CAPITULO 3

BOSONIZACION EN EL MARCO DE LA INTEGRAL FUNCIONAL

3.1. Introducción

La equivalencia entre modelos fermiónicos y bosónicos en dos dimensiones fue descubierta estudiando teorías abelianas, en el marco operacional. Sólo recientemente pudo extenderse este resultado a teorías con simetrías no abelianas, y aún en este caso, mediante el método operacional, los avances más significativos se han dado en el análisis de teorías libres (ver Capítulo 2). Por esta razón es importante dar con un método que permita obtener una comprensión más profunda de la bosonización en teorías abelianas y no abelianas, con términos de interacción no triviales. En especial estas últimas presentan el mayor interés, ya que son teorías de gauge no abelianas las que hoy se consideran más aptas para dar un marco unificado a todas las interacciones fundamentales de la materia.

En este capítulo se desarrolla el método de bosonización funcional, que ha permitido obtener algunos resultados ya conocidos para modelos abelianos y que también ha mostrado ser particularmente útil en el estudio de modelos que describen fermiones en interacción, con simetrías no abelianas. Los resultados presentados en este capítulo constituyen el aporte original de esta tesis.

La sección 3.2. contiene una descripción sucinta del método de integración funcional (1). Partiendo, por simplicidad, de una teoría de campos escalares libres, se define la medida de integración funcional a través de los coeficientes del desarrollo en serie de Bessel-Fourier para el campo escalar. Introduciendo variables de Grassman (anticonmutantes) se muestra la forma de generalizar el procedimiento al estudio de una teoría fermiónica (2). En ambos casos se asocia la integral funcional con el determinante del operador diferencial que se identifica en el término libre (cuadrático en los campos) del lagrangiano correspondiente.

En la sección 3.3. se obtiene la equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el Seno-Gordon, mediante el método funcional (3). La introducción de un campo vectorial auxiliar en la integral funcional del modelo fermiónico (4) permite eliminar el término de autointeracción (cuártico en los campos) y luego, la realización de un cambio quiral de variables en la medida de integración funcional desacopla a los fermiones del campo auxiliar, dando como resultado un lagrangiano efectivo, al que contribuye el jacobiano asociado al cambio de variables. Finalmente el tratamiento perturbativo del término de masa fermiónica conduce a una expresión general para cada término de la serie, que se coteja con la expresión correspondiente al desarrollo del modelo Seno-Gordon. De esta comparación surge la identidad entre ambas integrales funcionales, la fermiónica y la bosónica.

En la sección 3.4. se realiza un análisis similar para el modelo de Schwinger masivo. Se obtiene su equivalencia con un modelo Seno-Gordon masivo, y se discute la forma de incorporar el vacío θ en el contexto de la bosonización funcional.

En la sección 3.5. se extienden las técnicas anteriores al tratamiento de modelos no abelianos. Se estudia, como ejemplo, la Cromodinámica Cuántica bidimensional para fermiones sin masa, tomados en la representación fundamental de SU(N). Generalizando al caso no abeliano el cambio quiral en las variables fermiónicas de integración funcional, se muestra cómo, en analogía con el caso abeliano, los campos fermiónicos se desacoplan por completo del campo de gauge (5). El jacobiano asociado a la transformación quiral no abeliana aporta un término de Wess-Zumino a la acción bosónica equivalente. Este resultado sugiere una relación profunda con el caso libre, estudiado en la sección 2.4.. Sin embargo, a diferencia de aquel, ahora el lagrangiano bosonizado contiene contribuciones con derivadas de orden superior que provienen del término cinético correspondiente al campo de gauge. Al final de la sección se muestra la posibilidad de aplicar este método funcional en la bosonización de otras teorías fermiónicas bidimensionales con simetrías no abelianas.

En la sección 3.6. se utiliza el método de bosonización funcional desarrollado en las secciones anteriores, en el cálculo de corrientes fermiónicas. Se obtienen expresiones locales para las corrientes de la Cromodinámica Cuántica bidimensional, en términos de campos bosónicos. Los resultados son las extensiones naturales de los que ya se conocían para el modelo libre (6). Por último se presenta un método que permite hallar el álgebra de conmutadores que sa tisfacen dichas corrientes (7). El resultado obtenido -un álgebra tipo Kac-Moody,con derivadas covariantes en el término de Schwinger- guarda interesantes conexiones con los obtenidos previamente para otros modelos bidimensionales; la sección concluye con una discusión al respecto.

En un apéndice, al final del capítulo, se muestran los detalles más importantes en la evaluación del jacobiano asociado al cambio quiral de variables fermiónicas.

Bibliografía

(1) R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys,, 20 , (1948), 367.

(2) F.A.Berezin, "The Method of Second Quantization", Academic Press, New York, 1966.

(3) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.

(4) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.

(5) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.

(6) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 153 , (1985), 97.

(7) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 163 , (1985), 213.

3.2. Breve introducción al formalismo de la integral funcional

En este capítulo aplicaremos las técnicas de integraón funcional al problema de la bosonización de teorías cuáncas que describen diferentes interacciones de los campos ferónicos en dos dimensiones del espacio-tiempo. Antes de desaollar este proyecto, en las secciones siguientes, consideras de utilidad introducir algunos elementos generales sobre tegración funcional. Este método fue formulado por Feynman la década de 1940, a partir de una sugestión de Dirac acerde la posibilidad de representar amplitudes cuánticas de ansición en término de integrales de camino ("path-integral") ,2).

Consideremos una teoría de campos que por simplicidad maremos escalares ϕ con densidad lagrangiana $\mathcal{L}$. Se puede mostrar que la integral funcional (en espacio euclídeo)

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \; e^{-\int d^4x \left(\mathcal{L} + J\phi\right)} \qquad (3.1)$$

incide con la funcional generatriz de funciones de Green de Teoría Cuántica de Campos. Por derivación funcional respecde la fuente clásica J, pueden obtenerse todos los propagares de la teoría (3). Por ejemplo, la función de Green de s puntos se identifica con el siguiente valor medio:

$$\Delta_F(x,y) = \frac{1}{Z(J=0)} \left. \frac{\delta^2 Z(J)}{\delta J(y)\,\delta J(x)} \right|_{\substack{J(x)=0 \\ J(y)=0}} =$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}\phi \; \phi(x)\phi(y)\; e^{-\int d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi \; e^{-\int d^4x \mathcal{L}}} = \left\langle \phi(x)\phi(y) \right\rangle \qquad (3.2)$$

Evidentemente, las afirmaciones anteriores mantienen menos un punto oscuro en torno al significado del tipo de tegración involucrado. Esto puede aclararse si consideramos llamada "integración sobre todos los campos" (explicada por pov, por ejemplo, en sus conferencias del CERN) dándole un ntido preciso a la "medida de integración", $\mathcal{D}\phi$. Para esto nsideremos el desarrollo de Bessel-Fourier del campo ϕ :

$$\phi(x) = \sum_m c_m \varphi_m(x) \qquad (3.3)$$

nde el conjunto de todas las funciones φ_m forma una base mpleta que genera el espacio funcional. Las condiciones de ntorno impuestas a φ_m son por supuesto las mismas que satis ce ϕ .

En general las densidades lagrangianas que correspon- n a sistemas de interés físico son de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int.} \qquad (3.4)$$

nde $\mathcal{L}_0$ es la parte cuadrática en los campos que se identifi usualmente con el sistema libre y $\mathcal{L}_{int.}$ contiene los términos interacción (potencias superiores en los campos, acoplamien s derivativos, etc.). Para facilitar la discusión estudiemos principio, el caso libre. Si los campos se anulan en el in- nito siempre es posible escribir la acción libre en la for- :

$$\int d^4x \, \mathcal{L}_0 = \int d^4x \; \phi D \phi \qquad (3.5)$$

nde D es un cierto operador diferencial. Sin pérdida de neralidad, podemos elegir a $\{\varphi_m\}$ como el conjunto completo autofunciones del operador D , convenientemente normaliza s:

$$D \varphi_m = \lambda_m \varphi_m \qquad (3.6)$$

Así, la integral funcional -sin fuentes- resulta:

$$Z_0 = \int \prod_m dc_m \, e^{-\int d^4x \left(\sum_m c_m \varphi_m\right) D \left(\sum_m c_m \varphi_m\right)} = \int \prod_m dc_m \, e^{-\sum_m \lambda_m c_m^2} \qquad (3.7)$$

nde hemos escrito para $\mathcal{D}\phi$,

$$\mathcal{D}\phi = \prod_m dc_m \qquad (3.8)$$

decir, la integración se efectúa sobre todos los valores e toman los coeficientes del desarrollo (3.3), barriéndose esta manera todo el espacio funcional considerado. De esta ma, la expresión (3.7) se reduce a un producto de integra- gaussianas. Esto permite asociar a la integral funcional el determinante del operador D :

$$Z_0 = \mathcal{N}\,(\det D)^{-1/2} \qquad (3.9)$$

de $\mathcal{N}$ es una constante de normalización (generalmente infi- a).

La discusión anterior puede extenderse fácilmente al o de una teoría que describa el comportamiento de fermio- (4). En esta situación los campos cuánticos ψ y ψ^+ obe- en reglas de anticonmutación, por lo que en el correspon- nte desarrollo de Bessel-Fourier los coeficientes deberán elementos de un álgebra de Grassman. Procediendo en forma loga al caso bosónico, puede demostrarse que la integral cional

$$Z(\eta,\bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\; e^{-\int d^4x\left[\mathcal{L}(\bar{\psi},\psi)+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]} \qquad (3.10)$$

identifica con la funcional generatriz de las funciones de en de la Teoría Cuántica de Campos descripta por la densi- l lagrangiana $\mathcal{L}(\bar{\psi},\psi)$ (3). Las magnitudes η y $\bar{\eta}$ son fuen- clásicas anticonmutantes que permiten obtener las funcio- de correlación por derivación funcional. Como antes, se de aislar la parte libre del lagrangiano y poner de mani- sto el sentido de la medida de integración fermiónica. Los arrollos de Bessel-Fourier de los campos ψ y $\bar{\psi}$ (que en el rmalismo de la integral funcional son independientes), son:

$$\Psi(x) = \sum_m c_m \varphi_m(x) \qquad (3.11)\ a)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_m \bar{c}_m \varphi_m^+(x) \qquad (3.11)\ b)$$

nde los campos clásicos φ_m y φ_m^+ pueden ser tomados como au-
estados del operador diferencial que surge de la parte cua-
ítica del lagrangiano y los coeficientes c_m y $\bar{c}_m$ satisfacen
s condiciones correspondientes a un álgebra de Grassman de
nensión 2n:

$$c_m \bar{c}_{m'} + \bar{c}_{m'} c_m = 0 \qquad (3.12)\ a)$$

$$c_m c_{m'} + c_{m'} c_m = 0 \qquad (3.12)\ b)$$

$$\bar{c}_m \bar{c}_{m'} + \bar{c}_{m'} \bar{c}_m = 0 \qquad (3.12)\ c)$$

En términos de estos objetos la medida de integración
ıcional es:

$$\mathcal{D}\bar{\Psi}\,\mathcal{D}\Psi = \prod_m d\bar{c}_m\, dc_m \qquad (3.13)$$

ı las siguientes reglas de integración (4):

$$\int d\bar{c}_m = \int dc_m = 0 \qquad (3.14)\ a)$$

$$\int c_m \, dc_m = \int d\bar{c}_m \, \bar{c}_m = 1 \qquad (3.14)\ b)$$

e pueden derivarse considerando una teoría holomorfa (analí-
ca) del álgebra de Grassman e imponiendo condiciones de li-
alidad e invarianza traslacional a las integrales. Como ejem
o consideremos un álgebra de Grassman de grado dos, es decir
n dos generadores c y $\bar{c}$. En este caso la función holomorfa
s general es

$$f(c) = f_0 + f_1 c$$

las condiciones anteriores son

$$\int f(c)\, dc = \int f(c+b)\, dc$$

$$\int [f(c) + g(c)]\, dc = \int f(c)\, dc + \int g(c)\, dc$$

Luego,

$$\int f(c+b)\, dc = f_0 \int dc + \int f_1 c\, dc + \int f_1 b\, dc =$$

$$= \int f(c)\, dc + f_1 b \int dc = \int f(c)\, dc$$

Por lo tanto se verifica (3.14) a). Las identidades
.14) b) son condiciones de normalización.

Otra propiedad notable de los objetos anticonmutantes,
rivada de las anteriores, es que integrar y derivar respecto

ellos son operaciones equivalentes:

$$\frac{df}{dc} = f_1 = \int f(c)\, dc$$

La generalización de estos resultados a un álgebra de assman de grado 2n es simple. La única contribución no nula :

$$\int d\bar{c}_1 d\bar{c}_2 \cdots d\bar{c}_N\, \bar{c}_1 \cdots \bar{c}_N\, c_1 \cdots c_N\, dc_1 dc_2 \cdots dc_N = 1 \qquad (3.15)$$

Retomando la analogía con el caso bosónico, considere-s, por ejemplo, la integral funcional de un sistema de fer-ones sin masa en interacción con un campo externo A_μ :

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\; e^{-\int d^4x\, \bar{\psi} \not{D} \psi} \qquad (3.16)$$

nde $D_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$. Insertando el desarrollo (3.11) y la dida de integración fermiónica (3.13), se obtiene:

$$Z_F = \int \prod_m d\bar{c}_m dc_m\; e^{-\sum_m \lambda_m \bar{c}_m c_m} \qquad (3.17)$$

nde se usó, además, que

$$\not{D}\varphi_m = \lambda_m \varphi_m$$

$$\int \varphi_m^{+}(x)\, \varphi_k(x)\, d^4x = \delta_{mk}$$

Haciendo uso de (3.15), se encuentra

$$Z_F = N \lim_{k\to\infty} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_k = N \det \not{D} \tag{3.18}$$

nde N es una constante de normalización. Nuevamente hallamos a relación directa entre la integral funcional y el determinte de un operador diferencial. Sin embargo, a diferencia de fórmula bosónica (3. 9), el determinante fermiónico aparece evado a la potencia 1. Esto es consecuencia de otra propie-d curiosa de las variables anticonmutantes. Analicemos un e-mplo sencillo de cambio de variables en la integral de una nción analítica g(z), dependiente de una variable conmutati-:

$$I = \int g(z)\, dz$$

ente al cambio $z \dashrightarrow z' = \lambda z$, se tiene

$$I = \int g(z')\, J\, dz'$$

nde el jacobiano de la dilatación es

$$J = \frac{dz}{dz'} = \lambda^{-1}$$

Ahora estudiemos la misma transformación pero para la nción analítica f(c), dependiente de una variable anticonmu-nte:

$$I = \int f(c)\, dc = \int (f_0 + f_1 c)\, dc = f_1$$

Efectuando el cambio: $c \dashrightarrow c' = \lambda c$,se encuentra que

$$I = \int f(c') J \, dc' = \int f_1 \lambda^{-1} J \, c' \, dc' =$$

$$= f_1 \lambda^{-1} J = f_1$$

Por lo tanto, en este caso:

$$J = \lambda$$

Es decir que cuando las variables involucradas son anti_i_
nmutantes, el jacobiano se comporta en forma inversa.

Bibliografía

(1) P.A.M.Dirac, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, 3 , (1933), 64.

(2) R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys., 20 , (1948), 367.

(3) C.Itzykson and J.Zuber, "Quantum Field Theory", Mc.Graw-Hill, 1980.

(4) F.A.Berezin, "The Method of Second Quantization", Academic Press, New York, 1966.

3.3. Bosonización abeliana. Modelos Seno-Gordon y Thirring masivo.

En esta sección aplicaremos técnicas de integración funcional al problema de la bosonización del modelo de Thirring masivo. La equivalencia de este modelo fermiónico con un modelo Seno-Gordon, obtenida por Coleman (1) en el marco operacional, fue presentada en la sección 2.2.. Es interesante considerar nuevamente este problema a través de una herramienta matemática diferente cuya potencia permite reobtener resultados ya conocidos de manera particularmente simple para teorías abelianas, y, lo que es más importante, nos provee de un método que se extiende en forma natural al tratamiento de modelos con simetrías no abelianas.

De aquí en más trabajaremos en dos dimensiones euclídeas, con matrices de Dirac en la siguiente representación:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_5 = i \gamma_0 \gamma_1 \qquad (3.19)$$

verificando

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 \delta_{\mu\nu} \qquad (3.20)$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = i \varepsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu \qquad (3.21)$$

$\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1$.

Empezamos por considerar el modelo de Thirring masivo a dinámica está determinada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_T = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - \frac{1}{2} g^2 (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^2 + i Z m \bar{\Psi} \Psi \qquad (3.22)$$

de Z es una constante dependiente de un "cutoff". De acuer a la sección anterior, la integral funcional correspondien- a este sistema es

$$Z_T = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \, e^{-\int d^2x \, \mathcal{L}_T} \qquad (3.23)$$

de $\mathcal{N}$ es una cierta constante de normalización. El término autointeracción en (3.22), cuártico en los campos fermióni , puede eliminarse usando la siguiente identidad (2):

$$e^{\frac{g^2}{2}\int (\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi)^2 d^2x} = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{-\int d^2x \left[\frac{1}{2} A_\mu A^\mu + g \bar{\Psi} \not{A} \Psi\right]} \qquad (3.24)$$

de A_μ es un campo vectorial auxiliar de dos componentes -en dos dimensiones- puede escribirse en término de dos pos escalares, ϕ y η , en la forma:

$$A_\mu = -\frac{1}{g}\left(\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu \phi - \partial_\mu \eta\right) \qquad (3.25)$$

ma de una componente transversa y otra longitudinal).

Ahora podemos sustituir (3.24) en (3.23), haciendo el bio

$$\mathcal{D}A_\mu \equiv \mathcal{D}A_0\mathcal{D}A_1 \longrightarrow \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\eta \qquad (3.26)$$

o jacobiano asociado toma, en este caso, la siguiente for- simple:

$$J_A = \frac{1}{q^2} \det \nabla^2 \qquad (3.27)$$

Como J_A es independiente de los campos puede ser absor- o en el factor de normalización. Después de estas transfor- iones la integral funcional resulta:

$$Z_T = N\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\eta \, e^{-\int d^2x \tilde{\mathcal{L}}_{ef}} \qquad (3.28)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{ef} = \bar{\Psi}\left[i\not{\partial} - \gamma_\mu\left(\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi - \partial_\mu\eta\right)\right]\Psi + \\ + iZm\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2q^2}\left[(\partial_\mu\phi)^2 + (\partial_\mu\eta)^2\right] \qquad (3.29)$$

En este punto, haremos un cambio en las variables de egración fermiónicas, cambio que corresponde, en el lenguade la integral funcional, a la transformación de bosonizan tradicional, obtenida en el marco operacional (3-4) (Cfr. (2.61)). El cambio toma la forma

$$\Psi(x) = e^{\gamma_5 \phi(x) + i\eta(x)} \chi(x) \qquad (3.30)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\chi}(x)\, e^{\gamma_5 \phi(x) - i\eta(x)}$$

a sido elegido de modo tal que se cancele el acoplamiento re campos fermiónicos y campos escalares en el término ciico de $\tilde{\mathcal{L}}_{ef}$. Por esta razón, este tipo de cambio de varias suele llamarse cambio desacoplante. En efecto, usando las aciones (3.30) en (3.29) resulta:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{ef} = \bar{\chi}\, i\not{\partial}\chi + i\, z\, m\, \bar{\chi}\, e^{2\gamma_5\phi}\chi + \frac{1}{2g^2}\left[(\partial_\mu\phi)^2 + (\partial_\mu\eta)^2\right] \qquad (3.31)$$

Como vemos, la excitación longitudinal η se desacopla completo de los otros campos, hecho que se produce también ivel cuántico (salvo cuando hay presentes fuentes fermióni externas). Ahora se puede escribir la integral funcional en términos de las nuevas variables χ y $\bar{\chi}$. Por supuesto, sustitución correcta supone tener en cuenta el jacobiano ciado a la transformación

$$\Psi, \bar{\Psi} \longrightarrow \chi, \bar{\chi} \;, \qquad (3.32)$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi = J_F\, \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi$$

Debido a la existencia de la llamada anomalía quiral anomalía axial) la medida de integración fermiónica no es ariante frente a transformaciones quirales y, como conse- ncia de este hecho, el jacobiano fermiónico no es trivial. anomalía quiral entendemos la no conservación a nivel cuán o de la corriente asociada a la invarianza clásica del la- ngiano (3.22) con m = 0, frente a cambios quirales de la ma $\psi \to e^{\alpha\gamma_5}\psi$, $\bar\psi \to \bar\psi e^{\alpha\gamma_5}$ (5).

El jacobiano se puede evaluar siguiendo el método de ikawa (6-7); los detalles del cálculo se presentan en un a- dice, al final del capítulo. Aquí nos limitamos a escribir resultado:

$$J_F = e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2x\,(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)} \qquad (3.33)$$

Como vemos, se obtiene una contribución a la parte ci- ica de la acción efectiva para el campo ϕ . No hay ninguna va contribución a la dinámica del campo η , que resulta com tamente desacoplado. Por este motivo la integral en η se orbe enteramente en la constante de normalización, ya que contiene ninguna información relevante sobre la interacción miónica. Luego, se tiene

$$Z_T = N\int \mathcal{D}\bar\chi\,\mathcal{D}\chi\,\mathcal{D}\phi\ \exp\Big\{-\int d^2x\,\cdot \qquad (3.34)$$

$$\cdot\Big[\bar\chi\,(i\not\partial + i z m e^{2\gamma_5\phi})\chi + \Big(\frac{1}{2g^2}+\frac{1}{2\pi}\Big)(\partial_\mu\phi)^2\Big]\Big\}$$

Como se discutió en la sección anterior, también ahora
dición de un término de fuentes permite calcular, por deri-
ón, cualquier función de Green fermiónica en función de los
os campos (2). Sin embargo, esto no es necesario para pro-
la equivalencia entre este modelo y el modelo Seno-Gordon.
poner de manifiesto tal equivalencia es conveniente efec-
un desarrollo perturbativo en la masa (8):

$$Z_T = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\bar{\chi}\, \mathcal{D}\chi \left\{ e^{-\int d^2x \left[\bar{\chi} i \not\partial \chi + \frac{1}{2\lambda^2}(\partial_\mu \phi)^2 \right]} \cdot \right. \tag{3.35}$$

$$\left. \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iZm)^m}{m!} \prod_{j=1}^{m} \int d^2x_j\, \bar{\chi}(x_j)\, e^{2\gamma_5 \phi(x_j)} \chi(x_j) \right\}$$

e

$$\lambda^2 = \frac{g^2}{1 + g^2/\pi} \tag{3.36}$$

Utilizando la definición de valor medio introducida en
ección 3.2. (tomando una normalización adecuada) resulta:

$$Z_T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iZm)^m}{m!} \left\langle \prod_{j=1} \int d^2x_j\, \bar{\chi}(x_j) e^{2\gamma_5 \phi(x_j)} \chi(x_j) \right\rangle_0 \tag{3.37}$$

e $\langle\ \rangle_0$ significa valor medio de expectación en el vacío,
espondiente a una teoría de fermiones libres y escalares
es, sin masa. El propagador asociado al campo escalar está
por:

$$\frac{1}{\lambda^2}\,\Box\,\Delta_F(x) = \delta^2(x) \qquad ((3.38)\ a)$$

ı solución es:

$$\Delta_F(x) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\,\ln a|x| \qquad (3.38)\ b)$$

le a es una constante con dimensiones de masa. Con el objeto ›vitar las divergencias infrarrojas que presenta la solución ›8) b), seguimos el procedimiento usual que consiste en agre una pequeña masa μ en la ecuación (3.38) a) :

$$\Box \longrightarrow \Box + \mu^2$$

En lugar de (3.38) b), encontramos ahora que el propaga- escalar es proporcional a la función de Bessel modificada ›rden cero (9):

$$\Delta_F(x) = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\,K_0(\mu|x|) \qquad (3.39)$$

Por supuesto, al final de los cálculos se debe tomar el ıte μ ---> 0 :

$$\lim_{\mu x \to 0} K_0(\mu|x|) = -\ln \mu c|x|$$

c = $\frac{e^{\gamma}}{2}$ (γ es la constante de Euler, ver fórmula (2.27) b)).

Desarrollaremos una teoría de perturbaciones -con la ma-

ermiónica como parámetro perturbativo- alrededor del mode-
ibre de fermiones sin masa. El propagador fermiónico está
por:

$$-i \not{\partial}_x G_F(x) = \delta^2(x) \qquad (3.40)$$

G_F puede obtenerse fácilmente, en el caso no masivo, a
ir de la función de Green del campo escalar. En efecto, en
dimensiones se verifica la siguiente identidad:

$$-\Box = -\partial_\mu \partial_\mu = i\not{\partial}\, i\not{\partial}$$

lo tanto, la ecuación (3.38) puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{\lambda^2} \Box \Delta_F(x) = \delta^2(x) = -\frac{1}{2\pi} i\not{\partial}\, i\not{\partial} \ln a|x| = \qquad (3.41)$$

$$= -\frac{i}{2\pi} i\not{\partial} \frac{\gamma_\mu x_\mu}{|x|^2}$$

Luego, comparando (3.40) y (3.41) se tiene:

$$G_F(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{\gamma_\mu x_\mu}{|x|^2} \qquad (3.42)$$

Para calcular explícitamente (3.37) es conveniente facto-
ar las contribuciones fermiónicas y bosónicas, escribiendo:

$$\bar{\chi}\, e^{2\gamma_5 \phi} \chi = e^{2\phi} A_+ + e^{-2\phi} A_- \qquad (3.43)$$

de

$$A_{\pm} = \bar{\chi}\ \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\ \chi \qquad (3.44)$$

De aquí en más los pasos a seguir son paralelos a los criptos en la sección 2.2.. El primero es la obtención de fórmula análoga a la que se deriva a partir del teorema de k en la formulación operacional (Ec. (2.26)). En el contexde la integral funcional esto se logra considerando el siente valor medio:

$$\left\langle e^{-\int d^2x\, J\phi} \right\rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}\phi\ e^{-\int d^2x\left(-\frac{1}{2}\phi\Box\phi + J\phi\right)}}{\int \mathcal{D}\phi\ e^{-\int d^2x\left(-\frac{1}{2}\phi\Box\phi\right)}} = \frac{Z(J)}{Z(0)} \qquad (3.45)$$

de J es una fuente clásica externa. Realizando,en el numeor de (3.45) el cambio $\phi \dashrightarrow \phi + \phi_0$, cuyo jacobiano asodo es igual a 1 (- ϕ_0 es una trayectoria fija en el espacio cional-), y eligiendo adecuadamente a ϕ_0 , se obtiene:

$$\left\langle e^{-\int J(x)\phi(x)d^2x} \right\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint d^2x\, d^2y\, J(x)\, \Box^{-1}(x,y)\, J(y)\right\} \qquad (3.46)$$

Nos interesa aplicar esta identidad al caso:

$$J(x) = -i \sum_j \beta_j\, \delta^2(x-x_j) \qquad (3.47)$$

El resultado es:

$$\left\langle e^{i\sum_i \beta_i \phi(x_i)} \right\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j}\beta_i\beta_j\left[\Delta_F\left(\mu|x_i-x_j|\right)-\Delta_F\left(\Lambda|x_i-x_j|\right)\right]\right\} = \tag{3.48}$$

$$= \left(\frac{\mu}{\varsigma}\right)^{\frac{\lambda^2}{4\pi}\left(\sum_i\beta_i\right)^2} \left(\frac{\varsigma}{\Lambda}\right)^{\frac{\lambda^2}{4\pi}\sum_i\beta_i^2} \prod_{i>j}\left(\varsigma c|x_i-x_j|\right)^{\frac{\lambda^2}{2\pi}\beta_i\beta_j}$$

ıde Λ es una gran masa que da cuenta de las divergencias ul aviolетas de la teoría y ς es una masa que se asocia al or- ı normal de la teoría (Es fácil comprobar que el resultado depende explícitamente de ς . Cfr. la discusión previa a la . (2.42)). Para obtener (3.48) nos hemos restringido a la re ón determinada por:

$$\Lambda|x_i - x_j| >> 1 \tag{3.49}$$

$$\mu|x_i - x_j| << 1 \tag{3.50}$$

Esta última condición es necesaria para evitar los pro- əmas infrarrojos típicos de una expansión perturbativa -con a masa como parámetro del desarrollo- alrededor de una teo- a con masa nula (1). La primera condición, justificada por carácter regulador de Λ (al final de los cálculos se pasa límite $\Lambda \dashrightarrow \infty$), nos permite simplificar la expresión .48),haciendo uso del comportamiento asintótico de la fun- ón de Bessel, para valores grandes del argumento.

A través de la fórmula (3.48) reobtenemos el resultado

.42). En efecto, si $\sum_i \beta_i \neq 0$, la expresión se anula en el
mite $\mu \dashrightarrow 0$, por lo que, de aquí en más restringiremos nues
o análisis al caso

$$\sum_i \beta_i = 0 \tag{3.51}$$

Como antes, esta condición simplifica notablemente el
lculo explícito de la serie perturbativa. Para comprobar es-
afirmación es instructivo escribir nuevamente (3.37) usando
.43), y considerar, como ejemplo, los primeros términos de
serie:

$$Z_T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iz m)^m}{m!} \left\langle \prod_{j=1}^{m} \int d^2x_j \left[e^{2\phi(x_j)} A_+(x_j) + e^{-2\phi(x_j)} A_-(x_j) \right] \right\rangle_0 =$$

$$= 1 + (-iz m) \int d^2x \left[\left\langle e^{2\phi(x)} A_+(x) \right\rangle_0 + \left\langle e^{-2\phi(x)} A_-(x) \right\rangle_0 \right] + \tag{3.52}$$

$$\frac{(-iz m)^2}{2} \iint d^2x\, d^2y \left\langle \left[e^{2\phi(x)} A_+(x) + e^{-2\phi(x)} A_-(x) \right] \cdot \left[e^{2\phi(y)} A_+(y) + e^{-2\phi(y)} A_-(y) \right] \right\rangle_0 + \cdots$$

En primer lugar observamos que el término de orden m
anula, ya que corresponde a $\sum_i \beta_i = \pm 2i \neq 0$. Más aún,
ngún término correspondiente a una potencia impar de m pue-
contribuir a la serie, porque no se puede tener, en ese ca-
, $\sum_i \beta_i = 0$. La primera contribución no trivial proviene enton-
s del término de orden m^2:

$$(-i z m)^2 \iint d^2x\, d^2y \Big\langle e^{2[\phi(x)+\phi(y)]} A_+(x)A_+(y) + e^{-2[\phi(x)+\phi(y)]} A_-(x)A_-(y) +$$

(3.53) a)

$$+ e^{2[\phi(x)-\phi(y)]} A_+(x)A_-(y) + e^{-2[\phi(x)-\phi(y)]} A_-(x)A_+(y) \Big\rangle_0$$

A su vez, sólo los dos últimos términos de (3.53) a) verifican $\sum_i \beta_i = 0$, de modo que la forma final es

$$(-i z m)^2 \iint d^2x\, d^2y \Big\langle e^{2[\phi(x)-\phi(y)]} A_+(x) A_-(y) \Big\rangle_0 \qquad (3.53)\ b)$$

Extendiendo este análisis a los términos de orden superior (1)-(8), se encuentra

$$Z_T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i z m)^{2k}}{(k!)^2} \int \left(\prod_{i=1}^{k} d^2x_i\, d^2y_i \right) \cdot$$

(3.54)

$$\cdot \left\{ \Big\langle e^{2\sum_i [\phi(x_i)-\phi(y_i)]} \Big\rangle_{0\ \text{bos.}} \Big\langle \prod_{i=1}^{k} A_+(x_i) A_-(y_i) \Big\rangle_{0\ \text{ferm.}} \right\}$$

Para resolver la parte fermiónica, es conveniente escribir los campos en la forma:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{\chi} = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_1 & \bar{\chi}_2 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A_+(x_i) &= \bar{\chi}_1(x_i)\,\chi_1(x_i) \\ A_-(y_i) &= \bar{\chi}_2(y_i)\,\chi_2(y_i) \end{aligned} \tag{3.56}$$

Usando la forma explícita del propagador fermiónico dado por la ec. (3.42)) -teniendo en cuenta las contracciones de los campos- en el valor medio fermiónico, y aplicando (3.48) para la parte bosónica, finalmente resulta (1)-(8) :

$$Z_T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{2k}}{(k!)^2} \int \left(\prod_{i=1}^{k} d^2x_i\, d^2y_i \right) \cdot \tag{3.57}$$

$$\cdot \frac{\prod_{i>j}^{k} \left[(\rho c)^2 |x_i - x_j|\,|y_i - y_j| \right]^{2 - \frac{2\lambda^2}{\pi}}}{\prod_{i,j}^{k} \left(\rho c\, |x_i - y_j| \right)^{2 - \frac{2\lambda^2}{\pi}}}$$

donde el factor Z^{2k} ha sido reemplazado en términos de Λ.

Ahora vamos a comparar este resultado con la expresión correspondiente al modelo Seno-Gordon. La integral funcional para este modelo está dada por:

$$Z_{SG} = N \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ - \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos\beta\varphi + \gamma_0 \right] \right\} \tag{3.58}$$

Efectuando un desarrollo perturbativo, tomando a $\frac{\alpha_0}{\beta^2}$ co
parámetro de la expansión, se obtiene:

$$\mathcal{Z}_{SG} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0/\beta^2)^{2k}}{(k!)^2} \left\langle \int \prod_{i=1}^{k} e^{i\beta\varphi(x_i)} e^{-i\beta\varphi(y_i)} d^2x_i d^2y_i \right\rangle_0 \qquad (3.59)$$

nde se ha usado la propiedad (3.51), desechando aquellas con
ibuciones que no verifican $\sum \beta_i = 0$. Para calcular el valor
dio bosónico de (3.59), procedemos de la misma forma en que
hicimos para tratar la parte bosónica del modelo de
irring. Utilizando (3.48) se tiene (1)-(8) :

$$\mathcal{Z}_{SG} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\beta^2)^{2k}}{(k!)^2} \int \left(\prod_{i=1}^{k} d^2x_i \, d^2y_i \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\prod_{i>j}^{k} \left[(cM)^2 |x_i - x_j| |y_i - y_j| \right]^{\beta^2/2\pi}}{\prod_{i,j}^{k} \left(cM |x_i - y_j| \right)^{\beta^2/2\pi}} \qquad (3.60)$$

nde se ha definido la constante renormalizada:

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha_0 \left(\frac{M}{\Lambda} \right)^{\beta^2/4\pi} \qquad (3.61)$$

Como antes, Λ es una masa utilizada como "cutoff" y M
una masa arbitraria asociada a las singularidades de la teo
a escalar cuando se consideran contracciones de los campos

n un mismo punto.

Comparando las expresiones (3.57) y (3.60), resulta evidente que ambas integrales funcionales coinciden si se satisfacen las siguientes identidades:

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + g^2/\pi} \tag{3.62}$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = m \tag{3.63}$$

$$M = \rho \tag{3.64}$$

ue son, por supuesto, las mismas obtenidas por Coleman en su trabajo original (1) (Cfr. ecs. (2.55)-(2.57)).

Concluimos entonces que es posible, también en el marco de la integral funcional, estudiar el modelo de Thirring masivo en términos del lagrangiano bosónico que corresponde al modelo Seno-Gordon. Esto equivale a establecer las relaciones de bosonización usuales:

$$i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 \tag{3.65}$$

$$imz\bar{\Psi}\Psi \equiv -\frac{\alpha_0}{\beta^2}\cos\beta\varphi \tag{3.66}$$

Bibliografía

(1) S.Coleman, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 2088.

(2) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 ,(1982), 159.

(3) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.

(4) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 , (1981), 558.

(5) S.Adler, Phys. Rev., 177 , (1969), 2426.
J.Bell and R.Jackiw, Nuovo Cimento A, 60 , (1969), 47.

(6) K.Fujikawa, Phys. Rev. Lett., 42 , (1979), 1195.

(7) K.Fujikawa, Phys. Rev. D, 21 , (1980), 2848.

(8) C.M.Naón; Phys. Rev. D, 11 , (1985), 2035.

(9) M.Abramowitz and Irene A.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, New York, 1972.

3.4. Bosonización abeliana. El modelo de Schwinger masivo.

En la sección 2.3. discutimos el trabajo de Lowenstein Swieca sobre el modelo de Schwinger, para fermiones sin ma- (1). La rotura de simetría quiral, observada en la naturaza, sirvió de motivación para estudiar de qué manera se ve 'ectado el procedimiento de bosonización cuando se consideran rmiones masivos. Este análisis, que involucra el estudio de s diagramas de la teoría, nos condujo al resultado de leman, Jackiw y Susskind (2)-(3). El objetivo de esta sección llevar a cabo la bosonización del modelo de Schwinger masi-, utilizando las técnicas de integración funcional. La resoción de este problema constituye otro de los aportes originas de esta tesis (4)-(5). La densidad lagrangiana del modelo tá dada por:

$$\mathcal{L}_{SM} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} + e\not{A})\Psi + i m_0 \bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (3.67)$$

Partimos de la integral funcional

$$Z_{SM} = \mathcal{N}\int \mathcal{D}A_\mu\, \delta(\partial_\mu A_\mu)\, e^{-\int d^2x\, \mathcal{L}_{SM}} \qquad (3.68)$$

nde, por simplicidad adoptamos el gauge de Lorentz,

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \qquad (3.69)$$

como se hizo en la sección precedente para el modelo de
irring, efectuamos un cambio desacoplante en las variables
rmiónicas (4):

$$\Psi(x) = e^{\gamma_5 \phi(x)} \chi(x) \qquad (3.70)\ a)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\chi}(x)\, e^{\gamma_5 \phi(x)} \qquad (3.70)\ b)$$

nde el campo ϕ está ligado al campo de gauge A_μ a través
la relación

$$A_\mu = -\frac{1}{e}\, \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi \qquad (3.71)$$

En estas expresiones ϕ es un campo escalar (Cfr. ecuaones (2.61) y (2.62)), cuya dinámica pasaremos a describir. tes, conviene notar que el fijado de gauge ha eliminado (en te gauge) la componente longitudinal presente en (3.25), en caso en que A_μ era un campo vectorial auxiliar.

Como en todo cambio de variables, deben tenerse en cuen los jacobianos asociados. En este aspecto, el tratamiento difiere del realizado para el modelo de Thirring. El jacoano asociado a (3.71) no contribuye a la dinámica (se absor trivialmente en el factor de normalización), mientras que

jacobiano fermiónico está dado nuevamente por la expresión
.33) (ver apéndice). Su contribución a la acción efectiva
:

$$\int d^2x\, \mathcal{L}_{J_F} = \frac{1}{2\pi}\int \partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi\; d^2x$$

Por otro lado, el término cinético del campo de gauge
ma la forma

$$\frac{1}{4}\int d^2x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2e^2}\int \Box\phi\,\Box\phi\; d^2x$$

En definitiva, para la integral funcional (3.68), se ob
ene:

$$Z_{SM} = N\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{\chi}\,\mathcal{D}\chi\; e^{-\int d^2x\,\mathcal{L}_{ef.}} \qquad (3.72)$$

nde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef.} = \bar{\chi}\, i\not{\partial}\chi &+ \frac{1}{2e^2}\,\phi\,\Box\Box\,\phi \;+ \\ &- \frac{1}{2\pi}\,\phi\,\Box\,\phi + i m_o \bar{\chi}\, e^{2\gamma_5\phi}\chi\end{aligned} \qquad (3.73)$$

Ahora podemos seguir el procedimiento establecido en
sección anterior. En este caso el propagador escalar es,

ı apariencia, más complicado, debido a la presencia de deriva as de orden superior en el lagrangiano efectivo. Veremos, sin nbargo, que en realidad esta estructura simplifica notablemen las propiedades asintóticas de la función de Green bosónica. ı efecto, ésta queda determinada por:

$$-\left(\frac{1}{e^2}\Box\Box - \frac{1}{\pi}\Box\right)\tilde{\Delta}_F(x) = \delta^2(x) \qquad (3.74)$$

ıya solución es (5)-(6):

$$\tilde{\Delta}_F(x) = \frac{1}{2}\left[K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}x\right) + \ln\left(\frac{ec}{\sqrt{\pi}}|x|\right)\right] = $$

$$= -\pi\left[\Delta_F\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}, x\right) - \Delta_F(0,x)\right] \qquad (3.75)$$

modo que Δ_F corresponde al propagador de un campo escalar ibre de masa $e/\sqrt{\pi}$ y un campo libre sin masa. Esta última con- ribución está asociada a la excitación de masa nula que apa- ece en la solución de Lowenstein y Swieca para el modelo de hwinger sin masa (1). La fórmula (3.75) muestra claramente a propiedad asintótica antes aludida:

$$\lim_{x \to 0} \tilde{\Delta}_F(x) = 0$$

s decir que dada la forma particular del propagador, no apa- ecen divergencias ultravioletas. Contrariamente, las divergen ias infrarrojas son severas. Como es usual, este problema se ontrola introduciendo una masa μ y tomando el límite $\mu \to 0$,

l final de los cálculos. El procedimiento se continúa en es-
recha analogía con el desarrollado en la sección anterior,
or lo que obviaremos algunos detalles (ver ecs. (3.42)-(3.48))

Desarrollando la exponencial en (3.72) se tiene:

$$Z_{SM} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-im_0)^m}{m!} \left\langle \prod_{j=1}^{m} \int d^2x_j\, \bar{\chi}(x_j)\, e^{2\gamma_5 \phi(x_j)} \chi(x_j) \right\rangle_0 \qquad (3.76)$$

Usando una identidad similar a la (3.48):

$$\left\langle e^{i \sum_i \beta_i \phi(x_i)} \right\rangle_0 = e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_i \beta_j \tilde{\Delta}_F (x_i - x_j)} \qquad (3.77)$$

e pueden factorizar las contribuciones bosónicas y fermióni-
as. El resultado es:

$$Z_{SM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{2k}}{(k!)^2} \int \left(\prod_{i=1}^{k} d^2x_i d^2y_i \right) B_k\, F_k \qquad (3.78)$$

onde hemos redefinido la masa del fermión, $m = \frac{m_0}{2\pi}$ y, F_k y
$_k$ son los factores fermiónico y bosónico, respectivamente,
ados por

$$F_k = \frac{\prod_{i>j}^{k} |x_i - x_j|^2 \, |y_i - y_j|^2}{\prod_{i,j}^{k} |x_i - y_j|^2} \qquad (3.79)$$

$$B_k = \left(\frac{ec}{\sqrt{\pi}}\right)^{2k} \frac{\prod_{i>j}^{k} |x_i - x_j|^{-2} |y_i - y_j|^{-2}}{\prod_{i,j}^{k} |x_i - y_j|^{-2}} \cdot \tag{3.80}$$

$$\cdot \exp\left\{-2\sum_{i>j}\left(K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i-x_j|\right) + K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|y_i-y_j|\right) - K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i-y_j|\right)\right)\right\}$$

Vemos que la contribución proveniente de la excitación
ɜ masa nula cancela el factor correspondiente a la contribu-
ɩón de fermión libre. Así, se obtiene:

$$Z_{SM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{mec}{\sqrt{\pi}}\right)^{2k}}{(k!)^2} \int \left(\prod_{i=1}^{k} d^2x_i\, d^2y_i\right) \exp\left\{-2\sum_{i>j}\left[K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i-x_j|\right) + \right.\right. \tag{3.81}$$

$$\left.\left. + K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|y_i-y_j|\right) - K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i-y_j|\right)\right]\right\}$$

Ahora la equivalencia es inmediata. Es evidente que la
ɩtegral funcional (3.81) coincide con la del modelo Seno-
ɔrdon masivo con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) + \frac{e^2}{2\pi}\varphi^2 - \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta\varphi + \gamma \tag{3.82}$$

ɩ se hacen las siguientes identificaciones:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = m \frac{ec}{\sqrt{\pi}} \qquad (3.83)$$

$$\beta^2 = 4\pi \qquad (3.84)$$

Por supuesto, con este resultado, la bosonización del odelo de Schwinger para fermiones sin masa se obtiene toman-o $m = 0$ en (3.83); se establece así un isomorfismo entre es-e modelo fermiónico y una teoría de campos escalares libres on masa $e/\sqrt{\pi}$. (También está presente la excitación de gauge in masa, (1),(6-7)).

Para terminar esta sección estudiaremos la forma de in-orporar el vacío θ (8-9) en nuestro esquema de bosonización beliana. Como es sabido, el vacío θ puede estudiarse agregan-o a la densidad lagrangiana del modelo de Schwinger un térmi-o de la forma

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{e\,\theta}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad (3.85)$$

En principio, para la teoría sin masa, toda referencia θ puede eliminarse de la funcional generatriz por medio de na rotación quiral finita de los campos fermiónicos:

$$\Psi = e^{\alpha\gamma_5}\chi \quad , \quad \bar{\Psi} = \bar{\chi}\, e^{\alpha\gamma_5} \qquad (3.86)$$

Esta transformación da lugar al jacobiano (ver apéndice)

$$J = e^{\frac{\alpha e}{2\pi}\int \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\, d^2x} \tag{3.87}$$

Eligiendo $\alpha = \theta/2$, la contribución del jacobiano cance
a el término de vacío θ, ec.(3.85), y se verifica:

$$Z_{m=0}[\theta] = Z_{m=0}[0] \tag{3.88}$$

Por otro lado, cuando se calculan valores medios de can
idades que involucran operadores compuestos, la dependencia
n θ no puede eliminarse (10). Por ejemplo, para calcular la
antidad

$$\langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x)\,\bar{\Psi}(0)\Psi(0)\rangle \tag{3.89}$$

e debe agregar al lagrangiano un término de fuente:

$$Z_{m=0}[\theta, j] = \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\Psi}\,\mathcal{D}\Psi\; e^{-\int d^2x\left[\mathcal{L}_0 + \frac{e\theta}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j\bar{\Psi}\Psi\right]} \tag{3.90}$$

Si repetimos la rotación quiral (3.86) es claro que, en
ste caso, la dependencia en θ no desaparece. Se elimina el tér
ino (3.85) pero el vacío θ "reaparece" en el término de fuen-
e (11).

Ahora es evidente lo que ocurre en la teoría masiva. La rotación quiral elimina el "término θ" de $Z_m[\theta]$ a través del jacobiano (3.87), pero se produce un cambio en el término no de masa:

$$i m_0 \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \longrightarrow i m_0 \bar{\Psi}(x) e^{\gamma_5 \theta} \Psi(x) \tag{3.91}$$

De aquí en más se procede como en el caso θ = 0, efectuando las transformaciones (3.70) y (3.71), y luego haciendo el desarrollo perturbativo en la masa. El único cambio en el lagrangiano efectivo (3.73) es la presencia de un término de masa de la forma:

$$\mathcal{L}_m = i m_0 \bar{\chi} e^{2\gamma_5\left[\phi(x) + \frac{\theta}{2}\right]} \chi \tag{3.92}$$

El análisis prosigue exactamente como antes, con la única diferencia de que cambia el argumento del coseno en el modelo Seno-Gordon equivalente (Cfr. ec.(3.82)):

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{e^2}{2\pi}\varphi^2 - \frac{\alpha}{\beta^2}\cos\left[\beta\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right)\right] + \gamma \tag{3.93}$$

Este resultado está en acuerdo con el que se obtiene mediante el tratamiento usual del vacío θ en el modelo de Schwinger (3).

Bibliografía

(1) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann.Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.

(2) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys. (N.Y.), 93 , (1975), 267.

(3) S.Coleman, Ann.Phys. (N.Y.), 101 , (1976), 239.

(4) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 , (1981), 558.

(5) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.

(6) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl.Phys. B, 208 , (1982), 159.

(7) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.

(8) C.Callan, R.Dashen and D.Gross, Phys. Lett. B, 63 , (1976), 334.

(9) R.Jackiw and C.Rebbi, Phys. Rev. Lett., 37 , (1976), 172.

(10) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Phys. Lett. B, 183 , (1984), 145.

(11) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Ann. Phys. (N.Y.), 157 , (1984), 360.

3.5. Bosonización no abeliana: el método funcional.

En esta sección mostraremos la forma de extender el mé- ,odo de bosonización funcional, desarrollado en las secciones ınteriores, al caso de teorías con simetrías no abelianas. En .a sección 2.4. se hizo hincapié en las dificultades encontra- las al tratar de generalizar de manera "naive" los criterios le equivalencia entre fermiones y bosones -bien establecidos ın modelos abelianos bidimensionales (ver secciones 2.2. y !.3.)- a teorías cuyos grupos subyacentes son no conmutativos 1-3). También se estudió el procedimiento alternativo desarro .lado por Witten (4), mediante el método operacional. A partir le este trabajo y el de otros autores (5-10), se descubrieron :onexiones interesantes entre la bosonización no abeliana y la 'uncional de Wess-Zumino (10), que había sido construida origi ıalmente como una acción efectiva para las anomalías quirales.

En el contexto de los métodos funcionales, Gamboa Sara- 'í, Schaposnik y Solomin (11-12) pusieron de manifiesto cómo ıquella relación surge de un modo muy natural al extender el :ambio quiral de variables (3.30) o (3.70) al caso no abelia- ıo. De aquí en más aplicaremos esta técnica al problema de la ›osonización no abeliana.

Consideremos, como ejemplo, la Cromodinámica Cuántica ın dos dimensiones del espacio-tiempo para fermiones sin masa. ,a densidad lagrangiana euclídea para este modelo es:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \not{D} \Psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \text{términos que fijan el gauge.} \qquad (3.94)$$

nde $\not{D} = i \not{\partial} + e \not{A}$, y A_μ toma valores en el álgebra de Lie SU(2) (la extensión a SU(N) es simple). Los campos fermió-cos se toman en la representación fundamental de SU(2). En referencia (11) se introdujo el análogo no abeliano del mbio de variables desacoplante (3.70). En efecto, realizan-la siguiente transformación

$$\Psi = \mathcal{U}_5 \chi$$
$$\bar{\Psi} = \bar{\chi} \mathcal{U}_5 \qquad (3.95)$$

.

n

$$\mathcal{U}_5 = e^{\gamma_5 \phi} \qquad (3.96)$$

nde $\phi = \phi^a t^a$, es un campo escalar que toma valores en el ál-bra de Lie del grupo SU(2) (las matrices t_a, con a=1,2,3, n los generadores de SU(2)), es fácil verificar que el la-angiano fermiónico se desacopla por completo del campo de uge:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\Psi} \not{D} \Psi = \bar{\chi} i \not{\partial} \chi \qquad (3.97)$$

Aunque la ecuación (3.97) se verifica en un gauge arbi rario (basta para ello escribir, en lugar de (3.95), $\tilde{\mathcal{U}}_5 = e^{\gamma_5\phi + i\eta}$), es más simple e instructivo trabajar en el lla ado gauge desacoplante:

$$\not{A} = -\frac{i}{e}(\not\partial\, \mathcal{U}_5)\,\mathcal{U}_5^{-1} \qquad (3.98)$$

ntroducido por primera vez en la ref. (11). Nótese que la e- uación (3.98) se reduce a $A_\mu = -\frac{1}{e}\,\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi$ en el caso abe- iano, el gauge desacoplante coincide con el gauge de Lorentz ara el modelo de Schwinger.

La posibilidad de elegir el gauge desacoplante, es de- ir, la demostración de que la ecuación (3.98) define efecti- amente un gauge, fue establecida por Roskies (13) consideran o la complexificación del grupo SU(2), SL(2,C). En efecto, $\mathcal{U}_5$ uede tomarse como un elemento de la forma

$$\mathcal{U}_5 = e^{-ij\phi}$$

on $j = i\gamma_5$. Así, $\mathcal{U}_5$ es una matriz hermítica, definida positi a, con determinante igual a 1.

Para poder escribir la integral funcional de la teoría n términos de las nuevas variables, se debe tener en cuenta, omo en el caso abeliano, el cambio en la medida fermiónica e integración bajo la transformación (3.95):

$$\mathcal{D}\bar{\Psi}\,\mathcal{D}\Psi = J_F\,\mathcal{D}\bar{\chi}\,\mathcal{D}\chi \qquad (3.99)$$

En este punto es interesante notar que el jacobiano J_F oincide con el determinante fermiónico (ver sección 3.2.):

$$\det \not{D} = \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \; e^{-\int d^2x \, \bar{\Psi}\not{D}\Psi} = \tag{3.100}$$

$$= J_F \int \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi \; e^{-\int d^2x \, \bar{\chi} i\not{\partial}\chi} = J_F \det i\not{\partial}$$

En particular, como veremos más adelante, esta relaión permite hacer contacto con el estudio del modelo sigma o lineal realizado por Polyakov y Wiegmann (5).

En el cálculo de J_F se debe considerar una tranformaión $\mathcal{U}_5$ dependiente de un parámetro t, con $t \in [0,1]$:

$$\mathcal{U}_5(x,t) = e^{t\gamma_5 \phi(x)} \tag{3.101}$$

De esta manera, la transformación completa (3.96) se btiene por iteración a partir de la transformación infinitejimal, variando t entre 0 y 1. El método se ha desarrollado n las referencias (11),(12),(14),(15) y en nuestro apéndice. a como resultado

$$\ln J_F = -\frac{e^2}{2\pi} \int d^2x \, \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\not{A}\not{A} + \int_0^1 dt \, \gamma_5 \not{A}_t \phi \not{A}_t\right] = \tag{3.102}$$

$$= \frac{ie}{2\pi} \int_0^1 dt \int d^2x \, \mathrm{Tr}\left\{\left[\not{\partial}\not{A}_t - ie\not{A}_t\not{A}_t\right]\gamma_5 \phi\right\}$$

onde $\mathrm{Tr} \equiv \mathrm{tr}^{\mathrm{Lorentz}} \otimes \mathrm{tr}^{SU(2)}$ y

$$\not{A}_t = -\frac{i}{e}\left(\not{\partial}\, U_5(x,t)\right) U_5^{-1}(x,t) \qquad (3.103)$$

Para construir la funcional de Wess-Zumino a partir de 3.102) es conveniente escribir

$$A_\mu(t) = v_\mu(t) - \varepsilon_{\mu\nu}\, a_\nu(t) \qquad (3.104)$$

onde

$$v_\mu(t) = -\frac{i}{2e}\left((\partial_\mu e^{t\phi})\, e^{-t\phi} - e^{-t\phi}\partial_\mu e^{t\phi}\right) \qquad (3.105)\ a)$$

$$a_\mu(t) = \frac{1}{2e}\left[(\partial_\mu e^{t\phi})e^{-t\phi} + e^{-t\phi}\partial_\mu e^{t\phi}\right] \qquad (3.105)\ b)$$

Se pueden demostrar las siguientes identidades:

$$\partial_\mu\phi = e\,\frac{\partial a_\mu}{\partial t} + i\,e\,[v_\mu,\phi] \qquad (3.106)$$

$$\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - i\,e\,[v_\mu, v_\nu] = -i\,e\,[a_\mu, a_\nu] \qquad (3.107)$$

$$\partial_\mu a_\nu - ie\left[v_\mu, a_\nu\right] = \partial_\nu a_\mu - ie\left[v_\nu, a_\mu\right] \qquad (3.108)$$

Utilizando las identidades (3.1o4) y (3.107) en la e-
uación (3.102) se obtiene:

$$\ln J_F = \frac{e}{2\pi}\int_0^1 dt \int d^2x \, T_r \Big\{ \phi \Big[-ie\, \varepsilon_{\mu\nu} \left[a_\mu(t), a_\nu(t)\right] + \qquad (3.109)$$

$$+ \partial_\mu a_\mu(t) - ie\left[v_\mu(t), a_\mu(t)\right]\Big]\Big\}$$

El segundo término puede integrarse por partes para
uego utilizar la identidad (3.106):

$$T_r \int d^2x \, \phi \, \partial_\mu a_\mu(t) = - T_r \int d^2x \, (\partial_\mu \phi) \, a_\mu(t) =$$

$$(3.110)$$

$$= -e\, T_r \int d^2x \, \frac{\partial a_\mu(t)}{\partial t} a_\mu(t) - ie\, T_r \int d^2x \left[v_\mu, \phi\right] a_\mu(t)$$

Es fácil verificar que el último término de (3.110)
ancela al último término de (3.109), desapareciendo de esta
orma la dependencia explícita del jacobiano con respecto a
a componente longitudinal de A_μ. El resultado es:

$$\ln J_F = -\frac{e^2}{4\pi}\, Tr \int d^2x \int_0^1 dt\, \frac{d}{dt}\left[a_\mu(t)\, a_\mu(t)\right] + \tag{3.111}$$

$$-i\frac{e^2}{2\pi}\, Tr \int_0^1 dt \int d^2x\; \varepsilon_{\mu\nu}\, \phi(x)\left[a_\mu(t), a_\nu(t)\right]$$

Efectuando la integral en t, en el primer término, to-ando la traza correspondiente al grupo de Lorentz (tr $\mathbb{1} = 2$), haciendo uso de las siguientes identidades triviales:

$$e^{-t\phi}\, a_\mu(t)\, e^{t\phi} = \frac{1}{2e}\, e^{-2t\phi}\, \partial_\mu e^{2t\phi}$$

$$\phi = \frac{1}{2}\, e^{-2t\phi}\, \partial_t\, e^{2t\phi}$$

e encuentra:

$$\ln J_F = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\; tr^c\left[(\partial_\mu g_1^{-1})\, \partial_\mu g_1\right] + \tag{3.112}$$

$$-\frac{i}{4\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu}\int d^2x \int_0^1 dt\; tr^c\left[g_t^{-1}(\partial_t g_t)\, g_t^{-1}(\partial_\mu g_t)\, g_t^{-1}(\partial_\nu g_t)\right]$$

onde $g_t(x) = e^{2t\phi(x)}$ ($g_1 = g_{t=1}$, $g_0 = 1$).

El miembro derecho de (3.112) es la forma usual de la uncional de Wess-Zumino en dos dimensiones (12)-(16) (Cfr. ección 2.4.). Como es sabido, el término de Wess-Zumino po-

ee relevantes propiedades asociadas a la topología de la teo
ía en estudio, de modo que el método de bosonización que es-
amos analizando deja manifiesto el rol de la topología en la
quivalencia fermión-bosón hallada en modelos no abelianos bi
imensionales (Para mayores detalles ver ref.(12)). (Resulta
nteresante comparar el resultado (3.112) con la expresión a-
áloga obtenida por Witten (4), discutida en la sección 2.4.)

Por otro lado, como lo anticiparamos, la expresión
3.112) coincide con la solución del modelo sigma no lineal
btenida por Polyakov y Wiegmann (5). En nuestro caso, a dife
encia de los estudiados por Polyakov y Wiegmann y Witten, la
cción bosónica equivalente al modelo de partida, incluye la
ontribución del término $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$:

$$\int d^2x\, \mathcal{L}_{ef.} = \int d^2x \left[\bar{\chi} i \not{\partial} \chi + \frac{1}{4} Tr\left(F_{\mu\nu}(g) F_{\mu\nu}(g)\right)\right] + \ln J_F \tag{3.113}$$

onde

$$\frac{1}{4}\int d^2x\, Tr\left(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{4e^2}\int d^2x\, tr^c \left\{ \partial_\mu (g^{-1}\partial_\mu g) + i\, \epsilon_{\mu\nu}(\partial_\mu g^{-1})\partial_\nu g \right\}^2 \tag{3.114}$$

Con el objeto de dar una idea cualitativa de la dinámi
a gobernada por la acción (3.113) es útil considerar un desa
rollo de la forma

$$g = 1 + 2\phi^a t^a + O(\phi^2) \qquad (3.115)$$

En esta aproximación se tiene:

$$\ln J_F = -\frac{1}{2\pi}\int d^2x \, tr^c \left[(\partial_\mu \phi)\partial_\mu \phi + \frac{i}{3}\varepsilon_{\mu\nu}\phi(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi \right] \qquad (3.116)$$

y

$$-\frac{1}{2}\int d^2x \; tr^c (F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{e^2} tr^c \int d^2x \left[(\Box\phi)(\Box\phi) + \right. \qquad (3.117)$$

$$\left. + 2\phi\,(\Box\partial_\mu\phi)\,\partial_\mu\phi + i\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\phi\,\partial_\nu\phi\,\partial_\mu\phi \right]$$

Es interesante observar que la contribución del jacobiano, ec.(3.116), es muy similar a la acción efectiva considerada por Witten para describir la fenomenología de los hadrones a bajas energías (17-18). En nuestro caso, de la suma de ambas contribuciones resulta un lagrangiano efectivo, con términos que contienen derivadas de orden superior, cuya parte libre (Cfr. el caso abeliano, sección 3.4.) toma la forma:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{e^2} tr^c \left\{ \phi \left(\Box\Box - \frac{e^2}{2\pi}\Box \right) \phi \right\}$$

que corresponde a $N^2 - 1$ (para el grupo SU(2) se tiene $2^2 - 1 = 3$) campos escalares de masa $e/\sqrt{2\pi}$ y $N^2 - 1$ excitaciones de gauge sin masa. A diferencia del caso abeliano, en el que los campos bosónicos aparecían libres, ahora se tienen términos de autointeracción, dados por las partes no cuadráticas en (3.116) y (3.117). Siguiendo estas líneas, un análisis más detallado de este modelo fue desarrollado por H.Falomir y E.M.Santángelo (19).

Antes de concluir esta sección es oportuno enfatizar que el método funcional de bosonización, aplicado como ejemplo al caso de la Cromodinámica Cuántica en dos dimensiones, puede extenderse sin inconvenientes a otros modelos fermiónicos bidimensionales. En particular, mediante la generalización no abeliana de la identidad gaussiana (3.24) se puede estudiar el modelo de Thirring con simetría SU(N). En este caso se introduce un campo vectorial auxiliar no abeliano escribiendo:

$$e^{\frac{g^2}{2}\int d^2x\,(\bar\Psi\gamma_\mu\lambda^a\Psi)^2} = \int \mathcal{D}A^a_\mu \; e^{-\int d^2x\left[\frac{1}{2}A^a_\mu A^a_\mu - g\bar\Psi\gamma_\mu A^a_\mu\lambda^a\Psi\right]}$$

donde las matrices λ^a son los generadores del grupo SU(N) y los campos fermiónicos se toman en la representación fundamental de SU(N). La implementación de un cambio de variables en la medida de integración funcional permite desacoplar los fermiones del campo auxiliar, y el jacobiano correspondiente da lugar, como en el caso de QCD_2, a un término de Wess-Zumino. A partir del modelo de Thirring SU(N) también es factible el estudio del modelo de Gross-Neveu quiral con simetría SU(N), (14). En efecto, dado que su lagrangiano de interacción,

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{g^2}{4N}\left[(\bar{\Psi}\psi)^2 - (\bar{\Psi}\gamma_5\psi)^2\right]$$

uede escribirse, mediante una transformación "tipo Fierz" n la forma

$$\mathcal{L}_{int.} = -\frac{g^2}{2N}\left(\bar{\Psi}\gamma_\mu t^a \psi\right)^2$$

donde las matrices t^a son los generadores del grupo U(N)), a bosonización de este modelo puede llevarse a cabo utilizan lo las técnicas descriptas en este capítulo.

Bibliografía

(1) I.V. Belvedere, J.A.Swieca, K.D.Rothe and B.Schroer, Nucl. Phys. B, 153 , (1979), 112.

(2) B.Baluni, Phys. Lett. B, 90 , (1980), 407.

(3) P.J.Steinhardt, Nucl. Phys. B, 106 , (1980), 100.

(4) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.

(5) A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B, 131 , (1983), 121; 141 , (1984), 223.

(6) P.Di Vecchia, B.Durhuus and J.L.Petersen, Phys. Lett. B, 114 , (1984), 245.

(7) P.Di Vecchia and P.Rossi, Phys. Lett. B, 140 , (1984), 344.

(8) E.Abdalla and M.C.Abdalla, Nucl. Phys. B, 255 , (1985), 392.

(9) G.Bhattacharya and S.Rajeev, Nucl. Phys. B, 246 , (1984), 157.

(10) J.Wess and B.Zumino, Phys. Lett. B, 37 , (1971), 95.

(11) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E. Solomin, Nucl. Phys. B, 181 , (1981), 239.

(12) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E. Solomin, Phys. Rev. D, 30 , (1984), 1353.

(13) R.Roskies, Festschrift for Feza Gürsey's birthday,

(14) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.

(15) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Ann. Phys. (N.Y.), 157 , (1984), 360.

(16) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.

(17) E.Witten, Nucl. Phys. B, 233 , (1983), 422.

(18) E.Witten, Nucl. Phys. B, 233 , (1983), 433.

(19) H.Falomir and E.M.SAntángelo, Phys. Rev. Lett., 56 , (1986), 1659.

3.6. Corrientes fermiónicas: reglas de bosonización y álgebra de conmutadores

Al estudiar la equivalencia entre modelos fermiónicos y bosónicos obtenida mediante el método operacional, (ver Capítulo 2), comprobamos el rol central que desempeñan las corrientes fermiónicas en relación a la consistencia del procedimiento. En la sección 2.3., siguiendo el trabajo de Lowenstein y Swieca (1) sobre el modelo de Schwinger, se mostró la estrecha conexión existente entre la corriente fermiónica y el campo de gauge. Por otro lado, el esquema de bosonización no abeliana propuesto por Witten (2) se inicia en el estudio de las corrientes fermiónicas bosonizadas, ya conocidas en teorías abelianas, concluyendo con una prescripción adecuada para el caso no abeliano, después de un análisis cuidadoso de las ecuaciones de conservación que obedecen las corrientes en una teoría cuántica de campos fermiónicos libres (ver sección 2.4.). Todas estas investigaciones fueron desarrolladas utilizando el método operacional.

En el marco de la integral funcional, el trabajo de Fujikawa (3-5) sobre el tratamiento de las anomalías quirales, permitió el desarrollo de importantes avances en el estudio de modelos bidimensionales con simetrías abelianas y no abelianas (6-8). En particular Gamboa Saraví, Schaposnik y Solomin (7), mediante la implementación de un cambio quiral no abeliano en la medida de integración fermiónica, calcularon el determinante fermiónico de la QCD_2, sentando así las bases para un estudio sistemático de modelos no abelianos bidimensionales, mediante el método funcional (9-11). Por otra parte, Polyakov y Wiegmann (12) establecieron una conexión muy útil entre el modelo sigma no lineal y otros modelos puramente fermiónicos. Siguiendo estos trabajos ha sido posible obtener las reglas de bosonización y el álgebra de conmutadores de las corrientes fermiónicas en la Cromodinámica Cuántica bidimensional (13-15). (En la referencia (15) se sistematizan estos resultados y se extienden además, al cálculo del tensor de energía-momento). En esta sección discutiremos estos resultados.

Comenzamos por considerar nuevamente la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, tr^c\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \not{D} \Psi \qquad (3.118)$$

donde $\not{D} = i\not{\partial} + e\not{A}$, y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie\left[A_\mu, A_\nu\right] \qquad (3.119)$$

con $A_\mu = A^a_\mu t^a$ (Como en la sección anterior, las matrices t^a son los generadores del grupo SU(N) de color, que satisfacen $tr^c(t^a t^b) = \delta^{ab}$).

El valor medio cuántico de la corriente fermiónica está dado por:

$$J^a_\mu(x) = -\frac{1}{e}\frac{\delta}{\delta A^\mu_a(x)}\log Z_F[A] =$$

$$= -\frac{1}{e}\frac{\delta}{\delta A^\mu_a(x)}(\log\det \not{D}) = -\mathrm{Tr}\, t^a\gamma_\mu G(x,x) \tag{3.120}$$

donde G(x,y) es la función de Green fermiónica que satisface:

$$\not{D}(A)\, G(x,y) = \delta^2(x-y) \tag{3.121}$$

Por supuesto, la identidad (3.120) sólo tiene una significación formal, ya que involucra un producto de distribuciones en el mismo punto. Luego, para extraer el contenido físico de esta expresión es necesario regularizarla. A este fin utilizaremos, en primer lugar, el método de Schwinger (16), que preserva la invarianza de gauge mediante la introducción de un factor de fase en la forma:

$$J^a_\mu(x) = -\lim_{y\to x}\mathrm{Tr}\left[t^a\gamma_\mu G(x,y)\, e^{ie\int_x^y A_\nu(z)dz^\nu}\right] \tag{3.122}$$

Ahora veremos la forma en que el uso del <u>gauge desa-</u>

<u>coplante</u> (7),(9) resulta ser la clave que permite obtener una expresión cerrada para la corriente fermiónica a partir de (3.122). Proponemos el siguiente ansatz para la función de Green de los fermiones en interacción con el campo "gluónico" A_μ :

$$G(x,y) = e^{\gamma_5 \phi(x)} G_0(x,y)\, e^{\gamma_5 \phi(y)} \qquad (3.123)$$

donde $\phi = \phi^a\, t^a$ es un campo escalar y

$$G_0(x,y) = \frac{i}{2\pi} \gamma_\mu \frac{y_\mu - x_\mu}{(y-x)^2}$$

es la función de Green correspondiente a los fermiones libres ($i \not\partial G_0 = \delta$). Insertando (3.123) en la ecuación (3.121), se encuentra:

$$\not{D}_x G(x,y) = \delta^2(x-y) + \qquad (3.124)$$

$$+ \left[i\left(\not\partial e^{\gamma_5 \phi(x)}\right) + e \not{A}(x)\, e^{\gamma_5 \phi(x)} \right] G_0(x,y)\, e^{\gamma_5 \phi(y)}$$

de donde se desprende la validez del ansatz (3.123), si adoptamos el gauge desacoplante dado por:

$$\not{A}(x) = -\frac{i}{e}\left[\not{\partial}\, e^{\gamma_5 \phi(x)}\right] e^{-\gamma_5 \phi(x)} \tag{3.125}$$

Reemplazando (3.123) en (3.122) y llamando $\varepsilon_\mu = y_\mu - x_\mu$, se obtiene:

$$J^a_\mu(x) = -\frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Tr}\left\{ t^a \gamma_\mu \gamma_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon^2} \times e^{-\gamma_5 \phi(x)} e^{\gamma_5 \phi(x+\varepsilon)} \left(1 + i e\, \varepsilon_\rho A_\rho\right) \right\} \tag{3.126}$$

donde hemos sustituido el factor de fase por la expresión entre corchetes, lo cual se justifica por ser ε pequeño. Por la misma razón podemos desarrollar $e^{\gamma_5 \phi(x+\varepsilon)}$ y conservar solamente hasta el término de orden ε . Tomando luego la traza correspondiente a las matrices de Dirac y efectuando un límite simétrico ($\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu}{\varepsilon^2} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{2}$), el resultado es

$$J^a_\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \mathrm{tr}^c\left(t^a A_\mu(x)\right) + \frac{i}{4\pi} \mathrm{tr}^c\left(t^a \left[\partial_\mu e^{\phi(x)}, e^{-\phi(x)}\right]\right) - \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{4\pi} \mathrm{tr}^c\left(t^a \left[\partial_\nu e^{\phi}, e^{-\phi}\right]_+\right) \tag{3.127}$$

Ahora, como estamos trabajando en el gauge desacoplante, podemos hacer uso de la descomposición (ver ecs. (3.104) y (3.105)):

$$A_\mu = A_\mu^b t^b = v_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} a_\nu$$

donde

$$v_\mu = -\frac{i}{2e}\left[\partial_\mu e^{\phi}, e^{-\phi}\right]$$

$$a_\mu = \frac{1}{2e}\left[\partial_\mu e^{\phi}, e^{-\phi}\right]_+$$

Reemplazando en (3.127) se comprueba que la parte "longitudinal" del campo de gauge (v_μ) se cancela, y así resulta:

$$J_\mu^a(x) = -\frac{e}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu} a_\nu^a(x) \qquad (3.128)$$

ó bien

$$J_\pm(x) = -\frac{i}{4\pi}\left[g^{\pm 1/2}(x), \partial_\pm g^{\mp 1/2}(x)\right]_+ \qquad (3.129)$$

donde $J_\pm = J_0 \pm i\, J_1$ y $g(x) = e^{2\phi(x)}$ (Esta notación será de utilidad más adelante).

Este mismo resultado se puede obtener usando cualquier otro método de regularización invariante de gauge. Una alternativa interesante es la técnica basada en la función ζ de Riemann (17), mediante la cual se regulariza la funcional generatriz desde un principio y luego todas las magnitudes derivadas de ella resultan finitas. En efecto, la funcional generatriz es un determinante, es decir un producto de autovalores que al no estar acotado da como resultado una cantidad mal definida. En la referencia (17) se muestra que

$$Z_{reg}[A] = \exp\left[-\frac{d}{ds}\zeta(s,\not{D}(A))\right]\Bigg|_{s=0} \qquad (3.130)$$

donde ζ(s, D) es la función ζ de Riemann generalizada para el operador D (18). A partir de (3.130) se puede calcular la corriente fermiónica haciendo

$$J^{a}_{\mu\,reg}(x) = -\frac{1}{e}\frac{\delta}{\delta A^{\mu}_{a}(x)}\log Z_{reg}[A] \qquad (3.131)$$

El resultado es finito y coincide, por supuesto, con el obtenido mediante el método de Schwinger. Un aspecto importante de la técnica de la ζ de Riemann es que descansa sobre una base matemática rigurosa y unívoca (17-20) (por ejemplo, no requiere el uso de límites simétricos) y condu ce en forma automática a resultados finitos e invariantes de gauge.

Una de las características bienvenidas del resultado (3.128) radica en que la conservación covariante de la corriente es manifiesta: utilizando la identidad (3.108),

$$\mathcal{D}_\mu a_\nu = \mathcal{D}_\nu a_\mu$$

con $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ie[V_\mu,]$, es evidente que

$$D_\mu J_\mu = 0 \qquad (3.132)$$

donde

$$D_\mu = \mathcal{D}_\mu + ie\,\varepsilon_{\mu\nu}[a_\nu,] = \partial_\mu - ie[A_\mu,]$$

es la derivada covariante en la representación adjunta de SU(N).

Por otro lado, escribiendo

$$D_\pm = \partial_\pm - ie[A_\pm,]$$

con $A_\pm = A_0 \pm i A_1$, después de un poco de álgebra la ecuación (3.129) toma la forma:

$$\begin{aligned} J_+(x) &= -\frac{i}{4\pi}\, g D_+ g^{-1} \\ J_-(x) &= \frac{-i}{4\pi}\, g^{-1} D_- g \end{aligned} \qquad (3.133)$$

con g definida en (3.129), que es la extensión para el caso de una teoría que describe fermiones en interacción con un campo de gauge, de las reglas de bosonización dadas por Witten (2), para un modelo de fermiones libres (ver ecuación (2.125), sección 2.4.). (Obviamente, haciendo $A_{\pm}=0$ en (3.133), se recupera el resultado de Witten, salvo un factor de normalización). Un resultado similar se obtuvo en la ref. (21), siguiendo un procedimiento completamente diferente.

También es interesante hacer notar la estrecha relación que se verifica entre la corriente fermiónica y el campo de gauge, en analogía con el caso abeliano, aunque a diferencia de aquel, ahora la corriente no se identifica con el A_μ completo sino con su parte "transversal". Este resultado confirma la observación de Swieca (22) sobre la importancia de la relación $A_\mu \sim J_\mu$ en la comprensión de la equivalencia entre fermiones y bosones en dos dimensiones.

Una vez establecidas las reglas de bosonización de las corrientes fermiónicas, el paso natural es el de obtener el álgebra de conmutadores que satisfacen. Recientemente se han descubierto conexiones profundas entre el álgebra de corrientes fermiónicas -expresadas en términos de campos bosónicos- y la teoría cuántica de cuerdas (23-24). El hallazgo, en el caso de fermiones libres (equivalente por bosonización al modelo sigma no lineal (2-12)) de un álgebra de Kac-Moody, torna aún más interesante el estudio correspondiente a una teoría en interacción (14-15).

Según es tradicional en la literatura, las investigaciones sobre álgebra de conmutadores se presentan en el espacio de Minkowski, por lo tanto, de aquí en más trabajaremos en este espacio, con las matrices de Dirac que satisfacen

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2 g_{\mu\nu}$$

$$\gamma^\mu \gamma_5 = \varepsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu$$

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1$$

y la condición de gauge desacoplante dada por

$$A\!\!\!/ = -\frac{i}{e} \left(\partial\!\!\!/ e^{i\gamma_5 \phi} \right) e^{-i\gamma_5 \phi} \qquad (3.134)$$

Si bien no se ha encontrado aún una condición diferencial para este gauge, se ha establecido que existe una condición de gauge no lineal, pero local, tal que cualquier campo de gauge A_μ puede escribirse en términos de un campo escalar ϕ de acuerdo a la ecuación (3.134) (8-10),(13-15),(25). Como ya vimos en la sección anterior, la condición (3.134) permite evaluar de un modo simple el determinante fermiónico, en términos del jacobiano asociado al cambio quiral en las variables fermiónicas de integración funcional:

$$\begin{aligned} \psi &= e^{i\gamma_5 \phi} \chi \\ \bar{\psi} &= \bar{\chi}\, e^{i\gamma_5 \phi} \end{aligned} \qquad (3.135)$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi = J(\phi)\,\mathcal{D}\bar{\chi}\,\mathcal{D}\chi \qquad (3.136)$$

También mostramos que, como consecuencia de esta transformación:

$$W[A] = -i \log J[A] = -i \log \frac{\det(i\not\partial + e\not A)}{\det i\not\partial} \qquad (3.137)$$

(ver Apéndice, al final del capítulo), donde hemos llamado W[A] a la funcional de Wess-Zumino dada por

$$\begin{aligned} W[A] = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\ \mathrm{tr}^c\left[(\partial_\mu g^{-1}(\phi,1))(\partial_\mu g(\phi,1))\right] + \\ -\frac{i}{4\pi}\int d^2x \int_0^1 d\rho\ \varepsilon^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}^c\left[g^{-1}(\partial_\mu g)\,g^{-1}(\partial_\nu g)\,g^{-1}\partial_\rho g\right] \end{aligned} \qquad (3.138)$$

donde

$$g(\phi,\rho) = e^{2i\rho\phi(x)}\ ,\ \rho\in[0,1] \qquad (3.139)$$

es un elemento del grupo SU(N) que depende de las variables x, t y ρ . De acuerdo a lo explicado en la primera parte de esta sección, las corrientes fermiónicas pueden obtenerse mediante

$$J_\mu^a = \langle \bar{\Psi} \gamma_\mu t^a \Psi \rangle = \frac{1}{e} \frac{\delta W[A]}{\delta A^{\mu a}} \tag{3.140}$$

y toman la forma

$$\begin{aligned} J_+ &= -\frac{i}{4\pi} g D_+ g^{-1} = -\frac{i}{4\pi} g^{-1/2} (\partial_+ g) g^{-1/2} \\ J_- &= -\frac{i}{4\pi} g^{-1} D_- g = -\frac{i}{4\pi} g^{-1/2} (\partial_- g) g^{-1/2} \end{aligned} \tag{3.141}$$

con las variables del cono de luz definidas por:

$$\begin{aligned} x_\pm = t \pm x \quad , \quad J_\pm = J_0 \pm J_1 \quad , \\ D_\pm = \partial_\pm - ie [A_\pm ,] \end{aligned} \tag{3.142}$$

y, obviamente, g = g(ϕ ,1). Con esta notación, la conservación (covariante) de las corrientes vectoriales se escribe

$$D_+ J_- + D_- J_+ = 0 \tag{3.143}$$

mientras que para la corriente axial

$$J_\mu^{5a} = \langle \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma^5 t^a \Psi \rangle \tag{3.144}$$

se tiene:

$$D_+ J_-^5 - D_- J_+^5 = A(x) \tag{3.145}$$

donde el término de anomalía, A(x), puede evaluarse calculando el jacobiano de un cambio de variables infinitesimal en las variables fermiónicas (3-4):

$$\begin{aligned} \Psi &\longrightarrow \Psi' = e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \Psi \\ \bar{\Psi} &\longrightarrow \bar{\Psi}' = \Psi\, e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \end{aligned} \tag{3.146}$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi}\,\mathcal{D}\Psi = J(\alpha)\,\mathcal{D}\bar{\Psi}'\,\mathcal{D}\Psi' \tag{3.147}$$

del cual resulta:

$$A^a(x) = -\frac{\delta \log J(\alpha)}{\delta \alpha^a}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{ie}{2\pi}\,\varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \tag{3.148}$$

(ver, por ejemplo, refs. (8-9) y (15)).

Las relaciones (3.146)-(3.148) pueden ser usadas para derivar las relaciones de conmutación de las corrientes (14). En efecto, la ec. (3.140) puede escribirse en la forma

$$J^a_\mu[A] = \left(\det \not{D}[A]\right)^{-1} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, e^{iS} \, \bar{\psi}\gamma_\mu t^a \psi \qquad (3.149)$$

Bajo el cambio definido por (3.146) la corriente transformada es

$$J'^a_\mu[A] = J(\alpha) \, \frac{\det \not{D}[A']}{\det \not{D}[A]} \, J^a_\mu[A'] \qquad (3.150)$$

donde hemos escrito

$$\not{A}' = e^{-i\gamma_5\alpha} \not{A} \, e^{-i\gamma_5\alpha} + \frac{i}{e} \, e^{-i\gamma_5\alpha} \not{\partial} \, e^{-i\gamma_5\alpha} \qquad (3.151)$$

Ahora bien, sin pérdida alguna de generalidad podemos tomar

$$[\alpha, \phi] = 0 \qquad (3.152)$$

ya que, siendo las corrientes covariantes de gauge, siempre es posible reducir la transformación quiral a una que sea paralela a ϕ, por media de una transformación de gauge apropiada. Por otro lado, a partir de la identidad

$$\det \not{D}[A] = J(\alpha) \det \not{D}[A'] \tag{3.153}$$

que puede establecerse mediante el uso de cualquier método para la evaluación de jacobianos, que preserve la invarianza de gauge (10), finalmente se tiene

$$J'^{a}_{\mu}[A] = J^{a}_{\mu}[A'] \tag{3.154}$$

Ahora, con el objeto de obtener una expresión explícita para J'_μ, a partir de la ec. (3.154), basta con utilizar la ec. (3.151) correspondiente a un α infinitesimal, y luego insertar el valor de $\not{A}'$ en las fórmulas explícitas para $J_\pm$, dadas por las ecuaciones (3.141). El cálculo es sencillo, si observamos que el cambio

$$\not{A} \longrightarrow \not{A}'$$

(con $\not{A}'$ también en el gauge desacoplante, ya que $[\phi, \alpha] = 0$) corresponde a un cambio en $g^{1/2} = g^{1/2}(\phi, \rho = 1)$ de la forma:

$$g^{1/2} \longrightarrow (g')^{1/2} = g^{1/2} + i g^{1/2} \alpha \tag{3.155}$$

Con esta expresión para $(g')^{\frac{1}{2}}$, usando las ecuaciones (3.141 y (3.154) se obtiene:

$$\delta J_+ = J'_+[A] - J_+[A] = \frac{1}{2\pi} D_+ \alpha - i\left[J_+ , \alpha\right]$$

(3.156)

$$\delta J_- = J'_-[A] - J_-[A] = -\frac{1}{2\pi} D_- \alpha - i\left[J_- , \alpha\right]$$

ó bien

$$\delta J^\mu = - \varepsilon^{\mu\nu}\left\{ -\frac{1}{2\pi} D_\nu \alpha + i\left[J_\nu , \alpha\right]\right\} \qquad (3.157)$$

Ahora veremos que las relaciones de conmutación que satisfacen estas corrientes se pueden inferir combinando los resultados anteriores, obtenidos mediante técnicas funcionales, con el método operacional (26-27). Pasando a este marco, definimos la siguiente funcional:

$$\hat{Q}^5(t,\alpha) = \int dx\, \alpha^a\, \hat{J}_0^{5a}(x,t) \qquad (3.158)$$

(donde el símbolo ^ sobre una magnitud indica su carácter de operador) e introducimos el operador unitario $e^{i\hat{Q}_5}$ que es el generador de las rotaciones quirales:

$$e^{-i\hat{Q}^5}\,\hat{\Psi}\,e^{i\hat{Q}^5} = e^{i\gamma^5\alpha}\,\hat{\Psi} \tag{3.159}$$

lo cual puede probarse haciendo uso de (3.158) y de las relaciones canónicas de anticonmutación:

$$\left[\hat{\Psi}^{a*}_{\alpha}(x,t),\hat{\Psi}^{b}_{\beta}(y,t)\right]_{+} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^{ab}\,\delta(x-y) \tag{3.160}$$

Aplicando este operador a $\hat{J}_0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{Q}^5}\,\hat{J}_0\,e^{i\hat{Q}^5} &= \hat{J}_0 + \delta\hat{J}_0 = \\ &= \hat{J}_0 - i\left[\hat{Q}^5,\hat{J}_0\right] \end{aligned} \tag{3.161}$$

De esta ecuación puede obtenerse $\delta\hat{J}_0$; por consistencia, el resultado debe coincidir con el obtenido en (3.157). Para que esto se verifique debe cumplirse necesariamente que:

$$\left[\hat{J}^{a}_{0}(x,t),\hat{J}^{b}_{1}(y,t)\right] = f^{abc}\,\hat{J}^{c}_{1}(x,t)\,\delta(x-y) + \frac{i}{2\pi}\,D^{ab}_{1}\,\delta(x-y) \tag{3.162}$$

Cualquier relación de conmutación puede derivarse de esta forma. El resultado general, escrito en forma compacta es:

$$\left[\hat{J}_+^a(x,t), \hat{J}_+^b(y,t)\right] = f^{abc}\,\hat{J}_+^c(x,t)\,\delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} D_+^{ab}\,\delta(x-y)$$

$$\left[\hat{J}_+^a(x,t), \hat{J}^b(y,t)\right] = 0 \qquad (3.163)$$

$$\left[\hat{J}_-^a(x,t), \hat{J}_-^b(y,t)\right] = f^{abc}\,\hat{J}_-^c(x,t)\,\delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} D_-^{ab}\,\delta(x-y)$$

Nuevamente, el resultado puede interpretarse como la extensión natural de las relaciones ya conocidas para la teoría de N fermiones libres y para el modelo sigma no lineal (2), al caso en que los fermiones interactúan con un campo de gauge. En efecto, las ecuaciones (3.163) son similares a las obtenidas por Witten (2), excepto por el hecho notorio de que las derivadas que aparecen en el término de Schwinger (28), son reemplazadas por derivadas covariantes, un fenómeno análogo al encontrado previamente en otros modelos (29-30). Sin embargo, es interesante observar que también en este contexto es posible hallar un par de corrientes tales que el correspondiente término de Schwinger contiene derivadas ordinarias. Definiendo:

$$\dot{j}_+ = g^{1/2} J_+ g^{-1/2}$$

$$\dot{j}_- = g^{-1/2} J_- g^{1/2} \qquad (3.164)$$

es fácil comprobar que bajo la transformación quiral (3.146) en lugar de (3.156)-(3.157), se encuentra:

$$\delta j^\mu = - \varepsilon^{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \partial_\nu \alpha + 2i \left[j_\nu , \alpha \right] \right\} \qquad (3.165)$$

que corresponde a las siguientes relaciones de conmutación:

$$\left[\hat{j}_+^a (x,t) , \hat{j}_+^b (y,t) \right] = 2 f^{abc} \hat{j}_+^c (x,t) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} \delta^{ab} \partial_+ \delta(x-y)$$

$$(3.166)$$

$$\left[\hat{j}_-^a (x,t) , \hat{j}_-^b (y,t) \right] = 2 f^{abc} \hat{j}_c^c (x,t) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} \delta^{ab} \partial_- \delta(x-y)$$

En este punto es importante enfatizar las diferencias entre las relaciones que hemos obtenido para la Cromodinámica Cuántica en dos dimensiones (ecs. (3.163) y (3.166

y aquellas que surgen en los modelos de fermiones libres. En el caso que nos ocupa, cuando las corrientes se expresan en función de las variables del cono de luz, resultan ser funciones tanto de x_+ como de x_-. Esto se comprueba fácilmente a partir de las ecuaciones (3.143) y (3.145), de las cuales se deduce que

$$\begin{aligned} D_+ J_- &= \frac{1}{2} A(x_+,x_-) \\ D_- J_+ &= -\frac{1}{2} A(x_+,x_-) \end{aligned} \qquad (3.167)$$

Es decir que no sólo hemos encontrado derivadas covariantes en lugar de derivadas ordinarias, debido al hecho de tratarse de una teoría de gauge, sino que, a causa de la anomalía quiral las corrientes no se conservan independientemente.

Con respecto a las corrientes $j_\pm$, aunque en las expresiones (3.166) ha desaparecido la dependencia con el campo de gauge, no se verifica ninguna ley de conservación simple que dé como resultado condiciones de la forma $j_+= j_+(x_+)$ ó $j_-=j_-(x_-)$ (Cfr. con el caso libre, sección 2.4.).

Más allá de estas diferencias, la estructura hallada sugiere posibles conexiones con un álgebra tipo Kac-Moody. La dilucidación de este, entre otros aspectos de los resultados presentados en esta sección, continúa en estudio, esperándose puedan echar alguna luz sobre cuestiones aún no resueltas en los modelos realistas de las interacciones fun damentales, como lo es, por ejemplo, la forma de construir una teoría cuántica de cuerdas en la cual las representaciones de las álgebras de Kac-Moody y Virasoro juegan un rol central (23-24).

Bibliografía

(1) J.H.Lowenstein amd J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.

(2) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.

(3) K.Fujikawa, Phys. Rev. Lett., 42 , (1979), 1195.

(4) K.Fujikawa, Phys. Rev. D, 21 , (1980), 2848.

(5) K.Fujikawa, Phys. Rev. D, 22 , (1980), 1499.

(6) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 , (1981), 558.

(7) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.

(8) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.

(9) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Phys. Rev. D, 30 , (1984), 1353.

(10) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Ann. Phys. (N.Y.), 157 , (1984), 360.

(11) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.

(12) A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B, 131, (1983), 121; 141 , (1984), 223.

(13) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 153 , (1985), 97.

(14) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 163 , (1985), 213.

(15) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Phys. Rev. D, en prensa (1986).

(16) J.Schwinger, Phys. Rev., 82 , (1951), 664.

(17) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Journal Math. Phys., 26 , (1985), 2045.

(18) S.Hawking, Comm. Math. Phys., 55 , (1977), 133.

(19) R.Seeley, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 10 , (1967), 288.

(20) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti and J.E.Solomin, Comm. Math. Phys., 89 , (1983), 363.

(21) D.Gonzalez and A.Redlich, Phys.Lett., 147 B, (1984) 150.

(22) J.A.Swieca, Fortschr. Phys., 25 , (1977), 303.

(23) D.Nemeschansky and S.Yankielowicz, Phys. Rev. Lett., 54 , (1985), 620.

(24) S.Antoniadis and C.Bachas, SLAC, reporte No.3625, 1985.

(25) R.Roskies,"Festschrift for Feza Gursey's 60th. birthday"

(26) K.Fujikawa, Phys. Lett. B, 108 , (1982), 33.

(27) H.Aratyn and P.H.Damgaard, Nucl. Phys. B, 241 , (1983), 445.

(28) J.Schwinger, Phys. Rev. Lett., 3 , (1959), 296.

(29) H.J. de Vega, H.Eichenherr and J.M.Maillet, Phys. Lett. B, 132 , (1983), 337.

(30) L.Fadeev, Phys. Lett. B, 145 , (1984), 81.

Apéndice: cálculo del jacobiano quiral

En éste apéndice presentamos el cálculo del jacobiano $J_{\mu'}$, asociado al cambio quiral en las variables fermiónicas de integración funcional, utilizado a lo largo de este capítulo (la bibliografía relacionada a este cálculo corresponde a las refs.(15-20) de la sección 3.6). Consideremos la siguiente integral funcional, en espacio euclídeo:

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \; e^{-\int \bar{\Psi} \not{D} \Psi \, d^2x} = \det \not{D} \qquad (A.1)$$

donde Ψ y $\bar{\Psi}$ son campos fermiónicos tomados en la representación fundamental de S U (2) y $\not{D} = i \not{\partial} + e \not{A}$ ($A_\mu = A_\mu^a t^a$, siendo t^a los generadores de S U (2)). Efectuando en (A.1) el cambio

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= e^{\gamma_5 \phi(x) + i\eta(x)} \chi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &= \bar{\chi}(x)\, e^{\gamma_5 \phi(x) - i\eta(x)} \\ \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi &= J_F\, \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi \end{aligned} \qquad (A.2)$$

y expresando $\not{A}$ en la forma:

$$\not{A} = -\frac{i}{e} \not{\partial}\left(e^{\gamma_5 \phi + i\eta}\right) e^{-(\gamma_5 \phi + i\eta)} \qquad (A.3)$$

se obtiene:

$$\det \not{D} = J_F \det i\not{\partial} \qquad (A.4)$$

es decir que el cambio quiral (A.2) ha desacoplado los fermiones del campo vectorial. Para calcular J_F es convenien te definir:

$$W(\rho) = \log \det \not{D}_\rho \qquad (A.5)$$

con $\not{D}_\rho = i\not{\partial} + e\not{A}_\rho$, donde

$$\not{A}_\rho = -\frac{i}{e}\not{\partial}\left[e^{\rho(\gamma_5\phi + i\eta)}\right]e^{-\rho(\gamma_5\phi+i\eta)} \qquad (A.6)$$

y ρ es un parámetro que varía entre 0 y 1 , relacionando en forma contínua el determinante del operador $\not{D}$ ($\rho = 1$) con el que corresponde a los fermiones libres ($\rho = 0$)

Es fácil verificar que:

$$\frac{dW(\rho)}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}\log\det\not{D}_\rho = \frac{d}{d\rho}\mathrm{Tr}\log\not{D}_\rho =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\not{D}_\rho^{-1}\frac{d}{d\rho}\not{D}_\rho\right) \qquad (A.7)$$

Además usando (A.4) y (A.5) se tiene que

$$\int_0^1 \frac{dW(\rho)}{d\rho}d\rho = \log\frac{\det\not{D}}{\det i\not{\partial}} = \log J_F \qquad (A.8)$$

Luego:

$$J_F = \exp\left\{\int_0^1 d\rho\,\mathrm{Tr}\left(\not{D}_\rho^{-1}\frac{d\not{D}_\rho}{d\rho}\right)\right\} \qquad (A.9)$$

Por otro lado, se puede comprobar la siguiente identidad:

$$\frac{d\not{D}_\rho}{d\rho} = -\not{D}_\rho(\gamma_5\phi+i\eta)-(\gamma_5\phi+i\eta)\not{D}_\rho + 2i\eta\not{D}_\rho \qquad (A.10)$$

Así, usando (A.10) y la propiedad cíclica de la traza en (A.9), se obtiene:

$$J_F = \exp\left\{-2\int_0^1 d\rho \; \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \phi(x)\right]\right\} \qquad (\ A.11\ )$$

donde

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\phi(x)\right] = \int d^2x \; \mathrm{tr}^L \otimes \mathrm{tr}^c \sum_m \varphi_m^+(x,\rho)\gamma_5\phi(x)\varphi_m(x,\rho)$$

$$= \int d^2x \; \mathrm{tr}^L \otimes \mathrm{tr}^c \left\{\left[\sum_m \varphi_m(x,\rho)\otimes\varphi_m^+(x,\rho)\right]\gamma_5\phi(x)\right\} \qquad (\ A.12\ )$$

En esta expresión las funciones $\varphi_m(x,\rho)$ son los autoestados del operador $\not{D}_\rho$, que satisfacen la relación de clausura:

$$\sum_m \varphi_m(x,\rho)\otimes\varphi_m^+(y,\rho) = \delta^2(x-y) \qquad (\ A.13\ )$$

Esto implica que el integrando de (A.12) es una cantidad mal definida -la anomalía quiral- cuya evaluación requiere el uso de un método de regularización. Aquí utilizamos un método bien conocido que consiste en escribir:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\phi(x)\right] = \lim_{\substack{y\to x\\ M^2\to\infty}} \int d^2x \; \mathrm{tr}^c\otimes\mathrm{tr}^L \; \gamma_5\phi(x)\, e^{-\not{D}_\rho^2/M^2} \cdot \delta^2(x-y) \qquad (\ A.14\ )$$

(Un método alternativo, matemáticamente más riguroso, es el que se basa en la función ζ de Riemann, ver ref.(17-20) de la sección 3.6).

Partiendo de (A.14) , después de algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\phi(x)\right] = -\frac{ie}{4\pi}\int d^2x \; \mathrm{tr}^L\otimes\mathrm{tr}^c \; \gamma_5\phi\left(\not{\partial}\not{A}_\rho - ie\not{A}_\rho\not{A}_\rho\right) \qquad (\ A.15\ )$$

Insertando este resultado en la ecuación (A.11) se encuentra

$$J_F = e^{\frac{ie}{2\pi} \mathrm{tr}^c \otimes \mathrm{tr}^L \int_0^1 d\rho \int d^2x\, \gamma_5 \phi \left(\not{\partial} \not{A}_\rho - ie \not{A}_\rho \not{A}_\rho \right)} \qquad (A.16)$$

que coincide con la expresión (3.102) utilizada en la sección 3.5., con $\eta = 0$ (gauge desacoplante)

En el caso abeliano esta expresión se reduce a

$$J_F = e^{1/2\pi \int d^2x\, \phi \Box \phi} \qquad (A.17)$$

que hemos aplicado a la bosonización de modelos abelianos, en las secciones 3.3. y 3.4. .