

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS



**Estudio Fluidodinámico de la Implosión
Esférica de un Sistema de Dos Fases**

T E S I S

para optar al título de Doctor en Física

Luis Pablo Thomas

1 9 8 8

T 82 B. (7-06-10)

Fe de Errores

Dejo constancia que el título obtenido es el de
Grado Académico de Doctor en Ciencias

Luis Thomas

Mi sincero agradecimiento a todos los que hicieron posible esta tesis.

A mi madre, por su apoyo y dedicación.

Al Dr. Roberto Gratton, que me brindó su ejemplo, su confianza, y su paciencia para guiarme profesionalmente.

Al Dr. Roberto Piriz, por proponerme este estudio y por las útiles discusiones sobre el tema.

Al Dr. Vicente Pais, por su guía en el desarrollo e implementación del código de simulación numérica.

Al Dr. Mario Garavaglia, por su ayuda con los trámites del Doctorado en la Universidad Nacional de La Plata.

A la Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Bs. As., por todas las facilidades que me brindó.

A la Cámara Empresaria de Tandil, por su apoyo moral y material durante mis estudios secundarios y universitarios.

A la Universidad Nacional de La Plata, que por su permanente cooperación con otras Universidades de reciente formación permitió mi ingreso al Doctorado.

Al Sr. Eliseo del Pino, por la realización del gran número de gráficos que incluye esta tesis.

Al Sr. Marcos Magiori, por su ayuda en parte del tipeado.

A los integrantes del Centro de Computos de la Universidad, que facilitaron las largas simulaciones de las implosiones.

A los integrantes del Laboratorio de Física Experimental, y en particular, al Lic. Javier Diez, sin cuyo compañerismo todo hubiese sido mucho más difícil.

INDICE

<u>Cap.</u>	<u>Secc.</u>	<u>Titulo</u>	<u>Pag.</u>
1.		INTRODUCCION	4
2.		ETAPA INICIAL. PRECALENTAMIENTO DEL GAS INTERIOR	9
	2.1	Dos regímenes de precalentamiento.	10
	2.2	Estimación del valor crítico A_c .	12
	2.3	Entropía del gas interior.	15
3.		ACELERACION DE LA CASCARA	20
	3.1	Cálculo de la energía cinética total.	21
	3.2	Cálculo de la energía cinética en una fracción asignada de la cáscara.	25
	3.3	Cálculo de la pérdida de masa.	30
4.		ETAPA DE ESTANCAMIENTO	32
5.		VALIDEZ DE LAS PRINCIPALES APROXIMACIONES	46
	5.1	Convergencia del flujo.	47
	5.2	Aceleración uniforme en $t = t_m$.	51
	5.3	Compresión isoentrópica del gas para $t > t_m$.	52
	5.4	Tiempo máximo de crecimiento de la presión P_a .	52

6.	SIMULACION NUMERICA	54
6.1	Características fundamentales del código de simulación y datos empleados.	55
6.2	Resultados numéricos. Comparación con los analíticos.	57
6.2.1	Etapa de precalentamiento del gas interior	57
6.2.2	Compresión adiabática del gas. Instante de máxima compresión.	70
6.2.3	Expansión del gas.	93
/		
7.	RESUMEN Y CONCLUSIONES	107
	APENDICE	113
A	Energía que se pierde por la ablación de masa si P_a es generada por ese proceso.	114
B	Energía interna de la parte efectiva de la fase externa.	117
C	Cálculo del tiempo efectivo t_{ef} de frenamiento.	119
	REFERENCIAS	123

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1. INTRODUCCION

La implosión de esferas de gas rodeadas por un fluido de mayor densidad aparece en diversas ramas de la física, por ejemplo, en los estudios de la cavitación producida por hélices, en ciertos tipos de colapsos que se encuentran en astronomía, y en la fusión por confinamiento inercial.

Cada caso impone condiciones diferentes a las implosiones, pero los procesos involucrados en ellas guardan una estrecha relación. En este trabajo se analiza la dinámica de las implosiones de estos sistemas de dos fases específicamente en el rango de valores de las magnitudes físicas de las experiencias de fusión.

En la fusión por confinamiento inercial es esencial llevar un gas de D-T a altas densidades [1-5]. Ello se logra depositando gran energía en las capas externas de un sistema esférico que se denomina blanco, en tiempos inferiores o del orden de la evolución fluidodinámica del sistema. Las capas afectadas, que alcanzan presiones enormes, comprimen la fase interior. De esta manera, se espera obtener los valores de densidad, presión y temperatura adecuados para la ignición del gas D-T.

Un tipo de blanco ampliamente considerado consta de una esfera gaseosa de D-T rodeada por una fase externa, compuesta por una serie de capas de diferentes materiales [1,4,6,7]. Las capas superficiales de la fase externa se destinan a la absorción de la energía, que se supone entregada por medio de radiación láser o por haces de iones (ver, por ejemplo, Ref. [8-10]). La parte interior de la fase externa, que no absorbe energía en forma directa, actúa como pistón sobre el gas D-T y será denominada "cáscara" en este trabajo.

La cáscara también está formada por capas de diferentes materiales, y una de sus funciones es evitar que partículas rápidas o rayos X, generados en las zonas de alta presión, alcancen el gas interior precalentándolo [1-5,11,12]. De esta

forma, la elevación de temperatura del gas D-T se realiza básicamente por la dinámica de la implosión, esto es, por la amplificación de la presión externa debido al efecto de convergencia y a la inercia de las capas aceleradas.

Existen otros tipos de blancos, como los blancos "cannonball" [13-14], en los cuales la irradiación se produce dentro de una cavidad especialmente diseñada. Aunque el modelo físico desarrollado también puede aplicarse para este tipo de blanco, en este trabajo se considerarán explícitamente sólo los blancos preparados para una irradiación directa, y en particular, para radiación láser.

El estudio completo de la evolución de los blancos es extremadamente complejo debido a la variedad, no linealidad e interdependencia de los diversos procesos físicos involucrados, que dependen además del tipo particular de irradiación y de la estructura del blanco. Entonces, para obtener modelos analíticos relativamente sencillos que establezcan las leyes de escala dominantes, se debe recurrir a simplificaciones.

En este trabajo se estudia la evolución fluidodinámica de un sistema formado por una esfera de gas central y una cáscara esférica uniforme. Se supondrá que existe una presión externa aplicada sobre el contorno exterior sin considerar el modo con que fué generada. El perfil temporal de la presión externa es de gran importancia y puede modificar significativamente los resultados [15-22]. Aquí se considera una presión externa constante, lo que presupone limitar la validez del modelo a un rango que oportunamente se analizará.

Se considera, también, que se mantiene la simetría esférica en toda la evolución. Esto impone fuertes exigencias sobre la uniformidad de la irradiación externa y sobre la esfericidad de los blancos, de modo que no se amplifiquen excesivamente las inestabilidades hidrodinámicas de Rayleigh-Taylor [23-27], durante la etapa de aceleración y deceleración de la cáscara. La evolución del fenómeno en dos dimensiones es muy complicada y grandes códigos son necesarios para simularla (ver, por ejemplo, Craxton

et. al. [28], que emplea decenas de horas en una supercomputadora CRAY X-MP).

Por simplicidad, se supone que las dos fases cumplen con la ecuación de estado de los gases ideales. Esto es válido sólo para determinados valores de la presión externa [29-30]. Para los valores típicos empleados en fusión esta suposición provee una primera aproximación a la resolución del problema.

Varios autores han propuesto modelos analíticos con estas hipótesis [31-39]. En particular, en la referencia [39] se estudia la dinámica de la implosión de blancos cuya cáscara es muy delgada (relación de aspecto $A = R_{o0} / \Delta_o \geq 20$, donde R_{o0} y Δ_o son el radio exterior y el espesor iniciales de la fase exterior, respectivamente). En este trabajo se elabora un modelo más completo que el de dicha referencia, de forma que resulte aplicable cuando el espesor inicial es mayor. Las contribuciones más importantes consisten en:

a) Se introduce el efecto del espesor inicial de la cáscara sobre la entropía del gas interior. El incremento de entropía suele denominarse "precalentamiento" fluidodinámico. Para relaciones de aspecto grandes ($A > 15$), el precalentamiento es mayor que el considerado usualmente y esto disminuye fuertemente la presión y densidad máximas alcanzadas por el gas.

b) Si el espesor de la fase de alta densidad es suficientemente grande, sólo una parte interna "efectiva" de ella participa en la determinación de los parámetros del gas interior en el instante de su máxima compresión. El resto de la cáscara sólo hace más lenta la expansión posterior.

Posteriormente, se presentan los resultados de las simulaciones numéricas del fenómeno, obtenidos con un código numérico sencillo elaborado por el autor de este trabajo. A pesar de su sencillez, con este código se pueden simular las implosiones respetando las mismas hipótesis globales que se adoptaron en el modelo. El código proporciona, entonces, un marco de comparación adecuado para el desarrollo analítico.

Los resultados numéricos confirman que el modelo trata apropiadamente las etapas fundamentales de la evolución del fenómeno, dentro del rango de validez de las hipótesis realizadas, y corroboran específicamente los principales puntos del modelo mencionados anteriormente.

En resumen, el modelo analítico, desarrollado en los Capítulos 2 a 4, muestra como intervienen cualitativa y cuantitativamente cada uno de los procesos físicos relevantes en la determinación de los parámetros de la cáscara y del gas cuando la implosión se detiene. Por otra parte, en el Cap. 5 se estudia el rango de validez de las aproximaciones utilizadas. El Cap. 6 se destina a una breve descripción del código de simulación y de los datos empleados, y en él se comparan exhaustivamente los resultados analíticos y numéricos. Finalmente, en el Cap. 7 se resumen las discusiones y conclusiones.

CAPITULO 2

ETAPA INICIAL. PRECALENTAMIENTO DEL GAS INTERIOR

2.1	Dos regímenes de precalentamiento.	p. 10
2.2	Estimación del valor crítico A_c .	p. 12
2.3	Entropía del gas interior.	p. 15

2. ETAPA INICIAL : PRECALENTAMIENTO DEL GAS INTERIOR

2.1 Dos regímenes de precalentamiento

En $t = 0$ comienza a aplicarse una irradiación láser que produce una presión P_a constante durante toda la implosión. Esta condición lógicamente será válida para una determinada conformación temporal del pulso láser o de iones; en la práctica, para gran parte de los casos de interés, se cumple con buena aproximación si la intensidad de la irradiación incidente sobre el blanco se mantiene constante [40].

La presión P_a genera una onda de choque fuerte que atraviesa la cáscara. Dicha presión es suficientemente grande (del orden de los Mbar) como para que la energía interna cedida al material sea mucho mayor que la energía de cohesión, y por lo tanto, se puede considerar al material de la cáscara como un gas perfecto [29-30].

Cuando la onda de choque llega a la interfase en $r = R_{i0}$, se transmite una onda de choque convergente al gas interior y se refleja una onda de rarefacción divergente (la densidad inicial del gas ρ_{g0} es menor que la densidad ρ_{s0} de la cáscara). Al alcanzar esta última el contorno exterior ($r = R_{e0}$), donde continúa aplicándose la presión externa P_a , se genera una segunda onda de choque convergente. El flujo puede evolucionar según dos regímenes diferentes. En el régimen que se denominará "a", la segunda onda de choque transmitida a través de la interfase alcanza a la primera sólo después que ésta se refleja en el centro (ver Fig. 2.1a). Esto es implícitamente supuesto en los modelos desarrollados en la bibliografía [31-39]. Sin embargo, sólo es válido para cáscaras relativamente gruesas, i. e., para relaciones de aspecto $A = R_{e0} / (R_{e0} - R_{i0})$ menores que un cierto valor crítico A_c . Para $A > A_c$, en el régimen que llamaremos "b", la segunda onda de choque (puede haber más de una si $A \gg A_c$), alcanza a la primera antes de su reflexión en el centro (ver Fig. 2.1b).

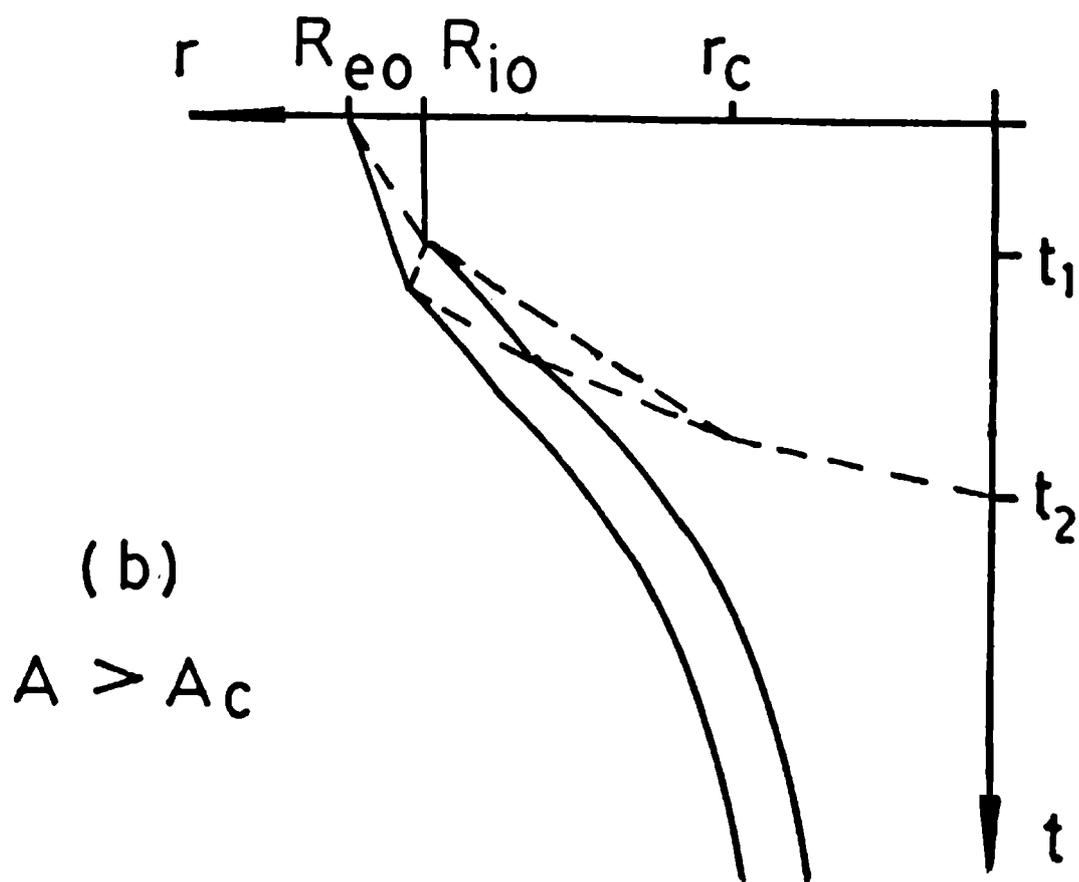
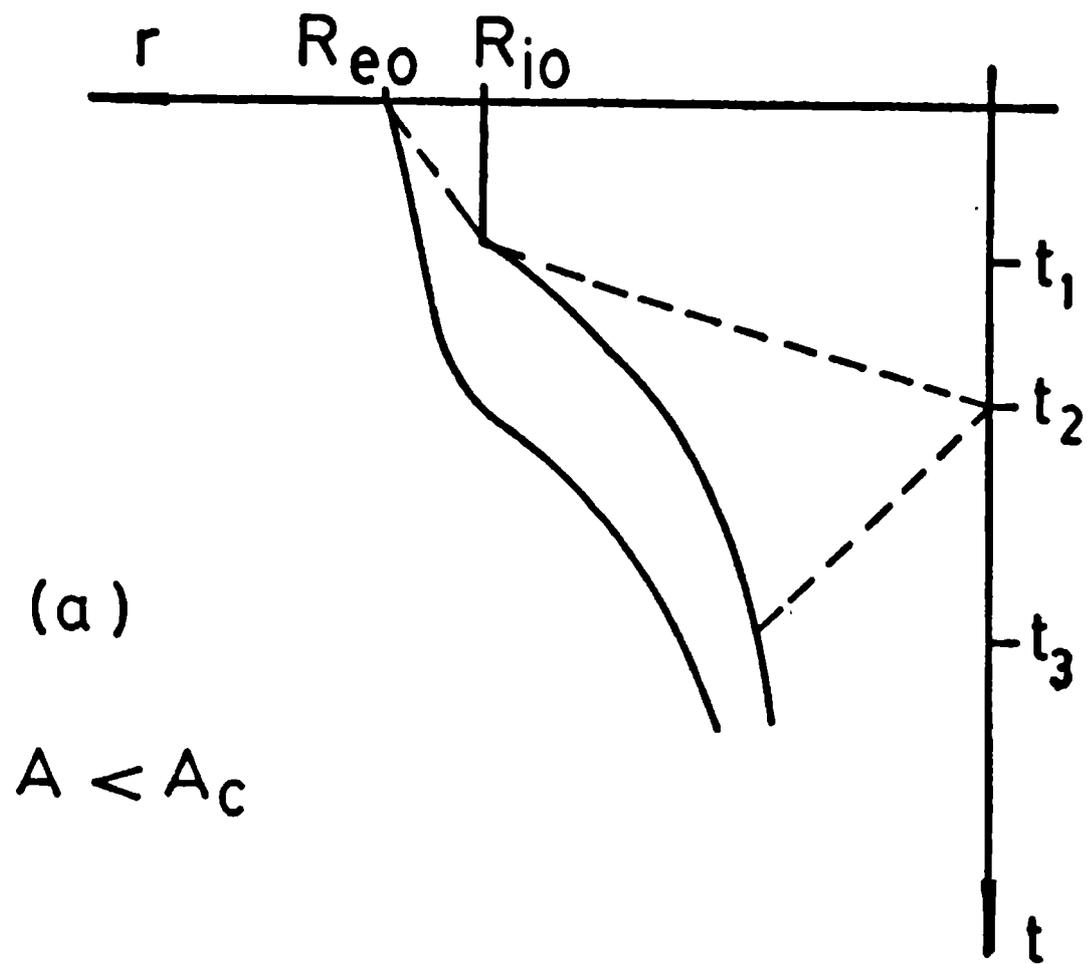


Fig. 2.1. Diagrama cualitativo de líneas horarias de la implosión. La línea llena gruesa representa la evolución del borde interno $R_i = R_i(t)$, la línea llena el borde externo $R_e = R_e(t)$, y las de trazos representan las trayectorias de las perturbaciones.

En el régimen "a" la amplitud de la perturbación principal que atraviesa el gas interior es casi independiente del espesor de la cáscara. La entropía promedio del gas interior es prácticamente determinada por la primera onda de choque y es función de P_a , ρ_{g0} y ρ_{s0} pero no de A. Por el contrario, en el régimen "b", la entropía del gas interior depende en una forma más complicada de la dinámica de la implosión. En particular, depende de la aceleración de la cáscara y, en consecuencia, de la masa de la misma (i.e. , de A). Esta dependencia del precalentamiento con A se encontró experimentalmente [41].

2.2 Estimación del valor crítico A_c

El número de Mach M de la onda de choque formada en $r = R_{\infty}$ se incrementa debido a la convergencia esférica. Puede estimarse el incremento δM por medio de la aproximación Chester-Chisnell-Whitham (C.C.W.) [42-47], que, para $M \gg 1$, proporciona:

$$\frac{\delta M}{M_0} = - \frac{K}{2} \frac{\delta S}{S_0} \quad (2.1)$$

donde M_0 es el número de Mach en $r = R_{\infty}$, K es una constante, $S_0 = 4\pi R_{\infty}^2$ y δS es la variación de la superficie del frente de onda. Integrando la Ec. (2.1) entre S_0 y $S = 4\pi R_{i0}^2$, donde R_{i0} es el radio interno inicial de la cáscara, se obtiene M en $r = R_{i0}$

$$M = M_0 (1 + K/A) \quad (2.2)$$

Para la convergencia esférica y $\gamma_s = 5/3$ (γ_s es el cociente de calores específicos de la fase externa), $K = 0.452$ [45]. Por lo tanto, $\delta M \leq 0.1 M_0$ para $A \geq 5$.

En este trabajo se considerarán relaciones de aspecto suficientemente altas como para despreciar el incremento del número de Mach en la cáscara. Entonces, el estado del material afectado por la primera onda de choque es asumido uniforme, con presión p_s , densidad ρ_s , velocidad v_s y velocidad del sonido c_s , dadas por las expresiones [48]

$$p_s = P_a \quad v_s \approx \left[\frac{2}{(\gamma_s + 1)} \frac{P_a}{\rho_{s0}} \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma_s + 1}{\gamma_s - 1} \rho_{s0} \quad c_s \approx \left[\gamma_s \frac{P_a}{\rho_s} \right]^{1/2}$$

Después de la incidencia de la onda de choque (en $t = t_1$), la interfase entre la cáscara y el gas interior es puesta en movimiento con una velocidad

$$\dot{R}_i(t=t_0) = \dot{R}_{i1} = \varepsilon v_s \quad (2.4)$$

donde ε es una función de γ_g , γ_s y ρ_{g0}/ρ_{s0} . Si $\gamma_g = \gamma_s = 5/3$ y $10^{-4} \leq \rho_{g0}/\rho_{s0} \leq 10^{-1}$, el parámetro ε adopta valores entre 1.5 y 2.5 [48]. Consecuentemente, para simplificar los cálculos, se asume en lo que sigue $\varepsilon = 2$ como por otra parte es usual [32,39].

El movimiento de la interfase da lugar a una onda de choque convergente con una presión p^* y a una onda de rarefacción divergente (ver Fig. 2.2). La presión p^* en la interfase puede calcularse por la ecuación [48]

$$\left[\frac{(\gamma_s + 1) \rho_{s0} p^*}{(\gamma_g + 1) \rho_{g0} P_a} \right]^{1/2} = 1 + \left[\frac{2 \gamma_s}{\gamma_s - 1} \right]^{1/2} \left[1 - (p^*/P_a)^{(\gamma_s - 1)/2\gamma_s} \right] \quad (2.5)$$

La velocidad de la onda de choque transmitida al gas interior inmediatamente después de t_1 es

$$\dot{\xi}(r=R_{i0}) = \dot{\xi}_1 = \left[\frac{(\gamma_g + 1) p^*}{2 \rho_{g0}} \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

La onda de choque transmitida tarda un lapso $\tau_1 \approx R_{i0} / (K+1)\dot{\xi}_1$ en llegar al centro de simetría; el factor $(K+1)$ incluye el efecto de la variación de la velocidad $\dot{\xi}$ debido a la convergencia, y se obtiene a partir de la misma Ec. (2.1) utilizada para evaluar la evolución de la primera onda de choque en la fase exterior.

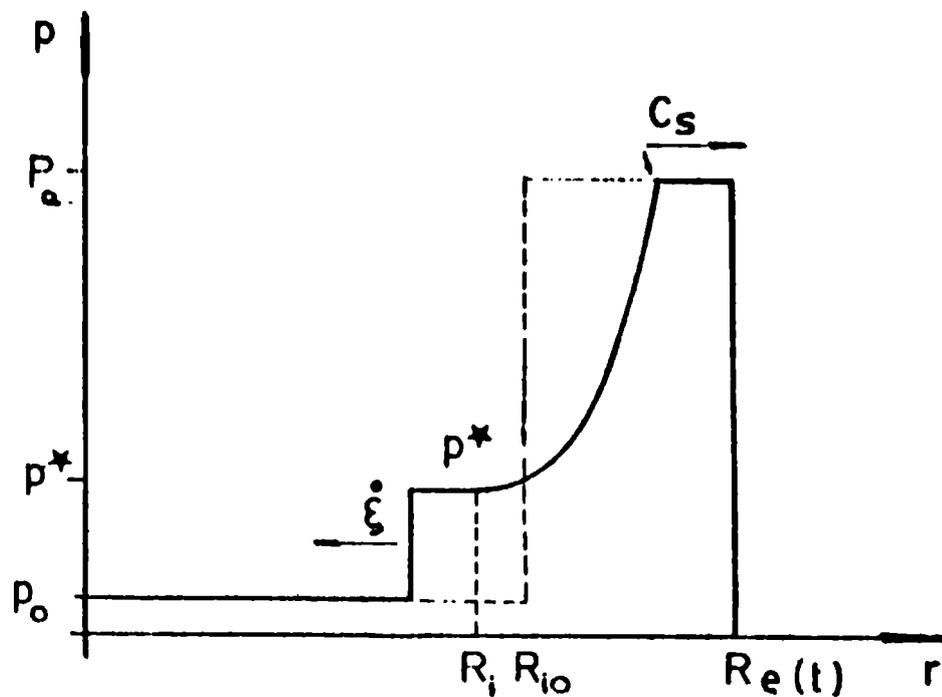


Fig. 2.2. Esquema cualitativo de las distribuciones de presión en el gas y en la cáscara en $t = t_1$ (línea suave), y después de transcurrir un pequeño lapso (línea gruesa). Las perturbaciones se desplazan con velocidades correspondientes a una onda de choque fuerte en el gas (ξ), y a la velocidad del sonido en la cáscara (c_s).

Por otra parte, la onda de rarefacción divergente reflejada en la interfase en $t = t_1$ viaja a través de la cáscara y alcanza el contorno exterior después de un tiempo $\tau^* = \Delta/c_s$, donde $\Delta = \Delta_0(\gamma_s - 1)/(\gamma_s + 1)$ y c_s se calcula con la Ec. (2.3). Luego, en el contorno exterior ($t = t_1 + \tau^*$) se forma una onda de compresión que colapsa en una onda de choque [48-51]. Para simplificar, se asume que la formación de esta segunda onda de choque es instantánea; el lapso τ que necesita para alcanzar la interfase puede ser estimado por la ecuación diferencial

$$|dx/dt| = \left[(\gamma_s + 1) P_a / 2 \rho(x, \tau^*) \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

donde $\rho(x, \tau^*)$ es el perfil de densidad de la onda de rarefacción en $t = t_1 + \tau^*$ [48]. El resultado de la integración de (2.7) es, aproximadamente, $\tau \cong 2\tau^*$. Por lo tanto, la segunda onda de choque alcanza la interfase en $t \cong t_1 + 3\tau^*$. Mientras tanto, la interfase se movió una distancia $3R_{i1}\tau^*$.

En $t = t_1 + 3\tau^*$, una segunda onda de choque es transmitida al gas interior ya perturbado por la primera. Se asume que esta onda es tan débil que su velocidad relativa al gas no difiere apreciablemente de la velocidad del sonido. Entonces, el valor absoluto de la velocidad $\dot{\xi}_2$ en el sistema de referencia del laboratorio es $\dot{\xi}_2 = c_{g1} + v_{g1}$ donde c_{g1} y v_{g1} son, respectivamente, la velocidad del sonido y la velocidad del gas interior en $t = t_1$. La condición para que la segunda onda de choque arribe al centro en el mismo tiempo $t + \tau$ que la primera es

$$\frac{R_{i0}}{(K+1)\dot{\xi}_1} \approx 3\tau^* + \frac{R_{i0} - 3R_{i1}\tau^*}{(K+1)(c_{g1} + v_{g1})} \quad (2.8)$$

La Ec. (2.8) puede escribirse en función de la relación de aspecto A_c y resolverse numericamente debido al carácter implícito de la Ec. (2.5). En la Fig. 2.3 se representa A_c en función de ρ_{g0}/ρ_{s0} para $\gamma_s = \gamma_g = 5/3$ (línea llena). El triángulo indica el valor obtenido en las simulaciones numéricas descritas en el capítulo 6, y el punto es el valor teórico exacto cuando $\rho_{g0}/\rho_{s0} \rightarrow 1$. La forma de esta curva puede entenderse cualitativamente analizando el comportamiento de la solución de la Ec. (2.5). En efecto, la velocidad de las perturbaciones en el gas interior es del orden de $(p^*/\rho_{g0})^{1/2}$, mientras que en la cáscara es del orden de $(P_a/\rho_{s0})^{1/2}$. Entonces, el cociente entre las velocidades en el gas y en la cáscara depende de $(p^*\rho_{s0}/P_a\rho_{g0})^{1/2}$ que, de acuerdo con (2.5), disminuye cuando ρ_{g0}/ρ_{s0} disminuye.

2.3 Entropía del gas interior

Primero se analizará el caso $A < A_c$ (cáscaras gruesas). Si $\rho_{g0} \ll \rho_{s0}$, la interfase se expande prácticamente hacia el vacío y por lo tanto, $\dot{R}_i(t) \approx \dot{R}_{i1} = \text{constante}$ [52-56]. La onda de choque transmitida al gas interior es reflejada [48,57,58] en el centro en $t = t_2$ y forma otra onda de choque que viaja hacia afuera hasta encontrarse con la interfase en $t = t_3$ (ver Fig. 2.1a). En este instante, el estado del gas se puede aproximar por las conocidas relaciones autosimilares [59-62] cuyos promedios espaciales son [32,39]

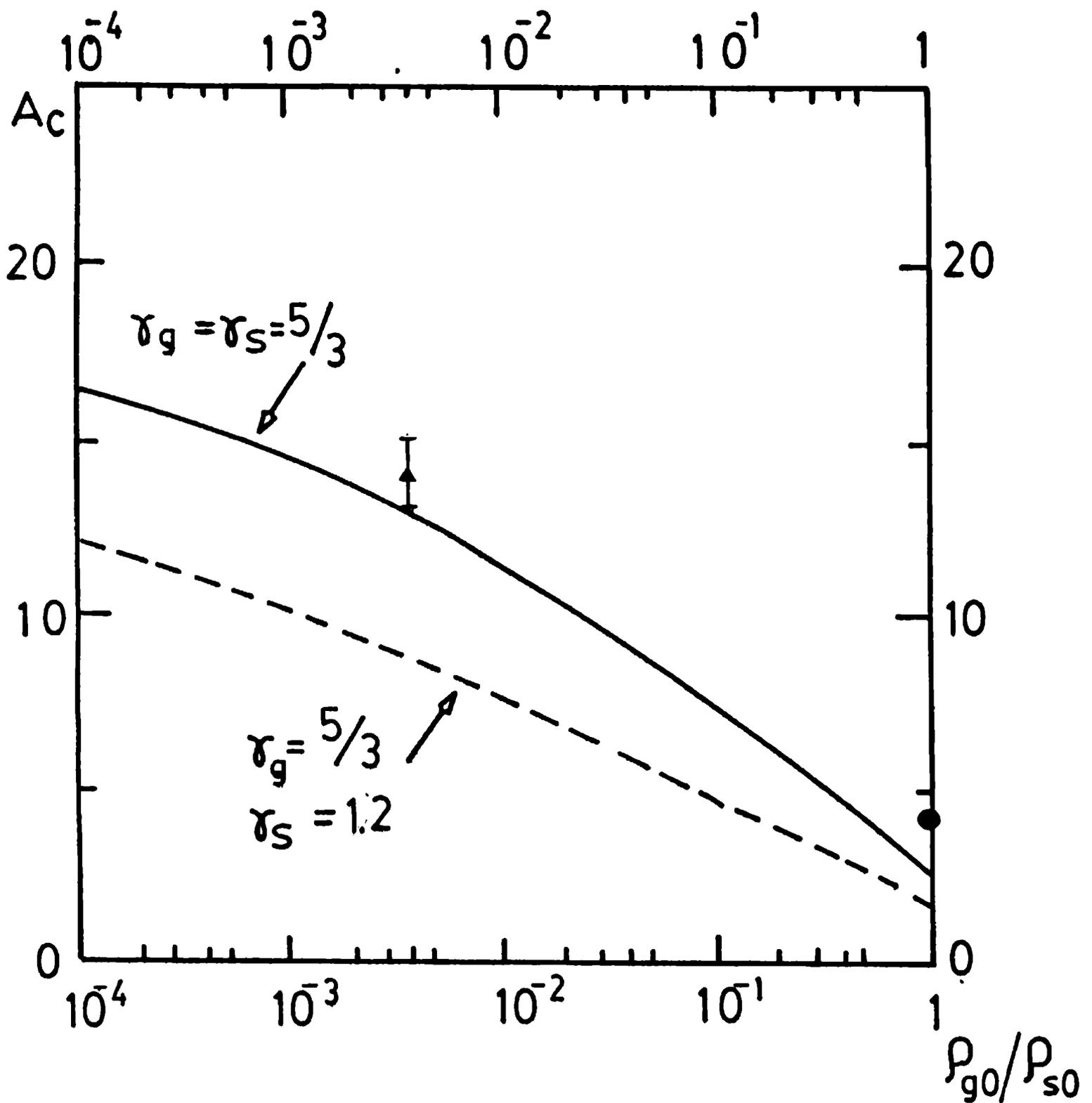


Fig. 2.3. Relación de aspecto crítica A_c en función de la relación de llenado ρ_{g0}/ρ_{s0} . Las líneas representan la estimación analítica, el punto es el valor teórico cuando $\rho_{g0}/\rho_{s0} \rightarrow 1$, y el triángulo es el valor encontrado en las simulaciones. El máximo error en las interpolaciones de los valores numéricos es mostrado por la barra.

$$p_{g2} \approx 128 \frac{\rho_{g0}}{\rho_{s0}} p_a \quad (2.9)$$

$$\rho_{g2} \approx 6.4 \frac{\gamma_g + 1}{\gamma_g - 1} \rho_{g0} \quad (2.10)$$

$$R_{i2} \approx 0.339 R_{i0} \quad (2.11)$$

donde se ha supuesto $\gamma_g = 5/3$.

Después de t_g , hay una serie de ondas de choque secundarias en el gas que viajan entre la interfase, que sigue moviéndose hacia adentro, y el origen, pero de intensidades mucho menores. Si el tiempo de tránsito de estas ondas es mucho menor que el tiempo de implosión, puede considerarse que todo el gas se comprime de la misma manera. Las ondas de choque secundarias son débiles, y el efecto que producen es, aproximadamente, el de uniformizar el estado termodinámico del gas. En el Cap. 5 se demostrará que estas condiciones se cumplen holgadamente para ambos regímenes "a" y "b".

Por lo tanto, para $t > t_g$, se tiene una compresión aproximadamente adiabática, donde

$$\rho_g \approx \rho_{g0} (R_{i0}/R_i)^3 \quad (2.12)$$

$$p_g \approx p_{g2} (\rho_g/\rho_{g2})^{5/3} \quad (2.13)$$

Un cálculo análogo no es posible para $A > A_c$, debido a que la primera onda de choque recibe sucesivas perturbaciones formadas en el contorno externo, y su amplitud no está dada sólo por la autoamplificación debida a la convergencia esférica. En este caso, R_i no puede ser considerada como constante para $t < t_g$.

Para $A > A_c$ puede adoptarse el siguiente tratamiento heurístico, que reproduce adecuadamente los resultados de las simulaciones numéricas. El punto fundamental del tratamiento es suponer que todo el salto de entropía del gas interior se produce como resultado de una única onda de choque, generada por el

colapso de las sucesivas ondas de choque originadas desde el contorno exterior. Entonces, para calcular la entropía, será suficiente evaluar las condiciones del gas inmediatamente después de esta onda de choque, considerándose toda compresión posterior como adiabática.

Si la cáscara es delgada, puede considerarse que sufre una aceleración constante $a \approx P_a / \rho_{s0} \Delta_0$. La velocidad \dot{R}_i del borde interno en función del desplazamiento δR_i del mismo, vale en consecuencia,

$$\dot{R}_i \approx \dot{R}_{i1} \sqrt{1 + 2 a \delta R_i / \dot{R}_{i1}^2} \quad (2.14)$$

Inmediatamente después de la única onda de choque, el gas perturbado tendrá una densidad

$$\rho_{g2} = \frac{(\gamma_g + 1)}{(\gamma_g - 1)} \rho_{g0} \quad (2.15)$$

y una presión media p_{g2} . El cálculo de p_{g2} no es sencillo, pero nótese que debe depender de \dot{R}_i . Una forma de estimar groseramente p_{g2} es calcularla como la presión de un fluido afectado por una onda de choque fuerte, $p_{g2} \approx 2 \rho_{g2} \dot{R}_i^2 / (\gamma_g + 1)$, donde \dot{R}_i es la velocidad del borde interno cuando el mismo avanzó un δR_i característico. Este δR_i puede considerarse como aquel desplazamiento que determina una densidad ρ_{g2} dado por la Ec. (2.15), de modo que $\delta R_i \approx R_{i0} (1 - 4^{-1/\gamma_g})$ si $\gamma_g = 5/3$. De esta forma se tiene

$$p_{g2} \approx \frac{2}{(\gamma_g + 1)} \rho_{g0} \dot{R}_{i1}^2 \left[1 + \frac{2 (1 - 4^{-1/\gamma_g}) R_{i0} P_a}{\rho_{s0} \dot{R}_{i1} \Delta_0} \right] \quad (2.16)$$

Este cálculo de p_{g2} , si bien no tiene una fundamentación rigurosa, conduce a resultados que concuerdan con los de las simulaciones numéricas.

Usando las Ec. (2.4) y (2.3) se obtiene, ($\gamma_g = 5/3$)

$$P_{gz} \approx \frac{9}{4} \frac{\rho_{g0}}{\rho_{s0}} P_a \left[1 + 0.247 \frac{R_{i0}}{\Delta_0} \right] \quad (2.17)$$

Las Ec. (2.15) y (2.17) proveen una excelente estimación de la entropía para $A \geq A_c$ como se verá posteriormente, mientras que para $A < A_c$ las Ec. (2.9) y (2.10) dan una mejor aproximación. De esta forma se cubre todo el rango de relaciones de aspecto de interés para este trabajo.

CAPITULO 3

ACELERACION DE LA CASCARA

3.1	Cálculo de la energía cinética total.	p. 21
3.2	Cálculo de la energía cinética en una fracción asignada de la cáscara.	p. 25
3.3	Cálculo de la pérdida de masa.	p. 30

3. ACELERACION DE LA CASCARA

En este capítulo se obtiene una expresión para la energía cinética de una fracción arbitraria de la cáscara, calculada a partir del borde interior. Esta evaluación es necesaria pues, para relaciones de aspecto no muy grandes (típicamente menores que 30) sólo una parte de la cáscara interviene en la determinación de los parámetros del gas interior cuando éste alcanza la máxima compresión. Para ello, en la Sección 3.1 se calcula la energía cinética máxima de toda la cáscara y en la Sección 3.2 se obtiene el valor correspondiente a una fracción de la misma calculada a partir del borde interior. Finalmente, en la Sección 3.3 se estima la masa perdida si la presión P_a es generada por la ablación (volatilización) de las capas externas (fusión por láser).

3.1 Cálculo de la energía cinética total

Primeramente se calculará el trabajo efectuado por la presión P_a . Considérese el momento $t = t_1$, en el cual la onda de choque inicial acaba de afectar toda la cáscara y ha llegado a la interfase. El radio externo está en la posición $R_o(t_1) \neq R_{o0}$. A partir de t_1 , el trabajo W efectuado por la presión P_a cuando el radio externo varía desde $R_o(t_1)$ hasta $R_o(t)$ es

$$W = \frac{4 \pi}{3} P_a \left[R_o^3(t_1) - R_o^3(t) \right] \quad (3.1)$$

Con el empleo de la ecuación de conservación de la masa y la ecuación para ρ_s (2.3) puede obtenerse el radio externo en $t = t_1$,

$$R_o^3(t_1) = \frac{1}{4} \eta(t_1) \left[R_{o0}^3 - R_{io}^3 \right] + R_{io}^3 \quad (3.2)$$

donde $\eta(t)$ es la fracción de la masa inicial que ha quedado en la cáscara en el instante t (fusión por láser).

Se desea obtener W en los instantes próximos al momento en que la energía cinética de la cáscara es máxima ($t = t_m$). Como se verá posteriormente, en este instante el perfil de densidad es aproximadamente uniforme. Además, el valor es $\rho_s(t_m) \approx 4 \rho_{s0}$, es decir, la cáscara no se comprime apreciablemente entre t_0 y t_m . Entonces, el radio externo en t_m tiene el valor

$$R_{e0}^3(t_m) \approx \frac{1}{4} \eta(t_m) \left[R_{e0}^3 - R_{i0}^3 \right] + R_i^3(t_m) \quad (3.3)$$

El trabajo (3.1) realizado hasta $t = t_m$ puede expresarse, usando las Ec. (3.2) y (3.3),

$$W \approx \frac{4\pi}{3} P_a \left[R_{i0}^3 - R_i^3(t_m) \right] + \frac{4\pi}{3} P_a \frac{1}{4} \left[\eta(t_0) - \eta(t_m) \right] \left[R_{e0}^3 - R_{i0}^3 \right] \quad (3.4)$$

El segundo término del miembro de la derecha de la Ec. (3.4) puede despreciarse frente al primero por las siguientes razones. El volumen de la cáscara en t_1 se hace comparable al volumen desplazado ($R_{e0}^3 - R_{i0}^3$) / 4 $\approx R_{i0}^3$ cuando la relación de aspecto inicial es muy pequeña, $A \approx 2.3$. Para relaciones de aspecto mayores, los volúmenes difieren mucho entre sí; por ejemplo, para $A = 6$, el volumen ocupado por la cáscara es 0.18 del volumen desplazado. Pero además, los valores de η típicos de este trabajo son pequeños, y más pequeña aún será la diferencia $\eta(t_0) - \eta(t_m)$. En consecuencia, puede despreciarse el segundo término de la Ec. (3.4) sin cometer un error grave.

Se tiene entonces el trabajo realizado por la presión P_a . Debe analizarse ahora la fracción de ese trabajo que se pierde, (esto es, el trabajo que aumenta la energía cinética de la masa que luego se escapa), y la fracción que se invierte en energía cinética de la cáscara y en energía interna del gas. En los casos estudiados en este trabajo se tiene que: a) la masa perdida desde t_1 hasta t_m es bastante menor que la masa total, b) la energía cinética de la cáscara de choque inicial, es pequeña comparada con

la energía cinética que alcanza en t_m . Se demuestra en el apéndice A que, en estas condiciones, se aprovecha una fracción importante del trabajo W ; en primera aproximación esta fracción vale $2/3 + 1/3 \eta(t_m)$ [Ec. (A.8)]. Esto se debe fundamentalmente a que la mayor parte de la masa se pierde cuando la energía cinética de la misma aún no es muy significativa. El trabajo aprovechado es, entonces,

$$W \approx \frac{4\pi}{3} P_a \left[R_{i0}^3 - R_i^3 \right] \left[2/3 + \eta/3 \right] \quad (3.5)$$

En $t \approx t_m$, W aumentó la energía interna del gas interior e incrementó la energía cinética E_s de la cáscara (la energía interna de la cáscara en t_m es aproximadamente igual a la que tiene en $t = t_1$). La conservación de la energía implica que

$$E_s = W - W_g + E_{s1} \quad (3.6)$$

con

$$W_g = \frac{4\pi}{3} \frac{p_g}{\gamma_g - 1} R_i^3 \quad (3.7)$$

y

$$E_{s1} = 1/2 m_s v_s^2 \quad (3.8)$$

Por intermedio de la Ec. (3.6), entonces, puede calcularse la energía cinética de la cáscara en $t = t_m$; el valor de v_s se calcula mediante la Ec. (2.3).

La presión p_g en la Ec. (3.7) se obtiene suponiendo una compresión adiabática a partir del estado del gas cuando finaliza la etapa de precalentamiento, donde la presión y la densidad tienen los valores p_{g2} y ρ_{g2} , respectivamente. Empleando las ecuaciones (3.5) - (3.8) y (2.12) - (2.13), se obtiene

$$E_s = \frac{4\pi}{3} P_a \left[R_{i0}^3 - R_i^3 \right] \left[2/3 + \eta/3 \right] - \quad (3.9)$$

$$- 2\pi p_{g2} \left[\frac{\rho_{g0}}{\rho_{g2}} \right]^{5/3} \frac{R_{i0}^5}{R_i^2} + 1/2 m_s v_s^2$$

La energía cinética será máxima cuando $\partial E_s / \partial R_i |_{R_i = R_{im}} = 0$. Derivando la Ec. (3.9), puede hallarse la posición del borde interno R_{im} cuando la cáscara tiene la energía cinética máxima

$$R_{im} \approx \left(\frac{P_{g2}}{P_a} \right)^{1/5} \left(\frac{\rho_{g0}}{\rho_{g2}} \right)^{1/5} \left(\frac{2}{3} + \frac{\eta}{3} \right)^{-1/5} R_{i0} \quad (3.10)$$

Con el empleo de las Ec. (2.9), (2.10), (2.15) y (2.17), la Ec. (3.10) se transforma en

$$R_{im} \approx \zeta \left(\rho_{g0} / \rho_{s0} \right)^{1/5} R_{i0} \quad (3.11)$$

donde

$$\zeta = \begin{cases} 0.896 \left(\frac{2}{3} + \frac{\eta}{3} \right)^{-1/5} & \text{si } A \leq A_c \\ 0.699 \left[1 + 0.247 \frac{R_{i0}}{\Delta_0} \right]^{1/5} \left(\frac{2}{3} + \frac{\eta}{3} \right)^{-1/5} & \text{si } A > A_c \end{cases} \quad (3.12)$$

Obsérvese la escasa influencia de la pérdida de masa η y de la relación de aspecto en la determinación de la posición donde E_s es máxima. Empleando las Ec. (3.11), (3.12) y (2.3), la Ec. (3.9) puede expresarse en la forma

$$E_{em} = \frac{4\pi}{3} P_a R_{i0}^3 \left(\frac{2}{3} + \frac{\eta}{3} \right) \left[1 - \frac{5}{2} \zeta^3 \left(\frac{\rho_{g0}}{\rho_{s0}} \right)^{3/5} \right] + \frac{1}{2} m_s \left(\frac{3 P_a}{4 \rho_{s0}} \right) \quad (3.13)$$

donde

$$m_s = \eta(t_m) \frac{4\pi}{3} \rho_{s0} \left(R_{s0}^3 - R_{i0}^3 \right) \quad (3.14)$$

es la masa de la cáscara en $t = t_m$. La fracción de masa perdida η se calcula más adelante.

3.2 Cálculo de la energía cinética en una fracción asignada de la cáscara

Para realizar este cálculo, es imprescindible un modelo que proporcione la distribución de energía cinética dentro de la cáscara.

El modelo puede fundarse en las siguientes consideraciones. Tal como se había señalado en la sección anterior, cuando la onda de choque inicial llega a la interfase ($t = t_1$) se produce una expansión de las capas internas de la cáscara. Esta expansión genera una onda de rarefacción que viaja desde el radio interno al externo. Al llegar a R_o , como la presión P_o sigue actuando, se genera una onda de compresión que colapsa en una onda de choque; cuando ésta llega al radio interno, el proceso se vuelve a repetir en forma sucesiva. Al cabo de cierto tiempo y mientras no influyan significativamente los efectos de convergencia, la cáscara adquiere perfiles aproximadamente estacionarios [64].

Estos perfiles están caracterizados por una aceleración aproximadamente uniforme de toda la cáscara, que puede, por lo tanto, tratarse como sumergida en un campo gravitatorio, determinado por la presión interna p_g del gas y la presión externa P_o . La aproximación es válida si el tiempo de tránsito de una perturbación en la cáscara es menor que el tiempo característico de la implosión. En el Cap. 5 se calcula el rango de validez de esta hipótesis. Se muestra también que hasta t_m no pesan significativamente los efectos de convergencia.

Para un fluido uniformemente acelerado (véase Fig. 3.1), la ecuación de conservación del momento es

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.15)$$

donde $Dv/Dt = g$ es la aceleración, que no depende de r , pero sí puede variar con el tiempo. Si se asume que en la cáscara las transformaciones son exclusivamente adiabáticas, $p \propto \rho^\gamma$, y se puede integrar la Ec. (3.15), obteniéndose

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r^2 v \right) = 0 \quad (3.20)$$

se tiene que

$$\rho v r^2 = \int r^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} dr + f(t) \quad (3.21)$$

Puede notarse de las Ec. (3.20) y (3.21) que si $\partial \rho / \partial t = 0$ en $t = t_m$, $v(r) \propto r^{-2}$. Esto no ocurre, sin embargo, en el caso que se está tratando. De la Ec. (3.16) se observa que el perfil de densidad puede expresarse en función del radio externo y de la presión del gas interior. Por lo tanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial R_e} \dot{R}_e + \frac{\partial \rho}{\partial p_g} \dot{p}_g \quad (3.22)$$

El primer término de la Ec. (3.22) representa la variación de densidad debido a la modificación del radio externo, manteniendo p_g y P_a constantes. En $t = t_m$, $p_g(r) = P_a$, y si toda la cáscara está acoplada, este término tiene que ser cero. En efecto, derivando la Ec. (3.16) puede comprobarse la anulación de dicho término.

El segundo término de la Ec. (3.22) no se anula en $t = t_m$ y es el que determina en la Ec. (3.21) una distribución de velocidad distinta de la de un fluido incompresible. Usando las Ec. (3.21), (3.16), (2.13), (2.9), (3.11) y (3.12), se obtiene para $t = t_m$

$$\frac{v(r)}{\dot{R}_i} \approx - \left[\frac{R_i^3}{4 \Delta} \right] \frac{1}{r^2} + \left[\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{R_i} \right] r - \left[\frac{3}{4 R_i \Delta} \right] r^2 \quad (3.23)$$

donde se ha considerado $v(R_i) = \dot{R}_i$.

En la Fig. 3.2 se muestra el comportamiento de la distribución de velocidad (3.23) para valores típicos adoptados en este trabajo. Las variaciones máximas son del orden del 20%. En vista de este comportamiento, y a los efectos de simplificar los cálculos, se considerará de aquí en más que $v(r)$ es uniforme en el instante $t = t_m$, y tiene un valor

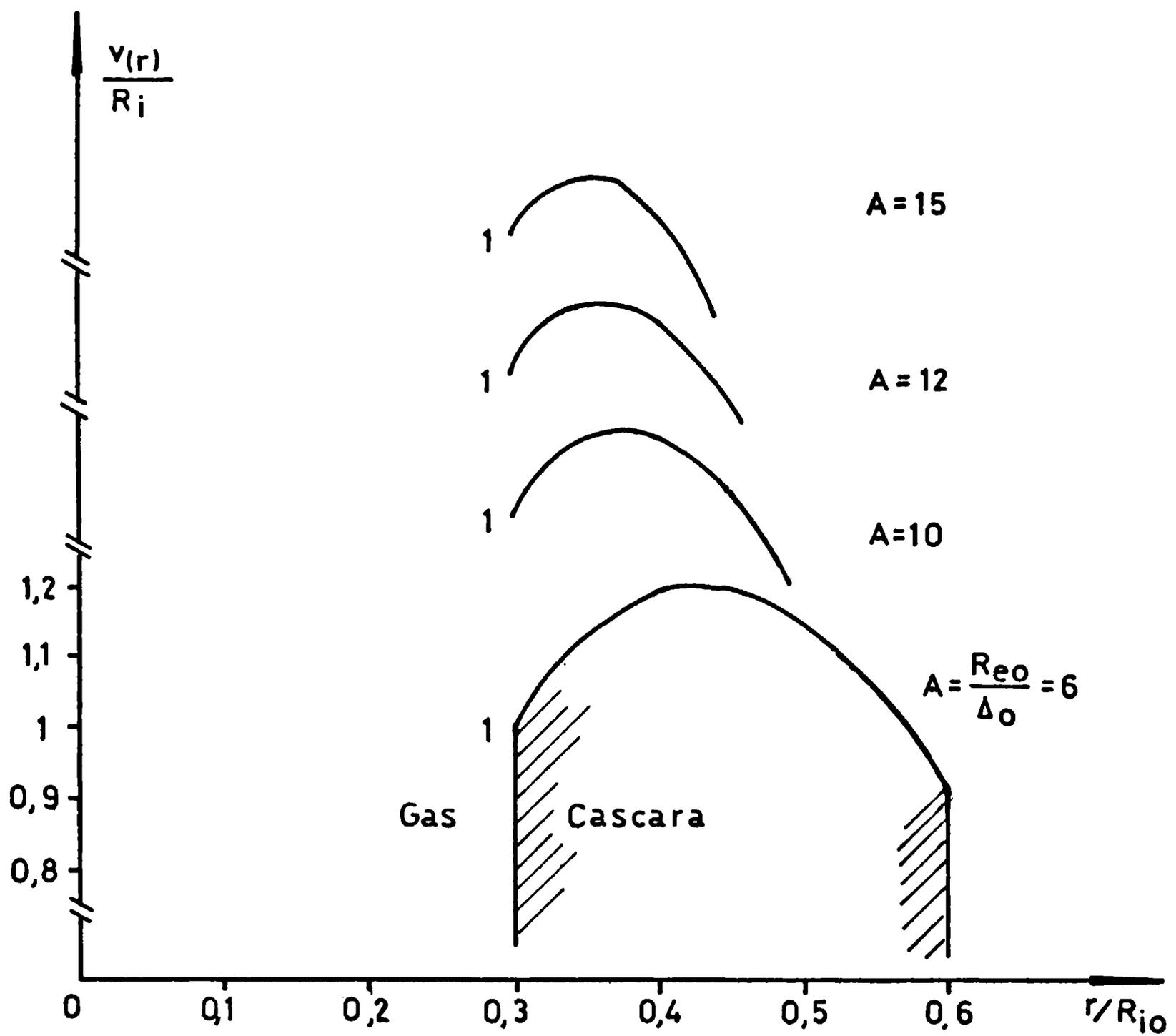


Fig. 3.2. Distribución de velocidad para el modelo de aceleración uniforme cuando $t \approx t_m$ para distintas relaciones de aspecto. Los datos empleados son $\rho = 10^{-2} \text{ g/cm}^3$, $\rho_{s0} = 2.5 \text{ g/cm}^3$, $R_i/R_{i0} = 0.2973$, $\eta = 1$.

$$\begin{aligned}
v_{(r)}^2 &= v_m^2 = \frac{2 E_{sm}}{m_s} \\
&= \frac{2P_a}{\rho_{s0}} \left[\frac{2}{3} + \frac{\eta}{3} \right] \left\{ \frac{1 - 5/2 \zeta^3 (\rho_{g0}/\rho_{s0})^{3/5}}{\eta [(R_{s0}/R_{i0})^3 - 1]} + \frac{3}{8} \right\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Este resultado es coherente con el hecho de que hasta R_{im} los efectos de convergencia no son importantes. La convergencia del flujo modifica el espesor de la cáscara, pero no altera sustancialmente los perfiles de presión y velocidad. Naturalmente, si el espesor de la cáscara crece debe haber una diferencia de velocidad entre la cara interna y la externa. Pero esta diferencia es pequeña frente a v_m , de forma tal que se puede considerar que en $t = t_m$ la velocidad es uniforme. La expresión de la energía cinética efectiva E_{ef} contenida en una fracción de masa asignada m_{ef} (por ahora arbitraria) limitada por $R_i(t_m)$ y $R_{ef}(t_m) \leq R_o(t_m)$, puede obtenerse directamente,

$$E_{ef} = \int_{R_i}^{R_{ef}} \frac{1}{2} \rho_s v^2 4\pi r^2 dr = \frac{m_{ef}}{m_s} E_{sm} \tag{3.25}$$

donde E_{sm} es la energía cinética máxima de toda la cáscara, dada por la Ec. (3.13).

Se ha escrito explícitamente la integral de la Ec. (3.25), a pesar de la trivialidad del resultado, pues se quiere poner de manifiesto que en la determinación de E_{ef} interviene una combinación de las distribuciones de velocidad y densidad, además integrada sobre un cierto espesor. Dado el carácter de la combinación, E_{ef} no es muy sensible a las distribuciones de densidad o velocidad por separado, es decir, su expresión no resiente críticamente de las aproximaciones efectuadas.

3.3 Cálculo de la pérdida de masa

En los blancos para fusión por láser es necesaria una estimación de la fracción η de la masa inicial de la cáscara que aún no ha sido perdida en $t = t_m$. Esta estimación debe ser consistente con la presión externa P_a , que es originada por el proceso de ablación. La fracción de masa ablada $(1-\eta)$, si es mucho menor que 1, puede ser calculada en forma aproximada como se indica a continuación [32].

Por definición $(1-\eta) = (m_{s0} - m(t)) / m_{s0}$, donde m es la masa de la cáscara en el instante t . Supóngase simetría plana. La cantidad de masa ablada por unidad de área hasta el instante t es $\dot{m} t$. Entonces,

$$1-\eta = \frac{\dot{m} t}{\rho_s \Delta} \quad (3.26)$$

Si la masa perdida es expulsada con la densidad ρ^* y la velocidad v^* , se genera una presión P_a equivalente por "efecto cohete" [63,37] (véase también Apéndice A)

$$P_a = \frac{\gamma_s + 1}{\gamma_s} \rho^* v^{*2} \quad (3.27)$$

Por otra parte, como $\dot{m} = \rho^* v^*$, la Ec. (3.26) puede expresarse, con el empleo de la Ec. (3.27),

$$(1-\eta)^2 = \frac{\gamma_s P_a \rho^* t^2}{(\gamma_s + 1) \rho_s^2 \Delta^2} \quad (3.28)$$

Queda por estimar el tiempo. El desplazamiento de la masa $\rho_s \Delta$ debido a la presión P_a es

$$R_{\bullet\bullet} - R_{\bullet}(t) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{P_a}{\rho_s \Delta} \right] t^2 \quad (3.29)$$

En consecuencia, empleando las Ec. (3.28) y (3.29), y suponiendo $R_{\bullet} \ll R_{\bullet\bullet}$, se tiene

$$\eta \approx 1 - \left[\frac{2 \gamma_s \rho^* R_{\infty}}{(\gamma_s + 1) \rho_a \Delta_0} \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

donde se ha considerado $\Delta \approx \Delta_0$.

Una expresión útil se obtiene introduciendo en la Ec. (3.30) el número de Mach $M^* = v^*/c^*$ de los gases expulsados (con c^* la velocidad del sonido en el material ablado). En este caso ($\gamma_s = 5/3$),

$$\eta \approx 1 - \left[\frac{M^{*2}}{1+M^{*2}} \frac{2 \rho_a R_{\infty}}{3 \rho_s \Delta_0} \right]^{1/2} \quad (3.31)$$

La Ec. (3.31) provee η en función de M^* , parámetro que se determina usualmente en forma experimental.

CAPITULO 4

ETAPA DE ESTANCAMIENTO

4. ETAPA DE ESTANCAMIENTO

En los capítulos anteriores se ha descrito la implosión hasta $t = t_m$. Tal como se ha mencionado, cuando $R_i = R_{im}$ la presión del gas p_g se iguala a la presión externa P_a , y finaliza la aceleración de la cáscara, pero no su movimiento, que continúa por inercia.

Para $R_i < R_{im}$, la presión interna del gas sigue incrementándose rápidamente ($p_g \propto R_i^{-5}$) y tiende a frenar la cáscara. Debido a la rapidez con que varía p_g , sólo las capas internas se desaceleran, mientras que las externas continúan su movimiento sin tener información de lo que ocurre en el borde interno. En consecuencia, puede ocurrir que en un cierto instante t_f una fracción interior de la cáscara se detenga completamente e invierta posteriormente su velocidad, mientras la fracción externa restante prosigue su movimiento convergente. De allí en más, la energía cinética de la fracción externa sigue ingresando al sistema formado por el gas interior y la parte acoplada de la cáscara, pero esto no se traduce en un incremento de p_g por encima del máximo alcanzado. Esta idea es la del martillo hidráulico ("waterhammer"), introducida por D. L. Book y P. J. Turchi [65] para implosiones cilíndricas.

Pueden existir, entonces, dos regímenes bien diferenciados en la etapa de estancamiento. Uno de ellos es cuando toda la cáscara resulta afectada por la presencia del gas interior antes que éste alcance la máxima compresión. Esta situación se estudió en la Ref. [39], aunque sin el análisis del precalentamiento del gas que se efectuó en el Cap. 2. En este capítulo se analiza el otro régimen, cuando sólo una fracción de la cáscara está detenida en $t = t_f$, y se recuperan las implosiones estudiadas en la Ref. [39] como casos particulares.

Supóngase que sólo una parte de la cáscara está detenida cuando el gas alcanza la máxima compresión ($t = t_f$). Los contornos que la delimitan están ubicados en la posición de la interfase interna $R_i(t_f)$ y en un cierto radio $R_{of}(t_f)$, con $R_{of}(t_f) \leq R_o(t)$.

Por otra parte, el gas se comprime adiabáticamente para $t > t_m$ y tiene una presión p_g aproximadamente uniforme; m_{of} es la masa de la parte de la cáscara que en ese instante está detenida y posteriormente, para $t > t_f$, adquiere una velocidad centrífuga. Por consiguiente, hay una aceleración dirigida en ese sentido. Esta aceleración presupone un gradiente de presión, de acuerdo con la ecuación de Euler (3.15). Si las diferentes capas de la fracción detenida están acopladas, la aceleración puede suponerse uniforme. Por consiguiente, la distribución de presión en t_f debe ser análoga a la esquematizada en la Fig. 3.1, con la diferencia que la aceleración tiene la dirección opuesta. La presión en la cáscara varía entonces desde p_g hasta un valor p_{s2} a determinar, con $p_{s2} < p_g$ para dar cuenta de esa aceleración. Una imagen cualitativa de la distribución de presión en el instante t_f podría ser la de Fig. 4.1.

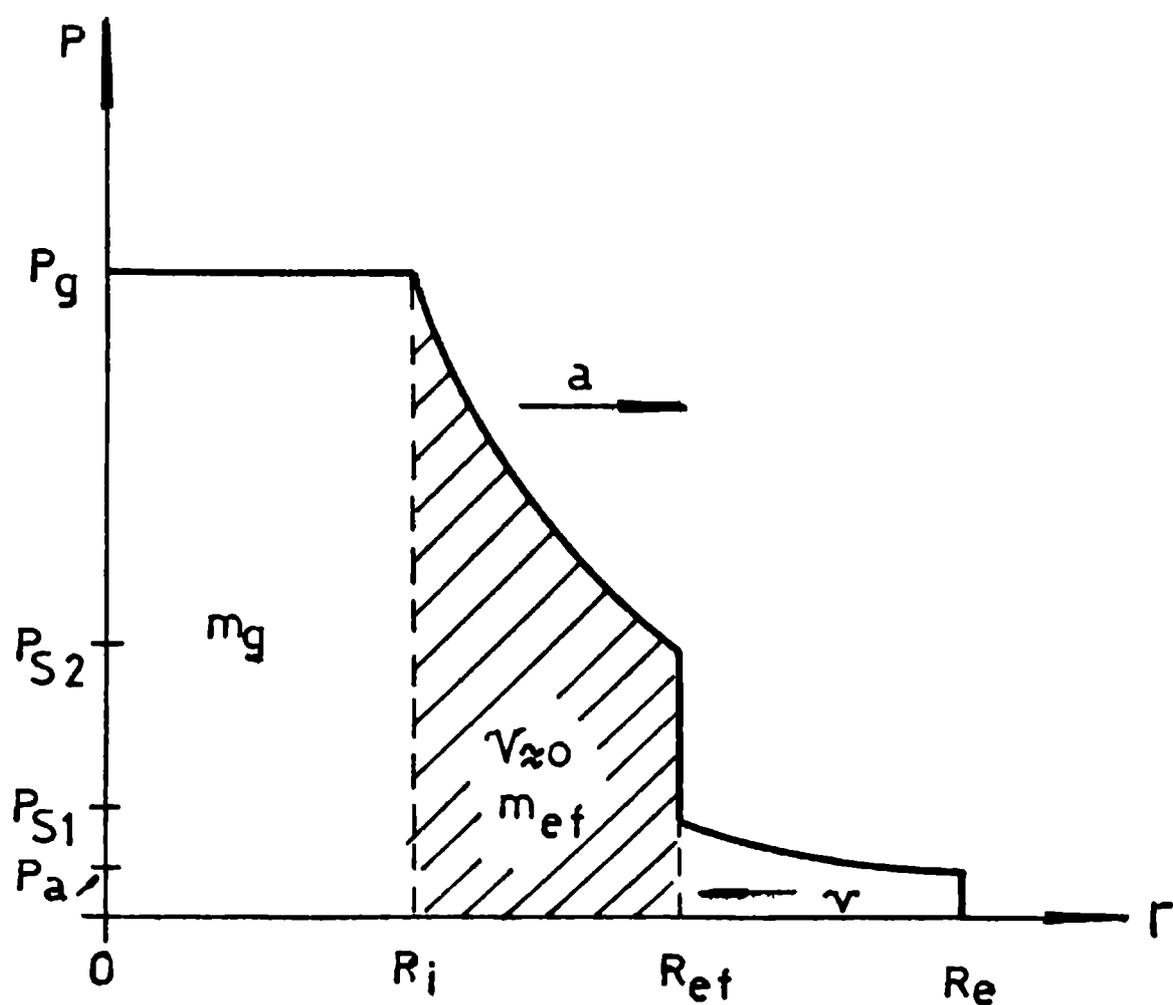


Fig. 4.1. Diagrama cualitativo de la distribución de presión en el instante de máxima compresión. Desde $r = 0$ a $r = R_i$ se encuentra el gas, y desde R_i a R_e , la cáscara. La parte que está detenida es delimitada por R_i y por R_{of} . El resto del fluido, situado en $r > R_{of}$, no está perturbado por el estancamiento de la m_{of} , y continúa con una velocidad del orden de v_m .

Lo que ocurre en radios cercanos a R_{of} requiere un poco más de estudio. Para $r > R_{of}$, el fluido no está afectado por el estancamiento de la fracción interior y continúa con una cierta energía cinética, es decir, con una velocidad v , típicamente del orden de v_m . Como la velocidad v_m es superior a la velocidad del sonido c_m , el flujo en esta parte es supersónico. Por otra parte, para $r < R_{of}$ el fluido está detenido. Entonces, en $r = R_{of}$ hay una discontinuidad que se refleja, naturalmente, en una discontinuidad de presión. En otras palabras, en $r = R_{of}$ hay una onda de choque. Todos estos aspectos se detallan más adelante.

En resumen, la cáscara, que en $t = t_m$ tiene distribuciones aproximadamente uniformes, en $t = t_f$ puede dividirse en dos zonas claramente delimitadas. Una zona interna detenida, que se encuentra comprimida a presiones del orden de p_g , y una zona externa todavía no perturbada, que sigue dirigiéndose hacia adentro. Ambas zonas se encuentran unidas por una onda de choque.

Una forma de entender cualitativamente el hecho que $m_{of} < m_e$ es considerar la evolución temporal del fenómeno. Sólo se detiene la parte de la fase externa que "tiene tiempo" de ser afectada por el rápido incremento de la presión del gas interior. Entonces, puede plantearse

$$R_{of} - R_i = \int_{t'}^{t_f} c_c dt \quad (4.1)$$

donde c_c es la velocidad del sonido en la parte afectada de la cáscara y t' es el tiempo en el que partió de R_i una perturbación sonora que llega a $r = R_{of}$ en $t = t_f$. Empleando la distribución de c_c en los instantes próximos a t_f y considerando $t' \approx t_m$, puede obtenerse una estimación de R_{of} y de los demás parámetros que intervienen en el cálculo. Esta estimación es del orden de los obtenidos numéricamente. En el Apéndice C se dará una mejor aproximación de t'

Otra forma de calcular R_{ef} , por medio de la cual se obtienen mejores resultados, es planteando una ecuación de tasa de variación ("rate") de la energía. Antes de hallar esta ecuación de tasa de variación, se plantea primero la conservación de la energía para una cierta m_{ef} a determinar. En $t = t_m$, la fracción de la cáscara que posteriormente será la que estará detenida en t_f , tiene una energía cinética $1/2 m_{ef} v_m^2$ y una energía interna $P_a m_{ef} / (\gamma_s - 1) \rho_a$. El gas en este instante posee una energía interna $P_a m_g / (\gamma_g - 1) \rho_{gm}$, donde $m_g = 4\pi/3 \rho_{go} R_{io}^3$ es la masa del gas y ρ_{gm} es la densidad del gas en t_m .

En $t \approx t_f$ esa energía se distribuye de la siguiente manera. Si la m_{ef} se ha frenado parcialmente, todavía tiene una energía cinética de valor $1/2 m_{ef} u^2$, donde u es la velocidad en el instante considerado. La energía del gas es $p_g V_g / (\gamma_g - 1)$, donde $V_g = 4\pi/3 R_i^3$ es el volumen ocupado por el gas. Por otra parte, como la parte afectada de la cáscara está sometida a una aceleración uniforme hacia afuera, la energía interna E_{is} de la zona efectiva de la cáscara debe calcularse con la distribución de presión correspondiente. En el apéndice B se muestra que E_{is} puede aproximarse, en este caso, por

$$E_{is} \approx \frac{15}{14} \left[\frac{\bar{p}_s^{3/5}}{\bar{\rho}_s} \right] p_g^{2/5} m_{ef} \quad (4.2)$$

donde $\bar{p}_s^{3/5} / \bar{\rho}_s$ determina el estado termodinámico promedio (o, si se prefiere, la entropía) a partir del cual la fracción detenida de la cáscara evoluciona adiabáticamente. Al término $\bar{p}_s^{3/5} / \bar{\rho}_s$ se lo denominará "adiabática" del fluido.

La conservación de la energía indica entonces, que

$$\begin{aligned} & \frac{V_g p_g}{\gamma_g - 1} + \frac{15}{14} \left[\frac{\bar{p}_s^{3/5}}{\bar{\rho}_s} \right] p_g^{2/5} m_{ef} + \frac{1}{2} m_{ef} u^2 = \\ & = \frac{1}{2} m_{ef} v_m^2 + \frac{P_a m_{ef}}{(\gamma_s - 1) \rho_a} + \frac{P_a m_g}{(\gamma_g - 1) \rho_{gm}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La ecuación de tasa de variación buscada se halla derivando la Ec. (4.3) y particularizando en $t = t_f$, donde $u \approx 0$, $\dot{p}_g \approx 0$, $\dot{V}_g \approx 0$. Se obtiene, de este modo, ($\gamma_s = \gamma_g = 5/3$)

$$p_g^{2/5} = \frac{\frac{7}{5} \left[\frac{1}{3} \frac{\rho_a v^2}{P_a} + 1 \right]}{\alpha + \dot{\alpha} m_{ef} / \dot{m}_{ef}} p_a^{2/5} \quad (4.4)$$

donde

$$\alpha = \frac{\bar{p}_s^{3/5} / \bar{\rho}_s}{P_a^{3/5} / \rho_a} \quad (4.5)$$

es la adiabática de la cáscara medida en unidades de la adiabática inicial. Recuérdese que α depende del salto de velocidad en la onda de choque, que a su vez es función del tiempo. Para hallar (4.4) se consideró, entonces, $\alpha = \alpha(t)$.

La estimación del denominador de la Ec. (4.4) puede efectuarse de la siguiente manera. Si $\alpha(t)$ es la adiabática en el instante t cuando la masa efectiva vale $m_{ef}(t)$, la adiabática en un intervalo posterior $\alpha(t+\Delta t)$, debe verificar

$$\alpha(t+\Delta t) m_{ef}(t+\Delta t) \approx \alpha m_{ef} + \alpha(\dot{m}_{ef}) \dot{m}_{ef} \Delta t \quad (4.6)$$

Puesto que $m_{ef}(t+\Delta t) = m_{ef} + \dot{m}_{ef} \Delta t$ y $\dot{\alpha} = [\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)] / \Delta t$, la Ec. (4.6) puede expresarse como

$$\alpha(m_{ef}) + \dot{\alpha} m_{ef} / \dot{m}_{ef} = \alpha(\dot{m}_{ef}) \quad (4.7)$$

Reemplazando la Ec. (4.7) en la Ec. (4.4), se obtiene

$$p_g = \left\{ \frac{7/5 \left[\rho_a v_m^2 / (3P_a) + 1 \right]}{\alpha(\dot{m}_{ef})} \right\}^{5/2} P_a \quad (4.8)$$

La Ec. (4.8) indica entonces que, de acuerdo con el presente régimen ($\dot{m}_{of} < \dot{m}_s$), la presión del gas interior depende sólo de valores fijos (ρ_a, P_a, v_m) y de la adiabática del material de la cáscara que atraviesa la onda de choque en $t = t_f$. Sean ahora p_{s2} y p_{s1} las presiones mayor y menor, respectivamente, de la discontinuidad ubicada en R_{of} (véase Fig. 4.1). El valor de $\alpha(\dot{m}_{of})$ se encuentra a partir de los valores de presión y densidad a ambos lados de la discontinuidad [48]

$$\alpha(\dot{m}_{of}) = \frac{\left[p_{s2} / p_{s1} \right]^{9/5}}{\frac{1 + 4 p_{s2} / p_{s1}}{4 + p_{s2} / p_{s1}}} \quad (4.9)$$

A su vez, el cociente p_{s2}/p_{s1} puede expresarse en función del número de Mach del fluido que ingresa a la onda de choque [48]

$$p_{s2} / p_{s1} = 1 + \frac{\gamma_s (\gamma_s + 1)}{4} M^2 + \gamma_s M \left[1 + \frac{(\gamma_s + 1)^2 M^2}{16} \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

donde $\gamma_s = 5/3$.

La presión p_g en t_f depende, en consecuencia, de M . El valor de M será, típicamente, del orden de $M_a = v_m / c_a$, con $c_a = (\gamma P_a / \rho_a)^{1/2}$. Se mostrará en la Sección 5.1 que conviene mejorar esta estimación. Para ello, nótese que se requiere M en la zona de la cáscara que no se encuentra perturbada por la detención de \dot{m}_{of} . Por lo tanto, puede considerarse que esta zona avanzó en forma análoga a un flujo supersónico en una tobera cuya sección disminuye. En este caso, el número de Mach disminuye debido a que el gas se comprime [48]. Llámese β a la relación de compresión ρ/ρ_a que sufre el fluido no perturbado desde t_m hasta t_f . En $t = t_m$ dicho fluido tiene una velocidad v_m y una velocidad del sonido c_a . Si se considera v y c , la velocidad y la velocidad del sonido promedios, respectivamente, en un instante dado, la conservación de la energía implica que

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma_s (\gamma_s - 1)} = \frac{v_m^2}{2} + \frac{c_a^2}{\gamma_s (\gamma_s - 1)} \quad (4.11)$$

Dicha velocidad c puede expresarse en función del factor de compresión $\beta = \rho/\rho_a$. Con el uso de la Ec. (4.11), se obtiene el número de Mach en función de β ,

$$M^2 = M_a^2 \beta^{-(\gamma_s+1)} - \frac{2}{\gamma_s(\gamma_s-1)} \left[1 - \beta^{-(\gamma_s-1)} \right] \quad (4.12)$$

Para fluidos altamente compresibles la Ec. (4.12) señala una escasa dependencia de M con β . Luego, sólo se necesita una estimación grosera de β para la corrección del número de Mach.

La estimación de β es bastante difícil de realizar. Depende de M_a y de la relación R_{of}/R , donde R es la posición en t_m de la capa de fluido que en t_f se encuentra en $r = R_{of}$. Mediante alguna hipótesis simplificatoria (ver, por ejemplo, el Cap. 5) es posible establecer la dependencia de M_a . Pero en este caso β sólo puede calcularse si se conoce R_{of} , es decir, la solución del problema. No obstante, a fin de no complicar en exceso los cálculos y como son relativamente pequeñas las variaciones en los resultados que introduce las variaciones de β , puede darse un valor arbitrario a este parámetro y comprobar a posteriori su validez. La relación de compresión que sugieren las simulaciones numéricas, y concuerda con el criterio mencionado para cáscaras gruesas, es $\beta = 3$. Este valor disminuye el número de Mach en aproximadamente una unidad ($M \approx M_a - 1$) para el rango de relaciones de aspecto de interés en este trabajo.

Resumiendo, puede decirse que por medio de las Ec. (4.12), (4.10), (4.9) y (4.8), se obtiene una buena estimación de la presión del gas $p_{gf} = p_g(t_f)$ en el instante final. Esta estimación es independiente de la masa total m_s de la cáscara, siempre que ésta sea suficientemente grande, es decir, $m_{of} < m_s$.

Obtenido el valor de p_{gf} , puede hallarse la densidad del gas final $\rho_{gf} = \rho_g(t_f)$ y el radio interno $R_{if} = R_i(t_f)$. Empleando la Ec. (2.13), (3.10), (3.11) y (2.12), se obtiene

$$\rho_{gf} = \frac{1}{\zeta^3} \rho_{go} \left[\frac{\rho_{so} P_{gf}}{\rho_{go} P_a} \right]^{3/5} \frac{1}{[2/3 + \eta/3]^{3/5}} \quad (4.13)$$

$$R_{if} = \zeta \left[\frac{\rho_{go} P_a}{\rho_{so} P_{gf}} \right]^{1/5} R_{io} [2/3 + \eta/3]^{1/5} \quad (4.14)$$

Nótese que la densidad depende fuertemente del precalentamiento del gas, por intermedio de ζ . Obsérvese también que p_{gf} no depende de los valores absolutos de R_{io} y ρ_{so} por ejemplo, sino de la relación de aspecto $A = R_{so}/\Delta_o$ y de la relación de llenado ρ_{go}/ρ_{so} , como surge de un análisis dimensional [66]. En efecto, p_{gf} debe escalar con P_a , la única magnitud característica del problema con unidades de presión. Los demás parámetros que influyen sobre p_{gf} son adimensionales, es decir γ , A , ρ_{so}/ρ_{go} . Lo mismo ocurre con la densidad ρ_{gf} , que no depende del valor absoluto de la presión P_a , ni de R_{io} . Mientras se cumplan las hipótesis de este trabajo, deben obtenerse los mismos valores p_{gf} y ρ_{gf} si se efectúa la implosión con diferentes radios iniciales, a iguales valores de los parámetros adimensionales antedichos y de la magnitud que define la unidad, en este caso, de la densidad y de la presión. Este hecho será empleado en las simulaciones numéricas, Cap. 6.

Mediante el valor de p_{gf} , puede hallarse m_{ef} por intermedio de la ecuación de conservación de la energía, Ec. (4.3)

$$m_{ef} = \frac{\frac{\rho_a}{\rho_{gm}} \left[\left(\frac{P_{gf}}{P_a} \right)^{2/5} - 1 \right] m_g}{\frac{1}{3} \frac{\rho_a v^2}{P_a} + 1 - \frac{5}{7} \alpha(m_{ef}) \left(\frac{P_{gf}}{P_a} \right)^{2/5}} \quad (4.15)$$

donde $\alpha(m_{ef})$ es la adiabática media de toda la masa efectiva, y puede considerarse $\alpha = 1$, pues no afecta demasiado en el resultado de (4.15).

La Ec. (4.15) puede resolverse directamente, pero es interesante hallar las principales leyes de escala que sigue m_{ef} . Si se considera $p_{gf} \gg P_a$ y se usan las Ec. (3.11) y (4.8) puede obtenerse

$$m_{ef} = \frac{28 \zeta^3}{5} \left(\frac{\rho_{s0}}{\rho_{g0}} \right)^{2/5} \frac{m_g}{[\alpha(\dot{m}_{ef}) - \alpha(m_{ef})]} \quad (4.16)$$

Se observa de la Ec. (4.16) que la masa efectiva depende de m_g y de la relación de llenado elevada a un exponente relacionado con γ . También aparece una dependencia importante con la adiabática del gas, por intermedio de ζ . Nótese el efecto de la adiabática de la cáscara. Si $\alpha(\dot{m}_{ef})$ tiende a $\alpha(m_{ef})$, la masa efectiva crece sin límites (naturalmente, en el caso que se trata a lo sumo es $m_{ef} = m_s$). Este efecto puede interpretarse con un análisis cualitativo global de la implosión. En las condiciones estudiadas en este trabajo, el flujo es supersónico, y la única forma que distintas partes de la cáscara se desacoplen sustancialmente es por intermedio de una onda de choque. Esta onda determina una variación de entropía, es decir, un cambio en la adiabática del fluido que la atraviesa. Ahora bien, si este cambio se anula, todas las partes de la cáscara evolucionan adiabáticamente. Esto indica que la compresión se realiza en forma extremadamente suave, para que no se generen perturbaciones de amplitud finita que tienen involucradas variaciones de entropía. En esta situación es claro porqué toda la cáscara resulta afectada en el instante de máxima compresión. En consecuencia, el hecho de que exista, en ese instante, una parte de la cáscara afectada y otra parte no, está estrechamente relacionado a la variación de la adiabática que se señala. La Ec. (4.16) indica esa relación.

Por otra parte, de la definición de la masa efectiva,

$$m_{ef} = \int_{R_i}^{R_{ef}^*} 4\pi r^2 \rho_s dr \quad (4.17)$$

puede hallarse el espesor efectivo $\Delta_{ef} = R_{ef} - R_i$. La distribución de densidad ρ está dada por una ecuación análoga a la Ec. (3.16), sólo que en este caso se deben emplear $p(R_i) = p_g$ y $p(R_{ef}) = p_{s2}$. El resultado de la Ec. (4.17) es

$$m_{ef} = \frac{4\pi}{3} \rho_{s0} \left(\frac{p_{gf}}{p_a} \right)^{3/5} R_{if}^3 \frac{6}{5} \left[a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \right] \quad (4.18)$$

donde

$$x = \frac{\Delta_{ef}}{R_{if} \left[1 - (p_{s2}/p_{gf})^{2/5} \right]} \quad (4.19)$$

$$a_1 = 1 - p_{s2}/p_{gf} \quad (4.20)$$

$$a_2 = \frac{4}{7} - 2 \left(\frac{p_{s2}}{p_{gf}} \right) + \frac{10}{7} \left(\frac{p_{s2}}{p_{gf}} \right)^{7/5} \quad (4.21)$$

$$a_3 = \frac{8}{63} - \frac{p_{s2}}{p_{gf}} + \frac{10}{7} \left(\frac{p_{s2}}{p_{gf}} \right)^{7/5} - \frac{5}{9} \left(\frac{p_{s2}}{p_{gf}} \right)^{9/5} \quad (4.22)$$

y

$$p_{s2} = \left(p_{s2}/p_{s1} \right) p_a \beta^{5/3} \quad (4.23)$$

La fracción p_{s2}/p_{s1} de la Ec. (4.23) puede hallarse por las Ecs. (4.10) y (4.12).

La Ec. (4.18) es una ecuación cúbica en x con una sola raíz real que puede ser resuelta analíticamente. Tomando $p_{gf} \gg p_{s2}$, y empleando la Ec. (4.14) se obtiene,

$$\left(\frac{\Delta_{ef}}{R_{if}} \right)^3 + \frac{9}{2} \left(\frac{\Delta_{ef}}{R_{if}} \right)^2 + \frac{63}{8} \left(\frac{\Delta_{ef}}{R_{if}} \right) - \frac{147}{16} \frac{1}{[\alpha(\dot{m}_{ef}) - \alpha(m_{ef})]} = 0 \quad (4.24)$$

Obsérvese que Δ_{ef}/R_{if} sólo depende de la diferencia de adiabáticas. De la Ec. (4.24), entonces, se halla Δ_{ef} en función de los demás parámetros.

Es importante, también, tener una estimación del tiempo en el cual la presión del gas se mantiene del orden de p_{gf} , comúnmente se denomina tiempo de confinamiento τ . Si el proceso de expansión del gas es igual al proceso de compresión, debe verificarse que $\tau \approx 2t_{ef}$, donde t_{ef} es un "tiempo efectivo" de frenamiento de la cáscara. En el caso que se está tratando, donde $m_{ef} < m_s$, la expansión se realiza en contra de un flujo de masa exterior que converge hacia el centro. Este flujo hace que τ sea mayor que el doble de t_{ef} , a menos que $p_{gf} \gg p_{sz}$, como ocurre para relaciones de aspecto grandes. Para estas relaciones de aspecto, el flujo exterior tiene un efecto prácticamente despreciable, por lo que la expresión $\tau \approx 2t_{ef}$ es una excelente estimación. Por otra parte, para relaciones de aspecto relativamente pequeñas, p_{gf} es comparable a p_{sz} . A pesar de este hecho, las simulaciones numéricas indican que el tiempo de expansión no se modifica sustancialmente por el flujo externo. Por ejemplo, para $A \approx 6$, $\tau \approx 2.4t_{ef}$. Se deduce, entonces, que el tiempo de frenamiento de la cáscara provee una buena estimación del tiempo de confinamiento.

El tiempo de frenamiento puede obtenerse de la ecuación de conservación del momento, que no se ha usado con anterioridad. En $t = t_m$ la masa efectiva tiene un momento radial $m_{ef} v_m$, que debe ser compensado en $t = t_f$ por un impulso hacia afuera. Groseramente se puede estimar este impulso como $4\pi R_i^2 (p_g - p_{sz}) t_{ef}$. En consecuencia,

$$t_{ef} \approx \frac{m_{ef} v_m}{4 \pi R_i^2 (p_g - p_{sz})} \quad (4.25)$$

Un cálculo más realista, considerando el perfil de la presión y la simetría esférica (ver apéndice C), conduce a

$$t_{of} = \frac{2}{5} \frac{\rho_a \Delta_{of} v_m}{p_a^{3/5} p_g^{2/5}} \frac{1}{[1 - (p_{sz}/p_g)^{2/5}]} \quad (4.26)$$

En la Ec. (4.26) se ha considerado el perfil de presión en el instante t_f . Sin embargo, este perfil se tiene sólo en ese instante. Cuando $t < t_f$, la cáscara aún tiene velocidad convergente, y considerar que se ha mantenido p_{sz} en todo t_{of} es subestimar la aceleración y, por ende, sobreestimar t_{of} . Los resultados de las simulaciones numéricas indican que la discontinuidad de presión $p_{sz} - p_{s1}$ se genera rápidamente en momentos cercanos a t_f . Por lo tanto, es más adecuado considerar la presión P_a en vez de p_{sz} en la Ec. (4.26). En efecto, como se verá en el Cap. 6, esto conduce a una mejor estimación de t_{of} . El significado asignado al tiempo efectivo es entonces el tiempo necesario para detener una m_{of} con velocidad v_m , si se mantienen las condiciones de máxima deceleración. La máxima deceleración se obtiene cuando la parte interna de la cáscara tiene un valor cercano a p_{gf} mientras que la parte externa de la masa efectiva, en una posición cercana a R_{of} , tiene presiones del orden de P_a .

En este Capítulo se han obtenido los principales parámetros del estado final de la implosión si $m_{of} < m_s$. Cuando esta condición no se cumple, es decir, $m_{of} = m_s$, hay que efectuar unas leves correcciones a las fórmulas expuestas. Como m_{of} está determinada, directamente de la ecuación de conservación de la energía, Ec. (4.3), puede obtenerse el valor de p_g en el instante t_f . La densidad del gas y el radio interno en este instante se calculan también por las Ec. (4.13) y (4.14), respectivamente. El cálculo del tiempo de frenado t_{of} se realiza con la Ec. (4.26), con $p_{sz} = P_a$, en este caso sin lugar a dudas. La distribución de presión tiene como valor máximo p_{gf} en $r = R_{if}$, y como mínimo no es p_{sz} , sino la presión externa P_a en $r = R_o(t_f)$. Esta modificación coincide con la propuesta en párrafos anteriores para el caso $m_{of} < m_s$, y por lo tanto, se puede emplear una sola ecuación para t_{of} en todo el rango de relaciones de aspecto.

El cálculo del espesor efectivo Δ_{ef} , Ec. (4.18), debe modificarse de la misma forma, colocando $p_{s2} = P_a$. Esto presupone un comportamiento diferente del modelo cuando $m_{ef} < m_s$, y cuando $m_{ef} = m_s$. En consecuencia, esta determinación analítica del Δ_{ef} , y por consiguiente del t_{ef} , da lugar a un cambio abrupto cuando se empalman los dos regímenes. La solución correcta es, seguramente, un caso intermedio, en el cual las magnitudes pasan en forma continua de un régimen a otro. En la Sección 6.2.2 se volverá sobre el tema. Los resultados indican que no se justifica un tratamiento especial para esa situación.

CAPITULO 5

VALIDEZ DE LAS PRINCIPALES APROXIMACIONES

5.1	Convergencia del flujo.	p. 47
5.2	Aceleración uniforme en $t = t_m$.	p. 51
5.3	Compresión isoentrópica del gas para $t > t_m$.	p. 52
5.4	Tiempo máximo de formación de la presión P_a .	p. 52

5. VALIDEZ DE LAS PRINCIPALES APROXIMACIONES

5.1 Convergencia del flujo

A fin de evitar confusiones, es conveniente una breve discusión de los efectos producidos por la convergencia del flujo. En la etapa de aceleración de la cáscara, desde $t = 0$ hasta t_m , no se considera explícitamente la convergencia. Por otra parte, en la etapa de estancamiento, se la considera en la parte de la cáscara no detenida en t_f . Esta diferencia es debida a las particularidades propias de ambas etapas.

Considérese la evolución de la fase de alta densidad hasta t_m . Desde $t = t_1$ la cáscara se expande, puesto que el gas, debido a su baja densidad ($\rho_{g0} \ll \rho_{s0}$), no ofrece una oposición considerable al movimiento de la interfase. La oposición será relevante sólo cuando la presión p_g del gas alcanza valores del orden de la presión externa P_a , es decir, cuando $t \approx t_m$. En $t = t_m$, las presiones aplicadas sobre los contornos interno y externo de la cáscara son iguales. Para que exista en ese instante una distribución de presión uniforme en la cáscara se debe cumplir que las diferentes capas de la misma se encuentren dinámicamente acopladas entre sí (en la próxima Sección se analiza la condición para que ello ocurra). Nótese que esta exigencia es independiente de la simetría esférica considerada. La simetría sólo cambia el espesor de la cáscara para distintos radios internos \dot{y} , si el fluido tiene una cierta velocidad media, determina una distribución de velocidad no uniforme. Por lo tanto, para asegurar que además de la uniformidad de presión, también la distribución de velocidad pueda considerarse uniforme, se debe hacer un análisis análogo al realizado en el Sección 3.2.

Considérese ahora en $t = t_f$ la zona de la cáscara no perturbada por la presencia del gas interior, es decir, aquélla que todavía tiene una velocidad apreciable en el instante de máxima compresión del gas. En $t = t_m$ esta zona tiene una presión y una velocidad aproximadamente uniformes, y avanza hacia regiones

donde cada capa de fluido tiende a adaptarse a un área menor. Un caso análogo, por ejemplo, podría ser el de un fluido que se mueve en una tobera de forma particular. Nótese que esta situación es esencialmente diferente a la analizada con anterioridad, la referida a la etapa de aceleración. En consecuencia, también será diferente la condición que se debe verificar para que la convergencia no modifique el flujo. Se obtiene seguidamente dicha condición.

Se tiene entonces una capa de fluido de espesor Δ , inicialmente con distribuciones de presión, densidad y velocidad uniformes, que se mueve adiabáticamente en un tubo cuya sección disminuye en la dirección del flujo (ver Fig. 5.1). Sobre las caras interna y externa de esa capa se aplica una presión aproximadamente igual a la que instantáneamente tiene el fluido. El flujo es supersónico (se demuestra más abajo), y por lo tanto el fluido se comprime, bajando su número de Mach [48]. Esta compresión genera un perfil de presión y velocidad que, a partir de un cierto angostamiento, modifica sustancialmente el espesor Δ y la velocidad v iniciales. La distancia δ en la cual esto ocurre puede estimarse del siguiente modo. Si la compresión es adiabática, el fluido que inicialmente se encuentra en r_{10} con presión p_{10} y densidad ρ_{10} , cuando llega a $r = r_1$ tiene presión p_1 y densidad ρ_1 . Estos parámetros están relacionados por la expresión

$$p_1 = p(r_1) = p_{10} \left[\frac{\rho_1}{\rho_{10}} \right]^\gamma \quad (5.1)$$

y análogamente para la capa de fluido que se encuentra en r_{20}

$$p_2 = p(r_2) = p_{20} \left[\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right]^\gamma \quad (5.2)$$

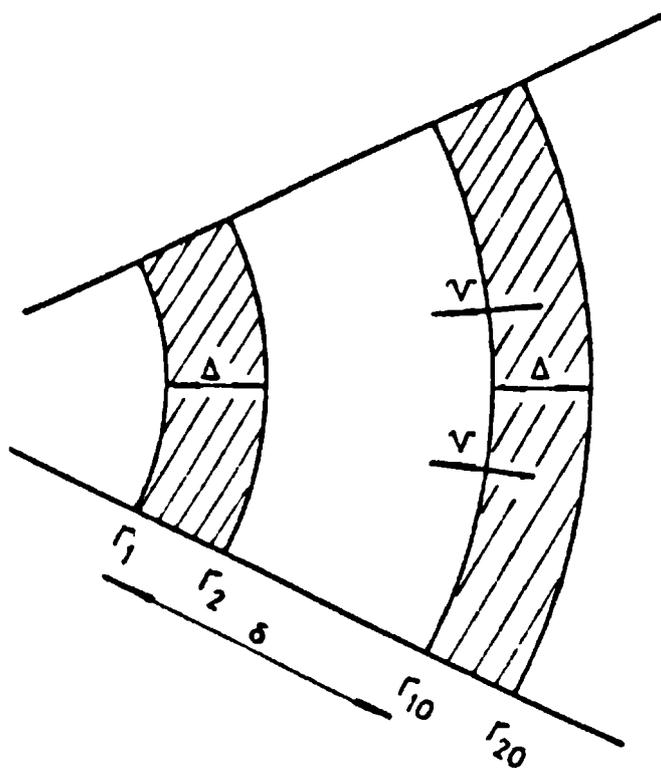


Fig. 5.1. Representación esquemática de una capa de fluido de espesor Δ en dos instantes, cuando se mueve en una tobera de sección semejante a la que presupone la convergencia esférica.

El tubo representa una sección de un flujo que posee simetría esférica. En suma, supóngase que el espesor Δ es constante, mientras $v(r)$ es aproximadamente uniforme. La conservación de la masa impone entonces

$$\frac{\rho}{\rho_{10}} = \left(\frac{r_{10}}{r} \right)^2 \quad (5.3)$$

Las posiciones r_1 y r_2 se pueden expresar como $r_1 = r_{10} - \delta$ y $r_2 = r_{20} - \delta + \Delta$, respectivamente, donde δ es la distancia recorrida por el fluido (véase Fig. 5.1). De las Ec. (5.1) - (5.3) puede obtenerse, en primer aproximación

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r_{10} - \delta} \approx \frac{p_2 - p_1}{\Delta} \approx - \frac{2 \gamma p_{10} \delta}{r_{10}^2} \quad (5.4)$$

donde se ha supuesto $p_{10} \approx p_{20}$. Este gradiente de presión genera una variación de velocidad dada por la ecuación de Euler, Ec. (3.15). Como $dv/dt = v dv/dr = 1/2 dv^2/dr$, empleando la Ec. (5.4), la Ec. (3.15) toma la forma

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\delta} = \frac{2 \gamma p_{10} \delta}{\rho r_{10}^2} \quad (5.5)$$

Mientras la densidad no varíe excesivamente, $\rho \approx \rho_{10}$, y la Ec. (5.5) puede integrarse entre la velocidad v_0 y una velocidad v arbitraria. Además, $v^2 = (v_0 + \delta v)^2 \approx v_0^2 + 2v_0 \delta v$, donde δv es la variación de velocidad del fluido después de haber avanzado una distancia δ . De la Ec. (5.5) se puede hallar, entonces, dicha variación de velocidad δv .

La variación de los perfiles debida a la convergencia no es significativa si $\delta v \leq c_{10}$. Por lo tanto, de la integral de la Ec. (5.5) puede obtenerse la distancia que el fluido debe recorrer para que los efectos de convergencia modifiquen apreciablemente el flujo,

$$\delta / r_{10} \leq 1 / \sqrt{M} \quad (5.6)$$

donde $M = v_0 / c_0$ es el número de Mach característico del problema. Nótese que cuanto mayor es M , la condición (5.6) es más exigente.

Es útil expresar M en función de la relación de aspecto A . La ecuación de la energía indica que, aproximadamente, $4\pi R_{10}^3 P_a / 3 \approx 1/2 m v_m^2$. Con el empleo de las definiciones de la velocidad del sonido en $t = t_0$, de la relación de aspecto $A \approx R_{10} / \Delta_0$ y de la masa de la cáscara $m \approx 4\pi \rho_{s0} R_{10}^2 \Delta_0$, se tiene

$$M_a \approx \sqrt{8/5} \sqrt{A} \quad (5.7)$$

-Nótese que para relaciones de aspecto pequeñas ($A \leq 5$) el flujo puede tener un número de Mach muy cercano a la unidad. Reemplazando la Ec. (5.7) en la Ec. (5.6) resulta

$$\delta / R_{im} \leq \left[8/5 A \right]^{-1/4} \quad (5.8)$$

Obsérvese que δ / R_{im} depende muy ligeramente de la relación de aspecto.

La Ec. (5.8) es, entonces, la condición para que la convergencia no influya significativamente sobre los perfiles de la parte de la cáscara que no se encuentra detenida en t_f . Para los valores típicos de este trabajo, la condición (5.8) se cumple sólo marginalmente. Por lo tanto, si se requiere una buena estimación del número de Mach del fluido que ingresa a la onda de choque en t_f , se debe corregir M_a , como se hizo en el Cap. 4.

5.2 Aceleración uniforme en $t = t_m$

En el Cap. 3 se supuso que en $t = t_m$ la aceleración es uniforme en la cáscara, lo que implica que todo el fluido de la misma se encuentra acoplado. Esta hipótesis es válida si el tiempo característico que tarda una perturbación en recorrer la cáscara Δ/c_a es menor que el tiempo característico de variación de la presión en el gas P_a/\dot{p}_g , es decir,

$$\frac{\Delta}{c_a} < \frac{P_a}{\dot{p}_g(t_m)} \quad (5.9)$$

Como $p_g \propto R_i^{-5}$, $P_a/\dot{p}_g = 1/5 R_i/(-\dot{R}_i)$. El factor $R_i/(-\dot{R}_i)$ es el tiempo característico de variación del radio interno, que es del orden de R_{i0}/v_m . La Ec. (5.9) puede expresarse

$$\Delta / c_a < 1/5 R_{i0}/v_m \quad (5.10)$$

Si se adopta $\Delta \approx \Delta_0$, y se emplea la Ec. (5.7), $M_a \approx A^{1/2}$, se obtiene que la condición (5.10) se cumple si $A > 25$. La hipótesis de aceleración uniforme, entonces, es válida para relaciones de aspecto relativamente grandes. Sin embargo, cabe señalar que en el instante $t = t_m$, el modelo utiliza las distribuciones de densidad y velocidad de la cáscara conjuntamente, y además integradas en un cierto espesor, como se mencionara anteriormente (véase el párrafo que sigue a la Ec. (3.25)). En consecuencia, es de esperar que el modelo pueda aplicarse para relaciones de aspecto menores que la señalada por la Ec. (5.10). Los resultados numéricos confirman esta presunción. El cálculo analítico en la

etapa de máxima energía cinética proporciona con buena aproximación los valores indicados por las simulaciones para $A \geq 5$.

5.3 Compresión isoentrópica del gas para $t > t_m$

En el Cap. 2 se supuso que la compresión para $t > t_m$ es isoentrópica. Esta hipótesis es válida si el tiempo de tránsito de una perturbación es menor que el tiempo característico de variación de las condiciones de contorno, en este caso, el tiempo de implosión

$$R_{im}/c_{gm} \leq R_{im}/v_m \quad (5.11)$$

donde

$$c_{gm} = \left[\gamma P_a / \rho_a \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

Con el empleo de las Ec. (3.17), (3.11) y (3.24), se verifica que la desigualdad (5.11) se cumple al menos por un factor 2.

5.4 Tiempo máximo de crecimiento de la presión P_a

Un estudio detallado de la implosión generada con una presión externa no constante está fuera del alcance de este trabajo. No obstante, se estimará a continuación el máximo tiempo T_{max} en el cual la presión externa debe alcanzar su valor máximo P_a ("maximum rise time") para que valga el modelo analítico. Si la presión P_a se genera en un tiempo T finito, la formación de la primera onda de choque depende de γ_s y de la evolución temporal de P_a , pero es del orden de T [48-50]. Claramente, los cálculos realizados en el Cap. 2 pueden usarse si la onda de choque está totalmente desarrollada antes de que alcance la interfase cáscara-gas. Por lo tanto, la condición que debe satisfacerse es

$$T \leq T_{max} \approx \Delta_0 (\rho_{s0}/P_a)^{1/2} = R_{e0} (\rho_{s0}/P_a)^{1/2} / A \quad (5.16)$$

Para valores típicos ($R_{\bullet 0} \approx 1$ cm, $\rho_{g0} \approx 2.5$ g/cm³, $P_a \approx 10$ Mbar), $T_{\max} \approx 50$ ns/A. Es una fuerte condición si P_a se genera por irradiación láser pero fácilmente obtenible si se genera por irradiación iónica.

CAPITULO 6

SIMULACION NUMERICA

6.1	Características fundamentales del código de simulación y datos empleados.	p. 55
6.2	Resultados numéricos. Comparación con los analíticos.	p. 57
6.2.1	Etapa de precalentamiento del gas interior	p. 57
6.2.2	Compresión adiabática del gas. Instante de máxima compresión.	p. 70
6.2.3	Expansión del gas.	p. 93

6. SIMULACION NUMERICA

6.1 Características fundamentales del código de simulación y datos emplados

Las simulaciones numéricas fueron realizadas con un código fluidodinámico unidimensional sencillo [67,68], en el cual las ecuaciones son expresadas con la aproximación en diferencias finitas usando coordenadas lagrangianas. El código no trata los mecanismos disipativos (viscosidad, conducción térmica, difusión), pero tiene en cuenta el salto de entropía producido en las ondas de choque por medio de la viscosidad artificial de von Neumann [68,69]. Se adoptó la ecuación de estado de los gases perfectos tanto para el gas interior como para la fase exterior. Al cociente de calores específicos γ se le dió el valor $5/3$ para ambas fases. Se empleó el mismo valor de la posición inicial $R_{i0} = R_i(t=0)$ de la interfase entre el gas interior y la fase exterior para todas las relaciones de aspecto A . Con las hipótesis realizadas, el valor de R_{i0} sólo provee la escala espacial y no influye sobre el estado de máxima compresión del gas interior. (véase párrafo posterior a la Ec. (4.14)). Esto se comprobó numéricamente, después de lo cual se eligió por simplicidad $R_{i0} = 1\text{cm}$. A las presiones iniciales de la fase exterior y del gas interior se les dió el valor $p_{g0} = p_{s0} = 10^6$ dinas; esta elección no influye sobre los resultados puesto que $p_{g0} = p_{s0} \ll P_a$. Los valores adoptados para las densidades del gas interior y de la fase externa fueron $\rho_{g0} = 10^{-2}\text{g/cm}^3$ y $\rho_{s0} = 2.5\text{g/cm}^3$, respectivamente, para todas las simulaciones. La implosión comienza en $t = 0$, cuando se aplica una presión constante $P_a = 10^{13}$ dinas (no hay ablación) sobre el contorno externo R_{e0} del sistema.

Como es sabido [70-71], el tratamiento numérico de la interacción de una onda de choque con la interfase de dos fluidos puede ocasionar errores globales importantes. En general, dicho tratamiento no deja errores permanentes en los valores de presión, velocidad, y por ende en la evolución fluidodinámica del fenómeno, pero sí en el valor de la densidad del fluido próximo a la interfase, puesto que no se consideran los procesos disipativos.

En el problema tratado, la onda de choque inicial que parte desde $r = R_{o0}$ interactúa con la interfase ubicada en $r = R_{i0}$. Esta interacción determina los valores de \dot{R}_i , que tiene un rol importante en la determinación de los parámetros del gas interior cuando éste alcanza su máxima compresión. Es conveniente, por tanto, emplear la discretización [71] que minimiza los errores mencionados. La discretización empleada es cercana a ella. En la mayoría de los procesamientos se utilizaron 50 capas de fluido equiespaciadas tanto para el gas como para la fase externa. No obstante, se observará en los gráficos que la distribución de densidad en la cáscara tiene un máximo (espurio) cerca de la interfase, que no pesa en los promedios realizados en este trabajo.

Al elegir la discretización también se prestó especial atención a que, en el instante t_f de máxima compresión, el espesor de las capas internas de la cáscara debe ser más pequeño que el radio de la interfase $R_i(t_f)$. Asimismo, la parte detenida de la fase exterior en t_f debe comprender varias capas de fluido en su espesor Δ_{of} .

Empleando discretizaciones razonables que cumplen con los requisitos mencionados, se varió el número de capas en que se divide el gas y la fase exterior, así como también el tipo de discretización (espesores no uniformes). Los resultados sólo se modificaron ligeramente, dentro del margen de error usual en este tipo de código. Cabe señalar, además, que el código ha sido utilizado en múltiples oportunidades y ha dado resultados correctos.

En este Capítulo se citan con frecuencia algunos promedios espaciales de variables, calculados a partir de los resultados numéricos. La presión media p_g del gas interior se calculó mediante la expresión

$$p_g = \frac{1}{V_g} \int p \, dV_g \quad (6.1)$$

donde V_g es el volumen ocupado por el gas. Análogamente se calculó la densidad media ρ_g .

Se reproducen numerosos gráficos de los perfiles instantáneos de las variables, obtenidos mediante un subprograma especial incorporado al programa de simulación. La abscisa de los gráficos es la coordenada euleriana r medida en unidades de R_{i0} , obtenida a partir de las coordenadas lagrangianas del código. En todos los casos, se representa sólo la región ocupada por el fluido, que se extiende desde $r = 0$ hasta $r = R_{\bullet}(t)$, donde $R_{\bullet}(t)$ es el radio externo instantáneo de la fase exterior. La escala se ajusta automáticamente de forma tal que el extremo derecho del gráfico coincide con $R_{\bullet}(t)$. La ordenada tiene diferentes escalas para cada una de las variables representadas: la densidad ρ , la presión p , la velocidad u y la energía por unidad de masa E . Estas escalas también se ajustan automáticamente, de forma que el mínimo valor (con su signo) se encuentra en el extremo inferior del gráfico, y el máximo, en el extremo superior. Se incluye una línea vertical de trazos que indica la posición instantánea de la interfase entre los dos fluidos.

6.2 Resultados numéricos. Comparación con los resultados analíticos

6.2.1 Etapa de precalentamiento del gas interior

En $t = 0$ se aplica sobre el contorno externo $R_{\bullet 0}$ de la cáscara la presión $P_a = 10^{13}$ dinas; el valor de P_a se mantiene constante durante toda la implosión. Se genera, entonces, la onda de choque inicial que se propaga en la cáscara. Después de cierto lapso t_1 , la onda alcanza la interfase entre los dos fluidos. Para los espesores Δ_0 de la cáscara empleados en este trabajo, la convergencia del flujo no altera sustancialmente la amplitud de la onda de choque en el recorrido Δ_0 , en concordancia con lo asumido en la Sección 2.2.

La densidad inicial ρ_{g0} del gas interior es mucho menor que la densidad ρ_{s0} de la fase exterior. En consecuencia, después de t_1 , se transmite una onda de choque en el gas interior cuya presión inicial es mucho menor que P_a , y una onda de rarefacción divergente en la cáscara. La Fig. 6.1 representa las distribuciones de presión y velocidad para un caso particular

($A = 10$), en un instante en el cual ambas ondas están bien desarrolladas. Posteriormente, la onda de choque en el gas llega al centro de simetría (ver Fig. 6.2) creándose una pequeña región central de muy alta presión. Teóricamente, si no hay mecanismos disipativos, la presión, velocidad, energía interna (no así la densidad) crecen sin límites [49,50] cuando la onda de choque tiende a $r = 0$. Los códigos numéricos no pueden representar los puntos singulares, además de utilizar promedios de los parámetros sobre capas de fluido de dimensiones pequeñas, pero finitas. La región central no está, entonces, bien representada: hay una saturación de origen numérico. Sin embargo, esta saturación no afecta significativamente los promedios espaciales empleados en este capítulo.

Después que la onda de choque llega a $r = 0$, se genera una onda de choque que se desplaza hacia afuera. Por lo general antes de que esta onda alcance la interfase, la presión p_i sobre la cara interna de la fase exterior alcanza el valor de la presión externa P_a . En este instante, denominado t_m , la cáscara ha alcanzado la máxima energía cinética. Numéricamente, el instante t_m se determina mediante la condición $p_i = P_a$.

La Fig. 6.3 representa los perfiles en $t = t_m$. Obsérvese que existe una región en el gas interior donde, a pesar de que la distribución de presión es uniforme, la energía interna específica $E = p / \rho(\gamma-1)$ no es uniforme. Esto indica que el perfil de densidad no es uniforme, lo cual apenas se advierte en el gráfico debido a la escala empleada. La causa debe buscarse en la intensidad variable de la onda de choque convergente [49,50].

El gas interior, una vez afectado por la onda de choque convergente, es entonces un fluido no homentrópico. Esta particularidad se mantiene en toda la evolución posterior del fenómeno, puesto que no se consideran mecanismos de transporte (difusión, conducción térmica), capaces de establecer la homotropicidad. Por lo tanto, en la aproximación empleada, cuando el gas alcance un perfil uniforme de presión tendrá una distribución no uniforme de densidad, correspondiendo el mínimo de esa distribución a la región central.

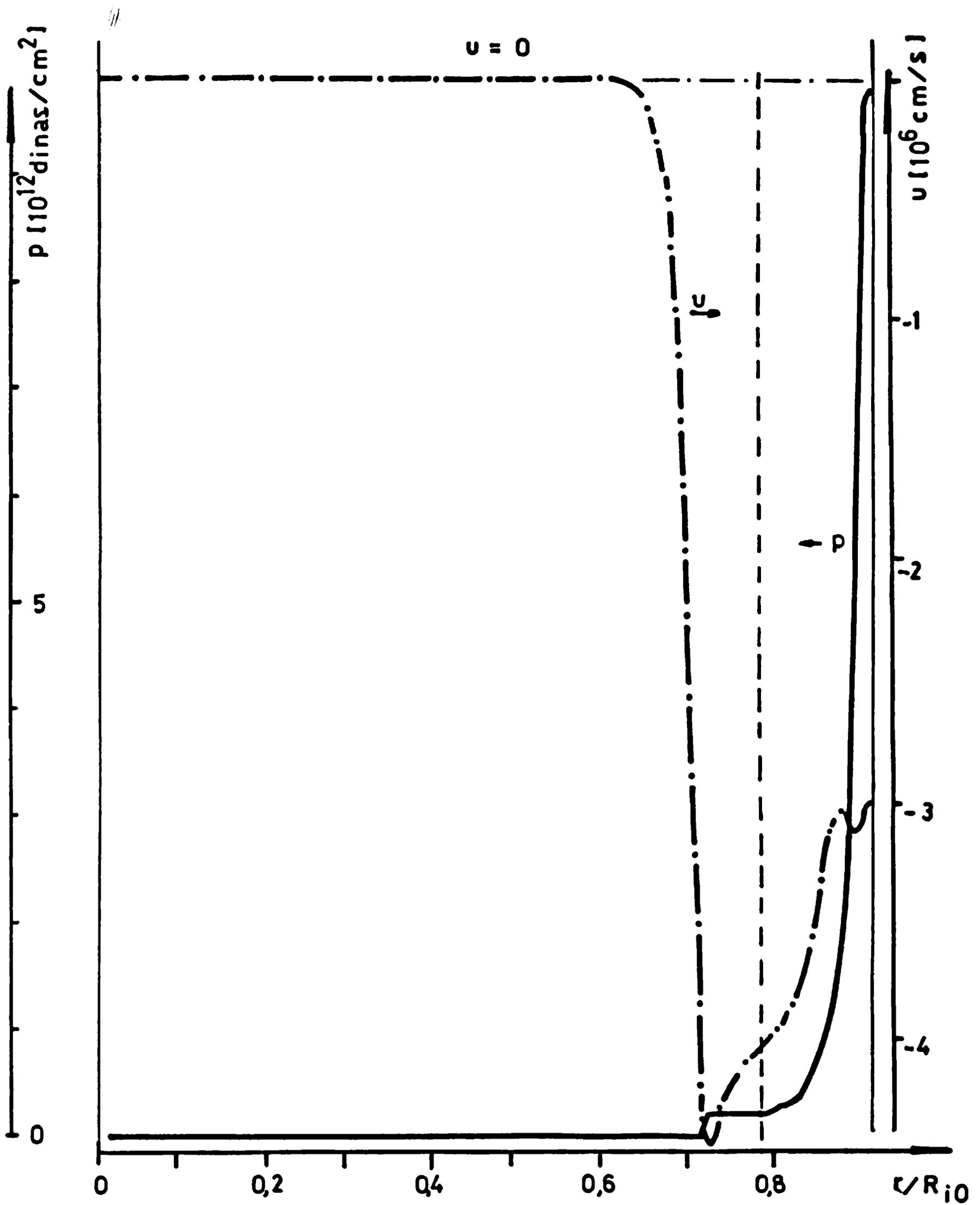


Fig. 6.1. Distribuciones de presión y velocidad para el instante $t = 9,12 \cdot 10^{-8}$ s. ($t_1 < t < t_m$) de la implosión para una relación de aspecto $A = 10$. Los datos empleados son $R_{i0} = 1$ cm, $P_a = 10$ Mbar, $\rho_{g0} = 10^{-2}$ g/cm³, $\rho_{s0} = 2.5$ g/cm³. La Línea de trazos en $r \approx 0.8 R_{i0}$ representa la interfase interna $R_i(t)$.

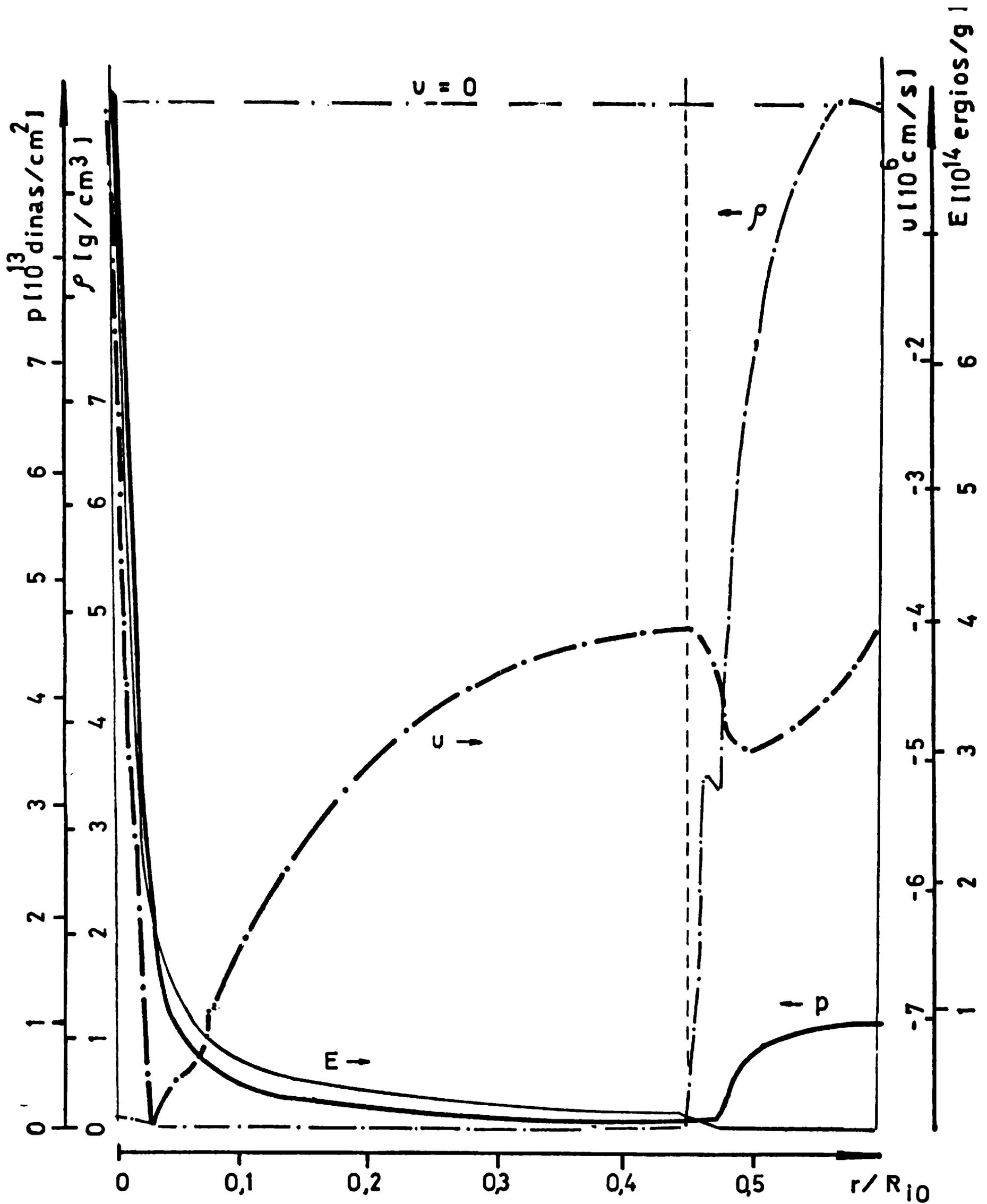


Fig. 6.2. Distribuciones de presión, densidad, velocidad y energía interna específica en $t = 1.85 \cdot 10^{-7} \text{ s.} < t_m$. Nótese que las escalas en la ordenada han variado sustancialmente para dar cuenta de todos los valores. La abscisa también ha variado, de modo que en el extremo derecho se tiene el contorno externo $R_o(t)$.

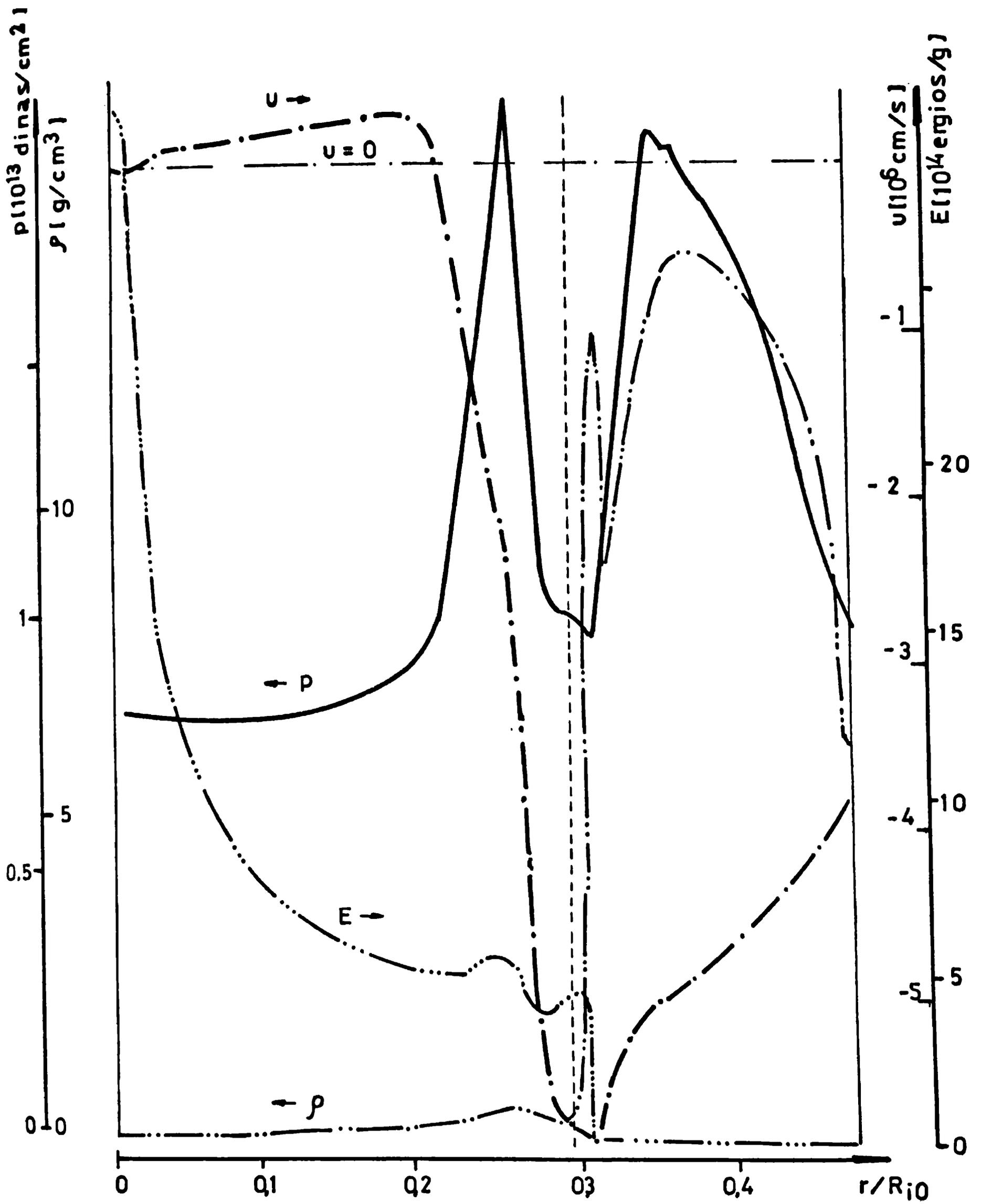


Fig. 6.3. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.16 \cdot 10^{-7} \text{ s}$. Este instante corresponde a t_m : la presión sobre la cara interna de la fase exterior se iguala a la presión externa P_a (final de la etapa de aceleración).

La máxima energía cinética de la cáscara se obtiene, por definición, en $t = t_m$. Los perfiles en esta fase tienen suma importancia en el modelo. En la Fig. 6.3 puede observarse que, para los datos utilizados en esa simulación, la cáscara tiene una distribución de velocidad cuyos valores máximos y mínimos difieren en un 25 %, la densidad tiene valores comprendidos entre 8 y 12 g/cm^3 , y la presión entre 10 y 20 Mbar. El modelo emplea distribuciones de velocidad, densidad y presión uniformes, con un valor de densidad $\rho_{s0} = 10 \text{ g/cm}^3$ y una presión igual a $P_a = 10 \text{ Mbar}$. Para otras relaciones de aspecto ($A = 15$ y $A = 6$), los perfiles en $t = t_m$ pueden verse en las Fig. 6.4 y 6.5.

Para comparar mejor los resultados numéricos y analíticos en $t = t_m$, conviene recurrir a un parámetro crítico que se emplea en las etapas posteriores del modelo: la velocidad cuadrática media v_{ef} del fluido que contiene la masa efectiva m_{ef} . Dicho fluido se define como aquella parte interna de la fase exterior que se detiene en el instante t_f de máxima compresión del gas; el valor de m_{ef} queda determinado en t_f (se obtiene en la próxima Sección). En la Fig. 6.6 se han representado los resultados numéricos de $v_{ef} = (2E_{ef}/m_{ef})^{1/2}$, (E_{ef} es la energía cinética de la parte interna antedicha) con triángulos, y los de la velocidad cuadrática media $v_c = (2E_{sm}/m_{s0})^{1/2}$ de toda la fase exterior con puntos circulares. Los valores analíticos de v_{ef} corresponden a la línea llena, y serán denominados v_m . Se incluyen en la figura, por medio de la línea de trazos, los valores predichos por el desarrollo analítico si se considera la misma entropía del gas interior en $t = t_m$ para distintas relaciones de aspecto. Nótese que $v_{ef} \approx v_c \approx v_m$, como se dedujo en el Cap. 3 inclusive para relaciones de aspecto tan pequeñas como $A = 5$.

Otros parámetros relevantes en $t = t_m$ se han representado en la Fig. 6.7. En la parte (a) de la figura se compara la posición $R_{im} = R_i(t_m)$ de la interfase calculada analíticamente (línea llena) con los valores proporcionados por el código (puntos), observándose una buena concordancia entre ambos. Puede concluirse, por lo tanto, que con el modelo se calculan adecuadamente v_{ef} y R_{im} . Sin embargo, cabe notar la diferencia que aparece si se

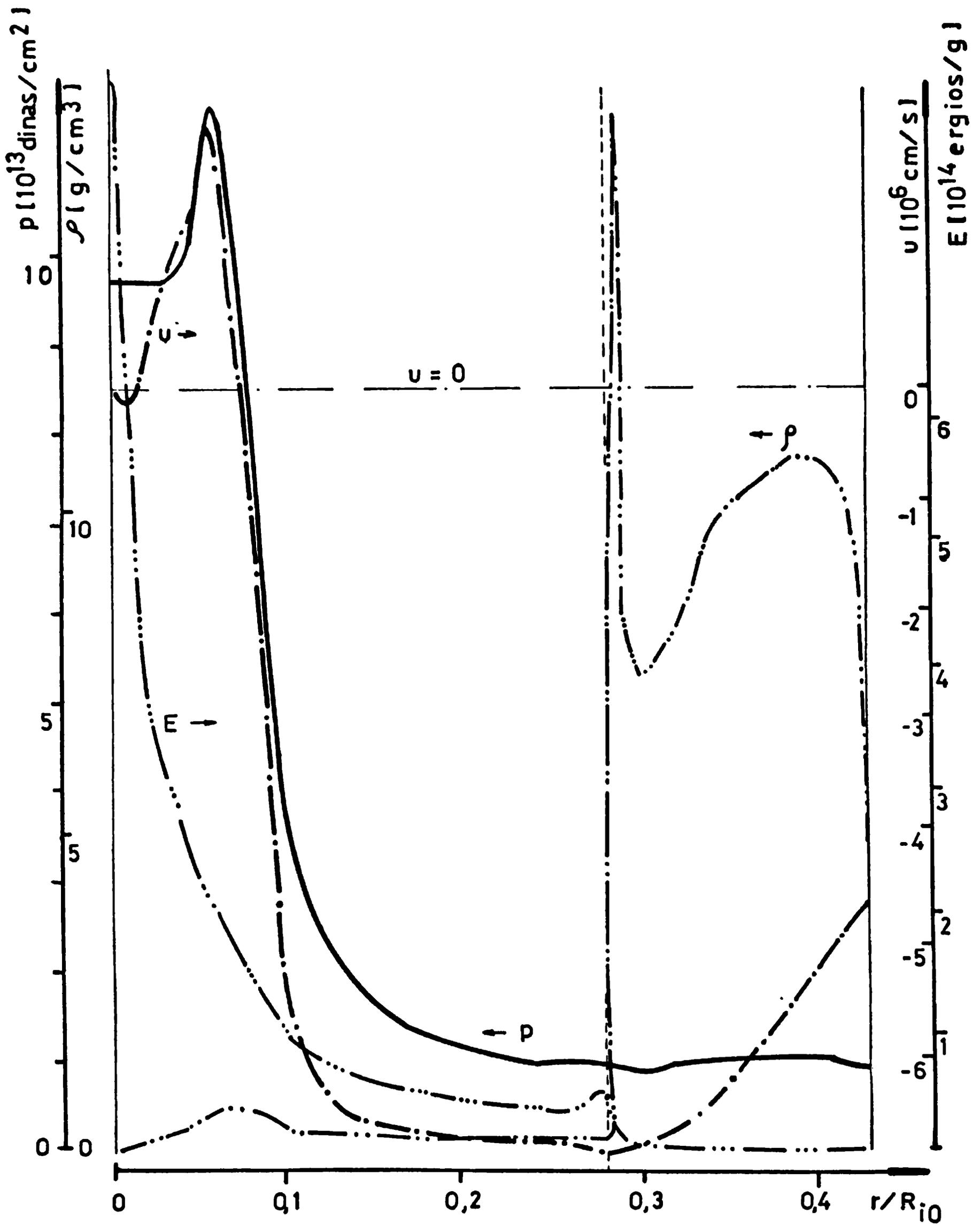


Fig. 6.4. Distribuciones para $A = 15$ en $t = t_m = 1.74 \cdot 10^{-7}$ s.

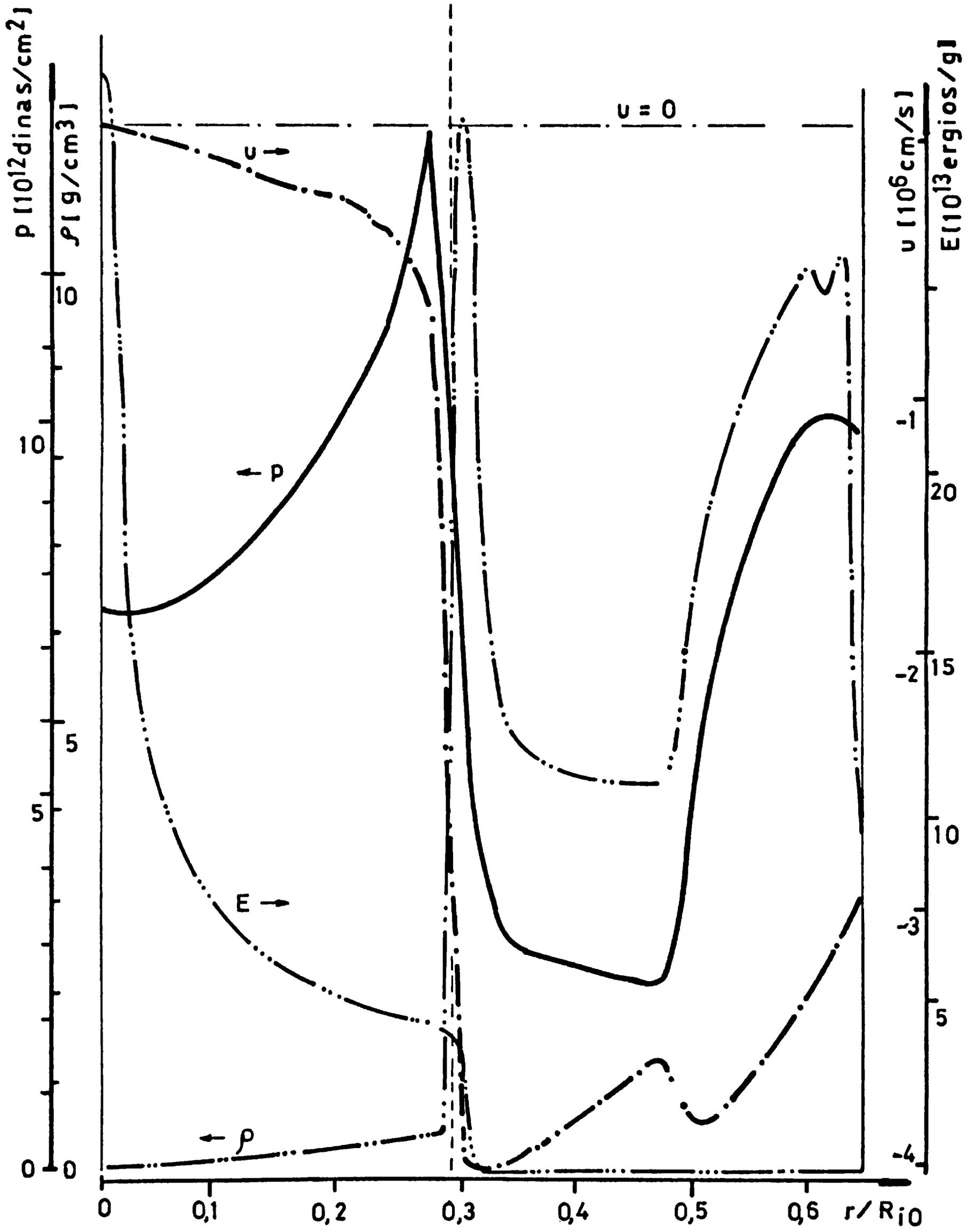


Fig. 6.5. Distribuciones para $A = 6$ en $t = t_m = 2.58 \cdot 10^{-7}$ s.

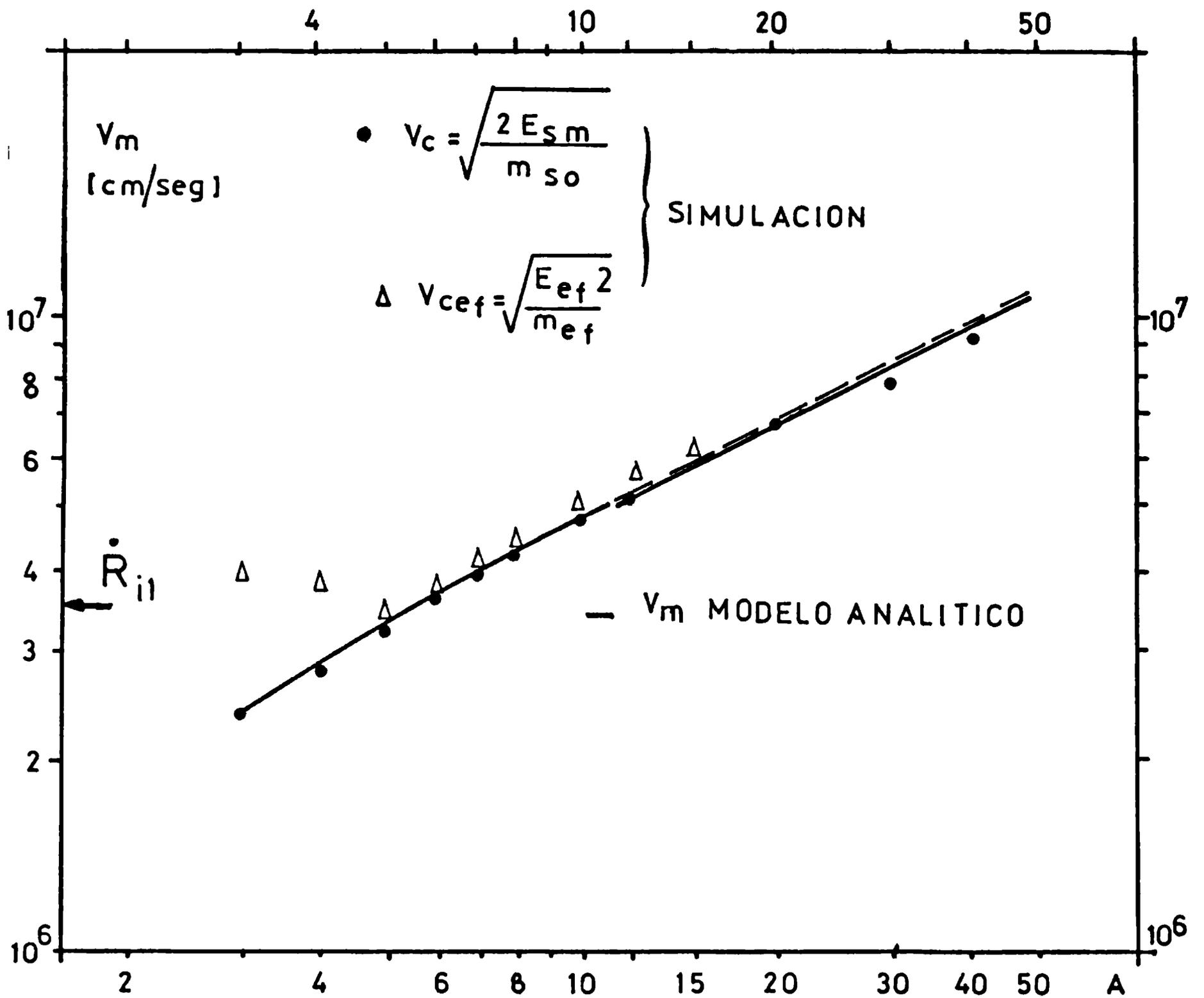


Fig. 6.6. Velocidades cuadráticas medias de la cáscara para distintas relaciones de aspecto, obtenidas en forma analítica (línea llena) y numérica (puntos circulares) en el instante t_m de máxima energía cinética. Los triángulos representan los valores de velocidad cuadrática media de la parte de la fase exterior que se detiene en $t = t_f$. La línea de trazos representa los resultados del modelo si no se tiene en cuenta el cambio de régimen de precalentamiento para $A \geq A_c$.

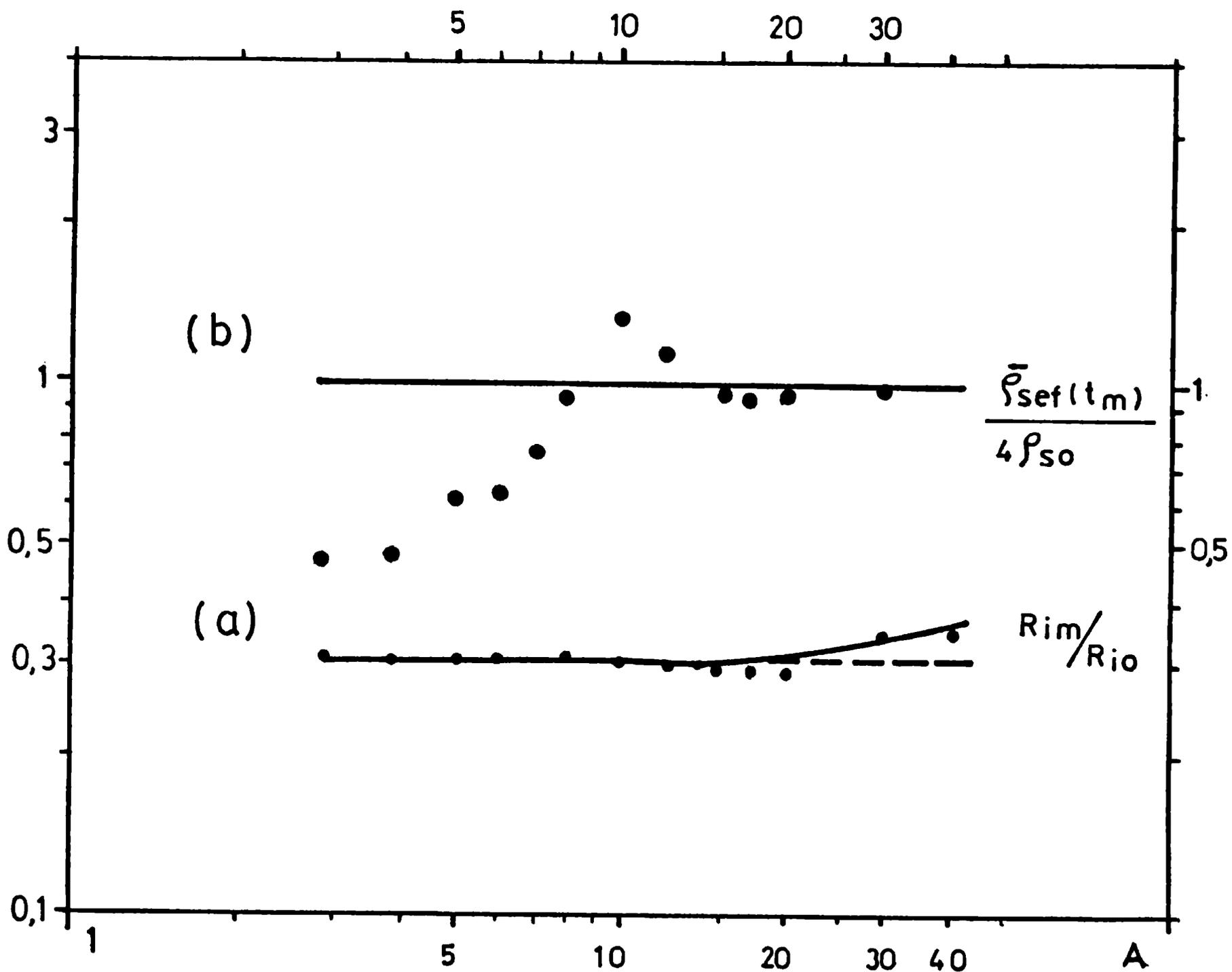


Fig. 6.7. Gráfico de: (a) posición R_{im} de la interfase entre los dos fluidos, (b) densidad promedio ρ_{of} en la fracción efectiva de la fase externa, ambos en función de A , cuando la cáscara alcanza la máxima energía cinética. Las líneas gruesas representan los valores analíticos y los puntos, los numéricos. La línea discontinua representa los valores predichos por el modelo si no se considera el cambio de régimen de precalentamiento para $A > A_c$.

comparan los valores analíticos y numéricos de la densidad promedio $\bar{\rho}_{ef}$ de la parte de la cáscara que contiene la masa efectiva m_{ef} . Además, la distribución de velocidad en la cáscara no es uniforme, en contradicción con lo que se supuso en el Cap. 3 (véase las Fig. 6.3, 6.4, 6.5). Pero de acuerdo con la Fig. 6.6, $v_{ef} \approx v_c$. Entonces, la energía cinética específica, que es lo que realmente importa en el desarrollo teórico, sí puede considerarse uniforme, a pesar de que las distribuciones de densidad y velocidad por separado no lo sean. Esta circunstancia hace que el modelo sea válido aún cuando la hipótesis de aceleración uniforme en $t = t_m$ se cumpla sólo marginalmente.

Cuando $A < 5$, la velocidad v_{ef} es mucho mayor que la velocidad v_c de la cáscara en su conjunto. El cambio de comportamiento en $A \approx 5$ está relacionado con la brusca variación del valor de m_{ef} , como se verá posteriormente. Por ahora se puede señalar que, para $A < 5$, el valor de v_{ef} coincide aproximadamente con la velocidad de expansión \dot{R}_{i1} (ver Fig. 6.6), que es la velocidad de la interfase inmediatamente después de interactuar con la onda de choque inicial en $t = t_1$. Se observa que las capas internas de la cáscara tienen mayor velocidad que las externas. Es decir, en $t = t_m$ las capas internas están desacopladas dinámicamente de las capas externas (se volverá sobre esta cuestión en las próximas Secciones). En este caso, el modelo deja de ser válido.

En la Sección 5.2 se calculó la mínima relación de aspecto compatible con la hipótesis de aceleración uniforme en $t = t_m$. Para ello, se consideró que el tiempo característico que tarda una perturbación en recorrer la cáscara debe ser menor que el tiempo característico de variación de la presión del gas. Sin embargo, una condición más realista para la validez del cálculo de v_m sería pedir que la cáscara sea acelerada desde $t = 0$ hasta $t = t_m$ a velocidades mayores que la velocidad de expansión inicial \dot{R}_{i1} . Con el empleo de las Ec. (3.24) y (2.4), se llega a

$$v_m^2 = \frac{2 P_a}{\rho_{s0}} \left[\frac{2}{3} + \frac{\eta}{3} \right] \left\{ \frac{1 - 5/2 \zeta^3 (\rho_{g0}/\rho_{s0})^{3/5}}{\eta \left[(R_{s0}/R_{i0})^3 - 1 \right]} + \frac{3}{8} \right\} \geq$$

$$\geq \frac{3 P_a}{\rho_{s0}} = \dot{R}_{i1}^2 \quad (6.2)$$

que puede expresarse como $A \geq 5$ (véase también Fig. 6.6). Nótese que para valores razonables de η y ζ , la condición (6.2) es independiente de la relación de llenado ρ_{g0}/ρ_{s0} , siempre que se cumpla $\rho_{g0} \ll \rho_{s0}$.

Considérese ahora el estado del gas interior después de la etapa de precalentamiento del mismo ($t \geq t_m$). Un parámetro relevante de este estado es la entropía promedio del gas. Para simplificar los cálculos, es preferible analizar un parámetro estrechamente relacionado con la entropía: la relación p_g/ρ_g^γ , donde p_g y ρ_g son la presión y densidad medias del gas interior, definidas en la Sección 6.1. A dicha relación se la denominó "la adiabática promedio" del gas.

La dependencia con la relación de aspecto A de la adiabática promedio en $t = t_m$, que de acuerdo con las simulaciones numéricas es prácticamente igual a la adiabática promedio en t_f , puede observarse en la Fig. 6.8. Esta adiabática promedio está caracterizada por la razón p_{gf}/ρ_{gf}^γ (puntos), donde p_{gf} y ρ_{gf} son los valores numéricos de la presión y densidad promedio en el gas interior cuando éste alcanza la máxima compresión. Los valores correspondientes a $p_{gf}/\rho_{gf}^\gamma = p_{g2}/\rho_{g2}^\gamma$ calculados por el modelo, donde p_{g2} y ρ_{g2} se evalúan por las Ec. (2.9) y (2.10) (línea gruesa llena para $A \leq 10$ y la línea discontinua para $A > 10$), concuerdan razonablemente para las relaciones de aspecto menores que 10.

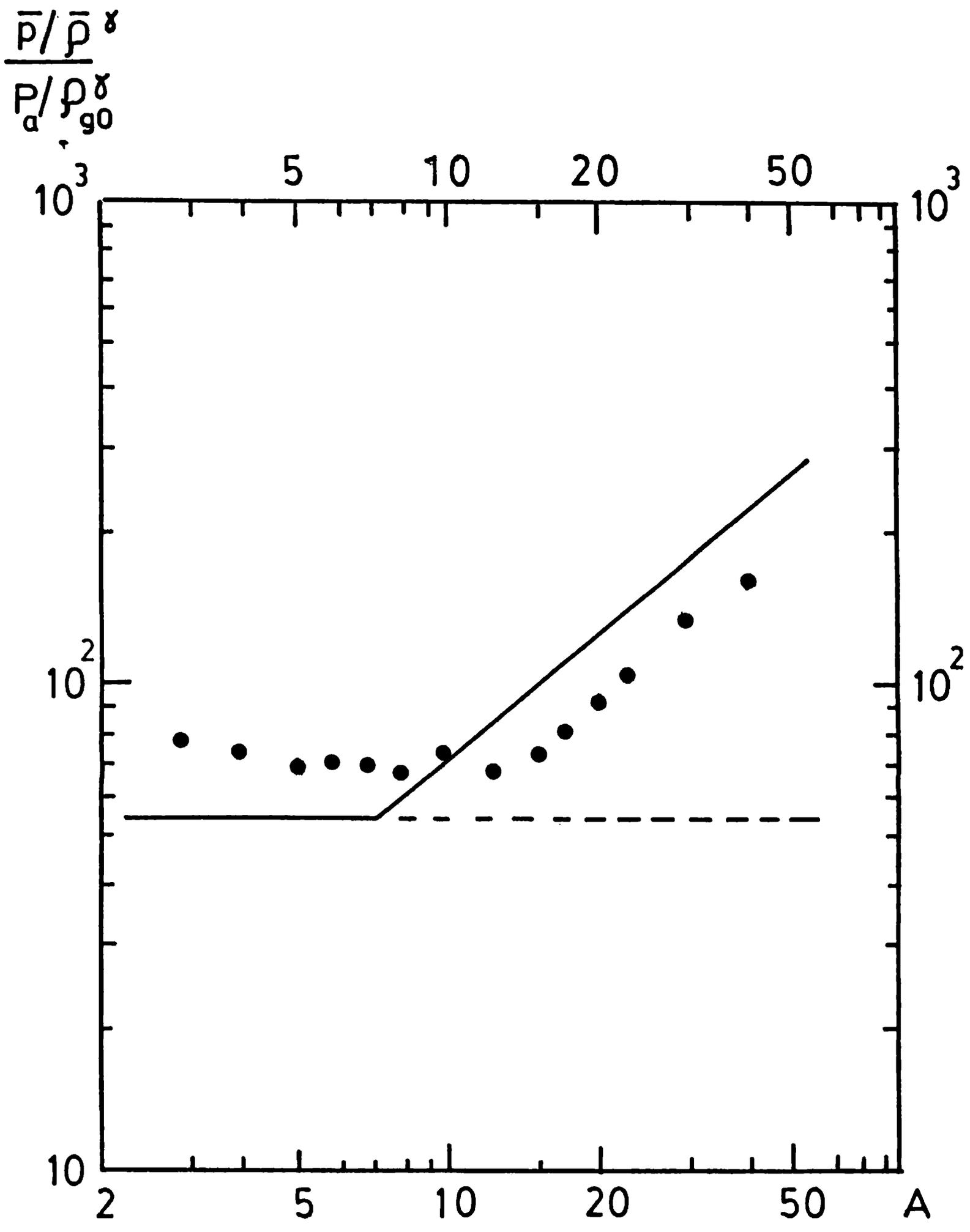


Fig. 6.8. Gráfico de la adiabática promedio en función de la relación de aspecto.

Para relaciones mayores, existe claramente un cambio en la dependencia de dicha adiabática con A . En este caso, las Ec. (2.15) y (2.17) (línea llena para $A > 10$) describen mejor los resultados numéricos. Puede decirse, entonces, que el modelo (toda la línea gruesa continua), tiene en cuenta la variación de la adiabática con la relación de aspecto.

Sintetizando el contenido de esta subsección, puede afirmarse que existe un buen acuerdo entre los resultados analíticos y numéricos. El acuerdo se mantiene hasta relaciones de aspecto más pequeñas ($A \geq 5$) que las señaladas en el Cap. 5.

6.2.2 Compresión adiabática del gas interior. Instante de máxima compresión.

Para $t > t_m$ se sucede una serie de ondas de choque entre el centro de simetría ($r = 0$) y la interfase de los dos fluidos, que sigue moviéndose hacia adentro (las Fig. 6.9 y 6.10 muestran dos de estas ondas). Antes de que el gas interior alcance la máxima compresión, un número importante de ondas (aproximadamente diez) atraviesan el gas. Esto indica que el tiempo de tránsito de las ondas es menor por un orden de magnitud que el tiempo característico de variación de la posición $R_i(t)$ de la interfase, y se verifica el resultado de la Sección 5.3. Como es de esperar, las intensidades de estas perturbaciones son muy inferiores a las tratadas en la etapa de precalentamiento. Por lo tanto, es sumamente razonable tratar como adiabática a la compresión del gas interior para $t > t_m$, suposición realizada en el modelo analítico.

Durante esta compresión adiabática, la presión del gas interior crece rápidamente. Al margen de las posibles oscilaciones radiales de la posición de la interfase, debidas a los sucesivos encuentros con las ondas del gas interior, hay un instante en el cual la presión del gas alcanza el valor máximo absoluto. A este instante se lo denota t_f , y, a la masa de la fracción de la fase externa detenida en ese instante, m_{of} .

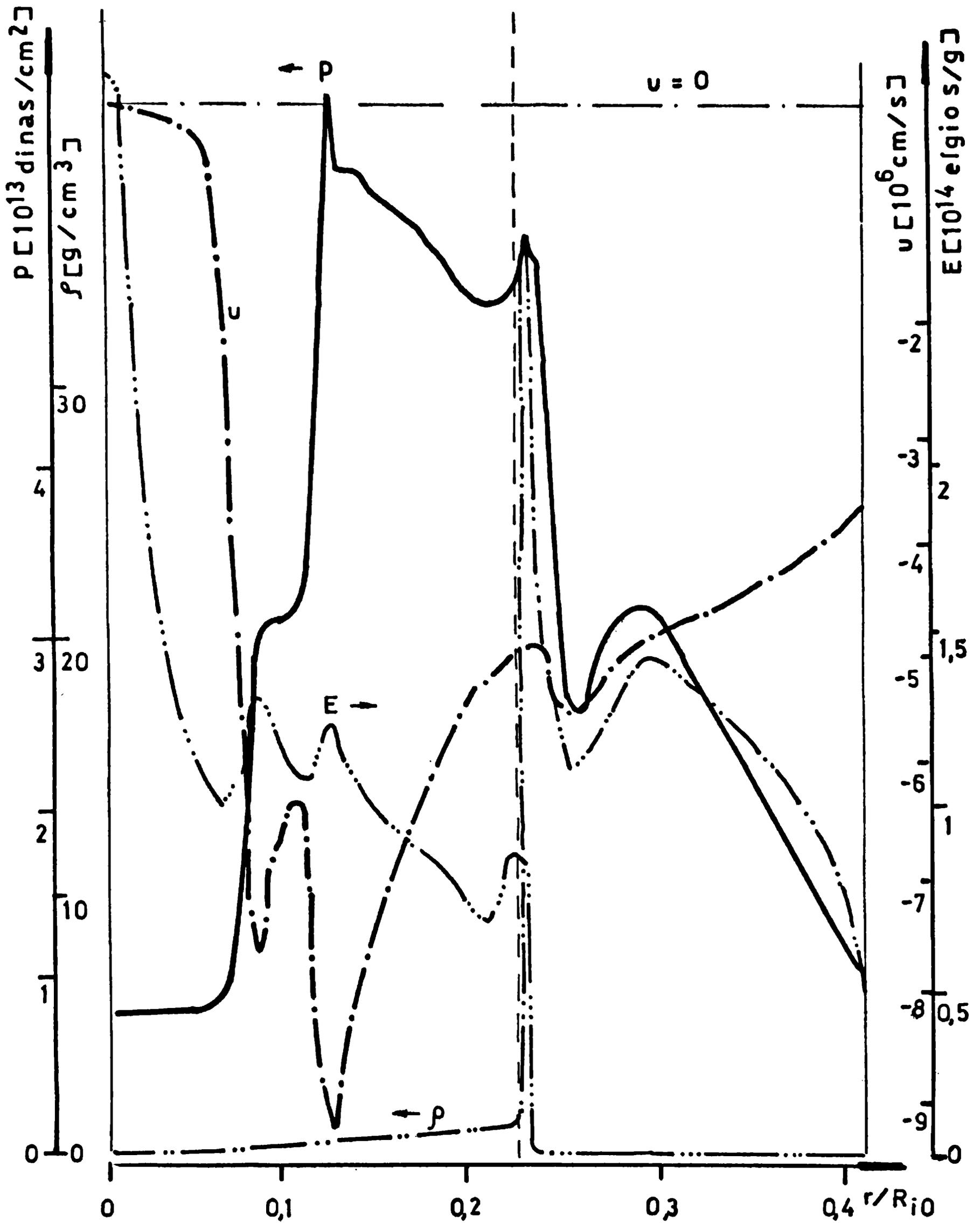


Fig. 6.9. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.30 \cdot 10^{-7}$ s ($t_m < t < t_f$).

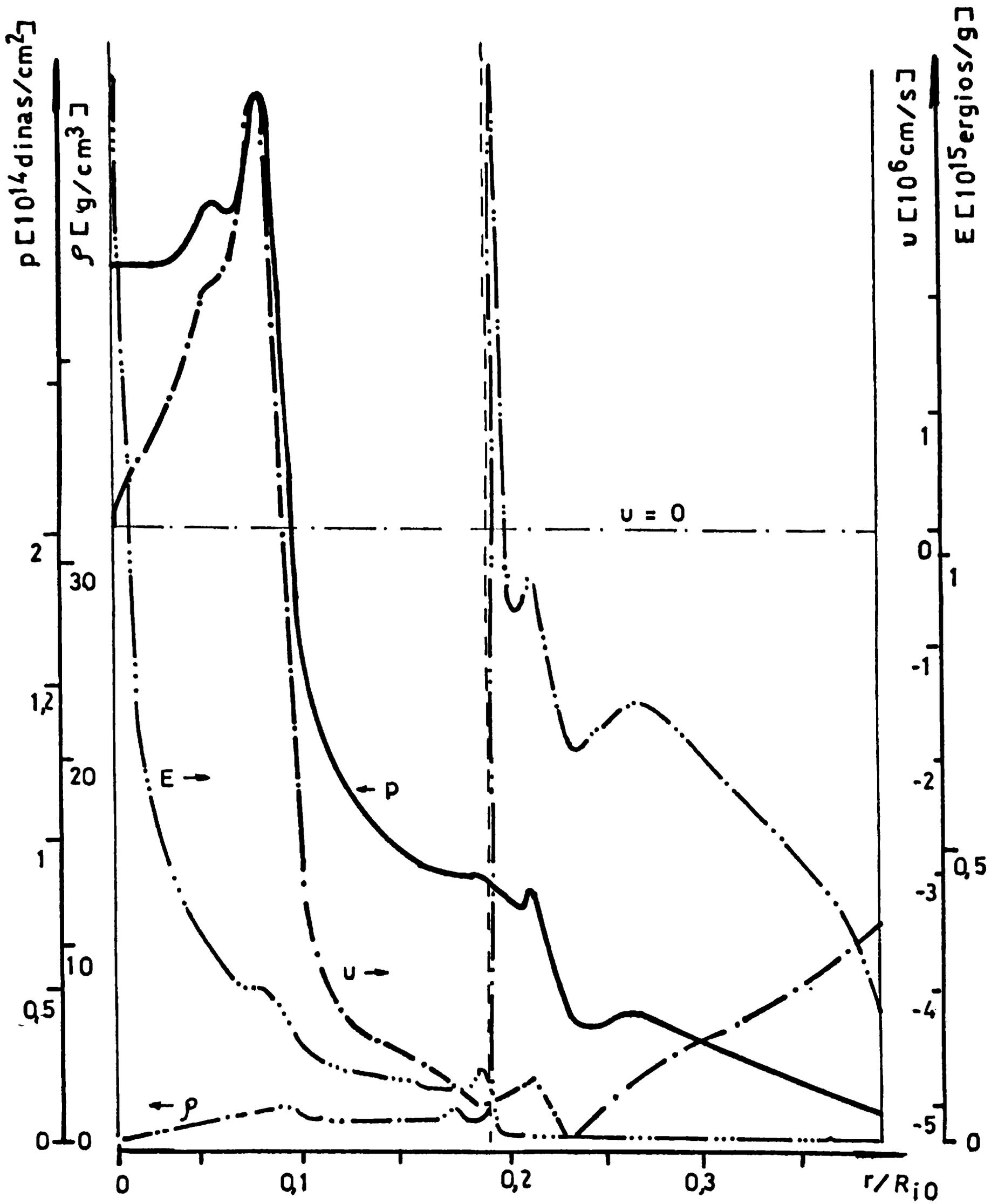


Fig. 6.10. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.37 \cdot 10^{-7} s$ ($t_m < t < t_f$).

En la Fig. 6.11 se representan los perfiles en $t = t_f$ para la implosión tomada como muestra. La parte de la fase exterior que contiene la m_{of} puede visualizarse rápidamente a partir de la distribución de la velocidad. Se extiende desde $r \approx 0.1 R_{i0}$ hasta $r \approx 0.17 R_{i0}$ y tiene velocidad prácticamente nula. En esta fase existen algunas fluctuaciones en las distribuciones, asociadas a la sucesión de ondas en el gas interior. Sin embargo, las fluctuaciones en p , ρ y v tienen amplitudes mucho menores que los valores máximos de las distribuciones, de modo que pueden despreciarse.

En t_f se tiene, entonces, una distribución uniforme de velocidad (con un valor de velocidad prácticamente nulo) en la parte de la fase exterior afectada por el frenamiento. Si este tipo de distribución se ha mantenido en el tiempo, como puede observarse en las Fig. 6.9 a 6.11, la distribución de la aceleración también puede considerarse uniforme. No afecta que la aceleración dependa del tiempo, como ocurre en este caso.

De la Fig. 6.11 también puede observarse que para $r \geq 0.17 R_{i0}$ existe, en el caso representado, una región periférica de la cáscara que continúa con movimiento convergente en $t = t_f$. La región periférica está unida a la parte interna detenida por medio de una discontinuidad ($r \approx 0.17 R_{i0}$) en la velocidad, presión y densidad, corroborándose lo que se dedujo en el modelo. La parte externa tiene una velocidad algo mayor que la mitad de v_m ($v_m \approx 4.7 \cdot 10^6 \text{ cm/s}$), la velocidad máxima alcanzada en $t = t_m$ por toda la cáscara. Además, dicha parte externa tiene una densidad promedio que aumenta desde $t = t_m$ hasta $t = t_f$, y por ende, la velocidad del sonido promedio en este lapso también aumenta. Surge entonces que, en la parte externa de la cáscara, desde $t = t_m$ hasta $t = t_f$ disminuye el número de Mach. Esta disminución, que se verifica en todo el rango de relaciones de aspecto estudiado en este informe (ver por ejemplo las Fig. 6.12 y 6.13), es una característica típica de los flujos supersónicos en toberas cuya sección se reduce. En resumen, la disminución del número de Mach en la parte externa de la fase exterior, desde t_m hasta t_f , es debido a la convergencia del flujo, y nada tiene que

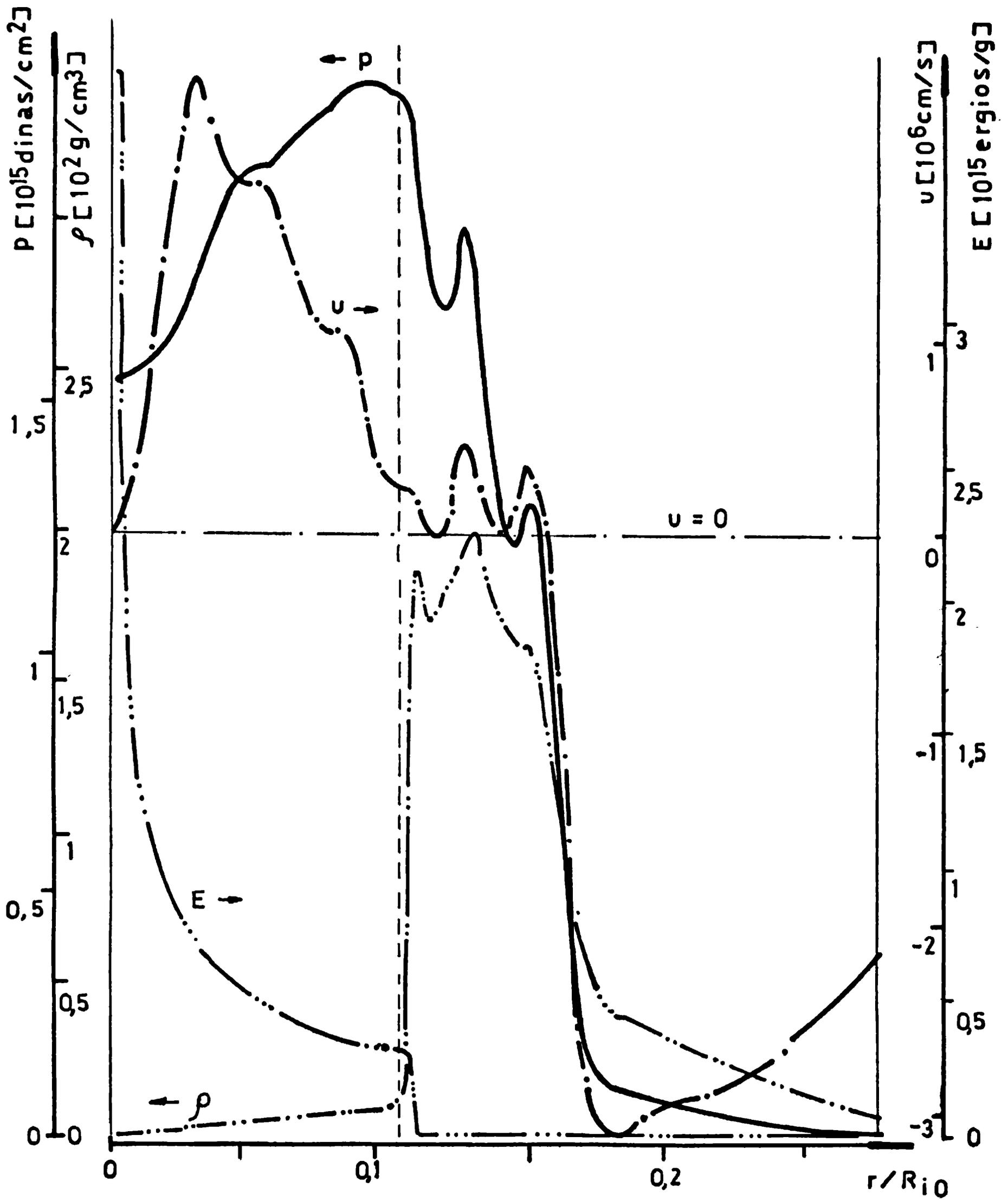


Fig. 6.11. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.76 \cdot 10^{-7}$ s. Es el instante t_1 en el cual el gas alcanza la máxima compresión.

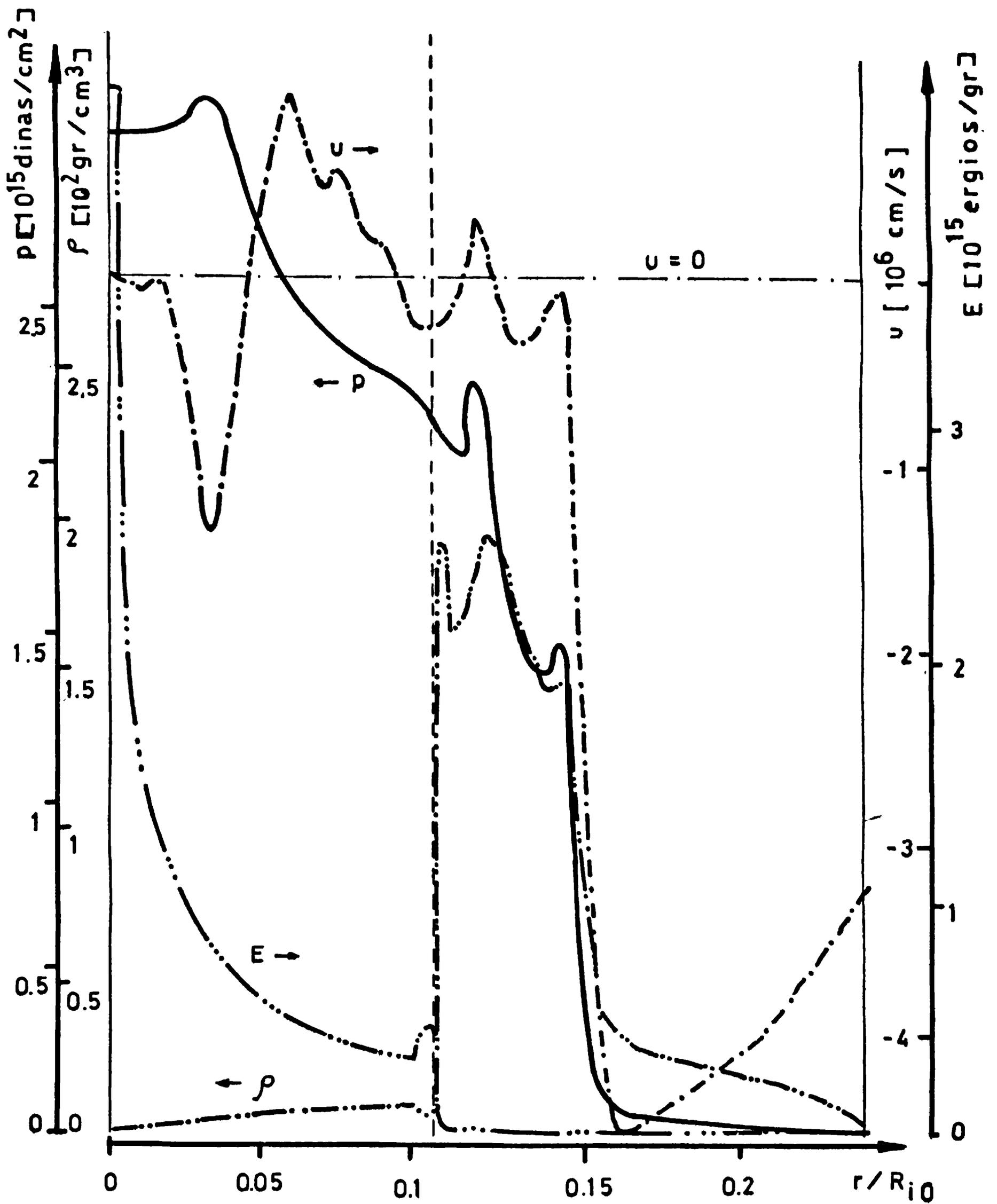


Fig. 6.12. Distribuciones para $A = 15$ en $t = 2.21 \cdot 10^{-7}$ s. Es el instante t_1 en el cual el gas alcanza la máxima compresión.

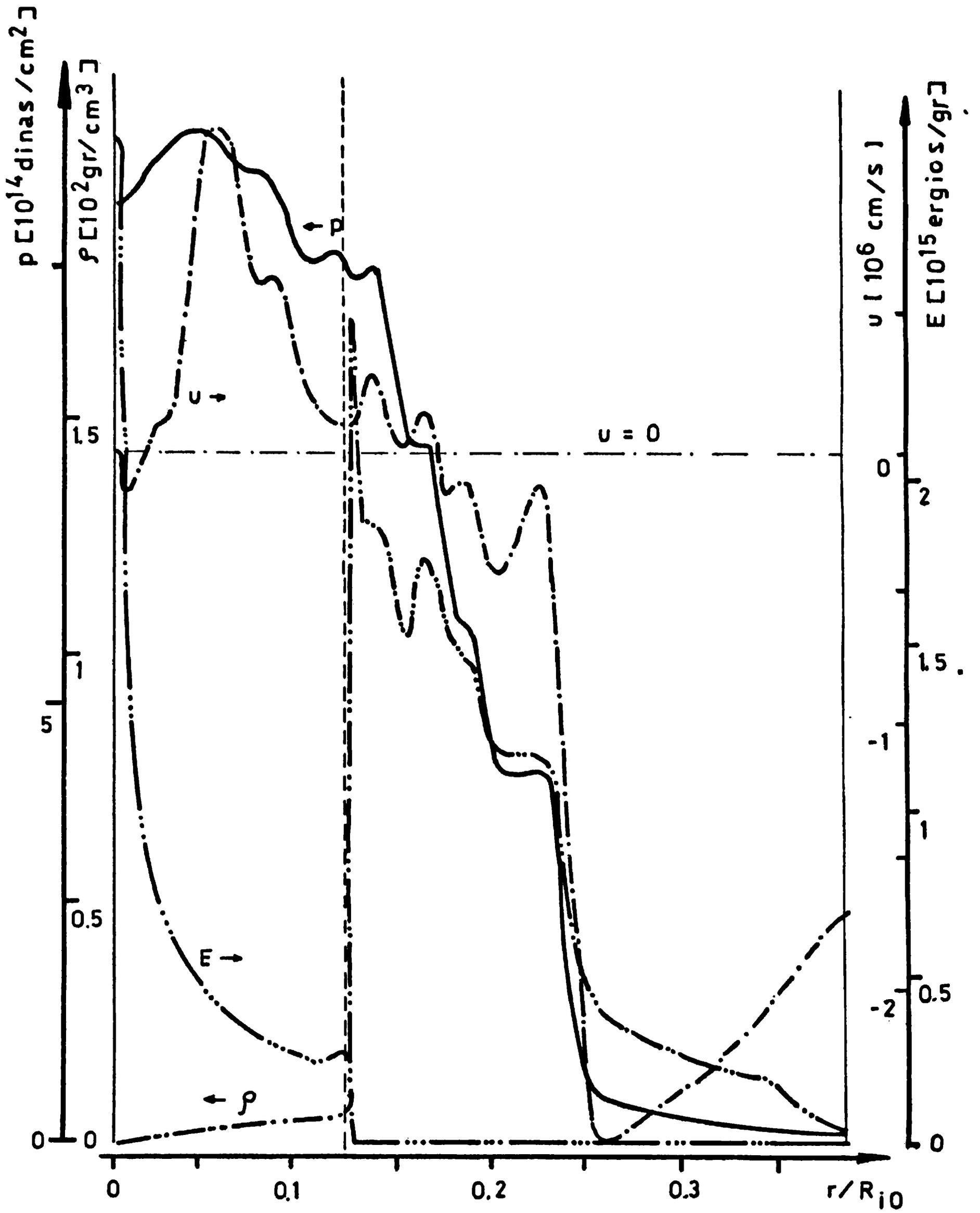


Fig. 6.13. Distribuciones para $A = 6$ en $t = 3.65 \cdot 10^{-7}$ s. Es el instante t_1 en el cual el gas alcanza la máxima compresión.

ver la presencia del gas interior, tal como se señalara en los Cap. 4 y 5.

El número de Mach M que la región periférica de la fase externa alcanza en $t = t_f$, es utilizado en el desarrollo analítico. Para calcularlo, se parte del número de Mach M_a de la fase externa en $t \approx t_m$, y se introduce la corrección debida a la convergencia del flujo. La corrección es difícil de estimar y complica excesivamente el cálculo. En el Cap. 4 se expresa M en función del parámetro $\beta = \rho/\rho_a$, donde ρ y ρ_a son las densidades promedio de la parte externa en estudio en los instantes t_f y t_m , respectivamente. El valor del parámetro β se ha determinado por medio de las simulaciones numéricas. Se puede agregar, sin embargo, que los valores analíticos de M también concuerdan con los valores numéricos correspondientes.

Se analiza ahora el estado termodinámico del gas interior en el momento de su máxima compresión, $t = t_f$. Una de las hipótesis necesaria para el cálculo de dicho estado se refiere a la discontinuidad que en ese instante separa la parte interna detenida y la parte periférica aún en movimiento, de la cáscara. Esta discontinuidad u onda de choque involucra, naturalmente, un incremento de entropía en la materia que la atraviesa, cuyo valor en $t = t_f$ juega un rol importante en el modelo. El incremento se puede expresar por medio del parámetro $\alpha(\dot{m}_{of}) = p^{1/\gamma} \rho_a / (\rho P_a^{1/\gamma})$, o sea razón entre los dos factores $(p/\rho^\gamma)^{1/\gamma}$ que caracterizan a un elemento de fluido antes y después de atravesar la discontinuidad en $t = t_f$.

Las presiones promedio del gas interior para distintas relaciones de aspecto, en el instante $t = t_f$ de máxima compresión, se muestran en la Fig. 6.14. Los puntos corresponden a los valores obtenidos numéricamente mientras que las líneas representan los resultados analíticos según las hipótesis adoptadas. Si, por ejemplo, se considera que la discontinuidad en la fase externa produce un incremento de entropía despreciable, por intermedio de la Ec. (4.8) con $\alpha(\dot{m}_{of}) = 1$, se obtiene la línea recta de trazos situada más a la izquierda en la Fig. 6.14. Por otra parte, si se calcula el incremento de $\alpha(\dot{m}_{of})$ con las Ec. (4.9) a (4.12), se

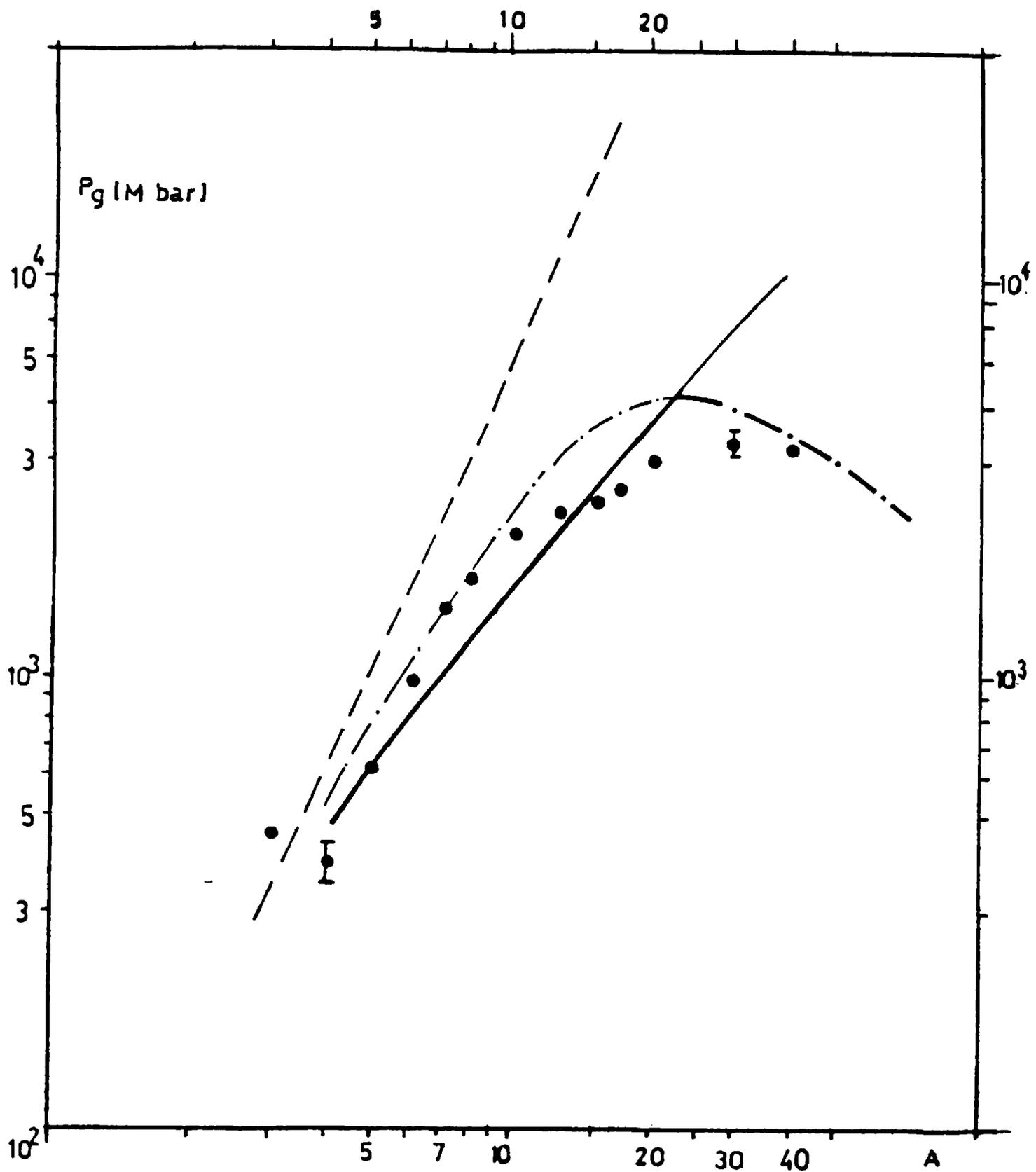


Fig. 6.14. Gráfico de la presión p_{gf} promedio del gas en el instante $t = t_f$ de máxima compresión. La recta de trazos en este caso corresponde a los resultados si se desprecia el incremento de entropía en la onda de choque de la fase externa. La línea llena representa los resultados considerando este incremento. La línea de punto y raya corresponde al desarrollo analítico adoptando $m_{of} = m_{so}$. Los puntos son los valores obtenidos numericamente, y las barras, la variación observada en p_{gf} cuando se varió la discretización de ambas fases..

obtiene la línea llena. Ambas líneas se separan cuando la relación de aspecto crece, debido a que el número de Mach M en t_f se incrementa al aumentar A , y por lo tanto, $\alpha(\dot{m}_{ef})$ también se incrementa. En otras palabras, para relaciones de aspecto mayores (fases exteriores delgadas), el fenómeno es más violento, y más grande es el incremento de entropía del fluido de la fase exterior que se detiene en $t = t_f$. Por lo tanto, el valor de $\alpha(\dot{m}_{ef})$ se aparta en mayor medida de la unidad, y entonces este parámetro resiente más críticamente en los resultados.

La línea de punto y raya en la Fig. 6.14 representa los resultados que proporcionaría el modelo si se considerara $m_{ef} = m_{so}$ para todas las relaciones de aspecto. Nótese que esta hipótesis bastante grosera conduce a valores casi correctos de la presión p_{gf} . Más adelante se esboza una explicación de este comportamiento.

Como indica la Fig. 6.14, el modelo prevé que $m_{ef} < m_{so}$ para $A \leq 25$ (línea llena gruesa) y $m_{ef} = m_{so}$ para $A > 25$ (línea gruesa de raya y punto). Puede observarse que los valores analíticos de p_{gf} concuerdan razonablemente con los obtenidos por medio de la simulación numérica. Téngase en cuenta que p_g es el parámetro más sensible del problema.

La Fig. 6.15a muestra los valores de densidad máxima alcanzada por el gas interior en $t = t_f$. Nuevamente, la línea llena representa los resultados analíticos si $m_{ef} < m_s$, y la línea de punto y raya, los obtenidos suponiendo $m_{ef} = m_s$. La línea de trazos corresponde, en este caso, a los resultados analíticos si se desprecia la correlación entre la adiabática del gas interior y la relación de aspecto. Recuérdese que la adiabática del gas queda determinada al finalizar la etapa de precalentamiento (se analizó en la Sección precedente. Véase Fig. 6.8). Según se considere o no dicha variación, cambia en forma importante la dependencia de ρ_{gf} en función de A , como puede observarse en la Fig. 6.15. Sin embargo, la presión no se altera significativamente (no se ha dibujado en la Fig. 6.14 pues coincide prácticamente con la línea llena). La adiabática del gas interior, entonces, tiene mayor influencia sobre la densidad máxima que sobre la presión.

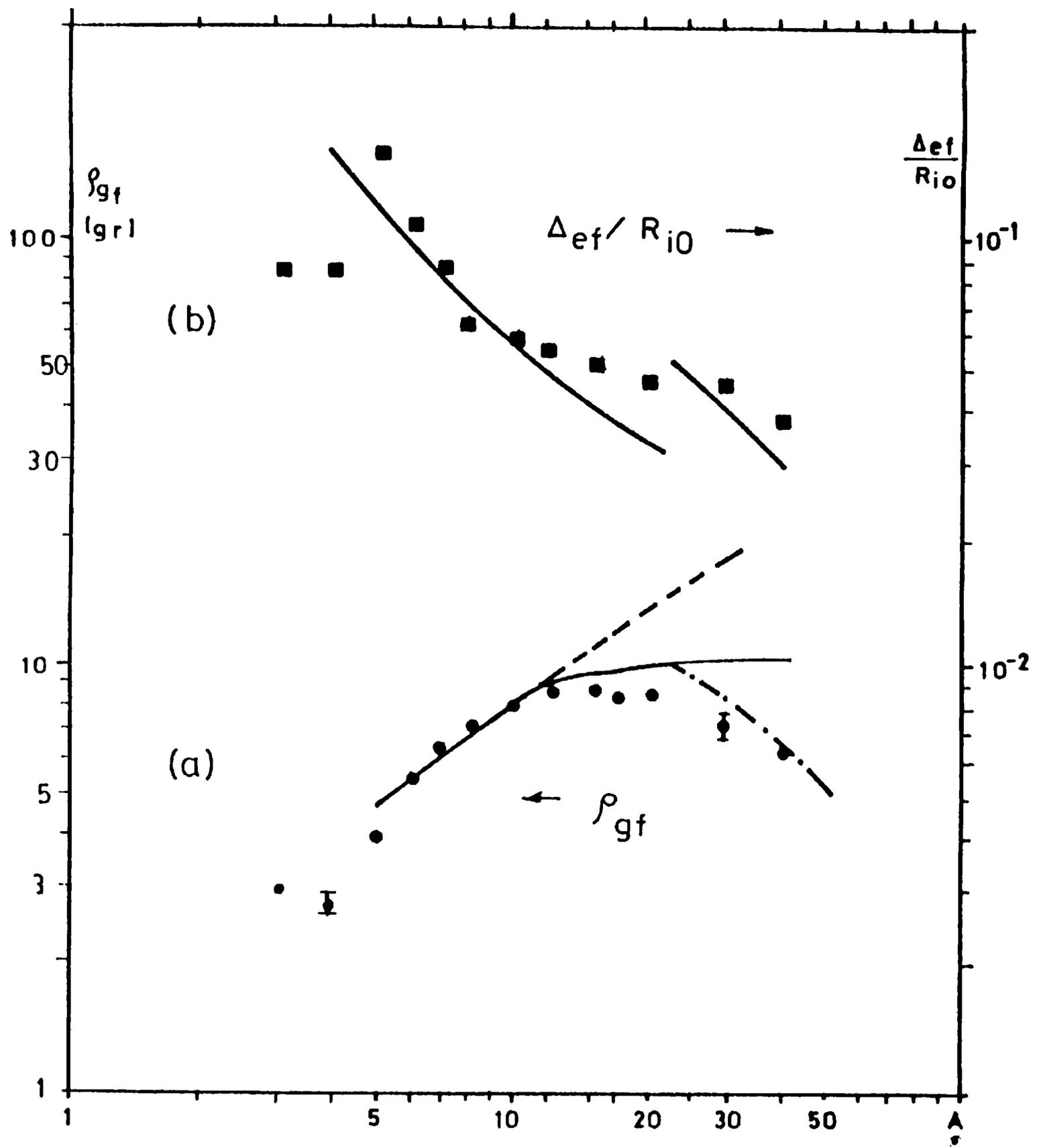


Fig. 6.15. (a): Densidad promedio máxima alcanzada por el gas interior. La línea llena corresponde a los resultados obtenidos con el desarrollo analítico si $m_{ef} < m_s$. La línea de trazos representa los resultados del modelo si se desprecia la variación de la adiabática del gas con la relación de aspecto. La línea de punto y raya corresponde al desarrollo analítico cuando $m_{ef} = m_{s0}$. Las barras representan la modificación observada cuando se varió la discretización de ambas fases. (b): Espesor que abarca la parte detenida de la fase exterior ($t = t_f$).

Tal como se mencionara anteriormente, para los datos aquí empleados se produce un cambio de régimen en $A \approx 25$, que puede visualizarse en las Fig. 6.14 y 6.15. Para $A > 25$, en $t = t_f$ se encuentra detenida toda la cáscara ($m_{of} = m_s$), mientras que para $A < 25$, parte de ella está todavía en movimiento ($m_{of} < m_s$). Los resultados numéricos confirman que el cambio de régimen se produce, aproximadamente para esa relación de aspecto. Se observa además, que para valores de A cercanos a 25 existe un régimen intermedio, con características que impiden su definición en forma precisa.

La existencia de este régimen es previsible también a partir del modelo analítico. En efecto, si $m_{of} = m_s$, la distribución de presión en la fase exterior varía con continuidad de acuerdo a los valores de presión sobre los contornos, p_g en $r = R_i$ y P_a en $r = R_e$. Si $m_{of} < m_s$, la variación continua se verifica desde el valor p_g hasta $p_{sz} > P_a$, donde p_{sz} es la presión del fluido afectado por la discontinuidad que separa la parte detenida de la parte en movimiento en la fase exterior. Por lo tanto, cuando la discontinuidad alcanza la superficie externa, debe producirse una expansión. Esta expansión debe generar un incremento importante en el espesor Δ_{of} de la parte detenida de la fase exterior, cuando se pasa de valores de A tales que $m_{of} < m_s$ a valores de A tales que $m_{of} = m_s$. Si en instantes próximos a la detención, la onda de choque en la fase externa llega al contorno, se tiene una situación intermedia entre los dos regímenes.

A fin de verificar los valores analíticos de Δ_{of} , es preciso adoptar un criterio para obtener los correspondientes valores numéricos. El criterio elegido consiste en definir Δ_{of} como el espesor de la fase externa que en $t = t_f$ posee una velocidad menor, en módulo, que la mitad de la velocidad máxima en la fase. Este criterio proporciona Δ_{of} y también la masa involucrada m_{of} con una precisión aceptable, gracias a la discontinuidad que existe en el perfil de velocidad en $r = R_{of} = R_{if} + \Delta_{of}$.

En la Fig. 6.15b pueden observarse los valores numéricos (cuadrados) y analíticos (línea) de Δ_{ef} . El modelo predice una expansión abrupta cuando se pasa del régimen $m_{ef} < m_s$ al caracterizado por $m_{ef} = m_s$. Las simulaciones numéricas muestran la existencia de un régimen intermedio entre los dos mencionados, de forma tal que la transición entre uno y otro se realiza en forma suave, como ya se preveía.

Otro parámetro del modelo que se puede comparar con los resultados de las simulaciones es la masa m_{ef} , definida como la masa de la parte detenida de la fase exterior en $t = t_{ef}$. En la Fig. 6.16 se muestra la relación m_{ef}/m_s y el valor absoluto de m_{ef} . La línea llena representa los resultados del desarrollo analítico cuando $m_{ef} < m_s$, mientras que la línea de punto y raya representa la situación $m_{ef} = m_s$. Estos resultados analíticos concuerdan razonablemente con los valores obtenidos numéricamente (triángulos y cuadrados) para $A \geq 5$. El criterio para determinar m_{ef} a partir de los resultados del código de simulación quedó aclarado cuando se definió Δ_{ef} . En la Fig. 6.16a puede observarse que cuando A decrece a partir de relaciones de aspecto grandes ($A \simeq 50$), m_{ef} y m_s crecen monótonamente. El crecimiento de la masa efectiva puede entenderse en términos de la evolución temporal del fenómeno, como ya se mencionara en el Cap. 4. Cuando A disminuye, la implosión es más lenta y por lo tanto, más fluido de la fase externa alcanza a detenerse en $t = t_f$.

La fracción m_{ef}/m_s , en cambio, tiene un comportamiento diferente. Para $8 \leq A \leq 25$ una reducción de la relación de aspecto incrementa m_{ef} , pero en menor medida que la tasa total m_s , de forma tal que la relación m_{ef}/m_s decrece. Cuando se reduce ulteriormente la relación de aspecto ($5 \leq A \leq 8$), en cambio, m_{ef} aumenta más rápidamente que m_s , de modo que m_{ef}/m_s crece. Esta tendencia existe también en el modelo, aunque menos marcada que en las simulaciones numéricas.

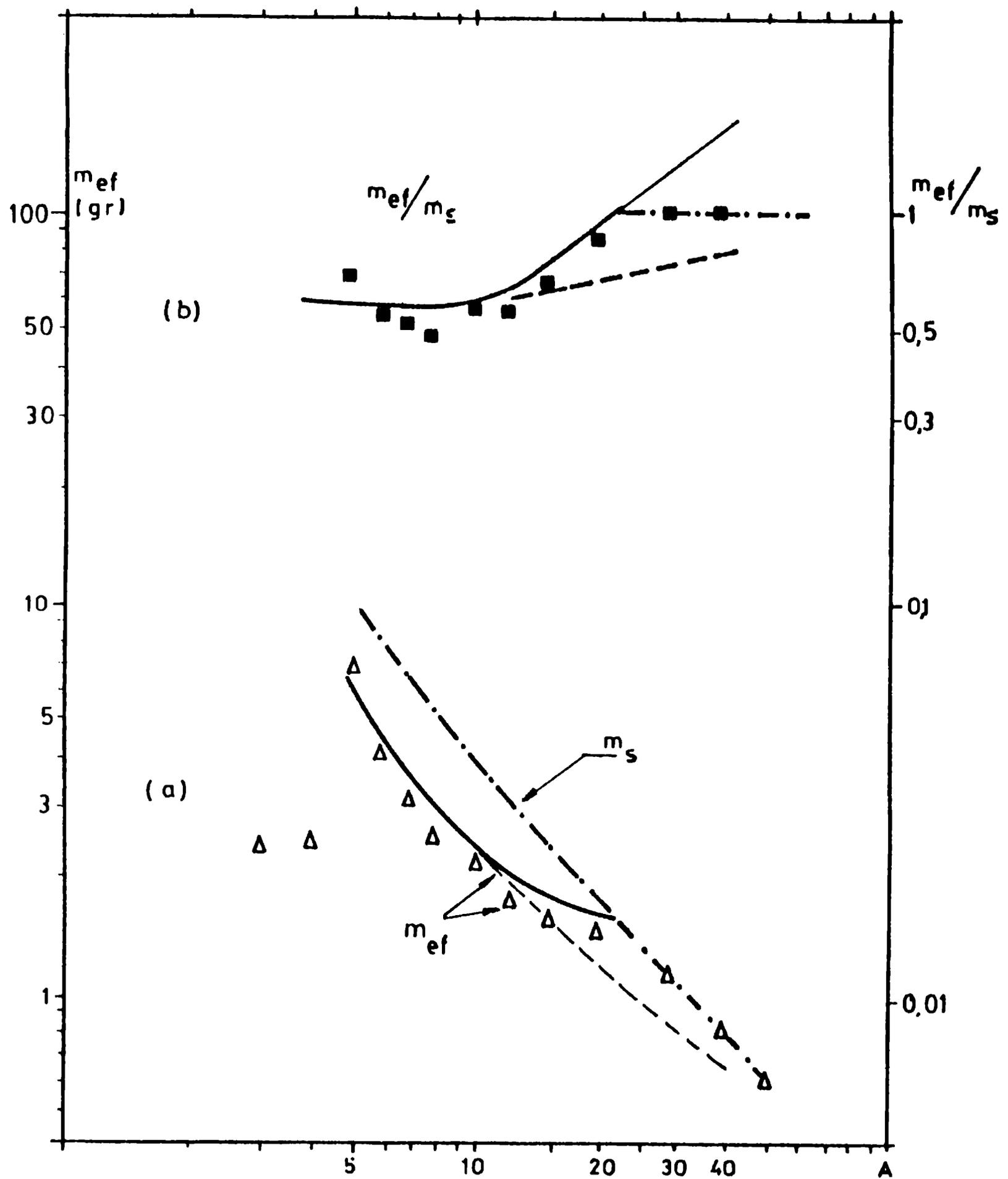


Fig. 6.16. (a): Valores de m_{ef} y (b): de la fracción m_{ef}/m_s calculados analítica y numéricamente (líneas llenas y puntos, respectivamente). Las líneas de punto y raya representan los resultados obtenidos con el modelo si $m_{ef} = m_s$. Las líneas de trazos son los resultados analíticos si se desprecia la variación de la adiabática del gas con la relación de aspecto.

En la misma figura se incluyen los resultados analíticos si se desprecia la variación de la adiabática del gas en función de la relación de aspecto (línea de trazos). Nótese que, en este caso, el régimen caracterizado por $m_{of} < m_{\bullet}$ se extiende hasta relaciones de aspecto mucho mayores.

De la Fig. 6.16 surge entonces que el modelo proporciona el valor correcto de m_{of} cuando $A \geq 5$. Si se pretende utilizar el desarrollo analítico para relaciones de aspecto menores que 5, los valores analíticos de m_{of} son bastante mayores que los señalados en las simulaciones. La magnitud de m_{of} hallada numéricamente es, además, prácticamente la misma para $A = 3$ y $A = 4$, lo cual indica un cambio de tendencia notorio respecto de lo que ocurre para $A \geq 5$.

Esto se relaciona con el cambio de tendencia observado en v_{of} . Recuérdese que v_{of} es la velocidad cuadrática media en $t = t_m$, obtenida a partir de las simulaciones numéricas, de la parte de la fase externa que será la afectada por el frenamiento en $t = t_f$. Es decir, v_{of} es un promedio en $t = t_m$ sobre el fluido que contiene m_{of} . De acuerdo con lo visto precedentemente, para las relaciones de aspecto cercanas al cambio de régimen ($A \approx 5$) varía sustancialmente m_{of} (a una tercera parte para los datos de la Fig. 6.16). Por lo tanto, varía la cantidad de fluido sobre la cual se calcula v_{of} . En suma, para $A \leq 5$ la distribución de energía cinética en $t = t_m$ deja de ser uniforme, como se señaló en la Sección 6.2.1. Estos dos efectos, que naturalmente están entrelazados, hacen que deba esperarse una variación bastante abrupta en el valor de v_{of} , del mismo orden de magnitud que v_{of} , cuando $A \approx 5$ (véase Fig. 6.6). El cambio de comportamiento de m_{of} y v_{of} para esa relación de aspecto indica un cambio cualitativo importante en la evolución del fenómeno, que debería ser incluido en el modelo si se quisiera extender su validez para bajas relaciones de aspecto. Se amplía el análisis de este punto más adelante.

El tiempo de frenado t_{of} se definió como el lapso necesario para detener la parte de la fase externa que contiene la masa efectiva m_{of} , si se mantienen las condiciones de máxima deceleración. Por condiciones de máxima deceleración se entiende el valor de los parámetros en cierto instante próximo a t_f , cuando la presión del gas alcanzó valores cercanos a p_{gf} y la onda de choque en la fase externa recién comienza a tener una amplitud del orden de la que tiene en $t = t_f$. Se puede considerar que en este instante se tiene, aproximadamente, $R_i \approx R_i(t_f)$, $p_g \approx p_{gf}$, $R_{of} \approx R_i + \Delta_{of}$ y $p(r \approx R_{of}) \approx P_a$.

Hallar numéricamente t_{of} presenta alguna dificultad. A fin de comparar la estimación analítica de este parámetro, se adopta un criterio íntimamente vinculado con la definición de t_{of} . Se supone que el tiempo de frenado es el lapso comprendido desde que la presión alcanza la mitad de la presión máxima ($p_g \approx p_{gf}/2$) hasta t_f , instante en el cual $p_g = p_{gf}$.

La Fig. 6.17 muestra las estimaciones analíticas y numéricas del tiempo de frenado t_{of} . Los puntos representan, como en los gráficos anteriores, los valores proporcionados por las simulaciones. Los valores analíticos se hallan por intermedio de la Ec. (4.26). Si se emplea esta ecuación sin cambios, se obtiene la línea de trazos, mientras que si se adopta $p_{s2} = P_a$ en dicha ecuación se tiene la línea llena. El mejor acuerdo de ésta con los resultados numéricos, indicaría que en el cálculo del tiempo de frenado debe considerarse la deceleración máxima y no la deceleración en $t = t_f$, que tiene menor magnitud. Una explicación más detallada de estos aspectos puede encontrarse en los párrafos posteriores a la Ec. (4.26).

En la Fig. 6.17 también aparece, como en el caso de Δ_{of} , una discontinuidad en los valores analíticos de t_{of} en $A \approx 25$. La génesis de esta discontinuidad es la que se observa en la variable Δ_{of} . Al variar Δ_{of} se modifica la distribución de presión, lo cual ocasiona una variación en la deceleración por la simetría esférica, y por ende, también una modificación en el lapso t_{of} de frenado. La discontinuidad, pues, revela nuevamente la necesidad de un régimen intermedio entre la situación $m_{of} < m_s$ y $m_{of} = m_s$.

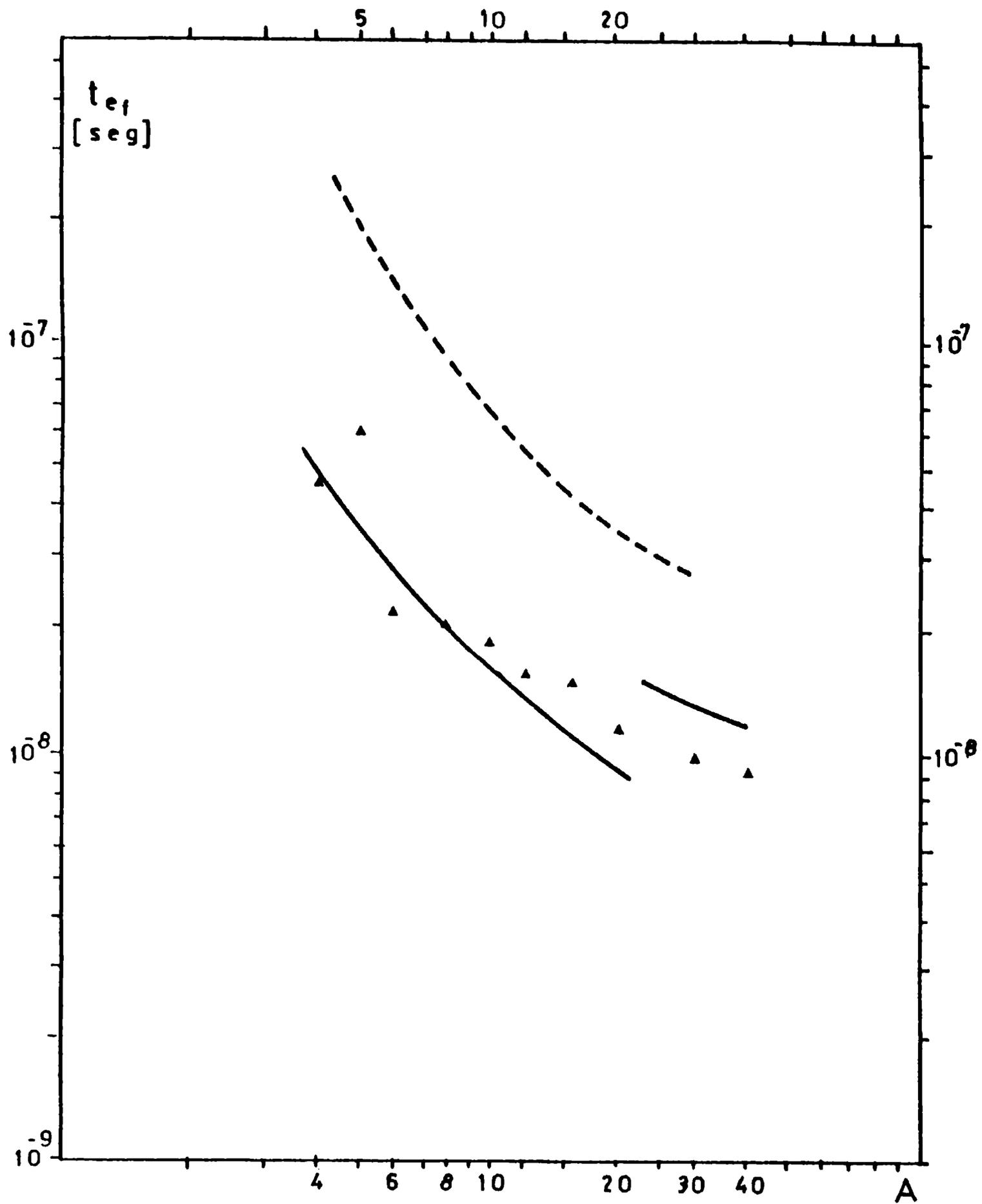


Fig. 6.17. Tiempo de frenado t_{ef} en función de la relación de aspecto. La línea llena representa los valores analíticos si se los calcula con la máxima deceleración. La línea de trazos son los resultados predichos por el modelo si se considera la deceleración en $t = t_f$, en vez de la máxima.

La Fig. 6.18 comprende los gráficos de la energía interna E_{igf} de todo el gas interior y de la energía interna E_{isf} de la parte detenida de la fase exterior, ambas calculadas en $t = t_f$, para distintas relaciones de aspecto. Los puntos y la línea llena corresponden a los valores numéricos y analíticos, respectivamente. E_{isf} se calcula de acuerdo con la Ec. (4.2). Puede observarse que, en general, $E_{isf} \geq E_{igf}$ cuando $m_{of} < m_s$; es decir, se invierte una fracción considerable de la energía disponible en la compresión de la fase externa.

Una consecuencia importante surge del balance de energía. La suma de las energías internas E_{igf} y E_{isf} tiene que corresponder, aproximadamente, a la energía cinética $1/2 m_{of} v_m^2$ que tiene en $t = t_m$ la parte efectiva de la fase externa. Luego, despreciando las energías internas en $t = t_m$, la Ec. (4.3) se reduce a

$$1/2 m_{of} v_m^2 \approx E_{igf} + E_{isf} \quad (6.3)$$

En $t = t_f$, el gas interior y la parte detenida de la fase externa tienen presiones del mismo orden de magnitud, es decir, puede considerarse que ambas partes tienen similares energías internas por unidad de volumen. Por lo tanto, $E_{igf} \approx p_{gf} V_g / (\gamma - 1)$ y $E_{isf} \approx p_{gf} V_{of} / (\gamma - 1)$, donde V_g y V_{of} corresponden a los volúmenes ocupados en $t = t_f$ por el gas interior y por la parte detenida de la fase externa, respectivamente. Del balance de energía puede obtenerse, por lo tanto,

$$p_{gf} \approx \frac{\bar{p}_{of} v_m^2 (\gamma - 1) / 2}{1 + V_g / V_{of}} \quad (6.4)$$

que es una expresión simplificada de la Ec. (4.4).

Nótese que si $V_g \ll V_{of}$, el valor de p_{gf} no depende de la relación de volúmenes. En este caso puede preverse que los valores de p_{gf} no se modificarán demasiado si se considera que se detuvo toda la fase externa o sólo la parte que contiene la m_{of} . Dicho de otra manera, si $V_g \ll V_{of}$, el estado del gas en el instante de máxima compresión no depende fuertemente de m_{of} .

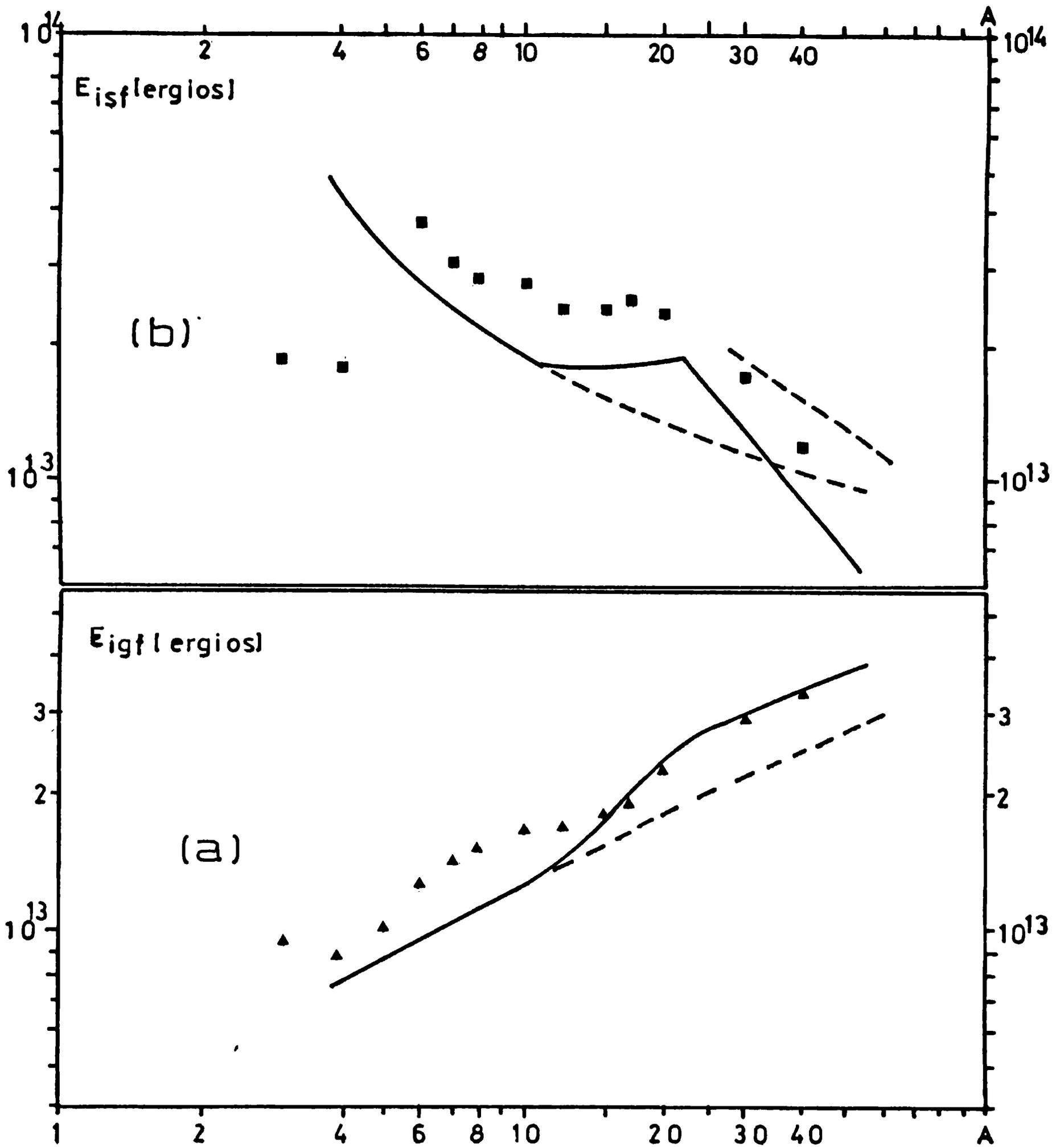


Fig. 6.18. Energías internas del gas E_{igf} (a) y de la parte detenida de la fase exterior E_{isf} (b), ambas en el instante de máxima compresión. La línea llena representa los resultados del modelo. La línea de trazos representa los valores de E_{igf} y E_{isf} predichos por el desarrollo analítico si se considera la misma adiabática del gas para todas las relaciones de aspecto.

De los valores numéricos de la Fig. 6.18, y aceptando que el gas interior y la parte detenida tienen igual energía específica, puede deducirse fácilmente que $V_{of} \geq V_g$, para los valores empleados en este trabajo. De acuerdo a lo mencionado con anterioridad, no hay gran diferencia si se calcula p_{gf} considerando m_{of} ó m_g . En efecto, esto es lo que se observa en el gráfico de p_{gf} , Fig. 6.14. Además, dicha diferencia disminuye al disminuir A (decrece V_g / V_{of}), consolidando las conjeturas precedentes.

Es importante averiguar, entonces, cuales condiciones iniciales producirían una situación tal que $V_g \gg V_{of}$, pues en dichas condiciones p_{gf} resentiría críticamente del valor de m_{of} . De las Ec. (4.24), (4.9) y (4.10), puede deducirse que V_{of} disminuye cuando se aumenta la velocidad v_m , a iguales valores de los demás parámetros. Por otra parte, un incremento de v_m hace disminuir también el valor de V_g , de acuerdo con las Ec. (4.13) y (4.8). Se prescinde, por el momento, de cómo se obtiene este aumento de v_m y del eventual cambio en la entropía del gas acordes con la modificación de los valores de v_m . Un diagrama cualitativo que da una idea de la dependencia de los volúmenes en función de la velocidad v de la cáscara en t_f puede hallarse en la Fig. 6.19.

Para todos los casos diagramados en la Fig. 6.19 debe cumplirse la ecuación de balance de la energía total mencionada con anterioridad, y la ecuación de tasa de variación usada en el Cap. 4, que es una ecuación de balance instantánea de energía. Esta última impone, sustancialmente, que en $t = t_f$ la energía cinética por unidad de masa se transforme en la energía interna por unidad de masa. Luego,

$$\frac{1}{2} v^2 \simeq \frac{p_{gf}}{\bar{\rho}_{of}(\gamma-1)} \quad (6.5)$$

donde se ha considerado, como antes, que la parte detenida de la fase externa tiene una presión y densidad aproximadamente uniformes. De esta expresión se puede conseguir una estimación de p_{gf} . Comparándola con la estimación obtenida de la ecuación de balance de la energía total Ec. (6.4), y considerando $v \simeq v_m$, se llega a la conclusión que $V_g / V_{of} \ll 1$.

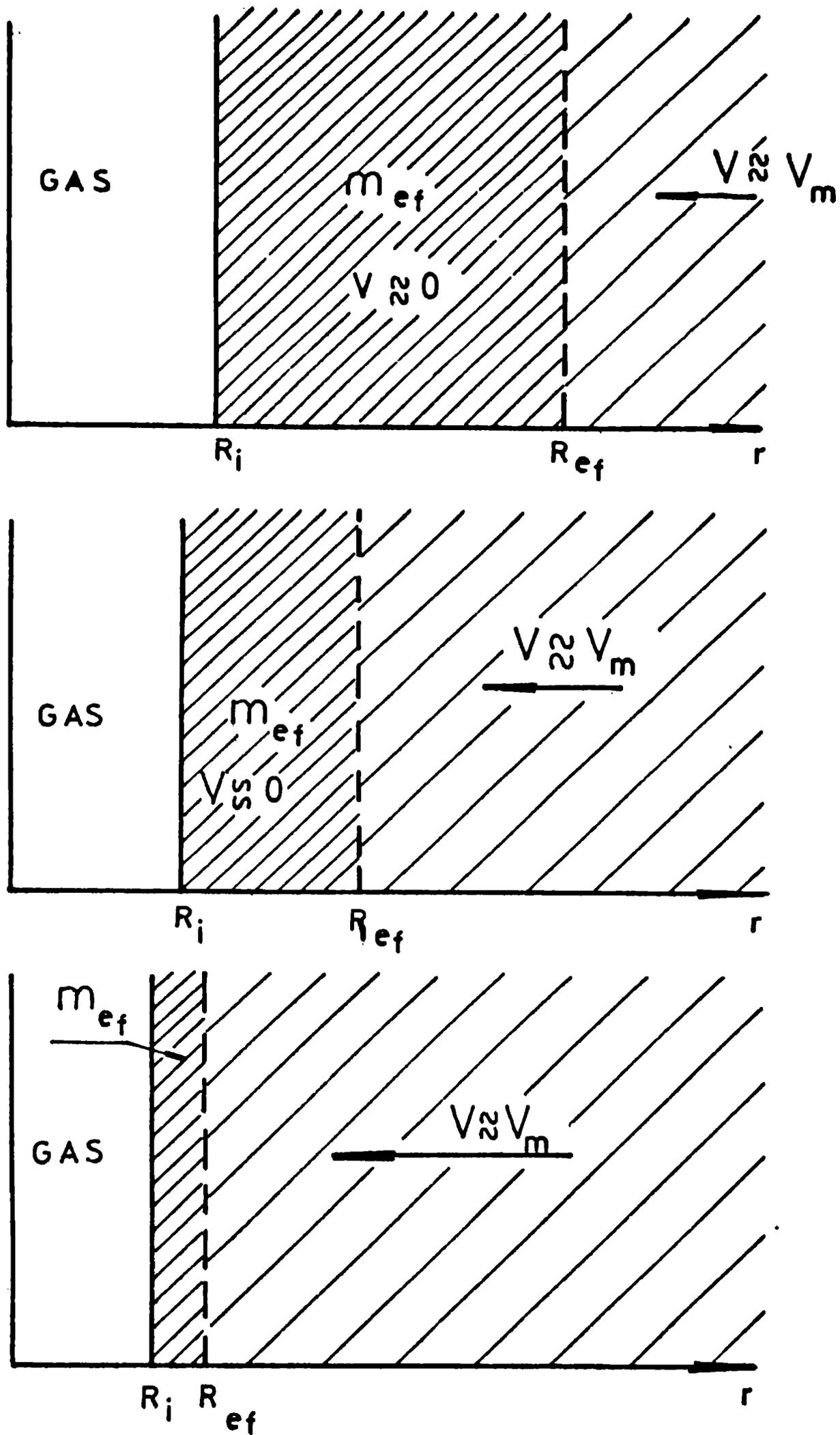


Fig. 6.19. Diagrama cualitativo que indica la posición R_i y R_{ef} en $t = t_f$ para tres casos diferentes. La parte rayada es la fase externa. Una mayor magnitud de v es representada por una longitud mayor de la flecha.

Cabe detenerse y reflexionar sobre este resultado. Como el análisis realizado es cualitativo, se puede concluir que V_g / V_{ef} no puede ser del orden de la unidad, al menos mientras se cumplan las hipótesis efectuadas. Una razón de volúmenes diferente de la indicada debe estar relacionada con un perfil de presión fuertemente no uniforme en la parte detenida de la fase externa. Dicho perfil se encuentra ligado a la aceleración centrífuga en esta zona en $t = t_f$, que a su vez se relaciona con el número de Mach M_a alcanzado por la fase externa en $t = t_m$. Por lo tanto, puede resumirse que p_{gf} dependerá de m_{ef} cuando en $t = t_m$ se tenga un flujo altamente supersónico. Para los datos empleados en este trabajo se llega a $M_a \approx 5$, y esto, como se señalara precedentemente, da lugar a una razón V_g / V_{ef} menor o a lo sumo del orden de la unidad, por lo que p_{gf} no resiente críticamente del valor de m_{ef} .

Si $M_a \gg 1$, sería, en cambio, indispensable efectuar el cálculo de p_{gf} con m_{ef} . Sin embargo, valores de M_a grandes pueden obtenerse para pequeños espesores de la fase externa, donde m_s también es pequeña. En las implosiones de estos sistemas, pues, la diferencia entre m_{ef} y m_s puede ser ínfima. Además, se debe considerar la variación de la entropía del gas con la relación de aspecto, que hace crecer m_{ef} en forma importante cuando aumenta A (véase la Fig. 6.16 ó la Ec. (4.16)). Se comprende, entonces, por qué el efecto de la masa efectiva, físicamente correcto, no produce una modificación relevante en el estado de máxima compresión del gas.

En la Fig. 6.18 se incluyen también las energías internas E_{igf} y E_{isf} que provee el modelo si se desprecia la variación de la adiabática del gas interior con la relación de aspecto. Ambas energías internas decrecen si se disminuye el valor de dicha adiabática. Cuando $m_{ef} < m_s$, E_{isf} decrece porque disminuye la masa efectiva, como puede observarse en la Fig. 6.16. Por otra parte, el decremento de E_{igf} se debe a una reducción del volumen ocupado, es decir, a un aumento de la densidad media, y no a una modificación importante en la presión. Esta cuestión se discutió con anterioridad, cuando se notó que el parámetro relacionado con

la adiabática del gas interior, modifica la densidad máxima del gas interior, pero no varía fuertemente p_{gf} . En resumen, cuanto menor es la entropía del gas interior, mayor es ρ_{gf} mientras que p_{gf} prácticamente no cambia. El estado del gas interior se alcanza con una menor energía interna E_{igf} comunicada al gas y también, con una menor energía E_{isf} , debido a una masa efectiva más pequeña.

Si toda la fase externa es afectada en $t = t_f$, ambos parámetros ρ_{gf} y p_{gf} , se modifican al variar el precalentamiento del gas. En efecto, la conservación de la energía total E en $t = t_f$ puede expresarse

$$\begin{aligned}
 E &= E_{igf} + E_{isf} \approx \\
 &\approx \frac{p_{gf}^{(\gamma-1)/\gamma} m_g \alpha_g}{(\gamma-1)} + \frac{p_{gf}^{(\gamma-1)/\gamma} m_s p_a^{1/\gamma}}{(\gamma-1) \rho_a} \approx \quad (6.6) \\
 &\approx \frac{p_{gf}^{(\gamma-1)/\gamma}}{(\gamma-1)} \left[m_g \alpha_g + m_s \frac{p_a^{1/\gamma}}{\rho_a} \right]
 \end{aligned}$$

donde $\alpha_g = p_g^{1/\gamma} / \rho_g$ es la adiabática del gas. Si se disminuye α_g a iguales valores de los demás parámetros, la presión p_{gf} debe ser mayor. La densidad $\rho_{gf} = \alpha_g p_{gf}$ también varía, aunque la magnitud de la variación depende de A .

La situación de menor entropía es sumamente favorable para la fusión por confinamiento inercial tal cual han indicado trabajos teóricos y experimentales. La forma más común de disminuir la adiabática del gas es por intermedio de una conformación temporal del pulso láser. Debe recalcar, sin embargo, que la adiabática del gas es proporcional a la relación de aspecto si $A > A_c$, como se señala en este trabajo. Por lo tanto, cuanto mayor es A , menor es la densidad ρ_{gf} , a pesar del incremento de energía entregada al gas. Y para $m_{ef} = m_s$, la disminución de ρ_{gf} es mucho más importante.

Con esto concluye la comparación de los resultados teóricos y numéricos en la etapa de estancamiento. La comparación arroja un saldo positivo. El modelo describe cualitativa y cuantitativamente los procesos físicos relevantes involucrados en la implosión, y proporciona el estado del gas en el instante de máxima compresión. Este estado no resiente críticamente del hecho que en $t = t_f$ se detenga sólo una parte de la cáscara. Además, permite insinuar algunas leyes de escala que podrían aprovecharse para obtener mayores compresiones del gas interior.

6.2.3 Expansión del gas interior

Después de t_f se produce una descompresión del gas: el movimiento de la parte afectada de la fase externa se hace centrífugo. Si $m_{ef} = m_s$, toda la fase externa es impulsada prácticamente sin oposición pues $p_{gf} \gg P_a$. Por otra parte, si $m_{ef} < m_s$, la parte afectada de la fase externa es impulsada contra la fracción periférica restante de la cáscara, que continúa su movimiento convergente y se incorpora rápidamente a la parte afectada por medio de la onda de choque divergente. La incorporación de materia prosigue hasta que, finalmente, toda la fase externa queda perturbada. Las Fig. 6.20 a 6.24 muestran, para distintos instantes, las distribuciones durante este proceso.

El lapso que tarda, a partir de $t = t_f$, en ser afectada toda la fase externa es del orden del tiempo de frenado t_{of} , y depende de m_{ef}/m_s . Para el caso tomado como muestra ($A = 10$), donde la parte no afectada de la fase externa es aproximadamente igual a m_{ef} , este lapso tiene un valor cercano a t_{of} .

Cuando toda la fase externa ha sido perturbada, se produce una fuerte expansión de ésta que luego se transmite al gas interior. Las Fig. 6.25 y 6.26 dan cuenta de las evoluciones de la densidad media ρ_g del gas interior para distintas relaciones de aspecto, según muestran las simulaciones numéricas. Las curvas están adimensionalizadas con los respectivos valores finales (ρ_{gf}, t_f).

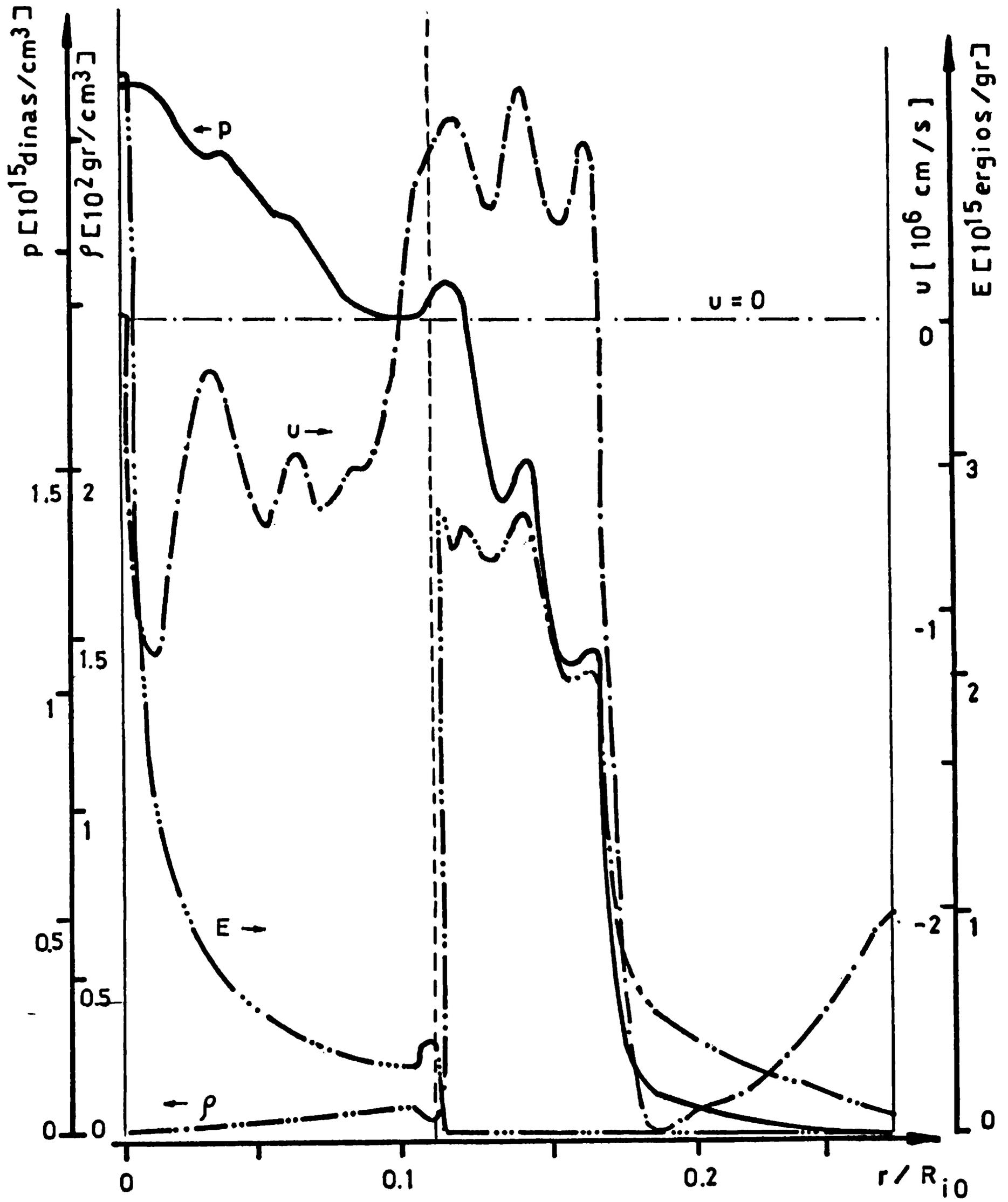


Fig. 6.20. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.79 \cdot 10^{-7}$ s. ($t > t_f$).

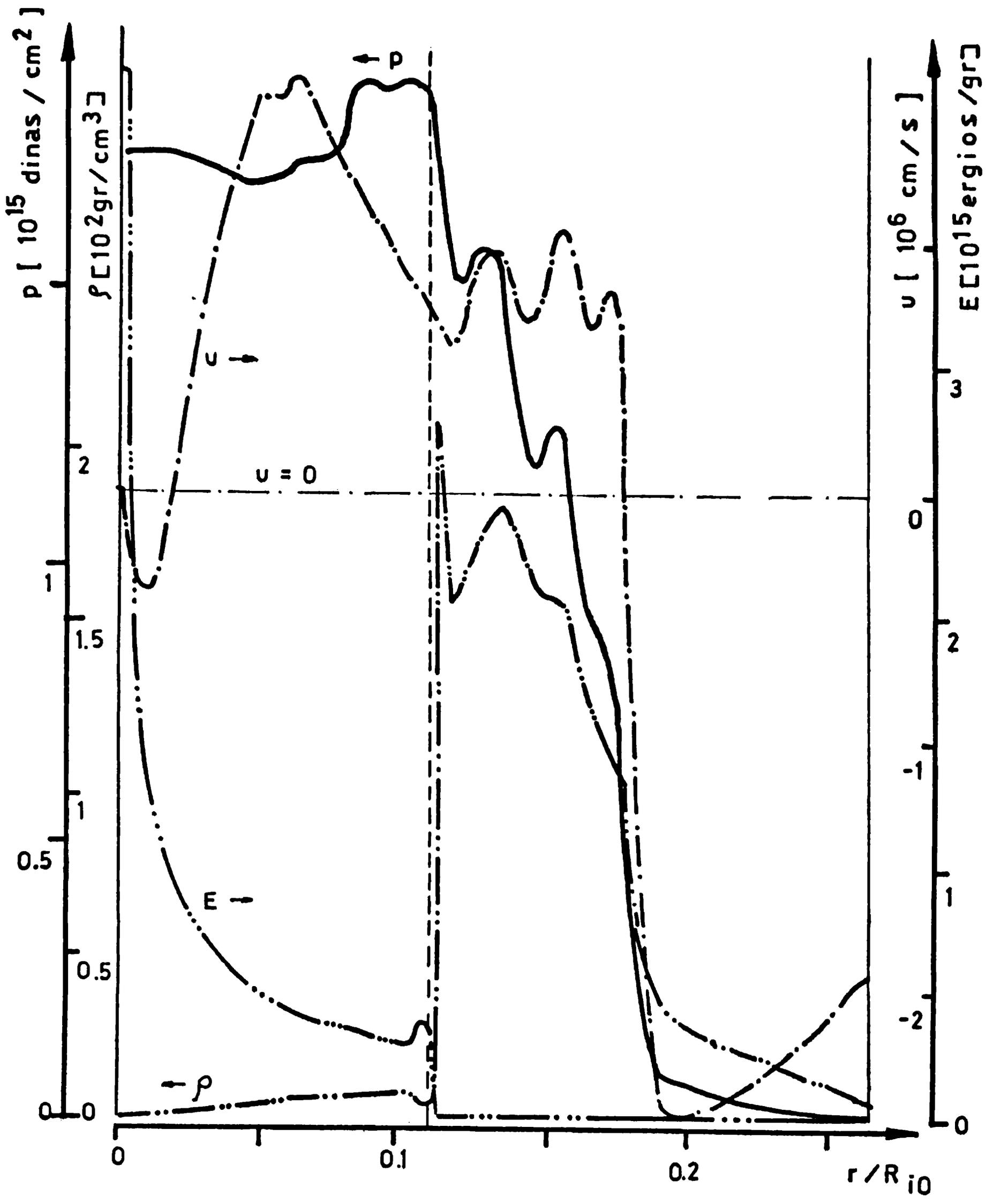


Fig. 6.21. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.82 \cdot 10^{-7}$ s. ($t > t_f$).

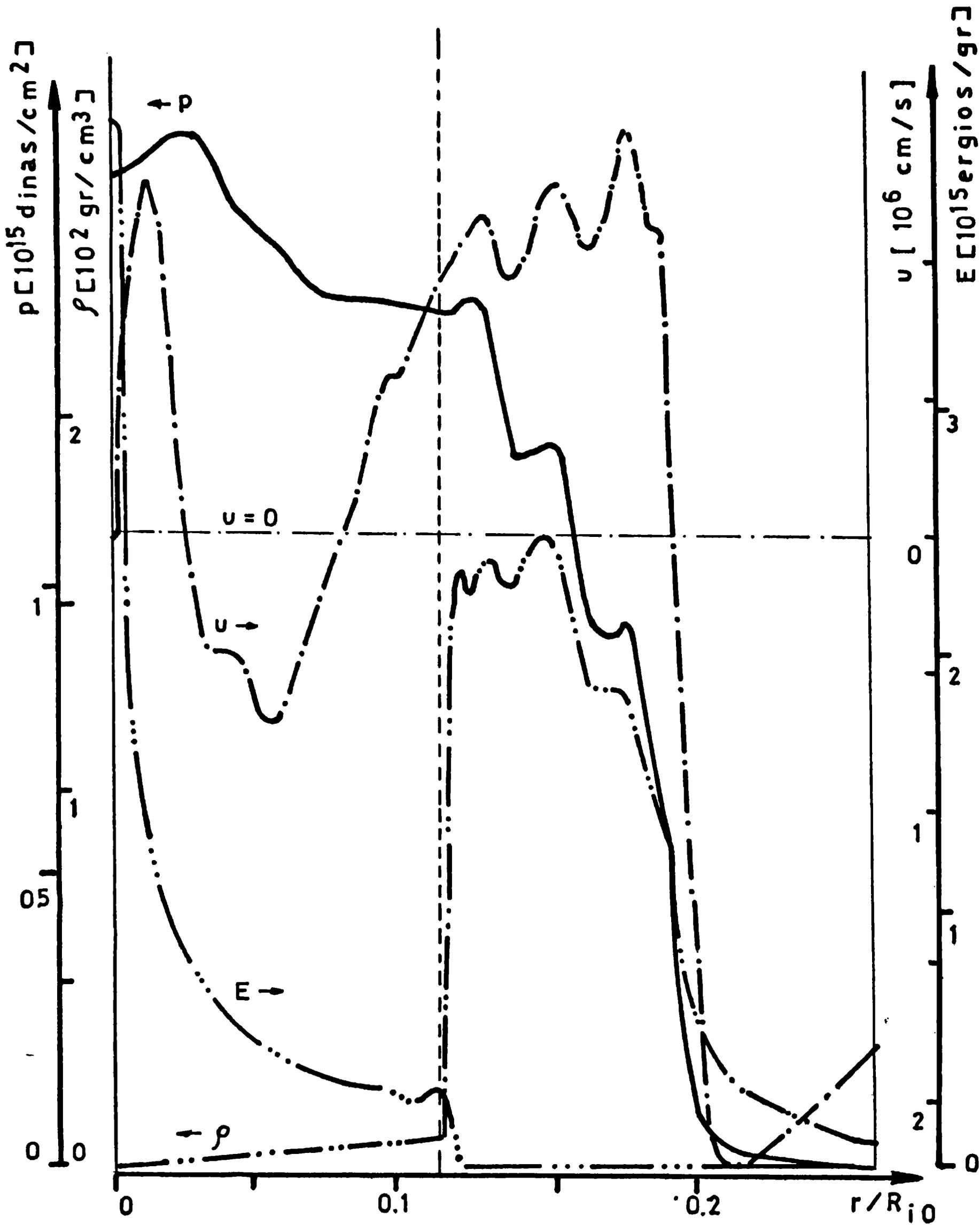


Fig. 6.22. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.86 \cdot 10^{-7}$ s. ($t > t_f$).

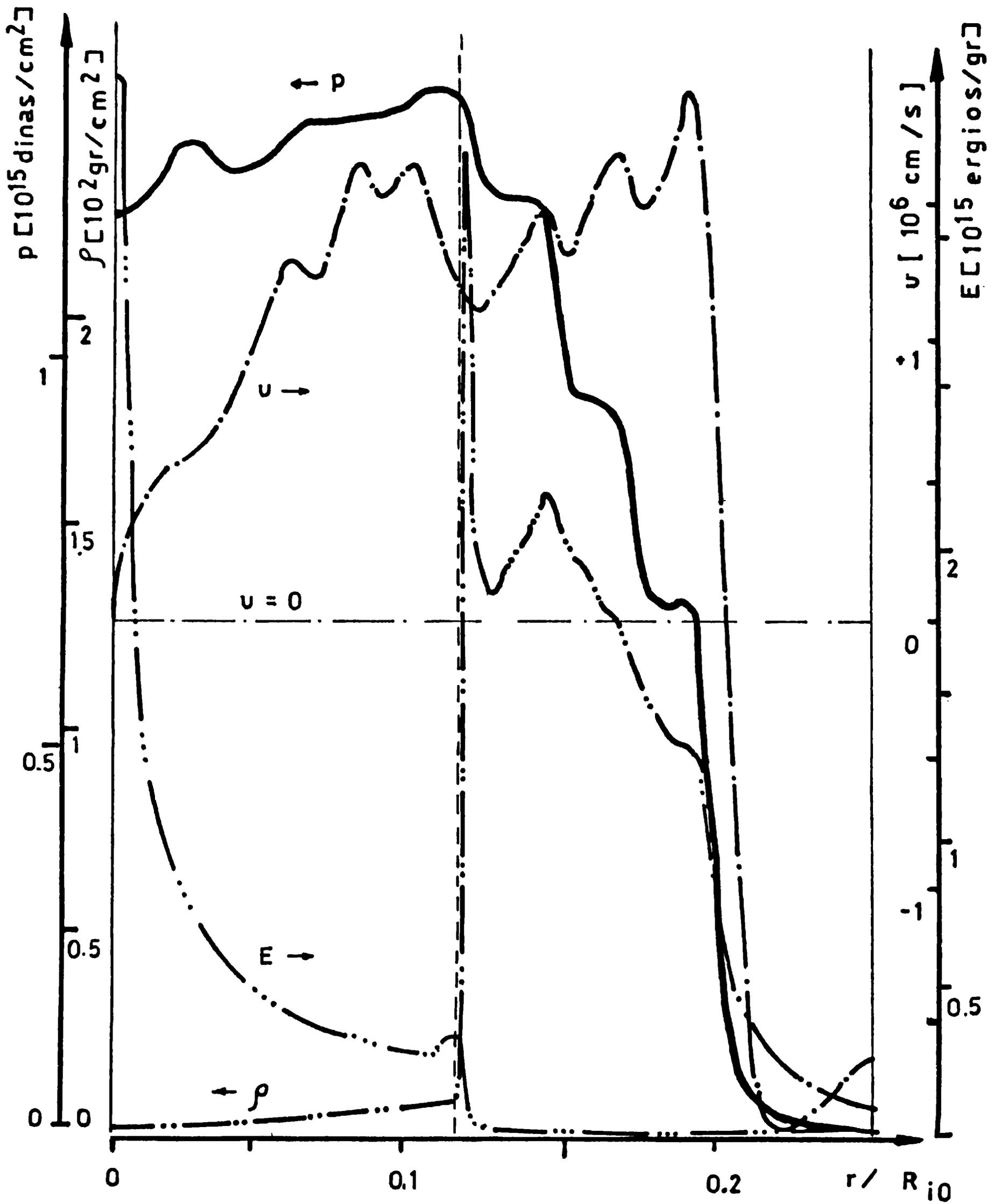


Fig. 6.23. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.90 \cdot 10^{-7}$ s. ($t > t_f$).

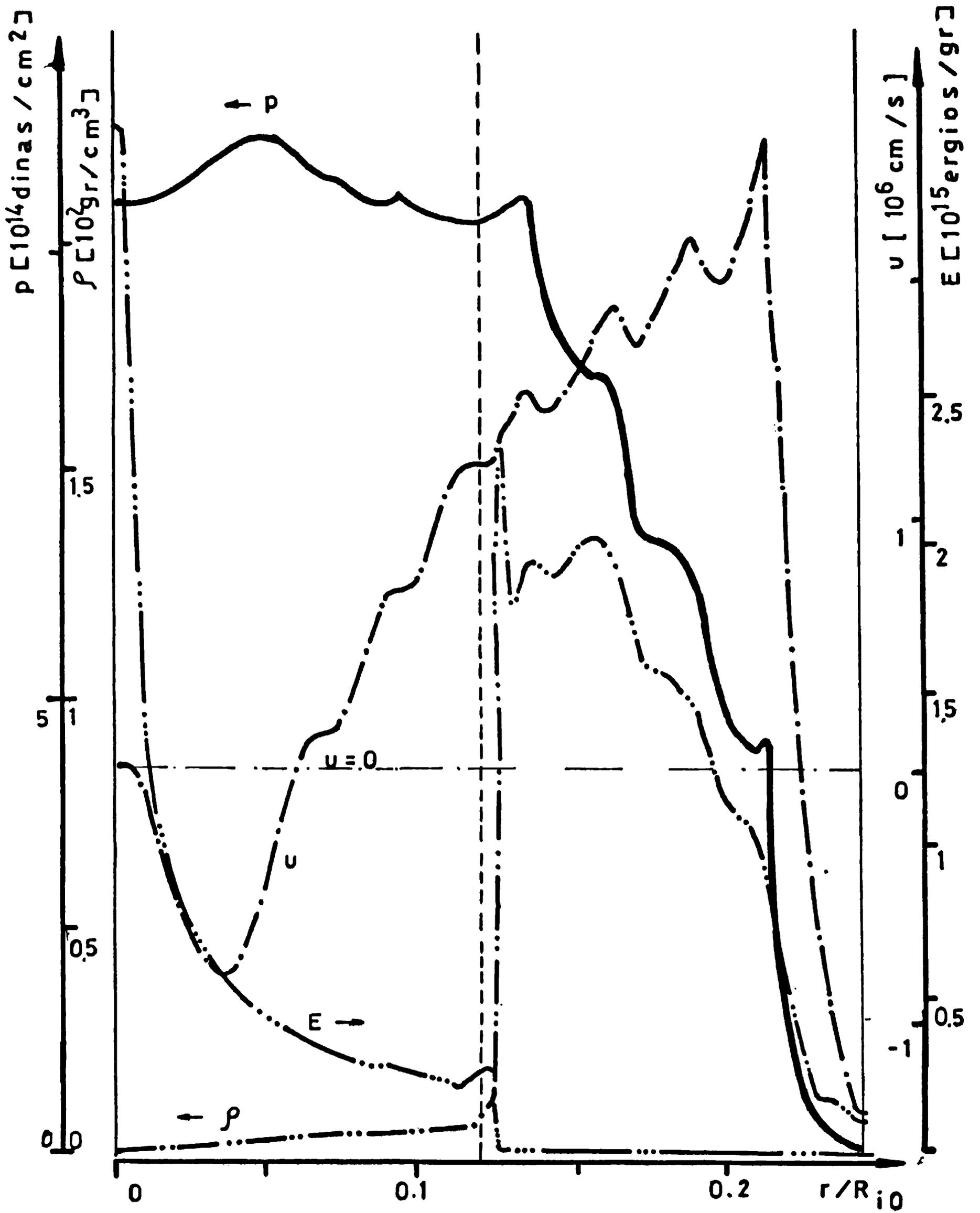


Fig. 6.24. Distribuciones para $A = 10$ en $t = 2.94 \cdot 10^{-7}$ s. ($t > t_f$).

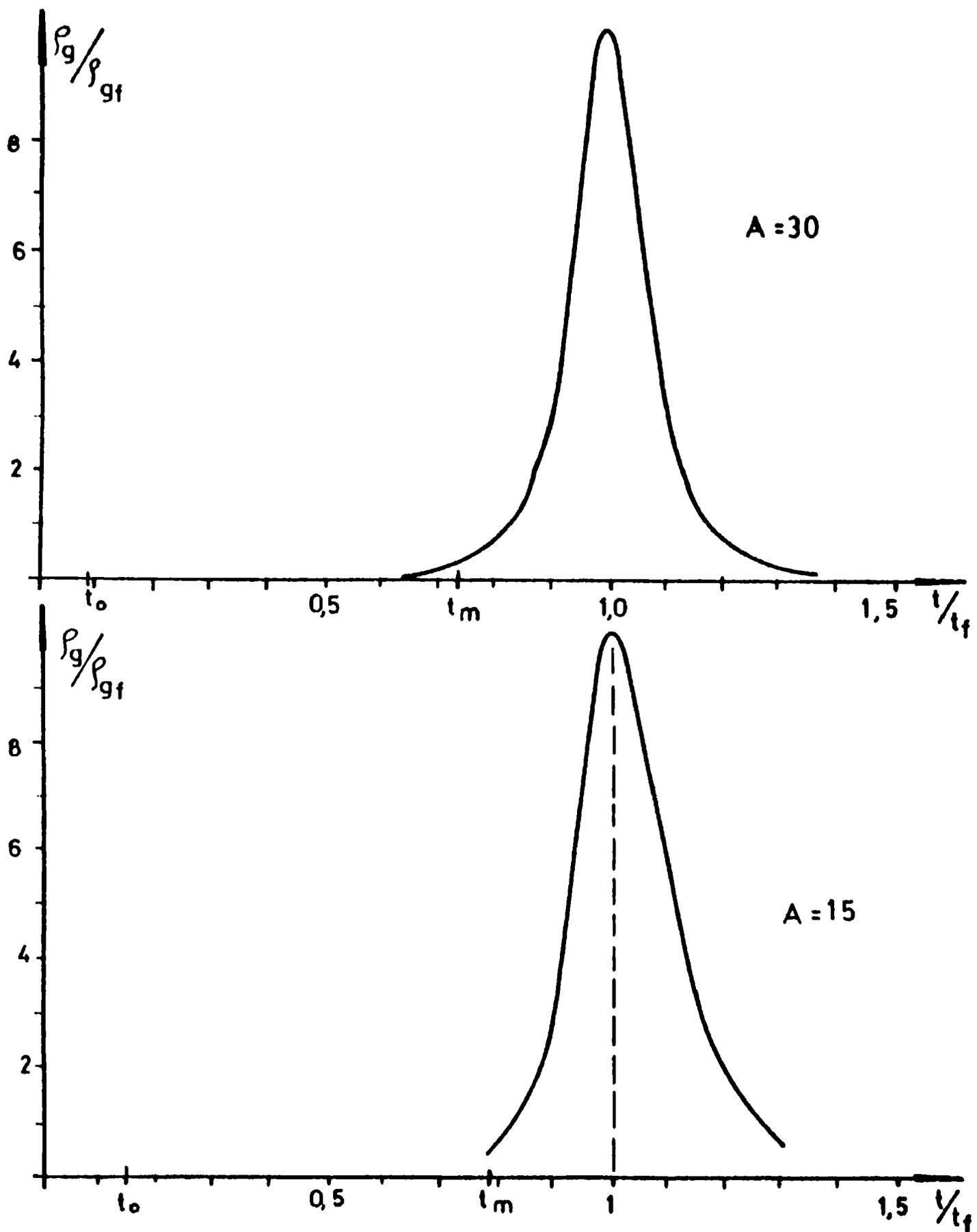


Fig. 6.25. Evolución temporal de la densidad promedio del gas interior para relaciones de aspecto intermedias ($A = 15$ y $A = 30$). Cuando $m_{of} = m_{so}$ ($A = 30$) la descompresión del gas sigue una evolución muy similar a la compresión si se invierte el sentido del tiempo. Si $m_{of} < m_s$ ($A = 15$) aparece una leve asimetría entre la compresión y la descompresión.

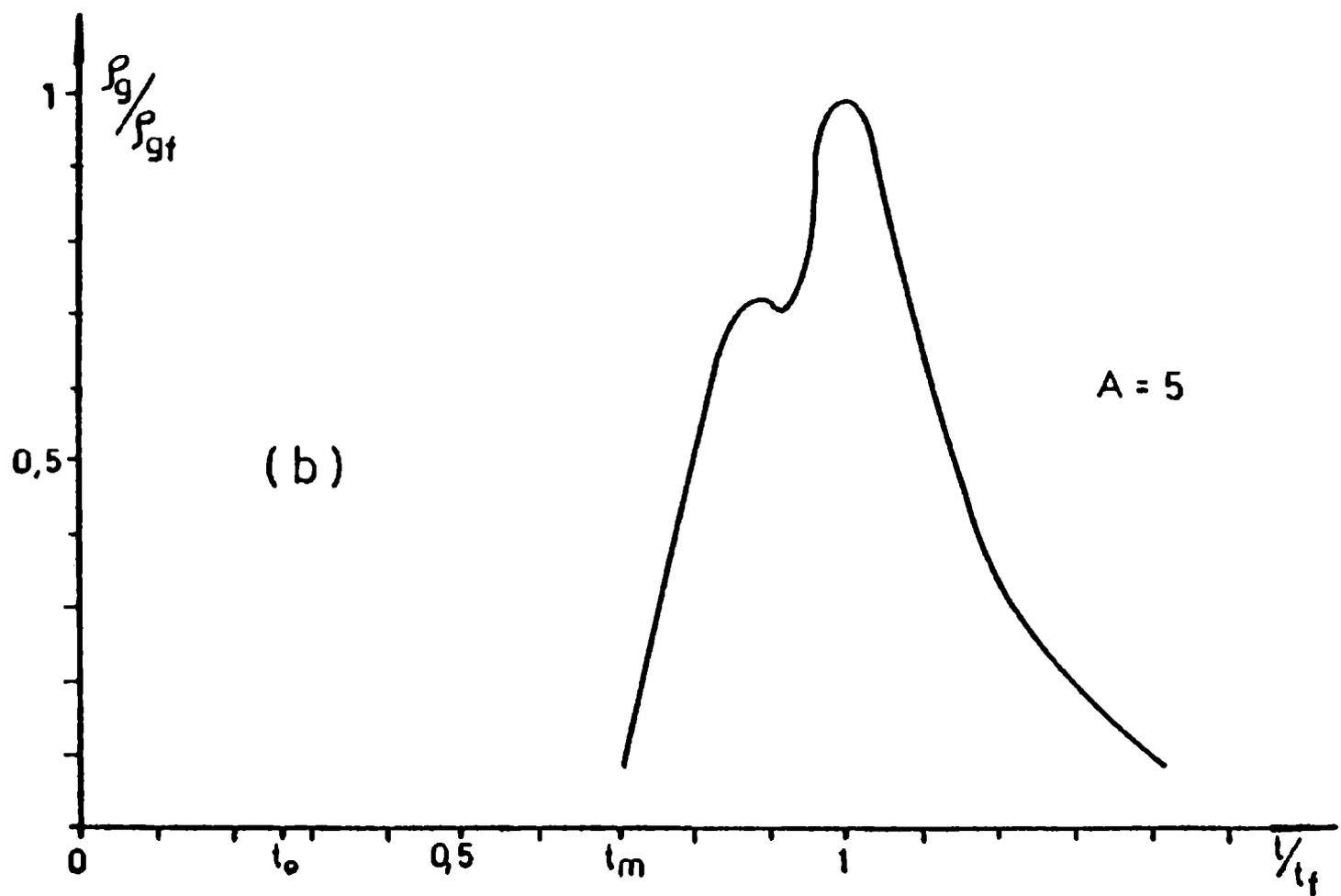
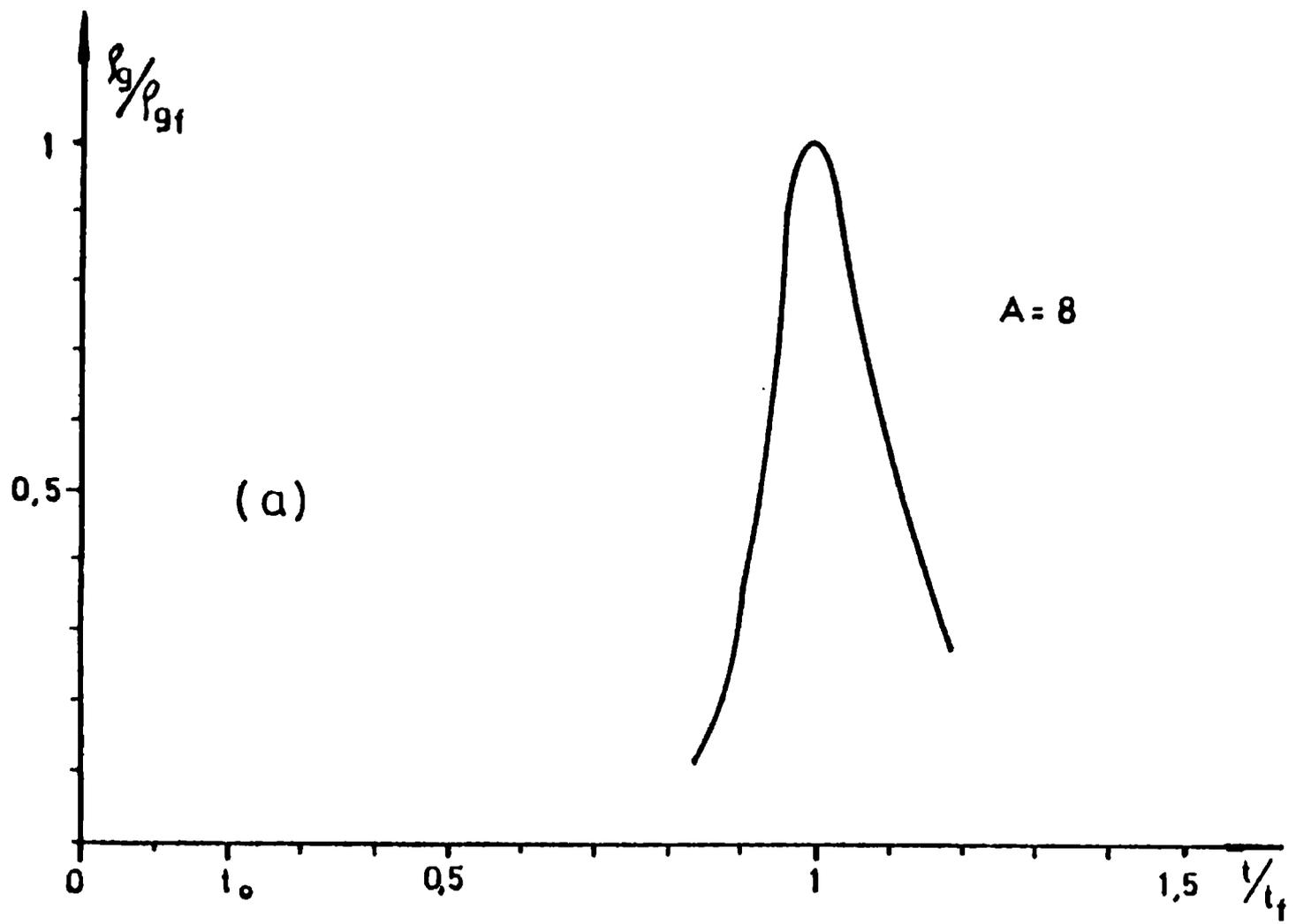


Fig. 6.26. Evolución temporal de la densidad promedio del gas interior para relaciones de aspecto pequeñas. ($A = 8$ y $A = 5$).

Puesto que para $t > t_m$, $p_g \propto \rho_g^\gamma$, la presión p_g tiene un comportamiento análogo a ρ_g , aunque sus variaciones son más abruptas (recuérdese que se emplea $\gamma_g = 5/3$). Puede notarse que para $A = 30$ ($m_{of} = m_s$) la evolución de $\rho_g(t)$ es prácticamente simétrica alrededor de $t = t_f$. Cuando la relación de aspecto es 15, la compresión tiene un comportamiento muy parecido al observado para $A = 30$. La descompresión, en cambio, es ligeramente más lenta respecto del caso $A = 30$. Si se disminuye la relación de aspecto por debajo de $A = 15$, la forma de $\rho_g(t)$ sólo cambia levemente hasta $A \approx 8$. Para fases exteriores de mayor espesor, la forma de $\rho(t)$ se modifica en forma importante. A medida que disminuye la relación de aspecto por debajo de $A \approx 8$, comienza a manifestarse un máximo relativo de $\rho_g(t)$ anterior al máximo absoluto. Cuando la relación de aspecto es $A = 5$, este máximo relativo aparece claramente determinado (ver parte b de la Fig. 6.26).

En la Fig. 6.27 se muestra $\rho_g(t)$ para $A = 3$ y $A = 4$, con las mismas escalas para ambas curvas, pero con una corrección de origen en el eje temporal. La onda de choque inicial, que parte en $t = 0$ desde R_{e0} , llega en el instante t_1 a la interfase interna, ubicada en $r = R_{i0}$. El tiempo de tránsito t_1 depende del espesor de cáscara, esto es, de la relación de aspecto. Por lo tanto, para comparar las evoluciones de los sistemas con $A = 3$ y $A = 4$, se toma en cuenta la diferencia entre los valores de t_1 : los instantes $t = t_1$ en ambas implosiones deben coincidir en la abscisa.

Puede observarse que los valores $t_f^* - t_1$ en las implosiones con $A = 3$ y $A = 4$ prácticamente coinciden. Lo mismo ocurre con la densidad máxima alcanzada, ρ_{gf}^* . Además de este máximo principal, para estas relaciones de aspecto aparece un segundo máximo relativo, posterior al máximo principal. Cabe destacar que las densidades ρ_{gf} en estos máximos secundarios tienen una posición muy particular en el gráfico ρ_{gf} versus A (Fig. 6.15): se ubican aproximadamente sobre la extrapolación lineal para $A < 5$ de los resultados obtenidos con $A > 5$. En consecuencia, el máximo principal de ρ_g para $A = 5$, y los máximos secundarios para $A = 3$ y $A = 4$ corresponden al mismo régimen, el estudiado en el modelo.

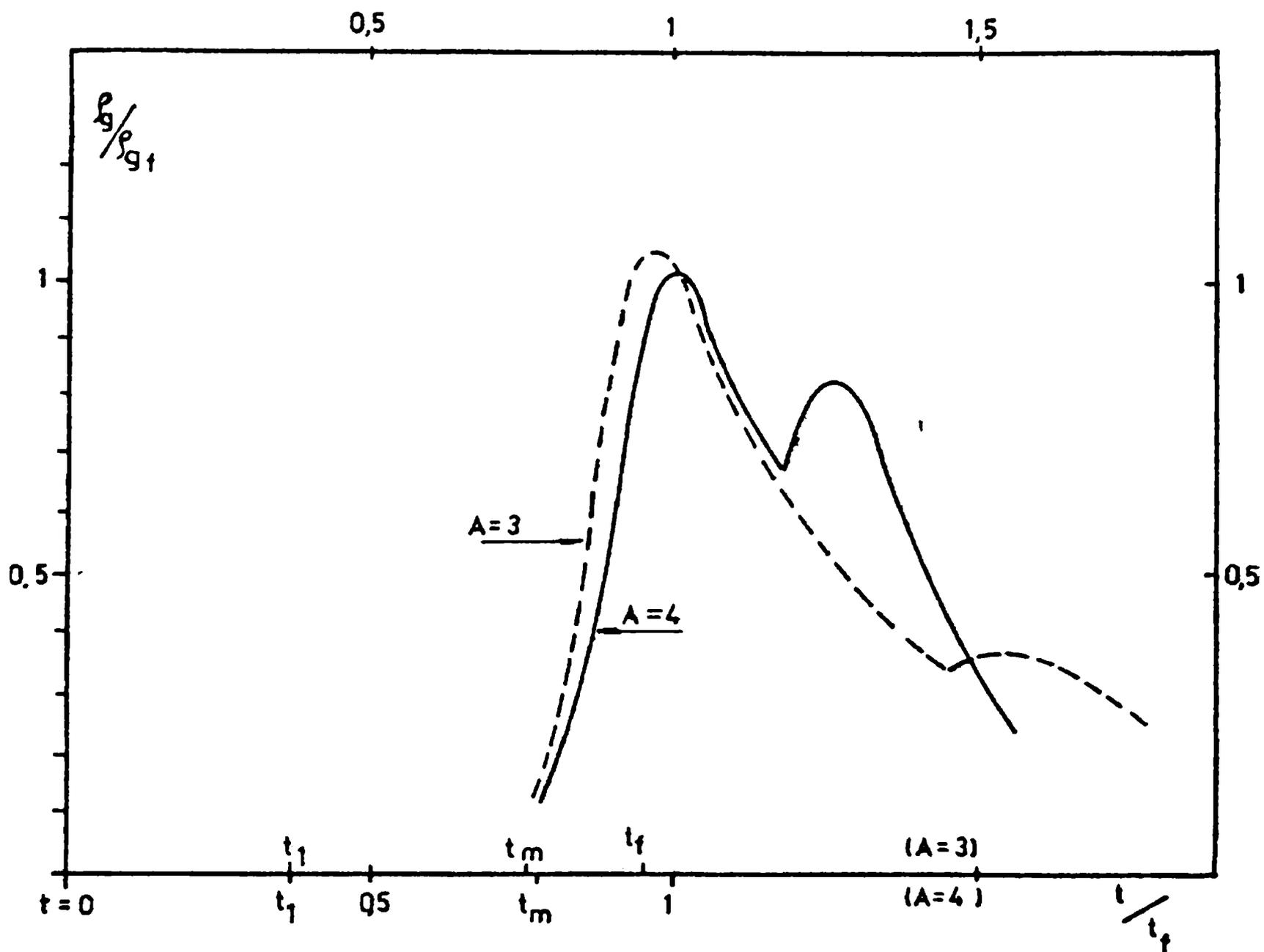


Fig. 6.27. Evolución temporal de la densidad promedio del gas. Los valores en la ordenada y en la abscisa se expresan en función de la densidad máxima ρ_{gf} y el tiempo de máxima compresión t_f para $A = 4$. Las mismas escalas son utilizadas para la evolución de la densidad cuando $A = 3$, pero se hace coincidir el tiempo t_1 de ambas implosiones.

La característica distintiva de dicho régimen es que los valores máximos de p_g , ρ_g y el tiempo en el cual este máximo se alcanza dependen en forma importante de la relación de aspecto. Por el contrario, el máximo secundario de ρ_g para $A = 5$, y los máximos absolutos para $A = 3$ y $A = 4$, corresponden a otro régimen que es competitivo con el anterior para estas relaciones de aspecto. Este régimen no está incluido en el desarrollo analítico, y es tal que p_{gf} , ρ_{gf} y $t_f - t_1$ no dependen fuertemente de A . Se lo denominará "régimen para relaciones de aspecto pequeñas".

En resumen, los resultados sugieren la existencia de tres regímenes en la etapa de estancamiento. Con los datos empleados en este trabajo, para $A \geq 25$, se tiene que $m_{of} = m_s$; para $5 \leq A \leq 25$, $m_{of} < m_s$, y para $A < 5$, se tiene el régimen para relaciones de aspecto pequeñas. Nótese que en este último aparecen dos máximos, mientras que cuando predomina el régimen estudiado en el modelo ($A > 8$), normalmente existe sólo un máximo.

En la Fig 6.28 se han representado cualitativamente varios perfiles instantáneos de presión, análogos a los proporcionados por las simulaciones. La existencia de dos máximos en las implosiones puede entenderse de la siguiente manera. La Fig. 6.28a corresponde a $t = t_1$. La fase externa tiene, aproximadamente, la misma presión y velocidad centrípeta. La Fig. 6.28b representa el perfil en $t = t_m$, instante en el cual, por definición, $p_g = P_a$. La onda de rarefacción en la fase externa todavía no ha alcanzado el contorno exterior, ubicado en $R_o(t)$. Cuando se obtiene la máxima compresión del gas interior (ver Fig. 6.28c), la onda de compresión, generada cuando la onda de rarefacción llega a R_o , aún no afectó la parte de la fase externa detenida. Posteriormente (no se ha representado), la onda de compresión centrípeta interactúa con la onda de choque centrífuga, y se produce una nueva compresión del gas interior, que en la evolución de $\rho_g(t)$ se presenta como un máximo secundario. Nótese que todo este proceso no tiene nada que ver con los efectos de convergencia; éstos existen, pero producen correcciones de poca monta.

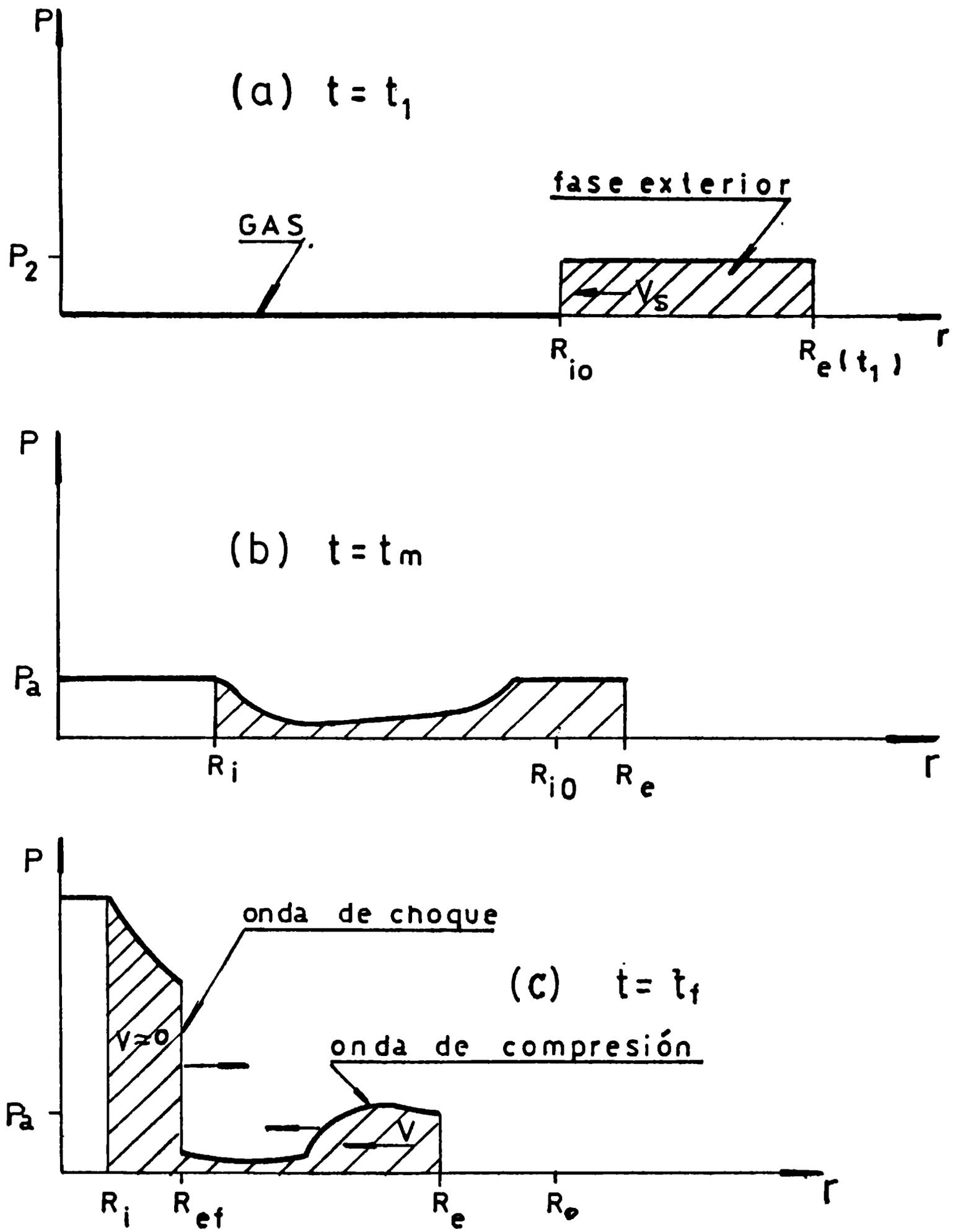


Fig. 6.28. Diagrama cualitativo de las distribuciones de presión, para cáscaras gruesas ($A < 5$), en distintos tiempos de la implosión.

Lo señalado en esta Sección, además de lo discutido respecto del comportamiento de v_{of} , revela cómo se genera el régimen para relaciones de aspecto pequeñas. La principal diferencia entre relaciones de aspecto disímiles en $t = t_1$ radica en que la fase exterior se extiende hasta un radio $R_e(t_1)$ distinto, a igualdad de radios internos R_{i0} . En estas condiciones, si la fase externa tiene un espesor suficientemente grande, puede ocurrir que las capas de esta fase cercanas a la interfase compriman el gas interior sin recibir información de las capas externas, que se aceleran por la aplicación de la presión P_a . En este caso se tendría, a R_{i0} fijo, el mismo tiempo de implosión $t_f - t_1$ y mismo estado del gas en $t = t_f$ para distintas relaciones de aspecto. La velocidad v_m alcanzada en $t = t_m$ por la parte de la fase externa que contiene la masa efectiva, sería del orden de la velocidad \dot{R}_{i1} de expansión de la interfase en $t = t_1$. Como se ha visto, la descripción antedicha concuerda con la evolución del fenómeno encontrado en las simulaciones numéricas. Además, la velocidad v_m para $A = 3$ y $A = 4$, como se notó en la Sección 6.2.1, vale aproximadamente \dot{R}_{i1} .

Para el régimen de relaciones de aspecto pequeñas, se puede emplear una aproximación aún mejor que la mencionada para la velocidad v_m . En efecto, cuanto menor es la relación de aspecto, mayor es el espesor de la cáscara. Por lo tanto, la onda de choque inicial es modificada en mayor medida por la convergencia esférica. Las capas de la fase exterior cercanas a la interfase tienen, en $t = t_1$, una presión y velocidad algo mayor que las externas, y puede emplearse el método C.C.W. para calcularlo (véase Ec. (2.1)). Es de prever entonces, que a medida que disminuya A aumenten ligeramente p_{gf} y ρ_{gf} , disminuyendo en concordancia $t_f - t_1$. Esta tendencia se nota claramente en la Fig. 6.27.

En la Fig. 6.28 puede observarse que, para $A < 5$, deja de valer el tratamiento en $t = t_m$, pues la distribución de energía cinética específica no es uniforme. Pareciera relativamente sencillo elaborar un modelo analítico para el régimen de relaciones de aspecto pequeñas; sin embargo este régimen está fuera del objetivo de este trabajo.

En resumen, en esta Sección se presentan los resultados numéricos para $t > t_f$, y en particular, se analiza la evolución de la densidad promedio del gas interior. El comportamiento de los parámetros para $A < 5$ corresponde a una situación física distinta de la considerada en el tratamiento teórico, cuyo estudio requeriría la formulación de un nuevo modelo. La validez del desarrollo analítico queda bien determinada por la relación (6.2). El límite inferior para la relación de aspecto es $A \simeq 5$, y no depende de $\dot{\rho}_{go}/\rho_{so}$ si se verifica que $\rho_{go} \ll \rho_{so}$.

CAPITULO 7

RESUMEN Y CONCLUSIONES

7. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado en los Cap. 2 a 5 un modelo que describe en forma sencilla los aspectos fluidodinámicos de las implosiones de un sistema esférico de dos fases, una externa o cáscara, densa, y una interna de baja densidad o gas interior, sometido a una presión constante. La descripción cualitativa de la implosión es la siguiente.

1) Al aplicar la presión externa se genera una onda de choque fuerte que, después de atravesar la fase externa, precalienta el gas interior. Para una relación de aspecto (definida como el cociente entre el radio externo y el espesor de la cáscara) $A < A_c$, donde A_c es un valor crítico calculado en el Cap. 2, el precalentamiento es determinado fundamentalmente por esa onda de choque, mientras que para relaciones de aspecto mayores, influye también la aceleración de la cáscara. Toda la compresión posterior del gas interior es adiabática.

2) La presión externa P_a acelera la cáscara hasta que la presión en el gas interior alcanza el mismo valor que la presión externa. En ese momento, $t = t_m$, puede considerarse que la cáscara tiene una aceleración casi uniforme (y nula), lo que determina una velocidad, presión y densidad aproximadamente uniformes.

3) Si la presión externa es generada por ablación, existe una reducción de masa de la fase externa; sin embargo, la energía cinética de la parte remanente de ésta en $t = t_m$ no difiere sensiblemente del trabajo realizado por la presión externa.

4) En el instante t_f de máxima compresión, por lo general en la cáscara pueden distinguirse dos zonas, caracterizadas por aceleraciones uniformes diferentes. Una zona interna, con velocidad despreciable, es la fracción de masa, o masa efectiva m_{ef} , que efectivamente ha entregado su energía cinética para comprimirse y comprimir el gas interior. La energía interna de la masa efectiva en t_f es importante, y supera normalmente a la

energía entregada al gas. La zona externa de la cáscara resulta perturbada por la presencia del gas interior después de t_f , de modo que su energía no contribuye a la máxima compresión. Sólo modera, y muy levemente, la expansión posterior del gas. Ambas zonas están conectadas por una onda de choque que se desplaza hacia afuera.

Mediante formas integrales de las ecuaciones de conservación y una ecuación de tasa de variación de la energía, es posible determinar el estado del gas en el momento t_f de máxima compresión, es decir, la presión p_{gf} y la densidad ρ_{gf} . También se logra calcular la masa efectiva m_{ef} , el espesor Δ_{ef} de la región correspondiente a m_{ef} , ambos en t_f ; y el tiempo de confinamiento τ por intermedio del tiempo de frenado t_{ef} , entre otros parámetros importantes.

Se presentan además los resultados de simulaciones numéricas, llevadas a cabo sin considerar el fenómeno de ablación. Los parámetros calculados por el modelo teórico son comparados en forma exhaustiva con los obtenidos numéricamente. De esta confrontación surge que el modelo reproduce cualitativa y cuantitativamente los principales resultados numéricos. Dos puntos importantes del modelo quedan confirmados: no necesariamente toda la fase externa puede estar detenida en el instante de máxima compresión, y el precalentamiento del gas interior depende de la relación de aspecto.

Más precisamente, para relaciones de aspecto grandes ($A \geq 25$ con los datos aquí empleados) toda la fase exterior se encuentra detenida en $t = t_f$, mientras que para relaciones de aspecto intermedias y pequeñas, la masa efectiva m_{ef} de la parte detenida es significativamente menor que la masa total m_s . En ambos casos, el modelo provee resultados acordes con los de la simulación numérica. Su validez se extiende hasta relaciones de aspecto más pequeñas ($A \approx 5$) que las estimadas en el Cap. 5. Este límite inferior es bastante independiente de ρ_{g0}/ρ_{s0} , mientras se cumpla que $\rho_{g0} \ll \rho_{s0}$.

Para relaciones de aspecto muy pequeñas ($A < 5$), cambia el cuadro físico y el modelo deja de ser válido. En $t = t_m$ las capas interiores de la fase externa no han recibido impulso de las exteriores (aceleradas por la presión P_a) cuya velocidad es aún considerablemente menor. Por lo tanto, la compresión del gas está determinada por la velocidad inicial de las capas internas, y es mayor que la prevista por el desarrollo analítico. Coherentemente con una mayor velocidad de las capas interiores, el tiempo de implosión $t_f - t_1$ es menor que el calculado.

En este régimen, característico de relaciones de aspecto pequeñas, la convergencia del flujo sigue produciendo sólo una corrección menor, al menos para relaciones de aspecto no excesivamente pequeñas ($A > 2$). La Sección 6.2.3 resume las características cualitativas de este régimen. Aparentemente, un modelo analítico para $A < 5$ requeriría sólo una corrección en los valores de los parámetros cuando la onda de choque inicial llegó a la interfase ($t = t_1$), y un cálculo distinto en la etapa de aceleración; en cambio, el tratamiento del estancamiento podría ser análogo al realizado en el Cap. 4.

Para los datos aquí empleados, el hecho que sólo una parte $m_{of} < m_e$ de la masa de la cáscara interviene en la determinación de los parámetros de máxima compresión altera sólo levemente los resultados respecto de los que se obtendrían suponiendo que interviene la totalidad de la masa. En la Sección 6.2.2 se muestra que la dependencia de p_{gf} con m_{of} se encuentra estrechamente ligada con el número de Mach M_a máximo que alcanza la fase externa durante la implosión. Únicamente para $M_a \gg 1$ se tiene que p_{gf} resiente críticamente el valor de m_{of} . Pero números de Mach altos se obtienen en sistemas con relaciones de aspecto grandes, donde es pequeña la masa total de la fase externa. En estos casos, se encuentra numéricamente que la diferencia entre m_{of} y m_e tiende a desaparecer. Por lo tanto, el hecho de que sólo una fracción de la fase externa está detenida en $t = t_f$, que es físicamente correcto, no trae aparejado modificaciones sustanciales en el estado de máxima compresión del gas. El valor de p_{gf} puede calcularse simplemente considerando que se detuvo toda la fase externa, y el

error cometido no es importante. Sin embargo, si la presión externa tiene una cierta conformación temporal, o para sistemas de dos fases diferentes a los empleados como blancos para fusión por confinamiento inercial, este efecto podría ser relevante.

Por otra parte, los gráficos expuestos en la Sección 6.2.3 indican que la parte de la fase externa aún en movimiento en $t = t_f$ sólo modera levemente la expansión del gas interior. Esto se relaciona con la amplitud de la discontinuidad que existe en la fase externa, la cual en $t \approx t_f$ separa el fluido de la parte detenida del que continúa en movimiento. Puede deducirse fácilmente que la descompresión del gas interior no resulta fuertemente afectada por el fluido que converge si $p_{gf} \gg p_{sz}$ donde p_{sz} es la presión de la materia de la fase externa que es perturbada por la discontinuidad en $t = t_f$. Para los datos de este trabajo $p_{gf} > p_{sz}$, lo que justifica que se observe alguna asimetría no muy marcada en la evolución del estado del gas interior cuando éste se expande ($t > t_f$) respecto de cuando se comprime ($t < t_f$). Esta conclusión parece totalmente general, puesto que siempre se verifica $p_{gf} > p_{sz}$. Nótese, entonces, que toda la materia todavía en movimiento en $t = t_f$, no influye de modo relevante ni en el valor máximo de p_{gf} ni en la descompresión posterior.

Otro efecto novedoso introducido en el tratamiento analítico es la variación de la adiabática del gas en función de la relación de aspecto. De lo expuesto en la Sección 6.2.2, se deduce que la adiabática del gas tiene un rol importante en la determinación del estado del gas en el momento de su máxima compresión. Este efecto puede resumirse como sigue:

Cuando se aumenta la relación de aspecto a partir de cierto valor crítico calculado en el Cap. 2 ($A > A_c$), hay una mayor energía entregada al gas interior en $t = t_f$ por medio de un aumento de la masa efectiva m_{of} . Puesto que está involucrado también un mayor precalentamiento del gas, el incremento de energía se traduce en una mayor p_{gf} pero con una leve disminución de la densidad máxima ρ_{gf} .

Cuando está involucrada toda la fase externa ($m_{of} = m_g$, $A \geq 25$) el aumento de la entropía del gas con A produce efectos más drásticos: disminuyen tanto p_{gf} como ρ_{gf} , a pesar de que la energía entregada al gas es mayor. Por lo tanto, efectos de ablación aparte, existe una relación de aspecto en la cual la densidad máxima adquiere su más alto valor ($A = A_c$), y otra relación en la cual p_{gf} es la más alta ($A = 25$). Si bien en el diseño de los blancos para fusión por confinamiento inercial intervienen otros factores que no pueden discutirse aquí, el efecto nocivo del mayor precalentamiento relacionado con la aceleración de la cáscara para $A > A_c$ puede ser significativo y debe tenerse en cuenta.

Cabe señalar que se ha supuesto una presión exterior P_a constante. Esto se verifica con buena aproximación cuando la irradiación externa es por medio de haces de iones. Sin embargo, cuando se emplea una irradiación láser, la presión exterior tiene una cierta conformación temporal. Para ese caso, la conclusión cualitativa de este trabajo sería que, a igualdad de esa conformación temporal y sin considerar los efectos de ablación, hay una relación de aspecto para la cual el gas interior alcanza el máximo valor de ρ_{gf} . La confirmación de esta conclusión, y el análisis teórico correspondiente, se dejan para futuros trabajos.

APENDICE

- A Energía que se pierde por la ablación de masa
si P_a es generada por ese proceso. p. 114
- B Energía interna de la parte efectiva de la
fase externa. p. 117
- C Cálculo del tiempo efectivo t_{ef} de frenamiento. p. 119

APENDICE

A. Energía que se pierde por la ablación de masa si P_a es generada por este proceso.

En el Cap. 3 se señaló que, en $t \approx t_m$, una fracción importante del trabajo realizado por la presión de ablación se transformó en energía cinética de la cáscara y en energía interna del gas. Es útil calcular con algún detalle la fracción antedicha. Como primer aproximación se puede despreciar el trabajo de compresión del gas frente a la energía cinética de la cáscara. A los efectos de fijar ideas, considérese simetría plana. La ecuación de conservación del momento es la ecuación del movimiento del cohete [63,37]

$$\frac{d}{dt} \left[m v \right] - \left[v - v^* \right] \dot{m} = P_a^* \quad (\text{A.1})$$

donde $m(t)$ es la masa por unidad de área y v su velocidad; la presión P_a^* y el módulo de la velocidad v^* de los gases expulsados, son definidos en el sistema de referencia que se mueve con velocidad v (se aclara más abajo). La Ec. (A.1) puede expresarse como

$$m \dot{v} = P_a^* - \dot{m} v \quad (\text{A.2})$$

El miembro de la derecha de la Ec. (A.2) es la fuerza P_a por unidad de área que actúa sobre la masa $m(t)$. Sobre el frente de ablación el número de Mach es 1 y entonces, $v^* \dot{m} = \rho^* v^{*2} \approx P_a^*$. A grandes distancias del frente de ablación, $P_a^* \ll v^* \dot{m}$. Naturalmente, existe una relación entre dichos términos en función de la distancia al frente, dada por la conservación de la energía de los gases expulsados. En este trabajo se supone que la presión $P_a = P_a^* - v^* \dot{m}$ se mantiene aproximadamente constante durante toda la implosión.

La variación con el tiempo de la energía cinética de la masa $m(t)$ es

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \dot{v} + \frac{1}{2} \dot{m} v^2 \quad (\text{A.3})$$

Como $m \dot{v} = P_a$, $m \dot{v} v = P_a v$ y el primer término del miembro de la derecha de (A.3) es la potencia instantánea producida por la presión P_a . Integrando la Ec. (A.3) se obtiene

$$E(t) = E_c(t_0) + P_a x - \int_{m_0}^{m(t)} \frac{1}{2} v^2(m) (-dm) \quad (\text{A.4})$$

donde se ha reemplazado $\dot{m} dt$ por dm . Nótese que el término que debe sustraerse al trabajo de la fuerza de empuje es la integral de la energía cinética que poseía cada elemento de la masa expulsada en el momento de su expulsión. Este resultado es totalmente general.

Para hallar la integral de la Ec. (A.4), se debe tener la expresión de la velocidad v en función de la masa $m(t)$. Se asume que, en primera aproximación, \dot{m} es constante, y por lo tanto, $m(t) = m_0 - |\dot{m}|t$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de movimiento, Ec. (A.2), e integrando, se obtiene

$$v = \frac{P_a}{\dot{m}} \ln \left[1 - \frac{m_{exp}}{m_0} \right] + v_0 \quad (\text{A.5})$$

donde $m_{exp} = |\dot{m}| t$ es la masa expulsada por unidad de área.

Suponiendo $m_{exp}/m_0 \ll 1$, se puede aproximar el miembro de la derecha de la Ec. (A.5) por el primer término del desarrollo en serie del logaritmo. Si además $v_0 \approx 0$, la Ec. (A.4) puede expresarse

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2 \approx W_a - \frac{1}{6} m_{exp} v^2 \quad (\text{A.6})$$

donde $W_a = P_a \times$ Luego, la energía cinética por unidad de masa en el instante t es

$$\frac{v^2}{2} \approx \frac{W_a}{\frac{1}{3} m_0 + \frac{2}{3} m(t)} \quad (A.7)$$

Por lo tanto, si se aplicara la misma presión P_a sin ablación a una masa $1/3 m_0 + 2/3 m(t)$ se obtendría la misma energía cinética específica dada por la Ec. (A.7).

Otra expresión útil que puede obtenerse de (A.6) es

$$\frac{1}{2} m v^2 \approx W_a \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{m}{m_0} \right] \quad (A.8)$$

Entonces, para facilitar los cálculos cuando hay ablación de masa, puede suponerse que se aprovecha una fracción $(2/3 + 1/3 m/m_0)$ del trabajo realizado sobre $m(t)$.

Las Ec. (A.7) y (A.8) indican que la mayor parte de la masa ablada se pierde en los instantes iniciales, cuando la masa $m(t)$ tiene escasa energía cinética.

En resumen, por intermedio de (A.7) se calcula la energía cinética por unidad de masa en el instante t cuando se tiene simetría plana. Si la simetría es esférica, se tiene que considerar además la convergencia del flujo. Para los casos tratados en este trabajo, la corrección debida a la ablación de masa debe tenerse en cuenta fundamentalmente para relaciones de aspecto grandes, donde los efectos de convergencia no modifican en forma relevante el movimiento de la cáscara en la etapa de aceleración. Cuando se tratan cáscaras relativamente gruesas, la fracción de masa que se pierde por ablación es más pequeña comparada con la masa total, como se muestra a continuación.

El tiempo T de implosión y la masa que se consumió por la ablación pueden estimarse mediante las expresiones $T = \left[m_{so} / (2 \pi R_{so} P_a) \right]^{1/2}$ y $\dot{m} T$, respectivamente, donde m_{so} es la masa total. La fracción de masa ablada $\dot{m} T / m_{so}$ es entonces $\dot{m} (2 \pi R_{so} P_a m_{so})^{-1/2}$ y si $m_{so} \approx 4 \pi \rho_{so} R_{so}^2 \Delta_o$, $\dot{m} T / m_{so}$ es proporcional a $A^{1/2} = (R_{so} / \Delta_o)^{1/2}$. Esta proporcionalidad también se verifica en las simulaciones numéricas de la Ref. [32], que incluyen el proceso de ablación. Se desprende entonces que cuanto mayor es el espesor de la cáscara, tanto menor es la fracción de material perdido en el instante de máxima energía cinética.

Por lo tanto, la estimación del trabajo efectuado sobre la masa que queda después de la ablación se puede realizar en simetría plana, es decir, mediante la Ec. (A.8).

B. Energía interna de la parte efectiva de la fase externa.

En el Cap. 4 se consideró que la energía interna de la masa efectiva puede aproximarse por la Ec. (4.2). Esta ecuación puede obtenerse del siguiente modo. La energía de la m_{ef} es

$$E_{is} = 4 \pi \int_{R_i}^{R_{ef}} \frac{p_s - r^2}{\gamma - 1} dr \quad (A.9)$$

donde p_s es la distribución de presión de un fluido aproximadamente homocentrópico que sufre una aceleración uniforme. De la ecuación de conservación del momento (3.15) se halla la distribución de presión [el cálculo es análogo al realizado para llegar a la Ec. (3.16)]

$$p_s = p_g \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{p_{s2}}{p_g} \right)^{(\gamma_s - 1)/\gamma_s} \right] \frac{r - R_i}{\Delta_{ef}} \right\}^{\gamma_s / (\gamma_s - 1)} \quad (A.10)$$

Reemplazando la Ec. (A.10) en la Ec. (A.9), se obtiene una expresión que tiene cierta analogía matemática con la Ec. (4.18) ($\gamma = 5/3$),

$$E_{is} = \frac{4\pi}{3} p_g R_i^3 \frac{\rho}{7} \left[b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \right] \quad (A.11)$$

con

$$x = \frac{\Delta_{ef}}{R_i \left[1 - \left(p_{s2}/p_g \right)^{2/5} \right]} \quad (A.12)$$

$$b_1 = 1 - \left(p_{s2}/p_g \right)^{7/5} \quad (A.13)$$

$$b_2 = \frac{4}{9} - 2 \left(\frac{p_{s2}}{p_g} \right)^{7/5} + \frac{14}{9} \left(\frac{p_{s2}}{p_g} \right)^{9/5} \quad (A.14)$$

$$b_3 = \frac{8}{99} - \left(\frac{p_{s2}}{p_g} \right)^{7/5} + \frac{14}{9} \left(\frac{p_{s2}}{p_g} \right)^{9/5} - \frac{7}{11} \left(\frac{p_{s2}}{p_g} \right)^{11/5} \quad (A.15)$$

La Ec. (A.11), empleando la expresión de m_{ef} , Ec. (4.18), puede expresarse como

$$E_{is} = \frac{15}{14} \frac{P_a}{4 \rho_{s0}} \left(\frac{p_g}{P_a} \right)^{2/5} m_{ef} F \left(\frac{\Delta_{ef}}{R_i}, \frac{p_{s2}}{p_g} \right) \quad (A.16)$$

La función F es muy próxima a 1 para las relaciones de aspecto que se usan en este trabajo. Esto expresa el hecho que, en un fluido sometido a una aceleración uniforme, la energía interna por unidad de masa es aproximadamente constante. La energía por unidad de volumen, $p / (\gamma - 1)$ decrece en las zonas de menor presión, pero la misma cantidad de materia ocupa un volumen mayor. Estos dos efectos se compensan, de forma tal que se comete un error realmente pequeño si se toma $F = 1$. De esta manera, la Ec. (A.16) se transforma en la Ec. (4.2), que es la empleada en la etapa de estancamiento.

C. Cálculo del tiempo efectivo t_{of} de frenamiento.

En el Cap. 4 se estimó el tiempo efectivo de frenamiento t_{of} y se adelantó el resultado de su cálculo cuando se considera el perfil de presión en $t = t_f$ y la simetría esférica. Ahora se desarrolla en detalle el estudio correspondiente.

Las ecuaciones que vinculan los diferentes parámetros en $t = t_f$ son, naturalmente, las ecuaciones de conservación. Las ecuaciones de conservación de la masa, Ec. (3.20), y del momento, Ec. (3.15), pueden combinarse para dar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_s r^2 v \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_s v^2 r^2 \right] + r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Se integra la Ec. (A.17) entre R_i y un radio R arbitrario, con $R \leq R_{of}$

$$\int_{R_i}^R \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_s r^2 v \right] dr + \rho_s v^2 r^2 \Big|_{r=R} - \rho_s v^2 r^2 \Big|_{r=R_i} + \int_{R_i}^R r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} dr = 0 \quad (\text{A.18})$$

Recordando las reglas de derivación de integrales, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{R_i}^R \rho_s r^2 v dr &= \\ &= \rho_s r^2 v \Big|_{r=R} \frac{dR}{dt} - \rho_s r^2 v \Big|_{r=R_i} \frac{dR_i}{dt} + \int_{R_i}^R \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_s r^2 v \right] dr \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Comparando la Ec. (A.19) con (A.18), ésta última puede expresarse como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{R_i(t)}^{R(t)} 4 \pi \rho_s r^2 v dr = - \int_{R_i}^R 4 \pi r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} dr \quad (\text{A.20})$$

donde se ha agregado un factor 4π a ambos lados de la igualdad.

Se integra ahora la Ec. (A.20) en el tiempo desde $t = t_m$ hasta un tiempo t próximo al tiempo final t_f ,

$$\begin{aligned} \int_{R_i(t)}^{R(t)} 4 \pi \rho_s r^2 v dr - \int_{R_i(t_m)}^{R(t_m)} 4 \pi \rho_s r^2 v dr &= \\ &= - \int_{t_m}^t \int_{R_i(t)}^{R(t)} 4 \pi r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} dr dt \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

El primer término del miembro de la izquierda es la cantidad de movimiento, contenida dentro de los límites de la integral, en los instantes próximos al estancamiento de la cáscara. Este término puede despreciarse frente al segundo, que es la cantidad de movimiento en el instante de máxima energía cinética.

Además, los gradientes de presión serán mayores en instantes próximos a t_f . En consecuencia, puede despreciarse en el miembro de la derecha de la Ec. (A.21) la contribución del integrando desde t_m hasta $t_f - t_{ef}$, donde t_{ef} es un tiempo efectivo promedio. Este t_{ef} se define como el tiempo en el cual la presión del gas y el gradiente de presión en la parte detenida de la fase externa se mantienen aproximadamente constantes (véase Fig. A.1). Con estas consideraciones, la Ec. (A.21) toma la forma

$$\int_{R_i(t_m)}^{R(t_m)} 4 \pi \rho_s r^2 v dr \approx t_{ef} \int_{R_i(t)}^{R(t)} 4 \pi r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} dr \quad (\text{A.22})$$

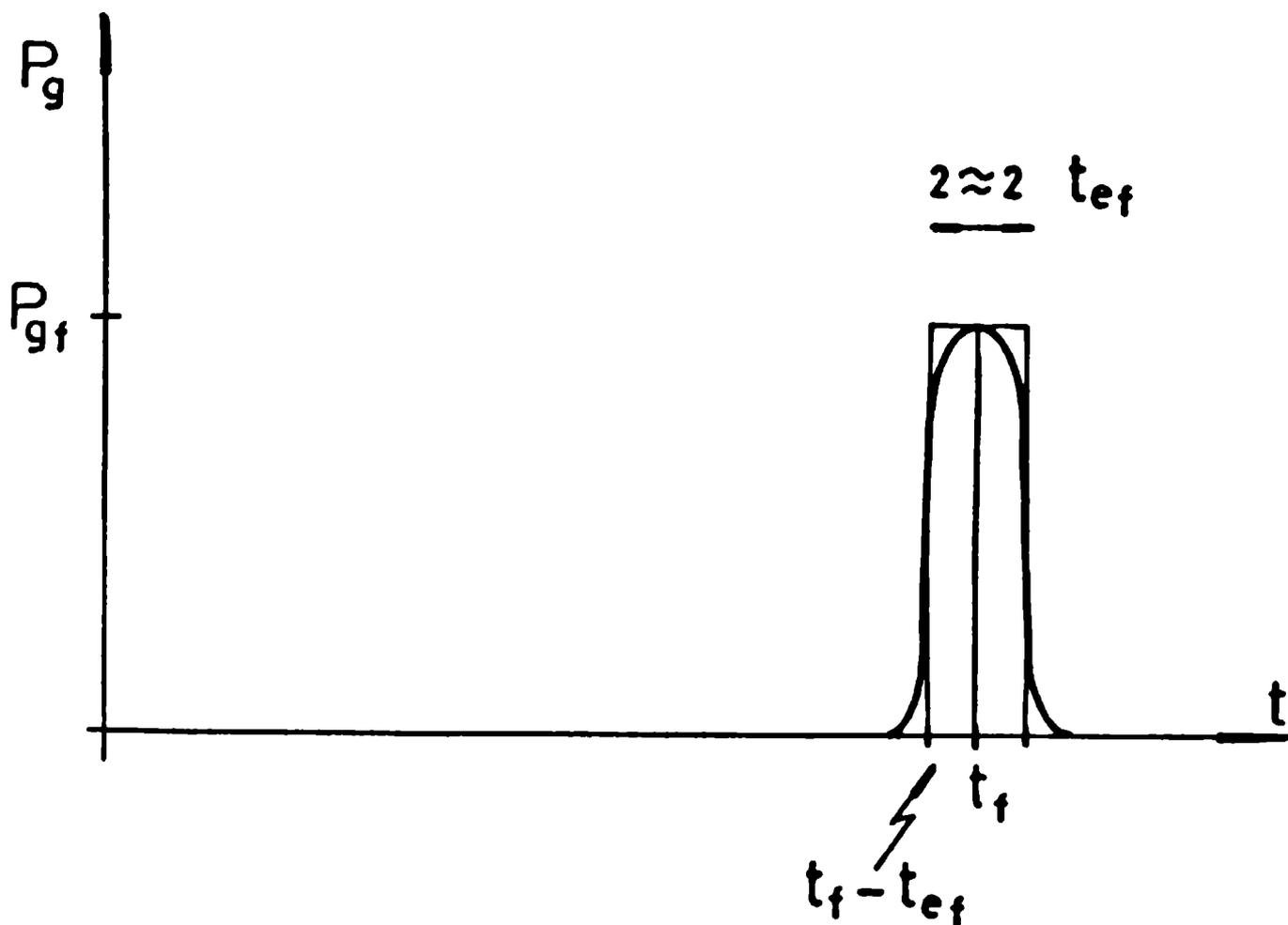


Fig A.1. Evolución esquemática de la presión del gas interior en función del tiempo. Dado el rápido incremento de p_g hasta los valores finales, el tiempo efectivo de frenado t_{ef} queda bien definido.

Sea v_m el módulo de la velocidad media en el instante de máxima energía cinética. La Ec. (A.22) puede aproximarse por

$$-v_m \int_{R_i(t_m)}^{R(t_m)} 4 \pi \rho r^2 dr \approx t \int_{R_i(t)}^{R(t)} 4 \pi r^2 \frac{\partial p}{\partial r} dr \quad (\text{A.23})$$

Se define $R(t)$ por intermedio de la masa contenida desde $R_i(t)$ hasta $R(t)$, de modo que para diferentes tiempos,

$$\int_{R_i(t_m)}^{R(t_m)} 4 \pi \rho_s r^2 dr = \int_{R_i(t)}^{R(t)} 4 \pi \rho_s r^2 dr \quad (\text{A.24})$$

Reemplazando la Ec. (A.24) en la Ec. (A.23), se tiene

$$\int_{R_i}^R 4 \pi r^2 \left[\rho_s + \frac{t_{ef}}{v_m} \frac{\partial p_s}{\partial r} \right] dr = 0 \quad (\text{A.25})$$

Se considera ahora que esta integral es cero para cualquier R, con $R \leq R_{ef}$. Por lo tanto, debe cumplirse

$$\frac{\partial p_s}{\partial r} + \frac{v_m}{t_{ef}} \rho_s = 0 \quad (\text{A.26})$$

Se asume que después de que la onda de choque inicial atravesó la cáscara, el material de la misma evoluciona adiabáticamente, es decir,

$$\rho_s = \rho_a \left(P_s / P_a \right)^{1/\gamma} \quad (\text{A.27})$$

donde $\rho_a = 4 \rho_{s0}$ y P_a son la densidad y presión dadas por las Ec. (3.17) y (3.18), respectivamente. Las Ec. (A.27) y (A.26) conjuntamente con la distribución de presión, Ec. (A.10), permiten obtener el espesor Δ_{ef}

$$\Delta_{ef} = \frac{5}{2} \frac{P_a t_{ef}}{4 \rho_{s0} v_m} \left(\frac{P_g}{P_a} \right)^{2/5} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_g} \right)^{2/5} \right] \quad (\text{A.28})$$

De la Ec. (A.28) puede despejarse t_{ef} y se halla la Ec. (4.26), que ya se adelantó en el Cap. 4.

REFERENCIAS

- [1] J. Nuckolls, L. Wood, A. Thiessen, G. Zimmerman. *Nature* 239, 139 (1972).
- [2] K. Brueckner, S. Jorna. *Rev. of Mod. Phys.* 46, 325 (1974).
- [3] G. H. McCall. *Plasma Phys.* 25, 237 (1983).
- [4] P. Mulser. *Plasma Phys. and Cont. Fusion* 28(1A), 203 (1986).
- [5] S. Atzeni. *Rep. Int. ENEA RT/FUS/87/9* (1987).
- [6] Yu. Afanas'ev, N. Basov, P. Volosevich, E. Gamalii, O. Krokhin, S. Kurdyumov, E. Levanov, V. Rozanov, A. Samarskii, A. Tikhonov. *JETP Lett.* 21, 68 (1975).
- [7] M. Sweeney, M. Widner. *Nucl. Fusion* 18, 429 (1978).
- [8] S. Bodner. *Present Status and Future Prospects for Direct Drive Laser Fusion*, International Symposium on Heavy Ion Inertial Fusion, AIP Conference Proceedings 152, American Institute of Physics, 561 (1986).
- [9] J. P. VanDevender. *Present Status and Future Prospects for Light Ion as Drivers for Inertial Fusion.*, International Symposium on Heavy Ion Inertial Fusion, AIP Conference Proceedings 152, American Institute of Physics, 569 (1986).
- [10] T. F. Godlove. *Present Status and Future Prospects for Heavy Ion Beams as Drivers for ICF*, International Symposium on Heavy Ion Inertial Fusion, AIP Conference Proceedings 152, American Institute of Physics, 579 (1986).
- [11] G. Fraley, R. Mason. *Phys. Rev. Lett.* 35, 528 (1975).
- [12] D. Juraszek, D. Billon, M. Bernard, J. Bocher, M. Decroisette, J. Garconnet, J. Le Breton, D. Meynial, Ph. Schneider. *J. Appl. Phys.* 62, 3595 (1987).
- [13] Y. Sakawa, K. Tanaka, H. Nishimura, M. Nakai, T. Yabe, H. Sakurai, Y. Izawa, Y. Kato, T. Mochizuki, M. Nakatsuka, C. Yamanaka. *Phys. Fluids* 30, 3276 (1987).
- [14] C. Yamanaka, S. Nakai, T. Yamanaka, Y. Izawa, Y. Kato, K. Nishihara, K. Mima, T. Mochizuki, M. Yamanaka, M. Nakatsuka, K. Yoshida, Y. Kitagawa, T. Yabe, S. Ido, H. Azechi, H. Nishimura, M. Miyanaga, H. Niki, H. Takabe, T. Norimatsu, S. Sakabe, M. Nakai, K. Okada, H. Shiraga, Y. Kishimoto, A. Nishiguchi, T. Jitsuno. *IAEA Report CN-41/F-1* (1987).
- [15] C. Yamanaka, S. Nakai, T. Yabe, H. Nishimura. *Phys. Rev. Lett.* 56, 1575 (1986).

- [16] C. Yamanaka, S. Nakai. *Nature* 319, 757 (1986).
- [17] B. Ahlborn, J. Kwan, A. Ng., A. Barnard. *Phys. Fluids* 27, 2586 (1984).
- [18] J. Gardner, S. Bodner. *Phys. Fluids* 29, 2672 (1980).
- [19] R. Kidder. *Nucl. Fusion* 14, 53 (1974).
- [20] N. Tahir, K. Long. *Nucl. Fusion* 23, 887 (1983).
- [21] K. Long, N. Tahir. *Phys. Rev. A* 35, 2631 (1987).
- [22] K. Long, N. Tahir. *Phys. Fluids* 29, 4204 (1986).
- [23] N. Basov, Y. Zakharenkov, N. Zorev, A. Kologrivov, O. Krokhin, A. Rupasov, G. Sklizkov, A. Shikanov. *Sov. Phys. JETP* 44, 938 (1976).
- [24] S. Sakabe, T. Mochizuki, C. Yamanaka. *Japan Jour. of Applied Phys.* 23, 460 (1984).
- [25] C. Max, J. Lindl, W. Mead. *Nucl. Fusion* 23, 131 (1983).
- [26] A. Bell, D. Nicholas, W. Toner. *J. Phys D Applied Phys.* 19, 1869 (1986).
- [27] J. Grun, M. Emery, C. Manka, T. Lee, E. McLean, A. Mostovich, J. Stamper, S. Bodner, S. Obeschain, R. Ripin. *Phys. Rev. Lett.* 58, 2672 (1987).
- [28] R. Craxton, R. McCrory, J. Soures. *Sci. Am.*, Agosto 1986, 70.
- [29] D. Lowy, H. Kreuzer. *Jour. Plasma Phys.* 23, 357 (1980).
- [30] R. Schmalz, J. Meyer-ter-Vehn. *Phys. Fluids* 28, 932 (1985).
- [31] B. Ahlborn, M. Key. *Plasma Phys.* 23, 435 (1981).
- [32] B. Ahlborn, M. Key, A. Bell. *Phys. Fluids* 25, 541 (1982).
- [33] N. Basov et. al. *Sov. Phys. JETP* 51, 212 (1980).
- [34] A. Caruso. *Nuovo Cim.* 67B, 173 (1982).
- [35] R. Gerwin, R. Malone. *Nucl. Fusion* 19, 155 (1979).
- [36] R. Magelsen, W. Gula. *Phys. Fluids* 25, 898 (1982).
- [37] F. Mayer, J. Larsen, J. Steele. *Phys. Fluids* 26, 830 (1983).
- [38] M. Rosen, J. Nuckols. *Phys. Fluids* 22, 1393 (1979).
- [39] A. Piriz. *Phys. Fluids* 29, 578 (1986).
- [40] W. Manheimer, D. Colombant, J. Gardner. *Phys. Fluids* 25, 1644 (1982).
- [41] C. Bayer, M. Bernard, D. Billon, M. Decroisette, D. Galmiche, D. Juraszek, J. Launspach, D. Meynial, B. Sitt. *Nucl. Fusion* 24, 573 (1984).
- [42] W. Chester, *Phylos. Mag.* 45, 1293 (1954).
- [43] R. Chisnell. *J. Fluid Mech.* 2, 286 (1957).
- [44] R. Whitham, *J. Fluid. Mech.* 4, 333 (1958).

- [45] R. Whitham, *Linear and Non Linear Waves*, John Wiley & Sons (1974).
- [46] M. Yousaf. *J. Fluid Mech.* 66, 37 (1974).
- [47] M. Yousaf. *Phys. Fluids* 25, 45 (1982).
- [48] L. Landau, E. Lifshitz. *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley (1959).
- [49] Ya. Zel'dovich, Yu. Raizer. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press (1966).
- [50] K. Stanyukovich. *Unsteady Motion of Continuous Media*. Pergamon (1960).
- [51] J. Meyer-ter-Vehn. Report M.P.Q. 103, Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching, F.G.R. (1985).
- [52] Ja. M. Kazhdan. *J. Comp. Phys.* 5, 540 (1970).
- [53] H. Matsuo. *Phys. Fluids* 22, 1618 (1979).
- [54] H. Matsuo, Y. Makamura. *J. Appl. Phys.* 52, 4503 (1981).
- [55] H. Matsuo, *Phys. Fluids* 26, 1755 (1983).
- [56] L. Thomas, V. Pais, R. Gratton, J. Diez. *Phys. Fluids* 29, 676 (1986).
- [57] D. S. Butler. Report 54/54 Armament Research Establishment, U. K. (1954).
- [58] J. Diez, L. Thomas. En prensa en *The Physics of Fluids*.
- [59] G. Guderley. *Luftfahrtforschung* 19, 302 (1942).
- [60] K. Brushlinskii, Ja. Kazhdan. *Russ. Math. Surveys* 18, 1 (1963).
- [61] R. Lazarus, R. Richtmyer. Report LA-6823-MS, Los Alamos Scientific Laboratory, U. S. (1977).
- [62] R. Lazarus. *SIAM J. Numer. Anal.* 18, 316 (1981).
- [63] K. R. Symon, *Mechanics*, Addison-Wesley (1953).
- [64] R. Cooper, *AIAA Journal* 11, 831 (1973).
- [65] D. Book, P. Turchi. *Phys. Fluids* 22, 68 (1979).
- [66] L. Sedov. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Academic, N. Y. (1959).
- [67] L. Thomas. Tesis de Licenciatura, *Estudio Numerico de Ondas de Choque*, Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Bs. As. (1983).
- [68] R. Richtmyer, K. Norton. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. 2da. Ed., J. Wiley & Sons (1967).

- [69] J. Von Neumann, R. Richtmyer. Jour. Appl. Phys. 21, 232 (1950).
- [70] I. Camerum. J. Comp. Phys. 1, 20 (1966).
- [71] J. Diez, L. Thomas, V. Pais. *Mecanica Computacional*, Vol. 1, Eudeba, 268 (1985). Aceptado para una edición en Computational Mechanics Publications, Southampton, U. K.

Luis Thomas

