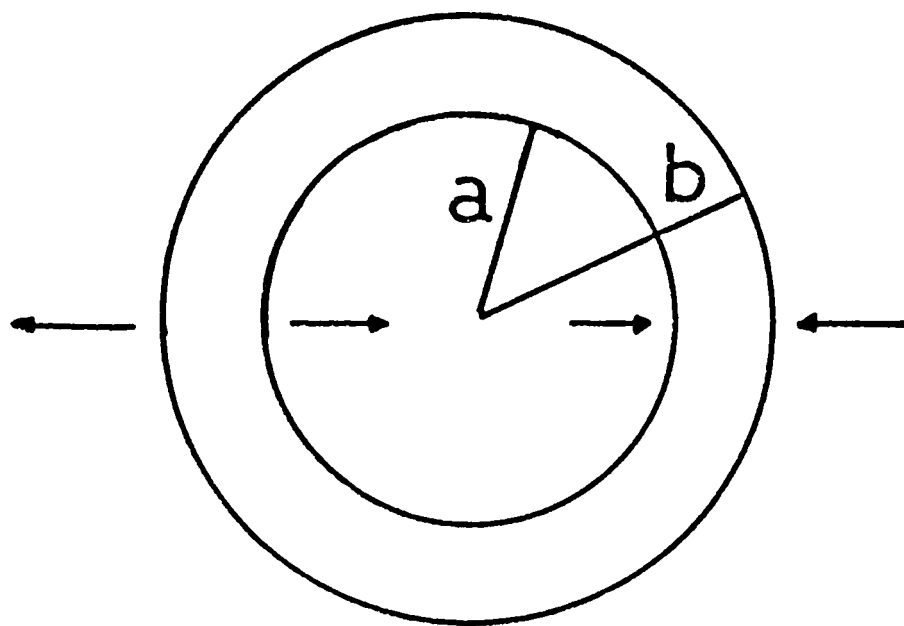


Fig. n° 4.22. a.

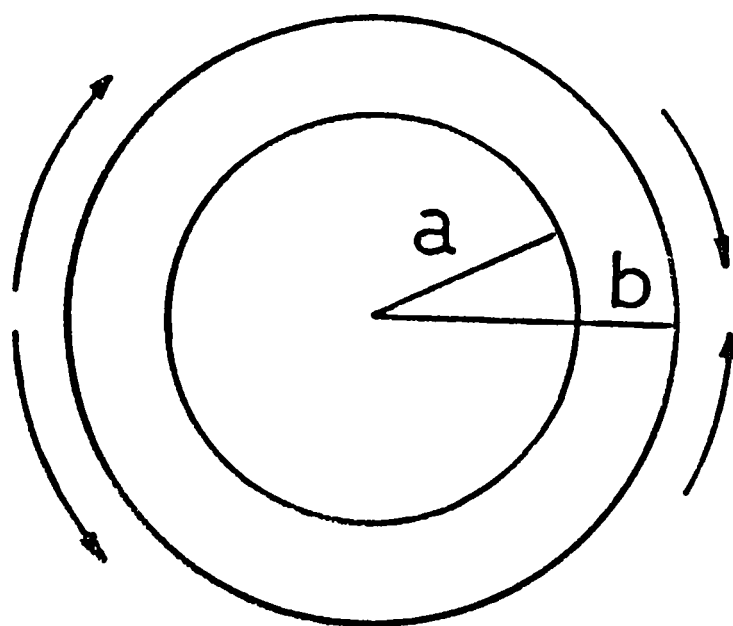


Fig. n° 4.22. b.

DIRECCION NORMAL
(RADIAL)

DIRECCION TRANS-
VERSAL (TANGENCIAL)

DIRECCION LONGITU-
DINAL (AXIAL)

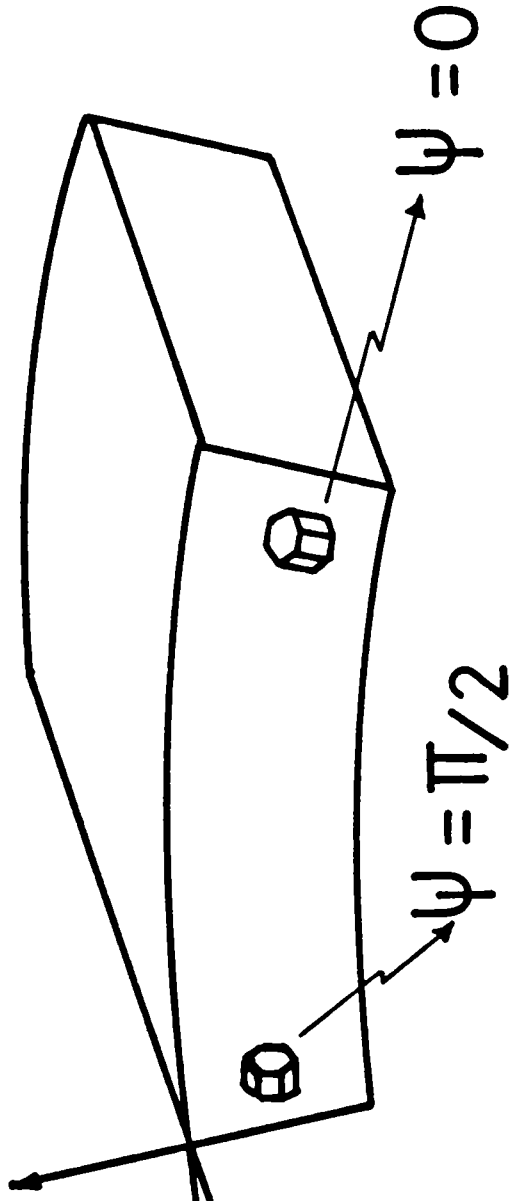


Fig.n° 4.23.

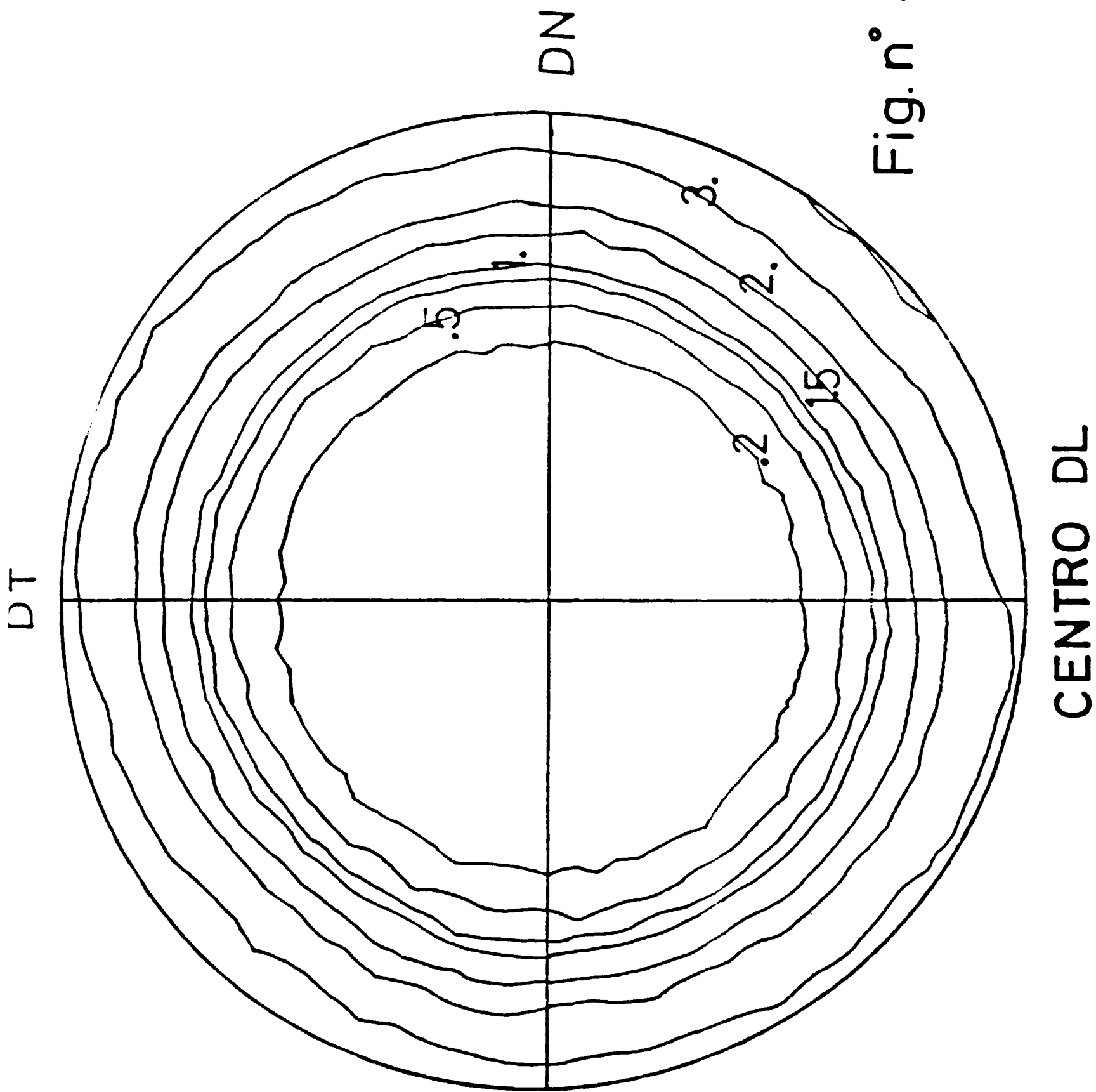


Fig. n° 4.24.

CENTRO DL

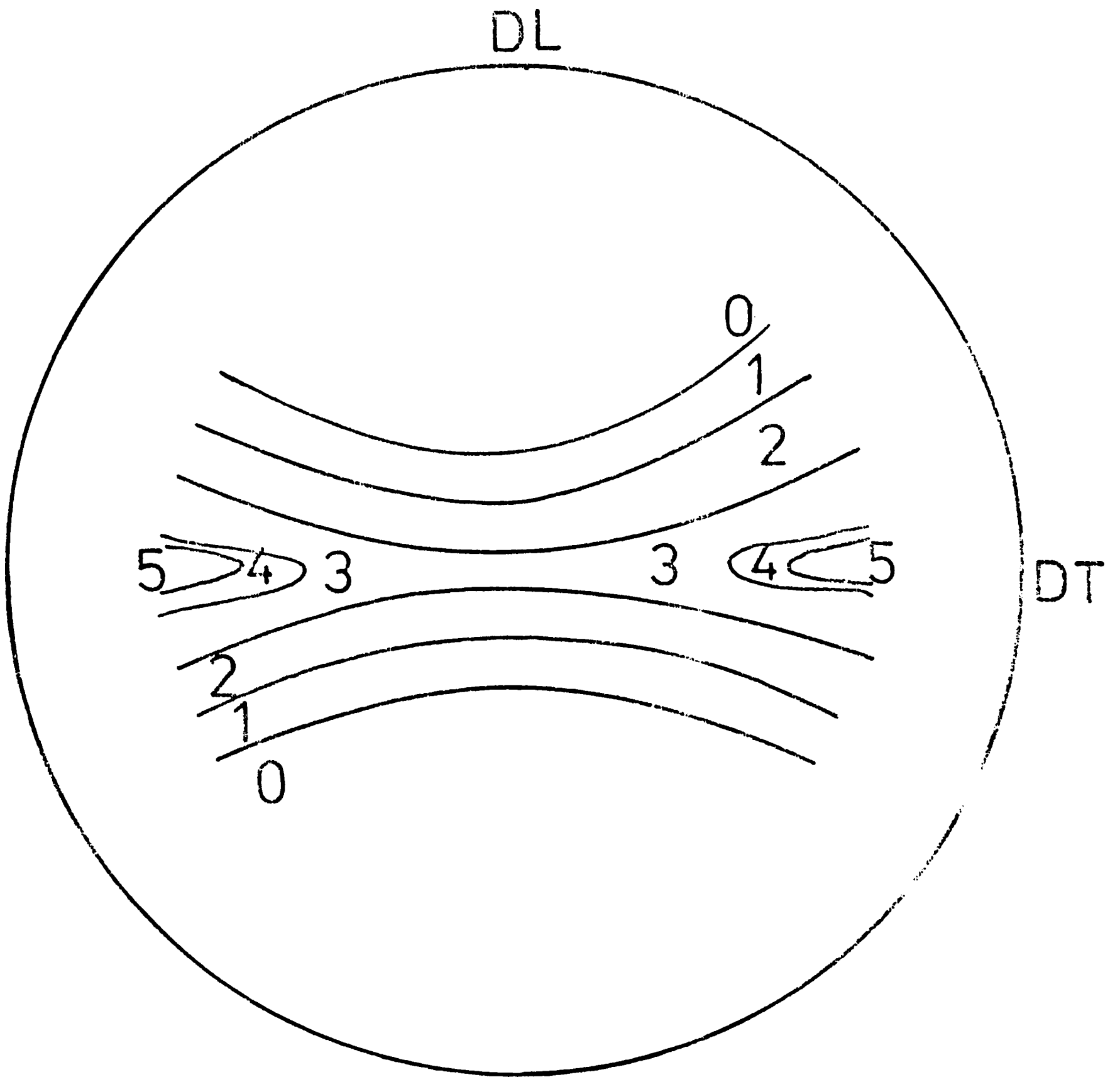


Fig. n° 4.25

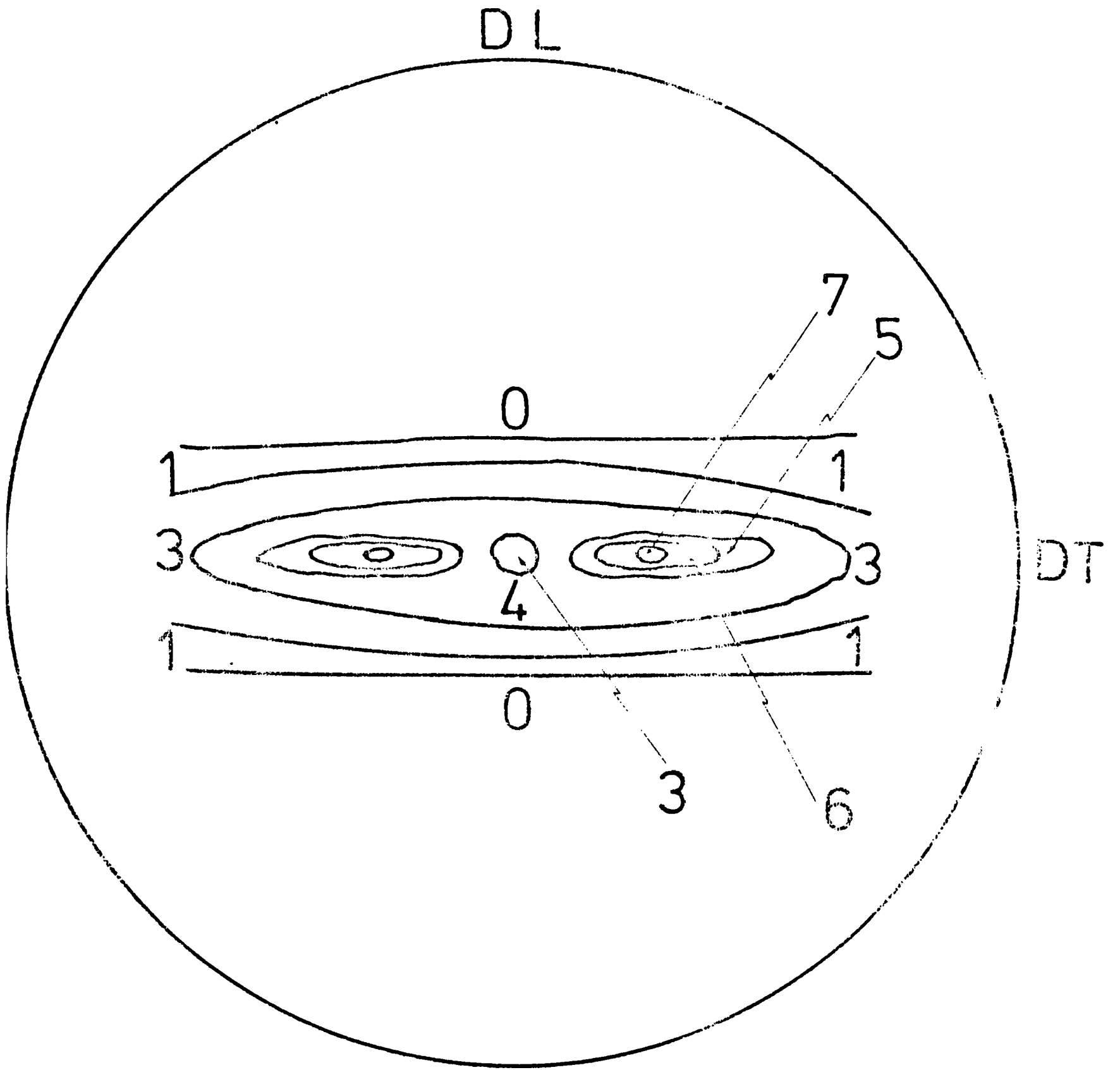


Fig. n° 4.26.

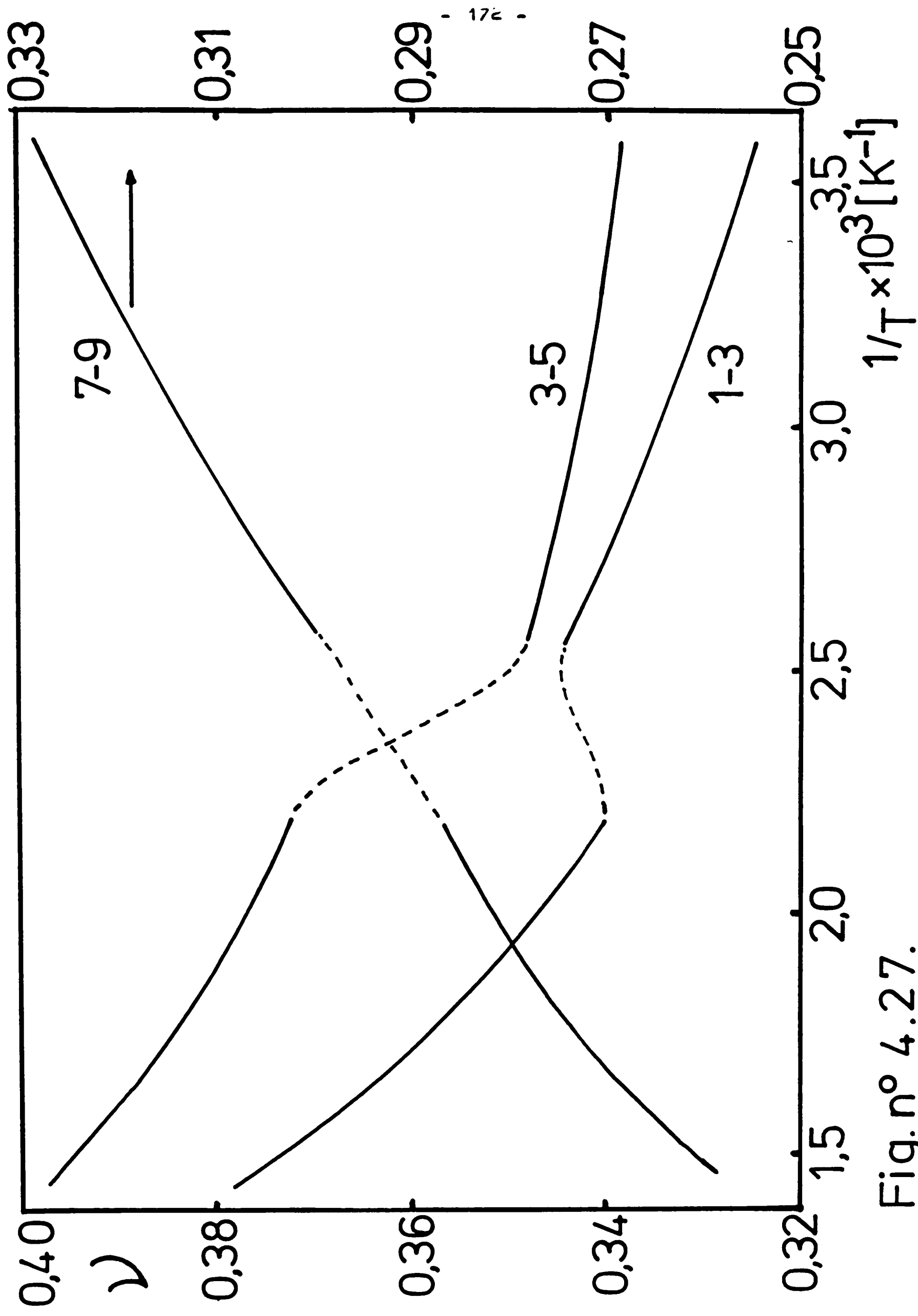


Fig. n° 4.27.

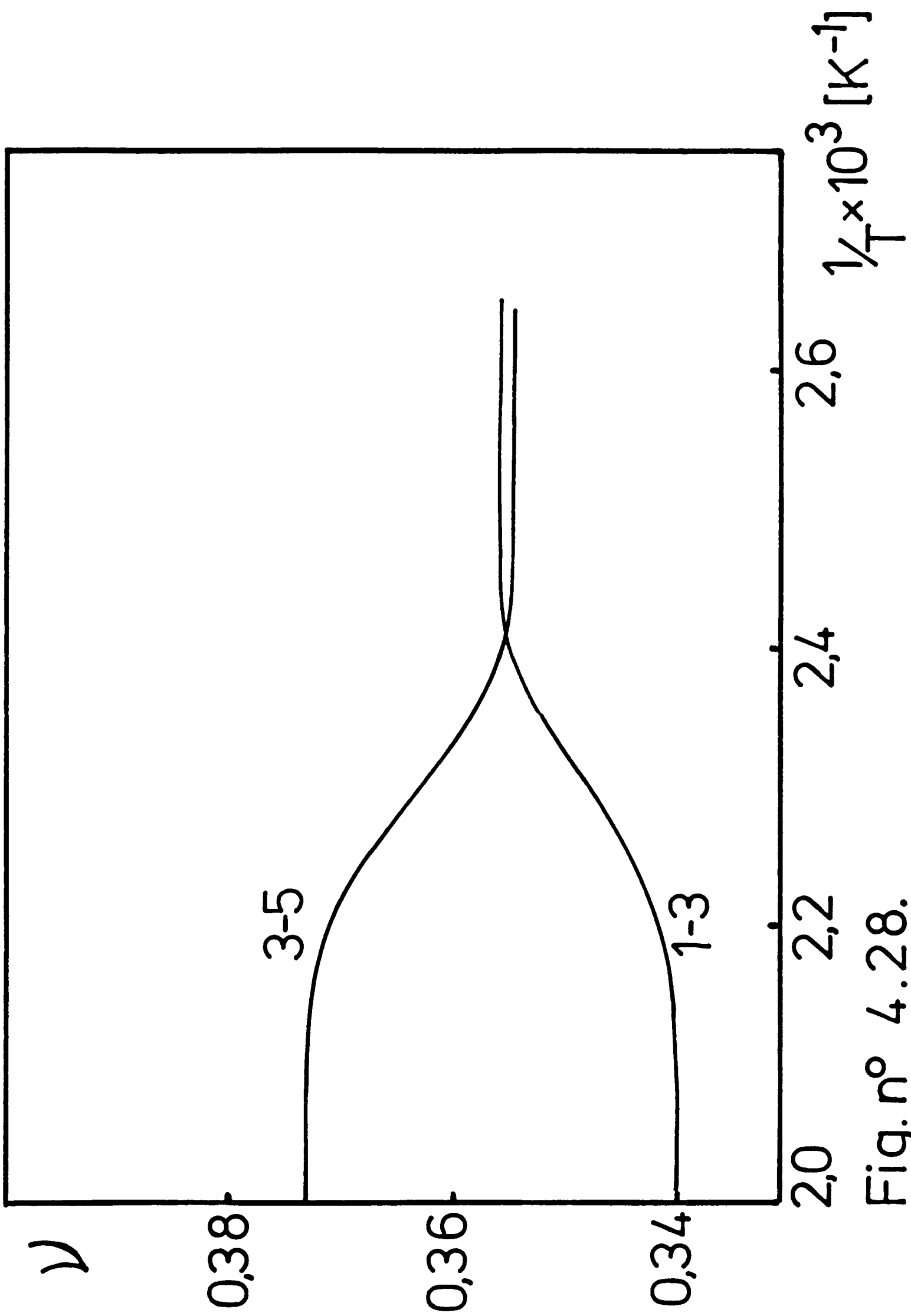


Fig. n° 4.28.

5. 1. ASPECTOS EXPERIMENTALES PREVIOS

Un estudio completo de las constantes elásticas de monocristales de hierro y su variación con la temperatura fue efectuado por Ren'iti Kimura and Raichi Ohno (1), Kiyosi Nakamura (2) y H. Kimura (3). Hasta donde nosotros conocemos estos son los últimos datos confiables sobre estas variables. El método utilizado es dinámico. Fueron medidos el módulo de Young y de corte para diferentes orientaciones de monocristal mediante la determinación de las frecuencias de resonancia longitudinales y torsionales de diferentes probetas.

Debido a la gran variedad de aleaciones desarrolladas con el hierro como aleante principal y a la gran variación que sobre las propiedades producen pequeñas variaciones del contenido de carbono y otros aleantes, no existe quizás otro conjunto de sustancias sobre las cuales se halla obtenido mayor diversidad en las propiedades elásticas, anelásticas y plásticas. Ésto debe agregarse la gran variación que confieren los tratamientos termomecánicos efectuados sobre cada aleación. En algunos casos aleaciones idénticas son irreconocibles en sus propiedades físicas por haber sido sometidas a tratamientos levemente diferentes. Que de este farrago de datos experimentales surjan modelos teóricos coherentes no deja de ser un alarde de ingeniosidad así como una muestra de los ingentes esfuerzos volcados en esta tarea a lo largo de centurias.

Quizás uno de los fenómenos físicos más importantes y conocidos observados en aleaciones de Fe-C sea un tipo particular de fricción interna fuertemente dependiente de la temperatura conocido como efecto Snoek. Este fenómeno, observado prácticamente durante los últimos cien años (4,5), recibió un principio de explicación con el modelo propuesto por J. Snoek (6,7). Este modelo propone que la fricción interna se origina debido a la distribución preferencial, inducida por tensión, de átomos de carbono o nitrógeno en solución sólida intersticial en una matriz de Fe- α . (Ver Apéndice A). Las posiciones intersticiales ocupadas son los sitios octahédricos de la red B.C.C. del Fe- α . Si los átomos de carbono o nitrógeno van a esas posiciones se produce una deformación tetragonal en la red con los tres ejes tetragonales en las direcciones $\langle 100 \rangle$ de la red original. Cuando una tensión longitudinal es aplicada a lo largo de uno de estos ejes se producirá un aumento de la probabilidad de que los átomos de carbono ocupen posiciones intersticiales con

su eje tetragonal paralelo al eje de tensión. Si la tensión aplicada es periódica, el tiempo de establecimiento de esta orientación preferencial de átomos solutos produce un fenómeno de relajación que se manifiesta mediante efectos de fricción interna y relajación de módulos.

Los aceros de bajo contenido de carbono ($< 0,1-0,2\%$) presentan también un comportamiento postmagnético anómalo que no puede ser explicado mediante consideraciones magnéticas solamente, tal como fue mostrado por primera vez por J. Ewing (8). En base a cuidadosas observaciones sobre ambos efectos, el postmagnético y el postelástico, G. Richter (9) mostró la muy cercana relación existente entre ambos efectos. Ambos efectos poseen el mismo calor de activación del orden de 19,6 Kcal/mol y el mismo coeficiente de temperatura de $-0,003^{\circ}\text{C}^{-1}$ cerca de temperatura ambiente. De gran significación fue la observación efectuada por G. Richter de que un campo magnético intenso suprime el efecto postmagnético pero no el efecto postelástico. Esto pone en evidencia que el origen común de ambos efectos es más bien de naturaleza mecánica y no magnética. En aleaciones ferromagnéticas cuasi-isótropas o al menos sólo parcialmente desordenadas, existe una amplia evidencia de la existencia de un acoplamiento entre la magnetización y el estado de equilibrio del orden de corto alcance. Como la magnetización es una magnitud direccional, el acoplamiento es tal que el arreglo atómico de equilibrio en cada dominio exhibe un grado de orden direccional. En general, se espera que tal orden sea acompañado por una deformación, lo que ha sido demostrado para el carbono o el nitrógeno en Fe- α por G. De Vries et al (10). Es interesante hacer notar que en este caso el orden es de signo opuesto a la deformación magnetostrictiva, indicando una despoblación de aquellos sitios con su eje tetragonal en la dirección magnetostrictivamente alargada. De Vries et al. han sugerido de que esto puede ser el resultado de un "alargamiento" de los átomos de hierro en la dirección de magnetización, con una consecuente reducción del espaciamiento entre ellos.

Además de las grandes variaciones observadas en las constantes elásticas como consecuencia de la composición y sensibilidad a los tratamientos termomecánicos y además de los efectos anelásticos mencionados, son clásicos un conjunto de fenómenos anelásticos conectados con movimiento de dislocaciones e interacciones entre dislocaciones y defectos puntuales (11). Por otra parte Ben'iti Kimura (13) muestra un efecto de relajación de módulo y un pico de fric-

ción interna en aleaciones Fe-C que él atribuye al compuesto ferromagnético Fe_3C (cementita). Este carburo tiene un punto de Curie de 215 C , temperatura muy cercana a la de ocurrencia del fenómeno.

En cuanto al módulo de Poisson un solo antecedente, hasta donde nosotros conocemos, puede encontrarse sobre la medición de esta variable en función de la temperatura [12]. La medición, efectuada por métodos estáticos, se extiende a cinco tipos de aceros y tratamientos diferentes entre temperatura ambiente y 1000 C. Por ser obtenidos a partir de la ecuación que relaciona el módulo de Young y de corte para materiales isótropos merece las mismas observaciones que las efectuadas en el caso de las aleaciones de circonio. Por otra parte no se observa ningún efecto sorprendente ni irregular en las aleaciones medidas.

5. 2. ASPECTOS TEÓRICOS PREVIOS

En el análisis teórico de los fenómenos de relajación es conveniente describir la magnitud de la relajación en términos de una cantidad denominada intensidad de relajación [Apéndice A][13]. Esta magnitud está definida por

$$\Delta_M = (M_U - M_R) / M_R \quad 5. 1.$$

donde M_U y M_R son los módulos no relajado y relajado, respectivamente. Cuando la relajación proviene de una distribución preferencial de átomos solutos inducida por tensión, puede demostrarse que la dependencia con la temperatura de la intensidad de relajación está dada por [14]

$$\Delta_M = T_0 / (T - T_0) \quad 5. 2.$$

En esta relación T es la temperatura de los solutos, λ es un coeficiente numérico que toma en cuenta la interacción entre los átomos solutos y que juega el papel del factor de Weiss en la teoría del ferromagnetismo y T_0 es un término independiente de la temperatura que crece con la concentración de átomos solutos y la distorsión tetragonal introducida en la red. Esta ecuación es inaplicable a temperaturas por debajo de λT_0 . De todos modos, antes de que esta temperatura sea alcanzada por encima, existe una temperatura crítica-

ca por debajo de la cual existe un orden espontáneo de los átomos solutos bajo tensión nula. A esta temperatura la interacción entre los átomos reduce la energía si cada uno de los átomos solutos se ubica con su eje tetragonal paralelo a los de los demás. Resulta análoga a la temperatura de Curie por debajo de la cual los momentos magnéticos de los átomos o los espines de los electrones en un dominio ferromagnético están orientados en la misma dirección bajo campo magnético nulo. La temperatura crítica T_c para tal distribución preferencial autoinducida de átomos solutos en redes B.C.C. ha sido calculada por C. Zener [14]. Podemos calcular la energía libre F por unidad de volumen para el Fe- α libre de tensiones en función del número de defectos en posición preferencial n_p . Si m es el número total de posiciones intersticiales octahédricas, n el número de átomos solutos y Δn_p el exceso de n_p sobre $n/3$ obtenemos

$$F = 1/2 \frac{\partial U}{\partial n_p} (\Delta n_p)^2 - k T \ln \left(\frac{m!}{n_p! (m-n_p)!} \frac{(2m)!}{(n-n_p)! (2m-n+n_p)!} \right) \quad 5.3.$$

donde $\partial U / \partial n_p$ es el cambio de energía potencial por la reorientación de cada defecto. El valor de equilibrio de Δn_p es determinado con la condición de equilibrio

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta n_p} = 0 \quad 5.4.$$

Como ocurre en la mayor parte de los casos puede considerarse que se cumple $n/m \ll 1$, de donde se deduce que la condición de equilibrio se reduce a

$$-n \frac{\partial U}{\partial n_p} \cdot x = k T \ln \left(\frac{1+3x}{1-3x/2} \right) \quad 5.5.$$

con $x = \Delta n_p / n$.

Cuando T es suficientemente grande la ecuación 5.5. no tiene otra solución más que $x = 0$. Cuando T decrece esta ecuación trascendental puede ser resuelta numéricamente y se obtiene

$$\tau_c = 1,05 \lambda \tau_o$$

5. 6.

La existencia de esta interacción entre defectos debiera ponerse en evidencia, en una experiencia de fricción interna, por el desvío de los valores experimentales de los previstos por el modelo del sólido lineal estándar. Los picos obtenidos no son posibles de explicar en términos de un solo tiempo de relajación sino que deben incluirse tiempos de relajación de reorientación de pares, ternas, etc. de átomos, dependiendo del alcance de la interacción y de la concentración de defectos. A pesar de un intento fallido hecho por T.S. Ke [15] de confirmar ésto en tantalio con oxígeno en solución, puede decirse que a posteriori diversos investigadores [16,17] confirmaron la existencia de esta interacción en tantalio y niobio. El parámetro de interacción para oxígeno en tantalio fue determinado en 77 K y pudieron ser identificados picos de interacción C-C, N-N y aún C-N en solución sólida en niobio. No obstante, el ancho medio de los picos de C en Fe- α no difiere de los teóricos en más del 5 a 10 % pareciendo confirmar la existencia de un único tiempo de relajación. El modelo de Frank parece tener una confirmación excepcional en el carbono en Fe- α . Esto sin duda se ve acentuado por la imposibilidad de tener altas concentraciones de carbono en solución sólida en Fe- α . El valor de equilibrio del carbono en solución sólida en Fe- α es de sólo $2,3 \cdot 10^{-7}$ % en peso a temperatura ambiente y de 0,02 % a la temperatura de transición a la fase F.C.C. de 723 C. El valor a T=1500 de $2,67 \cdot 10^{-5}$ % es inferior al 0,013 % de oxígeno en tantalio utilizado como concentración mínima en las experiencias mencionadas. La dificultad persiste para las soluciones de carbono en vanadio, niobio y tantalio donde la baja solubilidad no permite discernir más de un tiempo de relajación. Además las experiencias muestran un pico decreciente con el tiempo a raíz de la precipitación del carbono.

Recientemente M. Weller et al [18,19] obtuvieron datos experimentales nuevos que son modelizados mediante una distribución continua de tiempos de relajación. Muestran una simetría de pico no compatible con el modelo de pares o ternas de intersticiales en interacción y proponen una interacción de largo alcance repulsiva entre los átomos solutos. No se ha desarrollado todavía un modelo que explique cuantitativamente estos resultados. De todos modos se coincide en adjudicar el fenómeno a la interacción mutua.

La discusión precedente tiene origen en una sugerencia efectuada por C. Zener (20) en el sentido de que la transformación martensítica en hierro podría ser consecuencia de un ordenamiento de los átomos de carbono en Fe- α producto de su mutua interacción. La transformación martensítica en los aceros al carbono procede por enfriamiento rápido desde la fase austenítica F.C.C. del hierro hasta temperaturas inferiores a 723 C donde el hierro toma la estructura B.C.C.. Por debajo de cierta temperatura, característica de cada aleación, denominada M_s la estructura que resulta es una tetragonal centrada en el cuerpo. Por debajo de esa temperatura los átomos de carbono que se hallan en solución sólida en la fase austenítica no pueden difundir para precipitar como Fe_3C sino que quedan atrapados en los sitios octahedricos. La difusión debiera darse como consecuencia de la mucho mayor solubilidad del carbono en la fase austenítica. Como la solubilidad en Fe- α disminuye bruscamente, el carbono debiera precipitar después de difundir. Para una distorsión de la red F.C.C. del tipo de la mostrada en la Figura nº 5.1., que genera una red B.C.C., los sitios octahédricos de la red original se encuentran ocupados con igualdad de población de átomos de carbono para las orientaciones x, y o z del eje tetragonal. Estos sitios, al transformarse en intersticios de la red B.C.C., resultan todos orientados con su eje tetragonal según la dirección z de la nueva red. Esta distribución preferencial de los sitios octahédricos ocupados produce un alargamiento de la red B.C.C. en la dirección z que la lleva a B.C.T.. A la interacción entre los átomos de carbono adjudica C. Zener esta distribución preferencial y por lo tanto la considera la causa de la transformación martensítica. Dado que la constante λ es del orden de la unidad, la temperatura crítica se encontraría, de acuerdo con Zener, por encima de la temperatura ambiente para contenidos de carbono de 0,14 %. Como estas concentraciones de carbono son imposibles de obtener en solución sólida en Fe- α sin provocar precipitación, la suposición de Zener no tiene confirmación en el marco de las técnicas de fricción interna.

5. 3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Las frecuencias de resonancia longitudinales fueron medidas en probetas de 150 mm de longitud y 7,03 mm de diámetro. La densidad promedio medida por el método del picnómetro es de 7,8116 g/cm³. Los errores cometidos en la medición de cada magnitud son los descritos en el Capítulo III. Las frecuencias de resonancia fueron corregidas numéricamente, especialmente para las frecuencias de orden mayor. Los valores del módulo de Young calculados fueron también corregidos por temperatura. Las curvas obtenidas para el módulo de Poisson fueron corregidas numéricamente a partir de gráficas D_{ap} vs. D_{real} .

La Figura n^o 5.2. muestra el módulo de Young obtenido a partir de las frecuencias de resonancia de orden impar de 1 a 11. Podemos observar una drástica variación de este módulo para la frecuencia de resonancia fundamental que desaparece gradualmente para los armónicos superiores. La frecuencia de resonancia fundamental se encuentra en el orden de 17 KHz y las dos temperaturas características de la curva se hallan aproximadamente en 85 °C y 210 °C.

La Figura n^o 5.3. muestra la estabilización del comienzo de variación brusca del módulo de Young ocasionado por mantenimiento de la probeta a una temperatura de 60 °C durante 12 y 24 hs para la primera y segunda corrida respectivamente. En los armónicos superiores este comportamiento no se observa.

La Figura n^o 5.4. muestra el módulo de Poisson calculado con los armónicos 3-9, 5-7, 7-9 y 5-9. Para estas cuatro combinaciones el módulo de Young no presenta grandes variaciones y puede ser simplificado para permitir el cálculo del módulo de Poisson. Podemos ver que el máximo de la curva se corre hacia altas temperaturas a medida que la frecuencia de cálculo incrementa.

Las Figuras n^o 5.5., 5.6. y 5.7. muestran micrografías ópticas del material ensayado. Puede observarse una estructura perlítica con alta deformación mecánica y zonas martensíticas parcialmente recuperadas por revenido térmico. Los tests de microdureza muestran valores de 473-476 HV300, consistentes con una tetragonalidad parcial de la estructura.

5. 4. TEORIA

Las transiciones de fase intentaron ser entendidas en un principio mediante teorías fenomenológicas que describen el fenómeno solamente en una escala macroscópica en un conjunto grande de átomos. En 1937 L.D.Landau estableció su teoría de transiciones de fase de segundo orden [21]. Con el objeto de extenderla a transiciones de fase con límites entre diferentes fases, la teoría fue generalizada a las conocidas como teorías de Landau-Ginzburg. Más tarde, con el desarrollo de las teorías microscópicas de la mecánica estadística, estas teorías fueron relegadas. No obstante sus limitaciones, sin embargo, las teorías fenomenológicas han sido exitosas en la descripción de diversos fenómenos de transición de fase. A pesar de ello no han sido aplicadas a transformaciones martensíticas hasta tiempos relativamente recientes. En particular las transformaciones martensíticas en aceros, con ser las primeras conocidas y unas de las más importantes desde el punto de vista tecnológico, han sido consideradas muy sucias y poco prometedoras para el entendimiento de las transiciones de fase sin difusión. Algunas aleaciones no ferrosas muestran los principios básicos de un modo más claro.

Landau, en su teoría de transiciones de fase de segundo orden, supone que la energía libre es una función analítica de la temperatura y de un parámetro de orden ξ . Desarrollando la energía libre F en serie de potencias de ξ se obtiene

$$F(\xi, T) = F_0(T) + A\xi + \frac{\alpha}{2}\xi^2 + C\xi^3 + \frac{\beta}{4}\xi^4 \quad 5. 7.$$

donde los coeficientes son funciones analíticas de la temperatura T . Si ξ es elegido de tal manera que toma valor nulo en ausencia de campo aplicado y a alta temperatura, debiéramos tener un mínimo de la energía libre en $\xi = 0$ para $T > T_c$. Por lo tanto A debe ser nulo. Por otro lado para tener una transición de fase de segundo orden α debe cambiar su signo en T_c con $\alpha > 0$ para $T > T_c$. La posibilidad más simple para obtener este comportamiento es hacer

$$\alpha = a (T - T_c) \quad 0 < a = \text{const.} \quad 5. 8.$$

Además debemos tener $C = 0$ y $\beta > 0$ Landau supone $\beta = \text{constante}$ y por lo tanto la función de energía libre más simple que muestra transiciones de fase de segundo orden puede escribirse de la forma:

$$F(\xi, T) = F_0(T) + \frac{a(T - T_c)}{2} \xi^2 + \frac{\beta}{4} \xi^4 \quad 5.9.$$

con $a, \beta, T_c > 0$ y constantes.

Si hay un campo externo aplicado la situación cambia considerablemente. Para comenzar puede considerarse el caso en que el campo externo es constante mientras la temperatura es variada. Dos términos de interacción pueden ser agregados como contribución a la expresión de la energía libre. El término $-\chi \sigma \xi$, con σ campo externo y χ constante positiva, describe una interacción elástica volumétrica clásica en la fundamentación del comportamiento del modelo del sólido lineal estándar (Apéndice A). Constituye una buena descripción de todos los fenómenos de relajación que involucran defectos puntuales. El otro término, $\frac{1}{2} \gamma' \sigma \xi^2$ con γ' constante positiva, representa una interacción magnetostrictiva que ha sido usada con éxito en transiciones de fase controladas por reorientación de espines sin cambio volumétrico importante [22,23]. Además debemos agregar un término de contribución de energía elástica pura, con lo que la expresión de la energía libre está dada por:

$$F(\xi, T) = F_0(T) + \frac{a}{2} \xi^2 + \frac{\beta}{4} \xi^4 + \frac{\gamma'}{2} \xi^2 \sigma - \chi \xi \sigma - \frac{\sigma^2}{2 E_0 \rho} \quad 5.10.$$

donde E_0 es el módulo de Young y ρ la densidad.

Además, se sigue de la termodinámica de los procesos de no-equilibrio, el establecimiento del equilibrio es determinado por la condición cinética [24]

$$\frac{d\xi}{dt} = -k \frac{\partial F}{\partial \xi} \quad 5.11.$$

Si $\sigma = 0$ se obtienen los parámetros de orden bajo campo nulo

$$\begin{aligned} \xi_0^2 &= -a/\beta & T &\leq T_c \\ \xi_0^2 &= 0 & T &> T_c \end{aligned} \quad 5.12.$$

Con la aplicación de una tensión σ variable de frecuencia ω aparece una componente alterna del parámetro de orden $\xi_p \ll \xi_0$. Si $\xi_p \sim \exp i\omega t$, de las ecuaciones 5.10. y 5.11. obtenemos

$$-\rho \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} - \frac{\rho k (\delta^1 \xi_0 - \chi)^2}{(2\alpha k + i\omega)^2} \quad T < T_c \quad 5.13.$$

$$-\rho \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{E_0} + \frac{\rho k \chi^2}{\alpha k - i\omega} \quad T > T_c \quad 5.14.$$

Por separación de las partes real e imaginaria llegamos a expresiones para el módulo elástico dinámico y el decremento logarítmico que caracteriza la fricción interna. Para $T < T_c$ obtenemos

$$E = E_0 \left[1 - \frac{\Delta E}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] \quad 5.15.$$

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta E \omega \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad 5.16.$$

con

$$\Delta E = -\frac{E_0 \rho}{2\alpha} (\delta^1 \xi_0 - \chi)^2 \quad 5.17.$$

$$\tau = -\frac{1}{2\alpha k} \quad 5.18.$$

A temperaturas bajas comparadas con la temperatura de transición de fase T_c , obtenemos

$$\Delta E \cong \frac{E_0 \rho \delta^2}{2\beta} = \text{const} \quad 5.19.$$

y la ecuación 5.15. es semejante a la de un sólido lineal estandar con E creciente cuando ω crece.

A altas temperaturas, cuando $T \rightarrow T_c$, obtenemos

$$\Delta E \cong - \frac{E_0 \rho \chi^2}{2 \alpha} \quad 5.20.$$

y la ecuación 5.15. se transforma en

$$E = E_0 \left[1 + \frac{\frac{E_0 \rho \chi^2 k}{\omega} \omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] \quad 5.21.$$

que es semejante a la ecuación de disipación del modelo del sólido lineal estandar. En la Figura nº 5.8. se muestran curvas cualitativas de las expresiones 5.19. y 5.21. y se grafica el módulo dinámico en unidades arbitrarias. La forma real depende de la relación entre los tres términos de la expresión

$$- \frac{E_0 \rho}{2 \alpha} \left(- \frac{\gamma^2 \alpha}{\beta} - 2 \gamma \xi_0 \chi + \chi^2 \right) \quad 5.22.$$

siendo el término $-\gamma^2 \alpha / \beta$ dominante a bajas temperaturas y el término χ^2 dominante en temperaturas cercanas a la de transición de fase.

El parámetro de orden $\xi_0 = 0$ para $T = T_c$ pero $\xi = \xi_0 + \xi_p \neq 0$. La transformación de fase de segundo orden está ausente bajo la acción de un campo elástico externo pero el parámetro de orden se aproxima a cero tanto como la tensión externa se aproxima a cero también [25].

5. 5. DISCUSION

La discusión supone, básicamente, que el fenómeno de relajación observado se debe al desordenamiento de los átomos de carbono existentes en la red de martensita. El desorden es producido por la vibración impuesta en la frecuencia de resonancia fundamental. La pendiente creciente del módulo de Young se halla entre los 360 K y los 475 K con un punto medio ubicado en el orden de los 420 K. Si suponemos un comportamiento tipo Arrhénius para la variación de la frecuencia de salto de los átomos de carbono, el tiempo de relajación está dado por

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{\Delta H}{kT}} \quad 5.23.$$

con k : constante de Boltzman.

Si $\tau_0^{-1} = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ sec}^{-1}$ y la energía de activación es $\Delta H = 0,835 \text{ eV}$ el máximo del pico de Snoek debiera haberse encontrado en 440 K. En las frecuencias de resonancia superiores el fenómeno no se manifestaría debido a la no coincidencia de las mismas con la frecuencia de salto de los átomos de carbono a esa temperatura. Además el desorden de los átomos de carbono se produce entre dos temperaturas características de las transformaciones martensíticas en aceros al carbono AISI-1080. La temperatura M_s de comienzo de la transformación martensítica ha sido determinada en gran cantidad de aceros por medición directa. Existen diversas fórmulas empíricas que dan esta temperatura en función de la concentración de los aleantes. Una de las usuales es la de Grange and Stewart [26] dada por

$$M_s [^{\circ}\text{C}] = 538 - 361 \% \text{C} - 39 \% \text{Mn} - 19 \% \text{Ni} - 39 \% \text{Cr} - 28 \% \text{Mo} \quad 5.24.$$

Esta fórmula es aplicable cuando todos los aleantes se hallan disueltos en la austenita, el contenido de carbono se encuentra entre 0,2 y 0,85 %, el contenido de molibdeno es menor que 1 % y el contenido de cromo se halla por debajo del 1,5 %. La importancia de la completa disolución de los carburos se debe a que una precipitación de los mismos resultaría en una mayor temperatura M_s debido al menor contenido de carbono en la matriz de austenita.

Para una composición, como la determinada en nuestras probetas, de 0,82 % de carbono y 0,7 % de manganeso obtenemos

$$M_s = 215 \text{ }^\circ\text{C} = 488 \text{ K}$$

5.25.

El dato de la temperatura M_f , a la cual la martensita cesa de formarse, no es fácil de encontrar debido a la dificultad de medición de pequeños porcentajes de austenita retenida (del orden del 5 % o menos). La influencia del contenido de carbono en la proporción de martensita formada a una dada temperatura por debajo de M_s ha sido estudiada por Grange and Stewart [26]. Para un acero con 0,82 % de carbono la temperatura M_f se halla 260 $^\circ\text{F}$ [127 $^\circ\text{C}$] por debajo de la temperatura M_s , es decir aproximadamente a 88 $^\circ\text{C}$.

La Figura n^o 5.9. muestra la variación del módulo de Young en función del $\text{Log} \left(\frac{C}{T-T_c} \right)$ con C constante arbitraria que sólo produce un corrimiento en el eje de las abscisas. Puede observarse un comportamiento similar al de la curva teórica de la Figura n^o 5.8. para $T_c = 488 \text{ K} = M_s$. De todas maneras, al ser la curva teórica dependiente de tantos parámetros, no puede tomarse esta coincidencia como absolutamente determinante.

A pesar de que la transformación que intentamos describir no constituye, estrictamente hablando, la inversa de la transformación martensítica, el comportamiento que se observa en la Figura n^o 5.3. es característico de gran parte de las transformaciones martensíticas reversibles durante la transformación inversa [27]. En nuestro caso este comportamiento podría deberse a la difusión y precipitación de parte del carbono disuelto, lo que reduciría la interacción entre los defectos, aún cuando esta temperatura suele considerarse demasiado baja para inducir difusión y precipitación apreciable.

El estudio de las curvas obtenidas para el módulo de Poisson requiere del uso de la teoría desarrollada en el Capítulo II. En esta teoría anelástica bajo deformaciones multiaxiales pudimos ver que el punto de inflexión en las curvas del módulo de Poisson se encuentra en $\omega^2 = 1/\sqrt{3}$ para tracciones a lo largo del eje $\langle 100 \rangle$ y contracciones a lo largo de los ejes $\langle 010 \rangle$ ó $\langle 001 \rangle$. Para una textura de alambre clásica, en materiales de simetría cúbica, la tracción longitudinal quedaría aplicada a lo largo del eje $\langle 110 \rangle$, preferencialmente, y las contracciones ocurrirían en ejes ubicados en el plano $\{110\}$. Para un defecto de simetría tetragonal y después de una integración sobre todas las posibles direcciones de este plano, obtenemos:

$$\nu^{(1)} = \frac{S^I S^{II} + (S^{II} - \delta_{s_{11}-s_{12}}) \left(S^I + \frac{1-3\pi}{4} \delta_{s_{11}-s_{12}} \right) \omega^2 \alpha_\sigma^2}{\pi \left[S^{II^2} + (S^{II} - \delta_{s_{11}-s_{12}})^2 \omega^2 \alpha_\sigma^2 \right]} \quad 5.26.$$

$$S^I = \frac{3\pi}{4} S_{11} + 3 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) S_{12} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{3\pi}{4} \right) S_{44}$$

$$S^{II} = 3 S_{11} + 5 S_{12} + \frac{3}{2} S_{44}$$

como parte real del módulo de Poisson. Esta expresión, como función de $\omega \alpha_\sigma$, tiene un punto de inflexión en

$$\omega \alpha_\sigma = \frac{S^{II}}{\sqrt{3} (S^{II} - \delta_{s_{11}-s_{12}})} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5.27.$$

Este valor resulta prácticamente idéntico al obtenido para el caso más simple de tracción y contracción a lo largo de ejes principales.

A partir del desarrollo efectuado en el parágrafo 5.4. podemos considerar válido, para el comportamiento del módulo de Young, un modelo similar al sólido lineal estandar. Las diferencias principales radican en la variación de ΔE y en el crecimiento del módulo de Young con la temperatura. Este último efecto es producto de la dependencia de \hat{c} con la temperatura cerca del punto crítico y no de la expresión de E en función de $\omega \alpha_\sigma$. La ecuación 5.15. es formalmente idéntica a la de un sólido lineal estandar en cuanto a la dependencia de $\omega \hat{c}$ se refiere. Lejos del punto crítico, es decir unos 40 ó 50 K en menos, podemos considerar que \hat{c} sigue todavía una variación según la ley de Arrhénius 5.23. Para el módulo de Young el modelo del sólido lineal estandar predice un punto de inflexión en

$$\omega_Y \alpha_Y = 1 \quad 5.28.$$

en tanto que para el módulo de Poisson hemos calculado un punto de inflexión en

$$\omega_P \alpha_P \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5.29.$$

donde γ y ρ indican las frecuencias y tiempos de relajación del módulo de Young y de Poisson en el punto de inflexión, respectivamente.

De estas ecuaciones y la ecuación 5.23, obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_{\gamma} \tau_{\gamma} &= \omega_{\gamma} \tau_0 e^{\Delta H / K T_{\gamma}} = 1 \\ \omega_{\rho} \tau_{\rho} &= \omega_{\rho} \tau_0 e^{\Delta H / K T_{\rho}} = 1/\sqrt{3} \end{aligned} \quad 5.30.$$

El corrimiento del punto de inflexión de la curva representativa del módulo de Poisson respecto de la del módulo de Young representa un corrimiento conjunto de la curva. Por esto es de esperar que, ante la dificultad de determinar con precisión el punto de inflexión de la curva, podamos utilizar como punto característico de cada curva los máximos de E y ν en función de la temperatura. Además este máximo se produce como consecuencia de la superposición de la relajación con la caída normal del módulo de Young por el aumento de temperatura. Por otro lado existe una indeterminación en el valor de ω_{ρ} producto de la utilización de dos frecuencias de resonancia para determinar cada valor de ν . La utilización de una u otra de las frecuencias no altera substancialmente los resultados y convendremos por lo tanto en usar un promedio aritmético de ambas. Con estas consideraciones y utilizando $T_{\gamma} = 473$ K calculamos los valores de la temperatura de máximo de algunas de las curvas del módulo de Poisson. En la Tabla n° 5.1. se muestran estos valores conjuntamente con los valores experimentales.

5. 6. CONCLUSIONES

Los puntos experimentales obedecen una ley aproximada al modelo del sólido lineal estándar. Las curvas correspondientes al módulo de Poisson están en buen acuerdo con las previsiones de la teoría desarrollada para deformaciones multiaxiales. La relación sugerida entre la temperatura crítica de un fenómeno de desorden y las temperaturas M_E y M_F de una transformación martensítica no puede considerarse suficientemente probada sino que debe seguir siendo analizada teórica y experimentalmente. La forma y posición de la curva E vs. $\text{Log} \left\{ C / (T - T_0) \right\}$ tiene poca sensibilidad a variaciones de T_0 y su dependencia de varios parámetros podría ocasionar un buen ajuste aún cuando el modelo no fuese correcto. No obstante se considera que la evidencia experimental acumulada, en el campo de la fricción interna y de este trabajo, es suficiente como para suponer válido el modelo propuesto. Las previsiones acerca del comportamiento del módulo de Poisson, confirmadas experimentalmente, constituyen un dato más a tener en cuenta en su apoyo. Las curvas del módulo de Young medidas por Ren'iti para muestras presentan un crecimiento rápido entre 140 C y 250 C para contenidos de carbono del 1,4 % pero nada se informa sobre el grado de solución del mismo en la matriz de hierro. Para hierro con un alto grado de pureza (no informada cuantitativamente) no se observa ninguna modificación en el comportamiento monótono decreciente del módulo de Young. R. Kimura adjudica este comportamiento a la presencia de cementita precipitada, la cual tiene un punto de Curie en 15 C. La cementita tiene una estructura trigonal con los átomos de carbono en el centro de prismas triangulares con un total de seis átomos de hierro en los vértices al igual que en el sitio octaédrico del Fe- α . Se necesita un análisis más detallado y un trabajo experimental más extenso para definir cuál es el mecanismo y localización real del fenómeno. Un comportamiento similar ha sido reportado en aleaciones Nb-H [28]. G. Alefeld et al [29] mostraron que las interacciones atractivas entre los átomos de hidrógeno son de carácter elástico y son las responsables de la transición.

El modelo propuesto es compatible con las observaciones que pueden hacerse sobre las curvas experimentales. La transformación es reversible por temperatura pero desaparece por interrupción del campo vibratorio externo. La evolución orden-desorden es adjudicable a saltos de átomos de carbono y por lo tanto sólo puede ser induci-

da por la frecuencia dada por la ley de Arrhénius entre las temperaturas de inestabilidad M_s y M_f . Esta transformación debería proceder a mayor temperatura en ausencia de vibración, pero el fenómeno de precipitación impide el establecimiento de desorden en el Fe. Esto confirmaría la hipótesis de que toda transformación martensítica es reversible a menos que un fenómeno de difusión y precipitación destruya la reversibilidad [30].

Los incrementos en el módulo de Young que pueden observarse en los armónicos superiores, especialmente los de orden tres y cinco, pueden deberse a un desordenamiento parcial provocado por las frecuencias triple, quintuple, etc., de las que corresponden para el salto de los átomos de carbono. Otra posibilidad es que se trate de un remanente del desorden producido en la frecuencia fundamental y que logra ser detectado cuando se miden, con posterioridad a la misma, los armónicos superiores. Este comportamiento es una confirmación de que no se trataría de una transformación de fase inducida por temperatura como la sugerida por R. Kimura en la cementita. Teniendo en cuenta que su frecuencia de medición es de 21 KHz, se confirmaría nuestra hipótesis. Si bien esta frecuencia levemente superior a nuestra frecuencia fundamental, era de esperar, por la ley de Arrhénius, un pequeño incremento de la temperatura de comienzo de la transformación.

REFERENCIAS

1. R. Kimura and K. Chno, Sci. Reports Tohoku Univ., 23 [1934]359.
2. K. Nakamura, Sci. Reports Tohoku Univ., 25 [1936] 364.
3. R. Kimura, Proc. Phys. Soc. Japan, 21 [1939] 686; 786.
4. M. Cantone, Nuovo Cimento, I [1895] 165; IV [1896] 270.
5. E. Woodruff, Phys. Rev., XVI [1903] 321.
6. J. Snoek, Physica, VIII [1941] 711.
7. J. Snoek, Physica, IX [1942] 862.
8. J. Ewing, Phil. Trans. Roy. Soc., London, CLXXVI [1885] 554.
9. G. Richter, Ann. d. Phys., XXXII [1938] 883.
10. G. De Vries, D.W. Van Geest, R. Gersdorf and G.W. Rathenau, Physica, 25 [1959] 1131.
11. V. Hivert, P. Groh, W. Frank, I. Ritchie and P. Moser, Phys. Stat. Sol. [a] , 46 [1978] 89.
12. F.L. Everett and J. Miklowitz, J. of Appl. Phys., 15 [1944] 592.
13. A. S. Nowick and B.S. Berry, Anelastic Relaxation in Crystalline Solids, Academic Press N.Y. [1972].
14. C. Zener, Elasticity and Anelasticity of Metals, The University of Chicago Press, Chicago [1948].
15. T.S. Ke, Phys. Rev., 74 [1948] 16.
16. R.W. Powers and M. Doyle, Acta Met., 4 [1956] 233.
17. R.W. Powers and M. Doyle, J. of Appl. Phys., 30 [1959] 514.
18. M. Weller, J.X. Zhang, K. Schulze, T.S. Ke and J. Diehl, J. de Physique, C 5, Suppl. n^o 10, 42 [1981] 817.
19. M. Weller, J. Diehl, G. Hörz, R. Mann and K. Schulze, ICIFUAS-8, [1985].

20. C. Zener, Trans. A.I.M.E., 167 (1946) 550.
21. L.D. Landau, and Lifshitz E.M., Statistical Physics, Pergamon Press, Oxford (1980).
22. Shang-keng Ma, Modern Theory of Critical Phenomena, The Benjamin Cummings Publishing Co. Inc. (1976).
23. Belov, K. F., Katayev, G.I. and Levitin, R.Z., J. of Appl. Phys. Suppl. 31(1960) 153 S.
24. J.D. Gunton, M. San Miguel and P.S. Sahni, Phase Transitions and Critical Phenomena. C. Domb and J.L. Lebowitz eds.. Academic Press. London (1983) Vol 8 , Cap. 3.
25. F. Falk, J. Physique, C 4, suppl n^o 12, 43 (1982) 3.
26. Grange and Stewart, Trans. of A.I.M.E., 206 (1956) 1393.
27. M. W. Burkart and T.A. Read, Trans. of A.I.M.E., 197 (1953) 1516.
28. G. Alefeld, G. Schaumann, J. Tretkowski and J. Völk, Phys. Rev. Letters, 22(1969)697.
29. G. Alefeld, J. Völk and J. Tretkowski, J. Phys. Chem. Sol., (1970)
30. J.W. Christian, The Theory of Transformations in Metals and Alloys, Pergamon Press, Oxford (1975) p. 13.

BIBLIOGRAFIA

F.G. Shewmon, Transformations in Metals, Mc Graw-Hill Series in Materials Science and Engineering, New York (1969).

R.E. Reed-Hill, Physical Metallurgy Principles, D. Van Nostrand and Co., (1973)

R.W. Cahn and P. Haasen, editors; Physical Metallurgy, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1983), Vol. 1 and 2.

LEYENDAS DE FIGURAS

- 5.1. Distorsión de Bain de la celda F.C.C. durante la transformación martensítica. Generación de la celda B.C.T. con ocupación preferencial de los sitios octahédricos con su eje tetragonal en la dirección del eje z.
- 5.2. Módulo de Young en función de la temperatura para diferentes frecuencias de resonancia impar.
- 5.3. Estabilización del comienzo de la transformación por recocido a 330 K durante 12 y 24 horas para 2do. y 3er. aumento de temperatura, respectivamente.
- 5.4. Módulo de Poisson para diferentes armónicos en función de la temperatura.
- 5.5. Micrografía óptica 300 X. Probeta original, corte longitudinal al eje de la probeta.
- 5.6. Micrografía óptica 750 X. Probeta original, corte transversal al eje de la probeta.
- 5.7. Micrografía óptica 750 X. Probeta ensayada, corte longitudinal al eje de la probeta.
- 5.8. Evolución del módulo de Young en función de la frecuencia. Valores teóricos para bajas y altas temperaturas y comportamiento cualitativo para temperaturas intermedias.
- 5.9. Variación del módulo de Young para la frecuencia de resonancia fundamental en función del Log $\left[C / (T - T_c) \right]$

○ hierro

● carbono

x sitios octaédricos vacíos en la red b.c.c.

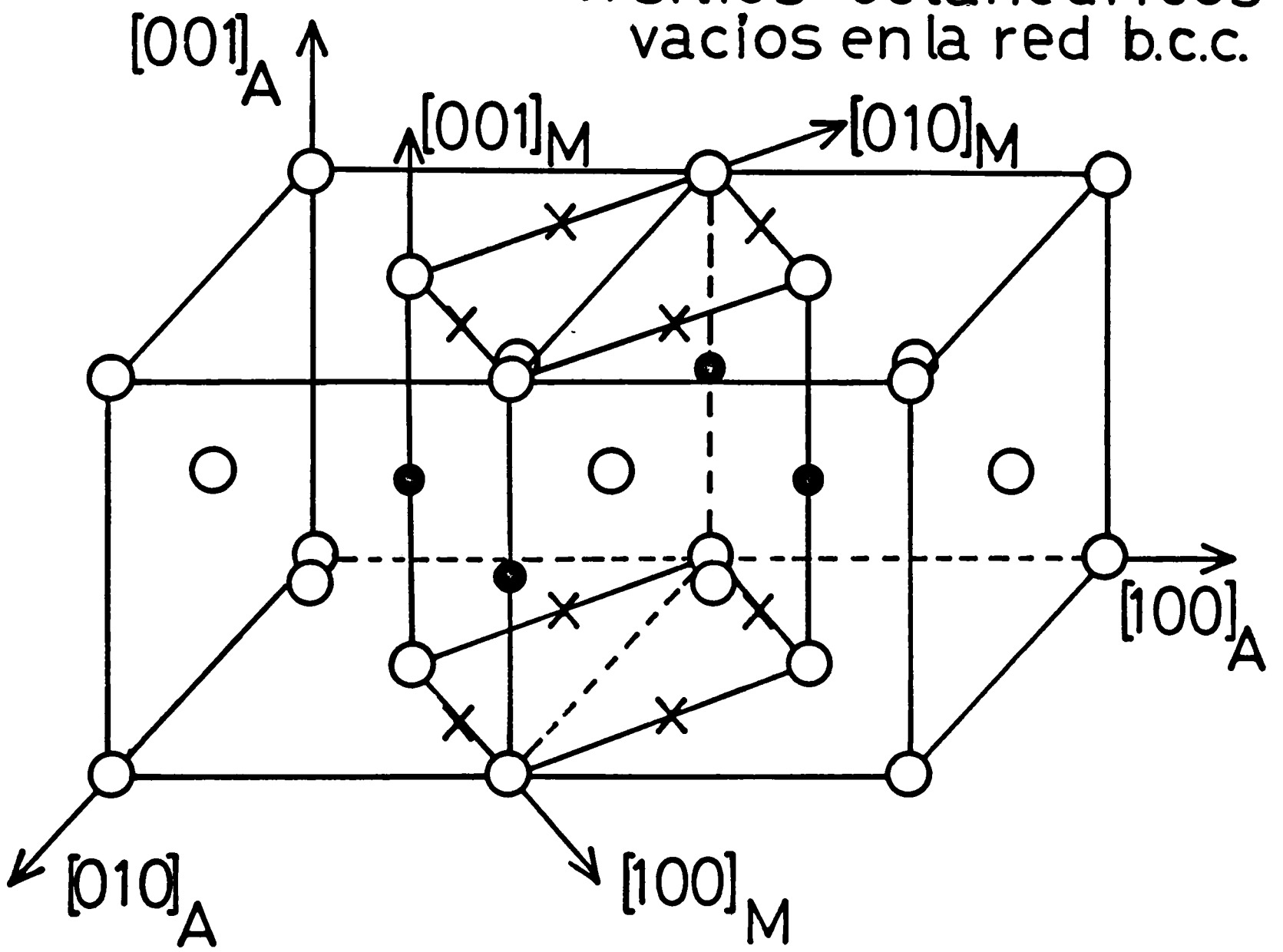


Fig. nº 5.1.

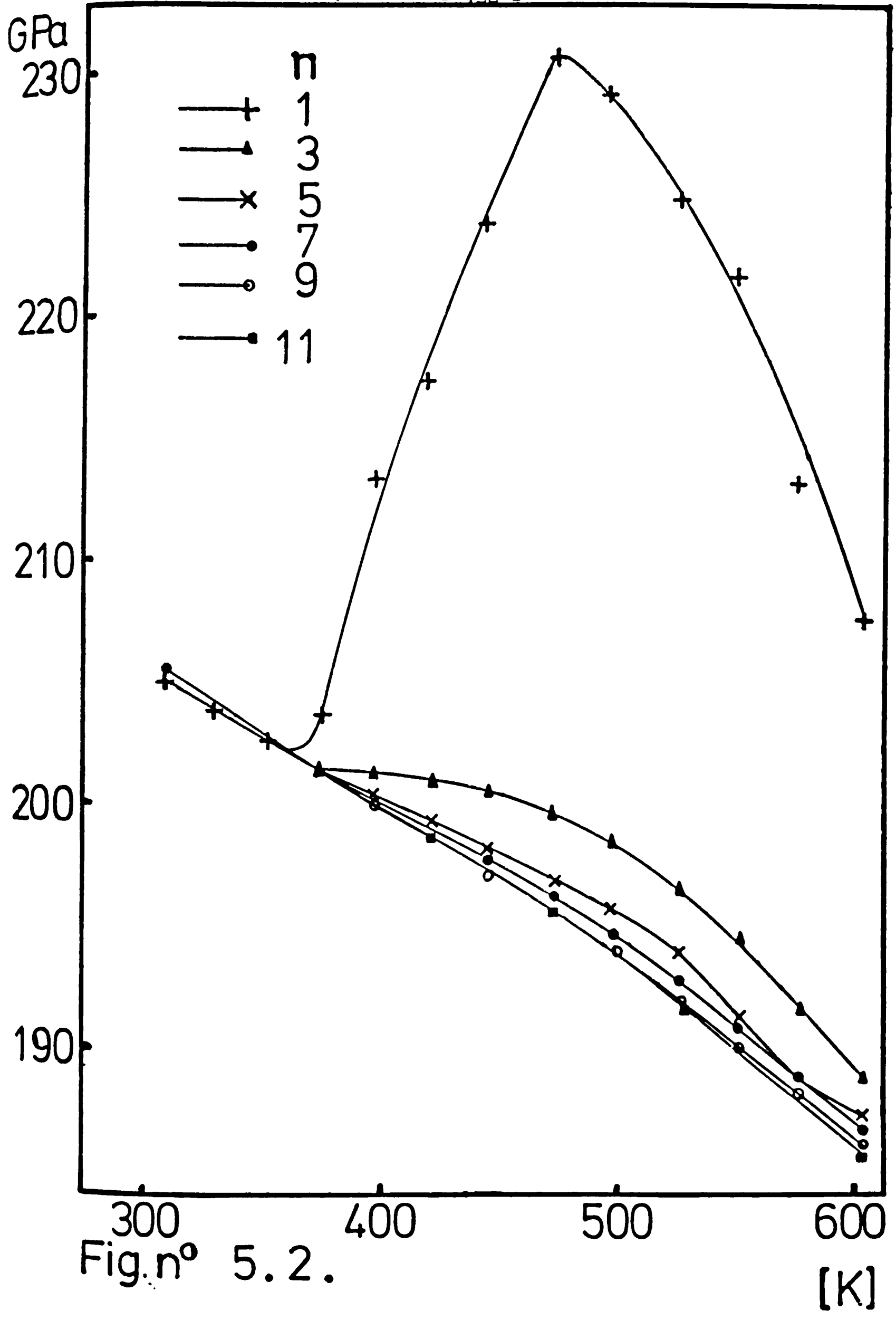


Fig.n° 5.2.

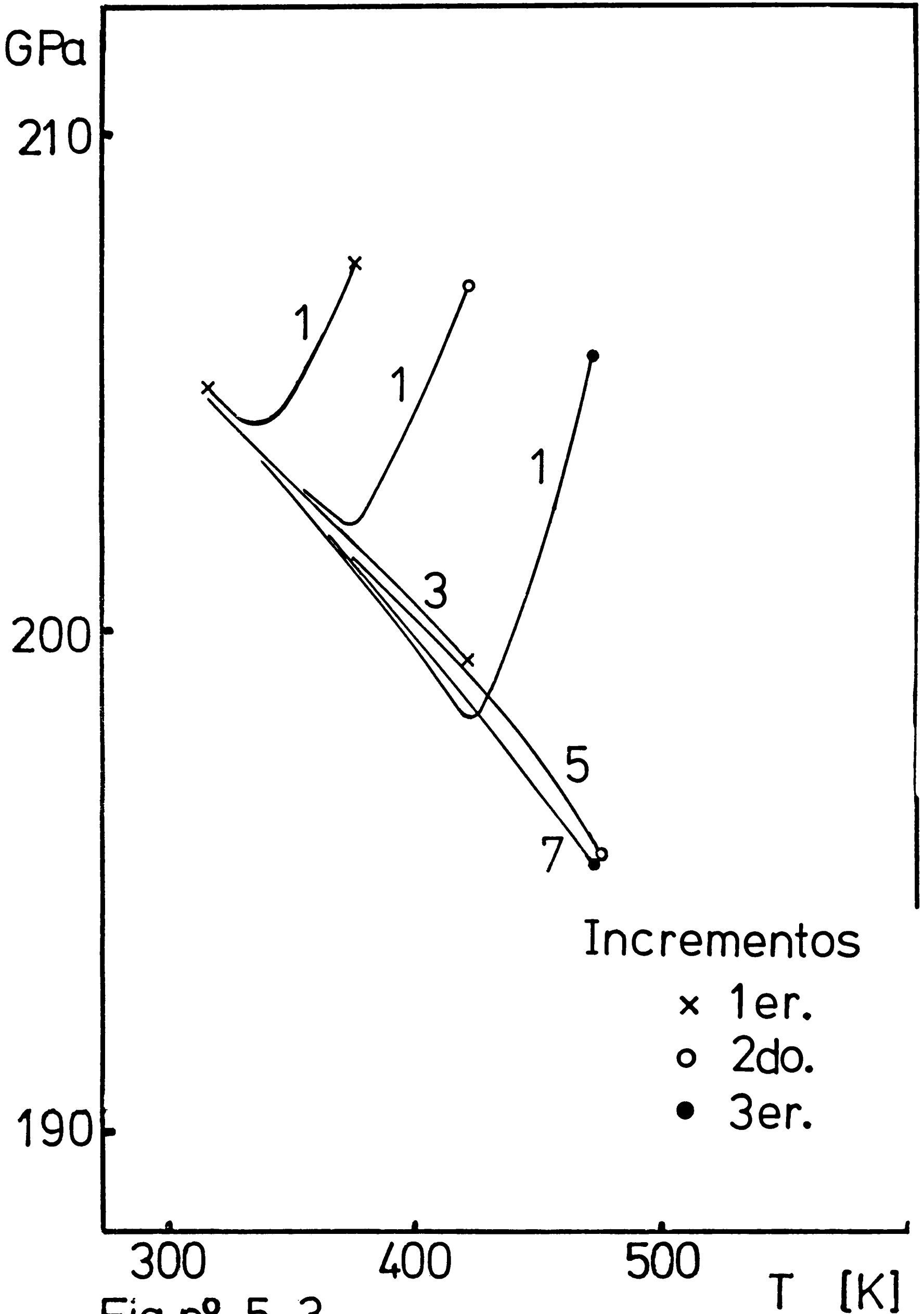


Fig.nº 5.3.

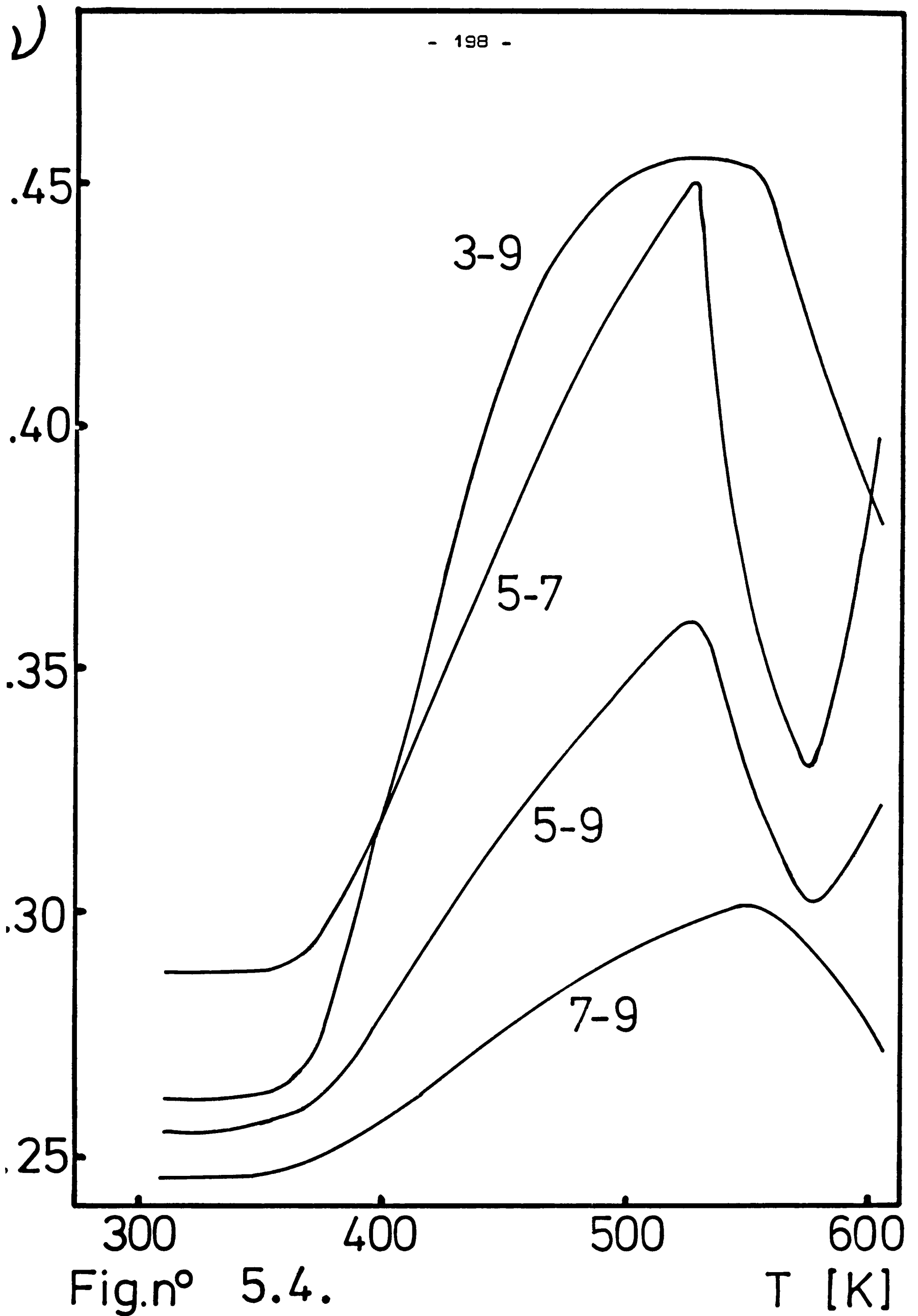




Fig.n° 5.5.

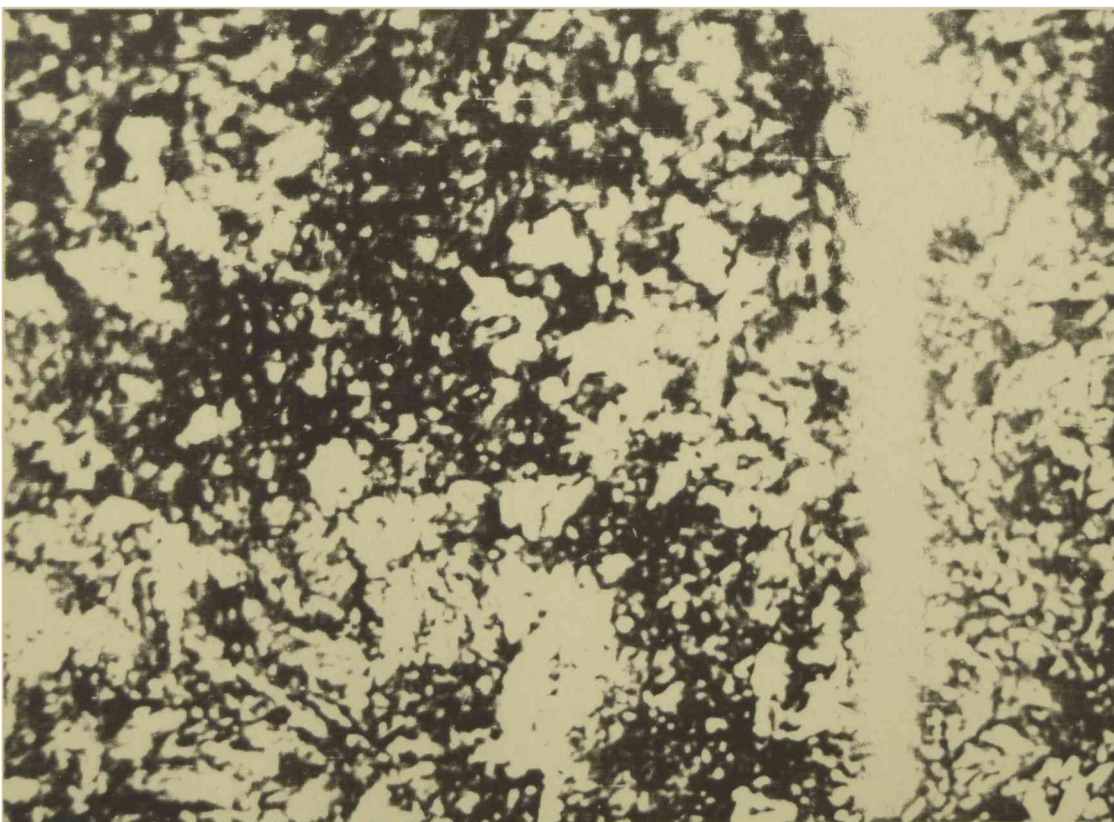


Fig.n° 5.6.



Fig. n° 5.7.

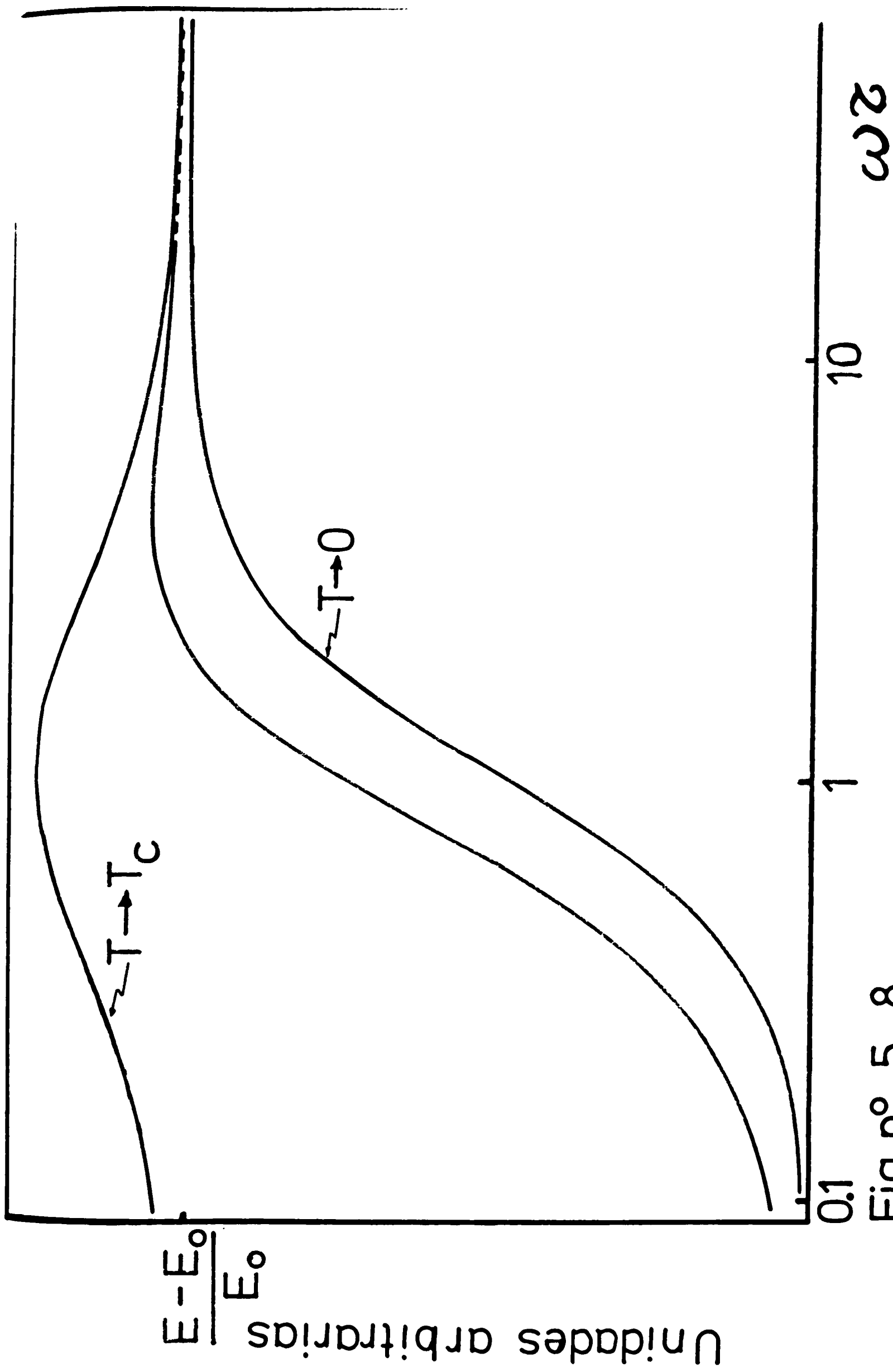


Fig. nº 5. 8.

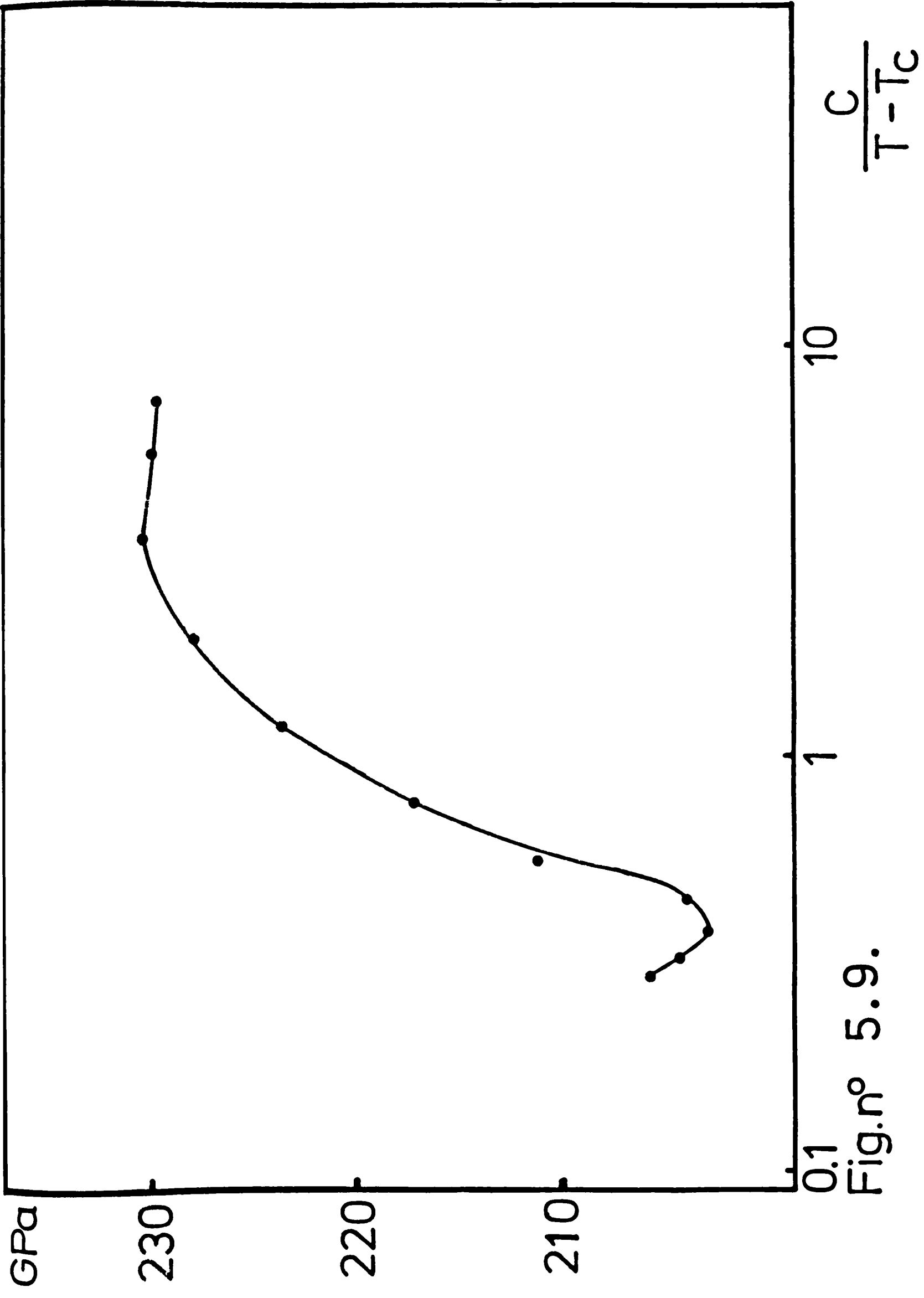


Fig.n° 5.9.

TABLA 5. 1.

Valores teóricos y experimentales de la temperatura de máximos del módulo de Poisson para diversas frecuencias de resonancia.

n_1	n_2	T [K] teórico	T [K] experimental
3	9	534	513- 553
5	7	534	528
5	9	539	528
7	9	543	550

CAPITULO VI CONCLUSIONES GENERALES Y PROYECCIONES

6.1. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En un primer intento de dar una explicación a la alta dispersión de valores experimentales que puede hallarse en la literatura para el módulo de Poisson, se efectuó un estudio de los diversos métodos de promedio en policristales cuasi-isótropos. Puede esperarse un conjunto de modos diferentes de efectuar una distribución de orientaciones en el policristal para obtener un material isótropo. Sin embargo, se concluye que la dispersión de valores no puede ser resultado de la existencia de esa diversidad de orientaciones. Los valores que se obtienen como promedio dependen más bien del grado de anisotropía del cristal original. Esto encuentra sustento en la interpretación física dada a los diversos modos de promedio. El cálculo de los promedios mediante los invariantes tensoriales de las constantes coeficientes elásticos constituye una fundamentación más firme de los aspectos físicos de los promedios conocidos de Voigt y Reuss. Los aspectos fundamentales de esta parte del trabajo fueron dados a conocer en una publicación científica [1] y en la 69a. Reunión de la Asociación Física Argentina [2].

En el análisis de las consecuencias de la anisotropía sobre el valor de las constantes elásticas de un policristal se sugirió un modo de promedio del módulo de Poisson que resultó posteriormente confirmado por la experiencia [3]. Se debe tener especial cuidado en promediar el módulo de Poisson sobre todas las orientaciones y no efectuar el promedio para las constantes E y G y utilizar luego éstas en la ecuación de materiales isótropos. Asimismo se mostró la alta sensibilidad de este módulo a la anisotropía del material debido a su dependencia triaxial. Se puso en evidencia la necesidad de más de una figura de polos para el cálculo por medio de la FDOC y se fundamentó la mayor simplicidad de cálculo para el caso de simetría hexagonal. Los aspectos básicos de los cálculos efectuados dieron origen a una publicación internacional [4] y a dos comunicaciones a congresos científicos [5,6]

Los fenómenos anelásticos que influyen en el comportamiento del módulo de Poisson fueron considerados en la teoría desarrolla-

da en el Capítulo II. La extensión del modelo del sólido lineal estándar a las dos dimensiones de probetas policristalinas permitió posteriormente la explicación de diversos comportamientos aparentemente inconexos. La interpretación energética del fenómeno de relajación multiaxial resulta igualmente interesante. Estos trabajos dieron origen a una publicación [7] y una comunicación a un congreso científico [8].

El equipamiento utilizado fué íntegramente desarrollado en el laboratorio y , aunque su principio de funcionamiento no es original, tiene una sensibilidad superior a la hallada normalmente en este tipo de instrumentos. Sus características principales fueron expuestas en un informe científico interno del instituto IFIR [9].

El basamento experimental, como origen de la investigación y como confirmación de las propuestas teóricas, es expuesto en el capítulo IV para el caso de vainas combustibles y barras de zircaloy-4. Los resultados obtenidos son tratados numéricamente de modo de extraer una información coherente a partir de los mismos. Las anomalías encontradas son explicadas con éxito en términos de la teoría desarrollada en la tesis y son a su vez basamento para interpretaciones de fenómenos similares observables en otros materiales. El módulo de Poisson, dado lo complicado de su medición y procesamiento, merece una atención especial para extraer conclusiones claras. No existe un módulo de Poisson único independiente de las condiciones de medición, frecuencia y textura y geometría del material. Simultáneamente puede obtenerse información sobre los modos de vibración en el caso de probetas de geometría compleja y se concluye que no debe confiarse en ningún módulo que no haya sido medido en las mismas condiciones a las que el material va a prestar servicio. Este trabajo originó dos publicaciones [10,11] y cuatro comunicaciones a congresos [12,15].

En el Capítulo V se efectuó una aplicación al problema de la medición de constante elásticas en varillas de acero AISI-1080. Dado que, a todas luces, no se trataba de un fenómeno anelástico simple de relajación, hubo que modelizar el comportamiento del módulo de Young previamente. Este modelo, de desorden inducido por vibración sobre los átomos de carbono en la red de martensita, resultó ser un buen ajuste para el comportamiento del módulo de Young en la frecuencia fundamental. Se pudo comprobar que podía asimilarse al comportamiento característico de un sólido lineal estándar. Las diferencias más importantes, como por ejemplo el incremento

con la temperatura y la rapidez de variación del módulo, son consecuencia de la dependencia del tiempo de relajación con la temperatura crítica del fenómeno involucrado. La transformación orden-desorden inducida por tensiones cíclicas propuesta constituye un fenómeno físico interesante en sí mismo. Sus conexiones con las transformaciones martensíticas en aceros al carbono pueden resultar de gran importancia teórica y práctica. Un principio de confirmación del modelo propuesto surge del comportamiento previsto para el módulo de Poisson que se ve reafirmado por la experiencia. Los datos experimentales, el modelo desarrollado y las connotaciones resultantes son expuestas en un trabajo a publicar [16] y una comunicación a congreso científico [17].

Las conclusiones más importantes del trabajo de tesis se refieren a cuatro temas principales:

a) Desarrollo de una teoría general de promedio de constantes elásticas a partir de los invariantes de tensores de cuarto orden. Esta teoría incluye como caso particular a los conocidos promedios de Voigt y Resuss.

b) Desarrollo de una teoría de relajaciones anelásticas bajo deformaciones multiaxiales e interpretación de los resultados desde el punto de vista de la disipación de energía.

c) Puesta en evidencia experimental de las grandes dispersiones que pueden obtenerse en los valores medidos en una misma probeta y explicación de este comportamiento a partir de la teoría desarrollada y diversos fenómenos concurrentes.

d) Puesta en evidencia del fenómeno de transición orden-desorden en acero AISI-1080 y su posible conexión con las transformaciones martensíticas. Aplicación a este fenómeno de la teoría de relajaciones multiaxiales y desarrollo de un modelo basado en la teoría de Landau de transiciones de fase de segundo orden.

6.2. PROYECCIONES Y TRABAJO FUTURO

Existen algunos puntos de la tesis que merecen, a nuestro juicio, un tratamiento más detallado. Entre ellos se encuentra el desarrollo de una teoría completa sobre la base de invariantes necesaria para escribir cualquier función escalar de un conjunto de tensores de cuarto y segundo rango del tipo de los utilizados en la teoría de la elasticidad. Esto permitiría escribir las energías de deformación en base a invariantes tensoriales para cualquier simetría y completar el tema de los promedios de constantes elásticas basados en estos invariantes.

Por otro lado sería interesante estudiar el caso de un fenómeno anelástico del tipo Nb-O. Este fenómeno de relajación ha resultado muy estudiado y permitiría aplicar tanto las ecuaciones de relajaciones multiaxiales como las correspondientes a torsión en un ensayo de este tipo. A tales fines se hallan ya preparados monocristales de niobio por el método de fusión zonal con diversas orientaciones.

Fero donde sin duda deben seguirse las investigaciones es en el área de la transformación orden-desorden informada en aceros. Esta transformación tiene una gran importancia teórica por un lado, y merece ser estudiada con las herramientas de trabajo propias de la mecánica estadística y la teoría de fenómenos críticos. Por otro lado, dada la importancia tecnológica de las aleaciones de hierro al carbono, debe profundizarse el trabajo experimental en aceros con diferentes contenidos de carbono. Sería interesante seguir el pico de Snoek desde temperatura ambiente hasta altas temperaturas, mediante la modificación de la frecuencia de resonancia. Esto permitiría ver la paulatina transformación del fenómeno a medida que nos acercamos a la temperatura crítica. En un terreno más especulativo debiera intentarse la posibilidad de "congelar" la estructura conseguida bajo vibración a alta temperatura. Esto permitiría su estudio mediante las técnicas de microscopía electrónica y difracción de rayos X. Además puede esperarse una serie de propiedades interesantes para una aleación que presenta un incremento en su módulo de Young de hasta un 15 % por encima del normal.

REFERENCIAS

1. F.Povolo and R.E.Bolmaro, "Average Elastic Constants and Tensor Invariants", aceptado para su publicación en Phys. Stat. Sol..
2. F.Povolo y R.E.Bolmaro, Invariantes Tensoriales y Promedio de Constantes Elásticas en Materiales Isótopos, Congreso Anual de la Asociación Física Argentina, Buenos Aires, [1984].
3. A. Pochettino, comunicación privada.
4. F.Povolo and R.E.Bolmaro, "Poisson's Ratio in Zirconium Single Crystals", J.of Nucl. Mater. ,118 [1983] 78-82.
5. F.Povolo and R.E. Bolmaro, "Poisson's Ratio of Metals and Alloys", Proceedings of the 7th. International Conference on the Strength of Metals and Alloys. August 12-16, 1985, Montreal, Quebec, Canadá.
6. F.Povolo y R.E.Bolmaro, Coeficiente de Poisson en monocristales de circonio, Congreso Anual de la Asociación Física Argentina, Tucumán, [1983].
7. R.E.Bolmaro and F.Povolo, "Anelastic Behaviour of Materials under Multiaxial Strains", aceptado para su publicación en J. of Mat. Sci..
8. R.E.Bolmaro y F.Povolo, Fenómenos Anelásticos en el Módulo de Poisson de Metales y Aleaciones, IX Simposio Latinoamericano de Física del Estado Sólido, Mar del Plata, Argentina, 19-24 de agosto de 1985.
9. R.E.Bolmaro, A. Olivero y A. de la Torre, Equipo de Medición de Módulos por Propagación de Ondas, Informe Técnico IFIR MF/82, Rosario, [1982].
10. F.Povolo and R.E.Bolmaro, "On the Measurements of Young's Modulus of Tubes by Propagation of Longitudinal Waves", J. of Nucl. Mater., 116 [1983] 166-171.
11. R.E.Bolmaro and F.Povolo, "Anelastic Behaviour of Materials Under Multiaxial Strains, II:Poisson's Ratio, Coupling of Strains and Anelastic Relaxation in Zircaloy-4", aceptado para su publicación en J. of Mat. Sci..Internal Report ICTP/86/343.

12. F.Povolo y R.E. Bolmaro, Medición de Módulos Elásticos en Tubos de Zry-4, Congreso Anual de la Asociación Física Argentina, San Luis, 1981.
13. F.Povolo y R.E. Bolmaro, Variación con la Temperatura de las Constantes Elásticas de Vainas de Elementos Combustibles de Zry-4, Congreso Anual de la Asociación Física Argentina, La Plata, 1982.
14. F.Povolo y R.E. Bolmaro, Relación de Poisson en Vainas de Zry-4, Actes del VIII Simposio Latinoamericano de Física del Estado Sólido, México, 18-22 de Julio de 1983.
15. F.Povolo y R.E. Bolmaro, Relación de Poisson en Aleaciones de Circonio, VIII Jornadas Nacionales y II Latinoamericanas de la Sociedad Argentina de Metales, Buenos Aires, Mayo de 1984.
16. R.E. Bolmaro and F.Povolo, "Anelastic Behaviour of Materials Under Multiaxial Strains, III: Order-Disorder Transition, Snoek effect and Poisson's Ratio in AISI-1080 Steel", enviado para su publicación al J. of Mat. Sci..
17. R.E. Bolmaro and F.Povolo, Efecto Snoek en el Módulo de Poisson del Acero AISI-1080, Congreso Anual de la Asociación Física Argentina, Rosario, 1985.

APENDICE A COMPORTAMIENTO ANELASTICO DE LOS
MATERIALES

Para describir formalmente el comportamiento anelástico es conveniente considerar primero un material elástico ideal, para el cual la ley de Hooke define la relación entre la tensión y la deformación

$$\sigma = M \epsilon \quad \text{A.1}$$

$$\epsilon = J \cdot \sigma \quad \text{A.2}$$

con $M = 1/J \quad \text{A.3}$

La constante M es llamada módulo elástico mientras que su recíproco J se denomina coeficiente elástico, flexibilidad o "compliance".

Para una deformación arbitraria, en especial para materiales anisotrópicos, las relaciones A.1 y A.2 deben ser expresadas como relaciones entre tensores de 2do. orden y M y J son tensores de 4to. orden (Apéndice B).

En nuestro caso nos referiremos a modos de deformación simples donde M puede ser el módulo de corte G , el de Young E o el de compresibilidad K^{-1} .

Hay tres condiciones que definen el comportamiento elástico ideal que están implícitas en las ecuaciones A.1, A.2 y A.3. Estas son:

- a) Cada nivel de tensión tiene como respuesta un único nivel de deformación y viceversa.
- b) El equilibrio es alcanzado instantáneamente.
- c) La respuesta es lineal (doblando la tensión se dobla la deformación).

Como corolario de a) surge la completa recuperabilidad de la deformación cuando se suspende la tensión externa.

Con el fin de generalizar el comportamiento elástico ideal se pueden agrupar las tres condiciones en diversos conjuntos de posibilidades. Las mismas se listan en la Tabla A.I conjuntamente con el nombre de la rama o disciplina que estudia cada compor-

tamiento. Para resumir las condiciones que debe cumplir el comportamiento anelástico podemos utilizar los siguientes tres postulados:

- a) Para cada tensión existe una única deformación de equilibrio y viceversa.
- b) El equilibrio en la respuesta se alcanza sólo después del paso de "suficiente" tiempo.
- c) La relación tensión-deformación es lineal.

El primero y tercer postulado son sólo repetición de los correspondientes a la elasticidad lineal. Como la recuperabilidad es sólo consecuencia del postulado a) lo único a tener en cuenta es que ahora la recuperabilidad será dependiente del tiempo. Por otro lado, levantar la restricción de instantaneidad no significa que toda la respuesta del material sea dependiente del tiempo, sino que además de la respuesta elástica instantánea existe una respuesta anelástica dependiente del tiempo.

Otro punto que merece clarificación es el que se refiere a la linealidad de la relación tensión-deformación. Esta debe tomarse no sólo en el sentido de que una duplicación de la tensión ocasiona una duplicación de la deformación y viceversa sino que, dada una $\sigma_1(t)$ que produce una $\epsilon_1(t)$ y una $\sigma_2(t)$ con una respuesta $\epsilon_2(t)$, la tensión $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ producirá un efecto dado por $\epsilon_1(t) + \epsilon_2(t)$. Felizmente, además, el postulado de linealidad, que produce una gran simplificación en los tratamientos, es aplicable en la mayor parte de los casos y en especial en los metales.

Respecto del primer postulado debemos notar que se trata nada más que de la aseveración de que nos encontramos en presencia de un material definido como "termodinámico" en el sentido de que un proceso se lleva a cabo a través de una serie continua de estados de equilibrio únicos ante cambios infinitesimales de la variable externa. Notemos además que materiales viscoelásticos o plásticos no cumplen con esta condición.

El segundo postulado significa que ante un cambio de la variable externa se requiere cierto tiempo para llegar a un nuevo estado de equilibrio. Este comportamiento temporal de un sistema termodinámico suele denominarse relajación. En nuestro caso provendrá de un acoplamiento entre tensión y deformación vía una variable interna que debe cambiar a nuevos estados de equilibrio a través de un proceso cinético como por ejemplo la difusión. La manifestación macroscópica de este proceso de relajación interna

es la dependencia temporal de la relación tensión-deformación. Más adelante volveremos sobre este punto limitándonos por el momento al tratamiento del problema sobre la base de los tres postulados mencionados.

Las llamadas "funciones respuesta" consideradas en la literatura [1], constituyen una aproximación al comportamiento anelástico. Nosotros trabajaremos con una descripción alternativa en términos de un conjunto de parámetros que pueden ser tomados como atributos intrínsecos del material. El punto de partida de esta interpretación es una relación tensión-deformación en forma de ecuación diferencial lineal que involucra las derivadas temporales de estas variables. El hecho de que la respuesta de un sólido anelástico puede ser descripta por tal ecuación se deduce de la definición de anelasticidad que presupone linealidad en la respuesta y comportamiento dependiente del tiempo. Además, la visualización del comportamiento de un sólido regido por tal ecuación es mejorada por el estudio de un modelo mecánico adecuado.

La ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes más general es del tipo:

$$a_0 \sigma + a_1 \dot{\sigma} + a_2 \ddot{\sigma} + \dots = b_0 \epsilon + b_1 \dot{\epsilon} + b_2 \ddot{\epsilon} + \dots$$

A. 4

Para el caso en que únicamente a_0 y b_0 son diferentes de 0 tenemos el caso del sólido elástico ideal o de Hooke.

El modelo del sólido anelástico standard fue introducido por primera vez por C.Zener en 1948. Su equivalente mecánico consiste en un resorte de constante elástica μ_1 en serie con una combinación en paralelo de un resorte de constante elástica μ_2 y un amortiguador de coeficiente viscoso η_2 [Ver Fig. A.1]

Tenemos que:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \mu_2 \epsilon'' + \eta_2 \dot{\epsilon}''$$

A. 5

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon'' = \sigma / \mu_1 + (\sigma - \eta_2 \dot{\epsilon}'') / \mu_2$$

A. 6

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}' + \dot{\epsilon}'' = \frac{\dot{\sigma}}{\mu_1} + \dot{\epsilon}''$$

A. 7

Multiplicando A.7 por η_2 / μ_2 y sumando miembro a miembro con A. 6 obtenemos

$$\epsilon + \frac{\eta_2}{\mu_2} \dot{\epsilon} = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \sigma + \frac{1}{\mu_1} \frac{\eta_2}{\mu_2} \dot{\sigma} \quad \text{A. 8}$$

Definiendo el tiempo de relajación por

$$\tau_{\sigma} = \eta_2 / \mu_2$$

y las flexibilidades o coeficientes elásticos por

$$J_R = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 \quad J_u = 1/\mu_1$$

obtenemos en forma condensada

$$J_R \sigma + J_u \tau_{\sigma} \dot{\sigma} = \epsilon + \tau_{\sigma} \dot{\epsilon} \quad \text{A. 9}$$

que resulta ser un caso particular de la ecuación A. 4. Para precisar el significado físico de esta ecuación y de algunos de los parámetros utilizados podemos analizar los siguientes casos simples:

a) Relajación de deformaciones a tensión constante (Creep)

Para una tensión aplicada constante la ecuación A. 9 se reduce a

$$J_R \sigma_0 = \epsilon + \tau_{\sigma} \dot{\epsilon} \quad \text{A.10}$$

con $\sigma(t) = \sigma_0$ Esta ecuación tiene como solución

$$\epsilon = \sigma_0 J_R + \sigma_0 (J_u - J_R) \exp(-t/\tau_{\sigma}) \quad \text{A.11}$$

La cantidad $\delta J = J_R - J_u$ es formalmente la relajación del coeficiente elástico J y una medida del relajamiento anelástico, ya que para tiempo infinito

$$\epsilon'' = \sigma_0 \delta J \quad \text{A.12}$$

El coeficiente τ_{σ} es el tiempo necesario para que el sistema llegue a un 63% de su valor de equilibrio. Se lo llama el tiempo de relajamiento a tensión constante. El comportamiento del sólido anelástico standard (s.a.e.), ante un escalón de tensión, puede observarse en la Fig.nº A. 2

b) Relajación de tensión a deformación constante.

Para $\epsilon(t) = \epsilon_0 = \text{cte.}$ la ecuación A. 9 se reduce a:

$$\sigma + \tau_{\epsilon} \dot{\sigma} = M_R \epsilon_0 \quad \text{A.13}$$

con los módulos elásticos definidos por

$$M_u = 1/J_u \quad M_R = 1/J_R \quad \text{A.14}$$

y el tiempo de relajación a deformación constante definido por

$$\tau_{\epsilon} = M_R / M_u \tau_{\sigma} \quad \text{A.15}$$

La solución de la ecuación A.13 puede escribirse como

$$\sigma = \epsilon_0 M_R + \epsilon_0 (M_u - M_R) \exp(-t/\tau_\epsilon) \quad \text{A.16}$$

y su comportamiento puede observarse en la Fig.nº A. 3.

c) Fricción interna o caso de la aplicación de una tensión periódica.

Cuando aplicamos al s.a.e. una tensión periódica

$$\sigma = \sigma_0 \exp i\omega t \quad \text{A.17}$$

la respuesta en deformación del sólido es

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp i\omega t \quad \text{A.18}$$

que reemplazadas en la ecuación diferencial nos permite definir el coeficiente elástico complejo

$$J(\omega) = \frac{\epsilon_0(\omega)}{\sigma_0(\omega)} = J''(\omega) - i J^{(2)}(\omega) = \frac{\epsilon^{(1)}(\omega) - \epsilon^{(2)}(\omega)}{\sigma_0} \quad \text{A.19}$$

con

$$\epsilon_0 = \frac{J_R + J_u \omega^2 \tau_\sigma^2}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \sigma_0 - i \frac{\omega \tau_\sigma (J_R - J_u)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \sigma_0 \quad \text{A.20}$$

Llamando, como antes, $\delta J = J_R - J_u$ obtenemos

$$J''(\omega) = J_u + \frac{\delta J}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \quad \text{A.21}$$

$$J^{(2)}(\omega) = \delta J \frac{\omega \tau_\sigma}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \quad \text{A.22}$$

La deformación $\epsilon^{(2)}(\omega)$ resulta desfasada respecto de $\epsilon^{(1)}(\omega)$ en un ángulo dado por

$$\tan \phi(\omega) = \frac{\epsilon^{(2)}(\omega)}{\epsilon^{(1)}(\omega)} = \frac{J^{(2)}(\omega)}{J''(\omega)} \quad \text{A.23}$$

Las ecuaciones A.21 y A.22 constituyen las llamadas ecuaciones de Debye mostrando la segunda un pico centrado en $\omega \tau_\sigma = 1$.

De la ecuación A.23 y definiendo

$$\Delta_M = \frac{\delta J}{J_u} = \frac{M_u}{M_R} - 1 = \frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon} - 1$$

$$\bar{\tau} = (\tau_\sigma \cdot \tau_\epsilon)^{1/2} = \tau_\sigma / (1 + \Delta_M)^{1/2}$$

obtenemos

$$t_g \phi(\omega) = \frac{\Delta_M}{(1+\Delta_M)^{1/2}} \frac{\omega \bar{\epsilon}}{1 + \omega^2 \bar{\epsilon}^2} \quad \text{A.23}$$

que exhibe también un pico de Debye centrado en $\omega \bar{\epsilon} = 1$.

El significado del coeficiente elástico complejo queda más claro si calculamos la capacidad específica de disipación de energía. La energía entregada en un ciclo es

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma \epsilon dt \quad \text{A.24}$$

mientras que la energía disipada en igual período es

$$\Delta W = \int_0^T \sigma \dot{\epsilon} dt \quad \text{A.25}$$

Reemplazando σ y ϵ por las expresiones halladas encontramos

$$t_g \phi = \frac{J^{(2)}}{J^{(1)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} = Q^{-1} \quad \text{A.26}$$

Las Figs. n° 4 y 5 dan una descripción cualitativa del s.a.e. ante tensiones cíclicas.

Otro modelo mecánico, del que resulta una ecuación asimilable a la A. 4, consiste en dos paralelos de amortiguador y resorte en serie con otro resorte tal como se muestra en la Fig. n° A.6.. La ecuación diferencial que se obtiene está dada por

$$\ddot{\epsilon} + \left(\frac{1}{\tau_{\sigma}^{(1)}} + \frac{1}{\tau_{\sigma}^{(2)}} \right) \dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau_{\sigma}^{(1)} \tau_{\sigma}^{(2)}} = J_u \ddot{\sigma} + \left[\frac{\delta J^{(1)}}{\tau_{\sigma}^{(1)}} + \frac{\delta J^{(2)}}{\tau_{\sigma}^{(2)}} + \left(\frac{1}{\tau_{\sigma}^{(1)}} + \frac{1}{\tau_{\sigma}^{(2)}} \right) J_u \right] \dot{\sigma} + \frac{\delta J^{(1)} + \delta J^{(2)} + J_u}{\tau_{\sigma}^{(1)} \tau_{\sigma}^{(2)}} \sigma \quad \text{A.27}$$

la que ante tensiones periódicas describe una respuesta definida por el coeficiente elástico complejo

$$J^{(1)}(\omega) = J_u + \frac{\delta J^{(1)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^{(1)2}} + \frac{\delta J^{(2)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^{(2)2}} \quad \text{A.28}$$

$$J^{(2)}(\omega) = \delta J^{(1)} \frac{\omega \tau_{\sigma}^{(1)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^{(1)2}} + \delta J^{(2)} \frac{\omega \tau_{\sigma}^{(2)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^{(2)2}} \quad \text{A.29}$$

Una generalización al caso de n paralelos de resorte y amortiguador nos provee el coeficiente elástico complejo dado por

$$J^{(1)}(\omega) = J_u + \sum_{i=1}^n \frac{\delta J^{(i)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^{(i)2}} \quad \text{A.30}$$

$$J^{(2)}(\omega) = \sum_{i=1}^n \delta J^{(i)} \frac{\omega \tau_{\sigma}^{(i)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^{(i)2}} \quad \text{A.31}$$

Tal generalización constituye una relajación de espectro discreto donde cada línea del espectro está caracterizada por un $\tau_{\sigma}^{(i)}$ de relajación y una relajación $\delta J^{(i)}$.

Los aspectos microscópicos del s.a.e. se ponen de manifiesto considerando una variable interna ξ acoplada con las variables mecánicas. Tal variable interna puede ser, por ejemplo, un parámetro de orden de corto o largo alcance. Definiremos $\xi = 0$ para $\sigma = 0$ y, como estamos desarrollando una teoría lineal, σ y ξ aparecerán sólo a la primera potencia.

Si

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{el} + \mathcal{E}_{an} = \mu \sigma + \chi \xi \quad \text{A.32}$$

con χ constante de acoplamiento, \mathcal{E}_{el} : deformación elástica y \mathcal{E}_{an} : deformación anelástica.

Para cada valor de σ habrá un valor de equilibrio $\bar{\xi}$ que, debido a los requerimientos de linealidad, cumple una proporcionalidad simple dada por

$$\bar{\xi} = \mu \sigma \quad \text{A.33}$$

con μ dependiente del tipo de tensión y de la temperatura.

Requeriremos también el cumplimiento de una ecuación cinética de primer orden para la aproximación al equilibrio de la variable

$$\xi \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\tau} (\xi - \bar{\xi}) \quad \text{A.34}$$

con τ parámetro con dimensiones de tiempo.

Con estas tres ecuaciones y teniendo en cuenta que

$$\delta J = \frac{\mathcal{E}_{an}}{\sigma} = \frac{\chi \bar{\xi}}{\sigma} = \chi \mu \quad \text{A.34}$$

la ecuación que se obtiene es la del s.a.e. (ec.A.9). En suma, un material descrito mediante una única variable interna es completamente equivalente al modelo del sólido anelástico estándar. Uno puede inferir que este modelo representa, entonces, una situación física de mucha importancia, aunque más no sea en forma simplificada.

TABLA A- I
DIFERENTES TIPOS DE COMPORTAMIENTO MECANICO, CLASIFICADOS
DE ACUERDO CON LAS CONDICIONES OBEDECIDAS POR LAS RELACIO-
NES TENSION-DEFORMACION

COMPORTAMIENTO	RECUPERABILIDAD TOTAL	INSTANTANEIDAD	LINEALIDAD
Elasticidad ideal	sí	sí	sí
Elástico no lineal	sí	sí	no
Plástico instantáneo	no	sí	no
Anelástico	sí	no	sí
Viscoelástico lineal	no	no	sí

LEYENDAS DE FIGURAS

- A. 1 Modelo mecánico del sólido anelástico estandard.
- A. 2 Relajación de deformaciones a tensión constante en un s.a.e.
- A. 3 Relajación de tensiones a deformación constante.
- A. 4 Coeficiente elástico complejo para el modelo s.a.e.
- A. 5 Diagrama fasorial de la deformación compleja.
- A. 6 Modelo reológico de cinco elementos. Espectro discreto.

REFERENCIAS

- 1. A.S.Nowick and B.S.Berry. Anelastic Relaxation in Crystalline Solids. Academic Press. New York [1972].

BIBLIOGRAFIA

- A.S.Nowick and B.S.Berry. Anelastic Relaxation in Crystalline Solids. Academic Press. New York [1972]
- K.M.Entwistle. The internal Friction of Metals. Metallurgical Reviews. Vol. 7 n° 26 pp.175-239
- C.Zener. Elasticity and Anelasticity of Metals. The University of Chicago Press. Chicago-Illinois [1948]

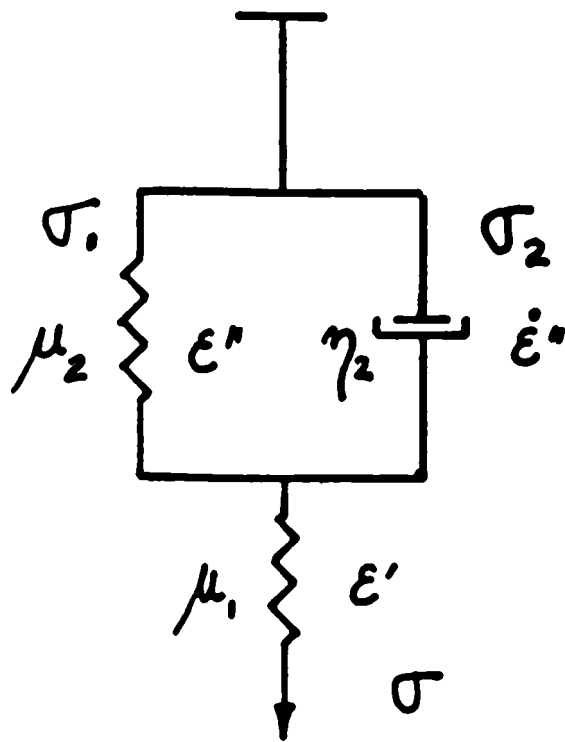


Fig. n° A.1

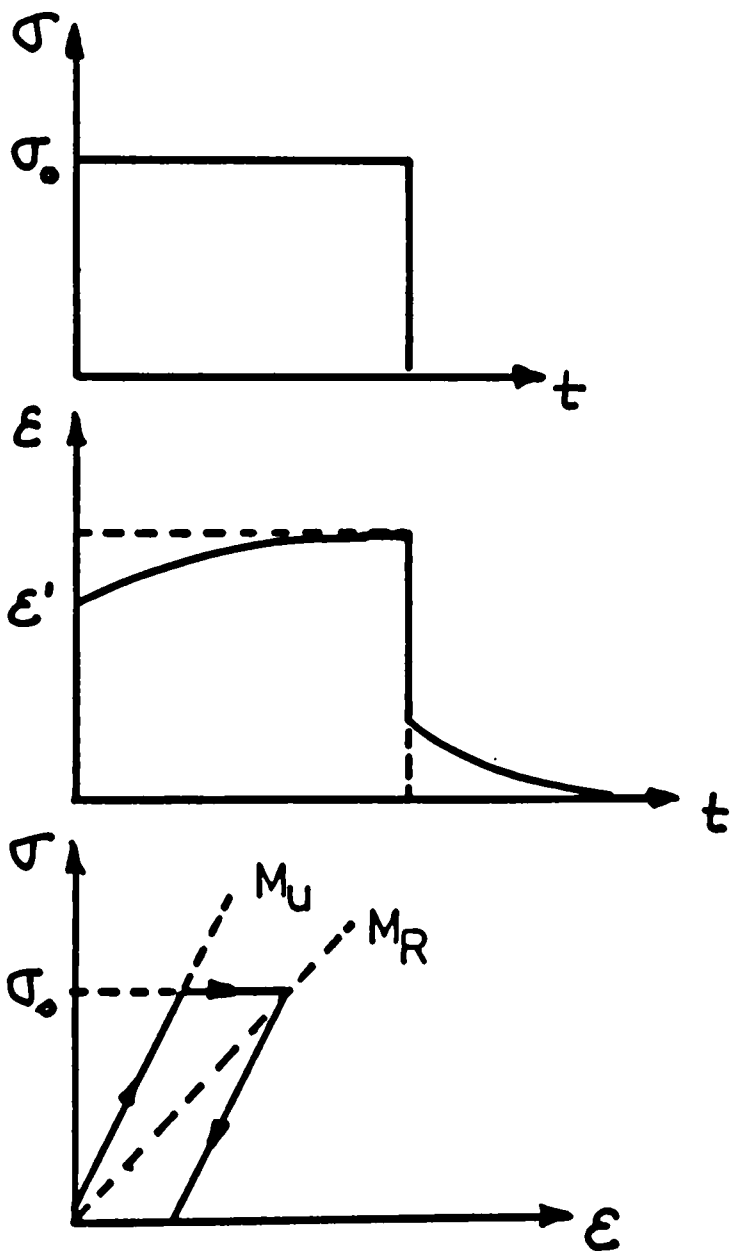


Fig. n° A.2

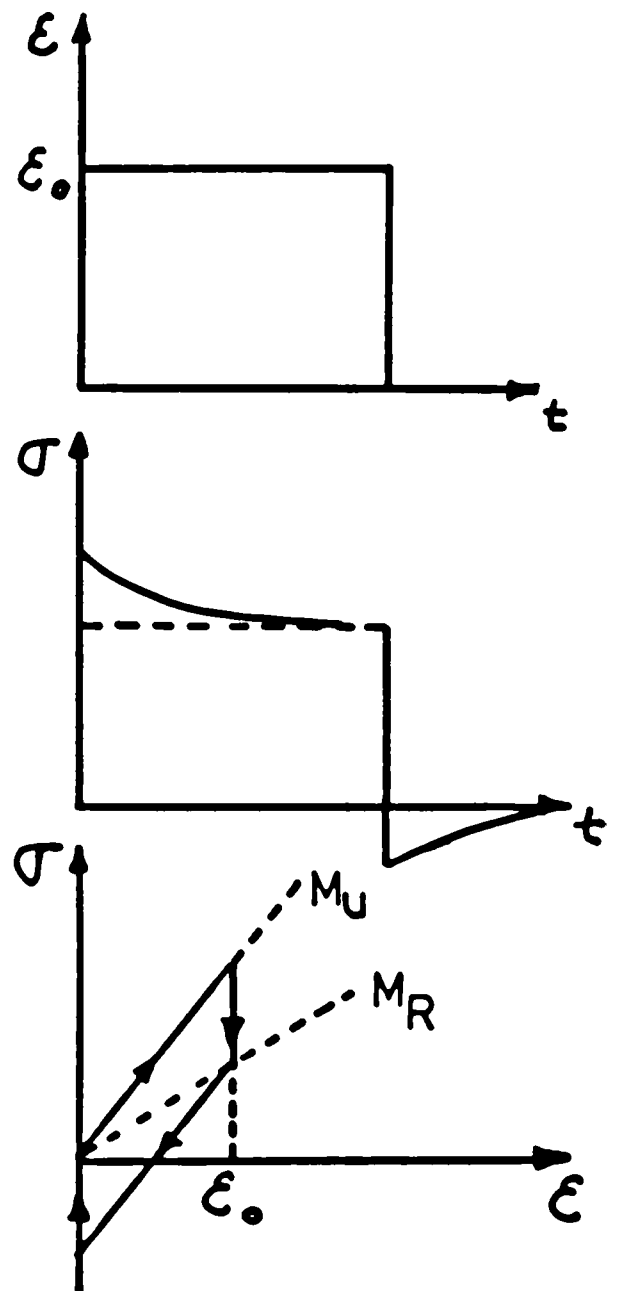


Fig. n° A.3

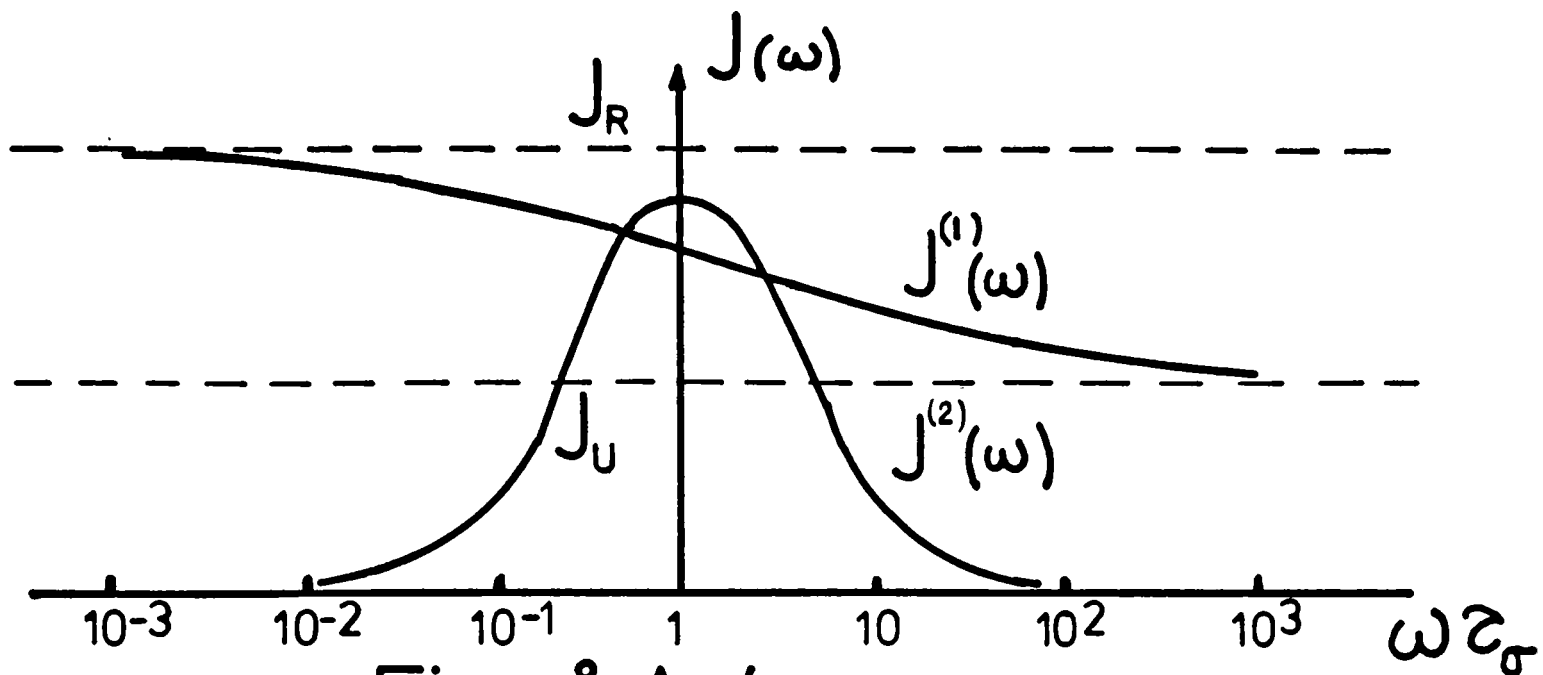


Fig.n° A.4

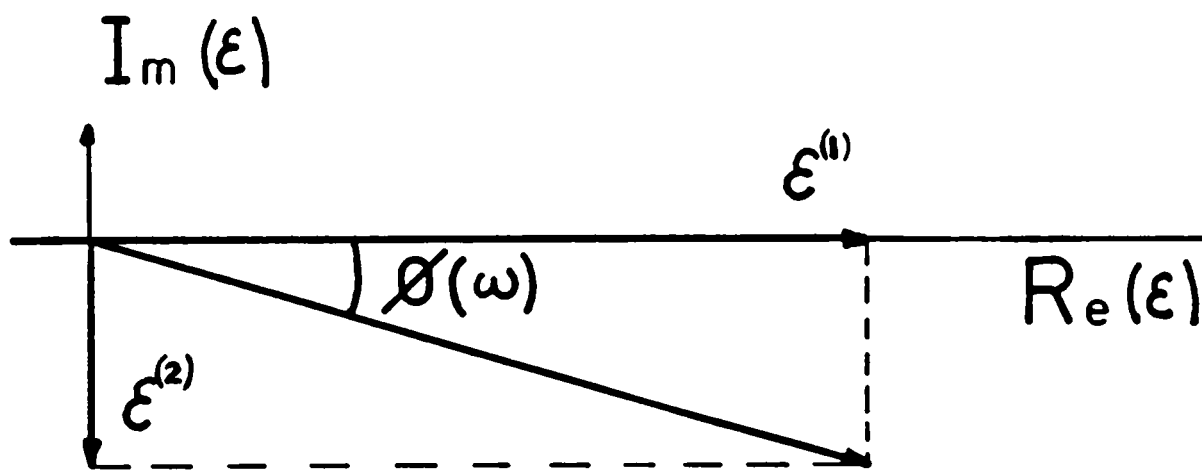


Fig.n° A.5

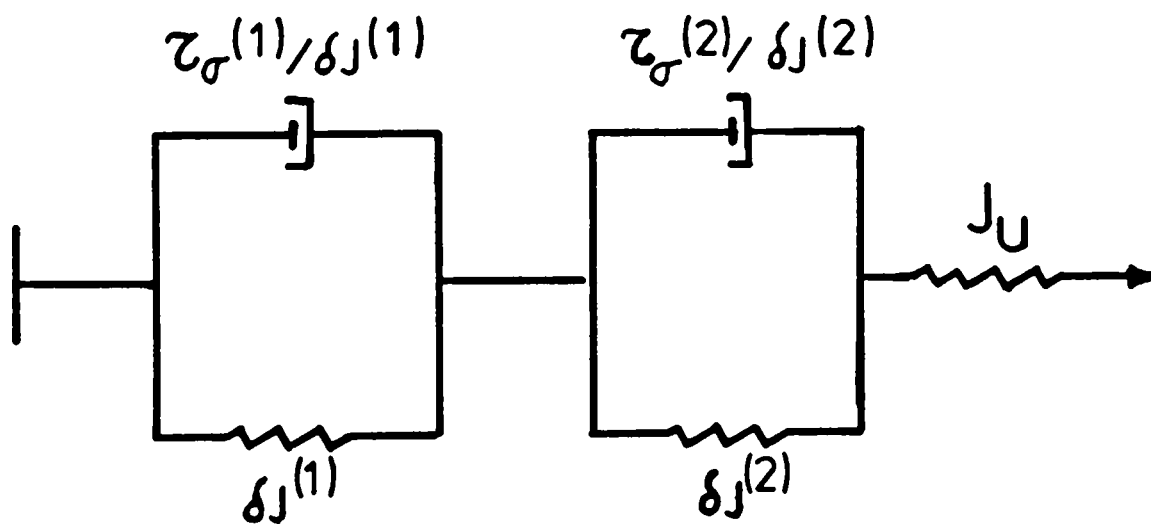


Fig.n° A.6

APENDICE B ELASTICIDAD Y ANELASTICIDAD EN MEDIOS ANISOTROPICOS

a) Elasticidad

En el Apéndice A expresamos las relaciones entre tensiones y deformaciones, para el caso de modos de deformación simples, mediante módulos escalares. Para el caso de deformaciones complejas y ,particularmente, para materiales no isótopos, debe generalizarse la Ley de Hooke a una relación tensorial dada por

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{B. 1}$$

donde las s_{ijkl} son las componentes de un tensor de cuarto rango denominado módulo elástico o módulo de flexibilidad o "compliance". Una descripción alternativa a la ecuación B. 1 se da cuando se expresan las tensiones en términos de las deformaciones mediante

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{B. 2}$$

donde las c_{ijkl} son las 81 constantes de rigidez o constantes elásticas del cristal. En ambos casos, y en lo sucesivo a menos que se indique lo contrario, se entiende válida la convención de Einstein de suma sobre los índices repetidos.

Las 3^4 componentes del tensor de cuarto rango s_{ijkl} no son todas diferentes sino que, por consideraciones acerca de la ausencia de torques y simetría de la expresión de la energía interna, puede disminuirse el número de componentes independientes a 21, haciendo de $\{s\}$ un tensor totalmente simétrico con

$$s_{ijkl} = s_{ijlk} = s_{jikl} = s_{klij} \quad \text{B. 3}$$

Iguales relaciones pueden hallarse para c_{ijkl} . Además las componentes de $\{s\}$ pueden invertirse, teniendo en cuenta el carácter tensorial de ambas cantidades, de modo de obtener las componentes de $\{c\}$ y viceversa. Detalle de estas expresiones, para cada simetría cristalina, pueden encontrarse en la literatura [1].

Un modo alternativo, y operacionalmente más simple, de ex-

presar las relaciones B.1 y B.2 proviene del uso de las propiedades de simetría de {s} y {c}. Se comienza por escribir las componentes del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones con un único subíndice variando de 1 a 6 según la siguiente correspondencia

notación tensorial	11	22	33	23,32	31,13	12,21
notación matricial	1	2	3	4	5	6

introduciendo además factores 2 y 4 según el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_p \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_p \quad \text{para } p= 1, 2 \text{ y } 3 \\ 2 \epsilon_{ij} &= \epsilon_p \quad \text{para } p= 4, 5 \text{ y } 6 \end{aligned}$$

Para los tensores {s} y {c} la correspondencia es la siguiente:

$$\begin{aligned} s_{ijkl} &= s_{mn} \quad \text{para } m \text{ y } n \text{ ambos iguales a } 1, 2 \text{ ó } 3 \\ 2 s_{ijkl} &= s_{mn} \quad \text{para } m \text{ ó } n \text{ iguales a } 4, 5 \text{ ó } 6 \\ 4 s_{ijkl} &= s_{mn} \quad \text{para } m \text{ y } n \text{ ambos iguales } 4, 5 \text{ ó } 6 \\ c_{ijkl} &= c_{mn} \quad \text{para todo } m, n \end{aligned}$$

De este modo las relaciones se reducen a

$$\epsilon_i = s_{ij} \sigma_j \quad i, j= 1, \dots, 6 \quad \text{B. 4}$$

$$\sigma_i = c_{ij} \epsilon_j \quad i, j= 1, \dots, 6 \quad \text{B. 5}$$

con ϵ_i y σ_i vectores en el espacio de seis dimensiones y s_{ij} y c_{ij} matrices cuadradas 6x6 simétricas.

Las constantes s_{ij} con $i=j$ (elementos diagonales) tienen la interpretación más simple. De la ecuación B.4 queda claro, por ejemplo, que $s_{11} = \epsilon_1 / \sigma_1$ cuando $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = 0$. La cantidad s_{11} es igual, por lo tanto, a $1/E_1$, el recíproco del módulo de Young en la dirección x_1 . Las cantidades s_{44} , s_{55} y s_{66} son los recíprocos de los módulos de corte, dado que representan la razón de la deformación de corte a la tensión de corte correspondiente cuando todas las demás tensiones son nulas. Las componen-

tes fuera de la diagonal ($i \neq j$) para ambos menores que 3, tienen una interpretación simple en términos del módulo de Poisson. Por ejemplo $s_{21} = \epsilon_2 / \sigma_1$, cuando todas las tensiones son nulas, está relacionado con la contracción de Poisson en la dirección x_2 cuando una tensión longitudinal es aplicada a lo largo de x_1 . Si ν_{21} es la razón de Poisson para este efecto tenemos $s_{21} = -\nu_{21} / E_1$. Las constantes s_{ij} con $i \leq 3$ y $j \geq 4$ representan la razón entre una deformación longitudinal y una tensión de corte. Son nulas para materiales isotrópicos y para cristales de baja simetría o cuando los ejes coordenados no coinciden con los ejes principales. Finalmente, las constantes s_{ij} con i y $j \geq 4$ representan deformaciones de corte producidas por tensiones de corte actuando sobre planos perpendiculares al de deformación. Tienen también un valor no nulo para cristales de baja simetría o para orientaciones arbitrarias.

Las constantes c_{ij} tienen análoga interpretación. Por ejemplo $c_{11} = \sigma_1 / \epsilon_1$ es la razón entre una tensión longitudinal a la correspondiente deformación cuando todas las otras deformaciones son nulas. Esto significa que la contracción de Poisson no está permitida y queda claro que $c_{11} \neq E_1$ y $c_{11} \neq 1/s_{11}$. Las constantes c_{ij} aparecen naturalmente, por otra parte, en la interpretación de la propagación de ondas de ultrasonido en cristales.

La presencia de simetrías en los cristales reduce aún más el número de constantes independientes. Desde el principio debe notarse que la elasticidad es una propiedad centrosimétrica. Además otros elementos de simetría propios de cada cristal llevan el número de constantes independientes hasta un mínimo de 3 para los cristales cúbicos, 5 para los hexagonales, etc.. Este es el número de constantes independientes cuando el sistema de ejes coordenados coincide con el sistema de ejes principales del cristal. Cuando se quieren calcular las constantes elásticas en función de la orientación debe apelarse al carácter tensorial de las mismas y hacerse uso de

$$s'_{klmn} = a_{ki} a_{lj} a_{mp} a_{nq} s_{ijpq} \quad \text{B. 6}$$

donde el primado se refiere al nuevo sistema de ejes y las a_{ki} son las componentes de la matriz de rotación del viejo sistema de ejes al nuevo. De esta forma obtenemos para los cristales de mayor simetría las siguientes expresiones:

cúbico

$$G^{-1} = s'_{44} = s_{44} + 4 \left(s_{11} - s_{12} - \frac{s_{44}}{2} \right) \Gamma_{//} \quad \text{B. 7}$$

$$E^{-1} = s'_{11} = s_{11} - 2 \left(s_{11} - s_{12} - \frac{s_{44}}{2} \right) \Gamma_{//} \quad \text{B. 8}$$

$$\Gamma_{//} = a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{11}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{13}^2$$

hexagonal

$$G^{-1} = s_{44} + \left(s_{11} - s_{12} - \frac{s_{44}}{2} \right) (1 - a_{33}^2) + 2 \left(s_{11} + s_{33} - 2 s_{13} - s_{44} \right) (1 - a_{33}^2) a_{33}^2 \quad \text{B. 9}$$

$$E^{-1} = s_{11} (1 - a_{33}^2)^2 + s_{33} a_{33}^4 + (2 s_{13} + s_{44}) (1 - a_{33}^2) a_{33}^2 \quad \text{B. 10}$$

Un material isotrópico puede considerarse como un caso particular de cristal cúbico en el cual E y G son independientes de la orientación. Bajo estas condiciones

$$s_{44} = 2 (s_{11} - s_{12}) \quad \text{B. 11}$$

$$c_{44} = (c_{11} - c_{12}) / 2 \quad \text{B. 12}$$

$$G = 1/s_{44} \quad \text{B. 13}$$

$$K^{-1} = 3 (s_{11} + 2 s_{12}) \quad (K = \text{módulo volumétrico}) \quad \text{B. 14}$$

$$\frac{3}{E} = \frac{1}{G} + \frac{1}{3K} \quad \text{B. 15}$$

Una mayor simplificación de la Ley de Hooke para cristales se obtiene si, en lugar de las componentes usuales de tensión y deformación, elegimos seis combinaciones lineales independientes que poseen ciertas propiedades fundamentales de simetría asociadas con las del cristal en cuestión. Estas combinaciones lineales conocidas como coordenadas simetrizadas de tensión y deformación, o tensiones y deformaciones simetrizadas, son obtenidas por medio de la teoría de grupos (1). No derivaremos aquí estas combinaciones lineales pero haremos un análisis de modo de aclarar el significado físico de las mismas. Además las Tablas B.I y B.II muestran las coordenadas y módulos elásticos simetrizados para los cristales de mayor simetría. Para cada sistema cristalino po-

demos ver un total de seis tensiones simetrizadas conjuntamente con seis deformaciones conectadas mediante una combinación de módulos elásticos adecuada. Como cada operación de simetría produce una transformación lineal de coordenadas, producirá a su vez una transformación de las tensiones o deformaciones en una combinación lineal de las otras seis. Las cantidades simetrizadas mostrarán un comportamiento más simple ante tales transformaciones. Las coordenadas simetrizadas designadas con A serán invariantes ante cualquier transformación compatible con las simetrías del cristal y están clasificadas como tipo I. La principal característica de las tensiones de tipo I es que un cristal sometido a tales tensiones no ve disminuída su simetría por la deformación. Las restantes coordenadas simetrizadas son clasificadas como tipo II y un cristal sujeto a una deformación de este tipo ve disminuída su simetría. Por ejemplo una deformación \mathcal{E}_3 aplicada en un cristal hexagonal no disminuye su simetría aún cuando la relación c/a se vea cambiada. En cambio una deformación de corte como \mathcal{E}_4 producirá una modificación del ángulo que forma el eje $\langle c \rangle$ con la base disminuyendo su simetría. Las coordenadas designadas con B no son invariantes ante las operaciones de simetría pero se transforman sólo en ellas mismas. Las denominadas con la letra E se dicen doblemente degeneradas. Esto significa que ante una operación de simetría una cualquiera de las coordenadas se transforma en una combinación lineal de los dos miembros del par. Finalmente la letra T designa coordenadas triplemente degeneradas.

En algunos casos uno o más pares de coordenadas quedan acopladas no pudiéndose simplificar la expresión de la Ley de Hooke para ellas. Esto ocurre para la designación A de la simetría hexagonal y la E de la trigonal. A medida que la simetría disminuye este acoplamiento se hace más y más frecuente, hasta que para la ausencia total de simetrías del caso triclínico (excepto por la inversión) no pueden desacoplarse las deformaciones. La Ley de Hooke puede expresarse sólo de la forma original B. 1.

Los dos teoremas de la teoría de grupos que sirven de base para la simplificación de la Ley de Hooke pueden expresarse simplemente en la siguiente forma: 1) Tensiones y deformaciones simetrizadas que corresponden a distintas designaciones no se encuentran acopladas unas con otras. 2) Para las designaciones E o

T (degeneradas) las correspondientes tensiones y deformaciones están relacionadas por el mismo módulo elástico.

Una consecuencia del primer teorema es que una tensión del tipo I no puede dar lugar a una deformación del tipo II. Por ejemplo una compresión hidrostática puede dar lugar sólo a deformaciones volumétricas pero no a deformaciones de corte.

Cuando una tensión simetrizada es desacoplada de todas las deformaciones excepto la propia, la Ley de Hooke revierte en una forma simple dada por A. 2. El coeficiente J es una función adecuada de los s_{ij} tal como se muestra en las tablas. Otra ventaja de la simetrización de coordenadas se refiere a la diferencia entre constantes isotérmicas y adiabáticas. Como la expansión térmica no puede cambiar la simetría del cristal no puede contribuir a deformaciones del tipo II. Para el caso cúbico la única constante simetrizada que se modifica es la compresibilidad $3s_{11} + 6s_{12}$

b) Anelasticidad

Para pasar de las ecuaciones de la elasticidad anisotrópica a las correspondientes a la anelasticidad cada cantidad $s_{ij}(c_{ij})$ debe ser transformada en una función del tiempo para los procesos cuasi-estáticos y en una cantidad compleja dependiente del tiempo y la frecuencia para procesos dinámicos. Luego, cada "compliance" compleja variará entre valores extremos s_U y s_R , donde s_U es el valor de $s(\omega)$ para $\omega \rightarrow \infty$ y $s_R = \lim_{\omega \rightarrow 0} s(\omega)$. Además las relaciones de la anelasticidad serán equivalentes a las de la elasticidad anisotrópica cuando el cristal esté completamente relajado o no relajado. Luego, si $\delta s = s_R - s_U$, la magnitud de la relajación de cualquier módulo elástico podrá ser obtenida de las ecuaciones de la elasticidad tomando, simplemente, la diferencia entre las cantidades relajadas y no relajadas. Para cristales cúbicos por ejemplo

$$E^{-1} = \delta J_E = \delta s_{11} - 2 \left[\delta (s_{11} - s_{12}) - \frac{\delta s_{44}}{2} \right] \mathcal{P}_{11} \quad 8.16$$

$$G^{-1} = \delta J_G = \delta s_{44} + 4 \left[\delta (s_{11} - s_{12}) - \frac{\delta s_{44}}{2} \right] \mathcal{P}_{11} \quad 8.17$$

Estas ecuaciones muestran una dependencia lineal en \mathcal{P}_{11} para δJ_E y δJ_G . Las ecuaciones equivalentes para la resistencia a la relajación $\Delta = \delta J / J_U$ no son, en general, funciones lineales de la orientación dado que se trata del cociente entre dos

funciones lineales de la orientación.

La anisotropía anelástica para cristales cúbicos es definida por $2 \delta(s_{11}-s_{12}) / \delta s_{44}$. En general, esta relación será diferente de la razón de anisotropía elástica $2(s_{11}-s_{12})/s_{44}$. Si notamos las cantidades simetrizadas mediante un único subíndice en letra griega y en el caso de un desacoplamiento total tendremos

$$\epsilon_{\gamma} = s_{\gamma} \sigma_{\gamma} \quad \text{B.18}$$

El hecho de que tal desacoplamiento ocurre frecuentemente para cristales de alta simetría permite una transición hacia la anelasticidad regida por casi las mismas leyes que en el caso isotrópico. Cuando el desacoplamiento completo no ocurre la situación es más compleja y habrá tantos espectros de relajación a tensión constante como constantes simetrizadas independientes.

REFERENCIAS

1. J.F.Nye Physical Properties of Crystals. Clarendon Press. Oxford.[1972].

BIBLIOGRAFIA

- A.S.Nowick and B.S.Berry. Anelastic Relaxation in Crystalline Solids. Academic Press. New York [1972].
- A.S.Nowick and W.R.Heller. Advan.Phys. 14 [1965] 101.
- B.S.Berry and A.S.Nowick. Anelasticity and Internal Friction due to Point Defects in Crystals. Phys.Acoustics. W.P.Mason ed. .Vol 3A Chap. 1. Academic Press. N.Y. [1970].

TABLA B I

Tensiones, deformaciones y módulos simetrizados de Tipo I				
Sistema Cristalino	Designación	Tensión	Módulo	Deformación
Cúbico	A	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	$s_{11} + 2s_{12}$	$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$
Hexagonal Tetragonal Trigonal	A	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_2)$	$s_{11} + s_{12}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$
		σ_3	$2s_{13}$ s_{33}	ϵ_3

TABLA B II

Tensiones, deformaciones y módulos simetrizados de Tipo II				
Sistema Cristalino	Designación	Tensión	Módulo	Deformación
Cúbico	E	$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$	$s_{11} - s_{12}$	$2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3$
		$\sigma_2 - \sigma_3$	$s_{11} - s_{12}$	$\epsilon_2 - \epsilon_3$
	T	σ_4	s_{44}	ϵ_4
		σ_5	s_{44}	ϵ_5
		σ_6	s_{44}	ϵ_6
Hexagonal	E ₁	σ_4	s_{44}	ϵ_4
		σ_5	s_{44}	ϵ_5
	E ₂	$\sigma_1 - \sigma_2$	$s_{11} - s_{12}$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$
		σ_6	$s_{11} - s_{12}$	$\epsilon_6/2$
Tetragonal	B ₁	$\sigma_1 - \sigma_2$	$s_{11} - s_{12}$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$
	B ₂	σ_6	s_{66}	ϵ_6
	E	σ_4	s_{44}	ϵ_4
		σ_5	s_{44}	ϵ_5

APENDICE C PROPAGACION DE ONDAS ELASTICAS EN
MATERIALES ISOTROPOS

La ecuación de equilibrio para materiales elásticos isótropos puede escribirse, en función del módulo de Young E y la razón de Poisson ν , de la siguiente forma

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \bar{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla \nabla \cdot \bar{u} + \rho \bar{g} = 0 \quad \text{C. 1}$$

donde \bar{u} es el vector desplazamiento que describe la posición de cada punto del cuerpo deformado, \bar{g} es el vector aceleración de la gravedad o cualquier otra fuerza de volumen y ρ es la densidad del material. Si el cuerpo no se halla en equilibrio sino que se mueve bajo la acción de fuerzas exteriores y las tensiones interiores generadas, las ecuaciones de movimiento del medio elástico isótropo (en ausencia de fuerzas de volumen) pueden obtenerse igualando las fuerzas provocadas por las tensiones internas al producto de la aceleración por la masa por unidad de volumen

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \bar{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla \nabla \cdot \bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}} \quad \text{C. 2}$$

donde las fuerzas exteriores no aparecen sino en las condiciones de contorno.

La resolución, en primera aproximación, de esta ecuación para una barra de sección uniforme de longitud L, excitada longitudinalmente, nos da la conocida ecuación (1)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{C. 3}$$

donde v es la velocidad longitudinal.

Si la barra tiene un nodo en su punto medio la condición de resonancia es

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{C. 4}$$

donde n es un entero que vale 1 para la frecuencia fundamental y crece para los armónicos superiores.

Si además $v = \lambda \cdot f_n$ (con f_n : frecuencia de resonancia)

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{C. 5}$$

Esta ecuación puede, de hecho, obtenerse mediante simplificaciones y aproximaciones más drásticas sobre las ecuaciones de movimiento sin necesidad de resolver estrictamente C. 2. (2,3)

De la ecuación C.5 se obtiene

$$E = \frac{4 L^2}{n^2} f_n^2 \rho \quad \text{C. 6}$$

de donde se deduce que puede medirse el módulo de Young a partir de la medición de las frecuencias de resonancia, la longitud de la probeta y su densidad. Esta ecuación es válida, en primera aproximación, para cualquier sección, a condición de que sea uniforme y la longitud de onda sea mucho mayor que la dimensión transversal de la probeta.

Para el caso de una barra excitada en torsión, y únicamente para simetría cilíndrica, se tiene

$$\mu = G = \frac{4 L^2}{n^2} f_n^2 \quad \text{C. 7}$$

De C.6 y C.7 y sabiendo que

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{C. 8}$$

puede calcularse el módulo de Poisson.

La resolución de la ecuación C.2 para barras macizas de sección cilíndrica produce, en segunda aproximación, la conocida expresión dada por Lord Rayleigh (2) cuando tiene en cuenta el efecto de inercia lateral en la velocidad de las ondas longitudinales (4,5,6)

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \nu^2 r^2}{4 L^2} \right) \quad \text{C. 9}$$

siendo r el radio de la barra. De esta expresión puede obtenerse el módulo E

$$E = \frac{4 L^2}{n^2} f_n^2 \rho \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 \nu^2 r^2}{2 L^2} \right) \quad \text{C.10}$$

El término dependiente de ν representa una corrección del orden de $1 \cdot 10^{-3}$ para relaciones $r/L = .04$.

Pueden hacerse generalizaciones para diversas geometrías de la sección transversal (7) haciendo uso de

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \nu^2}{4} \frac{2 \Theta}{L^2 M} \right) \quad C.11$$

donde Θ es el momento de inercia respecto de un eje longitudinal y M es la masa de la muestra.

De esta expresión, para el caso de un cilindro hueco, se obtiene, con r y r' radio exterior e interior respectivamente,

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \nu^2}{4} \frac{r^2 + r'^2}{L^2} \right) \quad C.12$$

de donde resulta para el módulo E

$$E = \frac{4 L^2}{n^2} f_n^2 \rho \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 \nu^2}{2} \frac{r^2 + r'^2}{L^2} \right) \quad C.13$$

Esta corrección, para el caso de tubos de paredes delgadas, representa una nueva corrección del orden de $1 \cdot 10^{-3}$.

Por otro lado Lord Rayleigh, en un desarrollo concluido por A.E.Love (8), haciendo uso de su teoría de placas finas curvadas con simetría cilíndrica, determina, en primera aproximación, una ecuación idéntica a la C.5. Lamentablemente el segundo orden de la ecuación no acuerda para nada con teorías más elaboradas.

Por la complejidad de las expresiones a que da lugar, la ecuación C.2 debe resolverse, salvo en los casos más sencillos, por métodos numéricos. El problema consiste, básicamente, en la determinación de las frecuencias que hacen nulo el determinante, de dimensión 6×6 , que se deduce de C.2 siguiendo los pasos dados por L.Pochhammer (4), C.Chree (5) y D.C.Gazis (9). La resolución numérica de estas ecuaciones tiene antecedentes en el mismo D.C. Gazis (9) y en trabajos debidos a D.Bancroft (10). El primero resuelve las ecuaciones hallando frecuencias de resonancia en flexión para tubos de distintos radios interiores y el segundo analiza las velocidades de ondas longitudinales en cilindros macizos para distintos valores del radio, la longitud y el módulo de Poisson.

La ecuación C.1. puede escribirse en función de los coeficientes de Lamé λ y μ de la siguiente forma

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{C.14.}$$

Como todo campo de vectores \bar{u} puede ser expresado como la suma de un campo irrotacional y otro solenoidal:

$$\bar{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \bar{H} = \bar{V} + \bar{W} \quad \text{C.15.}$$

En esta expresión Φ se denomina potencial escalar y cumple con las condiciones

$$\nabla \Phi = \bar{V} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \bar{V} = 0 \quad \text{C.16.}$$

y se denomina potencial vectorial y satisface las condiciones:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{W} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{W} = 0 \quad \text{C.17.}$$

pudiendo elegirse $\nabla \cdot \bar{H} = F(\bar{r}, t)$

Con esta forma de \bar{u} obtenemos

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \nabla \Phi + \mu \nabla^2 \nabla \times \bar{H} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \Phi + \nabla \times \bar{H}) \quad \text{C.18.}$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \text{C.19.}$$

$$\mu \nabla^2 \bar{H} = \rho \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad \text{C.20.}$$

Las ecuaciones C.19. y C.20. pueden también escribirse:

$$v_1^2 \nabla^2 \bar{\Phi} = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} \quad \text{C.21.}$$

$$v_2^2 \nabla^2 \bar{H} = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad \text{C.22.}$$

donde v_1^2 y v_2^2 están dadas por

$$v_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho \quad \text{C.23.}$$

$$v_2^2 = \mu / \rho \quad \text{C.24.}$$

Para las condiciones de simetría cilíndrica de nuestro problema la ecuación C.19. puede escribirse de la siguiente forma:

$$v_1^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} \quad \text{C.25.}$$

Esta ecuación puede ser resuelta por separación de variables con

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= T Z \cdot \Theta \cdot R & \text{y} & & T Z &= f(t, z) \\ & & & & \Theta &= g(\theta) \\ & & & & R &= h(r) \end{aligned}$$

La solución general puede escribirse

$$\bar{\Phi} = \left[A Z_n(\alpha, r) + B W_n(\alpha, r) \right] \cos m \theta \cos (\omega t + \xi z) \quad \text{C.26.}$$

con ξ : número de onda longitudinal

n número de onda rotacional

ω frecuencia de vibración

A, B coeficientes indeterminados

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{v_1^2} - \xi^2$$

y donde $\alpha_1 r = |\alpha r|$ y $Z_m(\alpha_1 r) = J_m(\alpha r)$ ó $I_m(\alpha_1 r)$

y $W_m(\alpha_1 r) = Y_m(\alpha r)$ ó $K_m(\alpha_1 r)$ son funciones de Bessel de primera y segunda especie y funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie, respectivamente, según sea el valor

$$\alpha^2 > 0 \quad \text{ó} \quad \alpha^2 < 0$$

La ecuación vectorial C.20. tiene una solución con tres componentes

$$H_r = [A_1 Z_{n+1}(\beta_1 r) + B_1 W_{n+1}(\beta_1 r)] \sin n\theta \sin(\omega t + \zeta z) \quad \text{C.27.}$$

$$H_\theta = [A_2 Z_{n+1}(\beta_1 r) + B_2 W_{n+1}(\beta_1 r)] \cos n\theta \sin(\omega t + \zeta z) \quad \text{C.28.}$$

$$H_z = [A_3 Z_n(\beta_1 r) + B_3 W_n(\beta_1 r)] \sin n\theta \cos(\omega t + \zeta z) \quad \text{C.29.}$$

con A_i, B_i : coeficientes indeterminados

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{v_2^2} - \zeta^2$$

y donde $\alpha_1 r = |\alpha r|$ y $Z_m(\beta_1 r), W_m(\beta_1 r)$ son funciones de Bessel de primera y segunda especie o funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie, respectivamente, según sea

$$\beta^2 > 0 \quad \text{ó} \quad \beta^2 < 0$$

Mediante la transformación C.15. quedan fijos $\bar{\Phi}$ y \bar{H} a menos de la divergencia

$$\nabla \cdot \bar{H} = F(\bar{r}, t)$$

condición que se mantiene eligiendo $A_1 = -A_2$ y $B_1 = -B_2$

Con estas expresiones para $\bar{\Phi}$ y \bar{H} , a partir de las ecuaciones que vinculan el tensor de tensiones y el vector desplazamiento

en coordenadas cilíndricas, podemos obtener σ_{rr} , σ_{rz} y $\sigma_{r\theta}$

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \text{C.30.}$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \quad \text{C.31.}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad \text{C.32.}$$

Las condiciones de contorno para vibraciones libres están dadas en las superficies interior y exterior del cilindro por:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad r = a \quad r = b$$

donde a y b son los radios interior y exterior respectivamente.

Con tales condiciones de contorno, y a través de C.30., C.31. y C.32., se obtiene la ecuación característica formada por el determinante de los coeficientes de las amplitudes indeterminadas A , B , A_1 , B_1 , A_3 y B_3 . Tal ecuación proviene de hacer nulo el determinante, único caso en que la solución es distinta de la trivial.

$$|d_{ij}| = 0 \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \text{C.33.}$$

Los elementos del determinante están dados por

$$d_{11} = [2m(m-1) - (\beta^2 - \xi^2)a^2] Z_m(\alpha_1, a) + 2\lambda_1 \alpha_1 a Z_{m+1}(\alpha_1, a) \quad \text{C.34.}$$

$$d_{12} = 2\xi \beta_1 a^2 Z_m(\beta_1, a) - 2\xi a(m+1) Z_{m+1}(\beta_1, a) \quad \text{C.35.}$$

$$d_{13} = -2m(m-1) Z_m(\beta_1, a) + 2\lambda_2 m \beta_1 a Z_{m+1}(\beta_1, a) \quad \text{C.36.}$$

$$d_{14} = [2m(m-1) - (\beta^2 - \xi^2)a^2] W_m(\alpha_1, a) + 2\alpha_1 a W_{m+1}(\alpha_1, a) \quad \text{C.37.}$$

$$d_{15} = 2\lambda_2 \xi \beta_1 a^2 W'_n(\beta_1 a) - 2(m+1) \xi a W'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.38.}$$

$$d_{16} = -2m(m-1) W'_n(\beta_1 a) + 2m\beta_1 a W'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.39.}$$

$$d_{21} = 2m(m-1) Z'_n(\alpha_1 a) - 2\lambda_1 m \alpha_1 a Z'_{n+1}(\alpha_1 a) \quad \text{C.40.}$$

$$d_{22} = -\xi \beta_1 a^2 Z'_n(\beta_1 a) + 2\xi a(m+1) Z'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.41.}$$

$$d_{23} = -[2m(m-1) - \beta^2 a^2] Z'_n(\beta_1 a) - 2\lambda_2 \beta_1 a Z'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.42.}$$

$$d_{24} = 2m(m-1) W'_n(\alpha_1 a) - 2m\alpha_1 a W'_{n+1}(\alpha_1 a) \quad \text{C.43.}$$

$$d_{25} = -\lambda_2 \xi \beta_1 a^2 W'_n(\beta_1 a) + 2\xi a(m+1) W'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.44.}$$

$$d_{26} = -[2m(m-1) - \beta^2 a^2] W'_n(\beta_1 a) - 2\beta_1 a W'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.45.}$$

$$d_{31} = 2m \xi \alpha_1 Z'_n(\alpha_1 a) - 2\lambda_1 \xi \alpha_1 a^2 Z'_{n+1}(\alpha_1 a) \quad \text{C.46.}$$

$$d_{32} = m\beta_1 a Z'_n(\beta_1 a) - (\beta^2 - \xi^2) a^2 Z'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.47.}$$

$$d_{33} = -m \xi a Z'_n(\beta_1 a) \quad \text{C.48.}$$

$$d_{34} = 2m \xi a W'_n(\alpha_1 a) - 2\xi \alpha_1 a^2 W'_{n+1}(\alpha_1 a) \quad \text{C.49.}$$

$$d_{35} = \lambda_2 m\beta_1 a W'_n(\beta_1 a) - (\beta^2 - \xi^2) a^2 W'_{n+1}(\beta_1 a) \quad \text{C.50.}$$

$$d_{36} = -m \xi a W'_n(\beta_1 a) \quad \text{C.51.}$$

Las tres filas faltantes se obtienen sustituyendo a por b en las expresiones anteriores. Los parámetros λ_1 y λ_2 toman el valor 1 cuando son usadas las funciones J e Y y -1 cuando se usan las funciones I y K

Diferentes simplificaciones pueden obtenerse en condiciones físicas adecuadas. En el caso que nos ocupa podemos considerar el movimiento como independiente de la variable θ , lo cual se cumple para $n=0$. En ese caso el determinante puede calcularse como producto de dos subdeterminantes:

$$D_3 \quad D_4 = 0 \quad \text{C.52.}$$

donde

$$D_3 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{14} & d_{15} \\ d_{31} & d_{32} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{44} & d_{45} \\ d_{61} & d_{62} & d_{64} & d_{65} \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} d_{23} & d_{26} \\ d_{53} & d_{56} \end{vmatrix}$$

En estos determinantes cada elemento se obtiene de los detallados haciendo $n=0$.

La ecuación de frecuencias dada por $D_3=0$ corresponde a vibraciones longitudinales, independientes de θ . Tal ecuación debe construirse teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{ll} \nu_1 \xi < \omega & \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 \\ \nu_2 \xi < \omega < \nu_1 \xi & \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \\ \omega < \nu_2 \xi & \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Valores aproximados de las constantes elásticas y de la densidad pueden usarse para efectuar una evaluación previa que permita elegir entre estos valores y las diferentes clases de funciones de Bessel posibles. La evaluación de las constantes elásticas del material a partir de estas ecuaciones se dificulta por la imposibilidad de expresarlas en función del resto de las variables. Solamente una evaluación numérica iterativa es posible en la mayor parte de los casos.

El módulo de Poisson puede ser evaluado, además de por medio de la ecuación C.8., a partir de las frecuencias de resonancia y utilizando expresiones derivadas de C.9. para barras macizas y de C.12. para vainas. Se debe suponer que el módulo de Young es independiente de la frecuencia, en cuyo caso es simplificable en el cociente que puede hacerse entre las expresiones de dos armónicos cualesquiera. Para barras macizas la expresión que se obtiene es la siguiente [11]:

$$\nu = \frac{2 L}{\pi r} \left(\frac{n_2 \cdot f_1 - n_1 \cdot f_2}{n_2^3 \cdot f_1 - n_1^3 \cdot f_2} \right)^{1/2} \quad \text{C.53.}$$

y para vainas obtenemos:

$$\nu = \frac{2 L}{\pi (a^2 + b^2)^{1/2}} \left(\frac{n_2 \cdot f_1 - n_1 \cdot f_2}{n_2^3 \cdot f_1 - n_1^3 \cdot f_2} \right)^{1/2} \quad \text{C.54.}$$

donde a y b son el radio interior y exterior respectivamente.

El cálculo del módulo de Poisson a partir de C.53. y C.54. es tanto más bueno como correcta sea la suposición de que E es independiente de la frecuencia. Además debe tenerse en cuenta la exactitud de las ecuaciones C.8. y C.13. como representativas de las vibraciones de la probeta. Para evaluarlo deben compararse los valores obtenidos por resolución numérica del determinante C.52. con los obtenidos con las ecuaciones aproximadas.

REFERENCIAS

1. L.D.Landau y E.M.Lifshitz, Teoría de la Elasticidad. Curso de Física Teórica. Vol. 7. Edit. Reverté. [1969].
2. Rayleigh, J.W.S. (Lord), Theory of Sound. Dover Publications [1945].
3. Cottrell, A.H., The Mechanical Properties of Matter. J. Wiley and Sons, Inc..New York [1964]
4. Fochhammer, L., J. für Mathematik. 81 [1876] 324.
5. Chree, C., Trans. of the Cambridge Philosophical Society. 14 [1889] 250.
6. Mason, W.P., Physical Acoustics and the Properties of Solids, D. Van Nostrand Company, Inc., New York [1958].
7. Rosinger, H.E., Ritchie, I.G. and Shillinglaw, A.J.. Materials Sci. and Eng., 16 [1974] 143.
8. Love, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press [1934].
9. Gazis, D.C., J.of Acoust. Soc. of America, Vol. 31, 5[1959]568.
10. Bancroft, D., Physis. Rev. 59 [1941] 588.
11. Sorrentino, F., C.E.N. Grenoble, Report CEA-R-3986 [1971].

AGRADECIMIENTOS

- Al Dr. Francisco Povolo, por la dirección de este trabajo, a quien a partir de este momento comenzaré a demostrar mi amistad tutelándolo.
- A Gerardo Rubiolo y Bernardo Molinas, quienes soportaron estoicamente mis interminables discusiones acerca de esta tesis.
- A los físicos de la Facultad de Ciencias Exactas de La Plata, particularmente a los Dres. Oscar Firo y Alberto López García, por su desinteresada colaboración.
- A todos los integrantes del Grupo de Metalurgia Física de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario, donde se desarrolló este trabajo.
- A la Licenciada M. Ortiz de la Comisión Nacional de Energía Atómica, por la realización de algunas de las figuras de polos de este trabajo.
- A la Comisión Nacional de Energía Atómica, en especial a los integrantes del Departamento de Materiales, por el equipamiento, bibliografía y discusiones que facilitaron la concreción de esta tesis.
- A Alejandro Ceccatto, quien los sábados a la noche, café de por medio, soportó mis interminables discusiones sobre temas que no tienen nada que ver con esta tesis.
- Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, que abonó puntualmente mi "estipendio mensual" permitiendo llevar a cabo este trabajo.
- A los que de una manera u otra contribuyeron a que esta tesis fuera realizada, para que vean que valió la pena.
- A los que de una manera u otra procuraron que no lo fuera, para que vean que no valió la pena.

Este trabajo se desarrolló en el marco del Convenio Intergubernamental entre la República Federal Alemana y la República Argentina y ha sido financiado parcialmente por el Proyecto Multinacional de Metalurgia y Tecnología de Materiales de la Organización de los Estados Americanos.