

Modelamiento Multirresolución de Volúmenes Basado en Wavelets

Silvia Castro⁽¹⁾, Liliana Castro⁽²⁾

⁽¹⁾Departamento de Ciencias de la Computación

⁽²⁾Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Avda. Alem 1253 - 8000 Bahía Blanca - Argentina

{uscastro, lcastro}@criba.edu.ar

1 Abstract

Hoy en día, las superficies son el soporte para el modelamiento de objetos volumétricos en Computación Gráfica. Existe una gran diversidad de algoritmos para procesar y renderizar sus superficies y sus aproximaciones poligonales. Los datos volumétricos son entidades tridimensionales que pueden tener información interior y generalmente consisten en una gran cantidad de puntos que, en muchos casos, están irregularmente distribuidos.

En los últimos años, se han investigado intensivamente algoritmos y sistemas de hardware para producir renderización de volúmenes que incluyan sus interiores. Sin embargo, sólo desde hace poco tiempo se comenzaron a desarrollar modelos volumétricos para esos datos tridimensionales. Dentro de estos métodos, son de particular importancia aquéllos que permiten representar el volumen a distintos niveles de resolución. Esto se basa en el hecho de que las representaciones multirresolución proveen la oportunidad para compresión, edición multirresolución, transmisión progresiva de información y muchas otras operaciones que se han aplicado hasta el momento en curvas, superficies e imágenes.

De lo dicho, surge naturalmente la necesidad de nuevas alternativas para el modelamiento multirresolución de volúmenes. En este trabajo se presenta un nuevo método, basado en wavelets, para el modelamiento multirresolución de volúmenes definidos sobre grillas no estructuradas. La contribución básica de este trabajo es la extensión de las wavelets a dominios volumétricos. Esta extensión es una generalización del análisis multirresolución a volúmenes de topología arbitraria y se logra mediante la construcción de una base de wavelets sobre un volumen tetraedrizado arbitrario derivándola a partir de análisis multirresolución trivial y aplicando luego el esquema de lifting.

2 Introducción

Las wavelets son una herramienta matemática para la descomposición jerárquica de funciones. Si bien sus orígenes tienen sus raíces en la teoría de la aproximación, el procesamiento de señales y la física, recientemente se han utilizado para resolver distintos problemas en computación gráfica ([10], [19], [24], [7], [17]). Dadas la gran demanda computacional y de velocidad en aplicaciones a computación gráfica, la

utilización de las wavelets en este campo ha aumentado debido a que la mayoría de los algoritmos involucrados en la descomposición en base de wavelets es de orden lineal.

La construcción clásica de wavelets es sobre dominios infinitos contenidos en la recta real pero, debido a que en la mayoría de las aplicaciones prácticas las funciones de interés están definidas sobre dominios finitos, se han desarrollado distintas construcciones sobre dominios acotados ([5], [1]).

La extensión a wavelets bidimensionales se realizó mediante el producto tensorial de wavelets univariadas que, para el caso de wavelets univariadas no acotadas, conduce a wavelets definidas en todo \mathbb{R}^2 . Sin embargo, para que sean de aplicación práctica en el diseño de superficies, debemos restringirlas a un dominio finito. Las wavelets acotadas sobre un dominio rectangular, pueden construirse usando el producto tensorial de wavelets acotadas sobre intervalos. Para el caso de aplicaciones en computación gráfica, se presentó un ejemplo de wavelets parametrizadas sobre una grilla regular de \mathbb{R}^3 para aproximar así datos volumétricos en 3D ([18]). Es decir que las representaciones en dominios de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 se basan en construcciones tensoriales para wavelets. Si bien de esta manera sencilla podemos construir una representación en base de wavelets para superficies o para volúmenes, el problema es que dichas construcciones limitan severamente el tipo de objetos que se pueden modelar ya que no son aplicables a funciones definidas sobre dominios topológicos generales, tales como los dominios esféricos, sin que se introduzcan degeneraciones.

Los trabajos tradicionales sobre wavelets fueron los realizados por Mallat ([16]), Daubechies ([6]) y Chui ([4]) e introducen a las wavelets desde una perspectiva del procesamiento de señales. En ellos, éstas son definidas como traslaciones y dilataciones de una función particular, llamada *wavelet madre* y la herramienta clásica para la construcción de las mismas es la transformada de Fourier. Sin embargo, en computación gráfica se presenta la necesidad de contar con representaciones de funciones jerárquicas, en las que las wavelets no sean necesariamente trasladadas y dilatadas unas de otras. Los primeros trabajos relacionados con la introducción de wavelets de un modo totalmente diferente, basándose en una teoría de wavelets más general que permite construirlas en distintos tipos de dominios acotados corresponden a Lounsbery ([15]) y a Stollnitz et al. ([10]). Allí se introducen las wavelets mediante funciones de escalado utilizando la teoría del análisis multirresolución porque en estos casos ya no son aplicables las técnicas de Fourier para su construcción. Las deficiencias de las técnicas de Fourier han conducido a los investigadores de varias disciplinas, entre las que se cuenta la computación gráfica, a desarrollar otras *representaciones jerárquicas* de funciones.

Se extienden técnicas como las utilizadas para construir wavelets para curvas B-Splines y superficies de producto tensorial a dominios de tipo topológico arbitrario. Las wavelets así desarrolladas son una generalización de la noción estándar de análisis multirresolución: están basadas en funciones de escalado refinables. La refinabilidad, esencial para el análisis multirresolución, generaliza las traslaciones y las dilataciones y significa que una función de escalado en un nivel grueso puede expresarse como combinación lineal de funciones a un nivel más fino.

En este contexto, Lounsbery ([15]) construyó wavelets sobre dominios topológicos bidimensionales de tipo arbitrario. Para ello, extendió el análisis multirresolución

para funciones definidas sobre superficies, basando esta extensión en la refinabilidad, es decir, en la creación de funciones de escalado refinables. Este enfoque fue generalizado posteriormente por Sweldens ([26], [27]), quien reconoció la construcción de Loundsbery como una instancia de la idea más general de *lifting*. Schröder y Sweldens ([25]) continuaron su trabajo demostrando que la subdivisión y el *lifting* proveen métodos constructivos para la generación de wavelets definidas a conveniencia del usuario. Ellos focalizaron su trabajo en representaciones de wavelets para funciones definidas sobre la esfera para cuya construcción tienen en cuenta tanto el tipo topológico de la misma como su geometría curva. Posteriormente, Nielson ([12]) define las wavelets de Haar sobre la esfera, que presentan ventajas sobre las biortogonales de Sweldens y Schröder, ya que en el caso plano de áreas uniformes las mismas convergen a una de las dos wavelets de Haar triangulares ortogonales. Ambas construcciones se definen sobre dominios triangulares. Las wavelets pueden construirse entonces sobre dominios topológicos bidimensionales arbitrarios partiendo de una red triangular y usando la subdivisión como base.

En el caso de volúmenes, el modelamiento de los mismos mediante la transformada wavelet se restringía al producto tensorial. En este trabajo, se presenta un nuevo método para el modelamiento multirresolución de volúmenes definidos sobre grillas no estructuradas. La contribución básica de este trabajo es la extensión de las wavelets a dominios volumétricos. Esta extensión es una generalización del análisis multirresolución a volúmenes de topología arbitraria y se logra mediante la construcción de una base de wavelets sobre un volumen tetraedrizado arbitrario derivándola a partir de análisis multirresolución trivial y aplicando luego el esquema de *lifting*.

Daremos inicialmente una introducción a los datos volumétricos, luego detallaremos las construcciones de producto tensorial para técnicas de modelamiento de superficies y de volúmenes propiamente dichos, para datos volumétricos; en general, en este caso se parte de la voxelización de los datos. Luego profundizaremos en la construcción de wavelets sobre dominios topológicos arbitrarios. En este caso presentaremos la construcción de las funciones de escalado refinables, luego definiremos el producto escalar para superficies y finalmente veremos cómo construir wavelets sobre superficies de tipo topológico arbitrario.

3 Representación de Volúmenes

Debido a que hoy en día hay excelentes textos que presentan las wavelets ([10], [28], [25]), no entraremos en detalles acerca de sus construcciones sino que enfocaremos los elementos básicos necesarios para presentar el material sobre el conjunto de datos sobre el cual trabajaremos.

Los datos volumétricos son entidades de 3D, que pueden tener información interior, pueden consistir o no de superficies y generalmente están compuestos de una gran cantidad de puntos.

En el campo de la Computación Gráfica, han sido propuestas distintas alternativas para el modelamiento de volúmenes ([13], [23], [11], [19], [2]); sin embargo, la mayoría de ellas puede clasificarse en dos tipos diferentes

- Los que representan el volumen a través de su superficie o superficies y lo descomponen en constructores más simple tales como los triángulos.

- Los que representan el volumen mediante constructores de volumen más simples (análogos a los triángulos).

Los datos volumétricos pueden obtenerse mediante el muestreo, la simulación o a través de técnicas de modelamiento. Mediante una tomografía o imágenes de resonancia magnética puede obtenerse, por ejemplo, una secuencia de rodajas de 2D que se utiliza para la reconstrucción de un volumen de 3D. En otras aplicaciones, tales como en dinámica de fluidos computacional, los resultados de las simulaciones se visualizan como datos volumétricos. En la actualidad prevalecen las técnicas de *gráficas de superficies* para renderizar objetos 3D y cuentan con un modelado subyacente de parches. Recientemente, muchas aplicaciones geométricas tradicionales, tales como CAD y simulaciones, han explotado las técnicas conocidas como *gráficas de volúmenes* para modelamiento, manipulación y visualización.

Dado un conjunto de datos volumétricos de entrada, existen diversas técnicas que permiten obtener una isosuperficie o una tetraedrización a partir del mismo. Nosotros no nos concentraremos en este problema, sino que partiremos de la tetraedrización del volumen, para explorar la representación multirresolución del mismo. Finalmente presentaremos un nuevo método para el modelamiento de volúmenes a partir de una red tetraédrica de los mismos. Este método, a diferencia del mencionado previamente, permite representar el volumen y su interior.

3.1 Datos volumétricos

Un dato volumétrico es un conjunto S de muestras (x, y, z, v) , representando el valor v alguna propiedad de los datos en el lugar (x, y, z) . Si el valor v es simplemente 0 ó 1, con un valor 1 indicando que el punto (x, y, z) pertenece al objeto y 0 al ambiente en el que éste se encuentra, nos referimos a un dato binario. Este dato también puede ser multivaluado, representando este valor alguna propiedad medible del dato volumétrico, como por ejemplo color, densidad, temperatura, presión. El valor v , por otro lado, también podría ser un vector que representase, por ejemplo, la velocidad.

En general, las muestras pueden tomarse aleatoriamente en el espacio tridimensional; sin embargo, en la mayoría de los casos, el conjunto S es *isotrópico* es decir contiene muestras a intervalos espaciados regularmente. Cuando el espaciamiento entre muestras a lo largo de cada eje es constante pero hay diferentes espaciamientos constantes para cada uno de los ejes, el conjunto S es *anisotrópico*. Como estos conjuntos de muestras están definidos sobre una grilla regular, típicamente se usa un arreglo de 3D (llamado *buffer de volumen* o *frame buffer cúbico*) para almacenar los valores junto con la posición de la muestra en la grilla. Las grillas presentadas son *regulares*.

Alternativamente se emplean grillas *rectilíneas*, *curvilíneas* (o *estructuradas*) o *no-estructuradas*. En una *grilla rectilínea* las celdas de la misma están alineadas con los ejes, pero los espaciamientos a lo largo de los ejes son arbitrarios. Cuando se transforma mediante una transformación no lineal una grilla de este tipo pero conservando la topología de la misma, la grilla se transforma en una *grilla curvilínea*. En todo otro caso la grilla se denomina *no estructurada*. Un volumen representado de este modo es una colección de celdas cuya conectividad debe especificarse

explícitamente. Estas celdas pueden ser de forma arbitraria tales como tetraedros, hexaedros o prismas.

3.2 Modelamiento mediante el Producto Tensorial de Wavelets

Una forma simple de extender las wavelets a 3D es mediante el producto tensorial ([6], [16]). Consideremos, en particular, el caso tridimensional: sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$; entonces

$$\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) = \varphi \otimes \varphi \otimes \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

Si $\{\varphi(x-l) : l \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto (semi-)ortonormal, entonces $\Phi(x_1 - k_1, x_2 - k_2, x_3 - k_3)$ forma una base (semi-)ortonormal para $V_0 \subset L^2(\mathbb{R}^3)$. Mallat ([16]) demostró que existe un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R}^3)$ al trasladar y escalar en forma diádica la función de escalado φ .

Además sabemos que V_0

$$V_0 = \left\{ f : f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ \lambda \in l^2(\mathbb{R}^3), k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}}} \lambda_{k_1, k_2, k_3} \Phi(x_1 - k_1, x_2 - k_2, x_3 - k_3) \right\}$$

El complemento W_0 de V_0 en V_1 se genera, en forma similar, por las trasladadas de siete funciones, denominadas wavelets separables

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} &= \varphi \otimes \varphi \otimes \psi, & \Psi^{(2)} &= \varphi \otimes \psi \otimes \varphi, & \Psi^{(3)} &= \varphi \otimes \psi \otimes \psi \\ \Psi^{(4)} &= \psi \otimes \varphi \otimes \varphi, & \Psi^{(5)} &= \psi \otimes \varphi \otimes \psi, & \Psi^{(6)} &= \psi \otimes \psi \otimes \varphi, & \Psi^{(7)} &= \psi \otimes \psi \otimes \psi \end{aligned} \quad (1)$$

Los elementos del espacio W_0 , como ocurre en el caso unidimensional, representan el detalle de pasar de un espacio V_0 a un espacio V_1 y por lo tanto

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 7} W_j = L^2(\mathbb{R}^3)$$

Cuando el análisis multirresolución es ortogonal, la descomposición en wavelets de una determinada función $f(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ calcula las proyecciones en V y en W . En el caso más general de sistemas biortogonales podemos definir, al igual que en el caso unidimensional, operadores de proyección \mathcal{P}^3 y \mathcal{Q}^3 que calculan las aproximaciones como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^3 f(\mathbf{x}) &= \sum_{k_1, k_2, k_3} \langle f, \varphi \rangle \tilde{\varphi} = \sum_{k_1, k_2, k_3} \langle f, \tilde{\varphi} \rangle \varphi \\ \mathcal{Q}^3 f(\mathbf{x}) &= \sum_{k_1, k_2, k_3} \langle f, \psi \rangle \tilde{\psi} = \sum_{k_1, k_2, k_3} \langle f, \tilde{\psi} \rangle \psi \end{aligned}$$

La transformada wavelet rápida correspondiente consiste en aplicar la transformada wavelet rápida unidimensional a cada una de las dimensiones de la matriz.

Para el caso bidimensional pueden verse distintos algoritmos para estas descomposiciones en ([8], [9], [10]). En estos casos, los algoritmos se aplican para la descomposición de imágenes en una base de Haar. Sin embargo, si como conjuntos de datos se consideran los puntos de control de una red poliédrica rectangular, dichos algoritmos se pueden utilizar para una superficie. Cabe destacar que, en este caso, puede usarse el producto tensorial de distintas bases de wavelets y que esta descomposición puede aplicarse a grillas isotrópicas.

Así, la transformada wavelet 3D puede aplicarse a datos volumétricos binarios, almacenados en una grilla isotrópica haciendo corresponder un determinado valor al voxel si éste pertenece al objeto a modelar y otro valor si el voxel no corresponde al objeto ([18]). La operación de filtrado se aplica tres veces, una a cada una de las direcciones tridimensionales; de este modo se obtiene una expresión multirresolución del volumen.

Los datos volumétricos también pueden darse mediante una isosuperficie generada a partir de un volumen. Esta superficie $\sigma(s, t)$ es topológicamente equivalente a un toroide y está dada por una red poliédrica de $m \times n$ puntos de control; en este caso, la operación de filtrado se aplica a cada una de las coordenadas cartesianas de los puntos de control y el filtro que se usa para cada una de las coordenadas es el generado para el caso univariable de B-Splines interpolantes.

Si los datos volumétricos provienen de una tomografía, éstos pueden asociarse a una grilla volumétrica de, por ejemplo, $128 \times 128 \times 128$ voxels. En este caso el valor asociado con cada voxel correspondería a una 4 – *upla* de color y la operación de filtrado se aplica a cada una de las componentes de color. Para esta descomposición puede usarse un filtro de Haar ([24], [14]). Antes de aplicar la transformada wavelet, deben separarse las componentes de color correspondientes a los canales RGB α . Así, se realiza la descomposición en wavelets a cada una de las componentes; luego de haber llegado al nivel de descomposición deseado se unen nuevamente los colores para generar la imagen.

4 Modelamiento de Volúmenes Multirresolución mediante wavelets

Vimos cómo modelar un volumen mediante producto tensorial ([18], [4]). En este caso, la descomposición y el análisis ha sido aplicada tanto sobre la 4 – *upla* de color como sobre las coordenadas 3D del volumen, descomponiendo el mismo en las tres direcciones espaciales pero limitando el modelamiento del objeto a una grilla isotrópica. Si el objeto proviene de datos dispersos, su modelamiento se puede realizar mediante una red tetraédrica, lo que constituye un dominio topológico general para la representación intrínseca de un volumen. En este caso, se debe contar con wavelets construidas sobre los tetraedros y para ello, es necesario extender el análisis multirresolución para funciones definidas sobre los mismos. Esta extensión, al igual que en el caso de superficies ([15]), se basa en el refinamiento.

La red que representa el objeto debe almacenar la geometría 3D, es decir, los vértices 3D y su topología. Una red de tetraedros puede representar entonces un volumen de tipo topológico arbitrario. Partiendo entonces de una red tetraédrica y usando la subdivisión como base, veremos cómo construir wavelets sobre dominios topológicos arbitrarios.

4.1 Volúmenes de Subdivisión

Un volumen de subdivisión resulta de refinar repetidamente una red de control tetraédrica VT de 3D ([22], [21], [20], [29]). La Fig. 1 muestra un paso en la subdivisión recursiva de un tetraedro la que, aplicada a volúmenes tetraedrizados, conduce a una posible colección de espacios refinables y por lo tanto, a una secuencia de espacios lineales anidados como los requeridos en un análisis multirresolución. Al realizar la subdivisión de un tetraedro, se generan 8 subtetraedros. Bey ([3]) presenta

un algoritmo de refinamiento para grillas tetraédricas no estructuradas, que genera tetraedrizaciones consistentes y estables.

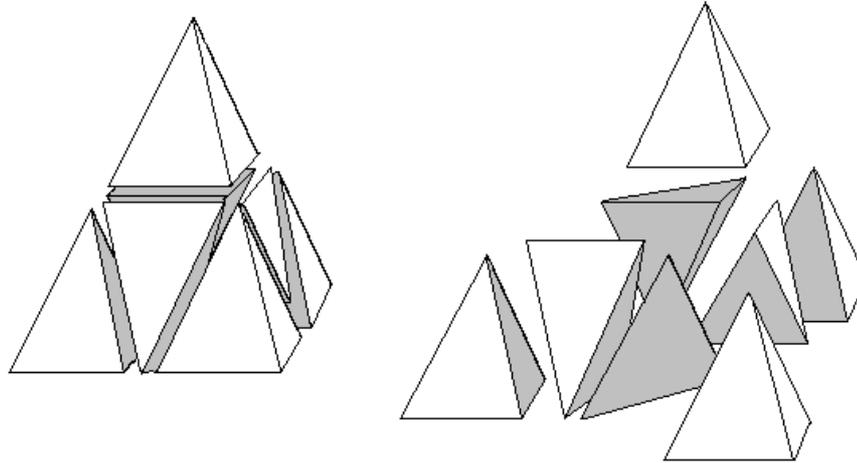


Figura 1. Subdivisión recursiva de un tetraedro.

4.2 Análisis Multirresolución para Volúmenes

La idea principal del análisis multirresolución es la descomposición de una función en una parte de baja resolución y en una de detalle. En cada paso de la descomposición se partirá un volumen de una determinada resolución en una parte de menor resolución y una de detalle. Por ejemplo, en la Fig. 2 el volumen (a) tiene menor resolución que el mostrado en (b); los vértices en (b) se calculan como promedio pesado de los vértices de (a).

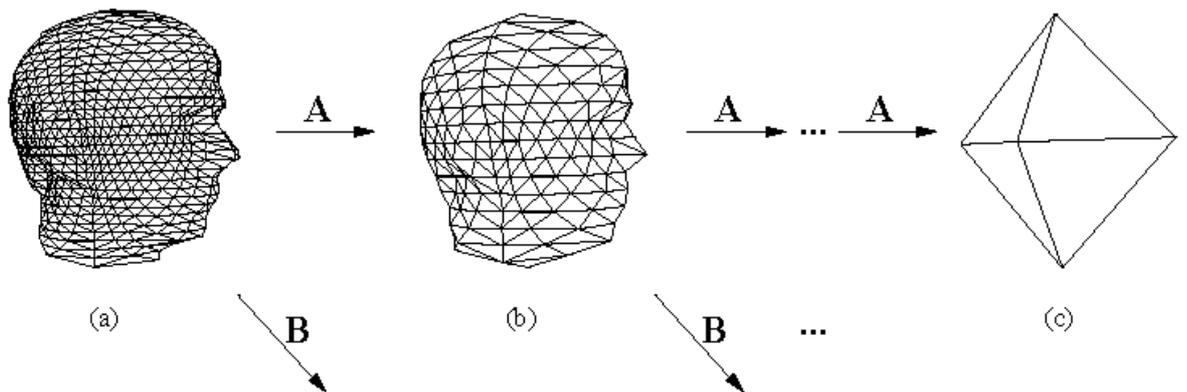


Figura 2. Refinamiento de una superficie.

Estos promedios pesados implementan esencialmente un filtro pasabajos y esta extracción de la parte de baja resolución es lineal, de modo tal que pueden expresarse como producto de un vector por una matriz A_j , siendo las columnas de A_j los coeficientes de los filtros pasabajos de análisis. La parte de detalle consiste naturalmente en una colección de coeficientes de wavelets calculados como diferencias pesadas de los vértices de (a). Estos coeficientes representan el detalle y pueden calcularse multiplicando por una matriz B_j , siendo las columnas de B_j los coeficientes

de los filtros pasaltos de síntesis. Este proceso de descomposición (análisis) se puede aplicar recursivamente sobre la parte de baja resolución, hasta que se obtiene la representación de menor resolución posible del volumen (c).

El dominio de la función, en el caso de volúmenes, podría ser una red poliédrica y, en particular en nuestro caso, se trata de una red tetraédrica. A partir de ésta se realiza la descomposición de la misma en una parte de baja resolución, que corresponde al volumen a menor resolución y en una de detalle. Esta última provee la colección de coeficientes de wavelets que son calculados como diferencias pesadas de los vértices del volumen a mayor resolución y de los vértices del volumen a menor resolución. Al igual que para superficies, este proceso de descomposición (análisis) se puede aplicar recursivamente sobre la parte de baja resolución, hasta obtener la representación de menor resolución posible del volumen.

El *análisis* estará caracterizado entonces por las matrices A_j y B_j cada una de cuyas columnas corresponde a los filtros de análisis. Los filtros de análisis A_j y B_j pueden invertirse para obtener los filtros de síntesis P_j y Q_j . La síntesis, es decir la recuperación del poliedro original a partir de la aproximación a menor resolución y de los coeficientes de wavelets, consta de dos pasos

- **Particionamiento:** cada tetraedro de baja resolución es particionado en ocho subtetraedros introduciendo nuevos vértices en el tetraedro original, de acuerdo al método de subdivisión elegido.
- **Perturbación:** cada vértice resultante es perturbado de acuerdo a los coeficientes de wavelets.

Para formular el análisis multiresolución para volúmenes de tipo topológico arbitrario, deben diseñarse entonces los cuatro filtros A_j , B_j , P_j y Q_j .

Nosotros basamos nuestro trabajo en estrategias de refinamiento para *grillas simples*. Estas grillas producen tetraedrizaciones consistentes y estables. Para definir una secuencia de espacios anidados V_j usaremos una secuencia de tetraedros y en este caso la *red base* es la tetraedrización VT_0 . La red base más simple posible es un único tetraedro T . La red VT_1 se crea a partir de VT_0 subdividiendo el tetraedro T en ocho subtetraedros de igual volumen de modo tal que cada vértice $T_{i_1} \in VT_1$, $1 \leq i \leq 8$ coincide con un vértice o un punto medio de $T \in VT_0$. Así, primero conectamos los lados de cada cara triangular de T y obtenemos los 4 subtetraedros de los vértices del tetraedro original que son congruentes con T (T_1, T_2, T_3, T_4); entonces, del octaedro interior *Oct*, tomamos los otros cuatro subtetraedros.

Estos 8 subtetraedros son de igual volumen pero los interiores no son, en general, congruentes con T . En ([3]) se demuestra que una elección errónea de subtetraedros puede llevar a elementos degenerados. Sin embargo, allí se introduce un algoritmo simple que siempre permite generar subtetraedros sin obtener tales elementos degenerados. Entonces, siempre es posible subdividir el tetraedro VT_j para producir una grilla VT_{j+1} . Estos subtetraedros así generados pueden ser divididos nuevamente para producir VT_2 y así siguiendo (Ver Fig. 3).

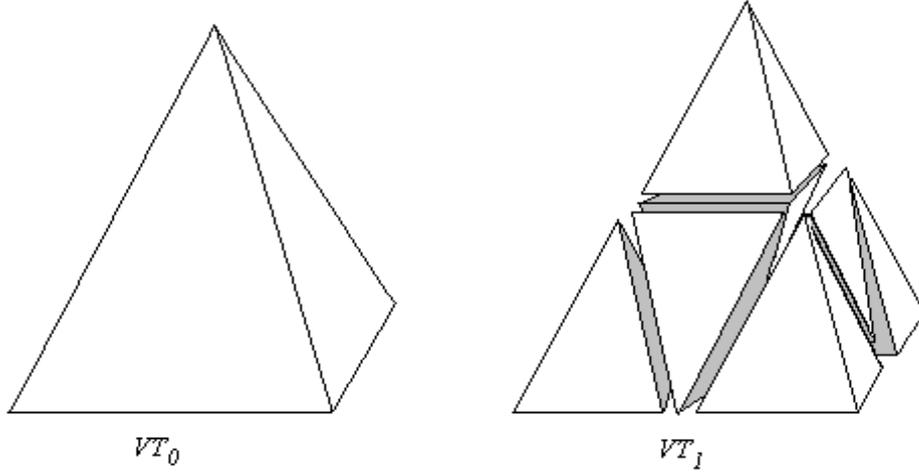


Figura 3. Subdivisión recursiva de un tetraedro en tetraedros.

Con cada red VT_j , definimos V_j como el conjunto de todas las funciones continuas que son lineales en cada tetraedro de VT_j . Estos espacios son anidados porque cualquier función que es lineal en los tetraedros de VT_j es también lineal en los tetraedros de VT_{j+1} . Formalmente, cualquier función en V_j transforma puntos de VT_j en un número real

$$V_j := \{f \mid f : VT_j \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ lineal en los tetraedros de } VT_j\}$$

Como V_j sólo contiene funciones lineales a trozos, cualquier miembro de V_j está unívocamente determinado por sus valores en los vértices de VT_j . Las funciones de escalado $\varphi_{j,i}(\mathbf{x})$ que generen V_j deben ser integrables, ya que el producto escalar definido sobre los espacios V_j está basado en la integración. Las wavelets $\psi_{j,i}(\mathbf{x})$ son simplemente funciones de base para los espacios complemento W_j . con soporte en \mathbb{R}^3 .

Específicamente, podemos decir que una red poliédrica con vértices $c_{J,i} = (x_{J,i}, y_{J,i}, z_{J,i})$ topológicamente equivalente a la red base VT_0 , está definida por una función

$$Vol(\mathbf{x}) = \sum_{i \in v(VT_J)} c_{J,i} \varphi_{J,i}(\mathbf{x}) \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} \mathbf{x} \in VT_0 \\ v(VT_J) \text{ el conjunto de índices que} \\ \text{indexa los vértices de } VT_J \end{cases}$$

Podemos dar entonces la descomposición en wavelets de $Vol(\mathbf{x})$; es decir

$$Vol(\mathbf{x}) = \sum_{i \in v(VT_0)} c_{0,i} \varphi_{0,i}(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i \in (v(VT_{j+1}) - v(VT_j))} d_{j,i} \psi_{j,i}(\mathbf{x})$$

para una elección adecuada de las wavelets $\psi_{j,i}(\mathbf{x})$.

4.3 Producto Escalar sobre Volúmenes de Subdivisión

Para definir las wavelets y completar la definición del análisis multirresolución, es necesario definir previamente el producto escalar para funciones pertenecientes a volúmenes de tal manera de caracterizar la ortogonalidad.

Dadas dos funciones $f, g \in V_j(VT_0)$, $j < \infty$, definimos el producto escalar de las mismas como

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\tau \in \Delta(VT_0)} \frac{1}{\text{Volumen}(\tau)} \int_{\mathbf{x} \in \tau} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

siendo $\begin{cases} d\mathbf{x} & \text{el diferencial de volumen en } \mathbb{R}^3 \\ \Delta(VT_0) & \text{el conjunto de tetraedros de } VT_0 \\ \tau & \text{un tetraedro de } \Delta(VT_0) \end{cases}$

Como este producto escalar es independiente de las posiciones geométricas de los vértices de VT_0 ; esto permite un precálculo de productos escalares.

4.4 Construcción de las Wavelets

A continuación construiremos un esquema interpolante basado en vértices. La subdivisión del tetraedro elegida, hace que la introducción de nuevos vértices se realice en los puntos medios de las aristas del tetraedro; esto significa que, al pasar de un nivel de resolución j a un nivel $j + 1$, se adicionarán 6 nuevos vértices en un tetraedro. En el nivel de resolución j tendremos un conjunto de índices \mathcal{K}_j , que permiten indexar los vértices del tetraedro, en tanto que en el nivel $j + 1$ tendremos un conjunto de índices correspondientes a los nuevos vértices introducidos en los puntos medios de los lados y que denominaremos \mathcal{M}_j . La unión de estos dos conjuntos de índices, nos dan todos los índices correspondientes al tetraedro en el nivel $j + 1$; es decir, $\mathcal{K}_j \cup \mathcal{M}_j = \mathcal{K}_{j+1}$.

Como construiremos un esquema interpolante, los coeficientes en las funciones de escalado son simplemente submuestreados en el análisis y sobremuestreados durante la síntesis, en tanto que para calcular los coeficientes en la base de wavelets, debemos realizar algunos cálculos. Para el análisis y la síntesis los coeficientes se calculan respectivamente como

$$\begin{aligned} c_{j,k} &:= c_{j+1,k} & \forall k \in \mathcal{K}_j \\ d_{j,m} &:= c_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathcal{K}_m} \tilde{s}_{j,k,m} c_{j,k} & \forall m \in \mathcal{M}_j \\ c_{j+1,k} &:= c_{j,k} & \forall k \in \mathcal{K}_j \\ c_{j+1,m} &:= d_{j,m} + \sum_{k \in \mathcal{K}_m} \tilde{s}_{j,k,m} c_{j,k} & \forall m \in \mathcal{M}_j \end{aligned}$$

Partimos de una wavelet biortogonal

$$\begin{aligned} d_{j,m} &:= c_{j+1,m} - \frac{1}{2} (c_{j+1,u} + c_{j+1,v}) \\ c_{j+1,m} &:= d_{j,m} + \frac{1}{2} (c_{j+1,u} + c_{j+1,v}) \end{aligned}$$

Así contamos con bases a partir de las cuales es posible construir una base con lifting, la cual usaremos para asegurarnos un momento nulo. Partimos de las wavelets propuestas por Schröder y Sweldens ([25]) que son de la forma

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - s_{j,u,m}\varphi_{j,u} - s_{j,v,m}\varphi_{j,v}$$

es decir, que definen la wavelet en el punto medio de un lado, como combinación lineal de las funciones de escalado en el punto medio $(j+1, m)$ y dos funciones de escalado en el nivel más grueso de los dos puntos en los extremos (u, v) del segmento del cual m es el punto medio. Los pesos $s_{j,k,m}$ se eligen de modo tal que la wavelet resultante tenga una integral que se hace cero

$$\begin{aligned} \int_V \psi_{j,m} dV &= \int_V \varphi_{j+1,m} dV - \int_V s_{j,u,m} \varphi_{j,u} dV - \int_V s_{j,v,m} \varphi_{j,v} dV \\ 0 &= \int_V \varphi_{j+1,m} dV - s_{j,u,m} \int_V \varphi_{j,u} dV - s_{j,v,m} \int_V \varphi_{j,v} dV \\ s_{j,k,m} &= \frac{\int_V \varphi_{j+1,m} dV}{2 \int_V \varphi_{j,*} dV} = \frac{I_{j+1,m}}{2I_{j+1,*}} \end{aligned}$$

La integral $\int_V \varphi dV$ puede aproximarse en el nivel más fino por medio de un método de cuadratura, y luego calcularse recursivamente en los niveles más gruesos utilizando las relaciones de refinamiento. Podemos entonces expresar $\psi_{j,m}$ como

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \frac{I_{j+1,m}}{I_{j+1,*}} \varphi_{j,k}$$

Entonces cualesquiera de las wavelets de los vértices base pueden desplazarse con las expresiones obtenidas. Entonces los algoritmos para el Análisis y la Síntesis son:

Análisis

- Calcular los coeficientes de detalle

$$\forall m \in \mathcal{M}_j \quad d_{j,m} := c_{j+1,m} - \frac{1}{2}(c_{j+1,u} + c_{j+1,v})$$

- Calcular los coeficientes $c_{j,k}$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathcal{K}_j & \quad c_{j,k} = c_{j+1,k} \\ \forall m \in \mathcal{M}_j, \quad u, v \in \mathcal{K}_j & \quad \begin{cases} c_{j,u} = c_{j+1,u} + s_{j,u,m} d_{j,m} \\ c_{j,v} = c_{j+1,v} + s_{j,v,m} d_{j,m} \end{cases} \end{aligned}$$

Síntesis

- Calcular los $c_{j+1,k}$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathcal{K}_j & \quad c_{j+1,k} = c_{j,k} \\ \forall m \in \mathcal{M}_j & \quad \begin{cases} c_{j+1,u} = c_{j,u} - s_{j,u,m} d_{j,m} \\ c_{j+1,v} = c_{j,v} - s_{j,v,m} d_{j,m} \end{cases} \end{aligned}$$

- Utilizar los $c_{j+1,k}$ ya calculados para calcular los $c_{j+1,m}$

$$\forall m \in \mathcal{M}_j \quad c_{j+1,m} := d_{j,m} + \frac{1}{2}(c_{j+1,u} + c_{j+1,v})$$

5 Conclusiones y Trabajo Futuro

Hoy en día, las superficies son el soporte para el modelamiento de objetos en Computación Gráfica. Existen muchos algoritmos para manejar las superficies y muchas estaciones de trabajo y PCs están diseñadas especialmente para procesar y renderizar superficies y sus aproximaciones poligonales. En los últimos años, se están investigando intensivamente algoritmos y sistemas de hardware para producir renderización de volúmenes. Sin embargo, sólo desde hace poco tiempo se comenzaron a desarrollar modelos volumétricos para esos datos. En este caso, los métodos hacen hincapié en representar y modelar los atributos de los objetos de 3D y sus interiores para lo cual el énfasis está dado en el interior en tanto que, en los métodos de superficies, se asume que el interior de los objetos es homogéneo.

Esto plantea la necesidad de nuevas alternativas en el modelamiento de volúmenes. En este trabajo se planteó un nuevo método basado en wavelets para el modelamiento de volúmenes definidos sobre grillas no estructuradas. Esto se logra mediante una generalización del análisis multirresolución a volúmenes de topología arbitraria derivándose la misma a partir del análisis multirresolución trivial mediante el esquema de lifting. Estas representaciones jerárquicas son de gran importancia ya que proveen la oportunidad para compresión, edición multirresolución y transmisión progresiva en red de volúmenes.; tanto éstas, como otras operaciones se han aplicado hasta el momento en curvas, superficies e imágenes.

En cuanto al trabajo futuro, se incluye

- la construcción de otras bases de wavelets para el modelamiento.
- la posibilidad de extensión de las wavelets de Haar generalizadas a $L(V^3)$, considerando a $L(V^3)$ como la unión disjunta de los tetraedros que conforman el volumen.
- la incorporación de máscaras de subdivisión en volúmenes que conduzcan a esquemas de subdivisión más suaves.
- el diseño de algoritmos que conduzcan a una subdivisión adaptiva del espacio en tetraedros tomando como base el modelo subyacente planteado del volumen.

Referencias

- [1] I. D. Albert Cohen and P. Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1:54 – 81, 1993.
- [2] R. Y. Arie Kaufman and D. Cohen. Volume graphics. *IEEE Computer*, pages 51–64, 1993.
- [3] J. Bey. Tetrahedral grid refinement. *Computing*, 55(4):355–378, 1995.
- [4] C. Chui. An introduction to wavelets. In S. E. Charles Chui, editor, *Wavelet Analysis and its Applications*. Academic Press, 1992.
- [5] C. Chui and E. Quak. Wavelets on a bounded interval. *Numerical Methods of Approximation Theory*, 9:53–75, 1992.
- [6] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

- [7] P. S. Denis Zorin and W. Sweldens. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. *ACM Proceedings of SIGGRAPH'96*, pages 189–192, Aug. 1996.
- [8] T. D. Eric Stollnitz and D. Salesin. Wavelets for computer graphics: A primer, part 1. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15:76–84, May 1995.
- [9] T. D. Eric Stollnitz and D. Salesin. Wavelets for computer graphics: A primer, part 2. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15:75–85, 1995.
- [10] T. D. Eric Stollnitz and D. Salesin. *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc, 1996.
- [11] L. D. Floriani and E. Puppo. Hierarchical triangulation for multiresolution surface description. *ACM Transactions on Graphics*, 14:363–411, Oct. 1995.
- [12] I.-H. J. Gregory Nielson and J. Sung. Haar wavelets over triangular domains with applications to multiresolution models for flow over a sphere. 1997.
- [13] M. G. H. H. Gregory Nielson, Pere Brunet and S. Klimenko. Research issues in data modeling for scientific visualization. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 70–73.
- [14] M. G. L. Lippert and S. Häring. Ray-tracing of multiresolution b-spline volumes. Technical Report CS Dept. Internal Report 239, Institute for Information Systems - CS Dept.-Swiss Federal Institute of Technology, 1996.
- [15] J. M. Lounsbery. *Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type*. PhD thesis, University of Washington, Washington, Seattle, 1994.
- [16] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 11:674–693, 1989.
- [17] R. D. M.H. Gross, L. Lippert and S. Häring. Two methods for wavelet-based volume rendering. Technical Report CS Dept. Internal Report 247, Institute for Information Systems - CS Dept.-Swiss Federal Institute of Technology, 1997.
- [18] S. Muraki. Approximation and rendering of volume data using wavelet transforms. *Proceedings os Visualization '92*, pages 21–28, 1992.
- [19] S. Muraki. Multiscale volume representation by a dog wavelet. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1:109–116, 1995.
- [20] G. Nielson. Tools for triangulations and tetrahedrizations. Survey original no publicado, realizado para el curso dictado por el Dr. Nielson en la UNS.
- [21] G. Nielson and J. Sung. Internal volume tetrahedrization. 1997.
- [22] C. M. E. P. Paolo Cignoni, Leila De Floriani and R. Scopigno. Multiresolution modeling and visualization of volume data based on simplicial complexes. *1994 Symposium on Volume Visualization*, pages 19–26, Oct. 1994.
- [23] V. Ranjan and A. Fournier. Volume models for volumetric data. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 28–36.
- [24] B. J. Ron DeVore and B. Lucier. Image compression through wavelet transform coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38:719–746, 1992.
- [25] P. Schroeder and W. Sweldens. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *ACM Proceedings of SIGGRAPH'95*, pages 161–172, Aug. 1995.
- [26] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Industrial Mathematics Initiative* 1994:7, 1994.

- [27] W. Sweldens. The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. *Proceedings of the SPIE*, 2569:68–79, 1995.
- [28] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3:186–200, 1996.
- [29] R. Westermann. A multiresolution framework for volume rendering. *1994 Symposium on Volume Visualization*, pages 51–57, Oct. 1994.