

CAPITULO 2

EL PROCEDIMIENTO DE BOSONIZACION

MEDIANTE EL METODO OPERACIONAL

2.1. Introducción

Uno de los resultados más interesantes hallados en el estudio de teorías cuánticas de campos bidimensionales es la posibilidad de establecer una identidad entre las funciones de Green de un modelo fermiónico de partida y las correspondientes a una teoría que describe el comportamiento de campos bosónicos. Se denomina bosonización al procedimiento por el cual se pone de manifiesto tal equivalencia.

En este capítulo se presentan los principales resultados que dieron lugar al procedimiento de bosonización, obtenidos mediante el método operacional. En la sección 2.2. se muestra la equivalencia entre el modelo de Thirring masivo (fermiónico) y el modelo Seno-Gordon (bosónico). En la identificación de las funciones de Green de estos modelos, realizada por Coleman (1), cumple un rol central el carácter super-renormalizable (2) de estas teorías bidimensionales. En efecto, la implementación de un orden normal adecuado permite eliminar las divergencias ultravioletas que se deben a la contracción de dos campos en un mismo punto, dando como resultado un hamiltoniano finito para el modelo Seno-Gordon. El tratamiento correspondiente al modelo de Thirring se efectúa de acuerdo al método desarrollado por Klaiber (3). Una de las consecuencias más destacables de la identidad obtenida entre ambos modelos está contenida en la ecuación (2.56), según la cual el límite de

acoplamiento fuerte para el modelo fermiónico ($g \rightarrow \infty$) coincide con el de acoplamiento débil para el bosónico ($\beta \rightarrow 0$). Este hecho proporciona una forma de estudiar perturbativamente el modelo de Thirring, en su régimen de acoplamiento fuerte, en términos de campos bosónicos.

En la sección 2.3. se describen los aspectos fundamentales del trabajo de Lowenstein y Swieca (4) sobre la Electrodinámica Cuántica bidimensional (modelo de Schwinger). Se hace manifiesta la relación entre la solución original de Schwinger y el marco de métrica indefinida (versión bidimensional de la métrica de Gupta-Bleuler (2)). La restricción a un "subespacio físico" del espacio de Hilbert completo, en el cual se satisfacen las ecuaciones de Maxwell, permite remover la contribución de las excitaciones "electrónicas" y obtener una expresión para la corriente de fermiones en término de campos bosónicos. A partir de este resultado y usando también la regla de bosonización para el término cinético de los fermiones -obtenida en la sección anterior- se identifica la densidad lagrangiana del modelo de Schwinger con la correspondiente a una teoría de campos escalares libres y masivos. La aparición de una masa para los campos escalares es una manifestación de la rotura espontánea de la simetría bajo transformaciones quirales globales. La discusión de este fenómeno y su relación con el llamado vacío θ permite concluir la sección con una introducción al tratamiento del modelo de Schwinger masivo (5).

Finalmente, en la sección 2.4., se estudia el esque-

ma de bosonización no abeliana propuesto por Witten (6).
Analizando las ecuaciones de movimiento que satisfacen las corrientes fermiónicas asociadas a un modelo de fermiones libres -tomados en la representación fundamental del grupo $O(N)$ - se obtiene una expresión local para dichas corrientes, en términos de campos bosónicos. Luego se construye la acción bosónica equivalente, que resulta ser la correspondiente a un modelo sigma no lineal, en el cual se destaca la presencia de un término de Wess-Zumino, propuesto originalmente como una acción efectiva para las anomalías quirales.

Bibliografia

- (1) S.Coleman, Phys. Rev. D 11 , (1975), 2088.
- (2) C.Itzykson and J.Zuber, "Quantum Field Theory",
Mc. Graw-Hill, 1980.
- (3) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics,
Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and
Breach, New York, 1968.
- (4) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.),
68 , (1971), 172.
- (5) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys.
(N.Y.), 93 , (1975), 267.
- (6) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.

2.2. Bosonización abeliana. Equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el modelo Seno-Gordon.

Las raíces históricas del procedimiento de bosonización se encuentran en el trabajo de B. Klaiber (1) acerca del modelo de Thirring (2-5) sin masa y en las investigaciones de J.H.Lowenstein y J.A.Swieca (6) sobre el modelo de Schwinger (7). La primera aplicación importante de este método se debe a S.Coleman (8), quien estableció la equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el modelo Seno-Gordon (9). En esta sección presentaremos estos resultados.

La dinámica del modelo Seno-Gordon está determinada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi + \delta_0 \quad (2.1)$$

donde φ es un campo escalar sin masa, en una dimensión espacial y otra temporal ($\mu = 0, 1$) con la métrica definida por $g_{00} = -g_{11} = 1$. Las cantidades α_0 , β , y δ_0 son parámetros reales. Es claro que (2.1) no cambia si se sustituye φ por $-\varphi$, por lo tanto siempre es posible tomar a β positivo. Además, sin pérdida de generalidad se puede tomar $\alpha_0 > 0$ (Si se parte del caso $\alpha_0 < 0$, realizando el cambio de variable $\varphi \longrightarrow \varphi + \frac{\pi}{\beta}$, se pasa al caso $\alpha_0 > 0$). La constante δ_0 se puede fijar considerando el desarrollo de la ener-

gía potencial, en la teoría clásica, alrededor de la configuración de energía mínima:

$$\frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi = \frac{\alpha_0}{\beta^2} - \frac{\alpha_0}{2} \varphi^2 + \frac{\alpha_0}{4!} \beta^2 \varphi^4 + \dots \quad (2.2)$$

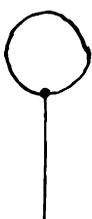
Si deseamos que esa densidad de energía mínima sea cero, debemos elegir

$$\delta_0 = - \frac{\alpha_0}{\beta^2} \quad (2.3)$$

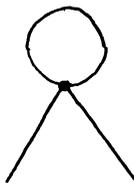
En el segundo término de (2.2) vemos que $\alpha_0^{1/2}$ es la masa de las excitaciones elementales, ó con mayor propiedad, la inversa de la longitud de onda de las pequeñas oscilaciones alrededor del mínimo. Por otro lado, el parámetro β da cuenta de las autointeracciones entre estas oscilaciones. No haremos más consideraciones sobre el modelo clásico ya que investigando directamente las propiedades cuánticas del modelo es posible establecer su equivalencia con la teoría fermiónica de Thirring. Esta correspondencia se pondrá de manifiesto comparando término a término las series perturbativas de cada modelo, por lo tanto es necesario tener en cuenta las divergencias ultravioletas que aparecen en los diagramas de Feynman a calcular en el análisis perturbativo.

No es difícil verificar que en toda teoría de campos

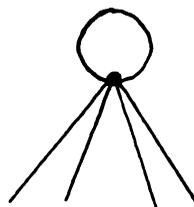
escalares en dos dimensiones, sin términos de interacción que involucren derivadas de los campos, las únicas divergencias ultravioletas que se encuentran a todo orden en teoría de perturbaciones, son aquellas que provienen de diagramas con un lazo cerrado ("loop") compuesto de una sola línea interna, formada por la contracción de dos campos en un mismo punto o vértice. Este tipo de contribuciones se denomina usualmente "renacuajo" ("tadpole"). Algunos ejemplos de estos casos se encuentran en la figura 1.



a) "globo"



b) "renacuajo típico"



c) "pulpo"

Figura 1

En una teoría bidimensional de campos escalares de masa μ , la contribución del lazo asociado a estos diagramas es:

$$L = \int \frac{d^2 k}{k^2 + \mu^2} \quad (2.4)$$

Esta integral presenta una divergencia logarítmica para grandes valores del impulso. Toda otra contribución que no contenga este tipo de lazos resulta ser convergente en la región ultravioleta. Para eliminar divergencias que

surgen de la contracción de campos en un mismo punto basta con implementar un orden normal sobre el hamiltoniano de interacción. Los operadores de campo pueden representarse como integrales de Fourier en función de operadores de creación ($a^+(k)$) y aniquilación ($a(k)$). A este procedimiento se le llama también descomposición del operador φ en sus partes de frecuencia positiva, $\varphi^{(+)}$ (asociada a los operadores de creación) y negativa, $\varphi^{(-)}$ (asociada a los operadores de aniquilación) (10). Así, el producto de dos operadores tomará la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(y) = & \varphi^{(+)}(x) \varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(+)}(x) \varphi^{(-)}(y) + \\ & + \varphi^{(-)}(x) \varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(x) \varphi^{(-)}(y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

En general, llevar a su orden normal el producto de un número cualquiera de operadores de campo es escribirlo de forma tal que en cada término todos los operadores de creación, en la representación de impulsos, se encuentren a la izquierda de todos los operadores de aniquilación. Es claro que esto se consigue haciendo uso de las reglas de conmutación (o anticonmutación en el caso de fermiones) que obedecen estos operadores. Estas reglas deben ser tales que los operadores de campo, a su vez, verifiquen las reglas canónicas de conmutación.

En el ejemplo anterior (ecuación (2.5)), tenemos el producto de dos campos, por lo que es suficiente con hacer un solo "desplazamiento" para obtener el producto defi

nido normalmente, así se obtiene:

$$\varphi(x)\varphi(y) = N_m(\varphi(x)\varphi(y)) + \underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}\Big|_m \quad (2.6)$$

donde m es una masa asociada al proceso de orden normal, $N_m(A)$ representa al operador A ordenado normalmente, y $\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}\Big|_m$ es la contribución que proviene del conmutador de los operadores $a(k)$ y $a^+(k)$ y que no contiene ningún operador. Este último término se denomina contracción de los campos $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$.

Con el objeto de relacionar el producto de dos operadores de campo con el propagador causal de la teoría, aplicamos a la identidad (2.6) el operador de ordenamiento temporal T , cuya acción se define por:

$$T(\varphi(x)\varphi(y)) = \theta(x_0 - y_0)\varphi(x)\varphi(y) + \theta(y_0 - x_0)\varphi(y)\varphi(x) \quad (2.7)$$

donde $\theta(x)$ es la distribución de Heaviside. Tomando luego el valor medio de vacío resulta:

$$\langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle = \langle 0|TN_m(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle + \underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}\Big|_m \quad (2.8)$$

donde $\overline{\varphi(x)\varphi(y)}$ es la contracción cronológica de los campos. El miembro izquierdo de esta igualdad es el propagador causal, que para una teoría de campos escalares libres de

masa μ es de la forma:

$$\langle 0 | T(\psi(x)\psi(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik \cdot (x-y)} d^4k}{k^2 + \mu^2} \quad (2.9)$$

Ahora bien, la convención usual para definir el orden normal es fijar m igual a la masa de la teoría: $m = \mu$, en cuyo caso el primer término en el miembro derecho de (2.8) se anula y se tiene la identidad entre la contracción cronológica y el propagador de la teoría. Nótese que la expresión (2.4) para la contribución del lazo se obtiene de (2.9) -para dos dimensiones- tomando el límite $y \rightarrow x$. Es inmediato comprobar que, de esta manera, el orden normal ha eliminado por completo el problema de las contracciones en un mismo punto, ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \mu} \langle 0, \mu | T N_m(\psi(x)\psi(x)) | 0, \mu \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k}{k^2 + \mu^2} - \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{m \rightarrow \mu} \int \frac{d^2k}{k^2 + m^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sin embargo, no siempre es la elección $m = \mu$, la más conveniente. En particular en la teoría Seno-Gordon, no es evidente la mejor manera de dividir el hamiltoniano en partes libre y de interacción, porque el candidato "natural" para este último papel, $\frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos(\beta\varphi)$, contiene en

su desarrollo en serie un término de masa que podría incluirse en la parte libre. Veremos que se puede sacar provecho de esta ambigüedad, para lo cual, lo más acertado es definir el orden normal sin especificar a priori el valor de m . En este caso la operación de orden normal es equivalente a reemplazar L en (2.4) por

$$L' = \int \frac{d^2k}{k^2 + \mu^2} - \int \frac{d^2k}{k^2 + m^2} \quad (2.11)$$

Este procedimiento controla el problema de las divergencias ultravioletas causadas por el producto de dos operadores en un mismo punto, sin cancelar completamente los diagramas.

Esta manera de implementar el orden normal es la piedra angular en la demostración que Coleman dio de la equivalencia entre los modelos Seno-Gordon y Thirring masivo y mostrará su utilidad cuando comparemos orden a orden los términos de las series perturbativas de ambas teorías, la bosónica y la fermiónica.

Comencemos ahora el estudio del hamiltoniano del modelo Seno-Gordon, al que escribiremos en su forma normal. Por simplicidad trabajaremos en la representación de Schrödinger, en la cual los operadores son funciones del campo $\varphi(x_1)$ y de la densidad de impulso canónico $\Pi(x_1)$. Definiendo operadores de creación y destrucción $a^+(k, m)$ y

$a(k, m)$ que satisfacen

$$\left[a(k_1, m), a(k'_1, m) \right] = \left[a^\dagger(k_1, m), a^\dagger(k'_1, m) \right] = 0 \quad (2.12)$$

$$\left[a(k_1, m), a^\dagger(k'_1, m) \right] = 2\pi \delta(k_1 - k'_1) \quad (2.13)$$

se puede verificar que los operadores de campo dados por:

$$\Psi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\omega(k_1, m)}} \left[a(k_1, m) e^{-ik_1 x'_1} + a^\dagger(k_1, m) e^{ik_1 x'_1} \right] \quad (2.14)$$

$$\Pi(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1 \sqrt{\frac{\omega(k_1, m)}{2}} \left[a(k_1, m) e^{-ik_1 x'_1} - a^\dagger(k_1, m) e^{ik_1 x'_1} \right] \quad (2.15)$$

donde $\omega(k_1, m) = (k_1^2 + m^2)^{1/2}$, satisfacen la relación ca
nónica

$$\left[\Pi(x_1), \Psi(y_1) \right] = i \delta(x_1 - y_1) \quad (2.16)$$

Como antes, ordenar normalmente los operadores de Schrödinger significa recomodarlos de forma tal que todos

los operadores de creación (a^+) queden a la izquierda y los de aniquilación (a) a la derecha. Como ya lo advertimos, por el momento mantendremos a m sin especificación alguna.

Consideremos ahora la densidad hamiltoniana de la teoría Seno-Gordon:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 - \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \delta_0 \quad (2.17)$$

donde

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx_1} \right)^2 \quad (2.18)$$

Utilizando (2.12)-(2.16) para llevar los operadores a su orden normal se obtiene:

$$\frac{1}{2} \pi^2 = N_m \left(\frac{1}{2} \pi^2 \right) + \frac{1}{8\pi} \int dk \omega(k, m) \quad (2.19)$$

y

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx_1} \right)^2 = N_m \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx_1} \right)^2 \right) + \frac{1}{8\pi} \int dk \frac{k^2}{\omega(k, m)} \quad (2.20)$$

Sumando las dos últimas expresiones resulta:

$$\mathcal{H}_0 = N_m(\mathcal{H}_0) + E_0(m) \quad (2.21)$$

con

$$E_0(m) = \frac{1}{8\pi} \int dk \frac{2k^2 + m^2}{\omega(k, m)} \quad (2.22)$$

Definiendo

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 - E_0(m) \quad (2.23)$$

se tiene que

$$\mathcal{H}_0 - \mathcal{J}_0 = N_m(\mathcal{H}_0) - \mathcal{J} \quad (2.24)$$

como era de esperar, ya que siendo \mathcal{H}_0 una forma cuadrática en los campos fundamentales, el efecto del orden normal se reduce a la suma de una constante.

Para concluir con el procedimiento de orden normal nos falta tener en cuenta el término de interacción

$$y \mathcal{H}_{int} = -\frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi \quad (2.25)$$

Haciendo uso del teorema de Wick, para un campo escalar libre de masa m , se puede establecer la siguiente identidad:

$$e^{i \int J(x) \varphi(x) d^2x} = N_m \left(e^{i \int J(x) \varphi(x) d^2x} \right) e^{-\frac{1}{2} \iint J(x) \Delta_m(x,y) J(y) d^2x d^2y} \quad (2.26)$$

donde $J(x)$ es una función cualquiera del espacio y el tiempo y $\Delta(x,y,m)$ es la función de Wightman de dos puntos para el campo libre. Cuando se consideran las exponenciales ordenadas temporalmente se tiene, en lugar de Δ , el propagador de Feynman para el campo libre. Δ es proporcional a la función K_0 de Bessel y tiene el siguiente comportamiento para pequeñas separaciones de tipo espacial:

$$\Delta(x,m) = -\frac{1}{4\pi} \ln(cm^2x^2) \quad (2.27)$$

$$c = \frac{1}{2} e^\gamma$$

donde γ es la constante de Euler. Como (2.27) diverge en el límite ultravioleta ($x^2 \rightarrow 0$) introducimos en la teoría una gran masa Λ y sustituimos:

$$\Delta(x, m) \longrightarrow \Delta(x, m, \Lambda) = \Delta(x, m) - \Delta(x, \Lambda) \quad (2.28)$$

Así nos queda un propagador que no es singular en el origen:

$$\Delta(0, m, \Lambda) = -\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 \quad (2.29)$$

Utilizando (2.26) con

$$J(x) = \beta \delta(x-y) \quad (2.30)$$

resulta:

$$\begin{aligned} e^{i\beta\varphi(x)} &= N_m \left(e^{i\beta\varphi(x)} \right) e^{-\frac{\beta^2}{2} \Delta(0, m, \Lambda)} = \\ &= \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} N_m \left(e^{i\beta\varphi(x)} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ahora es evidente que definiendo el parámetro renormalizado

$$\alpha = \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} \alpha_0 \quad (2.32)$$

se tiene

$$\alpha_0 \cos \beta \varphi = \alpha N_m(\cos \beta \varphi) \quad (2.33)$$

En este punto es importante hacer notar que m es un parámetro de masa arbitrario y podríamos elegir otro cualquiera sin afectar el procedimiento. Los órdenes normales definidos para dos masas diferentes m y μ se relacionan trivialmente a través de (2.31):

$$N_m(\cos \beta \varphi) = \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} N_\mu(\cos \beta \varphi) \quad (2.34)$$

Estas distintas elecciones sólo llevan a redefinir α por medio de un factor finito.

Consideraciones similares pueden hacerse para la parte "libre" de ψ_0 . En efecto, de (2.21) y (2.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} N_m(\psi_0) &= N_\mu(\psi_0) + E_0(\mu) - E_0(m) = \\ &= N_\mu(\psi_0) + \frac{1}{8\pi} (\mu^2 - m^2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ahora sí, usando (2.24) y (2.33), estamos en condiciones de escribir la densidad hamiltoniana ordenada normalmente:

$$\mathcal{H} = N_m \left(\mathcal{H}_0 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \mathcal{J} \right) \quad (2.36)$$

donde α , β y \mathcal{J} son parámetros finitos. Comprobamos así, que para la teoría Seno-Gordon fijar el orden normal es equivalente a realizar una renormalización multiplicativa de α_0 y una renormalización aditiva de \mathcal{J}_0 , mientras que β no requiere renormalización alguna.

El paso siguiente es estudiar la serie perturbativa en potencias de α correspondiente al modelo bosónico bajo consideración. El orden normal, cuya implementación acabamos de discutir, da cuenta de todas las divergencias ultravioletas de la teoría. Subsisten, sin embargo, serias divergencias infrarrojas, propias de toda teoría de campos sin masa. La forma mas sencilla de controlar este problema consiste en dar una masa μ al campo escalar, y hacer $\mu = 0$ al final de los cálculos. Consideramos entonces la densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = N_m \left(\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \mathcal{J} \right) \quad (2.37)$$

Para obtener las funciones de Green deseadas es útil

calcular un objeto de naturaleza un poco más general que el requerido en nuestro caso inmediato:

$$G = \langle 0, \mu | T \prod_j N_m \left(e^{i\beta_j \varphi(x_j)} \right) | 0, \mu \rangle \quad (2.38)$$

donde T es el operador de ordenamiento temporal y $\langle 0, \mu | A | 0, \mu \rangle$ representa el valor medio de vacío del operador A en una teoría de campos escalares libres, $\varphi(x)$, con masa μ . Si nos restringimos a una región finita

$$x \ll \frac{1}{\mu} \quad (2.39)$$

el propagador de Feynman coincide con la expresión (2.27), salvo por factores de $i\epsilon$ que no escribiremos para no recargar la notación. Usando el resultado (2.34):

$$G = \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)^{\sum_j \frac{\beta_j^2}{8\pi}} \langle 0, \mu | T \prod_j N_\mu \left(e^{i\beta_j \varphi(x_j)} \right) | 0, \mu \rangle \quad (2.40)$$

Ahora se puede aplicar el teorema de Wick, descartando todas las contribuciones que involucran contracciones de campos en un mismo punto, puesto que han sido removidas por el orden normal. Es fácil ver que el resultado es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \left(\frac{\mu}{m^2} \right)^{\sum_i \frac{\beta_i^2}{8\pi}} \prod_{i>j} [c \mu^2 |x_i - x_j|^2]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}} = \\
 &= \mu^{\frac{(\sum_i \beta_i)^2}{4\pi}} m^{-\frac{1}{4\pi} \sum_i \beta_i^2} \prod_{i>j} [c |x_i - x_j|^2]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}}
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

Este resultado es importante porque, además de ser consistente con la invarianza de la teoría libre (en el límite $\mu \rightarrow 0$) frente al cambio $\varphi \rightarrow \varphi + \text{cte.}$ (8), simplifica notablemente el análisis de las series perturbativas. En efecto, todas aquellas contribuciones que corresponden al caso

$$\sum_i \beta_i \neq 0$$

se anulan en el límite $\mu \rightarrow 0$. En consecuencia, sólo debemos conservar aquellas que son independientes de μ , es decir las correspondientes a

$$\sum_i \beta_i = 0 \tag{2.42}$$

En el caso del Seno-Gordon, el objeto de interés es:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} N_m(\cos \beta \varphi) = \frac{\alpha}{2\beta^2} N_m(e^{i\beta \varphi} + e^{-i\beta \varphi}) \tag{2.43}$$

A la luz de la discusión previa se puede verificar que los únicos términos de la expansión que subsisten al tomar el límite $\mu \rightarrow 0$ son aquellos que contienen igual número de factores $N_m(e^{i\beta\varphi})$ y $N_m(e^{-i\beta\varphi})$. Utilizando (2.41) y (2.42) se encuentra que estos términos son:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \prod_{i=1}^m N_m(e^{i\beta\varphi(x_i)}) N_m(e^{-i\beta\varphi(y_i)}) | 0 \rangle = \\ & = \frac{\prod_{i>j} [(x_i - x_j)^2 (y_i - y_j)^2 c^2 m^4]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}}{\prod_{i>j} [c m^2 (x_i - y_j)^2]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Con el objeto de establecer la equivalencia entre el modelo Seno-Gordon y el modelo de Thirring masivo, estudiaremos las funciones de Green correspondientes a este último. El modelo masivo de Thirring describe el comportamiento de campos fermiónicos que autointeractúan a través de la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}_T = \bar{\Psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi - m' z \bar{\Psi} \Psi - \frac{g}{2} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) \quad (2.45)$$

donde z es una constante (dependiente de un "cutoff") cuya presencia en el término de masa es necesaria para definir adecuadamente la teoría (ver más adelante). En este caso es conveniente elegir las matrices de Dirac de la forma

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_1 &= i \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= -\sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.46}$$

donde σ_x , σ_y , y σ_z son las matrices de Pauli.

Nos interesa estudiar el desarrollo en potencias de la masa fermiónica m' , es decir que haremos teoría de perturbaciones alrededor del modelo no masivo. Una propiedad importante de esta teoría libre ($m' = 0$) es su invarianza frente a transformaciones quirales, es decir frente a cambios en los campos fermiónicos del tipo:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\gamma_5\alpha} \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\gamma_5\alpha}$$

Veremos que esto se traduce en una simplificación análoga a la que encontramos al analizar el modelo bosónico. Para poner de manifiesto esta característica es conveniente escribir el término de masa en la forma:

$$\begin{aligned}Z m' \bar{\psi} \psi &= Z \bar{\psi} \frac{1+\gamma_5}{2} \psi + Z \bar{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi = \\ &= m' Z (\psi_1^\dagger \psi_2 + \psi_2^\dagger \psi_1)\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde se ha usado la siguiente notación:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

(2.48)

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = (\Psi_2^\dagger \quad \Psi_1^\dagger)$$

B.Klaiber (1) ha obtenido fórmulas cerradas para valores medio de vacío de productos arbitrarios de campos fermiónicos. Haciendo uso de sus resultados se encuentra que a una función de Green arbitraria de la teoría sólo contribuyen aquellos términos que poseen igual número de operadores $\Psi_1^\dagger \Psi_2$ y $\Psi_2^\dagger \Psi_1$. Esto se puede mostrar siguiendo los pasos del trabajo de Klaiber. Para evitar las divergencias que ocurren en toda función de Green cuando Ψ_1^\dagger y Ψ_2 se contraen en un mismo punto, se define

$$\sigma_+(x) = \lim_{y \rightarrow x} (x-y)^{2K} \Psi_1^\dagger(x) \Psi_2(y)$$

(2.49)

$$\sigma_-(x) = \lim_{y \rightarrow x} (x-y)^{2K} \Psi_2^\dagger(x) \Psi_1(y)$$

donde K es uno de los parámetros de Klaiber, dado por:

$$K = \frac{g}{4\pi} \frac{2\pi + g}{\pi + g}$$

(2.50)

y g es la constante de acoplamiento de la teoría. Con estas definiciones σ_+ y σ_- tienen elementos de matriz finitos

y los términos que contribuyen son:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \prod_{i=1}^m \sigma_+(x_i) \sigma_-(y_i) | 0 \rangle &= \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \prod_{i>j} \left[(x_i - x_j)^2 (y_i - y_j)^2 M^4 \right]^{(1+b/\pi)}}{\prod_{i,j} \left[M^2 (x_i - y_j)^2 \right]^{(1+b/\pi)}}
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

En esta expresión M es una masa arbitraria asociada a una renormalización finita en la definición de σ_+ y σ_- , y

$$b = - \frac{g}{1 + g/\pi}
 \tag{2.52}$$

es otro de los parámetros introducidos por Klaiber.

Es inmediato ahora verificar que los términos de los desarrollos perturbativos, dados por (2.51) para el modelo fermiónico y (2.44) para el bosónico, coinciden si se hacen las siguientes identificaciones:

$$\sigma_+ = -\frac{1}{2} N_m (e^{i\beta\psi})
 \tag{2.53}$$

$$\sigma_- = -\frac{1}{2} N_m (e^{-i\beta\psi})
 \tag{2.54}$$

$$M^2 = c m^2 \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{1 + g/\pi} = \frac{\beta^2}{4\pi} \quad (2.56)$$

Por lo tanto, ambas series perturbativas coinciden término a término si se toma

$$m' = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (2.57)$$

quedando así establecida la bosonización del modelo de Thirring masivo. Este resultado depende crucialmente de las características particulares del espacio-tiempo bidimensional, ya que en una dimensión espacial no existen las rotaciones y, por lo tanto, tampoco el spin en su sentido usual. Por esta razón no hay un teorema de spin-estadística que prohíba la construcción de un campo fermiónico a partir de estados bosónicos (9).

Uno de los aspectos más interesantes de la equivalencia obtenida consiste en que abre un nuevo camino para el estudio de teorías fermiónicas en términos de modelos bosó-

nicos cuyo tratamiento resulta, en muchos casos, más sencillo. Además, como lo muestra la fórmula (2.56), el límite para acoplamiento fuerte del modelo fermiónico ($g \rightarrow \infty$) corresponde al régimen de acoplamiento débil en la teoría bosónica ($\beta \rightarrow 0$). Este fenómeno se ha encontrado también en la bosonización de otros modelos fermiónicos como, por ejemplo, en el modelo de Schwinger masivo (11) y en la Cromodinámica Cuántica bidimensional con un sabor (12). Otra consecuencia interesante que se extrae de la ec. (2.56) es que para $\beta^2 = 4\pi$ se tiene $g = 0$, luego haciendo en (2.57) $m' = \alpha = 0$, se establece una correspondencia entre la teoría de fermiones libres sin masa y un modelo de campos escalares libres no masivos.

Bibliografía

- (1) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics, Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and Breach, New York, 1968.
- (2) W.Thirring, Ann. Phys,(N.Y.), 3, (1958), 91.
- (3) V.Glaser, Nuovo Cimento, 9 , (1958), 990.
- (4) K.Johnson, Nuovo Cimento, 20 , (1961), 773.
- (5) C.Sommerfield, Ann. Phys. (N.Y.), 26 , (1963), 1.
- (6) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (7) J.Schwinger, Phys. Rev., 128 , (1962), 2425.
- (8) S.Coleman, Phys. Rev. D 11 , (1975), 2088.
- (9) S.Coleman, "Classical lumps and their quantum descendants", Lectures in the International School of Subnuclear Physics, Ettore Majorana, Erice, 1975.
- (10) N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov, "Introduction to the theory of quantized fields", Wiley Interscience, 1958.
- (11) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys. (N.Y.), 93 , (1975), 267.
S.Coleman, Ann. Phys. (N.Y.), 101 , (1976), 239.
- (12) V.Baluni, Phys. Lett. B 90 , (1980), 407.
P.Steinhardt, Nucl. Phys. B 106 , (1980), 100.

2.3. Bosonización abeliana. El modelo de Schwinger.

El modelo de Schwinger es la Electrodinámica Cuántica en dos dimensiones (1 espacio, 1 tiempo) con electrones sin masa:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + e j_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.58)$$

donde e es la carga del fermión, A_μ es el campo de gauge y

$$j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \quad (2.59)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.60)$$

Una de las propiedades importantes de esta teoría es su invarianza de gauge local. En efecto, es fácil comprobar que la densidad lagrangiana (2.58) permanece invariante frente al cambio $\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x)$ ($\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{-i\alpha(x)}$) y $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$.

Desde que Schwinger mostró que esta teoría es resoluble exactamente (1), ha sido objeto de numerosas investigaciones (2-4). El análisis más completo de sus soluciones se encuentra en el trabajo de Lowenstein y Swieca (5), quienes dieron soluciones explícitas para diferentes fijados de

gauge. En particular, estos autores mostraron que la solución original de Schwinger corresponde al marco que en 4 dimensiones se conoce como de métrica indefinida de Gupta-Bleuler, en el sentido de que las ecuaciones de Maxwell se satisfacen solamente para un "subespacio físico" del espacio de Hilbert completo (11). Construyendo el espacio de Hilbert con métrica positiva en el gauge $\partial_\mu A_\mu = 0$, y haciendo uso de los métodos introducidos por Klaiber (6) en su análisis del modelo de Thirring, pudieron demostrar la completa desaparición de las excitaciones electrónicas, de acuerdo a la conjetura de Schwinger (1) acerca del apantallamiento total de la carga eléctrica. (Esto condujo a proponer esta teoría como modelo prototipo para el confinamiento de quarks (7)). Más aún, encontraron que el álgebra de observables es isomorfa a la de un campo escalar libre y masivo, y establecieron la bosonización de la corriente fermiónica. Estos resultados constituyen una de las primeras evidencias de la existencia de un vínculo estrecho entre fermiones y bosones en una teoría cuántica de campos en dos dimensiones (Fenómenos similares se conocían con anterioridad en la Mecánica Estadística (8)).

Las ecuaciones de movimiento de la teoría definida por (2.58) pueden resolverse representando el campo fermiónico $\Psi(x)$ en término de operadores de campo libres:

$$\Psi(x) = e^{i\int^5 [\tilde{\eta}^{(+)} + \phi^{(+)}]} \chi(x) e^{i\int^5 [\tilde{\eta}^{(-)} + \phi^{(-)}]} \quad (2.61)$$

donde $\phi(x) = \phi_{(x)}^+ + \phi_{(x)}^-$ es un campo escalar libre de masa $e/\sqrt{\pi}$, $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^+ + \eta^-$ es un campo escalar sin masa, cuantificado con métrica indefinida, y $\chi(x)$ es el espinor correspondiente a un campo fermiónico libre. (Con los superíndices + y - se indican las componentes de creación y aniquilación de los campos, respectivamente).

Insertando (2.59) en la ecuación de Dirac derivada de (2.58), se obtiene:

$$A^\mu(x) = -\frac{1}{e} \left(\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) + \partial^\mu \eta(x) \right) \quad (2.62)$$

donde hemos definido:

$$\partial^\mu \eta(x) = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\eta}(x) \quad (2.63)$$

Considerando ahora la corriente fermiónica correspondiente a un límite invariante de gauge (1), (9-10) se obtiene:

$$j^\mu(x) = j_{\text{libre}}^\mu(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu \eta(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) \quad (2.64)$$

El primer término en el miembro derecho de esta expresión es la corriente de fermiones libres:

$$j_{\text{libre}}^{\mu} \equiv \bar{\chi}(x) \gamma^{\mu} \chi(x) \quad (2.65)$$

El término

$$j_{\text{libre}}^{\mu}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^{\mu} \eta(x) \equiv j_L^{\mu}(x) \quad (2.66)$$

es una contribución puramente longitudinal que proviene de la excitación de masa nula.

En estas condiciones puede mostrarse que las ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = e j^{\mu} \quad (2.67)$$

no se satisfacen. En su lugar se tiene

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = e (j^{\mu} - j_L^{\mu}) \quad (2.68)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al que se emplea

en el formalismo de Gupta-Bleuler (11), podemos restringirnos a un subespacio físico $\mathcal{H}_{\text{físico}}$, del espacio de Hilbert completo, definido por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} \right)^{(-)} \Psi = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}_{\text{físico}} \quad (2.69)$$

De esta forma, cuando se toman en cuenta los estados con sentido físico, (2.68) se reduce a (2.67), ya que

$$\langle \Psi | \frac{\partial}{\partial L} f(x) | \Phi \rangle = 0; \quad \forall \Psi, \Phi \in \mathcal{H}_{\text{físico}}. \quad (2.70)$$

En efecto, actuando sobre todos los vectores del "espacio físico", $\frac{\partial}{\partial L}$ da cero, de lo cual se desprende que $\frac{\partial}{\partial L}$ se anula idénticamente en ese espacio. Luego, por (2.66) el campo $\eta(x)$ se identificará con $f(x)$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial L} \eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial L} f(x) \quad (2.71)$$

Como consecuencia de la construcción de $\mathcal{H}_{\text{físico}}$, el campo "electrónico" apropiado es el que se relaciona con $\Psi(x)$ mediante la siguiente transformación de gauge:

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{i\eta^+(x)} \Psi(x) e^{i\eta^-(x)} \quad (2.72)$$

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \frac{1}{e} \partial^\mu \eta(x) = -\frac{1}{e} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x)$$

Aplicando ahora el método desarrollado por Klaiber (5-6) pueden calcularse objetos de interés como las funciones de Green de la teoría, el álgebra de los observables y la corriente fermiónica. Puede así mostrarse, por ejemplo, que las soluciones del modelo de Schwinger corresponden a una subclase de soluciones del modelo de Thirring. En particular, para la corriente fermiónica resulta:

$$j^\mu(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) \quad (2.73)$$

es decir, que se ha removido la contribución longitudinal relacionada a la excitación de masa nula, en completo acuerdo con (2.64) y (2.71). Por otra parte, (2.73) establece la proporcionalidad entre $j^\mu(x)$ (objeto asociado a la dinámica de partículas fermiónicas) y el campo bosónico $A^\mu(x)$. Volveremos más adelante sobre esta relación (ver capítulo 3)

Ahora vamos a mostrar que la identidad (2.73) junto

a la identificación

$$i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) \quad (2.74)$$

son suficientes para escribir la densidad lagrangiana original (2.58) exclusivamente en términos del campo bosónico $\phi(x)$ (12). (Nótese que (2.74) puede obtenerse como caso particular de la equivalencia descubierta por Coleman, establecida en la sección anterior).

Por simplicidad adoptamos el gauge de Coulomb, que en dos dimensiones toma la forma:

$$A_1 = 0 \quad (2.75)$$

Tomando la componente $\mu = 0$ de (2.67) se obtiene:

$$\partial_1 \partial_1 A_0 = e j^0 = e \Psi^+ \Psi \quad (2.76)$$

Como es bien sabido, la solución de esta ecuación se puede obtener convolucionando la función de Green $G(x_1, x'_1)$ que satisface

$$\partial_1 \partial_1 G = \delta(x_1 - x'_1) \quad (2.77)$$

con la inhomogeneidad $(e \Psi^+ \Psi)$. En este caso unidimensional

es particularmente simple integrar (2.77). El resultado es:

$$G(x_1 - x'_1) = \frac{1}{2} |x_1 - x'_1| \quad (2.78)$$

Esta es la versión unidimensional del potencial coulombiano.

De esta forma se tiene:

$$A_0(x_1) = \frac{e}{2} \int dx'_1 |x_1 - x'_1| \psi^\dagger(x'_1) \psi(x'_1) \quad (2.79)$$

Ahora, haciendo uso de la bosonización de la corriente, ecuación (2.73), se encuentra que:

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_1 \phi \quad (2.80)$$

por lo que el segundo término de (2.58) puede escribirse en la forma

$$e \int dx'_1 A_\mu = \frac{e^2}{2\pi} \int dx'_1 (\partial_1 \phi(x_1)) |x_1 - x'_1| (\partial'_1 \phi(x'_1)) \quad (2.81)$$

El término restante es:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_i A_0)^2 = \\
 &= \frac{e^2}{8\pi} \int dx'_i dx''_i \left[\left(\frac{d}{dx_i} |x_i - x'_i| \right) \left(\frac{d}{dx_i} |x_i - x''_i| \right) (\partial'_i \phi(x'_i)) \partial''_i \phi(x''_i) \right] \quad (2.82) \\
 &= \frac{e^2}{8\pi} \int dx'_i dx''_i \frac{d}{dx_i} (|x_i - x'_i|) [2\theta(x_i - x''_i) - 1] (\partial'_i \phi) \partial''_i \phi
 \end{aligned}$$

donde $\theta(x_1 - x'_1)$ es la distribución de Heaviside. Suponiendo que los campos se anulan en $x_1 \rightarrow \pm \infty$, y considerando la contribución al lagrangiano total, se tiene:

$$-\frac{1}{4} \int dx_i F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi} \int dx_i dx'_i (\partial'_i \phi) |x_i - x'_i| (\partial_i \phi) \quad (2.83)$$

Así, teniendo en cuenta (2.74), (2.81) y (2.83), el lagrangiano bosonizado es:

$$\begin{aligned}
 \int dx_i \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \int dx_i (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \\
 &+ \frac{e^2}{4\pi} \iint dx'_i (\partial_i \phi(x_i)) |x_i - x'_i| (\partial'_i \phi(x'_i)) dx_i
 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Esta expresión puede escribirse de un modo más simple integrando por partes el término de energía potencial:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi} \int dx_1 dx'_1 (\partial_1 \phi(x_1)) |x_1 - x'_1| \partial'_1 \phi(x'_1) &= \\ = \frac{e^2}{4\pi} \int dx_1 dx'_1 \phi(x_1) (\partial_1 \partial'_1 |x_1 - x'_1|) \phi(x'_1) &= \quad (2.85) \\ = \frac{e^2}{2\pi} \int dx_1 (\phi(x_1))^2 \end{aligned}$$

Esto da lugar a un término de masa para el bosón libre. Si bien este resultado es satisfactorio en cuanto a que nos permite establecer la equivalencia entre el lagrangiano fermiónico de partida y un modelo de bosones libres de masa $e/\sqrt{\pi}$, por otra parte nos enfrenta a nuevo problema, porque (2.85) no respeta la invarianza quiral de la teoría fermiónica. La densidad de carga quiral es:

$$\begin{aligned} Q_5 &= \int dx_1 j_5^0 = \int dx_1 \varepsilon^{01} j_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_1 \partial_0 \phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_1 \pi \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde π es el impulso canónico conjugado al campo ϕ . Usando la relación canónica (2.16), se obtiene:

$$[Q_5, \phi] = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \quad (2.87)$$

Con esta identidad se puede verificar que

$$e^{-i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} \phi e^{i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} = \phi + \alpha \quad (2.88)$$

con α constante. Esto quiere decir que el efecto de las transformaciones quirales sobre el campo bosónico equivalente es el de trasladarlo en una constante. Es evidente que (2.85) no es invariante frente al cambio $\phi \rightarrow \phi + \alpha$. Esto indica que hay rotura espontánea de la simetría bajo transformaciones quirales globales. A pesar de este fenómeno, no aparecen bosones de Goldstone debido a la existencia de la anomalía quiral (13-17). (En el Capítulo 3 trataremos con mayor profundidad el papel de la anomalía quiral en la bosonización).

Si la bosonización ha de ser considerada seriamente como técnica para estudiar una teoría de fermiones a través de una acción bosónica de más fácil manejo matemático, lo deseable es que en el pasaje de un modelo al otro no haya pérdida de información relevante sobre el modelo de partida. En otras palabras, el campo equivalente debe ser tal que la teoría bosónica refleje la simetría original. Esto se consigue escribiendo:

$$\phi = \varphi + \theta \quad (2.89)$$

donde φ es un nuevo campo escalar masivo y θ es un campo constante de naturaleza angular. La acción de la transformación quirral sobre estos campos es:

$$e^{-i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} \varphi e^{i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} = \varphi \quad (2.90)$$

$$e^{-i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} \theta e^{i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} = \theta + \alpha \quad (2.91)$$

de modo que se reconstruye (2.88), pero la transformación afecta solamente al campo θ . Ahora sí podemos escribir el lagrangiano bosónico adecuado para representar (2.58) en términos del campo φ :

$$\int dx_1 \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{e^2}{\pi} \varphi^2) dx_1 \quad (2.92)$$

La carga quirral Q_5 juega el rol de momento canónico conjugado al campo θ ; por (2.77):

$$[\pi_\theta, \theta] = i \quad (2.93)$$

con $\pi_\theta = \sqrt{\pi} Q_5$. Nótese que tanto θ como π_θ son completamente independientes del campo de Klein-Gordon φ . No participan en la dinámica de la nueva teoría bosónica, su acción se limita a especificar las condiciones de contorno en el infinito.

De acuerdo a esta formulación, el espacio de estados será el producto tensorial del espacio de Fock convencional asociado a φ y un espacio asociado a θ , generado por una base de vectores identificados por los autovalores enteros de $\frac{1}{2} Q_5$. En efecto, es fácil verificar que el operador $\exp(in\pi Q_5)$ coincide con la identidad para todo n entero, siempre que se consideren estados para los cuales Q_5 es un entero par. (La simetría bosónica equivalente es frente al cambio $\phi \longrightarrow \phi + n\sqrt{\pi}$). Luego, los vectores del espacio de Fock completo serán:

$$|\pm\rangle = |\varphi\rangle |m\rangle \quad (2.94)$$

Los operadores φ y π_φ actúan sobre los vectores $|\varphi\rangle$, del modo usual, mientras que

$$\pi_\theta |m\rangle = \sqrt{\pi} Q_5 |m\rangle = 2\sqrt{\pi} m |m\rangle \quad (2.95)$$

Por otra parte se puede probar que

$$\left[\pi_\theta, e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} \right] = \pm i(2i\sqrt{\pi}) e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} \quad (2.96)$$

de donde surge la acción de los operadores $\exp(\pm 2i\sqrt{\pi}\theta)$ sobre los vectores $|n\rangle$:

$$e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} |m\rangle = |m \mp 1\rangle \quad (2.97)$$

El espacio discreto de los vectores $|n\rangle$ está asociado a la rotura espontánea de la simetría. Como el hamiltoniano no contiene a los operadores θ y π_θ , el estado de vacío de la teoría es completamente ambiguo frente a la elección del factor $| \cdot \rangle$. La solución original de Schwinger corresponde a $n = 0$, el único vacío simétrico frente a transformaciones quirales. Con esta elección, sin embargo, los elementos de matriz de operadores locales violan la propiedad de factorización ("cluster property"). Como ejemplo de este problema consideremos el siguiente valor medio:

$$\langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle \quad (2.98)$$

donde $: \cdot :$ simboliza el orden normal usual (es decir, ha-

ciendo uso de la masa de la teoría). De acuerdo a (2.89) y (2.94) la expresión anterior es igual a

$$\langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle \{ | 0 \rangle e^{2i\sqrt{\pi}\theta} e^{-2i\sqrt{\pi}\theta} | 0 \rangle \} \quad (2.99)$$

Aplicando el teorema de Wick se encuentra que el primer factor es la exponencial del propagador de Feynman, que tiende a cero para $z \rightarrow \infty$. El segundo factor es evidentemente igual a uno, luego

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle = 1 \quad (2.100)$$

La propiedad de factorización (11) requiere

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle = \quad (2.101)$$

$$= \langle 0 | e^{2i\sqrt{\pi}\phi(0)} | 0 \rangle \langle 0 | e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} | 0 \rangle$$

pero

$$\langle 0 | : e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\phi} : | 0 \rangle = \langle 0 | : e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\phi} : | 0 \rangle \{ | 0 \rangle e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} | 0 \rangle \} \quad (2.102)$$

y como, por (2.97),

$$e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} |0\rangle = |\mp 1\rangle \quad (2.103)$$

se tiene que el miembro derecho de (2.101) se anula y por lo tanto se viola la propiedad de factorización.

Lowenstein y Swieca (5) mostraron que esta propiedad se restaura tomando un vacío asimétrico de la forma

$$|\theta_0\rangle = |0\rangle |\theta_0\rangle \quad (2.104)$$

donde $|\theta_0\rangle$ es un autovector de θ . Los estados de vacío que corresponden a diferentes valores de θ_0 se relacionan unos con otros mediante transformaciones quirales.

En el mundo hadrónico real la simetría quiral está rota debido a las pequeñas masas de los quarks. Es importante, por lo tanto, el estudio del modelo de Schwinger cuando se le agrega un término de masa fermiónica (14-15), (18-19):

$$\mathcal{L}_m = m : \bar{\psi} \psi : \quad (2.105)$$

Utilizando las ecuaciones (2.53) y (2.54), de la

sección anterior y la discusión precedente sobre el vacío θ , se encuentra el equivalente bosónico del término de masa:

$$\mathcal{L}_m = c_m : \cos [2\sqrt{\pi} (\varphi + \theta_0)] \quad (2.106)$$

donde θ_0 es un autovalor de θ y c es una constante cuyo valor exacto no nos interesa aquí (ver ec. (2.27)).

Este modelo masivo deja de ser exactamente resoluble, sin embargo es posible desarrollar la teoría de perturbaciones, tomando a la masa como parámetro perturbativo. Por otra parte, es claro que el término de masa (2.105) rompe la simetría quiral del modelo de partida, de modo que ya no se puede esperar que exista rotura espontánea de la simetría frente a transformaciones quirales globales. Otra diferencia importante entre el modelo sin masa y la teoría masiva se pone de manifiesto analizando los diagramas de Feynman correspondientes a la interacción entre distribuciones clásicas de corrientes externas.

a)



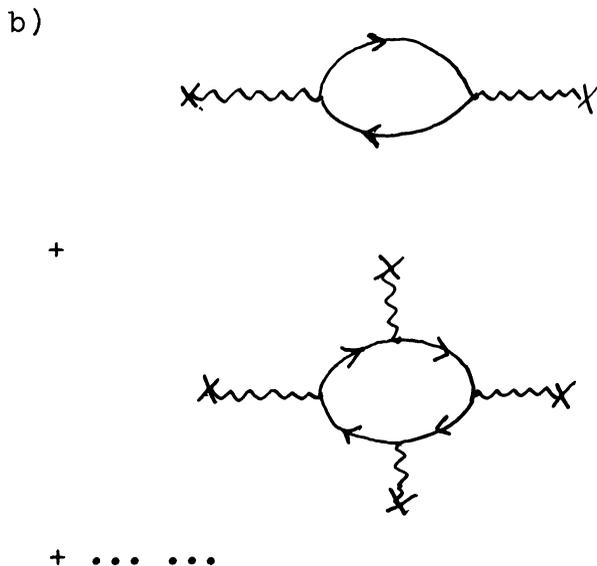


Figura 2. X : distribución de corriente externa
 ~~~~~ : propagador electromagnético  
 ———> : propagador fermiónico

La figura 2 a) representa el intercambio de un propagador electromagnético, que da lugar a una fuerza de largo alcance, en ambos casos. Cuando los fermiones no tienen masa, esta fuerza se cancela con el primer diagrama de 2 b). La función de polarización del vacío presenta un polo, para impulso nulo, que cancela el polo del diagrama 2 a) (20-21). Todos los diagramas restantes de 2 b) se anulan idénticamente.

Cuando los electrones tienen masa la situación cambia radicalmente. En este caso los diagramas de la figura 2 b) no se anulan. Sin embargo, la suma de todos ellos puede cancelar la contribución del propagador libre para valores particulares de las cargas externas ( En el caso  $m = 0$  el apantallamiento se produce para todos los valores de las cargas externas ).

Consideremos el modelo masivo de Schwinger en presencia de una distribución externa de corriente  $K_\mu$  :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi + e \int_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m_0 \bar{\Psi} \Psi + A^{\mu} K_{\mu} \quad (2.107)$$

con

$$K_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} D$$

donde D describe la distribución de carga. Estudiaremos el caso sencillo de dos cargas estáticas opuestas de magnitud Q separadas por una distancia L. La forma correspondiente de la función D está representada en la figura 3:

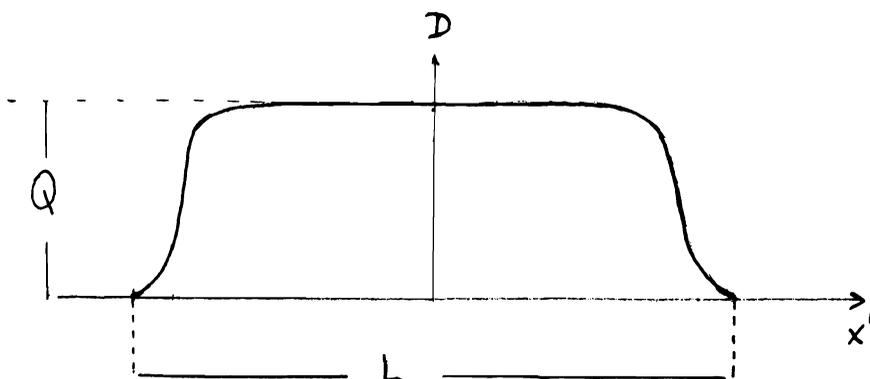


Figura 3.

La contribución a la energía de vacío debida a la corriente externa está dada por los diagramas de la figura 2. Con el objeto de describir el problema en término de campos bosónicos es útil observar que la figura 2 a) proviene de un término en la acción de la forma

$$\begin{aligned} I_a &= -\frac{1}{2} \int d^2x K_\mu \square^{-2} K^\mu = \\ &= -\int d^2x D^2 \end{aligned} \quad (2.108)$$

mientras que todos los gráficos de la figura 2 b) surgen de una interacción entre la corriente externa  $K_\mu$  y la corriente fermiónica  $j_\mu$ , dada por

$$\begin{aligned} I_b &= -e \int d^2x j^\mu \square^{-2} K_\mu = \\ &= -\frac{e}{\sqrt{\pi}} \int d^2x D\phi \end{aligned} \quad (2.109)$$

donde hemos usado la relación (2.73). Agregando estos términos a (2.107), junto a la identidad dada por las ecuaciones (2.105) y (2.106), es fácil verificar que para la densidad hamiltoniana del sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} : \pi^2 + (\partial_i \phi)^2 + \frac{e^2}{\pi} \left( \phi + \frac{\sqrt{\pi}}{e} D \right) : + \\ &+ m_0 e c : \cos(2\sqrt{\pi} \phi + \theta_0) : \end{aligned} \quad (2.110)$$

expresión que involucra solamente interacciones locales entre  $\phi$  y  $D$ . De acuerdo a la figura 3, cuando crece  $L$ , tam-

bién crece la región en la cual  $D = Q$ , de manera que la energía de interacción es simplemente la energía de vacío por unidad de longitud, para un campo  $D$  constante, multiplicada por  $L$ .

Haciendo

$$\phi' = \phi + \frac{\sqrt{\pi}}{e} D$$

la densidad hamiltoniana, para  $D = Q$  resulta

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} : \pi^2 + (\partial_i \phi')^2 + \frac{e^2}{\pi} \phi'^2 : + \quad (2.111)$$

$$+ m_0 c e : \cos \left( 2\sqrt{\pi} \phi' + \theta - \frac{2\pi}{e} Q \right) :$$

Si llamamos  $\mathcal{E}(\theta)$  a la energía de vacío por unidad de longitud en ausencia de cargas externas, la energía de interacción entre dos cargas separadas por una gran distancia  $L$  es

$$E = \left[ \mathcal{E} \left( \theta - \frac{2\pi}{e} Q \right) - \mathcal{E}(\theta) \right] L + \text{términos constantes para } L \rightarrow \infty \quad (2.112)$$

Como el hamiltoniano (2.111) es una función periódica de  $Q$  con período  $e$ , también lo es la energía de vacío, de modo que cuando  $Q$  es un múltiplo entero de  $e$ , la fuerza de largo

alcance desaparece. Este resultado, independiente de la teoría de perturbaciones, se interpreta físicamente como un apantallamiento de las cargas de los fermiones ( "quarks") debido a la presencia de cargas externas que son múltiplos enteros de las cargas elementales. Como ya se indicó anteriormente, en el caso en que los fermiones no tienen masa, el apantallamiento se produce para cualquier valor de las cargas externas.

Bibliografia

- (1) J.Schwinger, Phys. Rev., 128 , (1962), 2425.
- (2) L.S.Brown, Nuovo Cimento, 29 , (1963), 617.
- (3) B.Zumino, Phys. Lett., 10 , (1964), 224;  
Acta Phys. Austriaca Supl. 2 , (1966), 212.
- (4) C.R.Hagen, Nuovo Cimento B, 51 , (1967), 169.
- (5) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys.,  
(N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (6) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics,  
Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and  
Breach, New York, 1968.
- (7) A.Casher, J.Kogut and L.Susskind, Phys. Rev.  
Lett., 31 , (1973), 792.
- (8) D.Mattis and E.Lieb, Journal Math. Phys., 6 ,  
(1965), 304.
- (9) J.Schwinger, Phys. Rev. Lett., 3 ,(1959), 269.
- (10) J.H.Lowenstein, Comm. Math. Phys., 16 , (1970),  
265.
- (11) C.Itzykson and J.Zuber, "Quantum Field Theory",  
Mc. Graw-Hill, 1980.
- (12) J.Kogut and L.Susskind, Phys. Rev. D, 11 ,  
(1975), 3594.
- (13) K.Johnson, Phys. Lett, 5 , (1963), 253.
- (14) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys.  
(N.Y.), 93 , (1975), 267.
- (15) J.A.Swieca, Fortscritte der Physik, 25 , (1977),  
303.

- (16) S.L.Adler, Phys. Rev., 177 , (1969), 2426.
- (17) J.S.Bell and R.Jackiw, Nuovo Cimento, 51 , (1969), 47.
- (18) L.Susskind and J.Kogut, Phys. Rep. 23 , (1976), 348.
- (19) S.Coleman, Ann. Phys. (N.Y.), 101 , (1976), 239.
- (20) G.Mc. Keon, Phys. Rev. D, 14 , (1975), 1577.
- (21) A.Yildiz, Phys. Rev. D, 10 , (1974), 1796.

#### 2.4. Bosonización no abeliana: el método operacional

Una vez establecida la bosonización en modelos abelianos (1-3), el paso siguiente es el de la extensión del procedimiento para teorías en las que los campos fermiónicos pertenecen a un multiplete que se transforma bajo un grupo no abeliano. Esta cuestión reviste un interés especial porque en el mundo real de cuatro dimensiones son teorías de gauge no abelianas las que han mostrado ser más apropiadas para describir las interacciones fundamentales de la materia. Los primeros trabajos en este sentido pusieron de manifiesto serias complicaciones, al tratar de aplicar el esquema previo -descrito en las secciones anteriores-, en forma directa (4-7). Estas dificultades se deben fundamentalmente a que el procedimiento usual no preserva la simetrías originales de la teoría. Un reflejo claro de esta situación aparece al considerar la bosonización de productos bilineales de campos fermiónicos. En particular, las corrientes fermiónicas diagonales pueden expresarse adecuadamente en término de campos bosónicos, como en el caso abeliano, ec.(2.73), mientras que las componentes no diagonales de estas corrientes resultan ser no locales en la versión bosonizada.

Este tipo de problemas fue atacado por Witten,(8), quien desarrolló un método alternativo que permitió generalizar convenientemente la técnica de bosonización operacional, de manera local y respetando las simetrías originales. Para estudiar este método es útil considerar el caso simple

de fermiones libres sin masa y reescribir la ecuación (2.73), para el caso abeliano, pero de una forma tal que facilite su generalización no abeliana. Sea  $U = \exp(i\sqrt{4\pi}\phi)$  un elemento del grupo abeliano  $U(1)$ . La corriente fermiónica bosonizada (2.73) puede escribirse en la forma

$$j_{\mu} = \frac{i}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \bar{U}^{-1} \partial_{\nu} U = \frac{i}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} (\partial^{\nu} U) \bar{U}^{-1} \quad (2.113)$$

donde hemos escrito ambos ordenamientos posibles, resaltando el carácter abeliano del grupo  $U(1)$ . Obviamente, al extender esta fórmula al caso no abeliano tendremos que ser cuidadosos con el orden de los factores.

Es conveniente trabajar en el sistema de coordenadas del cono de luz:

$$X^{\pm} = \frac{X^0 \pm X^1}{\sqrt{2}} \quad (2.114)$$

En este sistema las expresiones de las corrientes toman una forma más compacta y como veremos más adelante, se hace manifiesta la simetría del modelo en estudio.

Normalizando el tensor de Levi-Civita tal que  $\epsilon_{01} = -\epsilon_{+-} = 1$ , las correspondientes componentes de la corriente son:

$$j_+ = -\frac{i}{2\pi} \bar{u}^{-1} \partial_+ u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_+ \phi$$

(2.115)

$$j_- = \frac{i}{2\pi} (\partial_- u) \bar{u}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_- \phi$$

donde  $\partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_0 \pm \partial_1)$ .

En el caso de fermiones libres sin masa que estamos considerando, la simetría frente a transformaciones globales de gauge y quiral da lugar a la conservación de ambas corrientes, la vectorial  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  y la axial  $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ . En (1+1) dimensiones las matrices de Dirac ( seguiremos usando la representación definida por (2.46)) satisfacen la relación

$$\gamma^\mu \gamma_5 = -\epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu \quad (2.116)$$

que permite vincular ambas corrientes:

$$j_5^\mu = -\epsilon^{\mu\nu} j_\nu \quad (2.117)$$

Haciendo uso de esta propiedad y de las ecuaciones de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu j_5^\mu = 0 \quad (2.118)$$

se obtiene

$$\partial_- j_+ = \partial_+ j_- \quad (2.119)$$

La prescripción (2.115) es compatible con (2.119) ya que el campo escalar libre  $\phi$  satisface la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 2 \partial_+ \partial_- \phi = 0 \quad (2.120)$$

Ahora sí, consideremos el caso no abeliano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi \quad (2.121)$$

con los campos fermiónicos tomados en la representación fundamental del grupo  $O(N)$ .

Las corrientes conservadas son

$$J_{\mu}^a = \bar{\Psi} \gamma_{\mu} t^a \Psi \tag{2.122}$$

$$J_{\mu 5}^a = \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 t^a \Psi$$

donde las matrices  $t^a$  son los generadores del grupo  $O(N)$ .  
 Expresando los campos fermiónicos en términos de sus componentes en el cono de luz,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_- \\ \Psi_+ \end{pmatrix}$$

la densidad lagrangiana (2.121) puede reescribirse como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[ \Psi_+^k (\partial_0 - \partial_1) \Psi_+^k + \Psi_-^k (\partial_0 + \partial_1) \Psi_-^k \right] \tag{2.123}$$

donde  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Tal como en el caso abeliano, resulta conveniente expresar las corrientes en sus componentes quirales. Para esto definimos:

$$J_+^{ij}(x,t) = -i (\psi_+^i \psi_+^j)(x,t) \quad (2.124)$$

$$J_-^{ij}(x,t) = -i (\psi_-^i \psi_-^j)(x,t)$$

Si consideramos fermiones de Majorana ( un fermión de Majorana satisface  $\psi = C \psi$ , donde C es la operación de conjugación de carga ) los campos  $\psi^+$  y  $\psi^-$  son reales. Además

$$J_+^{ij} = -J_+^{ji} \quad (2.125)$$

como reflejo de la estadística de Fermi, de modo que las corrientes son hermiticas. En analogía con el caso abeliano se verifican las leyes de conservación:

$$\partial_- J_+^{ij} = \partial_+ J_-^{ij} = 0 \quad (2.126)$$

es decir que  $J_+$  es sólo función de  $x^+$  y  $J_-$  depende solamente de  $x^-$  ( de aquí en más suprimimos los índices ij por comodidad ). Ahora deseamos encontrar una expresión para  $J_+$  y  $J_-$  en término de campos bosónicos, la extensión no abelia

na de (2.115). En aquel caso simple se buscó una corriente que pudiera generar la simetría  $U(1)$ . Teniendo esto en cuenta definimos un elemento  $\mathcal{U}$  de  $U(1)$  y obtuvimos (2.115). En el caso presente  $J_+$  y  $J_-$  son, por construcción, elementos del álgebra de Lie del grupo  $O(N)$ . Más específicamente, estas corrientes generan  $O(N)_{\text{izq.}} \times O(N)_{\text{der.}}$ , es decir el producto de las transformaciones  $O(N)$  que operan sobre las componentes quirales de los fermiones. (Según nuestras convenciones  $\Psi_+$  es la componente "derecha" ("right") y  $\Psi_-$  es la "izquierda" ("left")). El paso siguiente es, por lo tanto, el de escribir  $J_+$  y  $J_-$  en función de un campo bosónico  $g$  que tome valores en el grupo  $O(N)$ . El ansatz más inmediato corresponde a tomar

$$\hat{J}_{\pm} \propto \bar{g}^{-1} d_{\pm} g \quad (2.127)$$

Sin embargo es fácil probar que esta elección es incorrecta. En efecto, reemplazando (2.127) en (2.126) se obtiene :

$$(\partial_- \bar{g}^{-1})(\partial_+ g) + \bar{g}^{-1} \partial_- \partial_+ g = 0 \quad (2.128) \text{ a}$$

$$(\partial_+ \bar{g}^{-1})(\partial_- g) + \bar{g}^{-1} \partial_+ \partial_- g = 0 \quad (2.128) \text{ b}$$

Restando ambas ecuaciones y teniendo en cuenta que

$$(\partial_{\pm} \bar{g}^{-1}) = -\bar{g}^{-1} (\partial_{\pm} g) \bar{g}^{-1} \quad (2.129)$$

resulta:

$$\bar{g}^{-1} (\partial_{-} g) \bar{g}^{-1} \partial_{+} g = \bar{g}^{-1} (\partial_{+} g) \bar{g}^{-1} \partial_{-} g$$

o bien

$$\hat{J}_{+} \hat{J}_{-} = \hat{J}_{-} \hat{J}_{+} \quad (2.130)$$

que es claramente incompatible con la naturaleza no abeliana de las corrientes. Después de este "intento fallido" parece razonable respetar el ordenamiento de operadores dado en (2.115) y escribir:

$$\begin{aligned} J_{+} &= \frac{-i}{2\pi} \bar{g}^{-1} \partial_{+} g \\ J_{-} &= \frac{i}{2\pi} (\partial_{-} g) \bar{g}^{-1} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Insertando estas expresiones en (2.126) encontramos:

$$(\partial_- \bar{g}^{-1}) (\partial_+ g) + \bar{g}^{-1} \partial_- \partial_+ g = 0 \quad (2.132) \text{ a}$$

$$(\partial_+ \partial_- g) \bar{g}^{-1} + (\partial_- g) (\partial_+ \bar{g}^{-1}) = 0 \quad (2.132) \text{ b}$$

Es fácil mostrar, usando nuevamente (2.129), que estas dos ecuaciones son equivalentes, y por lo tanto compatibles.

El programa de bosonización no abeliana que hemos emprendido quedará establecido formalmente cuando podamos presentar una acción bosónica equivalente a (2.121), que de lugar a una teoría renormalizable y que preserve la invarianza quirral del modelo fermiónico de partida. Además, como prueba de consistencia esta acción debe permitirnos obtener las ecuaciones (2.126). Una candidata, en principio atractiva, es la densidad lagrangiana dada por:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{4\lambda^2} \text{Tr}[(\partial_\mu g)(\partial_\mu \bar{g}^{-1})] \quad (2.133)$$

Cualidades bienvenidas de esta expresión son su carácter renormalizable y su invarianza quirral manifiesta. Sin embargo, varios motivos físicos la invalidan (8-9). Sus estados asintóticos no corresponden a la invarianza conforme que posee la teoría de fermiones libres sin masa ( Las transformacio-

nes conformes incluyen a las transformaciones de escala. Puede demostrarse que la invarianza de escala se mantiene cuando la función  $\beta$  de Callan-Symanzik se anula. En general la cuantificación implica renormalizaciones que introducen una escala con dimensiones de masa. Es por ello que, en general, se rompe la invarianza de escala (y luego la conforme). Sólo si  $\beta = 0$  se recupera dicha invarianza). Además, (2.133) da lugar a una ecuación de movimiento que no coincide con la correcta, (2.126). Para comprobarlo consideremos la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la acción

$$\hat{S} = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \text{Tr} \left[ (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) (\partial_\mu g) + \alpha (\bar{g} g - 1) \right] \quad (2.134)$$

donde  $\alpha$  es un multiplicador de Lagrange asociado a la condición trivial:  $g^{-1} g = 1$ . Las ecuaciones de movimiento son:

$$(\partial_\mu \partial_\mu \bar{g}^{-1}) \bar{g} = \alpha \quad (2.135)$$

$$(\partial_\mu \partial_\mu g) g^{-1} = \alpha \quad (2.135)$$

Usando una relación análoga a la (2.129), es evidente que

$$\partial_\mu \left( (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) g \right) + \partial_\mu \left( \bar{g}^{-1} \partial_\mu g \right) = 0 \quad (2.136)$$

Insertando (2.135) a) en (2.136), se obtiene:

$$\partial_\mu \left( \bar{g}^{-1} \partial_\mu g \right) = -\alpha - (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) (\partial_\mu g) \quad (2.137)$$

Finalmente, eliminando  $\alpha$  mediante (2.135) b), se tiene:

$$\partial_\mu \left( \bar{g}^{-1} \partial_\mu g \right) = 0 \quad (2.138)$$

que difiere de la (2.126):

$$\partial_- \left( \bar{g}^{-1} \partial_+ g \right) = \partial_+ \left( (\partial_- g) \bar{g}^{-1} \right) = 0 \quad (2.139)$$

Si bien se ha dicho que (2.133) es la única acción con invarianza quirral manifiesta ( la comprobación es simple teniendo en cuenta que  $O(N)_{izq.} \times O(N)_{der.}$  actúa sobre  $g$  en la forma  $g \rightarrow B g A^{-1}$ , con  $A, B \in O(N)$  ), existe un término no local que respeta la simetría quirral, aunque no de manera manifiesta. Nos referimos a la versión bidimensional del término de Wess-Zumino (10):

$$\Gamma = \frac{1}{24\pi} \int d^3x \varepsilon^{ijk} T_{\lambda} \left( \bar{g}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^i} \bar{g}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^j} \bar{g}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^k} \right) \quad (2.140)$$

donde la integral se extiende a una bola con frontera  $S^2$  ( por ejemplo, el casquete  $S^{3+}$  ) y  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son las variables en esta bola. Este término, propuesto originalmente como una acción efectiva para las anomalías quirales, posee importantes propiedades asociadas a la topología de la teoría (8-9). En particular, puede demostrarse que existe una ambigüedad en la definición de  $\Gamma$  ; frente a rotaciones  $\Gamma$  no permanece invariante. La condición de que  $\exp(i\Gamma)$  sea uniforme impone una condición sobre el coeficiente numérico en  $\Gamma$  de manera que  $\Gamma \longrightarrow \Gamma + 2\pi$ . Resulta así que  $\Gamma$  está bien definido "módulo"  $2\pi$ .

En este punto es de notar que la contribución (2.140) a la acción efectiva de teorías fermiónicas en (1+1) dimensiones fue obtenida ( en la formulación de la integral funcional ) por Gamboa Saraví, Schaposnik y Solomin (11). La aplicación sistemática del método originado en la referencia (11), al problema de la bosonización no abeliana constituye uno de los puntos fundamentales de esta tesis ( El desarrollo detallado de esta técnica se encuentra en el capítulo siguiente ).

Ahora bien, ya que contamos con  $\Gamma$ , podemos construir una acción para el campo  $g$ , y luego comprobar si es posible establecer su equivalencia con el modelo de fermiones libres sin masa. Consideramos la siguiente acción:

$$S = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \operatorname{Tr} \left( (\partial_\mu g) (\partial_\mu g^{-1}) \right) + m \Gamma \quad (2.141)$$

donde  $n$  es un número entero. Puede probarse que la teoría descrita por la ecuación (2.141) es renormalizable ( Esto se basa en el carácter adimensional de  $n$  ). Otra propiedad interesante de esta teoría es que no posee la simetría discreta frente a la transformación  $x \rightarrow -x$  ( paridad naive ). Se cumple, en cambio, la invarianza frente al cambio conjunto:  $x \rightarrow -x$  y  $g \rightarrow g^{-1}$ . Estas características son, en principio, bienvenidas, ya que, como es sabido, la teoría de fermiones libres sin masa no preserva la paridad. La prueba crucial, sin embargo, debe buscarse en las ecuaciones de movimiento de la teoría. A pesar del carácter no local de  $\Gamma$ , su variación es una funcional local (9),(12). Se trata de calcular la variación de  $S$  frente al cambio  $g \rightarrow g + \delta g$ . Para esto consideramos por separado la variación de cada término:

$$\delta S = \delta \hat{S} + m \delta \Gamma \quad (2.142)$$

El primer término ya fue calculado, haciendo uso de un multiplicador de Lagrange. Es instructivo calcularlo nuevamente de una manera diferente:

$$\begin{aligned} \delta T_n \int (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) (\partial_\mu g) d^2x &= \\ &= T_n \int d^2x \left[ -\partial_\mu (\bar{g}^{-1} \delta g \bar{g}^{-1}) \delta g^M - \bar{g}^{-1} (\partial_\mu g) \bar{g}^{-1} (\delta^M \delta g) \right] \end{aligned}$$

Derivando en cada término, integrando por partes y usando la propiedad cíclica de la traza, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \hat{S} &= \frac{1}{4\lambda^2} T_n \int d^2x \left[ 2 \bar{g}^{-1} \delta g \delta^M (\bar{g}^{-1} \partial_\mu g) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}^{-1} (\partial_\mu g) (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) \delta g - (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) (\delta^M g) \bar{g}^{-1} \delta g \right] \end{aligned}$$

Usando repetidamente la propiedad (2.129) se ve que los dos últimos términos se cancelan y se obtiene:

$$\delta \hat{S} = \frac{1}{2\lambda^2} T_n \int d^2x \bar{g}^{-1} \delta g \delta^M (\bar{g}^{-1} \partial_\mu g) \quad (2.143)$$

En cuanto al término tipo Wess-Zumino, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma = & \frac{-1}{24\pi} \int d^3x \varepsilon^{ijk} T_n \left\{ \delta \bar{g}^{-1} (\partial_i g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \right. \\ & + \bar{g}^{-1} (\partial_i \delta g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \bar{g}^{-1} (\partial_i g) (\partial_j \delta \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \\ & \left. + \bar{g}^{-1} (\partial_i g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k \delta g \right\} \end{aligned}$$

Integrando por partes y considerando cuidadosamente los términos de superficie se encuentra:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma = & -\frac{1}{8\pi} \int d^2x T_n \left[ \varepsilon^{\mu\nu} \bar{g}^{-1} \delta g \partial_\mu (\bar{g}^{-1} \partial_\nu g) \right] + \\ & + \frac{1}{24\pi} \int d^3x T_n \left[ \varepsilon^{ijk} \bar{g}^{-1} \delta g \bar{g}^{-1} \left( (\partial_i g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \right. \right. \\ & \left. \left. - (\partial_k g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_i g - (\partial_j g) (\partial_k \bar{g}^{-1}) \partial_i g - (\partial_k g) (\partial_i \bar{g}^{-1}) \partial_j g \right) \right] \end{aligned}$$

Usando las propiedades de simetría del tensor  $\varepsilon^{ijk}$  es fácil verificar que la contribución de "volumen" se cancela. Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{2\lambda^2} T_{\mathcal{R}} \int d^2x \bar{g}^{-1} \delta g \partial^\mu (\bar{g}^{-1} \partial_\mu g) + \\ & - \frac{m}{8\pi} T_{\mathcal{R}} \int d^2x \bar{g}^{-1} \delta g \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (\bar{g}^{-1} \partial_\nu g) \end{aligned} \quad (2.144)$$

y la ecuación de movimiento correspondiente es

$$\left(1 + \frac{m\lambda^2}{4\pi}\right) \partial_- (\bar{g}^{-1} \partial_+ g) + \left(1 - \frac{m\lambda^2}{4\pi}\right) \partial_+ (\bar{g}^{-1} \partial_- g) = 0 \quad (2.145)$$

Vemos que para  $\lambda^2 = (4\pi)/n$ , se obtiene la ecuación de conservación correcta, (2.126):

$$\partial_- J_+ = 0$$

Es fácil mostrar que esta ecuación conduce automáticamente a

$$\partial_+ J_- = 0$$

En efecto, de acuerdo a (2.131):

$$J_+ \propto \bar{g}' \partial_+ g$$

$$J_- \propto g \partial_- \bar{g}'$$

donde el factor de proporcionalidad es el mismo para ambas corrientes (lo omitimos aquí por comodidad). Entonces se verifica:

$$\begin{aligned} \partial_+ J_- &= \partial_+ (g \partial_- \bar{g}') = -\partial_+ ((\partial_- g) \bar{g}') \\ &= -(\partial_+ \partial_- g) \bar{g}' - (\partial_- g) (\partial_+ \bar{g}') = \\ &= -\partial_- (g \bar{g}' \partial_+ g) \bar{g}' - (\partial_- g) (\partial_+ \bar{g}') = -g (\partial_- J_+) \bar{g}' \end{aligned} \tag{2.146}$$

Luego,

$$\partial_+ J_- = 0 \iff \partial_- J_+ = 0$$

Queda así demostrado que la acción bosónica del modelo sigma no lineal, ecuación (2.141), con  $\lambda^2 = (4\pi)/n$ , reproduce exactamente las ecuaciones de movimiento que se derivan del modelo de fermiones libres sin masa, dado por la ecuación (2.121). Notemos que, siendo  $\lambda^2 > 0$ , neces-

riamente  $n$  es un entero positivo. ( En el caso en que  $n < 0$  se encuentra la ecuación "conjugada por paridad" :

$\partial_+(g^{-1} \partial_- g) = 0$ , que tiene lugar para  $\lambda^2 = -(4\pi)/n$  ). En el caso considerado,  $\lambda^2 = (4\pi)/n$ , las ecuaciones de movimiento de la teoría se pueden resolver en forma cerrada. La solución general para  $g$  es:

$$g(x^+, x^-) = F(x^-) G(x^+) \quad (2.147)$$

donde  $F(x^-)$  y  $G(x^+)$  son funciones arbitrarias de una variable que toman valores sobre  $O(N)$ . Se puede verificar que en (2.147) el ordenamiento, en cuanto a la dependencia funcional con  $x^+$  y  $x^-$  no es arbitrario. ( La factorización  $g(x^+, x^-) = G(x^+) F(x^-)$  corresponde al caso  $\lambda^2 = -(4\pi)/n$  ). La ecuación (2.147) tiene una interpretación física simple: los componentes quirales de la teoría conservan su independencia recíproca, ambos paquetes de ondas ( "left-moving" y "right moving" ) se propagan, pasando uno a través del otro sin que se produzca ninguna interferencia. Esta propiedad, deducida directamente del modelo sigma no lineal ( para  $\lambda^2 = (4\pi)/n$  ), termina por confirmar el procedimiento de bosonización no abeliana -al menos para fermiones libres no masivos- al reproducir de manera consistente el comportamiento de las partículas fermiónicas, cuyas componentes "left" y "right" son los autoestados de quiralidad. Es importante notar que E.Witten (8) mostró al orden de un lazo y conjeturó a todo orden de la teoría de perturbaciones que

la función  $\beta$  de Callan-Symanzik tiene un cero para  $\lambda^2 = (4\pi)/n$  de manera que para este valor particular de  $\lambda$  se recupera la invarianza conforme de la teoría libre de fermiones sin masa. Más recientemente, de Alvis dio una prueba a todos los órdenes (13).

En principio, el método descrito podría extenderse a teorías en interacción por medio de un desarrollo perturbativo.

Bibliografia

- (1) S.Mandelstam, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 3026.
- (2) J.A.Swieca, Fortschr. Phys., 25 , (1977), 303.
- (3) J.Frölich, Phys. Rev. Lett., 34 , (1975), 833.
- (4) I.Belvedere, J.Swieca, K.Rothe and B.Schroer, Nucl. Phys. B, 153 , (1979), 112.
- (5) B.Baluni, Phys. Lett. B, 90 , (1980), 407.
- (6) P.J.Steinhardt, Nucl. Phys. B, 106 , (1980), 100.
- (7) D.Amati and E.Rabinovici, Phys. Lett. B, 101 , (1981), 407.
- (8) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.
- (9) E.Witten, Nucl. Phys. B, 223 , (1983), 433..
- (10) J.Wess and B.Zumino, Phys. Lett. B, 37 , (1971), 95.
- (11) R.E.Gamboa Saravi, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.
- (12) A.M.Polyakov and P.Wiegmann, Phys. Lett. B, 131 , (1983), 121.
- (13) S.P.de Alvis, Phys. Lett. B, 164 , (1985), 67.