

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA

TESIS DOCTORAL

EQUIVALENCIA ENTRE MODELOS FERMIONICOS Y BOSONICOS  
BIDIMENSIONALES: EL METODO FUNCIONAL

Carlos M. Naón

Director de Tesis: Prof. Fidel A. Schaposnik

1986

## Indice

Capítulo 1: Introducción pág. 1.

Capítulo 2: El procedimiento de bosonización mediante el método operacional.

2.1. Introducción. pág. 15.

2.2. Bosonización abeliana. Equivalencia entre el el modelo de Thirring masivo y el modelo Seno-Gordon. pág. 19

2.3. Bosonización abeliana. El modelo de Schwinger. pág. 42

2.4. Bosonización no abeliana: el método operacional. pág. 66

Capítulo 3: Bosonización en el marco de la integral funcional.

3.1. Introducción. pág. 86

3.2. Breve introducción al formalismo de la integral funcional. pág. 91

3.3. Bosonización abeliana. Modelos Seno-Gordon y Thirring masivo. pág. 101

3.4. Bosonización abeliana. El modelo de Schwinger masivo. pág. 117

3.5. Bosonización no abeliana: el método funcional. pág. 127

3.6. Corrientes fermiónicas: reglas de bosonización y álgebra de conmutadores. pág. 138

Apéndice: Cálculo del jacobiano quiral.

pág. 161

Capítulo 4: Conclusiones      pág. 165

•

CAPITULO 1

INTRODUCCION

## Capítulo 1

### Introducción

Uno de los problemas más importantes de la Física, cuyo interés se ha ido afirmando con el tiempo, es el de llegar a formular una teoría única que incorpore a todas las fuerzas conocidas, revelando sus conexiones profundas y a la vez, dando cuenta de su aparente diversidad.

En la actualidad se conocen cuatro interacciones básicas, que hasta hace pocas décadas requerían, cada una de ellas, una teoría diferente. Estas interacciones son la gravitatoria, la electromagnética, la interacción débil y la interacción fuerte. Las dos primeras poseen un alcance ilimitado, pueden percibirse en forma directa como causantes de atracciones y repulsiones entre diversos sistemas; las restantes, en cambio, escapan a la percepción directa porque su influencia se extiende solamente a distancias cortas, no mayores que el radio del núcleo atómico. La fuerza débil es responsable, en gran parte, de la desintegración de ciertas partículas, mientras que la interacción fuerte es la que mantiene unidos a protones y neutrones en el núcleo, y liga a otras partículas, llamadas quarks, que hoy se consideran los constituyentes de protones y neutrones.

En las últimas décadas, importantes avances en el terreno de la Teoría Cuántica de Campos y Partículas, dieron un nuevo impulso al proyecto de unificación. La clave de estos avances fue el reconocimiento de la simetría fren

te a transformaciones de gauge locales como principio básico, subyacente a todas las interacciones de la materia.

La primera teoría con simetría de gauge local fue la que introdujo Maxwell, en 1868, para describir los campos eléctricos y magnéticos. Esta teoría es clásica ( no cuántica ), pero se ha probado que la simetría de gauge existe también en la teoría cuántica de las interacciones electromagnéticas, que hoy conocemos como Electrodinámica Cuántica. La formulación de esta teoría y la demostración de su coherencia interna fue una labor que llevó cerca de veinte años, iniciada por Dirac en la década de 1920 y completada en lo esencial alrededor de 1948, por Feynman, Schwinger, Tomonaga y otros (1).

Por otro lado, el tratamiento de las interacciones débiles y fuertes seguía presentando serias dificultades. Desde los años treinta se contaba con una teoría formulada por Fermi que explicaba algunos de los hechos básicos de las interacciones débiles, pero estaba plagada de divergencias. Con respecto a las interacciones fuertes, la proliferación de nuevas partículas cuya existencia no encajaba en ningún marco teórico apropiado, hacía más confusa la situación. Hoy se entiende que el principal motivo que impedía develar el sentido de estas fuerzas es que no se comprendía cuál debía ser el modelo con simetría de gauge local, necesario para ello. El primer paso teórico en esta dirección lo dieron Yang y Mills (2) en 1954, quienes consideraron una simetría de spin isotópico con carácter local. A dife-

rencia de aquellos modelos ( como la Electrodinámica Cuántica ) en los cuales las transformaciones de simetría de los campos forman un grupo abeliano ( conmutativo ), en las teorías de Yang y Mills el grupo de simetría es no abeliano. Esto da como resultado nuevas complicaciones matemáticas, pero a la vez da a estos modelos una estructura cuya riqueza permite englobar en un mismo marco nuevos y variados fenómenos. Basándose en esta formulación, Salam y Weinberg (3) lograron construir, alrededor de 1968, un modelo que unifica satisfactoriamente las interacciones débiles con las electromagnéticas. El éxito obtenido por este modelo consolidó la idea de que mediante teorías de gauge no abelianas podría también explicarse la naturaleza de las demás fuerzas, en el marco de una teoría unificada.

La elaboración de un modelo coherente de las interacciones fuertes sólo pudo enfrentarse cuando se comprendió que los hadrones ( así se llama a las partículas que interactúan a través de la fuerza fuerte ) no constituyen partículas elementales. En 1963, Gell-Mann, Ne'eman y Zweig (4) propusieron un modelo en el que los hadrones se consideraban objetos matemáticos compuestos. Se dio el nombre de quarks a las nuevas partículas que en la actualidad se consideran los constituyentes básicos de la materia hadrónica. Por combinación de tres quarks se forman los bariones ( hadrones de naturaleza fermiónica ), mientras que el estado ligado de un quark y un antiquark da lugar a los mesones ( los piones son miembros típicos de esta clase de partícula

las ).

La teoría que se ha desarrollado para explicar de qué manera interactúan los quarks es una teoría no abeliana con simetría de gauge local  $SU(3)$  exacta, que se denomina Cromodinámica Cuántica.

Los quarks son partículas fermiónicas que poseen carga eléctrica fraccionaria y a las cuales se les atribuye nuevas propiedades llamadas arbitrariamente, sabor y color.

Cada sabor de los quarks ( hasta el momento se conocen cinco y se presume la existencia de un sexto ) aparece en tres colores, de manera que la introducción de la carga de color triplica el número de quarks distintos. El término color fue elegido porque las reglas de formación de hadrones pue den expresarse sucintamente exigiendo que todas las combinaciones permitidas de tres quarks den como resultado el color "blanco" o carezcan de color. En este contexto, la simetría de gauge es una invarianza con respecto a las transformaciones locales del color de los quarks. Como ocurre en otras teorías de gauge, la preservación de una simetría local requiere la introducción de nuevos campos que son los intermediarios de la interacción. Los cuantos del campo de color se denominan gluones, porque "pegan" los quarks entre sí ( del inglés, glue ). Estas nuevas partículas son bosones vectoriales de masa nula y con spin igual a 1. Los gluones no son neutros respecto a la carga de color. Aquí radica la diferencia crucial de esta teoría frente a la Electrodinámica Cuántica, hecho directamente ligado a su carácter

no abeliano. Cada uno de los 8 bosones vectoriales de la Cromodinámica Cuántica ( hay uno de ellos por cada generador del grupo y el número de generadores del grupo  $SU(N)$  es  $N^2 - 1$  ), además de transmitir la interacción de color entre quarks, transporta una carga de color, por lo que puede interactuar él mismo con los quarks y con otros gluones. Esta propiedad ha permitido contar con una explicación cualitativa del singular comportamiento de los quarks, que, por un lado, no han sido observados en estado libre en ningún experimento y por otro, actúan como partículas libres en el interior de los hadrones. La coexistencia de estos fenómenos, llamados "confinamiento" y "libertad asintótica", respectivamente, puede entenderse como consecuencia de un efecto de "antiapantallamiento" debido a la presencia de gluones con carga de color que hace que la fuerza efectiva de color entre quarks sea una función creciente de la distancia.

No siempre allí donde las teorías de gauge son correctas resultan de fácil manejo. Por el contrario, los cálculos necesarios para predecir el resultado de un experimento son, en general, tediosos, y, salvo en el caso de la Electrodinámica Cuántica, pocas veces se ha obtenido una gran precisión. Por ejemplo, las ecuaciones que describen un protón en términos de quarks y gluones, son ecuaciones altamente no lineales, de un orden de complicación comparable a las que describen un núcleo de tamaño intermedio en términos de

protones y neutrones. Ninguno de estos conjuntos de ecuaciones puede resolverse con exactitud.

Es debido a este tipo de razones que, si bien contamos con un esquema teórico sólido que nos permitiría incluso tener una visión intuitiva de fenómenos básicos como el del confinamiento de los quarks, todavía no podemos decir que éste, y otros varios problemas, hayan sido resueltos. Esta situación ha originado, hace ya algunos años, un vivo interés por el estudio de modelos simplificados que compartan algunos de los rasgos más relevantes con las teorías realistas de las interacciones fundamentales. En este sentido, uno de los terrenos más fértiles ha sido y continúa siendo el de los modelos en dos dimensiones ( 1 espacio y 1 tiempo ), que han permitido obtener una comprensión más profunda de fenómenos tales como la generación dinámica de masa; el confinamiento y la libertad asintótica de los fermiones fundamentales; la forma en que pueden obtenerse lagrangianos efectivos ( tipo modelo sigma no lineal ) para describir el comportamiento de hadrones a bajas energías, a partir de la Cromodinámica Cuántica (5).

A estas razones se debe que teorías cuánticas bidimensionales como los modelos de Schwinger ( Electrodinámica Cuántica en dos dimensiones ), Thirring ( fermiones en autointeracción cuártica ), y más recientemente el modelo Gross-Neveu quiral y la Cromodinámica Cuántica bidimensional ( $QCD_2$ ), se hayan convertido en verdaderos "laboratorios teóricos" donde ensayar nuevas técnicas y métodos de cálcu-

lo, capaces de ayudar a resolver los problemas que se presentan en las teorías más realistas (6-13).

Uno de los fenómenos más interesantes descubiertos en modelos cuánticos bidimensionales es la existencia de una equivalencia entre teorías fermiónicas y bosónicas. Se ha dado el nombre de bosonización al procedimiento mediante el cual se pone de manifiesto tal equivalencia. Su origen puede hallarse en el trabajo de Klaiber (8) sobre el modelo de Thirring y en las investigaciones de Lowenstein y Swieca (9) sobre el modelo de Schwinger. La primera aplicación directa de este procedimiento fue llevada a cabo por Coleman, quien identificó las funciones de Green del modelo de Thirring masivo ( fermiónico ) con las correspondientes al modelo Seno-Gordon ( bosónico ) (10). Este sorprendente resultado profundizó la comprensión de los modelos bidimensionales y aportó, a su vez, nuevas posibilidades de cálculo.

En efecto, una de las conclusiones del trabajo de Coleman es que el límite de acoplamiento fuerte correspondiente al modelo de Thirring masivo equivale a la aproximación para acoplamiento débil en el modelo Seno-Gordon.

La clave de la bosonización radica en la no existencia, en un mundo de dos dimensiones, de un teorema de spin-estadística que prohíba la construcción de un fermión a partir del estado coherente de un campo de Bose. Esto se debe al simple hecho de que en una dimensión espacial no existen las rotaciones, y por lo tanto, no hay spin, en el sentido físico usual (14). De hecho, la aparición de fermiones en

una teoría puramente bosónica se ha demostrado en un modelo mucho más sencillo que el Seno-Gordon: la teoría de un campo escalar libre sin masa. En este modelo el subespacio del espacio de Fock que corresponde a dos partículas, contiene estados en los que cada partícula se encuentra en un estado normalizable, con el soporte de su impulso espacial restringido al semieje positivo. Estos estados son autovectores de  $P_\mu P^\mu$ , con autovalor igual a cero; todos los bi-impulsos en las funciones de onda individuales son vectores nulos. Si se adopta la definición usual de una partícula, como estado normalizable de  $P^2$ , se encuentra que el sector de dos partículas del espacio de Fock contiene partículas individuales de masa nula. Lo mismo ocurre en el sector que corresponde a un estado coherente. Streater y Wilde (15) demostraron que algunos de estos estados coherentes son fermiones, porque pueden crearse a partir del vacío por medio de campos que anticonmutan entre sí, para separaciones de tipo espacial.

A partir del trabajo de Coleman (10) y el de otros autores (16), se llegó a establecer sobre una base sólida el método de bosonización, cuando las teorías consideradas son abelianas. La manera de generalizar estos resultados al caso en que los campos de la teoría se transforman de acuerdo a un grupo no abeliano permaneció sin solución por cierto tiempo. Los primeros intentos en este sentido se encontraron con la seria dificultad de que las corrientes fermiónicas resultaban ser cantidades no locales, cuando se las

expresaba en términos de campos bosónicos (17). Sólo muy recientemente empezó a entenderse la forma correcta de encarar este problema. Estudiando el modelo de fermiones libres con una simetría no abeliana, luego de un análisis cuidadoso de las ecuaciones de conservación que obedecen las corrientes fermiónicas, Witten pudo dar una prescripción adecuada para llevar adelante el procedimiento de bosonización en el caso no abeliano (18). Todos estos trabajos, pioneros en la elucidación de la equivalencia entre fermiones y bosones en dos dimensiones, fueron realizados siguiendo el método operacional.

En el marco de la integral funcional, las investigaciones de Fujikawa (19) acerca del tratamiento de las anomalías quirales (20), dió lugar a progresos significativos en el estudio de modelos bidimensionales con simetrías abelianas y no abelianas (11-13). En particular, Gamboa Saraví, Schaposnik y Solomin (12) desarrollaron una técnica basada en un cambio quiral de variables en la medida de integración fermiónica, que ha mostrado ser especialmente útil en la resolución de modelos no abelianos. El cálculo del jacobiano asociado resulta ser no trivial debido a la existencia de la anomalía quiral. Su evaluación, directamente relacionada con la de un determinante fermiónico, da como resultado una acción efectiva que contiene un término de Wess-Zumino. Esto sugiere una relación profunda con el resultado obtenido por Witten (18) en su análisis de la teoría de fermiones libres y permite establecer un contacto

directo con los trabajos de Polyakov y Wiegmann (21) sobre el modelo sigma no lineal. Esta técnica ha permitido resolver modelos de fermiones en interacción cuyo estudio en el marco operacional había resultado poco práctico. Tales son los casos, por ejemplo, del modelo Gross-Neveu quiral y el de la Cromodinámica Cuántica bidimensional (12-13), (22).

El objetivo de esta tesis es el de aplicar el método funcional que acabamos de describir superficialmente, al estudio sistemático de la equivalencia entre modelos fermiónicos y bosónicos en dos dimensiones del espacio-tiempo.

En el Capítulo 2 se presentan los resultados ya conocidos sobre el procedimiento de bosonización mediante el método operacional. La sección 2.1. es la introducción a este capítulo. La sección 2.2. contiene una discusión detallada de la equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el Seno-Gordon, obtenida originalmente por Coleman (10). En la sección 2.3. se reseñan los resultados fundamentales de Lowenstein y Swieca (9) sobre el modelo de Schwinger ( sin masa ); se estudia el problema de la rotura espontánea de la simetría quiral global, para concluir la sección con una breve síntesis del resultado de Coleman, Jackiw y Susskind (23) acerca del modelo de Schwinger masivo. La sección 2.4. contiene los rasgos fundamentales del esquema de bosonización no abeliana propuesto por Witten (18).

El Capítulo 3 reúne las contribuciones originales de

esta tesis. La sección 3.1. es su introducción. La sección 3.2. sirve como una introducción elemental a los métodos de integración funcional. En las secciones 3.3. y 3.4. se aplican estas técnicas a modelos abelianos (24). En la primera se reobtiene el resultado de Coleman para los modelos Seno-Gordon y Thirring masivo, mientras que en la otra se analiza el modelo de Schwinger masivo y se establece su equivalencia con un modelo Seno-Gordon masivo. Finalmente, en las últimas dos secciones, se extienden los resultados anteriores al estudio de teorías con simetrías no abelianas (12-13), (24-25). En la sección 3.5. se introduce el gauge desacoplante (12) y se utiliza la generalización no abeliana del cambio quiral de variables fermiónicas aplicado en el caso del modelo de Schwinger, para mostrar, como ejemplo, la equivalencia entre la Cromodinámica Cuántica bidimensional y un cierto modelo bosónico. La última sección contiene los resultados alcanzados al aplicar el método funcional al estudio de las corrientes fermiónicas de la Cromodinámica Cuántica en dos dimensiones (25). En particular se obtienen sus reglas de bosonización y el álgebra de conmutadores que satisfacen. En un Apéndice, al final del capítulo, se calcula el jacobiano asociado al cambio quiral de variables antes mencionado.

Por último, en el Capítulo 4 se da un resumen de los resultados alcanzados y se presentan las conclusiones de este trabajo.

Bibliografía

- (1) P.A.M.Dirac, Reporte Solvay 1934, en "Quantum Electrodynamics", Editado por J.Schwinger, Dover, New York, 1958.  
R.P.Feynman, Phys. Rev., 76 , (1949), 749.  
J.Schwinger, Phys. Rev., 74, (1948), 1439; 75 , (1949), 651; 76 , (1949), 790; 82 , (1951), 664.  
S.Tomonaga, Prog. Theor. Phys., I , (1946), 27.
- (2) C.N.Yang and R.L.Mills, Phys. Rev., 96 , (1954), 191.
- (3) S.Weinberg, Phys. Rev. Lett., 19 , (1967), 1264.  
A.Salam, en "Elementary Particle Theory", Editado por N.Svartholm, Almquist and Wiksells, Stockholm, 1968.
- (4) M.Gell-Mann and Y.Ne'eman, en "The Eightfold Way", Benjamin, New York, 1964.  
M.Gell-Mann, Phys.Lett., 8 , (1963), 214.  
G.Zweig, Reporte del CERN, 1963, (no fue publicado).
- (5) J.Schwinger, Phys. Rev., 128 , (1962), 2425.  
A.Casher, J.Kogut and L.Susskind, Phys. Rev. Lett., 31 , (1973), 792.  
J.Kogut and L.Susskind, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 3594.

- E.Witten, Nucl. Phys. B, 233 , (1983), 422 y 433.
- (6) J.Schwinger, Phys. Rev., 128 , (1962), 2425.
- (7) W.Thirring, Ann. Phys., (N.Y.), 3 , (1958), 91.
- (8) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics,  
Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and  
Breach, New York, 1968.
- (9) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.),  
68 , (1971), 172.
- (10) S.Coleman, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 2088.
- (11) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 ,  
(1981), 558.
- (12) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin,  
Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.
- (13) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik,  
Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.
- (14) S.Coleman, "Classical lumps and their quantum  
descendants", Lectures in the International  
School of Subnuclear Physics, Ettore Majorana,  
Erice, 1975.
- (15) R.Streater and I.Wilde, Nucl. Phys. B, 24 , (1970),  
561.
- (16) J.Frölich, Phys. Rev. Lett., 34 , (1975), 833.  
S.Mandelstam, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 3026.  
J.A.Swieca, Fortschr. Phys., 25 , (1977), 303.
- (17) I.Belvedere, J.Swieca, K.Rothe and B.Schroer,  
Nucl. Phys. B, 153 , (1979), 112.  
B.Baluni, Phys. Lett. B, 90 , (1980), 407.  
P.Steinhardt, Nucl. Phys. B, 106 , (1980), 100.

- (18) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.
- (19) K.Fujikawa, Phys. Rev. Lett., 42 , (1979), 1195;  
Phys. Rev.D, 21 , (1980), 2848.
- (20) S.Adler, Phys. Rev., 177 , (1969), 2426.  
J.Bell and R.Jackiw, Nuovo Cimento A, 60 , (1969),  
47.
- (21) A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B,  
131 , (1983), 121; 141, (1984), 223.
- (22) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin,  
Phys. Rev. D, 30 , (1984), 1353.
- (23) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys.  
(N.Y.), 93 , (1975), 267.
- (24) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.
- (25) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik,  
Phys. Lett. B, 153 , (1985), 97; 163, (1985), 213.  
R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.  
Solomin, Phys. Rev. D, en prensa.

CAPITULO 2

EL PROCEDIMIENTO DE BOSONIZACION

MEDIANTE EL METODO OPERACIONAL

## 2.1. Introducción

Uno de los resultados más interesantes hallados en el estudio de teorías cuánticas de campos bidimensionales es la posibilidad de establecer una identidad entre las funciones de Green de un modelo fermiónico de partida y las correspondientes a una teoría que describe el comportamiento de campos bosónicos. Se denomina bosonización al procedimiento por el cual se pone de manifiesto tal equivalencia.

En este capítulo se presentan los principales resultados que dieron lugar al procedimiento de bosonización, obtenidos mediante el método operacional. En la sección 2.2. se muestra la equivalencia entre el modelo de Thirring masivo ( fermiónico ) y el modelo Seno-Gordon ( bosónico ). En la identificación de las funciones de Green de estos modelos, realizada por Coleman (1), cumple un rol central el carácter super-renormalizable (2) de estas teorías bidimensionales. En efecto, la implementación de un orden normal adecuado permite eliminar las divergencias ultravioletas que se deben a la contracción de dos campos en un mismo punto, dando como resultado un hamiltoniano finito para el modelo Seno-Gordon. El tratamiento correspondiente al modelo de Thirring se efectúa de acuerdo al método desarrollado por Klaiber (3). Una de las consecuencias más destacables de la identidad obtenida entre ambos modelos está contenida en la ecuación (2.56), según la cual el límite de

acoplamiento fuerte para el modelo fermiónico ( $g \rightarrow \infty$ ) coincide con el de acoplamiento débil para el bosónico ( $\beta \rightarrow 0$ ). Este hecho proporciona una forma de estudiar perturbativamente el modelo de Thirring, en su régimen de acoplamiento fuerte, en términos de campos bosónicos.

En la sección 2.3. se describen los aspectos fundamentales del trabajo de Lowenstein y Swieca (4) sobre la Electrodinámica Cuántica bidimensional ( modelo de Schwinger). Se hace manifiesta la relación entre la solución original de Schwinger y el marco de métrica indefinida ( versión bidimensional de la métrica de Gupta-Bleuler (2) ). La restricción a un "subespacio físico" del espacio de Hilbert completo, en el cual se satisfacen las ecuaciones de Maxwell, permite remover la contribución de las excitaciones "electrónicas" y obtener una expresión para la corriente de fermiones en término de campos bosónicos. A partir de este resultado y usando también la regla de bosonización para el término cinético de los fermiones -obtenida en la sección anterior- se identifica la densidad lagrangiana del modelo de Schwinger con la correspondiente a una teoría de campos escalares libres y masivos. La aparición de una masa para los campos escalares es una manifestación de la rotura espontánea de la simetría bajo transformaciones quirales globales. La discusión de este fenómeno y su relación con el llamado vacío  $\theta$  permite concluir la sección con una introducción al tratamiento del modelo de Schwinger masivo (5).

Finalmente, en la sección 2.4., se estudia el esque-

ma de bosonización no abeliana propuesto por Witten (6).  
Analizando las ecuaciones de movimiento que satisfacen las corrientes fermiónicas asociadas a un modelo de fermiones libres -tomados en la representación fundamental del grupo  $O(N)$ - se obtiene una expresión local para dichas corrientes, en términos de campos bosónicos. Luego se construye la acción bosónica equivalente, que resulta ser la correspondiente a un modelo sigma no lineal, en el cual se destaca la presencia de un término de Wess-Zumino, propuesto originalmente como una acción efectiva para las anomalías quirales.

Bibliografia

- (1) S.Coleman, Phys. Rev. D 11 , (1975), 2088.
- (2) C.Itzykson and J.Zuber, "Quantum Field Theory",  
Mc. Graw-Hill, 1980.
- (3) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics,  
Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and  
Breach, New York, 1968.
- (4) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.),  
68 , (1971), 172.
- (5) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys.  
(N.Y.), 93 , (1975), 267.
- (6) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.

2.2. Bosonización abeliana. Equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el modelo Seno-Gordon.

Las raíces históricas del procedimiento de bosonización se encuentran en el trabajo de B. Klaiber (1) acerca del modelo de Thirring (2-5) sin masa y en las investigaciones de J.H.Lowenstein y J.A.Swieca (6) sobre el modelo de Schwinger (7). La primera aplicación importante de este método se debe a S.Coleman (8), quien estableció la equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el modelo Seno-Gordon (9). En esta sección presentaremos estos resultados.

La dinámica del modelo Seno-Gordon está determinada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi + \delta_0 \quad (2.1)$$

donde  $\varphi$  es un campo escalar sin masa, en una dimensión espacial y otra temporal ( $\mu = 0, 1$ ) con la métrica definida por  $g_{00} = -g_{11} = 1$ . Las cantidades  $\alpha_0$ ,  $\beta$ , y  $\delta_0$  son parámetros reales. Es claro que (2.1) no cambia si se sustituye  $\varphi$  por  $-\varphi$ , por lo tanto siempre es posible tomar a  $\beta$  positivo. Además, sin pérdida de generalidad se puede tomar  $\alpha_0 > 0$  (Si se parte del caso  $\alpha_0 < 0$ , realizando el cambio de variable  $\varphi \longrightarrow \varphi + \frac{\pi}{\beta}$ , se pasa al caso  $\alpha_0 > 0$ ). La constante  $\delta_0$  se puede fijar considerando el desarrollo de la ener-

gía potencial, en la teoría clásica, alrededor de la configuración de energía mínima:

$$\frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi = \frac{\alpha_0}{\beta^2} - \frac{\alpha_0}{2} \varphi^2 + \frac{\alpha_0}{4!} \beta^2 \varphi^4 + \dots \quad (2.2)$$

Si deseamos que esa densidad de energía mínima sea cero, debemos elegir

$$\delta_0 = - \frac{\alpha_0}{\beta^2} \quad (2.3)$$

En el segundo término de (2.2) vemos que  $\alpha_0^{1/2}$  es la masa de las excitaciones elementales, ó con mayor propiedad, la inversa de la longitud de onda de las pequeñas oscilaciones alrededor del mínimo. Por otro lado, el parámetro  $\beta$  da cuenta de las autointeracciones entre estas oscilaciones. No haremos más consideraciones sobre el modelo clásico ya que investigando directamente las propiedades cuánticas del modelo es posible establecer su equivalencia con la teoría fermiónica de Thirring. Esta correspondencia se pondrá de manifiesto comparando término a término las series perturbativas de cada modelo, por lo tanto es necesario tener en cuenta las divergencias ultravioletas que aparecen en los diagramas de Feynman a calcular en el análisis perturbativo.

No es difícil verificar que en toda teoría de campos

escalares en dos dimensiones, sin términos de interacción que involucren derivadas de los campos, las únicas divergencias ultravioletas que se encuentran a todo orden en teoría de perturbaciones, son aquellas que provienen de diagramas con un lazo cerrado ("loop") compuesto de una sola línea interna, formada por la contracción de dos campos en un mismo punto o vértice. Este tipo de contribuciones se denomina usualmente "renacuajo" ("tadpole"). Algunos ejemplos de estos casos se encuentran en la figura 1.

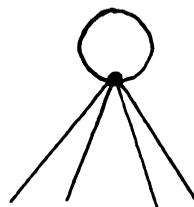
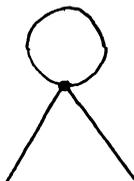
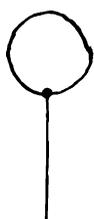


Figura 1

a) "globo"

b) "renacuajo típico"

c) "pulpo"

En una teoría bidimensional de campos escalares de masa  $\mu$ , la contribución del lazo asociado a estos diagramas es:

$$L = \int \frac{d^2 k}{k^2 + \mu^2} \quad (2.4)$$

Esta integral presenta una divergencia logarítmica para grandes valores del impulso. Toda otra contribución que no contenga este tipo de lazos resulta ser convergente en la región ultravioleta. Para eliminar divergencias que

surgen de la contracción de campos en un mismo punto basta con implementar un orden normal sobre el hamiltoniano de interacción. Los operadores de campo pueden representarse como integrales de Fourier en función de operadores de creación ( $a^+(k)$ ) y aniquilación ( $a(k)$ ). A este procedimiento se le llama también descomposición del operador  $\varphi$  en sus partes de frecuencia positiva,  $\varphi^{(+)}$  ( asociada a los operadores de creación ) y negativa,  $\varphi^{(-)}$  ( asociada a los operadores de aniquilación ) (10). Así, el producto de dos operadores tomará la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(y) = & \varphi^{(+)}(x) \varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(+)}(x) \varphi^{(-)}(y) + \\ & + \varphi^{(-)}(x) \varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(x) \varphi^{(-)}(y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

En general, llevar a su orden normal el producto de un número cualquiera de operadores de campo es escribirlo de forma tal que en cada término todos los operadores de creación, en la representación de impulsos, se encuentren a la izquierda de todos los operadores de aniquilación. Es claro que esto se consigue haciendo uso de las reglas de conmutación (o anticonmutación en el caso de fermiones ) que obedecen estos operadores. Estas reglas deben ser tales que los operadores de campo, a su vez, verifiquen las reglas canónicas de conmutación.

En el ejemplo anterior ( ecuación (2.5) ), tenemos el producto de dos campos, por lo que es suficiente con hacer un solo "desplazamiento" para obtener el producto defi

nido normalmente, así se obtiene:

$$\varphi(x)\varphi(y) = N_m(\varphi(x)\varphi(y)) + \underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}\Big|_m \quad (2.6)$$

donde  $m$  es una masa asociada al proceso de orden normal,  $N_m(A)$  representa al operador  $A$  ordenado normalmente, y  $\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}\Big|_m$  es la contribución que proviene del conmutador de los operadores  $a(k)$  y  $a^+(k)$  y que no contiene ningún operador. Este último término se denomina contracción de los campos  $\varphi(x)$  y  $\varphi(y)$ .

Con el objeto de relacionar el producto de dos operadores de campo con el propagador causal de la teoría, aplicamos a la identidad (2.6) el operador de ordenamiento temporal  $T$ , cuya acción se define por:

$$T(\varphi(x)\varphi(y)) = \theta(x_0 - y_0)\varphi(x)\varphi(y) + \theta(y_0 - x_0)\varphi(y)\varphi(x) \quad (2.7)$$

donde  $\theta(x)$  es la distribución de Heaviside. Tomando luego el valor medio de vacío resulta:

$$\langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle = \langle 0|TN_m(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle + \underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}\Big|_m \quad (2.8)$$

donde  $\overline{\varphi(x)\varphi(y)}$  es la contracción cronológica de los campos. El miembro izquierdo de esta igualdad es el propagador causal, que para una teoría de campos escalares libres de

masa  $\mu$  es de la forma:

$$\langle 0 | T(\psi(x)\psi(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik \cdot (x-y)} d^4k}{k^2 + \mu^2} \quad (2.9)$$

Ahora bien, la convención usual para definir el orden normal es fijar  $m$  igual a la masa de la teoría:  $m = \mu$ , en cuyo caso el primer término en el miembro derecho de (2.8) se anula y se tiene la identidad entre la contracción cronológica y el propagador de la teoría. Nótese que la expresión (2.4) para la contribución del lazo se obtiene de (2.9) -para dos dimensiones- tomando el límite  $y \rightarrow x$ . Es inmediato comprobar que, de esta manera, el orden normal ha eliminado por completo el problema de las contracciones en un mismo punto, ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \mu} \langle 0, \mu | T N_m(\psi(x)\psi(x)) | 0, \mu \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k}{k^2 + \mu^2} - \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{m \rightarrow \mu} \int \frac{d^2k}{k^2 + m^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sin embargo, no siempre es la elección  $m = \mu$ , la más conveniente. En particular en la teoría Seno-Gordon, no es evidente la mejor manera de dividir el hamiltoniano en partes libre y de interacción, porque el candidato "natural" para este último papel,  $\frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos(\beta\varphi)$ , contiene en

su desarrollo en serie un término de masa que podría incluirse en la parte libre. Veremos que se puede sacar provecho de esta ambigüedad, para lo cual, lo más acertado es definir el orden normal sin especificar a priori el valor de  $m$ . En este caso la operación de orden normal es equivalente a reemplazar  $L$  en (2.4) por

$$L' = \int \frac{d^2k}{k^2 + \mu^2} - \int \frac{d^2k}{k^2 + m^2} \quad (2.11)$$

Este procedimiento controla el problema de las divergencias ultravioletas causadas por el producto de dos operadores en un mismo punto, sin cancelar completamente los diagramas.

Esta manera de implementar el orden normal es la piedra angular en la demostración que Coleman dio de la equivalencia entre los modelos Seno-Gordon y Thirring masivo y mostrará su utilidad cuando comparemos orden a orden los términos de las series perturbativas de ambas teorías, la bosónica y la fermiónica.

Comencemos ahora el estudio del hamiltoniano del modelo Seno-Gordon, al que escribiremos en su forma normal. Por simplicidad trabajaremos en la representación de Schrödinger, en la cual los operadores son funciones del campo  $\varphi(x_1)$  y de la densidad de impulso canónico  $\Pi(x_1)$ . Definiendo operadores de creación y destrucción  $a^+(k, m)$  y

$a(k, m)$  que satisfacen

$$\left[ a(k_1, m), a(k'_1, m) \right] = \left[ a^\dagger(k_1, m), a^\dagger(k'_1, m) \right] = 0 \quad (2.12)$$

$$\left[ a(k_1, m), a^\dagger(k'_1, m) \right] = 2\pi \delta(k_1 - k'_1) \quad (2.13)$$

se puede verificar que los operadores de campo dados por:

$$\Psi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\omega(k_1, m)}} \left[ a(k_1, m) e^{-ik_1 x'_1} + a^\dagger(k_1, m) e^{ik_1 x'_1} \right] \quad (2.14)$$

$$\Pi(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1 \sqrt{\frac{\omega(k_1, m)}{2}} \left[ a(k_1, m) e^{-ik_1 x'_1} - a^\dagger(k_1, m) e^{ik_1 x'_1} \right] \quad (2.15)$$

donde  $\omega(k_1, m) = (k_1^2 + m^2)^{1/2}$ , satisfacen la relación ca  
nónica

$$\left[ \Pi(x_1), \Psi(y_1) \right] = i \delta(x_1 - y_1) \quad (2.16)$$

Como antes, ordenar normalmente los operadores de Schrödinger significa recomodarlos de forma tal que todos

los operadores de creación ( $a^+$ ) queden a la izquierda y los de aniquilación ( $a$ ) a la derecha. Como ya lo advertimos, por el momento mantendremos a  $m$  sin especificación alguna.

Consideremos ahora la densidad hamiltoniana de la teoría Seno-Gordon:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 - \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \delta_0 \quad (2.17)$$

donde

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx_1} \right)^2 \quad (2.18)$$

Utilizando (2.12)-(2.16) para llevar los operadores a su orden normal se obtiene:

$$\frac{1}{2} \pi^2 = N_m \left( \frac{1}{2} \pi^2 \right) + \frac{1}{8\pi} \int dk \omega(k, m) \quad (2.19)$$

y

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx_1} \right)^2 = N_m \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx_1} \right)^2 \right) + \frac{1}{8\pi} \int dk \frac{k^2}{\omega(k, m)} \quad (2.20)$$

Sumando las dos últimas expresiones resulta:

$$\mathcal{H}_0 = N_m(\mathcal{H}_0) + E_0(m) \quad (2.21)$$

con

$$E_0(m) = \frac{1}{8\pi} \int dk \frac{2k^2 + m^2}{\omega(k, m)} \quad (2.22)$$

Definiendo

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 - E_0(m) \quad (2.23)$$

se tiene que

$$\mathcal{H}_0 - \mathcal{J}_0 = N_m(\mathcal{H}_0) - \mathcal{J} \quad (2.24)$$

como era de esperar, ya que siendo  $\mathcal{H}_0$  una forma cuadrática en los campos fundamentales, el efecto del orden normal se reduce a la suma de una constante.

Para concluir con el procedimiento de orden normal nos falta tener en cuenta el término de interacción

$$y \mathcal{H}_{int} = -\frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \psi \quad (2.25)$$

Haciendo uso del teorema de Wick, para un campo escalar libre de masa  $m$ , se puede establecer la siguiente identidad:

$$e^{i \int J(x) \psi(x) d^2x} = N_m \left( e^{i \int J(x) \psi(x) d^2x} \right) e^{-\frac{1}{2} \iint J(x) \Delta_m(x,y) J(y) d^2x d^2y} \quad (2.26)$$

donde  $J(x)$  es una función cualquiera del espacio y el tiempo y  $\Delta(x,y,m)$  es la función de Wightman de dos puntos para el campo libre. Cuando se consideran las exponenciales ordenadas temporalmente se tiene, en lugar de  $\Delta$ , el propagador de Feynman para el campo libre.  $\Delta$  es proporcional a la función  $K_0$  de Bessel y tiene el siguiente comportamiento para pequeñas separaciones de tipo espacial:

$$\Delta(x,m) = -\frac{1}{4\pi} \ln(cm^2x^2) \quad (2.27)$$

$$c = \frac{1}{2} e^\gamma$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler. Como (2.27) diverge en el límite ultravioleta ( $x^2 \rightarrow 0$ ) introducimos en la teoría una gran masa  $\Lambda$  y sustituimos:

$$\Delta(x, m) \longrightarrow \Delta(x, m, \Lambda) = \Delta(x, m) - \Delta(x, \Lambda) \quad (2.28)$$

Así nos queda un propagador que no es singular en el origen:

$$\Delta(0, m, \Lambda) = -\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 \quad (2.29)$$

Utilizando (2.26) con

$$J(x) = \beta \delta(x-y) \quad (2.30)$$

resulta:

$$\begin{aligned} e^{i\beta\varphi(x)} &= N_m \left( e^{i\beta\varphi(x)} \right) e^{-\frac{\beta^2}{2} \Delta(0, m, \Lambda)} = \\ &= \left( \frac{m}{\Lambda} \right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} N_m \left( e^{i\beta\varphi(x)} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ahora es evidente que definiendo el parámetro renormalizado

$$\alpha = \left( \frac{m}{\mu} \right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} \alpha_0 \quad (2.32)$$

se tiene

$$\alpha_0 \cos \beta \varphi = \alpha N_m(\cos \beta \varphi) \quad (2.33)$$

En este punto es importante hacer notar que  $m$  es un parámetro de masa arbitrario y podríamos elegir otro cualquiera sin afectar el procedimiento. Los órdenes normales definidos para dos masas diferentes  $m$  y  $\mu$  se relacionan trivialmente a través de (2.31):

$$N_m(\cos \beta \varphi) = \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} N_\mu(\cos \beta \varphi) \quad (2.34)$$

Estas distintas elecciones sólo llevan a redefinir  $\alpha$  por medio de un factor finito.

Consideraciones similares pueden hacerse para la parte "libre" de  $\psi_0$ . En efecto, de (2.21) y (2.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} N_m(\psi_0) &= N_\mu(\psi_0) + E_0(\mu) - E_0(m) = \\ &= N_\mu(\psi_0) + \frac{1}{8\pi} (\mu^2 - m^2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ahora sí, usando (2.24) y (2.33), estamos en condiciones de escribir la densidad hamiltoniana ordenada normalmente:

$$\mathcal{H} = N_m \left( \mathcal{H}_0 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \mathcal{J} \right) \quad (2.36)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mathcal{J}$  son parámetros finitos. Comprobamos así, que para la teoría Seno-Gordon fijar el orden normal es equivalente a realizar una renormalización multiplicativa de  $\alpha_0$  y una renormalización aditiva de  $\mathcal{J}_0$ , mientras que  $\beta$  no requiere renormalización alguna.

El paso siguiente es estudiar la serie perturbativa en potencias de  $\alpha$  correspondiente al modelo bosónico bajo consideración. El orden normal, cuya implementación acabamos de discutir, da cuenta de todas las divergencias ultravioletas de la teoría. Subsisten, sin embargo, serias divergencias infrarrojas, propias de toda teoría de campos sin masa. La forma mas sencilla de controlar este problema consiste en dar una masa  $\mu$  al campo escalar, y hacer  $\mu = 0$  al final de los cálculos. Consideramos entonces la densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = N_m \left( \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \mathcal{J} \right) \quad (2.37)$$

Para obtener las funciones de Green deseadas es útil

calcular un objeto de naturaleza un poco más general que el requerido en nuestro caso inmediato:

$$G = \langle 0, \mu | T \prod_j N_m \left( e^{i\beta_j \varphi(x_j)} \right) | 0, \mu \rangle \quad (2.38)$$

donde T es el operador de ordenamiento temporal y  $\langle 0, \mu | A | 0, \mu \rangle$  representa el valor medio de vacío del operador A en una teoría de campos escalares libres,  $\varphi(x)$ , con masa  $\mu$ . Si nos restringimos a una región finita

$$x \ll \frac{1}{\mu} \quad (2.39)$$

el propagador de Feynman coincide con la expresión (2.27), salvo por factores de  $i\epsilon$  que no escribiremos para no recargar la notación. Usando el resultado (2.34):

$$G = \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right)^{\sum_j \frac{\beta_j^2}{8\pi}} \langle 0, \mu | T \prod_j N_\mu \left( e^{i\beta_j \varphi(x_j)} \right) | 0, \mu \rangle \quad (2.40)$$

Ahora se puede aplicar el teorema de Wick, descartando todas las contribuciones que involucran contracciones de campos en un mismo punto, puesto que han sido removidas por el orden normal. Es fácil ver que el resultado es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \left( \frac{\mu}{m^2} \right)^{\sum_i \frac{\beta_i^2}{8\pi}} \prod_{i>j} [c \mu^2 |x_i - x_j|^2]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}} = \\
 &= \mu^{\frac{(\sum_i \beta_i)^2}{4\pi}} m^{-\frac{1}{4\pi} \sum_i \beta_i^2} \prod_{i>j} [c |x_i - x_j|^2]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}}
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

Este resultado es importante porque, además de ser consistente con la invarianza de la teoría libre ( en el límite  $\mu \rightarrow 0$ ) frente al cambio  $\varphi \rightarrow \varphi + \text{cte.}$  (8), simplifica notablemente el análisis de las series perturbativas. En efecto, todas aquellas contribuciones que corresponden al caso

$$\sum_i \beta_i \neq 0$$

se anulan en el límite  $\mu \rightarrow 0$ . En consecuencia, sólo debemos conservar aquellas que son independientes de  $\mu$ , es decir las correspondientes a

$$\sum_i \beta_i = 0 \tag{2.42}$$

En el caso del Seno-Gordon, el objeto de interés es:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} N_m(\cos \beta \varphi) = \frac{\alpha}{2\beta^2} N_m(e^{i\beta\varphi} + e^{-i\beta\varphi}) \tag{2.43}$$

A la luz de la discusión previa se puede verificar que los únicos términos de la expansión que subsisten al tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$  son aquellos que contienen igual número de factores  $N_m(e^{i\beta\varphi})$  y  $N_m(e^{-i\beta\varphi})$ . Utilizando (2.41) y (2.42) se encuentra que estos términos son:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \prod_{i=1}^m N_m(e^{i\beta\varphi(x_i)}) N_m(e^{-i\beta\varphi(y_i)}) | 0 \rangle = \\ & = \frac{\prod_{i>j} [(x_i - x_j)^2 (y_i - y_j)^2 c^2 m^4]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}}{\prod_{i>j} [c m^2 (x_i - y_j)^2]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Con el objeto de establecer la equivalencia entre el modelo Seno-Gordon y el modelo de Thirring masivo, estudiaremos las funciones de Green correspondientes a este último. El modelo masivo de Thirring describe el comportamiento de campos fermiónicos que autointeractúan a través de la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}_T = \bar{\Psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi - m' z \bar{\Psi} \Psi - \frac{g}{2} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) \quad (2.45)$$

donde  $z$  es una constante ( dependiente de un "cutoff" ) cuya presencia en el término de masa es necesaria para definir adecuadamente la teoría (ver más adelante). En este caso es conveniente elegir las matrices de Dirac de la forma

$$\gamma_0 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = i \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\gamma_5 = -\sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\sigma_z$  son las matrices de Pauli.

Nos interesa estudiar el desarrollo en potencias de la masa fermiónica  $m'$ , es decir que haremos teoría de perturbaciones alrededor del modelo no masivo. Una propiedad importante de esta teoría libre ( $m' = 0$ ) es su invarianza frente a transformaciones quirales, es decir frente a cambios en los campos fermiónicos del tipo:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\gamma_5 \alpha} \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\gamma_5 \alpha}$$

Veremos que esto se traduce en una simplificación análoga a la que encontramos al analizar el modelo bosónico. Para poner de manifiesto esta característica es conveniente escribir el término de masa en la forma:

$$\begin{aligned} Z_{m'} \bar{\psi} \psi &= Z \bar{\psi} \frac{1+\gamma_5}{2} \psi + Z \bar{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi = \\ &= m' Z (\psi_1^\dagger \psi_2 + \psi_2^\dagger \psi_1) \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde se ha usado la siguiente notación:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 = (\psi_2^\dagger \quad \psi_1^\dagger)$$

B.Klaiber (1) ha obtenido fórmulas cerradas para valores medio de vacío de productos arbitrarios de campos fermiónicos. Haciendo uso de sus resultados se encuentra que a una función de Green arbitraria de la teoría sólo contribuyen aquellos términos que poseen igual número de operadores  $\psi_1^\dagger \psi_2$  y  $\psi_2^\dagger \psi_1$ . Esto se puede mostrar siguiendo los pasos del trabajo de Klaiber. Para evitar las divergencias que ocurren en toda función de Green cuando  $\psi_1^\dagger$  y  $\psi_2$  se contraen en un mismo punto, se define

$$\sigma_+(x) = \lim_{y \rightarrow x} (x-y)^{2K} \psi_1^\dagger(x) \psi_2(y)$$

$$\sigma_-(x) = \lim_{y \rightarrow x} (x-y)^{2K} \psi_2^\dagger(x) \psi_1(y)$$
(2.49)

donde K es uno de los parámetros de Klaiber, dado por:

$$K = \frac{g}{4\pi} \frac{2\pi + g}{\pi + g} \tag{2.50}$$

y g es la constante de acoplamiento de la teoría. Con estas definiciones  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$  tienen elementos de matriz finitos

y los términos que contribuyen son:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \prod_{i=1}^m \sigma_+(x_i) \sigma_-(y_i) | 0 \rangle &= \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \prod_{i>j} \left[ (x_i - x_j)^2 (y_i - y_j)^2 M^4 \right]^{(1+b/\pi)}}{\prod_{i,j} \left[ M^2 (x_i - y_j)^2 \right]^{(1+b/\pi)}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

En esta expresión M es una masa arbitraria asociada a una renormalización finita en la definición de  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$ , y

$$b = - \frac{g}{1 + g/\pi} \quad (2.52)$$

es otro de los parámetros introducidos por Klaiber.

Es inmediato ahora verificar que los términos de los desarrollos perturbativos, dados por (2.51) para el modelo fermiónico y (2.44) para el bosónico, coinciden si se hacen las siguientes identificaciones:

$$\sigma_+ = -\frac{1}{2} N_m (e^{i\beta\psi}) \quad (2.53)$$

$$\sigma_- = -\frac{1}{2} N_m (e^{-i\beta\psi}) \quad (2.54)$$

$$M^2 = c m^2 \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{1 + g/\pi} = \frac{\beta^2}{4\pi} \quad (2.56)$$

Por lo tanto, ambas series perturbativas coinciden término a término si se toma

$$m' = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (2.57)$$

quedando así establecida la bosonización del modelo de Thirring masivo. Este resultado depende crucialmente de las características particulares del espacio-tiempo bidimensional, ya que en una dimensión espacial no existen las rotaciones y, por lo tanto, tampoco el spin en su sentido usual. Por esta razón no hay un teorema de spin-estadística que prohíba la construcción de un campo fermiónico a partir de estados bosónicos (9).

Uno de los aspectos más interesantes de la equivalencia obtenida consiste en que abre un nuevo camino para el estudio de teorías fermiónicas en términos de modelos bosó-

nicos cuyo tratamiento resulta, en muchos casos, más sencillo. Además, como lo muestra la fórmula (2.56), el límite para acoplamiento fuerte del modelo fermiónico ( $g \rightarrow \infty$ ) corresponde al régimen de acoplamiento débil en la teoría bosónica ( $\beta \rightarrow 0$ ). Este fenómeno se ha encontrado también en la bosonización de otros modelos fermiónicos como, por ejemplo, en el modelo de Schwinger masivo (11) y en la Cromodinámica Cuántica bidimensional con un sabor (12). Otra consecuencia interesante que se extrae de la ec. (2.56) es que para  $\beta^2 = 4\pi$  se tiene  $g = 0$ , luego haciendo en (2.57)  $m' = \alpha = 0$ , se establece una correspondencia entre la teoría de fermiones libres sin masa y un modelo de campos escalares libres no masivos.

Bibliografía

- (1) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics, Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and Breach, New York, 1968.
- (2) W.Thirring, Ann. Phys,(N.Y.), 3, (1958), 91.
- (3) V.Glaser, Nuovo Cimento, 9 , (1958), 990.
- (4) K.Johnson, Nuovo Cimento, 20 , (1961), 773.
- (5) C.Sommerfield, Ann. Phys. (N.Y.), 26 , (1963), 1.
- (6) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (7) J.Schwinger, Phys. Rev., 128 , (1962), 2425.
- (8) S.Coleman, Phys. Rev. D 11 , (1975), 2088.
- (9) S.Coleman, "Classical lumps and their quantum descendants", Lectures in the International School of Subnuclear Physics, Ettore Majorana, Erice, 1975.
- (10) N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov, "Introduction to the theory of quantized fields", Wiley Interscience, 1958.
- (11) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys. (N.Y.), 93 , (1975), 267.  
S.Coleman, Ann. Phys. (N.Y.), 101 , (1976), 239.
- (12) V.Baluni, Phys. Lett. B 90 , (1980), 407.  
P.Steinhardt, Nucl. Phys. B 106 , (1980), 100.

2.3. Bosonización abeliana. El modelo de Schwinger.

El modelo de Schwinger es la Electrodinámica Cuántica en dos dimensiones ( 1 espacio, 1 tiempo ) con electrones sin masa:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + e j_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.58)$$

donde  $e$  es la carga del fermión,  $A_\mu$  es el campo de gauge y

$$j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \quad (2.59)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.60)$$

Una de las propiedades importantes de esta teoría es su invarianza de gauge local. En efecto, es fácil comprobar que la densidad lagrangiana (2.58) permanece invariante frente al cambio  $\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x)$  ( $\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{-i\alpha(x)}$ ) y  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$ .

Desde que Schwinger mostró que esta teoría es resoluble exactamente (1), ha sido objeto de numerosas investigaciones (2-4). El análisis más completo de sus soluciones se encuentra en el trabajo de Lowenstein y Swieca (5), quienes dieron soluciones explícitas para diferentes fijados de

gauge. En particular, estos autores mostraron que la solución original de Schwinger corresponde al marco que en 4 dimensiones se conoce como de métrica indefinida de Gupta-Bleuler, en el sentido de que las ecuaciones de Maxwell se satisfacen solamente para un "subespacio físico" del espacio de Hilbert completo (11). Construyendo el espacio de Hilbert con métrica positiva en el gauge  $\partial_\mu A_\mu = 0$ , y haciendo uso de los métodos introducidos por Klaiber (6) en su análisis del modelo de Thirring, pudieron demostrar la completa desaparición de las excitaciones electrónicas, de acuerdo a la conjetura de Schwinger (1) acerca del apantallamiento total de la carga eléctrica. ( Esto condujo a proponer esta teoría como modelo prototipo para el confinamiento de quarks (7) ). Más aún, encontraron que el álgebra de observables es isomorfa a la de un campo escalar libre y masivo, y establecieron la bosonización de la corriente fermiónica. Estos resultados constituyen una de las primeras evidencias de la existencia de un vínculo estrecho entre fermiones y bosones en una teoría cuántica de campos en dos dimensiones ( Fenómenos similares se conocían con anterioridad en la Mecánica Estadística (8) ).

Las ecuaciones de movimiento de la teoría definida por (2.58) pueden resolverse representando el campo fermiónico  $\Psi(x)$  en término de operadores de campo libres:

$$\Psi(x) = e^{i\int^5 [\tilde{\eta}^{(+)} + \phi^{(+)}]} \chi(x) e^{i\int^5 [\tilde{\eta}^{(-)} + \phi^{(-)}]} \quad (2.61)$$

donde  $\phi(x) = \phi_{(x)}^+ + \phi_{(x)}^-$  es un campo escalar libre de masa  $e/\sqrt{\pi}$ ,  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^+ + \eta^-$  es un campo escalar sin masa, cuantificado con métrica indefinida, y  $\chi(x)$  es el espinor correspondiente a un campo fermiónico libre. ( Con los superíndices + y - se indican las componentes de creación y aniquilación de los campos, respectivamente ).

Insertando (2.59) en la ecuación de Dirac derivada de (2.58), se obtiene:

$$A^\mu(x) = -\frac{1}{e} \left( \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) + \partial^\mu \eta(x) \right) \quad (2.62)$$

donde hemos definido:

$$\partial^\mu \eta(x) = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\eta}(x) \quad (2.63)$$

Considerando ahora la corriente fermiónica correspondiente a un límite invariante de gauge (1), (9-10) se obtiene:

$$j^\mu(x) = j_{\text{libre}}^\mu(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu \eta(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) \quad (2.64)$$

El primer término en el miembro derecho de esta expresión es la corriente de fermiones libres:

$$j_{\text{libre}}^{\mu} \equiv \bar{\chi}(x) \gamma^{\mu} \chi(x) \quad (2.65)$$

El término

$$j_{\text{libre}}^{\mu}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^{\mu} \eta(x) \equiv j_L^{\mu}(x) \quad (2.66)$$

es una contribución puramente longitudinal que proviene de la excitación de masa nula.

En estas condiciones puede mostrarse que las ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = e j^{\mu} \quad (2.67)$$

no se satisfacen. En su lugar se tiene

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = e (j^{\mu} - j_L^{\mu}) \quad (2.68)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al que se emplea

en el formalismo de Gupta-Bleuler (11), podemos restringirnos a un subespacio físico  $\mathcal{H}_{\text{físico}}$ , del espacio de Hilbert completo, definido por:

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} \right)^{(-)} \Psi = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}_{\text{físico}} \quad (2.69)$$

De esta forma, cuando se toman en cuenta los estados con sentido físico, (2.68) se reduce a (2.67), ya que

$$\langle \Psi | \frac{\partial}{\partial L} f(x) | \Phi \rangle = 0; \quad \forall \Psi, \Phi \in \mathcal{H}_{\text{físico}}. \quad (2.70)$$

En efecto, actuando sobre todos los vectores del "espacio físico",  $\frac{\partial}{\partial L}$  da cero, de lo cual se desprende que  $\frac{\partial}{\partial L}$  se anula idénticamente en ese espacio. Luego, por (2.66) el campo  $\eta(x)$  se identificará con  $f(x)$  dada por

$$\frac{\partial}{\partial L} \eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial L} f(x) \quad (2.71)$$

Como consecuencia de la construcción de  $\mathcal{H}_{\text{físico}}$ , el campo "electrónico" apropiado es el que se relaciona con  $\Psi(x)$  mediante la siguiente transformación de gauge:

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{i\eta^+(x)} \Psi(x) e^{i\eta^-(x)} \quad (2.72)$$

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \frac{1}{e} \partial^\mu \eta(x) = -\frac{1}{e} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x)$$

Aplicando ahora el método desarrollado por Klaiber (5-6) pueden calcularse objetos de interés como las funciones de Green de la teoría, el álgebra de los observables y la corriente fermiónica. Puede así mostrarse, por ejemplo, que las soluciones del modelo de Schwinger corresponden a una subclase de soluciones del modelo de Thirring. En particular, para la corriente fermiónica resulta:

$$j^\mu(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) \quad (2.73)$$

es decir, que se ha removido la contribución longitudinal relacionada a la excitación de masa nula, en completo acuerdo con (2.64) y (2.71). Por otra parte, (2.73) establece la proporcionalidad entre  $j^\mu(x)$  (objeto asociado a la dinámica de partículas fermiónicas) y el campo bosónico  $A^\mu(x)$ . Volveremos más adelante sobre esta relación (ver capítulo 3)

Ahora vamos a mostrar que la identidad (2.73) junto

a la identificación

$$i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) \quad (2.74)$$

son suficientes para escribir la densidad lagrangiana original (2.58) exclusivamente en términos del campo bosónico  $\phi(x)$  (12). ( Nótese que (2.74) puede obtenerse como caso particular de la equivalencia descubierta por Coleman, establecida en la sección anterior).

Por simplicidad adoptamos el gauge de Coulomb, que en dos dimensiones toma la forma:

$$A_1 = 0 \quad (2.75)$$

Tomando la componente  $\mu = 0$  de (2.67) se obtiene:

$$\partial_1 \partial_1 A_0 = e j^0 = e \Psi^+ \Psi \quad (2.76)$$

Como es bien sabido, la solución de esta ecuación se puede obtener convolucionando la función de Green  $G(x_1, x'_1)$  que satisface

$$\partial_1 \partial_1 G = \delta(x_1 - x'_1) \quad (2.77)$$

con la inhomogeneidad  $(e \Psi^+ \Psi)$ . En este caso unidimensional

es particularmente simple integrar (2.77). El resultado es:

$$G(x_1 - x'_1) = \frac{1}{2} |x_1 - x'_1| \quad (2.78)$$

Esta es la versión unidimensional del potencial coulombiano.

De esta forma se tiene:

$$A_0(x_1) = \frac{e}{2} \int dx'_1 |x_1 - x'_1| \psi^\dagger(x'_1) \psi(x'_1) \quad (2.79)$$

Ahora, haciendo uso de la bosonización de la corriente, ecuación (2.73), se encuentra que:

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_1 \phi \quad (2.80)$$

por lo que el segundo término de (2.58) puede escribirse en la forma

$$e \int dx'_1 A_\mu = \frac{e^2}{2\pi} \int dx'_1 (\partial_1 \phi(x_1)) |x_1 - x'_1| (\partial'_1 \phi(x'_1)) \quad (2.81)$$

El término restante es:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_i A_0)^2 = \\
 &= \frac{e^2}{8\pi} \int dx'_i dx''_i \left[ \left( \frac{d}{dx_i} |x_i - x'_i| \right) \left( \frac{d}{dx_i} |x_i - x''_i| \right) (\partial'_i \phi(x'_i)) \partial''_i \phi(x''_i) \right] \quad (2.82) \\
 &= \frac{e^2}{8\pi} \int dx_i dx''_i \frac{d}{dx_i} (|x_i - x''_i|) [2\theta(x_i - x''_i) - 1] (\partial'_i \phi) \partial''_i \phi
 \end{aligned}$$

donde  $\theta(x_1 - x''_1)$  es la distribución de Heaviside. Suponiendo que los campos se anulan en  $x_1 \rightarrow \pm \infty$ , y considerando la contribución al lagrangiano total, se tiene:

$$-\frac{1}{4} \int dx_i F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi} \int dx_i dx'_i (\partial'_i \phi) |x_i - x'_i| (\partial_i \phi) \quad (2.83)$$

Así, teniendo en cuenta (2.74), (2.81) y (2.83), el lagrangiano bosonizado es:

$$\begin{aligned}
 \int dx_i \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \int dx_i (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \\
 &+ \frac{e^2}{4\pi} \iint dx'_i (\partial_i \phi(x_i)) |x_i - x'_i| (\partial'_i \phi(x'_i)) dx_i
 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Esta expresión puede escribirse de un modo más simple integrando por partes el término de energía potencial:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi} \int dx_1 dx'_1 (\partial_1 \phi(x_1)) |x_1 - x'_1| \partial'_1 \phi(x'_1) &= \\ = \frac{e^2}{4\pi} \int dx_1 dx'_1 \phi(x_1) (\partial_1 \partial'_1 |x_1 - x'_1|) \phi(x'_1) &= \quad (2.85) \\ = \frac{e^2}{2\pi} \int dx_1 (\phi(x_1))^2 \end{aligned}$$

Esto da lugar a un término de masa para el bosón libre. Si bien este resultado es satisfactorio en cuanto a que nos permite establecer la equivalencia entre el lagrangiano fermiónico de partida y un modelo de bosones libres de masa  $e/\sqrt{\pi}$ , por otra parte nos enfrenta a nuevo problema, porque (2.85) no respeta la invarianza quiral de la teoría fermiónica. La densidad de carga quiral es:

$$\begin{aligned} Q_5 &= \int dx_1 j_5^0 = \int dx_1 \varepsilon^{01} j_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_1 \partial_0 \phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_1 \pi \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde  $\pi$  es el impulso canónico conjugado al campo  $\phi$ . Usando la relación canónica (2.16), se obtiene:

$$[Q_5, \phi] = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \quad (2.87)$$

Con esta identidad se puede verificar que

$$e^{-i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} \phi e^{i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} = \phi + \alpha \quad (2.88)$$

con  $\alpha$  constante. Esto quiere decir que el efecto de las transformaciones quirales sobre el campo bosónico equivalente es el de trasladarlo en una constante. Es evidente que (2.85) no es invariante frente al cambio  $\phi \longrightarrow \phi + \alpha$ . Esto indica que hay rotura espontánea de la simetría bajo transformaciones quirales globales. A pesar de este fenómeno, no aparecen bosones de Goldstone debido a la existencia de la anomalía quiral (13-17). ( En el Capítulo 3 trataremos con mayor profundidad el papel de la anomalía quiral en la bosonización).

Si la bosonización ha de ser considerada seriamente como técnica para estudiar una teoría de fermiones a través de una acción bosónica de más fácil manejo matemático, lo deseable es que en el pasaje de un modelo al otro no haya pérdida de información relevante sobre el modelo de partida. En otras palabras, el campo equivalente debe ser tal que la teoría bosónica refleje la simetría original. Esto se consigue escribiendo:

$$\phi = \varphi + \theta \quad (2.89)$$

donde  $\varphi$  es un nuevo campo escalar masivo y  $\theta$  es un campo constante de naturaleza angular. La acción de la transformación quirral sobre estos campos es:

$$e^{-i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} \varphi e^{i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} = \varphi \quad (2.90)$$

$$e^{-i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} \theta e^{i\sqrt{\pi}\alpha Q_5} = \theta + \alpha \quad (2.91)$$

de modo que se reconstruye (2.88), pero la transformación afecta solamente al campo  $\theta$ . Ahora sí podemos escribir el lagrangiano bosónico adecuado para representar (2.58) en términos del campo  $\varphi$  :

$$\int dx_1 \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{e^2}{\pi} \varphi^2) dx_1 \quad (2.92)$$

La carga quirral  $Q_5$  juega el rol de momento canónico conjugado al campo  $\theta$ ; por (2.77):

$$[\pi_\theta, \theta] = i \quad (2.93)$$

con  $\pi_\theta = \sqrt{\pi} Q_5$ . Nótese que tanto  $\theta$  como  $\pi_\theta$  son completamente independientes del campo de Klein-Gordon  $\varphi$ . No participan en la dinámica de la nueva teoría bosónica, su acción se limita a especificar las condiciones de contorno en el infinito.

De acuerdo a esta formulación, el espacio de estados será el producto tensorial del espacio de Fock convencional asociado a  $\varphi$  y un espacio asociado a  $\theta$ , generado por una base de vectores identificados por los autovalores enteros de  $\frac{1}{2} Q_5$ . En efecto, es fácil verificar que el operador  $\exp(in\pi Q_5)$  coincide con la identidad para todo  $n$  entero, siempre que se consideren estados para los cuales  $Q_5$  es un entero par. ( La simetría bosónica equivalente es frente al cambio  $\phi \longrightarrow \phi + n\sqrt{\pi}$  ). Luego, los vectores del espacio de Fock completo serán:

$$|\pm\rangle = |\varphi\rangle |m\rangle \quad (2.94)$$

Los operadores  $\varphi$  y  $\pi_\varphi$  actúan sobre los vectores  $|\varphi\rangle$ , del modo usual, mientras que

$$\pi_\theta |m\rangle = \sqrt{\pi} Q_5 |m\rangle = 2\sqrt{\pi} m |m\rangle \quad (2.95)$$

Por otra parte se puede probar que

$$\left[ \pi_\theta, e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} \right] = \pm i(2i\sqrt{\pi}) e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} \quad (2.96)$$

de donde surge la acción de los operadores  $\exp(\pm 2i\sqrt{\pi}\theta)$  sobre los vectores  $|n\rangle$  :

$$e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} |m\rangle = |m \mp 1\rangle \quad (2.97)$$

El espacio discreto de los vectores  $|n\rangle$  está asociado a la rotura espontánea de la simetría. Como el hamiltoniano no contiene a los operadores  $\theta$  y  $\pi_\theta$ , el estado de vacío de la teoría es completamente ambiguo frente a la elección del factor  $|, \rangle$ . La solución original de Schwinger corresponde a  $n = 0$ , el único vacío simétrico frente a transformaciones quirales. Con esta elección, sin embargo, los elementos de matriz de operadores locales violan la propiedad de factorización ( "cluster property" ). Como ejemplo de este problema consideremos el siguiente valor medio:

$$\langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle \quad (2.98)$$

donde  $: :$  simboliza el orden normal usual ( es decir, ha-

ciendo uso de la masa de la teoría). De acuerdo a (2.89) y (2.94) la expresión anterior es igual a

$$\langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle \{ | 0 \rangle e^{2i\sqrt{\pi}\theta} e^{-2i\sqrt{\pi}\theta} | 0 \rangle \} \quad (2.99)$$

Aplicando el teorema de Wick se encuentra que el primer factor es la exponencial del propagador de Feynman, que tiende a cero para  $z \rightarrow \infty$ . El segundo factor es evidentemente igual a uno, luego

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle = 1 \quad (2.100)$$

La propiedad de factorización (11) requiere

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle 0 | T : e^{2i\sqrt{\pi}\phi(z)} : e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} : | 0 \rangle = \quad (2.101)$$

$$= \langle 0 | e^{2i\sqrt{\pi}\phi(0)} | 0 \rangle \langle 0 | e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(0)} | 0 \rangle$$

pero

$$\langle 0 | : e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\phi} : | 0 \rangle = \langle 0 | : e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\phi} : | 0 \rangle \{ | 0 \rangle e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} | 0 \rangle \} \quad (2.102)$$

y como, por (2.97),

$$e^{\pm 2i\sqrt{\pi}\theta} |0\rangle = |\mp 1\rangle \quad (2.103)$$

se tiene que el miembro derecho de (2.101) se anula y por lo tanto se viola la propiedad de factorización.

Lowenstein y Swieca (5) mostraron que esta propiedad se restaura tomando un vacío asimétrico de la forma

$$|\theta_0\rangle = |0\rangle |\theta_0\rangle \quad (2.104)$$

donde  $|\theta_0\rangle$  es un autovector de  $\theta$ . Los estados de vacío que corresponden a diferentes valores de  $\theta_0$  se relacionan unos con otros mediante transformaciones quirales.

En el mundo hadrónico real la simetría quiral está rota debido a las pequeñas masas de los quarks. Es importante, por lo tanto, el estudio del modelo de Schwinger cuando se le agrega un término de masa fermiónica (14-15), (18-19):

$$\mathcal{L}_m = m : \bar{\psi} \psi : \quad (2.105)$$

Utilizando las ecuaciones (2.53) y (2.54), de la

sección anterior y la discusión precedente sobre el vacío  $\theta$ , se encuentra el equivalente bosónico del término de masa:

$$\mathcal{L}_m = c_m : \cos [2\sqrt{\pi} (\varphi + \theta_0)] \quad (2.106)$$

donde  $\theta_0$  es un autovalor de  $\theta$  y  $c$  es una constante cuyo valor exacto no nos interesa aquí (ver ec. (2.27)).

Este modelo masivo deja de ser exactamente resoluble, sin embargo es posible desarrollar la teoría de perturbaciones, tomando a la masa como parámetro perturbativo. Por otra parte, es claro que el término de masa (2.105) rompe la simetría quiral del modelo de partida, de modo que ya no se puede esperar que exista rotura espontánea de la simetría frente a transformaciones quirales globales. Otra diferencia importante entre el modelo sin masa y la teoría masiva se pone de manifiesto analizando los diagramas de Feynman correspondientes a la interacción entre distribuciones clásicas de corrientes externas.

a)



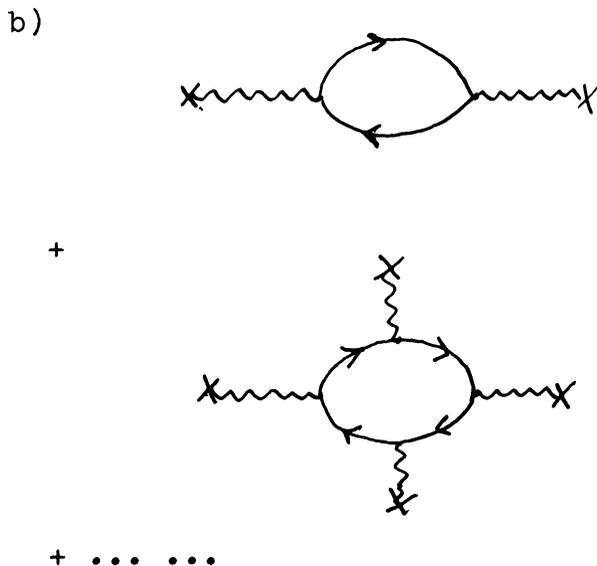


Figura 2.  $X$  : distribución de corriente externa  
 $\sim$  : propagador electromagnético  
 $\rightarrow$  : propagador fermiónico

La figura 2 a) representa el intercambio de un propagador electromagnético, que da lugar a una fuerza de largo alcance, en ambos casos. Cuando los fermiones no tienen masa, esta fuerza se cancela con el primer diagrama de 2 b). La función de polarización del vacío presenta un polo, para impulso nulo, que cancela el polo del diagrama 2 a) (20-21). Todos los diagramas restantes de 2 b) se anulan idénticamente.

Cuando los electrones tienen masa la situación cambia radicalmente. En este caso los diagramas de la figura 2 b) no se anulan. Sin embargo, la suma de todos ellos puede cancelar la contribución del propagador libre para valores particulares de las cargas externas ( En el caso  $m = 0$  el apantallamiento se produce para todos los valores de las cargas externas ).

Consideremos el modelo masivo de Schwinger en presencia de una distribución externa de corriente  $K_\mu$  :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi + e \int_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m_0 \bar{\Psi} \Psi + A^{\mu} K_{\mu} \quad (2.107)$$

con

$$K_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} D$$

donde D describe la distribución de carga. Estudiaremos el caso sencillo de dos cargas estáticas opuestas de magnitud Q separadas por una distancia L. La forma correspondiente de la función D está representada en la figura 3:

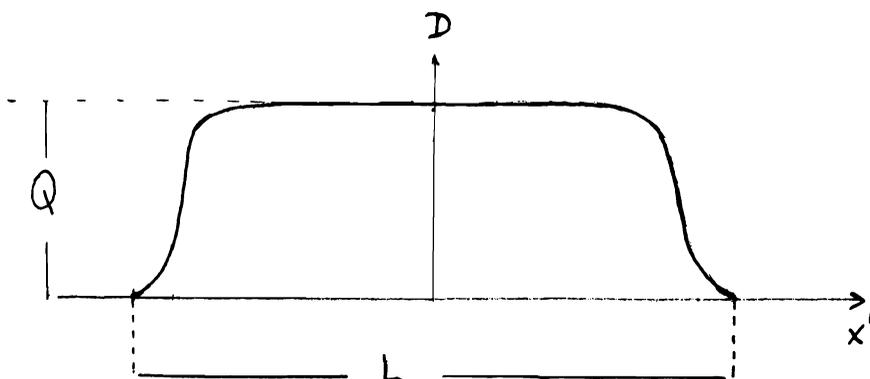


Figura 3.

La contribución a la energía de vacío debida a la corriente externa está dada por los diagramas de la figura 2. Con el objeto de describir el problema en término de campos bosónicos es útil observar que la figura 2 a) proviene de un término en la acción de la forma

$$\begin{aligned}
 I_a &= -\frac{1}{2} \int d^2x \, K_\mu \square^{-2} K^\mu = \\
 &= -\int d^2x \, D^2
 \end{aligned}
 \tag{2.108}$$

mientras que todos los gráficos de la figura 2 b) surgen de una interacción entre la corriente externa  $K_\mu$  y la corriente fermiónica  $j_\mu$ , dada por

$$\begin{aligned}
 I_b &= -e \int d^2x \, j^\mu \square^{-2} K_\mu = \\
 &= -\frac{e}{\sqrt{\pi}} \int d^2x \, D\phi
 \end{aligned}
 \tag{2.109}$$

donde hemos usado la relación (2.73). Agregando estos términos a (2.107), junto a la identidad dada por las ecuaciones (2.105) y (2.106), es fácil verificar que para la densidad hamiltoniana del sistema se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} : \pi^2 + (\partial_i \phi)^2 + \frac{e^2}{\pi} \left( \phi + \frac{\sqrt{\pi}}{e} D \right) : + \\
 &+ m_0 e c : \cos(2\sqrt{\pi} \phi + \theta_0) :
 \end{aligned}
 \tag{2.110}$$

expresión que involucra solamente interacciones locales entre  $\phi$  y  $D$ . De acuerdo a la figura 3, cuando crece  $L$ , tam-

bién crece la región en la cual  $D = Q$ , de manera que la energía de interacción es simplemente la energía de vacío por unidad de longitud, para un campo  $D$  constante, multiplicada por  $L$ .

Haciendo

$$\phi' = \phi + \frac{\sqrt{\pi}}{e} D$$

la densidad hamiltoniana, para  $D = Q$  resulta

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} : \pi^2 + (\partial_i \phi')^2 + \frac{e^2}{\pi} \phi'^2 : + \quad (2.111)$$

$$+ m_0 c e : \cos \left( 2\sqrt{\pi} \phi' + \theta - \frac{2\pi}{e} Q \right) :$$

Si llamamos  $\mathcal{E}(\theta)$  a la energía de vacío por unidad de longitud en ausencia de cargas externas, la energía de interacción entre dos cargas separadas por una gran distancia  $L$  es

$$E = \left[ \mathcal{E} \left( \theta - \frac{2\pi}{e} Q \right) - \mathcal{E}(\theta) \right] L + \text{términos constantes para } L \rightarrow \infty \quad (2.112)$$

Como el hamiltoniano (2.111) es una función periódica de  $Q$  con período  $e$ , también lo es la energía de vacío, de modo que cuando  $Q$  es un múltiplo entero de  $e$ , la fuerza de largo

alcance desaparece. Este resultado, independiente de la teoría de perturbaciones, se interpreta físicamente como un apantallamiento de las cargas de los fermiones ( "quarks") debido a la presencia de cargas externas que son múltiplos enteros de las cargas elementales. Como ya se indicó anteriormente, en el caso en que los fermiones no tienen masa, el apantallamiento se produce para cualquier valor de las cargas externas.

Bibliografia

- (1) J.Schwinger, Phys. Rev., 128 , (1962), 2425.
- (2) L.S.Brown, Nuovo Cimento, 29 , (1963), 617.
- (3) B.Zumino, Phys. Lett., 10 , (1964), 224;  
Acta Phys. Austriaca Supl. 2 , (1966), 212.
- (4) C.R.Hagen, Nuovo Cimento B, 51 , (1967), 169.
- (5) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys.,  
(N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (6) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics,  
Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and  
Breach, New York, 1968.
- (7) A.Casher, J.Kogut and L.Susskind, Phys. Rev.  
Lett., 31 , (1973), 792.
- (8) D.Mattis and E.Lieb, Journal Math. Phys., 6 ,  
(1965), 304.
- (9) J.Schwinger, Phys. Rev. Lett., 3 ,(1959), 269.
- (10) J.H.Lowenstein, Comm. Math. Phys., 16 , (1970),  
265.
- (11) C.Itzykson and J.Zuber, "Quantum Field Theory",  
Mc. Graw-Hill, 1980.
- (12) J.Kogut and L.Susskind, Phys. Rev. D, 11 ,  
(1975), 3594.
- (13) K.Johnson, Phys. Lett, 5 , (1963), 253.
- (14) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys.  
(N.Y.), 93 , (1975), 267.
- (15) J.A.Swieca, Fortscritte der Physik, 25 , (1977),  
303.

- (16) S.L.Adler, Phys. Rev., 177 , (1969), 2426.
- (17) J.S.Bell and R.Jackiw, Nuovo Cimento, 51 ,  
(1969), 47.
- (18) L.Susskind and J.Kogut, Phys. Rep. 23 , (1976),  
348.
- (19) S.Coleman, Ann. Phys. (N.Y.), 101 , (1976),  
239.
- (20) G.Mc. Keon, Phys. Rev. D, 14 , (1975), 1577.
- (21) A.Yildiz, Phys. Rev. D, 10 , (1974), 1796.

#### 2.4. Bosonización no abeliana: el método operacional

Una vez establecida la bosonización en modelos abelianos (1-3), el paso siguiente es el de la extensión del procedimiento para teorías en las que los campos fermiónicos pertenecen a un multiplete que se transforma bajo un grupo no abeliano. Esta cuestión reviste un interés especial porque en el mundo real de cuatro dimensiones son teorías de gauge no abelianas las que han mostrado ser más apropiadas para describir las interacciones fundamentales de la materia. Los primeros trabajos en este sentido pusieron de manifiesto serias complicaciones, al tratar de aplicar el esquema previo -descrito en las secciones anteriores-, en forma directa (4-7). Estas dificultades se deben fundamentalmente a que el procedimiento usual no preserva la simetrías originales de la teoría. Un reflejo claro de esta situación aparece al considerar la bosonización de productos bilineales de campos fermiónicos. En particular, las corrientes fermiónicas diagonales pueden expresarse adecuadamente en término de campos bosónicos, como en el caso abeliano, ec.(2.73), mientras que las componentes no diagonales de estas corrientes resultan ser no locales en la versión bosonizada.

Este tipo de problemas fue atacado por Witten,(8), quien desarrolló un método alternativo que permitió generalizar convenientemente la técnica de bosonización operacional, de manera local y respetando las simetrías originales. Para estudiar este método es útil considerar el caso simple

de fermiones libres sin masa y reescribir la ecuación (2.73), para el caso abeliano, pero de una forma tal que facilite su generalización no abeliana. Sea  $U = \exp(i\sqrt{4\pi}\phi)$  un elemento del grupo abeliano  $U(1)$ . La corriente fermiónica bosonizada (2.73) puede escribirse en la forma

$$j_{\mu} = \frac{i}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \bar{U}^{-1} \partial_{\nu} U = \frac{i}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} (\partial^{\nu} U) \bar{U}^{-1} \quad (2.113)$$

donde hemos escrito ambos ordenamientos posibles, resaltando el carácter abeliano del grupo  $U(1)$ . Obviamente, al extender esta fórmula al caso no abeliano tendremos que ser cuidadosos con el orden de los factores.

Es conveniente trabajar en el sistema de coordenadas del cono de luz:

$$X^{\pm} = \frac{X^0 \pm X^1}{\sqrt{2}} \quad (2.114)$$

En este sistema las expresiones de las corrientes toman una forma más compacta y como veremos más adelante, se hace manifiesta la simetría del modelo en estudio.

Normalizando el tensor de Levi-Civita tal que  $\epsilon_{01} = -\epsilon_{+-} = 1$ , las correspondientes componentes de la corriente son:

$$j_+ = -\frac{i}{2\pi} \bar{u}^{-1} \partial_+ u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_+ \phi$$

(2.115)

$$j_- = \frac{i}{2\pi} (\partial_- u) \bar{u}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_- \phi$$

donde  $\partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_0 \pm \partial_1)$ .

En el caso de fermiones libres sin masa que estamos considerando, la simetría frente a transformaciones globales de gauge y quiral da lugar a la conservación de ambas corrientes, la vectorial  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  y la axial  $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ . En (1+1) dimensiones las matrices de Dirac ( seguiremos usando la representación definida por (2.46)) satisfacen la relación

$$\gamma^\mu \gamma_5 = -\epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu \quad (2.116)$$

que permite vincular ambas corrientes:

$$j_5^\mu = -\epsilon^{\mu\nu} j_\nu \quad (2.117)$$

Haciendo uso de esta propiedad y de las ecuaciones de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu j_5^\mu = 0 \quad (2.118)$$

se obtiene

$$\partial_- j_+ = \partial_+ j_- \quad (2.119)$$

La prescripción (2.115) es compatible con (2.119) ya que el campo escalar libre  $\phi$  satisface la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 2 \partial_+ \partial_- \phi = 0 \quad (2.120)$$

Ahora sí, consideremos el caso no abeliano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi \quad (2.121)$$

con los campos fermiónicos tomados en la representación fundamental del grupo  $O(N)$ .

Las corrientes conservadas son

$$J_{\mu}^a = \bar{\Psi} \gamma_{\mu} t^a \Psi \quad (2.122)$$

$$J_{\mu 5}^a = \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 t^a \Psi$$

donde las matrices  $t^a$  son los generadores del grupo  $O(N)$ .  
 Expresando los campos fermiónicos en términos de sus componentes en el cono de luz,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_- \\ \Psi_+ \end{pmatrix}$$

la densidad lagrangiana (2.121) puede reescribirse como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[ \Psi_+^k (\partial_0 - \partial_1) \Psi_+^k + \Psi_-^k (\partial_0 + \partial_1) \Psi_-^k \right] \quad (2.123)$$

donde  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Tal como en el caso abeliano, resulta conveniente expresar las corrientes en sus componentes quirales. Para esto definimos:

$$J_+^{ij}(x,t) = -i (\psi_+^i \psi_+^j)(x,t) \quad (2.124)$$

$$J_-^{ij}(x,t) = -i (\psi_-^i \psi_-^j)(x,t)$$

Si consideramos fermiones de Majorana ( un fermión de Majorana satisface  $\psi = C \psi$ , donde C es la operación de conjugación de carga ) los campos  $\psi^+$  y  $\psi^-$  son reales. Además

$$J_{\pm}^{ij} = -J_{\pm}^{ji} \quad (2.125)$$

como reflejo de la estadística de Fermi, de modo que las corrientes son hermiticas. En analogía con el caso abeliano se verifican las leyes de conservación:

$$\partial_- J_+^{ij} = \partial_+ J_-^{ij} = 0 \quad (2.126)$$

es decir que  $J_+$  es sólo función de  $x^+$  y  $J_-$  depende solamente de  $x^-$  ( de aquí en más suprimimos los índices ij por comodidad ). Ahora deseamos encontrar una expresión para  $J_+$  y  $J_-$  en término de campos bosónicos, la extensión no abeliaa

na de (2.115). En aquel caso simple se buscó una corriente que pudiera generar la simetría  $U(1)$ . Teniendo esto en cuenta definimos un elemento  $\mathcal{U}$  de  $U(1)$  y obtuvimos (2.115). En el caso presente  $J_+$  y  $J_-$  son, por construcción, elementos del álgebra de Lie del grupo  $O(N)$ . Más específicamente, estas corrientes generan  $O(N)_{\text{izq.}} \times O(N)_{\text{der.}}$ , es decir el producto de las transformaciones  $O(N)$  que operan sobre las componentes quirales de los fermiones. (Según nuestras convenciones  $\Psi_+$  es la componente "derecha" ("right") y  $\Psi_-$  es la "izquierda" ("left")). El paso siguiente es, por lo tanto, el de escribir  $J_+$  y  $J_-$  en función de un campo bosónico  $g$  que tome valores en el grupo  $O(N)$ . El ansatz más inmediato corresponde a tomar

$$\hat{J}_{\pm} \propto \bar{g}^{-1} d_{\pm} g \quad (2.127)$$

Sin embargo es fácil probar que esta elección es incorrecta. En efecto, reemplazando (2.127) en (2.126) se obtiene :

$$(\partial_- \bar{g}^{-1})(\partial_+ g) + \bar{g}^{-1} \partial_- \partial_+ g = 0 \quad (2.128) \text{ a}$$

$$(\partial_+ \bar{g}^{-1})(\partial_- g) + \bar{g}^{-1} \partial_+ \partial_- g = 0 \quad (2.128) \text{ b}$$

Restando ambas ecuaciones y teniendo en cuenta que

$$(\partial_{\pm} \bar{g}^{-1}) = -\bar{g}^{-1} (\partial_{\pm} g) \bar{g}^{-1} \quad (2.129)$$

resulta:

$$\bar{g}^{-1} (\partial_{-} g) \bar{g}^{-1} \partial_{+} g = \bar{g}^{-1} (\partial_{+} g) \bar{g}^{-1} \partial_{-} g$$

o bien

$$\hat{J}_{+} \hat{J}_{-} = \hat{J}_{-} \hat{J}_{+} \quad (2.130)$$

que es claramente incompatible con la naturaleza no abeliana de las corrientes. Después de este "intento fallido" parece razonable respetar el ordenamiento de operadores dado en (2.115) y escribir:

$$\begin{aligned} J_{+} &= \frac{-i}{2\pi} \bar{g}^{-1} \partial_{+} g \\ J_{-} &= \frac{i}{2\pi} (\partial_{-} g) \bar{g}^{-1} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Insertando estas expresiones en (2.126) encontramos:

$$(\partial_- \bar{g}^{-1}) (\partial_+ g) + \bar{g}^{-1} \partial_- \partial_+ g = 0 \quad (2.132) \text{ a}$$

$$(\partial_+ \partial_- g) \bar{g}^{-1} + (\partial_- g) (\partial_+ \bar{g}^{-1}) = 0 \quad (2.132) \text{ b}$$

Es fácil mostrar, usando nuevamente (2.129), que estas dos ecuaciones son equivalentes, y por lo tanto compatibles.

El programa de bosonización no abeliana que hemos emprendido quedará establecido formalmente cuando podamos presentar una acción bosónica equivalente a (2.121), que de lugar a una teoría renormalizable y que preserve la invarianza quirral del modelo fermiónico de partida. Además, como prueba de consistencia esta acción debe permitirnos obtener las ecuaciones (2.126). Una candidata, en principio atractiva, es la densidad lagrangiana dada por:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{4\lambda^2} \text{Tr}[(\partial_\mu g)(\partial_\mu \bar{g}^{-1})] \quad (2.133)$$

Cualidades bienvenidas de esta expresión son su carácter renormalizable y su invarianza quirral manifiesta. Sin embargo, varios motivos físicos la invalidan (8-9). Sus estados asintóticos no corresponden a la invarianza conforme que posee la teoría de fermiones libres sin masa ( Las transformacio-

nes conformes incluyen a las transformaciones de escala. Puede demostrarse que la invarianza de escala se mantiene cuando la función  $\beta$  de Callan-Symanzik se anula. En general la cuantificación implica renormalizaciones que introducen una escala con dimensiones de masa. Es por ello que, en general, se rompe la invarianza de escala (y luego la conforme). Sólo si  $\beta = 0$  se recupera dicha invarianza). Además, (2.133) da lugar a una ecuación de movimiento que no coincide con la correcta, (2.126). Para comprobarlo consideremos la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la acción

$$\hat{S} = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \text{Tr} \left[ (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) (\partial_\mu g) + \alpha (\bar{g} g - 1) \right] \quad (2.134)$$

donde  $\alpha$  es un multiplicador de Lagrange asociado a la condición trivial:  $g^{-1} g = 1$ . Las ecuaciones de movimiento son:

$$(\partial_\mu \partial_\mu \bar{g}^{-1}) \bar{g} = \alpha \quad (2.135)$$

$$(\partial_\mu \partial_\mu g) g^{-1} = \alpha \quad (2.135)$$

Usando una relación análoga a la (2.129), es evidente que

$$\partial_\mu \left( (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) g \right) + \partial_\mu \left( \bar{g}^{-1} \partial_\mu g \right) = 0 \quad (2.136)$$

Insertando (2.135) a) en (2.136), se obtiene:

$$\partial_\mu \left( \bar{g}^{-1} \partial_\mu g \right) = -\alpha - (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) (\partial_\mu g) \quad (2.137)$$

Finalmente, eliminando  $\alpha$  mediante (2.135) b), se tiene:

$$\partial_\mu \left( \bar{g}^{-1} \partial_\mu g \right) = 0 \quad (2.138)$$

que difiere de la (2.126):

$$\partial_- \left( \bar{g}^{-1} \partial_+ g \right) = \partial_+ \left( (\partial_- g) \bar{g}^{-1} \right) = 0 \quad (2.139)$$

Si bien se ha dicho que (2.133) es la única acción con invarianza quirral manifiesta ( la comprobación es simple teniendo en cuenta que  $O(N)_{\text{izq.}} \times O(N)_{\text{der.}}$  actúa sobre  $g$  en la forma  $g \rightarrow B g A^{-1}$ , con  $A, B \in O(N)$  ), existe un término no local que respeta la simetría quirral, aunque no de manera manifiesta. Nos referimos a la versión bidimensional del término de Wess-Zumino (10):

$$\Gamma = \frac{1}{24\pi} \int d^3x \varepsilon^{ijk} T_{\lambda} \left( \bar{g}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^i} \bar{g}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^j} \bar{g}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^k} \right) \quad (2.140)$$

donde la integral se extiende a una bola con frontera  $S^2$  ( por ejemplo, el casquete  $S^{3+}$  ) y  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son las variables en esta bola. Este término, propuesto originalmente como una acción efectiva para las anomalías quirales, posee importantes propiedades asociadas a la topología de la teoría (8-9). En particular, puede demostrarse que existe una ambigüedad en la definición de  $\Gamma$  ; frente a rotaciones  $\Gamma$  no permanece invariante. La condición de que  $\exp(i\Gamma)$  sea uniforme impone una condición sobre el coeficiente numérico en  $\Gamma$  de manera que  $\Gamma \longrightarrow \Gamma + 2\pi$ . Resulta así que  $\Gamma$  está bien definido "módulo"  $2\pi$ .

En este punto es de notar que la contribución (2.140) a la acción efectiva de teorías fermiónicas en (1+1) dimensiones fue obtenida ( en la formulación de la integral funcional ) por Gamboa Saraví, Schaposnik y Solomin (11). La aplicación sistemática del método originado en la referencia (11), al problema de la bosonización no abeliana constituye uno de los puntos fundamentales de esta tesis ( El desarrollo detallado de esta técnica se encuentra en el capítulo siguiente ).

Ahora bien, ya que contamos con  $\Gamma$ , podemos construir una acción para el campo  $g$ , y luego comprobar si es posible establecer su equivalencia con el modelo de fermiones libres sin masa. Consideramos la siguiente acción:

$$S = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \operatorname{Tr} \left( (\partial_\mu g) (\partial_\mu g^{-1}) \right) + m \Gamma \quad (2.141)$$

donde  $n$  es un número entero. Puede probarse que la teoría descrita por la ecuación (2.141) es renormalizable ( Esto se basa en el carácter adimensional de  $n$  ). Otra propiedad interesante de esta teoría es que no posee la simetría discreta frente a la transformación  $x \rightarrow -x$  ( paridad naive ). Se cumple, en cambio, la invarianza frente al cambio conjunto:  $x \rightarrow -x$  y  $g \rightarrow g^{-1}$ . Estas características son, en principio, bienvenidas, ya que, como es sabido, la teoría de fermiones libres sin masa no preserva la paridad. La prueba crucial, sin embargo, debe buscarse en las ecuaciones de movimiento de la teoría. A pesar del carácter no local de  $\Gamma$ , su variación es una funcional local (9),(12). Se trata de calcular la variación de  $S$  frente al cambio  $g \rightarrow g + \delta g$ . Para esto consideramos por separado la variación de cada término:

$$\delta S = \delta \hat{S} + m \delta \Gamma \quad (2.142)$$

El primer término ya fue calculado, haciendo uso de un multiplicador de Lagrange. Es instructivo calcularlo nuevamente de una manera diferente:

$$\begin{aligned} \delta T_n \int (\partial_\mu \bar{g}^{-1})(\partial_\mu g) d^2x &= \\ &= T_n \int d^2x \left[ -\partial_\mu (\bar{g}^{-1} \delta g \bar{g}^{-1}) \delta g^M - \bar{g}^{-1} (\partial_\mu g) \bar{g}^{-1} (\delta^M \delta g) \right] \end{aligned}$$

Derivando en cada término, integrando por partes y usando la propiedad cíclica de la traza, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \hat{S} &= \frac{1}{4\lambda^2} T_n \int d^2x \left[ 2 \bar{g}^{-1} \delta g \delta^M (\bar{g}^{-1} \partial_\mu g) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}^{-1} (\partial_\mu g) (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) \delta g - (\partial_\mu \bar{g}^{-1}) (\delta^M g) \bar{g}^{-1} \delta g \right] \end{aligned}$$

Usando repetidamente la propiedad (2.129) se ve que los dos últimos términos se cancelan y se obtiene:

$$\delta \hat{S} = \frac{1}{2\lambda^2} T_n \int d^2x \bar{g}^{-1} \delta g \delta^M (\bar{g}^{-1} \partial_\mu g) \quad (2.143)$$

En cuanto al término tipo Wess-Zumino, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma = & \frac{-1}{24\pi} \int d^3x \varepsilon^{ijk} T_n \left\{ \delta \bar{g}^{-1} (\partial_i g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \right. \\ & + \bar{g}^{-1} (\partial_i \delta g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \bar{g}^{-1} (\partial_i g) (\partial_j \delta \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \\ & \left. + \bar{g}^{-1} (\partial_i g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k \delta g \right\} \end{aligned}$$

Integrando por partes y considerando cuidadosamente los términos de superficie se encuentra:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma = & -\frac{1}{8\pi} \int d^2x T_n \left[ \varepsilon^{\mu\nu} \bar{g}^{-1} \delta g \partial_\mu (\bar{g}^{-1} \partial_\nu g) \right] + \\ & + \frac{1}{24\pi} \int d^3x T_n \left[ \varepsilon^{ijk} \bar{g}^{-1} \delta g \bar{g}^{-1} \left( (\partial_i g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_k g + \right. \right. \\ & \left. \left. - (\partial_k g) (\partial_j \bar{g}^{-1}) \partial_i g - (\partial_j g) (\partial_k \bar{g}^{-1}) \partial_i g - (\partial_k g) (\partial_i \bar{g}^{-1}) \partial_j g \right) \right] \end{aligned}$$

Usando las propiedades de simetría del tensor  $\varepsilon^{ijk}$  es fácil verificar que la contribución de "volumen" se cancela. Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{2\lambda^2} T_{\mathcal{R}} \int d^2x \bar{g}^{-1} \delta g \partial^\mu (\bar{g}^{-1} \partial_\mu g) + \\ & - \frac{m}{8\pi} T_{\mathcal{R}} \int d^2x \bar{g}^{-1} \delta g \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (\bar{g}^{-1} \partial_\nu g) \end{aligned} \quad (2.144)$$

y la ecuación de movimiento correspondiente es

$$\left(1 + \frac{m\lambda^2}{4\pi}\right) \partial_- (\bar{g}^{-1} \partial_+ g) + \left(1 - \frac{m\lambda^2}{4\pi}\right) \partial_+ (\bar{g}^{-1} \partial_- g) = 0 \quad (2.145)$$

Vemos que para  $\lambda^2 = (4\pi)/n$ , se obtiene la ecuación de conservación correcta, (2.126):

$$\partial_- J_+ = 0$$

Es fácil mostrar que esta ecuación conduce automáticamente a

$$\partial_+ J_- = 0$$

En efecto, de acuerdo a (2.131):

$$J_+ \propto \bar{g}' \partial_+ g$$

$$J_- \propto g \partial_- \bar{g}'$$

donde el factor de proporcionalidad es el mismo para ambas corrientes (lo omitimos aquí por comodidad). Entonces se verifica:

$$\begin{aligned} \partial_+ J_- &= \partial_+ (g \partial_- \bar{g}') = -\partial_+ ((\partial_- g) \bar{g}') \\ &= -(\partial_+ \partial_- g) \bar{g}' - (\partial_- g) (\partial_+ \bar{g}') = \\ &= -\partial_- (g \bar{g}' \partial_+ g) \bar{g}' - (\partial_- g) (\partial_+ \bar{g}') = -g (\partial_- J_+) \bar{g}' \end{aligned} \tag{2.146}$$

Luego,

$$\partial_+ J_- = 0 \iff \partial_- J_+ = 0$$

Queda así demostrado que la acción bosónica del modelo sigma no lineal, ecuación (2.141), con  $\lambda^2 = (4\pi)/n$ , reproduce exactamente las ecuaciones de movimiento que se derivan del modelo de fermiones libres sin masa, dado por la ecuación (2.121). Notemos que, siendo  $\lambda^2 > 0$ , neces-

riamente  $n$  es un entero positivo. ( En el caso en que  $n < 0$  se encuentra la ecuación "conjugada por paridad" :

$\partial_+(g^{-1} \partial_- g) = 0$ , que tiene lugar para  $\lambda^2 = -(4\pi)/n$  ). En el caso considerado,  $\lambda^2 = (4\pi)/n$ , las ecuaciones de movimiento de la teoría se pueden resolver en forma cerrada. La solución general para  $g$  es:

$$g(x^+, x^-) = F(x^-) G(x^+) \quad (2.147)$$

donde  $F(x^-)$  y  $G(x^+)$  son funciones arbitrarias de una variable que toman valores sobre  $O(N)$ . Se puede verificar que en (2.147) el ordenamiento, en cuanto a la dependencia funcional con  $x^+$  y  $x^-$  no es arbitrario. ( La factorización  $g(x^+, x^-) = G(x^+) F(x^-)$  corresponde al caso  $\lambda^2 = -(4\pi)/n$  ). La ecuación (2.147) tiene una interpretación física simple: los componentes quirales de la teoría conservan su independencia recíproca, ambos paquetes de ondas ( "left-moving" y "right moving" ) se propagan, pasando uno a través del otro sin que se produzca ninguna interferencia. Esta propiedad, deducida directamente del modelo sigma no lineal ( para  $\lambda^2 = (4\pi)/n$  ), termina por confirmar el procedimiento de bosonización no abeliana -al menos para fermiones libres no masivos- al reproducir de manera consistente el comportamiento de las partículas fermiónicas, cuyas componentes "left" y "right" son los autoestados de quiralidad. Es importante notar que E.Witten (8) mostró al orden de un lazo y conjeturó a todo orden de la teoría de perturbaciones que

la función  $\beta$  de Callan-Symanzik tiene un cero para  $\lambda^2 = (4\pi)/n$  de manera que para este valor particular de  $\lambda$  se recupera la invarianza conforme de la teoría libre de fermiones sin masa. Más recientemente, de Alvis dio una prueba a todos los órdenes (13).

En principio, el método descrito podría extenderse a teorías en interacción por medio de un desarrollo perturbativo.

Bibliografia

- (1) S.Mandelstam, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 3026.
- (2) J.A.Swieca, Fortschr. Phys., 25 , (1977), 303.
- (3) J.Frölich, Phys. Rev. Lett., 34 , (1975), 833.
- (4) I.Belvedere, J.Swieca, K.Rothe and B.Schroer, Nucl. Phys. B, 153 , (1979), 112.
- (5) B.Baluni, Phys. Lett. B, 90 , (1980), 407.
- (6) P.J.Steinhardt, Nucl. Phys. B, 106 , (1980), 100.
- (7) D.Amati and E.Rabinovici, Phys. Lett. B, 101 , (1981), 407.
- (8) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.
- (9) E.Witten, Nucl. Phys. B, 223 , (1983), 433..
- (10) J.Wess and B.Zumino, Phys. Lett. B, 37 , (1971), 95.
- (11) R.E.Gamboa Saravi, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.
- (12) A.M.Polyakov and P.Wiegmann, Phys. Lett. B, 131 , (1983), 121.
- (13) S.P.de Alvis, Phys. Lett. B, 164 , (1985), 67.

CAPITULO 3

BOSONIZACION EN EL MARCO

DE LA INTEGRAL FUNCIONAL

### 3.1. Introducción

La equivalencia entre modelos fermiónicos y bosónicos en dos dimensiones fue descubierta estudiando teorías abelianas, en el marco operacional. Sólo recientemente pudo extenderse este resultado a teorías con simetrías no abelianas, y aún en este caso, mediante el método operacional, los avances más significativos se han dado en el análisis de teorías libres ( ver Capítulo 2 ). Por esta razón es importante dar con un método que permita obtener una comprensión más profunda de la bosonización en teorías abelianas y no abelianas, con términos de interacción no triviales. En especial estas últimas presentan el mayor interés, ya que son teorías de gauge no abelianas las que hoy se consideran más aptas para dar un marco unificado a todas las interacciones fundamentales de la materia.

En este capítulo se desarrolla el método de bosonización funcional, que ha permitido obtener algunos resultados ya conocidos para modelos abelianos y que también ha mostrado ser particularmente útil en el estudio de modelos que describen fermiones en interacción, con simetrías no abelianas. Los resultados presentados en este capítulo constituyen el aporte original de esta tesis.

La sección 3.2. contiene una descripción sucinta del método de integración funcional (1). Partiendo, por simplicidad, de una teoría de campos escalares libres, se define la medida de integración funcional a través de los coeficientes del desarrollo en serie de Bessel-Fourier para el

campo escalar. Introduciendo variables de Grassman ( anti-conmutantes ) se muestra la forma de generalizar el procedimiento al estudio de una teoría fermiónica (2). En ambos casos se asocia la integral funcional con el determinante del operador diferencial que se identifica en el término libre ( cuadrático en los campos ) del lagrangiano correspondiente.

En la sección 3.3. se obtiene la equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el Seno-Gordon, mediante el método funcional (3). La introducción de un campo vectorial auxiliar en la integral funcional del modelo fermiónico (4) permite eliminar el término de autointeracción ( cuártico en los campos ) y luego, la realización de un cambio quiral de variables en la medida de integración funcional desacopla a los fermiones del campo auxiliar, dando como resultado un lagrangiano efectivo, al que contribuye el jacobiano asociado al cambio de variables. Finalmente el tratamiento perturbativo del término de masa fermiónica conduce a una expresión general para cada término de la serie, que se coteja con la expresión correspondiente al desarrollo del modelo Seno-Gordon. De esta comparación surge la identidad entre ambas integrales funcionales, la fermiónica y la bosónica.

En la sección 3.4. se realiza un análisis similar para el modelo de Schwinger masivo. Se obtiene su equivalencia con un modelo Seno-Gordon masivo, y se discute la forma de incorporar el vacío  $\theta$  en el contexto de la bosonización funcional.

En la sección 3.5. se extienden las técnicas anteriores al tratamiento de modelos no abelianos. Se estudia, como ejemplo, la Cromodinámica Cuántica bidimensional para fermiones sin masa, tomados en la representación fundamental de  $SU(N)$ . Generalizando al caso no abeliano el cambio quirral en las variables fermiónicas de integración funcional, se muestra cómo, en analogía con el caso abeliano, los campos fermiónicos se desacoplan por completo del campo de gauge (5). El jacobiano asociado a la transformación quirral no abeliana aporta un término de Wess-Zumino a la acción bosónica equivalente. Este resultado sugiere una relación profunda con el caso libre, estudiado en la sección 2.4.. Sin embargo, a diferencia de aquel, ahora el lagrangiano bosonizado contiene contribuciones con derivadas de orden superior que provienen del término cinético correspondiente al campo de gauge. Al final de la sección se muestra la posibilidad de aplicar este método funcional en la bosonización de otras teorías fermiónicas bidimensionales con simetrías no abelianas.

En la sección 3.6. se utiliza el método de bosonización funcional desarrollado en las secciones anteriores, en el cálculo de corrientes fermiónicas. Se obtienen expresiones locales para las corrientes de la Cromodinámica Cuántica bidimensional, en términos de campos bosónicos. Los resultados son las extensiones naturales de los que ya se conocían para el modelo libre (6). Por último se presenta un método que permite hallar el álgebra de conmutadores que sa

tisfacen dichas corrientes (7). El resultado obtenido -un álgebra tipo Kac-Moody, con derivadas covariantes en el término de Schwinger- guarda interesantes conexiones con los obtenidos previamente para otros modelos bidimensionales; la sección concluye con una discusión al respecto.

En un apéndice, al final del capítulo, se muestran los detalles más importantes en la evaluación del jacobiano asociado al cambio quirral de variables fermiónicas.

Bibliografía

- (1) R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys,, 20 , (1948), 367.
- (2) F.A.Berezin, "The Method of Second Quantization", Academic Press, New York, 1966.
- (3) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.
- (4) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.
- (5) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.
- (6) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 153 , (1985), 97.
- (7) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 163 , (1985), 213.

### 3.2. Breve introducción al formalismo de la integral funcional

En este capítulo aplicaremos las técnicas de integración funcional al problema de la bosonización de teorías cuánticas que describen diferentes interacciones de los campos fermiónicos en dos dimensiones del espacio-tiempo. Antes de desarrollar este proyecto, en las secciones siguientes, consideraremos de utilidad introducir algunos elementos generales sobre integración funcional. Este método fue formulado por Feynman la década de 1940, a partir de una sugestión de Dirac acerca de la posibilidad de representar amplitudes cuánticas de transición en término de integrales de camino ("path-integral") (2).

Consideremos una teoría de campos que por simplicidad tomaremos escalares  $\phi$  con densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Se puede mostrar que la integral funcional (en espacio euclídeo)

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-\int d^2x (\mathcal{L} + J\phi)} \quad (3.1)$$

incide con la funcional generatriz de funciones de Green de Teoría Cuántica de Campos. Por derivación funcional respecto de la fuente clásica  $J$ , pueden obtenerse todos los propagadores de la teoría (3). Por ejemplo, la función de Green de  $n$  puntos se identifica con el siguiente valor medio:

$$\Delta_F(x, y) = \frac{1}{Z(J=0)} \frac{\delta^2 Z(J)}{\delta J(y) \delta J(x)} \Bigg|_{\substack{J(x)=0 \\ J(y)=0}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x) \phi(y) e^{-\int d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x \mathcal{L}}} = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle \quad (3.2)$$

Evidentemente, las afirmaciones anteriores mantienen menos un punto oscuro en torno al significado del tipo de integración involucrado. Esto puede aclararse si consideramos llamada "integración sobre todos los campos" (explicada por pov, por ejemplo, en sus conferencias del CERN) dándole un sentido preciso a la "medida de integración",  $\mathcal{D}\phi$ . Para esto consideremos el desarrollo de Bessel-Fourier del campo  $\phi$ :

$$\phi(x) = \sum_m c_m \varphi_m(x) \quad (3.3)$$

nde el conjunto de todas las funciones  $\varphi_m$  forma una base completa que genera el espacio funcional. Las condiciones de entorno impuestas a  $\varphi_m$  son por supuesto las mismas que satisface  $\phi$ .

En general las densidades lagrangianas que corresponden a sistemas de interés físico son de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int.} \quad (3.4)$$

nde  $\mathcal{L}_0$  es la parte cuadrática en los campos que se identifica usualmente con el sistema libre y  $\mathcal{L}_{int.}$  contiene los términos

interacción (potencias superiores en los campos, acoplamiento con derivativos, etc.). Para facilitar la discusión estudiemos en principio, el caso libre. Si los campos se anulan en el infinito siempre es posible escribir la acción libre en la forma:

$$\int d^4x \mathcal{L}_0 = \int d^4x \phi \mathcal{D} \phi \quad (3.5)$$

donde  $\mathcal{D}$  es un cierto operador diferencial. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir a  $\{\varphi_m\}$  como el conjunto completo de autofunciones del operador  $\mathcal{D}$ , convenientemente normalizadas:

$$\mathcal{D} \varphi_m = \lambda_m \varphi_m \quad (3.6)$$

Así, la integral funcional -sin fuentes- resulta:

$$Z_0 = \int \prod_m dc_m e^{-\int d^4x (\sum_m c_m \varphi_m) \mathcal{D} (\sum_m c_m \varphi_m)} = \int \prod_m dc_m e^{-\sum_m \lambda_m c_m^2} \quad (3.7)$$

donde hemos escrito para  $\mathcal{D}\phi$ ,

$$\mathcal{D}\phi = \prod_m dc_m \quad (3.8)$$

es decir, la integración se efectúa sobre todos los valores que toman los coeficientes del desarrollo (3.3), barriéndose de esta manera todo el espacio funcional considerado. De esta

ma, la expresión (3.7) se reduce a un producto de integra- gaussianas. Esto permite asociar a la integral funcional el determinante del operador  $\mathbf{D}$  :

$$Z_0 = \mathcal{N} (\det \mathbf{D})^{-1/2} \quad (3.9)$$

nde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización (generalmente infi- a).

La discusión anterior puede extenderse fácilmente al o de una teoría que describa el comportamiento de fermio- (4). En esta situación los campos cuánticos  $\psi$  y  $\psi^\dagger$  obe- en reglas de anticonmutación, por lo que en el correspon- ente desarrollo de Bessel-Fourier los coeficientes deberán elementos de un álgebra de Grassman. Procediendo en forma iloga al caso bosónico, puede demostrarse que la integral ional

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int d^4x [\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi) + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]} \quad (3.10)$$

identifica con la funcional generatriz de las funciones de en de la Teoría Cuántica de Campos descrita por la densi- lagrangiana  $\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi)$  (3). Las magnitudes  $\eta$  y  $\bar{\eta}$  son fuen- clásicas anticonmutantes que permiten obtener las funcio- de correlación por derivación funcional. Como antes, se de aislar la parte libre del lagrangiano y poner de mani- esto el sentido de la medida de integración fermiónica. Los arrollos de Bessel-Fourier de los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  (que en el

malismo de la integral funcional son independientes), son:

$$\Psi(x) = \sum_m c_m \psi_m(x) \quad (3.11) \text{ a)}$$

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_m \bar{c}_m \psi_m^+(x) \quad (3.11) \text{ b)}$$

de los campos clásicos  $\psi_m$  y  $\psi_m^+$  pueden ser tomados como autoestados del operador diferencial que surge de la parte cuadrática del lagrangiano y los coeficientes  $c_m$  y  $\bar{c}_m$  satisfacen las condiciones correspondientes a un álgebra de Grassman de dimensión  $2n$ :

$$c_m \bar{c}_m + \bar{c}_m c_m = 0 \quad (3.12) \text{ a)}$$

$$c_m c_m + c_m c_m = 0 \quad (3.12) \text{ b)}$$

$$\bar{c}_m \bar{c}_m + \bar{c}_m \bar{c}_m = 0 \quad (3.12) \text{ c)}$$

En términos de estos objetos la medida de integración funcional es:

$$\mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi = \prod_m d\bar{c}_m dc_m \quad (3.13)$$

con las siguientes reglas de integración (4):

$$\int d\bar{c}_m = \int dc_m = 0 \quad (3.14) \text{ a)}$$

$$\int c_m dc_m = \int d\bar{c}_m \bar{c}_m = 1 \quad (3.14) \text{ b)}$$

e pueden derivarse considerando una teoría holomorfa (analítica) del álgebra de Grassman e imponiendo condiciones de linealidad e invarianza traslacional a las integrales. Como ejemplo consideremos un álgebra de Grassman de grado dos, es decir dos generadores  $c$  y  $\bar{c}$ . En este caso la función holomorfa general es

$$f(c) = f_0 + f_1 c$$

las condiciones anteriores son

$$\int f(c) dc = \int f(c+b) dc$$

$$\int [f(c) + g(c)] dc = \int f(c) dc + \int g(c) dc$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int f(c+b) dc &= f_0 \int dc + \int f_1 c dc + \int f_1 b dc = \\ &= \int f(c) dc + f_1 b \int dc = \int f(c) dc \end{aligned}$$

Por lo tanto se verifica (3.14) a). Las identidades (3.14) b) son condiciones de normalización.

Otra propiedad notable de los objetos anticonmutantes, derivada de las anteriores, es que integrar y derivar respecto

ellos son operaciones equivalentes:

$$\frac{df}{dc} = f_1 = \int f(c) dc$$

La generalización de estos resultados a un álgebra de Grassman de grado  $2n$  es simple. La única contribución no nula es:

$$\int d\bar{c}_1 d\bar{c}_2 \dots d\bar{c}_N \bar{c}_1 \dots \bar{c}_N c_1 \dots c_N dc_1 dc_2 \dots dc_N = 1 \quad (3.15)$$

Retomando la analogía con el caso bosónico, consideremos, por ejemplo, la integral funcional de un sistema de fermiones sin masa en interacción con un campo externo  $A_\mu$ :

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int d^4x \bar{\psi} \not{D} \psi} \quad (3.16)$$

onde  $D_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$ . Insertando el desarrollo (3.11) y la medida de integración fermiónica (3.13), se obtiene:

$$Z_F = \int \prod_m d\bar{c}_m dc_m e^{-\sum_m \lambda_m \bar{c}_m c_m} \quad (3.17)$$

onde se usó, además, que

$$\not{D} \psi_m = \lambda_m \psi_m$$

$$\int \psi_m^\dagger(x) \psi_k(x) d^4x = \delta_{mk}$$

Haciendo uso de (3.15), se encuentra

$$Z_F = N \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_k = N \det \mathcal{D} \quad (3.18)$$

nde  $N$  es una constante de normalización. Nuevamente hallamos una relación directa entre la integral funcional y el determinante de un operador diferencial. Sin embargo, a diferencia de la fórmula bosónica (3.9), el determinante fermiónico aparece elevado a la potencia 1. Esto es consecuencia de otra propiedad curiosa de las variables anticonmutantes. Analicemos un ejemplo sencillo de cambio de variables en la integral de una función analítica  $g(z)$ , dependiente de una variable conmutativa:

$$I = \int g(z) dz$$

ante al cambio  $z \rightarrow z' = \lambda z$ , se tiene

$$I = \int g(z') J dz'$$

nde el jacobiano de la dilatación es

$$J = \frac{dz}{dz'} = \lambda^{-1}$$

Ahora estudiemos la misma transformación pero para la función analítica  $f(c)$ , dependiente de una variable anticonmutante:

$$I = \int f(c) dc = \int (f_0 + f_1(c)) dc = f_1$$

Efectuando el cambio:  $c \rightarrow c' = \lambda c$ , se encuentra que

$$\begin{aligned} I &= \int f(c') J dc' = \int f_1 \lambda^{-1} J c' dc' = \\ &= f_1 \lambda^{-1} J = f_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso:

$$J = \lambda$$

Es decir que cuando las variables involucradas son antimutantes, el jacobiano se comporta en forma inversa.

Bibliografia

- (1) P.A.M.Dirac, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, 3 , (1933), 64.
- (2) R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys., 20 , (1948), 367.
- (3) C.Itzykson and J.Zuber, "Quantum Field Theory", Mc.Graw-Hill, 1980.
- (4) F.A.Berezin, "The Method of Second Quantization", Academic Press, New York, 1966.

### 3.3. Bosonización abeliana. Modelos Seno-Gordon y Thirring masivo.

En esta sección aplicaremos técnicas de integración funcional al problema de la bosonización del modelo de Thirring masivo. La equivalencia de este modelo fermiónico con un modelo Seno-Gordon, obtenida por Coleman (1) en el marco operacional, fue presentada en la sección 2.2.. Es interesante considerar nuevamente este problema a través de una herramienta matemática diferente cuya potencia permite reobtener resultados ya conocidos de manera particularmente simple para teorías abelianas, y, lo que es más importante, nos provee de un método que se extiende en forma natural al tratamiento de modelos con simetrías no abelianas.

De aquí en más trabajaremos en dos dimensiones euclídeas, con matrices de Dirac en la siguiente representación:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1 \quad (3.19)$$

verificando

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = i\epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu \quad (3.21)$$

$$\mathcal{E}_{01} = -\mathcal{E}_{10} = 1.$$

Empezamos por considerar el modelo de Thirring masivo  
 la dinámica está determinada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_T = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - \frac{1}{2} g^2 (\bar{\Psi} \not{\gamma}_\mu \Psi)^2 + i z_m \bar{\Psi} \Psi \quad (3.22)$$

de  $Z$  es una constante dependiente de un "cutoff". De acuerdo  
 a la sección anterior, la integral funcional correspondien-  
 a este sistema es

$$Z_T = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\int d^2x \mathcal{L}_T} \quad (3.23)$$

de  $\mathcal{N}$  es una cierta constante de normalización. El término  
 autointeracción en (3.22), cuártico en los campos fermióni-  
 cos, puede eliminarse usando la siguiente identidad (2):

$$e^{-\frac{g^2}{2} \int (\bar{\Psi} \not{\gamma}_\mu \Psi)^2 d^2x} = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-\int d^2x \left[ \frac{1}{2} A_\mu A^\mu + g \bar{\Psi} \not{A} \Psi \right]} \quad (3.24)$$

de  $A_\mu$  es un campo vectorial auxiliar de dos componentes  
 -en dos dimensiones- puede escribirse en término de dos  
 modos escalares,  $\phi$  y  $\eta$ , en la forma:

$$A_\mu = -\frac{1}{g} \left( \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi - \partial_\mu \eta \right) \quad (3.25)$$

ma de una componente transversa y otra longitudinal).

Ahora podemos sustituir (3.24) en (3.23), haciendo el bio

$$\mathcal{D}A_\mu \equiv \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A_1 \longrightarrow \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\eta \quad (3.26)$$

o jacobiano asociado toma, en este caso, la siguiente forma simple:

$$J_A = \frac{1}{g^2} \det \nabla^2 \quad (3.27)$$

Como  $J_A$  es independiente de los campos puede ser absorbido en el factor de normalización. Después de estas transformaciones la integral funcional resulta:

$$Z_T = N \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\eta e^{-\int d^4x \tilde{\mathcal{L}}_{ef}} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{ef} = & \bar{\Psi} \left[ i \not{\partial} - \gamma_\mu (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi - \partial_\mu \eta) \right] \Psi + \\ & + i Z_m \bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2g^2} \left[ (\partial_\mu \phi)^2 + (\partial_\mu \eta)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

En este punto, haremos un cambio en las variables de integración fermiónicas, cambio que corresponde, en el lenguaje

de la integral funcional, a la transformación de bosonización tradicional, obtenida en el marco operacional (3-4) (Cfr. (2.61)). El cambio toma la forma

$$\Psi(x) = e^{\gamma_5 \phi(x) + i \eta(x)} \chi(x) \quad (3.30)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\chi}(x) e^{\gamma_5 \phi(x) - i \eta(x)}$$

ha sido elegido de modo tal que se cancele el acoplamiento entre campos fermiónicos y campos escalares en el término cíclico de  $\tilde{\mathcal{L}}_{ef}$ . Por esta razón, este tipo de cambio de variables suele llamarse cambio desacoplante. En efecto, usando las relaciones (3.30) en (3.29) resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{ef} = & \bar{\chi} i \not{\partial} \chi + i z m \bar{\chi} e^{2\gamma_5 \phi} \chi + \\ & + \frac{1}{2g^2} \left[ (\partial_\mu \phi)^2 + (\partial_\mu \eta)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como vemos, la excitación longitudinal  $\eta$  se desacopla completo de los otros campos, hecho que se produce también a nivel cuántico (salvo cuando hay presentes fuentes fermiónicas externas). Ahora se puede escribir la integral funcional en términos de las nuevas variables  $\chi$  y  $\bar{\chi}$ . Por supuesto, la sustitución correcta supone tener en cuenta el jacobiano asociado a la transformación

$$\Psi, \bar{\Psi} \longrightarrow \chi, \bar{\chi} \quad , \quad (3.32)$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi = J_F \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi$$

Debido a la existencia de la llamada anomalía quiral (anomalía axial) la medida de integración fermiónica no es invariante frente a transformaciones quirales y, como consecuencia de este hecho, el jacobiano fermiónico no es trivial. Por la anomalía quiral entendemos la no conservación a nivel cuántico de la corriente asociada a la invarianza clásica del lagrangiano (3.22) con  $m = 0$ , frente a cambios quirales de la forma  $\psi \rightarrow e^{i\gamma_5} \psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\gamma_5}$  (5).

El jacobiano se puede evaluar siguiendo el método de Fujikawa (6-7); los detalles del cálculo se presentan en un apéndice, al final del capítulo. Aquí nos limitamos a escribir el resultado:

$$J_F = e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)} \quad (3.33)$$

Como vemos, se obtiene una contribución a la parte clásica de la acción efectiva para el campo  $\phi$ . No hay ninguna otra contribución a la dinámica del campo  $\eta$ , que resulta completamente desacoplado. Por este motivo la integral en  $\eta$  se reduce enteramente en la constante de normalización, ya que contiene ninguna información relevante sobre la interacción fermiónica. Luego, se tiene

$$Z_T = N \int \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^2x \cdot \right. \quad (3.34)$$

$$\left. \cdot \left[ \bar{\chi} \left( i \not{\partial} + i \gamma_5 m e^{2\gamma_5 \phi} \right) \chi + \left( \frac{1}{2g^2} + \frac{1}{2\pi} \right) (\partial_\mu \phi)^2 \right] \right\}$$

Como se discutió en la sección anterior, también ahora adición de un término de fuentes permite calcular, por derivación, cualquier función de Green fermiónica en función de los campos (2). Sin embargo, esto no es necesario para probar la equivalencia entre este modelo y el modelo Seno-Gordon. Poner de manifiesto tal equivalencia es conveniente efectuar un desarrollo perturbativo en la masa (8):

$$Z_T = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \left\{ e^{-\int d^2x \left[ \bar{\chi} i \not{\partial} \chi + \frac{1}{2\lambda^2} (\partial_\mu \phi)^2 \right]} \right\}. \quad (3.35)$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i z_m)^m}{m!} \prod_{j=1}^m \int d^2x_j \bar{\chi}(x_j) e^{2\gamma_5 \phi(x_j)} \chi(x_j) \}$$

e

$$\lambda^2 = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{\pi}} \quad (3.36)$$

Utilizando la definición de valor medio introducida en la sección 3.2. (tomando una normalización adecuada) resulta:

$$Z_T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i z_m)^m}{m!} \left\langle \prod_{j=1}^m \int d^2x_j \bar{\chi}(x_j) e^{2\gamma_5 \phi(x_j)} \chi(x_j) \right\rangle_0 \quad (3.37)$$

e  $\langle \rangle_0$  significa valor medio de expectación en el vacío, correspondiente a una teoría de fermiones libres y escalares sin masa. El propagador asociado al campo escalar está por:

$$\frac{1}{\lambda^2} \square \Delta_F(x) = \delta^2(x) \quad ((3.38) \text{ a})$$

La solución es:

$$\Delta_F(x) = \frac{\lambda^2}{2\pi} \ln a|x| \quad (3.38) \text{ b})$$

El  $a$  es una constante con dimensiones de masa. Con el objeto de evitar las divergencias infrarrojas que presenta la solución (3.38) b), seguimos el procedimiento usual que consiste en agregar una pequeña masa  $\mu$  en la ecuación (3.38) a) :

$$\square \longrightarrow \square + \mu^2$$

En lugar de (3.38) b), encontramos ahora que el propagador escalar es proporcional a la función de Bessel modificada de orden cero (9):

$$\Delta_F(x) = -\frac{\lambda^2}{2\pi} K_0(\mu|x|) \quad (3.39)$$

Por supuesto, al final de los cálculos se debe tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} K_0(\mu|x|) = -\ln \mu c|x|$$

$c = \frac{\gamma}{2}$  ( $\gamma$  es la constante de Euler, ver fórmula (2.27) b)).

Desarrollaremos una teoría de perturbaciones -con la ma-

ermiónica como parámetro perturbativo- alrededor del modo libre de fermiones sin masa. El propagador fermiónico está por:

$$-i \not{x} G_F(x) = \delta^2(x) \quad (3.40)$$

$G_F$  puede obtenerse fácilmente, en el caso no masivo, a partir de la función de Green del campo escalar. En efecto, en dimensiones se verifica la siguiente identidad:

$$-\square = -\partial_\mu \partial_\mu = i \not{x} i \not{x}$$

lo tanto, la ecuación (3.38) puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \square \Delta_F(x) &= \delta^2(x) = -\frac{i}{2\pi} i \not{x} i \not{x} \ln a|x| = \\ &= -\frac{i}{2\pi} i \not{x} \frac{\gamma_\mu x_\mu}{|x|^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Luego, comparando (3.40) y (3.41) se tiene:

$$G_F(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{\gamma_\mu x_\mu}{|x|^2} \quad (3.42)$$

Para calcular explícitamente (3.37) es conveniente factorizar las contribuciones fermiónicas y bosónicas, escribiendo:

$$\bar{\chi} e^{2\gamma_5 \phi} \chi = e^{2\phi} A_+ + e^{-2\phi} A_- \quad (3.43)$$

de

$$A_{\pm} = \bar{\chi} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \chi \quad (3.44)$$

De aquí en más los pasos a seguir son paralelos a los criptos en la sección 2.2.. El primero es la obtención de fórmula análoga a la que se deriva a partir del teorema de k en la formulación operacional (Ec. (2.26)). En el contexto de la integral funcional esto se logra considerando el siguiente valor medio:

$$\left\langle e^{-\int d^2x J \phi} \right\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^2x (-\frac{1}{2} \phi \square \phi + J\phi)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^2x (-\frac{1}{2} \phi \square \phi)}} = \frac{Z(J)}{Z(0)} \quad (3.45)$$

de  $J$  es una fuente clásica externa. Realizando, en el numerador de (3.45) el cambio  $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$ , cuyo jacobiano asociado es igual a 1 ( $\phi_0$  es una trayectoria fija en el espacio funcional), y eligiendo adecuadamente a  $\phi_0$ , se obtiene:

$$\left\langle e^{-\int J(x) \phi(x) d^2x} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint d^2x d^2y J(x) \bar{\Delta}^{-1}(x,y) J(y) \right\} \quad (3.46)$$

Nos interesa aplicar esta identidad al caso:

$$J(x) = -i \sum_j \beta_j \delta^2(x-x_j) \quad (3.47)$$

El resultado es:

$$e^{i \sum_i \beta_i \phi(x_i)} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_i \beta_j \left[ \Delta_F(\mu |x_i - x_j|) - \Delta_F(\Lambda |x_i - x_j|) \right] \right\} = \tag{3.48}$$

$$= \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{\lambda^2}{4\pi} \left( \sum_i \beta_i \right)^2} \left( \frac{\rho}{\Lambda} \right)^{\frac{\lambda^2}{4\pi} \sum_i \beta_i^2} \prod_{i>j} \left( \rho c |x_i - x_j| \right)^{\frac{\lambda^2}{2\pi} \beta_i \beta_j}$$

de  $\Lambda$  es una gran masa que da cuenta de las divergencias ultravioletas de la teoría y  $\rho$  es una masa que se asocia al orden normal de la teoría (Es fácil comprobar que el resultado depende explícitamente de  $\rho$ . Cfr. la discusión previa a la (2.42)). Para obtener (3.48) nos hemos restringido a la región determinada por:

$$\Lambda |x_i - x_j| \gg 1 \tag{3.49}$$

$$\mu |x_i - x_j| \ll 1 \tag{3.50}$$

Esta última condición es necesaria para evitar los problemas infrarrojos típicos de una expansión perturbativa -con una masa como parámetro del desarrollo- alrededor de una teoría con masa nula (1). La primera condición, justificada por su carácter regulador de  $\Lambda$  (al final de los cálculos se pasa al límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ), nos permite simplificar la expresión (3.48), haciendo uso del comportamiento asintótico de la función de Bessel, para valores grandes del argumento.

A través de la fórmula (3.48) reobtenemos el resultado

.42). En efecto, si  $\sum_i \beta_i \neq 0$ , la expresión se anula en el límite  $\mu \rightarrow 0$ , por lo que, de aquí en más restringiremos nuestro análisis al caso

$$\sum_i \beta_i = 0 \quad (3.51)$$

Como antes, esta condición simplifica notablemente el cálculo explícito de la serie perturbativa. Para comprobar esta afirmación es instructivo escribir nuevamente (3.37) usando (3.43), y considerar, como ejemplo, los primeros términos de serie:

$$\begin{aligned} Z_T &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i z m)^m}{m!} \left\langle \prod_{j=1}^m \int d^2 x_j \left[ e^{2\phi(x_j)} A_+(x_j) + e^{-2\phi(x_j)} A_-(x_j) \right] \right\rangle_0 \\ &= 1 + (-i z m) \int d^2 x \left[ \left\langle e^{2\phi(x)} A_+(x) \right\rangle_0 + \left\langle e^{-2\phi(x)} A_-(x) \right\rangle_0 \right] + \quad (3.52) \\ &\quad \frac{(-i z m)^2}{2} \iint d^2 x d^2 y \left\langle \left[ e^{2\phi(x)} A_+(x) + e^{-2\phi(x)} A_-(x) \right] \cdot \left[ e^{2\phi(y)} A_+(y) + e^{-2\phi(y)} A_-(y) \right] \right\rangle_0 + \dots \end{aligned}$$

En primer lugar observamos que el término de orden  $m$  se anula, ya que corresponde a  $\sum_i \beta_i = \pm 2i \neq 0$ . Más aún, ningún término correspondiente a una potencia impar de  $m$  puede contribuir a la serie, porque no se puede tener, en ese caso,  $\sum_i \beta_i = 0$ . La primera contribución no trivial proviene entonces del término de orden  $m^2$ :

$$(-i z m)^2 \iint d^2x d^2y \left\langle e^{2[\phi(x)+\phi(y)]} A_+(x)A_+(y) + e^{-2[\phi(x)+\phi(y)]} A_-(x)A_-(y) + \right. \\ \left. + e^{2[\phi(x)-\phi(y)]} A_+(x)A_-(y) + e^{-2[\phi(x)-\phi(y)]} A_-(x)A_+(y) \right\rangle_0 \quad (3.53) \text{ a)}$$

A su vez, sólo los dos últimos términos de (3.53) a) ve rifican  $\sum_i \beta_i = 0$ , de modo que la forma final es

$$(-i z m)^2 \iint d^2x d^2y \left\langle e^{2[\phi(x)-\phi(y)]} A_+(x)A_-(y) \right\rangle_0 \quad (3.53) \text{ b)}$$

Extendiendo este análisis a los términos de orden superior (1)-(8), se encuentra

$$Z_T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i z m)^{2k}}{(k!)^2} \int \left( \prod_{i=1}^k d^2x_i d^2y_i \right) \cdot \quad (3.54)$$

$$\cdot \left\{ \left\langle e^{2 \sum_i [\phi(x_i) - \phi(y_i)]} \right\rangle_{\text{bos.}} \left\langle \prod_{i=1}^k A_+(x_i) A_-(y_i) \right\rangle_{\text{ferm.}} \right\}$$

Para resolver la parte fermiónica, es conveniente escri bir los campos en la forma:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\chi} = (\bar{\chi}_1 \quad \bar{\chi}_2) \quad (3.55)$$

Luego,

$$A_+(x_i) = \bar{\chi}_1(x_i) \chi_1(x_i) \quad (3.56)$$

$$A_-(y_i) = \bar{\chi}_2(y_i) \chi_2(y_i)$$

Usando la forma explícita del propagador fermiónico (dado por la ec. (3.42)) -teniendo en cuenta las contracciones de los campos- en el valor medio fermiónico, y aplicando (3.48) a la parte bosónica, finalmente resulta (1)-(8) :

$$Z_T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{2k}}{(k!)^2} \int \left( \prod_{i=1}^k d^2x_i d^2y_i \right) \cdot \quad (3.57)$$

$$\cdot \frac{\prod_{i>j}^k \left[ (\rho c)^2 |x_i - x_j| |y_i - y_j| \right]^{2 - \frac{2\lambda^2}{\pi}}}{\prod_{i,j}^k (\rho c |x_i - y_j|)^{2 - \frac{2\lambda^2}{\pi}}}$$

onde el factor  $Z^{2k}$  ha sido reemplazado en términos de  $\Lambda$ .

Ahora vamos a comparar este resultado con la expresión correspondiente al modelo Sene-Gordon. La integral funcional para este modelo está dada por:

$$Z_{SG} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi + V_0 \right] \right\} \quad (3.58)$$

Efectuando un desarrollo perturbativo, tomando a  $\frac{\alpha_0}{\beta^2}$  como parámetro de la expansión, se obtiene:

$$Z_{SG} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0/\beta^2)^{2k}}{(k!)^2} \left\langle \prod_{i=1}^k e^{i\beta\varphi(x_i)} e^{-i\beta\varphi(y_i)} d^2x_i d^2y_i \right\rangle_0 \quad (3.59)$$

donde se ha usado la propiedad (3.51), desechando aquellas contribuciones que no verifican  $\sum \beta_i = 0$ . Para calcular el valor promedio bosónico de (3.59), procedemos de la misma forma en que hicimos para tratar la parte bosónica del modelo de Dirring. Utilizando (3.48) se tiene (1)-(8) :

$$Z_{SG} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\beta^2)^{2k}}{(k!)^2} \int \left( \prod_{i=1}^k d^2x_i d^2y_i \right) \cdot \frac{\prod_{i>j}^k [(cM)^2 |x_i - x_j| |y_i - y_j|]^{\frac{\beta^2}{2\pi}}}{\prod_{i,j}^k (cM |x_i - y_j|)^{\frac{\beta^2}{2\pi}}} \quad (3.60)$$

donde se ha definido la constante renormalizada:

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha_0 \left( \frac{M}{\Lambda} \right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} \quad (3.61)$$

Como antes,  $\Lambda$  es una masa utilizada como "cutoff" y M una masa arbitraria asociada a las singularidades de la teoría escalar cuando se consideran contracciones de los campos

en un mismo punto.

Comparando las expresiones (3.57) y (3.60), resulta evidente que ambas integrales funcionales coinciden si se satisfacen las siguientes identidades:

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + \frac{g^2}{8\pi}} \quad (3.62)$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = m \quad (3.63)$$

$$M = \rho \quad (3.64)$$

que son, por supuesto, las mismas obtenidas por Coleman en su trabajo original (1) (Cfr. ecs. (2.55)-(2.57)).

Concluimos entonces que es posible, también en el marco de la integral funcional, estudiar el modelo de Thirring masivo en términos del lagrangiano bosónico que corresponde al modelo Seno-Gordon. Esto equivale a establecer las relaciones de bosonización usuales:

$$i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 \quad (3.65)$$

$$i m \bar{z} \Psi \equiv - \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi \quad (3.66)$$

Bibliografía

- (1) S.Coleman, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 2088.
- (2) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 ,(1982), 159.
- (3) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (4) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 , (1981), 558.
- (5) S.Adler, Phys. Rev., 177 , (1969), 2426.  
J.Bell and R.Jackiw, Nuovo Cimento A, 60 , (1969), 47.
- (6) K.Fujikawa, Phys. Rev. Lett., 42 , (1979), 1195.
- (7) K.Fujikawa, Phys. Rev. D, 21 , (1980), 2848.
- (8) C.M.Naón; Phys. Rev. D, 11 , (1985), 2035.
- (9) M.Abramowitz and Irene A.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, New York, 1972.

3.4. Bosonización abeliana. El modelo de Schwinger masivo.

En la sección 2.3. discutimos el trabajo de Lowenstein Swieca sobre el modelo de Schwinger, para fermiones sin masa (1). La rotura de simetría quiral, observada en la naturaleza, sirvió de motivación para estudiar de qué manera se ve afectado el procedimiento de bosonización cuando se consideran fermiones masivos. Este análisis, que involucra el estudio de los diagramas de la teoría, nos condujo al resultado de Coleman, Jackiw y Susskind (2)-(3). El objetivo de esta sección es llevar a cabo la bosonización del modelo de Schwinger masivo, utilizando las técnicas de integración funcional. La resolución de este problema constituye otro de los aportes originales de esta tesis (4)-(5). La densidad lagrangiana del modelo está dada por:

$$\mathcal{L}_{SM} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} + e\not{A})\Psi + im_0\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.67)$$

Partimos de la integral funcional

$$Z_{SM} = N \int \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial_\mu A_\mu) e^{-\int d^2x \mathcal{L}_{SM}} \quad (3.68)$$

onde, por simplicidad adoptamos el gauge de Lorentz,

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (3.69)$$

como se hizo en la sección precedente para el modelo de Thirring, efectuamos un cambio desacoplante en las variables armónicas (4):

$$\Psi(x) = e^{\gamma_5 \phi(x)} \chi(x) \quad (3.70) \text{ a)}$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\chi}(x) e^{\gamma_5 \phi(x)} \quad (3.70) \text{ b)}$$

donde el campo  $\phi$  está ligado al campo de gauge  $A_\mu$  a través de la relación

$$A_\mu = -\frac{1}{e} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (3.71)$$

En estas expresiones  $\phi$  es un campo escalar (Cfr. ecuaciones (2.61) y (2.62)), cuya dinámica pasaremos a describir. Antes, conviene notar que el fijado de gauge ha eliminado (en este gauge) la componente longitudinal presente en (3.25), en el caso en que  $A_\mu$  era un campo vectorial auxiliar.

Como en todo cambio de variables, deben tenerse en cuenta los jacobianos asociados. En este aspecto, el tratamiento difiere del realizado para el modelo de Thirring. El jacobiano asociado a (3.71) no contribuye a la dinámica (se absorbe trivialmente en el factor de normalización), mientras que

el jacobiano fermiónico está dado nuevamente por la expresión (3.33) (ver apéndice). Su contribución a la acción efectiva

es:

$$\int d^2x \mathcal{L}_{J_F} = \frac{1}{2\pi} \int \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi d^2x$$

Por otro lado, el término cinético del campo de gauge toma la forma

$$\frac{1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2e^2} \int \square \phi \square \phi d^2x$$

En definitiva, para la integral funcional (3.68), se obtiene:

$$Z_{SM} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi e^{-\int d^2x \mathcal{L}_{ef.}} \quad (3.72)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef.} = & \bar{\chi} i \not{\partial} \chi + \frac{1}{2e^2} \phi \square \phi + \\ & - \frac{1}{2\pi} \phi \square \phi + i m_0 \bar{\chi} e^{2\gamma_5 \phi} \chi \end{aligned} \quad (3.73)$$

Ahora podemos seguir el procedimiento establecido en la sección anterior. En este caso el propagador escalar es,

a apariencia, más complicado, debido a la presencia de derivadas de orden superior en el lagrangiano efectivo. Veremos, sin embargo, que en realidad esta estructura simplifica notablemente las propiedades asintóticas de la función de Green bosónica. Al efecto, ésta queda determinada por:

$$-\left(\frac{1}{e^2} \square \square - \frac{1}{\pi} \square\right) \tilde{\Delta}_F(x) = \delta^2(x) \quad (3.74)$$

La solución es (5)-(6):

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_F(x) &= \frac{1}{2} \left[ K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}} x\right) + \ln\left(\frac{ec}{\sqrt{\pi}} |x|\right) \right] = \\ &= -\pi \left[ \Delta_F\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}, x\right) - \Delta_F(0, x) \right] \end{aligned} \quad (3.75)$$

De modo que  $\Delta_F$  corresponde al propagador de un campo escalar libre de masa  $e/\sqrt{\pi}$  y un campo libre sin masa. Esta última contribución está asociada a la excitación de masa nula que aparece en la solución de Lowenstein y Swieca para el modelo de Schwinger sin masa (1). La fórmula (3.75) muestra claramente la propiedad asintótica antes aludida:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{\Delta}_F(x) = 0$$

Es decir que dada la forma particular del propagador, no aparecen divergencias ultravioletas. Contrariamente, las divergencias infrarrojas son severas. Como es usual, este problema se controla introduciendo una masa  $\mu$  y tomando el límite  $\mu \rightarrow 0$ ,

Al final de los cálculos. El procedimiento se continúa en es-  
 recha analogía con el desarrollado en la sección anterior,  
 or lo que obviaremos algunos detalles (ver ecs. (3.42)-(3.48))

Desarrollando la exponencial en (3.72) se tiene:

$$Z_{SM} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-im_0)^m}{m!} \left\langle \prod_{j=1}^m \int d^2x_j \bar{\chi}(x_j) e^{2\gamma_5 \phi(x_j)} \chi(x_j) \right\rangle_0 \quad (3.76)$$

Usando una identidad similar a la (3.48):

$$\left\langle e^{i \sum_i \beta_i \phi(x_i)} \right\rangle_0 = e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_i \beta_j \tilde{\Delta}_F(x_i - x_j)} \quad (3.77)$$

e pueden factorizar las contribuciones bosónicas y fermióni-  
 as. El resultado es:

$$Z_{SM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{2k}}{(k!)^2} \int \left( \prod_{i=1}^k d^2x_i d^2y_i \right) B_k F_k \quad (3.78)$$

onde hemos redefinido la masa del fermión,  $m = \frac{m_0}{2\pi}$  y,  $F_k$  y  $B_k$  son los factores fermiónico y bosónico, respectivamente,  
 ados por

$$F_k = \frac{\prod_{i>j}^k |x_i - x_j|^2 |y_i - y_j|^2}{\prod_{i,j}^k |x_i - y_j|^2} \quad (3.79)$$

$$B_k = \left(\frac{ec}{\sqrt{\pi}}\right)^{2k} \frac{\prod_{i>j}^k |x_i - x_j|^{-2} |y_i - y_j|^{-2}}{\prod_{i,j}^k |x_i - y_j|^{-2}} \cdot \quad (3.80)$$

$$\cdot \exp\left\{-2\sum_{i>j} \left[ K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i - x_j|\right) + K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|y_i - y_j|\right) - K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i - y_j|\right) \right]\right\}$$

Vemos que la contribución proveniente de la excitación de masa nula cancela el factor correspondiente a la contribución de fermión libre. Así, se obtiene:

$$Z_{SM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{mec}{\sqrt{\pi}}\right)^{2k}}{(k!)^2} \int \left( \prod_{i=1}^k dx_i^2 dy_i^2 \right) \exp\left\{-2\sum_{i>j} \left[ K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i - x_j|\right) + K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|y_i - y_j|\right) - K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x_i - y_j|\right) \right]\right\} \quad (3.81)$$

Ahora la equivalencia es inmediata. Es evidente que la integral funcional (3.81) coincide con la del modelo Seno-ordon masivo con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)(\partial_\mu \psi) + \frac{e^2}{2\pi} \psi^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \psi + \gamma \quad (3.82)$$

se hacen las siguientes identificaciones:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = m \frac{ec}{\sqrt{\pi}} \quad (3.83)$$

$$\beta^2 = 4\pi \quad (3.84)$$

Por supuesto, con este resultado, la bosonización del modelo de Schwinger para fermiones sin masa se obtiene tomando  $m = 0$  en (3.83); se establece así un isomorfismo entre este modelo fermiónico y una teoría de campos escalares libres sin masa  $e/\sqrt{\pi}$ . (También está presente la excitación de gauge sin masa, (1), (6-7)).

Para terminar esta sección estudiaremos la forma de incorporar el vacío  $\theta$  (8-9) en nuestro esquema de bosonización abeliana. Como es sabido, el vacío  $\theta$  puede estudiarse agregando a la densidad lagrangiana del modelo de Schwinger un término de la forma

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{e\theta}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.85)$$

En principio, para la teoría sin masa, toda referencia  $\theta$  puede eliminarse de la funcional generatriz por medio de una rotación quiral finita de los campos fermiónicos:

$$\Psi = e^{\alpha\gamma_5} \chi, \quad \bar{\Psi} = \bar{\chi} e^{\alpha\gamma_5} \quad (3.86)$$

Esta transformación da lugar al jacobiano (ver apéndice)

$$J = e^{\frac{\alpha e}{2\pi} \int \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x} \quad (3.87)$$

Eligiendo  $\alpha = \theta/2$ , la contribución del jacobiano cancela el término de vacío  $\theta$ , ec.(3.85), y se verifica:

$$Z_{m=0}[\theta] = Z_{m=0}[0] \quad (3.88)$$

Por otro lado, cuando se calculan valores medios de cantidades que involucran operadores compuestos, la dependencia en  $\theta$  no puede eliminarse (10). Por ejemplo, para calcular la cantidad

$$\langle \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \bar{\Psi}(0) \Psi(0) \rangle \quad (3.89)$$

se debe agregar al lagrangiano un término de fuente:

$$Z_{m=0}[\theta, j] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\int d^2x \left[ \mathcal{L}_0 + \frac{e\theta}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j \bar{\Psi} \Psi \right]} \quad (3.90)$$

Si repetimos la rotación quirral (3.86) es claro que, en este caso, la dependencia en  $\theta$  no desaparece. Se elimina el término (3.85) pero el vacío  $\theta$  "reaparece" en el término de fuente (11).

Ahora es evidente lo que ocurre en la teoría masiva. La rotación quiral elimina el "término  $\theta$ " de  $\mathcal{L}_m[\theta]$  a través del jacobiano (3.87), pero se produce un cambio en el término no de masa:

$$i m_0 \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \longrightarrow i m_0 \bar{\Psi}(x) e^{\gamma_5 \theta} \Psi(x) \quad (3.91)$$

De aquí en más se procede como en el caso  $\theta = 0$ , efectuando las transformaciones (3.70) y (3.71), y luego haciendo el desarrollo perturbativo en la masa. El único cambio en el lagrangiano efectivo (3.73) es la presencia de un término de masa de la forma:

$$\mathcal{L}_m = i m_0 \bar{\chi} e^{2\gamma_5 \left[ \phi(x) + \frac{\theta}{2} \right]} \chi \quad (3.92)$$

El análisis prosigue exactamente como antes, con la única diferencia de que cambia el argumento del coseno en el modelo Seno-Gordon equivalente (Cfr. ec.(3.82)):

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{e^2}{2\pi} \varphi^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \left[ \beta \left( \varphi - \frac{\theta}{2} \right) \right] + \chi \quad (3.93)$$

Este resultado está en acuerdo con el que se obtiene mediante el tratamiento usual del vacío  $\theta$  en el modelo de Schwinger (3).

Bibliografía

- (1) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann.Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (2) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys. (N.Y.), 93 , (1975), 267.
- (3) S.Coleman, Ann.Phys. (N.Y.), 101 , (1976), 239.
- (4) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 , (1981), 558.
- (5) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.
- (6) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl.Phys. B, 208 , (1982), 159.
- (7) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.
- (8) C.Callan, R.Dashen and D.Gross, Phys. Lett. B, 63 , (1976), 334.
- (9) R.Jackiw and C.Rebbi, Phys. Rev. Lett., 37 , (1976), 172.
- (10) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschiatti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Phys. Lett. B, 183 , (1984), 145.
- (11) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschiatti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Ann. Phys. (N.Y.), 157 , (1984), 360.

### 3.5. Bosonización no abeliana: el método funcional.

En esta sección mostraremos la forma de extender el método de bosonización funcional, desarrollado en las secciones anteriores, al caso de teorías con simetrías no abelianas. En la sección 2.4. se hizo hincapié en las dificultades encontradas al tratar de generalizar de manera "naive" los criterios de equivalencia entre fermiones y bosones -bien establecidos en modelos abelianos bidimensionales (ver secciones 2.2. y 2.3.)- a teorías cuyos grupos subyacentes son no conmutativos (1-3). También se estudió el procedimiento alternativo desarrollado por Witten (4), mediante el método operacional. A partir de este trabajo y el de otros autores (5-10), se descubrieron conexiones interesantes entre la bosonización no abeliana y la funcional de Wess-Zumino (10), que había sido construida originalmente como una acción efectiva para las anomalías quirales.

En el contexto de los métodos funcionales, Gamboa Saraví, Schaposnik y Solomin (11-12) pusieron de manifiesto cómo aquella relación surge de un modo muy natural al extender el cambio quiral de variables (3.30) o (3.70) al caso no abeliano. De aquí en más aplicaremos esta técnica al problema de la bosonización no abeliana.

Consideremos, como ejemplo, la Cromodinámica Cuántica en dos dimensiones del espacio-tiempo para fermiones sin masa. La densidad lagrangiana euclídea para este modelo es:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \not{D} \Psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \text{términos que fijan el gauge.} \quad (3.94)$$

nde  $\not{D} = i \not{\partial} + e \not{A}$ , y  $A_\mu$  toma valores en el álgebra de Lie  $SU(2)$  (la extensión a  $SU(N)$  es simple). Los campos fermiónicos se toman en la representación fundamental de  $SU(2)$ . En referencia (11) se introdujo el análogo no abeliano del cambio de variables desacoplante (3.70). En efecto, realizan la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \Psi &= U_5 \chi \\ \bar{\Psi} &= \bar{\chi} U_5 \end{aligned} \quad (3.95)$$

on

$$U_5 = e^{\gamma_5 \phi} \quad (3.96)$$

nde  $\phi = \phi^a t^a$ , es un campo escalar que toma valores en el álgebra de Lie del grupo  $SU(2)$  (las matrices  $t_a$ , con  $a=1,2,3$ , son los generadores de  $SU(2)$ ), es fácil verificar que el lagrangiano fermiónico se desacopla por completo del campo de gauge:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\Psi} \not{D} \Psi = \bar{\chi} i \not{\partial} \chi \quad (3.97)$$

Aunque la ecuación (3.97) se verifica en un gauge arbitrario ( basta para ello escribir, en lugar de (3.95),  $\tilde{u}_5 = e^{\gamma_5 \phi + i\eta}$  ), es más simple e instructivo trabajar en el llamado gauge desacoplante:

$$A = -\frac{i}{e} (\not{\partial} u_5) u_5^{-1} \quad (3.98)$$

Introducido por primera vez en la ref. (11). Nótese que la ecuación (3.98) se reduce a  $A_\mu = -\frac{1}{e} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi$  en el caso abeliano, el gauge desacoplante coincide con el gauge de Lorentz para el modelo de Schwinger.

La posibilidad de elegir el gauge desacoplante, es decir, la demostración de que la ecuación (3.98) define efectivamente un gauge, fue establecida por Roskies (13) considerando la complexificación del grupo  $SU(2)$ ,  $SL(2, \mathbb{C})$ . En efecto,  $u_5$  puede tomarse como un elemento de la forma

$$u_5 = e^{-ij\phi}$$

con  $j = i\gamma_5$ . Así,  $u_5$  es una matriz hermitica, definida positiva, con determinante igual a 1.

Para poder escribir la integral funcional de la teoría en términos de las nuevas variables, se debe tener en cuenta, como en el caso abeliano, el cambio en la medida fermiónica e integración bajo la transformación (3.95):

$$D\bar{\Psi} D\Psi = J_F D\bar{\chi} D\chi \quad (3.99)$$

En este punto es interesante notar que el jacobiano  $J_F$  coincide con el determinante fermiónico (ver sección 3.2.):

$$\begin{aligned} \det \not{D} &= \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \ e^{-\int d^2x \bar{\Psi} \not{D} \Psi} = \\ &= J_F \int \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \ e^{-\int d^2x \bar{\chi} i \not{D} \chi} = J_F \det i \not{D} \end{aligned} \quad (3.100)$$

En particular, como veremos más adelante, esta relación permite hacer contacto con el estudio del modelo sigma o lineal realizado por Polyakov y Wiegmann (5).

En el cálculo de  $J_F$  se debe considerar una transformación  $U_5$  dependiente de un parámetro  $t$ , con  $t \in [0, 1]$  :

$$U_5(x, t) = e^{t \gamma_5 \phi(x)} \quad (3.101)$$

De esta manera, la transformación completa (3.96) se obtiene por iteración a partir de la transformación infinitesimal, variando  $t$  entre 0 y 1. El método se ha desarrollado en las referencias (11), (12), (14), (15) y en nuestro apéndice. Como resultado

$$\begin{aligned} \ln J_F &= -\frac{e^2}{2\pi} \int d^2x \operatorname{Tr} \left[ \frac{1}{2} \not{A} \not{A} + \int_0^1 dt \gamma_5 \not{A}_t \phi \not{A}_t \right] = \\ &= \frac{ie}{2\pi} \int_0^1 dt \int d^2x \operatorname{Tr} \left\{ \left[ \not{D} \not{A}_t - ie \not{A}_t \not{A}_t \right] \gamma_5 \phi \right\} \end{aligned} \quad (3.102)$$

onde  $\text{Tr} \equiv \text{tr}^{\text{Lorentz}} \otimes \text{tr}^{\text{SU}(2)}$  y

$$\mathcal{A}_t = -\frac{i}{e} (\not{\partial} U_5(x,t)) U_5^{-1}(x,t) \quad (3.103)$$

Para construir la funcional de Wess-Zumino a partir de 3.102) es conveniente escribir

$$A_\mu(t) = v_\mu(t) - \varepsilon_{\mu\nu} a_\nu(t) \quad (3.104)$$

onde

$$v_\mu(t) = -\frac{i}{2e} \left( \partial_\mu e^{t\phi} e^{-t\phi} - e^{-t\phi} \partial_\mu e^{t\phi} \right) \quad (3.105) \text{ a)}$$

$$a_\mu(t) = \frac{1}{2e} \left[ \partial_\mu e^{t\phi} e^{-t\phi} + e^{-t\phi} \partial_\mu e^{t\phi} \right] \quad (3.105) \text{ b)}$$

Se pueden demostrar las siguientes identidades:

$$\partial_\mu \phi = e \frac{\partial a_\mu}{\partial t} + i e [v_\mu, \phi] \quad (3.106)$$

$$\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - i e [v_\mu, v_\nu] = -i e [a_\mu, a_\nu] \quad (3.107)$$

$$\partial_\mu a_\nu - ie [v_\mu, a_\nu] = \partial_\nu a_\mu - ie [v_\nu, a_\mu] \quad (3.108)$$

Utilizando las identidades (3.104) y (3.107) en la ecuación (3.102) se obtiene:

$$\ln J_F = \frac{e}{2\pi} \int_0^1 dt \int d^2x T_n \left\{ \phi \left[ -ie \epsilon_{\mu\nu} [a_\mu(t), a_\nu(t)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_\mu a_\mu(t) - ie [v_\mu(t), a_\mu(t)] \right] \right\} \quad (3.109)$$

El segundo término puede integrarse por partes para luego utilizar la identidad (3.106):

$$T_n \int d^2x \phi \partial_\mu a_\mu(t) = -T_n \int d^2x (\partial_\mu \phi) a_\mu(t) = \\ = -e T_n \int d^2x \frac{\partial a_\mu(t)}{\partial t} a_\mu(t) - ie T_n \int d^2x [v_\mu, \phi] a_\mu(t) \quad (3.110)$$

Es fácil verificar que el último término de (3.110) cancela al último término de (3.109), desapareciendo de esta forma la dependencia explícita del jacobiano con respecto a la componente longitudinal de  $A_\mu$ . El resultado es:

$$\ln J_F = -\frac{e^2}{4\pi} \text{Tr} \int d^2x \int_0^1 dt \frac{d}{dt} [a_\mu(t) a_\mu(t)] + \quad (3.111)$$

$$-i \frac{e^2}{2\pi} \text{Tr} \int_0^1 dt \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \phi(x) [a_\mu(t), a_\nu(t)]$$

Efectuando la integral en  $t$ , en el primer término, tomando la traza correspondiente al grupo de Lorentz ( $\text{tr } \mathbb{1} = 2$ ), haciendo uso de las siguientes identidades triviales:

$$e^{-t\phi} a_\mu(t) e^{t\phi} = \frac{1}{2e} e^{-2t\phi} \partial_\mu e^{2t\phi}$$

$$\phi = \frac{1}{2} e^{-2t\phi} \partial_t e^{2t\phi}$$

e encuentra:

$$\ln J_F = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \text{tr}^c [(\partial_\mu \bar{g}_1^{-1}) \partial_\mu g_1] +$$

(3.112)

$$- \frac{i}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} \int d^2x \int_0^1 dt \text{tr}^c \left[ \bar{g}_t^{-1} (\partial_t g_t) \bar{g}_t^{-1} (\partial_\mu g_t) \bar{g}_t^{-1} (\partial_\nu g_t) \right]$$

onde  $g_t(x) = e^{2t\phi(x)}$  ( $g_1 = g_{t=1}$ ,  $g_0 = 1$ ).

El miembro derecho de (3.112) es la forma usual de la uncional de Wess-Zumino en dos dimensiones (12)-(16) (Cfr. sección 2.4.). Como es sabido, el término de Wess-Zumino po-

ee relevantes propiedades asociadas a la topología de la teoría en estudio, de modo que el método de bosonización que estamos analizando deja manifiesto el rol de la topología en la equivalencia fermión-bosón hallada en modelos no abelianos bidimensionales (Para mayores detalles ver ref.(12)). (Resulta interesante comparar el resultado (3.112) con la expresión análoga obtenida por Witten (4), discutida en la sección 2.4.)

Por otro lado, como lo anticipamos, la expresión (3.112) coincide con la solución del modelo sigma no lineal obtenida por Polyakov y Wiegmann (5). En nuestro caso, a diferencia de los estudiados por Polyakov y Wiegmann y Witten, la acción bosónica equivalente al modelo de partida, incluye la contribución del término  $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ :

$$\int d^2x \mathcal{L}_{ef.} = \int d^2x \left[ \bar{X} i \not{\partial} X + \frac{1}{4} \text{Tr} (F_{\mu\nu}(g) F_{\mu\nu}(g)) \right] + \ln J_F \quad (3.113)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int d^2x \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) &= \\ &= \frac{1}{4e^2} \int d^2x \text{tr}^c \left\{ \partial_\mu (\bar{g}^{-1} \partial_\nu g) + i \xi_{\mu\nu} \partial_\mu \bar{g}^{-1} \partial_\nu g \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Con el objeto de dar una idea cualitativa de la dinámica gobernada por la acción (3.113) es útil considerar un desarrollo de la forma

$$g = 1 + 2 \phi^a t^a + O(\phi^2) \quad (3.115)$$

En esta aproximación se tiene:

$$\ln J_F = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x t^c \left[ (\partial_\mu \phi) \partial_\mu \phi + \frac{i}{3} \epsilon_{\mu\nu} \phi (\partial_\mu \phi) \partial_\nu \phi \right] \quad (3.116)$$

$$-\frac{1}{2} \int d^2x t^c (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{e^2} t^c \int d^2x \left[ (\square \phi)(\square \phi) + \right. \quad (3.117)$$

$$\left. + 2\phi (\square \partial_\mu \phi) \partial_\mu \phi + i \epsilon_{\mu\nu} \phi \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi \right]$$

Es interesante observar que la contribución del jacobiano, ec.(3.116), es muy similar a la acción efectiva considerada por Witten para describir la fenomenología de los hadrones a bajas energías (17-18). En nuestro caso, de la suma de ambas contribuciones resulta un lagrangiano efectivo, con términos que contienen derivadas de orden superior, cuya parte libre (Cfr. el caso abeliano, sección 3.4.) toma la forma:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{e^2} t^c \left\{ \phi \left( \square \square - \frac{e^2 \square}{2\pi} \right) \phi \right\}$$

que corresponde a  $N^2 - 1$  (para el grupo  $SU(2)$  se tiene  $2^2 - 1 = 3$ ) campos escalares de masa  $\frac{e}{\sqrt{2\pi}}$  y  $N^2 - 1$  excitaciones de gauge sin masa. A diferencia del caso abeliano, en el que los campos bosónicos aparecían libres, ahora se tienen términos de autointeracción, dados por las partes no cuadráticas en (3.116) y (3.117). Siguiendo estas líneas, un análisis más detallado de este modelo fue desarrollado por H. Falomir y E.M. Santángelo (19).

Antes de concluir esta sección es oportuno enfatizar que el método funcional de bosonización, aplicado como ejemplo al caso de la Cromodinámica Cuántica en dos dimensiones, puede extenderse sin inconvenientes a otros modelos fermiónicos bidimensionales. En particular, mediante la generalización no abeliana de la identidad gaussiana (3.24) se puede estudiar el modelo de Thirring con simetría  $SU(N)$ . En este caso se introduce un campo vectorial auxiliar no abeliano escribiendo:

$$e^{\frac{g^2}{2} \int d^2x (\bar{\Psi} \gamma_\mu \lambda^a \Psi)^2} = \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{-\int d^2x \left[ \frac{1}{2} A_\mu^a A_\mu^a - g \bar{\Psi} \gamma_\mu A_\mu^a \lambda^a \Psi \right]}$$

donde las matrices  $\lambda^a$  son los generadores del grupo  $SU(N)$  y los campos fermiónicos se toman en la representación fundamental de  $SU(N)$ . La implementación de un cambio de variables en la medida de integración funcional permite desacoplar los fermiones del campo auxiliar, y el jacobiano correspondiente da lugar, como en el caso de  $QCD_2$ , a un término de Wess-Zumino. A partir del modelo de Thirring  $SU(N)$  también es factible el estudio del modelo de Gross-Neveu quiral con simetría  $SU(N)$ , (14). En efecto, dado que su lagrangiano de interacción,

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{g^2}{4N} \left[ (\bar{\Psi}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 \right]$$

puede escribirse, mediante una transformación "tipo Fierz"  
en la forma

$$\mathcal{L}_{int.} = -\frac{g^2}{2N} \left( \bar{\Psi}\gamma_\mu t^a \Psi \right)^2$$

donde las matrices  $t^a$  son los generadores del grupo  $U(N)$ ,  
la bosonización de este modelo puede llevarse a cabo utilizando  
las técnicas descritas en este capítulo.

Bibliografia

- (1) I.V. Belvedere, J.A.Swieca, K.D.Rothe and B.Schroer, Nucl. Phys. B, 153 , (1979), 112.
- (2) B.Baluni, Phys. Lett. B, 90 , (1980), 407.
- (3) P.J.Steinhardt, Nucl. Phys. B, 106 , (1980), 100.
- (4) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.
- (5) A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B, 131 , (1983), 121; 141 , (1984), 223.
- (6) P.Di Vecchia, B.Durhuus and J.L.Petersen, Phys. Lett. B, 114 , (1984), 245.
- (7) P.Di Vecchia and P.Rossi, Phys. Lett. B, 140 , (1984), 344.
- (8) E.Abdalla and M.C.Abdalla, Nucl. Phys. B, 255 , (1985), 392.
- (9) G.Bhattacharya and S.Rajeev, Nucl. Phys. B, 246 , (1984), 157.
- (10) J.Wess and B.Zumino, Phys. Lett. B, 37 , (1971), 95.
- (11) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 181 , (1981), 239.
- (12) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Phys. Rev. D, 30 , (1984), 1353.
- (13) R.Roskies, Festschrift for Feza Gürsey's birthday,
- (14) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.

- (15) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Ann. Phys. (N.Y.), 157 , (1984), 360.
- (16) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.
- (17) E.Witten, Nucl. Phys. B, 233 , (1983), 422.
- (18) E.Witten, Nucl. Phys. B, 233 , (1983), 433.
- (19) H.Falomir and E.M.SAntángelo, Phys. Rev. Lett., 56 , (1986), 1659.

### 3.6. Corrientes fermiónicas: reglas de bosonización y álgebra de conmutadores

Al estudiar la equivalencia entre modelos fermiónicos y bosónicos obtenida mediante el método operacional, ( ver Capítulo 2 ), comprobamos el rol central que desempeñan las corrientes fermiónicas en relación a la consistencia del procedimiento. En la sección 2.3., siguiendo el trabajo de Lowenstein y Swieca (1) sobre el modelo de Schwinger, se mostró la estrecha conexión existente entre la corriente fermiónica y el campo de gauge. Por otro lado, el esquema de bosonización no abeliana propuesto por Witten (2) se inicia en el estudio de las corrientes fermiónicas bosonizadas, ya conocidas en teorías abelianas, concluyendo con una prescripción adecuada para el caso no abeliano, después de un análisis cuidadoso de las ecuaciones de conservación que obedecen las corrientes en una teoría cuántica de campos fermiónicos libres ( ver sección 2.4. ). Todas estas investigaciones fueron desarrolladas utilizando el método operacional.

En el marco de la integral funcional, el trabajo de Fujikawa (3-5) sobre el tratamiento de las anomalías quirales, permitió el desarrollo de importantes avances en el estudio de modelos bidimensionales con simetrías abelianas y no abelianas (6-8). En particular Gamboa Saraví, Schaposnik y Solomin (7), mediante la implementación de un cambio quiral no abeliano en la medida de integración fermiónica, calcularon el determinante fermiónico de la  $QCD_2$ , sentando así

las bases para un estudio sistemático de modelos no abelianos bidimensionales, mediante el método funcional (9-11). Por otra parte, Polyakov y Wiegmann (12) establecieron una conexión muy útil entre el modelo sigma no lineal y otros modelos puramente fermiónicos. Siguiendo estos trabajos ha sido posible obtener las reglas de bosonización y el álgebra de conmutadores de las corrientes fermiónicas en la Cromodinámica Cuántica bidimensional (13-15). ( En la referencia (15) se sistematizan estos resultados y se extienden además, al cálculo del tensor de energía-momento ). En esta sección discutiremos estos resultados.

Comenzamos por considerar nuevamente la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr}^c F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \not{D} \Psi \quad (3.118)$$

donde  $\not{D} = i \not{\partial} + e A$ , y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie [A_\mu, A_\nu] \quad (3.119)$$

con  $A_\mu = A_\mu^a t^a$  (Como en la sección anterior, las matrices  $t^a$  son los generadores del grupo SU(N) de color, que satisfacen  $\text{tr}^c(t^a t^b) = \int^{ab}$  ).

El valor medio cuántico de la corriente fermiónica está dado por:

$$\begin{aligned}
 J_{\mu}^a(x) &= -\frac{1}{e} \frac{\delta}{\delta A_{\mu}^a(x)} \log Z_F[A] = \\
 &= -\frac{1}{e} \frac{\delta}{\delta A_{\mu}^a(x)} (\log \det \mathcal{D}) = -\text{Tr} t^a \gamma_{\mu} G(x,x)
 \end{aligned}
 \tag{3.120}$$

donde  $G(x,y)$  es la función de Green fermiónica que satisfice:

$$\mathcal{D}(A) G(x,y) = \delta^2(x-y)
 \tag{3.121}$$

Por supuesto, la identidad (3.120) sólo tiene una significación formal, ya que involucra un producto de distribuciones en el mismo punto. Luego, para extraer el contenido físico de esta expresión es necesario regularizarla. A este fin utilizaremos, en primer lugar, el método de Schwinger (16), que preserva la invarianza de gauge mediante la introducción de un factor de fase en la forma:

$$J_{\mu}^a(x) = -\lim_{y \rightarrow x} \text{Tr} \left[ t^a \gamma_{\mu} G(x,y) e^{ie \int_x^y A_{\nu}(z) dz^{\nu}} \right]
 \tag{3.122}$$

Ahora veremos la forma en que el uso del gauge desa-

coplante (7),(9) resulta ser la clave que permite obtener una expresión cerrada para la corriente fermiónica a partir de (3.122). Proponemos el siguiente ansatz para la función de Green de los fermiones en interacción con el campo "gluónico"  $A_\mu$  :

$$G(x, \gamma) = e^{\gamma_5 \phi(x)} G_0(x, \gamma) e^{\gamma_5 \phi(\gamma)} \quad (3.123)$$

donde  $\phi = \phi^a t^a$  es un campo escalar y

$$G_0(x, \gamma) = \frac{i}{2\pi} \gamma_\mu \frac{\gamma_\mu - x_\mu}{(\gamma - x)^2}$$

es la función de Green correspondiente a los fermiones libres ( $i \not{\partial} G_0 = \delta$ ). Insertando (3.123) en la ecuación (3.121), se encuentra:

$$\not{\partial}_x G(x, \gamma) = \delta^2(x - \gamma) + \left[ i(\not{\partial} e^{\gamma_5 \phi(x)}) + e \not{A}(x) e^{\gamma_5 \phi(x)} \right] G_0(x, \gamma) e^{\gamma_5 \phi(\gamma)} \quad (3.124)$$

de donde se desprende la validez del ansatz (3.123), si adoptamos el gauge desacoplante dado por:

$$A(x) = -\frac{i}{e} \left[ \not{\partial} e^{\gamma_5 \phi(x)} \right] e^{-\gamma_5 \phi(x)} \quad (3.125)$$

Reemplazando (3.123) en (3.122) y llamando  $\epsilon_\mu = y_\mu - x_\mu$ , se obtiene:

$$J_\mu^a(x) = -\frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ t^a \gamma_\mu \gamma_\nu \frac{\epsilon_\nu}{\epsilon^2} \times \right. \\ \left. \times e^{-\gamma_5 \phi(x)} \frac{\gamma_5 \phi(x+\epsilon)}{e} \left( 1 + i e \epsilon_\rho A_\rho \right) \right\} \quad (3.126)$$

donde hemos sustituido el factor de fase por la expresión entre corchetes, lo cual se justifica por ser  $\epsilon$  pequeño. Por la misma razón podemos desarrollar  $e^{\gamma_5 \phi(x+\epsilon)}$  y conservar solamente hasta el término de orden  $\epsilon$ . Tomando luego la traza correspondiente a las matrices de Dirac y efectuando un límite simétrico ( $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon_\mu \epsilon_\nu}{\epsilon^2} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{2}$ ), el resultado es

$$J_\mu^a(x) = \frac{e}{2\pi} \text{tr}^c \left( t^a A_\mu(x) \right) + \\ + \frac{i}{4\pi} \text{tr}^c \left( t^a \left[ \not{\partial}_\mu e^{\phi(x)}, e^{-\phi(x)} \right] \right) - \frac{\epsilon_{\mu\nu}}{4\pi} \text{tr}^c \left( t^a \left[ \not{\partial}_\nu e^\phi, e^{-\phi} \right] \right) \quad (3.127)$$

Ahora, como estamos trabajando en el gauge desacoplante, podemos hacer uso de la descomposición ( ver ecs. (3.104) y (3.105) ):

$$A_\mu = A_\mu^b t^b = v_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} a_\nu$$

donde

$$v_\mu = -\frac{i}{2e} \left[ \partial_\mu e^\phi, e^{-\phi} \right]$$

$$a_\mu = \frac{1}{2e} \left[ \partial_\mu e^\phi, e^{-\phi} \right]_+$$

Reemplazando en (3.127) se comprueba que la parte "longitudinal" del campo de gauge ( $v_\mu$ ) se cancela, y así resulta:

$$J_\mu^a(x) = -\frac{e}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} a_\nu^a(x) \quad (3.128)$$

ó bien

$$J_\pm(x) = -\frac{i}{4\pi} \left[ g_\pm^{\pm 1/2}(x), d_\pm g_\pm^{\mp 1/2}(x) \right]_+ \quad (3.129)$$

donde  $J_\pm = J_0 \pm i J_1$  y  $g(x) = e^{2\phi(x)}$  ( Esta notación será de utilidad más adelante).

Este mismo resultado se puede obtener usando cualquier otro método de regularización invariante de gauge. Una alternativa interesante es la técnica basada en la función  $\zeta$  de Riemann (17), mediante la cual se regulariza la funcional generatriz desde un principio y luego todas las magnitudes derivadas de ella resultan finitas. En efecto, la funcional generatriz es un determinante, es decir un producto de autovalores que al no estar acotado da como resultado una cantidad mal definida. En la referencia (17) se muestra que

$$Z_{\text{reg}}[A] = \exp \left[ -\frac{d}{ds} \zeta(s, D) \right] \Big|_{s=0} \quad (3.130)$$

donde  $\zeta(s, D)$  es la función  $\zeta$  de Riemann generalizada para el operador  $D$  (18). A partir de (3.130) se puede calcular la corriente fermiónica haciendo

$$J_{\mu}^a(x) = -\frac{1}{e} \frac{\delta}{\delta A_{\mu}^a(x)} \log Z_{\text{reg}}[A] \quad (3.131)$$

El resultado es finito y coincide, por supuesto, con el obtenido mediante el método de Schwinger. Un aspecto importante de la técnica de la  $\zeta$  de Riemann es que descansa sobre una base matemática rigurosa y unívoca (17-20) ( por ejemplo, no requiere el uso de límites simétricos ) y condu

ce en forma automática a resultados finitos e invariantes de gauge.

Una de las características bienvenidas del resultado (3.128) radica en que la conservación covariante de la corriente es manifiesta: utilizando la identidad (3.108),

$$\mathcal{D}_\mu a_\nu = \mathcal{D}_\nu a_\mu$$

con  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ie [V_\mu, ]$ , es evidente que

$$\mathcal{D}_\mu J_\mu = 0 \tag{3.132}$$

donde

$$\mathcal{D}_\mu = \mathcal{D}_\mu + ie \epsilon_{\mu\nu} [a_\nu, ] = \partial_\mu - ie [A_\mu, ]$$

es la derivada covariante en la representación adjunta de SU(N).

Por otro lado, escribiendo

$$\mathcal{D}_\pm = \partial_\pm - ie [A_\pm, ]$$

con  $A_\pm = A_0 \pm i A_1$ , después de un poco de álgebra la ecuación (3.129) toma la forma:

$$\begin{aligned} J_+(x) &= -\frac{i}{4\pi} g \mathcal{D}_+ g^{-1} \\ J_-(x) &= -\frac{i}{4\pi} g^{-1} \mathcal{D}_- g \end{aligned} \tag{3.133}$$

con  $g$  definida en (3.129), que es la extensión para el caso de una teoría que describe fermiones en interacción con un campo de gauge, de las reglas de bosonización dadas por Witten (2), para un modelo de fermiones libres ( ver ecuación (2.125), sección 2.4. ). ( Obviamente, haciendo  $A_{\pm}=0$  en (3.133), se recupera el resultado de Witten, salvo un factor de normalización ). Un resultado similar se obtuvo en la ref. (21), siguiendo un procedimiento completamente diferente.

También es interesante hacer notar la estrecha relación que se verifica entre la corriente fermiónica y el campo de gauge, en analogía con el caso abeliano, aunque a diferencia de aquel, ahora la corriente no se identifica con el  $A_{\mu}$  completo sino con su parte "transversal". Este resultado confirma la observación de Swieca (22) sobre la importancia de la relación  $A_{\mu} \sim J_{\mu}$  en la comprensión de la equivalencia entre fermiones y bosones en dos dimensiones.

Una vez establecidas las reglas de bosonización de las corrientes fermiónicas, el paso natural es el de obtener el álgebra de conmutadores que satisfacen. Recientemente se han descubierto conexiones profundas entre el álgebra de corrientes fermiónicas -expresadas en términos de campos bosónicos- y la teoría cuántica de cuerdas (23-24). El hallazgo, en el caso de fermiones libres ( equivalente por bosonización al modelo sigma no lineal (2-12)) de un álgebra de Kac-Moody, torna aún más interesante el estudio correspondiente a una teoría en interacción (14-15).

Según es tradicional en la literatura, las investigaciones sobre álgebra de conmutadores se presentan en el espacio de Minkowski, por lo tanto, de aquí en más trabajaremos en este espacio, con las matrices de Dirac que satisfacen

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu}$$

$$\gamma^\mu \gamma_5 = \epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu$$

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1$$

y la condición de gauge desacoplante dada por

$$A = -\frac{i}{e} (\not{\chi} e^{i\gamma_5 \phi}) e^{-i\gamma_5 \phi} \quad (3.134)$$

Si bien no se ha encontrado aún una condición diferencial para este gauge, se ha establecido que existe una condición de gauge no lineal, pero local, tal que cualquier campo de gauge  $A_\mu$  puede escribirse en términos de un campo escalar  $\phi$  de acuerdo a la ecuación (3.134) (8-10), (13-15), (25). Como ya vimos en la sección anterior, la condición (3.134) permite evaluar de un modo simple el determinante fermiónico, en términos del jacobiano asociado al cambio quiral en las variables fermiónicas de integración funcional:

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{i\gamma_5 \phi} \chi \\ \bar{\Psi} &= \bar{\chi} e^{i\gamma_5 \phi} \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi = J(\phi) \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \quad (3.136)$$

También mostramos que, como consecuencia de esta transformación:

$$W[A] = -i \log J[A] = -i \log \frac{\det(i\cancel{\chi} + e\cancel{\chi})}{\det i\cancel{\chi}} \quad (3.137)$$

( ver Apéndice, al final del capítulo ), donde hemos llamado  $W[A]$  a la funcional de Wess-Zumino dada por

$$W[A] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \operatorname{tr} \left[ (\partial_\mu \bar{g}^{-1}(\phi, 1)) (\partial_\mu g(\phi, 1)) \right] + \quad (3.138)$$

$$- \frac{i}{4\pi} \int d^2x \int_0^1 d\rho \varepsilon^{\mu\nu} \operatorname{tr} \left[ \bar{g}^{-1}(\partial_\mu g) \bar{g}^{-1}(\partial_\nu g) \bar{g}^{-1} \partial_\rho g \right]$$

donde

$$g(\phi, \rho) = e^{2i\rho\phi(x)}, \quad \rho \in [0, 1] \quad (3.139)$$

es un elemento del grupo  $SU(N)$  que depende de las variables  $x$ ,  $t$  y  $\int$ . De acuerdo a lo explicado en la primera parte de esta sección, las corrientes fermiónicas pueden obtenerse mediante

$$J_{\mu}^a = \langle \bar{\Psi} \gamma_{\mu} t^a \Psi \rangle = \frac{1}{e} \frac{\delta W[A]}{\delta A^{\mu a}} \quad (3.140)$$

y toman la forma

$$J_{+} = -\frac{i}{4\pi} g D_{+} \bar{g}^{-1} = -\frac{i}{4\pi} \bar{g}^{-1/2} (\partial_{+} g) \bar{g}^{-1/2} \quad (3.141)$$

$$J_{-} = -\frac{i}{4\pi} \bar{g}^{-1} D_{-} g = -\frac{i}{4\pi} \bar{g}^{-1/2} (\partial_{-} g) \bar{g}^{-1/2}$$

con las variables del cono de luz definidas por:

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= t \pm x, \quad J_{\pm} = J_0 \pm J_1, \\ D_{\pm} &= \partial_{\pm} - ie [A_{\pm}, ] \end{aligned} \quad (3.142)$$

y, obviamente,  $g = g(\phi, 1)$ . Con esta notación, la conservación (covariante) de las corrientes vectoriales se escribe

$$D_{+} J_{-} + D_{-} J_{+} = 0 \quad (3.143)$$

mientras que para la corriente axial

$$J_{\mu}^{5a} = \langle \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \gamma^5 t^a \Psi \rangle \quad (3.144)$$

se tiene:

$$D_{+} J_{-}^5 - D_{-} J_{+}^5 = A(x) \quad (3.145)$$

donde el término de anomalía,  $A(x)$ , puede evaluarse calculando el jacobiano de un cambio de variables infinitesimal en las variables fermiónicas (3-4):

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \Psi \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \end{aligned} \quad (3.146)$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi = J(\alpha) \mathcal{D}\bar{\Psi}' \mathcal{D}\Psi' \quad (3.147)$$

del cual resulta:

$$A^a(x) = - \left. \frac{\delta \log J(\alpha)}{\delta \alpha^a} \right|_{\alpha=0} = \frac{ie}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad (3.148)$$

( ver, por ejemplo, refs. (8-9) y (15) ).

Las relaciones (3.146)-(3.148) pueden ser usadas para derivar las relaciones de conmutación de las corrientes (14). En efecto, la ec. (3.140) puede escribirse en la forma

$$J_{\mu}^a[A] = (\det \mathcal{D}[A])^{-1} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS} \bar{\Psi} \gamma_{\mu} t^a \Psi \quad (3.149)$$

Bajo el cambio definido por (3.146) la corriente transformada es

$$J_{\mu}^{a'}[A] = J(\alpha) \frac{\det \mathcal{D}[A']}{\det \mathcal{D}[A]} J_{\mu}^a[A'] \quad (3.150)$$

donde hemos escrito

$$A' = e^{-i\gamma_5 \alpha} A e^{-i\gamma_5 \alpha} + \frac{i}{e} e^{-i\gamma_5 \alpha} \not{D} e^{-i\gamma_5 \alpha} \quad (3.151)$$

Ahora bien, sin pérdida alguna de generalidad podemos tomar

$$[\alpha, \phi] = 0 \quad (3.152)$$

ya que, siendo las corrientes covariantes de gauge, siempre

es posible reducir la transformación quirral a una que sea paralela a  $\phi$ , por medio de una transformación de gauge apropiada. Por otro lado, a partir de la identidad

$$\det \mathcal{D}[A] = J(\alpha) \det \mathcal{D}[A'] \quad (3.153)$$

que puede establecerse mediante el uso de cualquier método para la evaluación de jacobianos, que preserve la invarianza de gauge (10), finalmente se tiene

$$J_{\mu}^{1a}[A] = J_{\mu}^a[A'] \quad (3.154)$$

Ahora, con el objeto de obtener una expresión explícita para  $J_{\mu}^1$ , a partir de la ec. (3.154), basta con utilizar la ec. (3.151) correspondiente a un  $\alpha$  infinitesimal, y luego insertar el valor de  $A'$  en las fórmulas explícitas para  $J_{\pm}$ , dadas por las ecuaciones (3.141). El cálculo es sencillo, si observamos que el cambio

$$A \longrightarrow A'$$

(con  $A'$  también en el gauge desacoplante, ya que  $[\phi, \alpha] = 0$ ) corresponde a un cambio en  $g^{1/2} = g^{1/2}(\phi, \rho = 1)$  de la forma:

$$g^{1/2} \longrightarrow (g')^{1/2} = g^{1/2} + i g^{1/2} \alpha \quad (3.155)$$

Con esta expresión para  $(g')^{\frac{1}{2}}$ , usando las ecuaciones (3.141 y (3.154) se obtiene:

$$\delta J_+ = J'_+[A] - J_+[A] = \frac{1}{2\pi} D_+ \alpha - i [J_+, \alpha] \quad (3.156)$$

$$\delta J_- = J'_-[A] - J_-[A] = -\frac{1}{2\pi} D_- \alpha - i [J_-, \alpha]$$

ó bien

$$\delta J^\mu = -\epsilon^{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{2\pi} D_\nu \alpha + i [J_\nu, \alpha] \right\} \quad (3.157)$$

Ahora veremos que las relaciones de conmutación que satisfacen estas corrientes se pueden inferir combinando los resultados anteriores, obtenidos mediante técnicas funcionales, con el método operacional (26-27). Pasando a este marco, definimos la siguiente funcional:

$$\hat{Q}^5(t, \alpha) = \int dx \alpha^a \hat{J}_0^{5a}(x, t) \quad (3.158)$$

( donde el símbolo  $\hat{\ }^5$  sobre una magnitud indica su carácter

de operador) e introducimos el operador unitario  $e^{i\hat{Q}_5}$  que es el generador de las rotaciones quirales:

$$e^{-i\hat{Q}^5} \hat{\Psi} e^{i\hat{Q}^5} = e^{i\gamma^5} \hat{\Psi} \quad (3.159)$$

lo cual puede probarse haciendo uso de (3.158) y de las relaciones canónicas de anticonmutación:

$$\left[ \hat{\Psi}_\alpha^{a*}(x,t), \hat{\Psi}_\beta^b(y,t) \right]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta^{ab} \delta(x-y) \quad (3.160)$$

Aplicando este operador a  $\hat{J}_0$  se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{Q}^5} \hat{J}_0 e^{i\hat{Q}^5} &= \hat{J}_0 + \delta \hat{J}_0 = \\ &= \hat{J}_0 - i [\hat{Q}^5, \hat{J}_0] \end{aligned} \quad (3.161)$$

De esta ecuación puede obtenerse  $\delta \hat{J}_0$ ; por consistencia, el resultado debe coincidir con el obtenido en (3.157). Para que esto se verifique debe cumplirse necesariamente que:

$$\left[ \hat{J}_0^a(x,t), \hat{J}_1^b(y,t) \right] = \int^{abc} \hat{J}_1^c(x,t) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} D_1^{ab} \delta(x-y) \quad (3.162)$$

Cualquier relación de conmutación puede derivarse de esta forma. El resultado general, escrito en forma compacta es:

$$\left[ \hat{J}_+^a(x,t), \hat{J}_+^b(y,t) \right] = f^{abc} \hat{J}_+^c(x,t) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} D_+^{ab} \delta(x-y)$$

$$\left[ \hat{J}_+^a(x,t), \hat{J}_+^b(y,t) \right] = 0 \quad (3.163)$$

$$\left[ \hat{J}_-^a(x,t), \hat{J}_-^b(y,t) \right] = f^{abc} \hat{J}_-^c(x,t) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} D_-^{ab} \delta(x-y)$$

Nuevamente, el resultado puede interpretarse como la extensión natural de las relaciones ya conocidas para la teoría de  $N$  fermiones libres y para el modelo sigma no lineal (2), al caso en que los fermiones interactúan con un campo de gauge. En efecto, las ecuaciones (3.163) son similares a las obtenidas por Witten (2), excepto por el hecho notorio de que las derivadas que aparecen en el término de Schwinger (28), son reemplazadas por derivadas covariantes, un fenómeno análogo al encontrado previamente en otros modelos (29-30). Sin embargo, es interesante observar que también en este contexto es posible hallar un par de corrientes tales que el correspondiente término de Schwinger con-

tiene derivadas ordinarias. Definiendo:

$$j_+ = g^{1/2} J_+ g^{-1/2} \quad (3.164)$$

$$j_- = g^{-1/2} J_- g^{1/2}$$

es fácil comprobar que bajo la transformación quiral (3.146) en lugar de (3.156)-(3.157), se encuentra:

$$\delta j^{\mu} = -\varepsilon^{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \partial_\nu \alpha + 2i [j_\nu, \alpha] \right\} \quad (3.165)$$

que corresponde a las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{j}_+^a(x,t), \hat{j}_+^b(y,t)] = 2 \int^{abc} \hat{j}_+^c(x,t) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} \delta^ab \partial_+ \delta(x-y) \quad (3.166)$$

$$[\hat{j}_-^a(x,t), \hat{j}_-^b(y,t)] = 2 \int^{abc} \hat{j}_-^c(x,t) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} \delta^ab \partial_- \delta(x-y)$$

En este punto es importante enfatizar las diferencias entre las relaciones que hemos obtenido para la Cromodinámica Cuántica en dos dimensiones ( ecs. (3.163) y (3.166

y aquellas que surgen en los modelos de fermiones libres. En el caso que nos ocupa, cuando las corrientes se expresan en función de las variables del cono de luz, resultan ser funciones tanto de  $x_+$  como de  $x_-$ . Esto se comprueba fácilmente a partir de las ecuaciones (3.143) y (3.145), de las cuales se deduce que

$$D_+ J_- = \frac{1}{2} A(x_+, x_-) \tag{3.167}$$

$$D_- J_+ = -\frac{1}{2} A(x_+, x_-)$$

Es decir que no sólo hemos encontrado derivadas covariantes en lugar de derivadas ordinarias, debido al hecho de tratar se de una teoría de gauge, sino que, a causa de la anomalía quiral las corrientes no se conservan independientemente.

Con respecto a las corrientes  $j_{\pm}$ , aunque en las expresiones (3.166) ha desaparecido la dependencia con el campo de gauge, no se verifica ninguna ley de conservación simple que dé como resultado condiciones de la forma  $j_+ = j_+(x_+)$  ó  $j_- = j_-(x_-)$  ( Cfr. con el caso libre, sección 2.4.).

Más allá de estas diferencias, la estructura hallada sugiere posibles conexiones con un álgebra tipo Kac-Moody. La dilucidación de este, entre otros aspectos de los resultados presentados en esta sección, continúa en estudio, esperándose puedan echar alguna luz sobre cuestiones aún no resueltas en los modelos realistas de las interacciones fun

damentales, como lo es, por ejemplo, la forma de construir una teoría cuántica de cuerdas en la cual las representaciones de las álgebras de Kac-Moody y Virasoro juegan un rol central (23-24).

Bibliografía

- (1) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (2) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.
- (3) K.Fujikawa, Phys. Rev. Lett., 42 , (1979), 1195.
- (4) K.Fujikawa, Phys. Rev. D, 21 , (1980), 2848.
- (5) K.Fujikawa, Phys. Rev. D, 22 , (1980), 1499.
- (6) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 , (1981), 558.
- (7) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.
- (8) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.
- (9) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Phys. Rev. D, 30 , (1984), 1353.
- (10) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschiatti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Ann. Phys. (N.Y.), 157 , (1984), 360.
- (11) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.
- (12) A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B, 131, (1983), 121; 141 , (1984), 223.
- (13) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 153 , (1985), 97.
- (14) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 163 , (1985), 213.
- (15) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Phys. Rev. D, en prensa (1986).

- (16) J.Schwinger, Phys. Rev., 82 , (1951), 664.
- (17) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Journal Math. Phys., 26 , (1985), 2045.
- (18) S.Hawking, Comm. Math. Phys., 55 , (1977), 133.
- (19) R.Seeley, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 10 , (1967), 288.
- (20) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti and J.E.Solomin, Comm. Math. Phys., 89 , (1983), 363.
- (21) D.Gonzalez and A.Redlich, Phys.Lett., 147 B, (1984) 150.
- (22) J.A.Swieca, Fortschr. Phys., 25 , (1977), 303.
- (23) D.Nemeschansky and S.Yankielowicz, Phys. Rev. Lett., 54 , (1985), 620.
- (24) S.Antoniadis and C.Bachas, SLAC, reporte No.3625, 1985.
- (25) R.Roskies, "Festschrift for Feza Gurseý's 60th. birthday"
- (26) K.Fujikawa, Phys. Lett. B, 108 , (1982), 33.
- (27) H.Aratyn and P.H.Damgaard, Nucl. Phys. B, 241 , (1983), 445.
- (28) J.Schwinger, Phys. Rev. Lett., 3 , (1959), 296.
- (29) H.J. de Vega, H.Eichenherr and J.M.Maillet, Phys. Lett. B, 132 , (1983), 337.
- (30) L.Fadeev, Phys. Lett. B, 145 , (1984), 81.

Apéndice: cálculo del jacobiano quirral

En éste apéndice presentamos el cálculo del jacobiano  $J_F$ , asociado al cambio quirral en las variables fermiónicas de integración funcional, utilizado a lo largo de este capítulo ( la bibliografía relacionada a este cálculo corresponde a las ref.(15-20) de la sección 3.6 ). Consideremos la siguiente integral funcional, en espacio euclídeo:

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\int \bar{\Psi} \mathcal{D} \Psi d^3x} = \det \mathcal{D} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\Psi$  y  $\bar{\Psi}$  son campos fermiónicos tomados en la representación fundamental de  $S U (2)$  y  $\mathcal{D} = i \not{\partial} + e \not{A}$  ( $A_\mu = A_\mu^a t^a$ , siendo  $t^a$  los generadores de  $S U (2)$ ). Efectuando en ( A.1 ) el cambio

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= e^{\gamma_5 \phi(x) + i\eta(x)} \chi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &= \bar{\chi}(x) e^{\gamma_5 \phi(x) - i\eta(x)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi = J_F \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi$$

y expresando  $A$  en la forma:

$$A = -\frac{i}{e} \not{\partial} \left( e^{\gamma_5 \phi + i\eta} \right) e^{-(\gamma_5 \phi + i\eta)} \quad (\text{A.3})$$

se obtiene:

$$\det \mathcal{D} = J_F \det i \not{\partial} \quad (\text{A.4})$$

es decir que el cambio quirral ( A.2 ) ha desacoplado los fermiones del campo vectorial. Para calcular  $J_F$  es conveniente definir:

$$W(\rho) = \log \det \mathcal{D}_\rho \quad ( A.5 )$$

con  $\mathcal{D}_\rho = i \not{\partial} + e \not{A}_\rho$  , donde

$$\not{A}_\rho = -\frac{i}{e} \not{\partial} \left[ e^{\rho(\gamma_5 \phi + i\eta)} \right] e^{-\rho(\gamma_5 \phi + i\eta)} \quad ( A.6 )$$

y  $\rho$  es un parámetro que varía entre 0 y 1 , relacionando en forma continua el determinante del operador  $\mathcal{D}$  ( $\rho = 1$ ) con el que corresponde a los fermiones libres ( $\rho = 0$ )

Es fácil verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{dW(\rho)}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho} \log \det \mathcal{D}_\rho = \frac{d}{d\rho} \text{Tr} \log \mathcal{D}_\rho = \\ &= \text{Tr} \left( \mathcal{D}_\rho^{-1} \frac{d}{d\rho} \mathcal{D}_\rho \right) \end{aligned} \quad ( A.7 )$$

Además usando ( A.4 ) y ( A.5 ) se tiene que

$$\int_0^1 \frac{dW(\rho)}{d\rho} d\rho = \log \frac{\det \mathcal{D}}{\det i \not{\partial}} = \log J_F \quad ( A.8 )$$

Luego:

$$J_F = \exp \left\{ \int_0^1 d\rho \text{Tr} \left( \mathcal{D}_\rho^{-1} \frac{d\mathcal{D}_\rho}{d\rho} \right) \right\} \quad ( A.9 )$$

Por otro lado, se puede comprobar la siguiente identidad:

$$\frac{d\mathcal{D}_\rho}{d\rho} = -\mathcal{D}_\rho (\gamma_5 \phi + i\eta) - (\gamma_5 \phi + i\eta) \mathcal{D}_\rho + 2i\eta \mathcal{D}_\rho \quad ( A.10 )$$

Así, usando ( A.10 ) y la propiedad cíclica de la traza en ( A.9 ), se obtiene:

$$J_F = \exp \left\{ -2 \int_0^1 d\rho \operatorname{Tr} [\gamma_5 \phi(x)] \right\} \quad ( A.11 )$$

donde

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} [\gamma_5 \phi(x)] &= \int d^2x \operatorname{tr}^L \otimes \operatorname{tr}^C \sum_m \psi_m^+(x, \rho) \gamma_5 \phi(x) \psi_m(x, \rho) \\ &= \int d^2x \operatorname{tr}^L \otimes \operatorname{tr}^C \left\{ \left[ \sum_m \psi_m(x, \rho) \otimes \psi_m^+(x, \rho) \right] \gamma_5 \phi(x) \right\} \end{aligned} \quad ( A.12 )$$

En esta expresión las funciones  $\psi_m(x, \rho)$  son los autoestados del operador  $\mathcal{D}_\rho$ , que satisfacen la relación de clausura:

$$\sum_m \psi_m(x, \rho) \otimes \psi_m^+(y, \rho) = \delta^2(x-y) \quad ( A.13 )$$

Esto implica que el integrando de ( A.12 ) es una cantidad mal definida -la anomalía quiral- cuya evaluación requiere el uso de un método de regularización. Aquí utilizamos un método bien conocido que consiste en escribir:

$$\operatorname{Tr} [\gamma_5 \phi(x)] = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ M^2 \rightarrow \infty}} \int d^2x \operatorname{tr}^L \otimes \operatorname{tr}^C \gamma_5 \phi(x) e^{-\mathcal{D}_\rho^2/M^2} \cdot \delta^2(x-y) \quad ( A.14 )$$

( Un método alternativo, matemáticamente más riguroso, es el que se basa en la función  $\zeta$  de Riemann, ver ref.(17-20) de la sección 3.6 ).

Partiendo de ( A.14 ), después de algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene:

$$\operatorname{Tr} [\gamma_5 \phi(x)] = -\frac{ie}{4\pi} \int d^2x \operatorname{tr}^L \otimes \operatorname{tr}^C \gamma_5 \phi \left( \cancel{\mathcal{D}_\rho} - ie \cancel{\mathcal{D}_\rho} \cancel{\mathcal{D}_\rho} \right) \quad ( A.15 )$$

Insertando este resultado en la ecuación ( A.11 )

se encuentra

$$J_F = e^{\frac{ie}{2\pi} \int_0^1 dt \int d^2x \gamma_5 \phi (\not{\partial} \not{A}_\mu - ie \not{A}_\mu \not{A}_\mu)} \quad ( A.16 )$$

que coincide con la expresión (3.102) utilizada en la sección 3.5., con  $\eta = 0$  ( gauge desacoplante )

En el caso abeliano esta expresión se reduce a

$$J_F = e^{\frac{1}{2\pi} \int d^2x \phi \square \phi} \quad ( A.17 )$$

que hemos aplicado a la bosonización de modelos abelianos, en las secciones 3.3. y 3.4. .

## CAPITULO 4

## CONCLUSIONES

Capítulo 4:            Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha estudiado la equivalencia entre modelos fermiónicos y bosónicos en dos dimensiones del espacio-tiempo. El procedimiento por el cual se pone de manifiesto esta identidad - conocida usualmente con el nombre de bosonización - fue desarrollado, en un principio, mediante el método operacional (1-4). El capítulo 2 es una revisión de los resultados fundamentales obtenidos en ese contexto. Como primer ejemplo acabado de bosonización de una teoría fermiónica abeliana, en la sección 2.2. se analiza la equivalencia entre las funciones de Green del modelo de Thirring para fermiones masivos y las correspondientes al modelo bosónico Seno-Gordon, haciendo hincapié en la implementación de un proceso de orden normal en el que se explota la ambigüedad existente con respecto a la masa de la teoría bosónica (3). Una de las consecuencias sobresalientes de la identificación entre estos dos modelos reside en que el límite de acoplamiento fuerte de la teoría fermiónica corresponde al régimen de acoplamiento débil para el modelo bosónico. Este resultado, obtenido también en la bosonización de otros modelos bidimensionales, permite tratar perturbativamente el modelo fermiónico para grandes valores de la constante de acoplamiento.

En la sección siguiente se describe la bosonización operacional del modelo de Schwinger ( Electrodinámica Cuántica bidimensional con fermiones sin masa ), mostrándose su equivalencia con un modelo de campos escalares libres y masivos. En

este caso se observa que el lagrangiano bosónico equivalente no preserva la simetría frente a transformaciones quirales globales, propia del modelo fermiónico de partida. La introducción de un nuevo campo de naturaleza angular, denominado vacío  $\theta$ , asociado a la rotura espontánea de aquella simetría, permite definir un nuevo campo escalar en términos del cual el método recupera su consistencia (2). A partir de la discusión previa se muestra la extensión de la técnica al modelo de Schwinger masivo y se estudia este modelo en interacción con una distribución clásica de corriente externa. Se encuentra que para algunos valores particulares de las cargas externas ( múltiplos enteros de la carga elemental ) la fuerza de largo alcance desaparece, las cargas de los fermiones son apantalladas. ( Cuando los fermiones no tienen masa este fenómeno se produce para cualquier valor de las cargas externas ) (4).

En la sección 2.4. se repasan los aspectos más importantes relacionados a la extensión del procedimiento de bosonización al caso de teorías bidimensionales con simetrías no abelianas (5). En particular, se muestra la equivalencia entre el modelo de fermiones libres sin masa con simetría  $O(N)$  y un modelo sigma no lineal. Estudiando las ecuaciones de conservación que obedecen las corrientes fermiónicas, debido a la simetría global del modelo frente a transformaciones quirales y de gauge, se obtienen expresiones locales para dichas corrientes en términos de campos bosónicos. Luego se muestra que la dinámica de estos campos bosónicos está gobernada por una acción efectiva que corresponde a un mode

lo sigma no lineal cuyos parámetros son tales que se preserve la invarianza conforme del modelo fermiónico de partida.

En el capítulo 3 se presenta un método alternativo para el tratamiento de la bosonización de teorías cuánticas de campos bidimensionales, basada en la formulación de la integral funcional. Los resultados que allí se describen, desde la sección 3.3. en adelante, constituyen los aportes originales de esta tesis.

Con el objeto de facilitar la comprensión del método funcional, en la sección 3.2. se hace una reseña de aspectos básicos concernientes a la técnica de integrales funcionales aplicadas al estudio de teorías de campos.

En las secciones 3.3. y 3.4. se aplicó el método de bosonización funcional a modelos abelianos (6-8). La implementación de un cambio quirral de variables en la medida de integración fermiónica permitió reobtener resultados alcanzados con anterioridad en el marco operacional (3-4), pero de un modo más simple y que pone de manifiesto la aparición de anomalías (9) en las teorías bajo consideración, y por lo tanto el papel que éstas desempeñan en el procedimiento de bosonización, un punto que no queda explícito en el tratamiento operacional. En la formulación funcional, la presencia de la anomalía quirral se manifiesta a través de la falta de invarianza de la medida fermiónica de integración funcional (9), lo que da lugar a un jacobiano no trivial asociado al cambio de dicha medida. La evaluación de este jacobiano:— ligado directamente a un determinante funcional

fermiónico - da como resultado una contribución a la acción efectiva bosónica, equivalente al modelo fermiónico original. De esta manera, en la sección 3.3. se estableció una equivalencia entre las integrales funcionales correspondientes a los modelos de Thirring masivo y Seno-Gordon, mientras que en la sección 3.4. se obtuvo la correspondencia entre el modelo de Schwinger con masa fermiónica y un modelo Seno-Gordon masivo, en completo acuerdo con los resultados del capítulo 2. También se mostró la forma de incorporar el vacío  $\theta$  en este contexto de bosonización funcional.

Los resultados obtenidos en las secciones anteriores confirman la eficacia del método desarrollado, dentro del marco funcional, para poner en evidencia la correspondencia fermión-bosón en teorías abelianas, uno de los fenómenos destacables de la fisico-matemática bidimensional.

La continuación natural de este trabajo consiste, luego, en la generalización del procedimiento al caso de modelos fermiónicos en los cuales los campos se transforman de acuerdo a un grupo de simetría no abeliano. Esta situación es de interés porque las teorías realistas - por supuesto, en cuatro dimensiones - postuladas con mayor éxito para describir las interacciones fundamentales de la materia, son teorías no abelianas con simetría de gauge local.

En la sección 3.5. se desarrolla el método de bosonización funcional aplicable a modelos no abelianos (8,10,11). Utilizando las técnicas originadas en la referencia (10), en el caso particular de la Cromodinámica Cuántica bidimensional (con fermiones no masivos), mediante la extensión

no abeliana del cambio quirral de variables fermiónicas introducido en las secciones anteriores, se obtuvo una acción efectiva puramente bosónica. Nuevamente, en analogía con el caso abeliano, la transformación de variables desacopla a los fermiones del campo vectorial de gauge y su jacobiano asociado - relacionado, como antes, a la anomalía quirral - contribuye al lagrangiano bosónico. En el caso presente, esta contribución incluye un término tipo Wess-Zumino, análogo al hallado en la bosonización operacional de la teoría de fermiones libres sin masa (5) (considerada en el capítulo 2) y que permite también hacer contacto con tratamientos recientes del modelo sigma no lineal (12). A pesar de estas similitudes se encuentran importantes diferencias: en nuestro caso, por tratarse de una teoría de fermiones en interacción con un campo vectorial de gauge, se debe tener en cuenta el aporte de su término cinético,  $\bar{\psi} \not{\partial} \psi$ , al lagrangiano bosonizado, el cual involucra términos con derivadas de orden superior aplicadas al campo bosónico equivalente.

Al final de la sección 3.5. se indica la forma de aplicar este método a la bosonización de otros modelos bidimensionales.

En la sección 3.6. se emplean las técnicas anteriores al cálculo de corrientes fermiónicas. En particular se obtuvieron expresiones locales para las corrientes de la Cromodinámica Cuántica bidimensional, en términos de campos bosónicos (13). Los resultados obtenidos son la extensión natural, para una teoría que describe fermiones en interacción con un campo de gauge, de las reglas de bosonización

ya conocidas para las corrientes asociadas al modelo de fermiones libres (5). Por otro lado, a partir de éste cálculo se confirma la estrecha relación existente entre la corriente bosonizada y el campo de gauge ( un aspecto cuya importancia fue enfatizada con anterioridad por Swieca (14) ), que en el caso abeliano se reduce a una relación de proporcionalidad.

Por último, se utilizó un procedimiento que combina el método funcional con el formalismo de operadores, permitiendo inferir las reglas de conmutación que satisfacen las corrientes fermiónicas (15). Nuevamente, el álgebra de conmutadores obtenida puede interpretarse como la extensión natural de las relaciones conocidas con anterioridad para la teoría de fermiones libres ( y para el modelo sigma no lineal ) (5), al caso en que los campos fermiónicos están acoplados a un campo de gauge. Estas expresiones son formalmente semejantes a las que se encuentran en el caso libre, salvo por el hecho notorio de que las derivadas que aparecen en el término de Schwinger son reemplazadas por derivadas covariantes, fenómeno similar al encontrado previamente en otros modelos ( ver sección 3.6. ). Además, a diferencia de lo que ocurre en el modelo de fermiones libres sin masa, las distintas componentes de las corrientes ( en el cono de luz ) no se conservan en forma independiente, como consecuencia de la anomalía quiral. Por encima de estas discrepancias, la estructura obtenida sugiere posibles conexiones con un álgebra de Kac-Moody.

A partir de los resultados alcanzados en este trabajo se concluye que el método funcional de bosonización es una herramienta útil para encarar el estudio no perturbativo de teorías cuánticas de campos con simetrías abelianas y no abelianas. En el caso abeliano ha permitido reobtener, mediante un procedimiento sencillo, las equivalencias entre modelos bidimensionales fermiónicos y bosónicos, establecidas con anterioridad en el marco operacional. En el caso no abeliano posibilitó el tratamiento de teorías en interacción cuyo análisis operacional había resultado poco práctico, dejando en evidencia estrechos vínculos entre diversos modelos bidimensionales que mantienen su interés como medio para lograr una mayor y más profunda comprensión de las teorías realistas que se proponen dar un marco unificado a todas las interacciones conocidas en la naturaleza.

Bibliografía

- (1) B.Klaiber, Lectures in Theoretical Physics, Boulder Lectures 1967, pág. 141, Gordon and Breach, New York, 1968.
- (2) J.H.Lowenstein and J.A.Swieca, Ann. Phys. (N.Y.), 68 , (1971), 172.
- (3) S.Coleman, Phys. Rev. D, 11 , (1975), 2088.
- (4) S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind, Ann. Phys., (N.Y.), 93 , (1975), 267.
- (5) E.Witten, Comm. Math. Phys., 92 , (1984), 455.
- (6) R.Roskies and F.A.Schaposnik, Phys. Rev. D, 23 , (1981), 558.
- (7) K.Furuya, R.E.Gamboa Saraví and F.A.Schaposnik, Nucl. Phys. B, 208 , (1982), 159.
- (8) C.M.Naón, Phys. Rev. D, 31 , (1985), 2035.
- (9) K.Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42 , (1979), 1195; Phys. Rev. D, 21 , (1980), 2848.
- (10) R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Nucl. Phys. B, 185 , (1981), 239.
- (11) R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschiatti, F.A.Schaposnik and J.E.Solomin, Ann.Phys. (N.Y.), 157 , (1985), 360.
- (12) A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B, 131, (1983), 121; 141, (1984), 223.
- (13) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik, Phys. Lett. B, 153 , (1985), 97.

- (14) J.A.Swieca, Fortschr. Phys., 25 , (1977), 303.
- (15) R.E.Gamboa Saraví, C.M.Naón and F.A.Schaposnik,  
Phys. Lett. B, 163 , (1985), 213.