

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Tesis Doctoral

SUPERSIMETRÍA Y  
ECUACIONES  
DIFERENCIALES  
DE ORDEN SUPERIOR

DANIEL G. BARCI

DIRECTOR: Dr. CARLOS G. BOLLINI

SETIEMBRE 1991

*a mis viejos*

*a Silvia*

*a Diana*

*a Daniel*

## Agradecimientos

Son muchas las personas que a lo largo de estos últimos años, influyeron, de una forma u otra, en el resultado final de mi trabajo, cuyo resumen es la presente tesis. Es por esto que deseo expresar mi gratitud hacia todo el personal del Departamento de Física de la U.N.L.P., con el cual he compartido la mayor parte de mi tiempo desde 1983, en que comencé mis estudios de Licenciatura.

Quisiera expresar el más profundo agradecimiento a mi "*maestro*", el Dr. Carlos G. Bollini, con el cual aprendí mucho más que física y matemáticas.

No quiero dejar de nombrar al Dr. Hector Vucetich (el Pipi), quien se tomó gentilmente el trabajo de leer minuciosamente los trabajos originales que componen esta tesis, y una versión muy preliminar de la misma. Sus observaciones sirvieron, como siempre, para enriquecer tanto el trabajo como mi persona.

Otra persona a la cual le debo mi agradecimiento, es el Dr. Luis Epele, ya que gracias a él se me facilitó enormemente el ingreso a esta facultad, allá por el '83. Luego siempre estuvo dispuesto a escucharme, ya sea por problemas de física, o personales.

Buena parte de las ideas que aquí se desarrollan, fueron discutidas "acaloradamente", con mis compañeros de trabajo, Mario Roca y Luis Oxman (Lucho), a quienes también deseo expresarles mi agradecimiento.

Un capítulo aparte es la gente que, durante todo este tiempo, me ha brindado alegrías, ánimo y fuerzas, lo que me permitió disfrutar la carrera, como así también vencer las dificultades que se presentaron.

Entre estas personas están: Diana E. Tuyarot, sin la cual, ésto no tendría sentido; mi amigo Daniel A. Stariolo, con el que comprendí algo sobre los

espacios vacíos, sobre el duende del vino, y sobre los conjuros universales contra los jugadores de bolita.

Quiero expresar también, lo importante que fue para mí, la presencia de la “Banda Oriental”: Ramon Mendez Galain, Jorge Griego y Gabriel Gonzales Sprinberg.

Aquí dudo en continuar, ya que de hacerlo, esta sección sería más larga que la propia tesis.

Daniel.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Procedimientos Lagrangianos</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Supersimetría en Dimensión Superior</b>	<b>12</b>
3.1	Spinors en $d = 4$ . . . . .	13
3.2	El grupo de Supersimetría. Supercampos Quirales . . . . .	14
3.3	Spinors en $d = 6$ . . . . .	17
3.4	Extensión del Modelo de Wess-Zumino a $d > 4$ . . . . .	20
<b>4</b>	<b>El Modelo de Wess-Zumino para un Supercampo Quiral en Dimensión Superior</b>	<b>23</b>
4.1	Corriente Spinorial Conservada . . . . .	25
4.2	Transformadas de Fourier . . . . .	28
4.3	Carga Fermiónica . . . . .	31
4.4	Vector Energía-Impulso. Hamiltoniano . . . . .	32
4.5	El Modelo de Wess-Zumino en $d = 6$ . . . . .	35
4.6	Cuantificación . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Un Modelo Simplificado para el Campo Escalar</b>	<b>43</b>
5.1	Ecuación Generalizada de Klein-Gordon . . . . .	43
5.2	Hamiltoniano . . . . .	44
5.3	Espectro y autofunciones . . . . .	46
5.4	Valores de Expectación de Vacío de Producto de Operadores de Campo . . . . .	51

<b>6</b>	<b>Propagadores</b>	<b>54</b>
6.1	Taquiones . . . . .	54
6.2	Propagador de la Ecuación de Cuarto Orden . . . . .	57
6.3	Propagadores del Modelo de Wess-Zumino en $d = 6$ . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Unitariedad</b>	<b>61</b>
7.1	Unitariedad Perturbativa . . . . .	61
7.2	Unitariedad en $\lambda\varphi^3$ . . . . .	63
7.3	Algunas Convoluciones . . . . .	68
7.3.1	“ $\delta$ ” * “ $\delta$ ” . . . . .	70
7.3.2	“ $\delta$ ” * $F$ . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Renormalización</b>	<b>78</b>
8.1	Divergencias a un Loop . . . . .	78
8.2	Divergencia Superficial . . . . .	82
8.3	Renormalización del Modelo de Wess-Zumino . . . . .	84
<b>9</b>	<b>Discusión y Conclusiones</b>	<b>89</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La idea de usar ecuaciones diferenciales de orden superior a dos para describir sistemas físicos es bastante antigua, por ejemplo el tratamiento Lagrangiano ya se encuentra en el libro de Courant-Hilbert [1].

Sin embargo el estudio de estas ecuaciones ha sido considerado hasta hace poco tiempo como puramente académico, debido a que la mayoría de los sistemas físicos mas importantes estaban bien descriptos por Lagrangianos que contienen solo la derivada primera en los campos, o bien se los puede transformar de esa manera mediante el agregado de una divergencia.

Es claro también, que no todos los problemas han sido resueltos con ecuaciones de orden dos. En particular la teoría de la gravitación se resiste a ser cuantificada consistentemente. Es bien conocido que si se aplican las reglas usuales de teoría de perturbaciones a la acción gravitacional normal, aparecen divergencias que son proporcionales al cuadrado, o potencias mayores de la curvatura, o sea que son términos que no se encuentran en el Lagrangiano original. Evidentemente esto hace que la teoría sea no renormalizable, o en otras palabras que será necesario agregar al Lagrangiano original infinitos contratérminos con constantes a ser determinadas experimentalmente. Obviamente una teoría de este tipo no tiene ningún poder de predicción. Utiyama y De Witt [2] fueron los primeros en proponer una alternativa, en la cual se introduce un término proporcional al cuadrado de la curvatura, obteniendo de esta manera una teoría renormalizable, aunque se paga el precio de tratar con ecuaciones diferenciales de cuarto orden.

Existen muchas otras teorías donde estas ecuaciones aparecen, por ejemplo, versiones aproximadas de teorías no locales; estas han sido estudiadas

con cierto detalle en las referencias [3] y [4].

Por otro lado, el tema de las ecuaciones diferenciales de orden superior esta creciendo en interés desde el advenimiento de la supersimetría y las teorías de cuerdas. Por ejemplo, en el límite de bajas energías de supercuerdas aparecen teorías de Yang-Mills con términos que contienen derivadas de orden superior.[5]

Una posible extensión de supersimetría a espacios de dimensión superior a cuatro, exige que el orden de la ecuación de movimiento de los campos esté ligada al número de dimensiones del espacio tiempo, de tal forma que para  $d > 4$  la ecuación diferencial que obedecen los campos es de orden mayor que dos.[6] [7]

Sin embargo este tipo de teorías tienen una muy mala reputación: se dice que sufren problemas de “fantasmas” (ghosts) y pérdida de unitariedad, aunque según escribe S.W.Hawking en [8] “Mucha gente no entiende realmente que quieren decir esas palabras, o por qué la teoría debería comportarse de esa manera”.

A esta mala reputación le podemos agregar los problemas de pérdida de la cota inferior en el espectro de energía, métrica indefinida en el espacio de Fock, etc. Se necesitan más motivos para descartar una teoría?

Sin embargo, teniendo en cuenta estos problemas pero observando también las dificultades que se presentan al no tomarlas en cuenta (no renormalizabilidad, etc.), creemos que es conveniente hacer un esfuerzo por comprenderlas más en detalle, tratando de resolver, en lo posible, los problemas que se presenten.

Es por esto que esta tesis esta dedicada al estudio de un tipo particular de estas teorías . Estudiaremos la cuantificación de campos que obedecen ecuaciones diferenciales de orden superior, las cuales provienen de una extensión natural de supersimetría a espacios de dimensión superior.

La motivación general obedece quizás a dos creencias bastante arraigadas entre los físicos. En primer lugar se cree que si existe una teoría de campos que unifique las interacciones conocidas entre partículas elementales, esta teoría debería ser invariante frente al grupo de supersimetría. La segunda creencia es que el espacio-tiempo tiene en general más de cuatro dimensiones. Esto tiene su origen en las teorías de Kaluza-Klein [9] con un espacio de cinco dimensiones, y fue evolucionando de distintas formas hasta llegar a la teoría de supercuerdas, formulada en diez dimensiones.

Independientemente del modelo, la forma de extender supersimetría a es-



pacios de dimensión superior no es única, y la extensión que aquí presentamos parece ser la más natural y hasta donde sabemos, nunca ha sido investigada en profundidad dado que tiene el “defecto” de conducir a ecuaciones diferenciales de orden superior.

En el primer capítulo damos una breve reseña de los procedimientos lagrangianos para tratar ecuaciones diferenciales de orden superior. En el segundo y tercero desarrollamos una extensión de supersimetría a espacios de dimensión superior y analizamos un modelo en particular. En el cuarto capítulo mostramos la cuantificación de un modelo simplificado para el campo escalar. Luego, en el capítulo cinco, calculamos los propagadores, tanto del modelo simplificado como del supersimétrico. En el sexto verificamos la unitariedad de la teoría y mostramos algunas técnicas de cálculo, y en el séptimo tratamos algunos aspectos de la renormalización del modelo. Por último discutimos los resultados obtenidos.

## Capítulo 2

# Procedimientos Lagrangianos

En este capítulo vamos a describir el formalismo canónico para tratar ecuaciones diferenciales de orden superior, comenzando por un Lagrangiano y deduciendo a partir de éste los tensores canónicos. Construiremos el tensor energía-impulso en algunos ejemplos y mostraremos como aparecen los problemas ligados a los grados de libertad extra que contiene la teoría con respecto a una de segundo orden. Seguiremos esencialmente el trabajo de la referencia [10]. El formalismo hamiltoniano puede encontrarse en la referencia [11].

Por simplicidad solo consideraremos campos escalares. Comenzaremos entonces con un Lagrangiano función de un campo escalar  $\phi(x)$  y sus  $m$  primeras derivadas, en un espacio  $n$ -dimensional.

$$L = L(\phi, \partial\phi, \dots, \partial^m \phi) \quad (2.1)$$

El principio de mínima acción nos permite escribir

$$A = \int dx^n L \quad (2.2)$$

$$\delta A = \int dx^n \delta L = 0 \quad (2.3)$$

En esta variación se considera al campo y sus  $m$  primeras derivadas como variables independientes, y  $\delta\phi = \delta\partial^m\phi = 0$  sobre el borde de integración (superficie  $n - 1$  dimensional).

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \phi} \delta \partial_{\mu_1} \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_1} \phi} \delta (\partial_{\mu_2} \partial_{\mu_1} \phi) + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_m} \dots \partial_{\mu_1} \phi} \delta (\partial_{\mu_m} \dots \partial_{\mu_1} \phi) \quad (2.4)$$

Reemplazando (2.4) en (2.3), e integrando por partes, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_{\mu_1} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \phi} + \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi} - \dots (-1)^m \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi} = 0 \quad (2.5)$$

De forma similar podemos deducir el teorema de *Nöether*

$$\delta L = \partial_{\mu_1} \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \phi} - \partial_{\mu_2} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi} + \dots \right) \delta \phi + \right.$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi} - \partial_{\mu_3} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \phi} + \dots \right) \delta \partial_{\mu_2} \phi +$$

$$\left. \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \phi} - \partial_{\mu_4} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \partial_{\mu_4} \phi} + \dots \right) \delta \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \phi + \dots \right\} \quad (2.6)$$

Podemos construir ahora el tensor energía-impulso  $T^{\mu\nu}$  considerando traslaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon^\mu \\ \delta L &= \partial_\mu L \epsilon^\mu \\ \delta \phi &= \partial_\mu \phi \epsilon^\mu \\ \delta \partial_\alpha \phi &= \partial_\mu \partial_\alpha \phi \epsilon^\mu \\ &\vdots \\ &etc \end{aligned} \quad (2.7)$$

reemplazando (2.7) en (2.6) obtenemos

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = 0 \quad (2.8)$$

con

$$T^{\mu\nu} = \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \phi} - \partial_{\mu_1} \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \partial_{\mu_1} \phi} + \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi} - \dots \right) \partial^\mu \phi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \partial_{\mu_1} \phi} - \partial_{\mu_2} \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi} + \dots \right) \partial_{\mu_1} \partial^\mu \phi + \\
& + \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi} - \dots \right) \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial^\mu \phi + \dots \\
& - \eta^{\nu\mu} L
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Este tensor no es necesariamente simétrico, pero puede ser simetrizado siguiendo el procedimiento de Belinfante [12]. De todas formas como los términos que rompen la simetría son divergencias, el vector energía-impulso total esta bien definido por (2.9).

$$P^\mu = \int d^n x T^{0\mu} \tag{2.10}$$

Si  $\phi$  es complejo y el Lagrangiano es invariante de fase, podemos encontrar la corriente conservada debido a esta invariancia usando (2.6) con

$$\begin{aligned}
\delta \phi &= i\epsilon \phi^* \\
\delta \phi^* &= -i\epsilon \phi \\
\delta L &= 0
\end{aligned}$$

Para este caso obtenemos

$$\begin{aligned}
J^\mu &= i\epsilon \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} - \partial_{\mu_1} \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \partial_{\mu_1} \phi} + \dots \right) \phi + \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \partial_{\mu_1} \phi} - \partial_{\mu_2} \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi} + \dots \right) \partial_{\mu_1} \phi + \dots - c.c. \right\}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Simplemente como ejemplo consideremos un campo real descrito por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \phi (\square + m_1^2)(\square + m_2^2) \phi \tag{2.12}$$

con

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad , \quad \eta^{\mu\nu} = (+, -, \dots, -) \tag{2.13}$$

Las ecuaciones de Euler serán

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= \alpha \square \phi + \beta \phi \\
\frac{\partial L}{\partial \square \phi} &= \square \phi + \alpha \phi
\end{aligned} \tag{2.14}$$

con

$$\alpha = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) \quad , \quad \beta = m_1 m_2$$

sumando ambos términos

$$(\square + m_1^2)(\square + m_2^2)\phi = 0 \quad (2.15)$$

Usando ahora (2.9) obtenemos para el tensor energía-impulso

$$T^{\mu\nu} = (\square\phi + \alpha\phi)\partial^\mu\partial^\nu\phi - (\partial^\mu\square\phi + \alpha\partial^\mu\phi)\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}L \quad (2.16)$$

y la densidad Hamiltoniana

$$H = (\square\phi + \alpha\phi)\ddot{\phi} - (\square\dot{\phi} + \alpha\dot{\phi})\dot{\phi} - L \quad (2.17)$$

Tomando la transformada de Fourier de  $\phi$  :

$$\phi(x) = \int dk e^{-ikx} \tilde{\phi}(k) \quad ; \quad \tilde{\phi}^*(k) = \tilde{\phi}(-k) \quad (2.18)$$

y usando (2.15) obtenemos

$$(-k^2 + m_1^2)(-k^2 + m_2^2)\tilde{\phi}(k) = 0$$

Lo que significa que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(k) &= \phi_1(k)\delta(k^2 - m_1^2) + \phi_2(k)\delta(k^2 - m_2^2) \\ &= \phi_1(k)\delta(k_0^2 - \omega_1^2) + \phi_2(k)\delta(k_0^2 - \omega_2^2) \\ &= \phi_1(k)\frac{\delta(k_0 + \omega_1) + \delta(k_0 - \omega_1)}{2\omega_1} + \phi_2(k)\frac{\delta(k_0 + \omega_2) + \delta(k_0 - \omega_2)}{2\omega_2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

con  $\omega_1 = \sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2}$  ,  $\omega_2 = \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2}$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \phi(x) = \int dk e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad & \left( \phi_1(\vec{k})\frac{e^{-i\omega_1 t}}{2\omega_1} + \phi_1^*(-\vec{k})\frac{e^{i\omega_1 t}}{2\omega_1} + \right. \\ & \left. \phi_2(\vec{k})\frac{e^{-i\omega_2 t}}{2\omega_2} + \phi_2^*(-\vec{k})\frac{e^{i\omega_2 t}}{2\omega_2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

si reemplazamos (2.20) en (2.17) e integramos sobre las variables espaciales obtenemos el Hamiltoniano total :

$$H = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \int d\vec{k} (\phi_1^* \phi_1 - \phi_2^* \phi_2) \quad (2.21)$$

Aquí queda clara una característica general de las teorías que contienen derivadas de orden superior. En principio vemos que en este caso tenemos más grados de libertad que en la teoría de Klein-Gordon, éstos quedan evidenciados por la presencia de los campos  $\phi_2(\vec{k})$ , y lo que es más importante, estos nuevos grados de libertad contribuyen a la energía con distinto signo que los anteriores.

La cuantificación puede ser llevada a cabo a través de (2.21) imponiendo las ecuaciones de movimiento de Heisenberg:

$$[H, \phi(x)] = -i\dot{\phi}(x) \quad (2.22)$$

La teoría también puede ser cuantificada mediante el formalismo de la integral funcional, esta descripción se puede encontrar en las referencias [8], [11], donde se analiza la versión Lagrangiana y Hamiltoniana respectivamente.

La ecuación (2.22) implica, para el espacio de los impulsos, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} [H, \phi_1(\vec{k})] &= -\omega_1(\vec{k})\phi_1(\vec{k}) \\ [H, \phi_2(\vec{k})] &= -\omega_2(\vec{k})\phi_2(\vec{k}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

reemplazando ahora (2.21) en (2.23) obtenemos:

$$\begin{aligned} [\phi_1(\vec{k}), \phi_1^*(\vec{k}')] &= \frac{2\omega_1}{m_1^2 - m_2^2} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\phi_2(\vec{k}), \phi_2^*(\vec{k}')] &= -\frac{2\omega_2}{m_1^2 - m_2^2} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (2.24)$$

si tomamos  $m_1^2 > m_2^2$  podemos redefinir los campos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de tal forma que:

$$\sqrt{\frac{m_1^2 - m_2^2}{2\omega_i}} \phi_i \longrightarrow \phi_i$$

obteniendo entonces

$$\begin{aligned} H &= \int d\vec{k} (\omega_1 \phi_1^* \phi_1 - \omega_2 \phi_2^* \phi_2) \\ [\phi_1(\vec{k}), \phi_1^*(\vec{k}')] &= \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\phi_2(\vec{k}), \phi_2^*(\vec{k}')] &= -\delta(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (2.25)$$

Se ve claramente que el signo  $(-)$  en las reglas de conmutación para  $\phi_2$ , hace que el espacio de Hilbert de los estados, tenga un métrica indefinida. Esta situación se podría evitar considerando al campo  $\phi_2$  como un operador de creación de partícula, pero en este caso  $\phi_2$  crearía cuantos de energía negativa, como queda evidenciado en (2.23)

## Capítulo 3

# Supersimetría en Dimensión Superior

Mencionamos en la introducción, que el interés en las ecuaciones diferenciales de orden superior está creciendo desde el advenimiento de las teorías supersimétricas y en particular de la extensión de éstas a espacios de dimensión superior.

En general, cuando extendemos teorías de campos a un número arbitrario de dimensiones, la parte cinética de la ecuación de evolución se mantiene a segundo orden en las derivadas (ecuación de Klein-Gordon). Esta no es la única manera de hacer la generalización. En este trabajo lo haremos de una manera que resulta muy natural cuando uno extiende directamente la supersimetría a espacios de dimensión superior, en la cual el orden de la ecuación de movimiento depende del número de dimensiones del espacio-tiempo.

Antes de analizar en detalle un modelo en particular, es conveniente tener presente las propiedades y las leyes de transformación de los spinors en dimensión superior. En este capítulo describiremos las propiedades más importantes de éstos. Comenzaremos recordando las propiedades de los spinors en cuatro dimensiones y haciendo una síntesis del grupo de supersimetría.



### 3.1 Spinors en $d = 4$

Cuando efectuamos una transformación de Lorentz (propia), las componentes superiores e inferiores de un spinor de Dirac se transforman independientemente sin mezclarse entre si. La matriz de transformación se reduce entonces a dos matrices de  $2 \times 2$  donde una es la conjugada de la otra. El spinor de Dirac se puede escribir entonces como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

con  $\alpha = 1, 2$   $\dot{\alpha} = 1, 2$  donde  $\psi_\alpha$  se transforma con una matriz de  $2 \times 2$  y  $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$  se transforma con la matriz conjugada ( el "." indica esa propiedad).

A  $\psi_\alpha$  lo llamamos spinor de Weyl de primera especie y a  $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$  lo llamamos spinor de Weyl de segunda especie.

Una propiedad importante es que el conjugado de un spinor de primera especie es un spinor de segunda especie y viceversa.

Podemos demostrar fácilmente que  $\epsilon^{\alpha\beta}$  (tensor de Levi-Civita) es un bispinor invariante, lo que nos permite definir el producto escalar de spinores de Weyl como

$$\psi \cdot \phi = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\alpha \phi_\beta \quad (3.1)$$

o definiendo

$$\begin{aligned} \phi^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta} \phi_\beta \\ \psi \cdot \phi &= \psi_\alpha \phi^\alpha \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para el spinor adjunto usamos

$$[\phi^\alpha]^\dagger = \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} \quad (3.3)$$

de donde deducimos fácilmente que

$$\bar{\psi} \cdot \bar{\phi} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\phi}_{\dot{\alpha}} \quad (3.4)$$

se debe tener cuidado con la posición de los índices en (3.2) y (3.4) ya que

$$\psi \cdot \phi = \psi_\alpha \phi^\alpha = -\psi^\alpha \phi_\alpha = \phi_\alpha \psi^\alpha = \phi \cdot \psi$$

el producto escalar es simétrico en ambos factores pues los spinores obedecen reglas de anticonmutación.

Un detalle a observar, es que tenemos definido el producto escalar entre spinores de Weyl de la misma especie.

## 3.2 El grupo de Supersimetría. Supercampos Quirales

Entre las leyes de la naturaleza parece existir un conjunto de simetrías, las cuales se utilizan como guías para la construcción de las teorías correspondientes. Estas simetrías dan origen a grupos de transformaciones que dejan invariante la acción del sistema al cual se aplican.

Un ejemplo es el grupo de Poincaré, otro ejemplo son los grupos de simetrías internas como el grupo de isospin ( $SU(2)$ ) o el grupo de transformaciones de fase ( $U(1)$ ), el cual es guía para la construcción del electromagnetismo, etc.

En 1967 se conoció el teorema de Coleman y Mandula [13], en el cual mostraban que el álgebra de los generadores del grupo de simetría más general posible, que contuviera a las traslaciones y rotaciones solo podía ser el producto directo del álgebra de Poincaré por el álgebra correspondiente a las simetrías internas. En otras palabras que ambos grupos no se mezclan. Esto pareció poner punto final al problema de hacer una teoría relativista que contuviera en un solo grupo de simetría, las diferentes interacciones. Luego en 1975 esta visión del problema se modificó gracias al reexamen crítico del teorema de Coleman y Mandula, realizado por R. Haag, J. Lopusansky y M. Sohnius [14]. Mientras que Coleman y Mandula consideraron las posibles álgebras de Lie donde los productos son conmutadores conteniendo los generadores  $P_\mu$  y  $J_{\mu\nu}$ , y cargas escalares, Haag Lopusanski y Sohnius admitieron la posibilidad de existencia de generadores fermiónicos  $F$ , y aceptaron también que el álgebra correspondiente debería tener con los generadores bosónicos  $B$ , la forma genérica

$$[B, B] = B \quad , \quad [B, F] = F \quad , \quad \{F, F\} = B \quad (3.5)$$

Esto constituye lo que se denomina un álgebra de Lie graduada o Superálgebra.

La diferencia fundamental entre los grupos antes citados y el grupo de Supersimetría es que, mientras los primeros poseen generadores tensoriales (grupo de Poincaré), o escalares (grupos internos), la supersimetría posee al menos un generador spinorial.

El álgebra de supersimetría simple (solo un generador spinorial) viene

dada por:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}^\alpha, \bar{Q}^\beta\} = 0 \quad (3.6)$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 \quad (3.7)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\alpha\} = \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} P_\mu \quad (3.8)$$

sin mencionar las relaciones con los generadores de impulso angular que definen el caracter spinorial de los operadores fermiónicos.

Teniendo definida el álgebra de supersimetría, podemos armar un elemento del grupo exponenciando los generadores multiplicados por un parámetro arbitrario.

Por ejemplo, el parámetro que corresponde al cuadrivector  $P_\mu$ , es un vector desplazamiento  $x_\mu$  o en notacion spinorial  $x_\alpha^{\dot{\alpha}} = \sigma_{\mu\alpha}^{\dot{\alpha}} x^\mu$ . Los parámetros correspondientes a los generadores spinoriales  $Q_\alpha$  y  $\bar{Q}^\alpha$  tendrán que ser spinores, los que denominaremos  $\theta_\alpha$  y  $\bar{\theta}^\alpha$  respectivamente. Estos parámetros son variables de Grassman, o sea que

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}^\alpha\} = \{\bar{\theta}^\alpha, \bar{\theta}^\beta\} = \{\theta^\alpha, \theta_\beta\} = 0 \quad (3.9)$$

Se deduce de las relaciones de conmutación, en particular de la (3.8), que no es posible restringirse a considerar solo las variables  $\theta_\alpha$  y  $\bar{\theta}^\alpha$  en el espacio de parámetros, ya que el producto de elementos no es cerrado en ese espacio. Por lo tanto es necesario considerar el espacio de parámetros completo  $\{x_\alpha^{\dot{\alpha}}, \theta_\alpha, \bar{\theta}^\alpha\}$  al que denominaremos superespacio.

Cualquier elemento del grupo de supersimetría puede ser expresado en forma

$$h(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i(x_\alpha^{\dot{\alpha}} P_\alpha^{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})} \quad (3.10)$$

Cuando se aplica  $h(x, \theta, \bar{\theta})$  a un estado cualquiera  $|\rangle$  el resultado pasa a ser función de las coordenadas del superespacio. De tal forma que podemos definir un campo sobre este espacio al que llamaremos supercampo, como

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = h(x, \theta, \bar{\theta})|\rangle \quad (3.11)$$

Es posible representar a los operadores del grupo como operadores diferenciales actuando sobre los supercampos. Para tal fin introducimos las derivadas fermiónicas:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \quad , \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \quad (3.12)$$

las cuales son Grassmanianas.

Si ahora hacemos una transformación de supersimetría a un estado cualquiera

$$| \rangle' = e^{-i\rho^\alpha Q_\alpha} | \rangle \quad (3.13)$$

nos interesa saber que forma tendrá  $Q_\alpha$  actuando, no sobre el estado, sino sobre el supercampo.

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= h(z) | \rangle' = h(z) e^{-i\rho^\alpha Q_\alpha} | \rangle \\ \Phi'(z) &= h(x_\alpha^\alpha - \frac{i}{2} \rho^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha + \rho^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) | \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde se utilizó la fórmula de Hausdorf

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (3.15)$$

usando ahora

$$e^{\rho^\alpha \partial_\alpha} f(\theta) = f(\theta^\alpha + \rho^\alpha) \quad (3.16)$$

encontramos

$$\Phi'(z) = e^{-i\rho^\alpha (i\partial_\alpha + \frac{1}{2} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}})} \Phi(z) \quad (3.17)$$

por lo tanto

$$Q_\alpha = i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \frac{1}{2} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad (3.18)$$

del mismo modo encontramos

$$\bar{Q}^{\dot{\alpha}} = i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + \frac{1}{2} \theta^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad (3.19)$$

Los supercampos definidos anteriormente constituyen bases naturales para la representación de operadores de forma diferencial. Sin embargo estas bases no son irreducibles. Si introducimos los operadores

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ \bar{D}^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + \frac{i}{2} \theta^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \partial_\mu \end{aligned} \quad (3.20)$$

comprobamos fácilmente que cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}\} &= P_\alpha^{\dot{\alpha}} \\ \{D_\alpha, Q_\beta\} &= \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = [D_\alpha, P_\beta^{\dot{\beta}}] = 0 \\ \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = [\bar{D}_{\dot{\alpha}}, P_\beta^{\dot{\beta}}] = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

como consecuencia de estas relaciones, si un campo satisface alguna de las ecuaciones

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (3.22)$$

$$D_\alpha\Phi = 0 \quad (3.23)$$

la misma condición será satisfecha por el supercampo que se obtiene de transformarlo por una transformación arbitraria de supersimetría.

Los campos que obedecen (3.22) se denominan *quirales*, y los que obedecen (3.23) se denominan *antiquirales*.

Es posible mostrar que los campos quirales (antiquirales), constituyen una base irreducible, o en otras palabras, que no existe un subconjunto de ellos que permanezca invariante ante transformaciones arbitrarias de supersimetría, salvo los campos constantes.

De la relación (3.22) se deduce que un supercampo quiral debe tener la forma :

$$\Phi = e^{\frac{i}{2}\theta^\alpha\partial_\alpha^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}\Phi_0(\theta^\alpha, x) \quad (3.24)$$

con

$$\Phi_0 = \sum_{s=0}^{\omega} \frac{1}{s!} \theta^{\dot{\alpha}_1} \dots \theta^{\dot{\alpha}_s} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) \quad (3.25)$$

donde  $\omega$  es el número de componentes del spinor de Weyl.

### 3.3 Spinores en $d = 6$

Los spinores de Dirac están definidos de la misma forma que en  $d = 4$ , salvo que ahora tienen ocho componentes y los spinores de Weyl tienen cuatro. Una representación de las matrices de Dirac se arma a partir de

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}\gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad y \quad \gamma_0 = I\end{aligned}\tag{3.26}$$

y tiene la forma

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \tilde{\gamma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \quad (1, -1, -1, \dots)$$

donde  $\tilde{\gamma}_\mu = \gamma_\mu$  para  $\mu = 1, \dots, 5$  y  $\tilde{\gamma}_0 = -\gamma_0 = -I$ .

La matriz de transposición  $\mathcal{C}$  se define [15] como

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \Gamma_\mu &= -\Gamma_\mu^T \mathcal{C} \quad \mathcal{C}^2 = I \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}^T = \Gamma_0 \Gamma_2 \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

con  $C = \gamma_2\gamma_5$  donde  $C^T = -C$  y  $C^2 = -1$ .

El conjugado de un spinor lo definimos como

$$\phi^c = C\phi^*\tag{3.27}$$

y el adjunto como

$$[\phi^c]^T = [C\phi^*]^T = \phi^\dagger C^T = -\phi^\dagger C = \bar{\phi}\tag{3.28}$$

por lo tanto

$$\bar{\phi} = -\phi^\dagger C\tag{3.29}$$

Se debe notar aquí una diferencia importante con el caso  $d = 4$ . El conjugado de un spinor de Weyl de una dada especie es otro spinor de Weyl de la misma especie.

El producto escalar esta definido entre spinores de distinta especie, según,

$$\psi \cdot \phi = \psi C \phi$$

donde  $\psi$  es un spinor de Weyl de segunda especie mientras que  $\phi$  es un spinor de Weyl de primera especie.

Por lo tanto, si tenemos el producto escalar entre un spinor de primera especie  $\psi_\alpha$  y el conjugado  $\bar{\phi}_{\dot{\alpha}}$  de segunda especie tenemos

$$\bar{\phi} C \psi = -\phi^\dagger C C \psi = \phi_{\dot{\alpha}}^\dagger \delta^{\dot{\alpha}\alpha} \psi_\alpha = \phi_{\dot{\alpha}}^\dagger \psi^{\dot{\alpha}}\tag{3.30}$$

donde definimos el spinor “contravariante”

$$\phi^\alpha = \delta^{\dot{\alpha}\alpha} \phi_{\dot{\alpha}} \quad (3.31)$$

Teniendo ahora definido el producto escalar tenemos que escribir los elementos del grupo de supersimetría, deducir la forma diferencial de  $Q_\alpha$  y  $\bar{D}^{\dot{\alpha}}$  y encontrar la forma de los supercampos quirales.

En principio si queremos trabajar con campos spinoriales de primera especie, es conveniente tomar entonces las variables de Grassman de segunda especie, o sea  $\theta_{\dot{\alpha}}$ , y el adjunto sera  $\bar{\theta} = -\theta^\dagger C$ . Tomaremos entonces el generador spinorial de primera especie  $Q^\dagger$  y el adjunto  $-QC$ .

Por lo tanto tomando el adjunto de la variable de Grassman, producto escalar el generador, quedará

$$\bar{\theta} C Q^\dagger = -\theta^\dagger C C Q^\dagger = \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger \delta^{\alpha\dot{\alpha}} Q_\alpha^\dagger = \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger Q^{\dagger\dot{\alpha}} \quad (3.32)$$

Asi mismo tomando el adjunto del generador, producto escalar la variable de Grassman quedará

$$-Q C C \theta = q_\alpha \delta^{\alpha\dot{\alpha}} \theta_{\dot{\alpha}} = Q_\alpha \theta^\alpha \quad (3.33)$$

Por lo tanto un elemento del grupo de supersimetría será

$$U = e^{i(Q_\alpha \theta^\alpha + \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger Q^{\dagger\dot{\alpha}})} \quad (3.34)$$

En este caso  $\theta^\alpha$  es el “contravariante” del spinor  $\theta_{\dot{\alpha}}$  ( $2^{da}$  especie). Con esto podemos definir ahora

$$Q_\alpha = i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger \gamma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad (3.35)$$

$$Q^{\dagger\dot{\alpha}} = i \frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger} + \gamma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \theta^\alpha \partial_\mu \quad (3.36)$$

y

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger \gamma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad (3.37)$$

$$D^{\dagger\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger} + i \gamma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} \theta^\alpha \partial_\mu \quad (3.38)$$

Si comparamos estas expresiones con las obtenidas para el caso de  $d = 4\nu$ , podremos observar que son formalmente iguales. Lo que indica que podemos operar con éstas como si no hubiese diferencia entre ellas.

### 3.4 Extensión del Modelo de Wess-Zumino a $d > 4$

Ya que podemos trabajar formalmente de la misma manera en cualquier número de dimensiones vamos a describir el modelo en principio para un número par de dimensiones arbitrario.

Como vimos el supercampo quiral se puede escribir como

$$\Phi = e^{\frac{i}{2}\theta_\alpha^\dagger \partial_\alpha \dot{\alpha} \theta^\alpha} \Phi_0(\theta^\alpha, x) \quad (3.39)$$

con

$$\Phi_0 = \sum_{s=0}^{\omega} \frac{1}{s!} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_s} \quad (3.40)$$

donde  $\omega = 2^{\frac{d}{2}-1}$  es el número de componentes del spinor de Weyl, si  $d$  es par.

Podemos deducir también como son las variaciones de las componentes del supercampo quiral  $\delta\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ , con respecto a una transformación de supersimetría con parámetro  $\rho^\alpha$ . Podemos comprobar fácilmente que  $\delta\Phi$  también es quiral, por lo que

$$\delta\Phi = e^{\frac{i}{2}\theta_\alpha^\dagger \partial_\alpha \dot{\alpha} \theta^\alpha} \delta\Phi_0 \quad (3.41)$$

Teniendo en cuenta esto se deducen las siguientes relaciones

$$\delta_\rho \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \rho^\alpha \Psi_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_s} \quad (3.42)$$

$$\delta_\rho \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} = -\frac{i}{(s-1)!} \rho^\alpha \partial_\alpha^{[\dot{\alpha}_s} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}_{s-1} \dots \dot{\alpha}_1]} \quad (3.43)$$

donde los [ ] indican antisimetrización en todos los índices. Se sobreentiende que el número mínimo y máximo de índices que pueden tener los campos son 0 y  $\omega$  respectivamente, por lo que

$$\delta_\rho \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} = 0 \quad \delta_\rho \bar{\Psi} = 0 \quad (3.44)$$

Podemos observar que al igual que en  $d = 4$ , la variación de la máxima componente del supercampo quiral ante una transformación de supersimetría es una divergencia.

En este punto hay que tomar una decisión crucial: tenemos dos maneras de armar la parte cinética del Lagrangiano. Una es usando las componentes



de  $\Phi\bar{\Phi}$  que poseen el producto de cuatro variables de Grassman, independientemente de la dimensión en que se esté trabajando. Esta elección lleva a un Lagrangiano que dá como resultado una ecuación de movimiento para los campos de orden dos. Evidentemente, la acción a que dá lugar este Lagrangiano no es invariante frente a una transformación general de supersimetría cuando  $d \neq 4$ , y como consecuencia la corriente spinorial no se conserva

$$\partial_\mu J_\alpha^\mu \neq 0, \quad \text{para } d \neq 4 \quad (3.45)$$

Esta ruptura de simetría se restaura cuando se realiza el límite  $d \rightarrow 4$ . Este procedimiento fue estudiado como método de regularización en la referencia [6].

La otra alternativa, es tomar el Lagrangiano supersimétrico

$$L = \bar{\Phi}\Phi|_D + c\Phi^2|_F + H.C. + T.I. \quad (3.46)$$

el cual dá lugar a una teoría supersimétrica para cualquier número de dimensiones, pero lleva a una ecuación de movimiento de orden superior. Esta es la alternativa que estudiaremos en este trabajo.

De simples consideraciones dimensionales deducimos que  $c = \frac{1}{2}m^{\frac{\omega}{2}}$  (recordemos que  $\omega$  es el número de componentes del spinor de Weyl).

Podemos escribir este Lagrangiano en componentes, para esto reemplazamos  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$  por sus respectivos desarrollos y tomamos las componentes  $\bar{\Phi}\Phi|_D$  y  $\Phi\Phi|_F$ , donde el subíndice  $D$  indica la componente con mayor cantidad de variables de Grassman, o sea  $\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_\omega} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}_1} \dots \bar{\theta}_{\dot{\alpha}_\omega}$ , y el subíndice  $F$ , indica la componente con mayor cantidad de variables  $\theta^\alpha$ , o sea  $\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_\omega}$ . Tengase presente que éstas son las componentes que se transforman como una divergencia, lo que lleva a una acción invariante.

Recordando que

$$\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_\omega} = \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \theta^1 \theta^2 \theta^3 \dots \theta^\omega \equiv \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \theta^\omega \quad (3.47)$$

y

$$\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_\omega} \theta^{\alpha_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, \omega$$

obtenemos

$$\begin{aligned} L = & \sum_{s=0}^{\omega} \frac{i}{(\omega-s)!s!s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_{s+1}}^{\dot{\alpha}_{s+1}} \dots \partial_{\alpha_\omega}^{\dot{\alpha}_\omega} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} + \\ & + m^{\frac{\omega}{2}} \sum_{s=0}^{\omega} \frac{\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega}}{s!(\omega-s)!} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \Psi_{\alpha_{s+1} \dots \alpha_\omega} + H.C. \end{aligned} \quad (3.48)$$

para el Lagrangiano libre.

Esta alternativa fue propuesta en la referencia [7].

## Capítulo 4

# El Modelo de Wess-Zumino para un Supercampo Quiral en Dimensión Superior

En este capítulo tomaremos el modelo de Wess-Zumino para un supercampo quiral en un número arbitrario de dimensiones. La extensión la haremos siguiendo las reglas dadas en el capítulo anterior, de manera de mantener la supersimetría en todas las dimensiones.

Comenzaremos por el Lagrangiano libre y deduciremos las ecuaciones de movimiento, la corriente spinorial conservada, como así también la carga fermiónica que será la generadora de las transformaciones de supersimetría. Comenzaremos entonces por el Lagrangiano deducido en (3.48)

$$\begin{aligned} L = & \sum_{s=0}^{\omega} \frac{i}{(\omega-s)!s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_{s+1}}^{\dot{\alpha}_{s+1}} \dots \partial_{\alpha_\omega}^{\dot{\alpha}_\omega} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} + \\ & + m^{\frac{\omega}{2}} \sum_{s=0}^{\omega} \frac{\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega}}{s!(\omega-s)!} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \psi_{\alpha_{s+1} \dots \alpha_\omega} + H.C. \end{aligned} \quad (4.1)$$

con  $\omega = 2^{\frac{d}{2}-1}$  ( $d$  par).

Podemos ahora deducir la forma general de las ecuaciones de movimiento de los campos. El Lagrangiano depende de los campos  $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$  ( $s = 0, \dots, \omega$ ) y de sus  $\omega$  primeras derivadas. Por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange

serán segun (2.5)

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi^j} - \partial_{\mu_1} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \Psi^j} + \dots \pm \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\omega} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_\omega} \Psi^j} = 0 \quad (4.2)$$

donde  $j$  indica que (4.2) debe evaluarse para cada uno de los  $\omega + 1$  campos del sistema.

Usando entonces la forma explícita del Lagrangiano encontramos

$$\frac{1}{s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_{s+1}}^{\dot{\alpha}_{s+1}} \dots \partial_{\alpha_\omega}^{\dot{\alpha}_\omega} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = -(-i)^s m^{\frac{\omega}{2}} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_{s+1}} \quad (4.3)$$

con  $s = 0, 1, 2, \dots, \omega$

Ahora se pueden combinar estas  $(\omega + 1)$  ecuaciones para obtener una, la cual satisfagan todas las componentes de los campos. Esto también se puede hacer en forma general; por ejemplo tomamos la ecuación con  $s = j$  (a) y la ecuación con  $s = \omega - j$  (b). Primeramente conjugamos la ecuación (b) y la derivamos a ambos miembros  $\omega - j$  veces. Estamos entonces en condiciones de eliminar el campo  $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_j}$  de las ecuaciones (a) y (b), obteniendo una ecuación para el campo  $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{\omega-j}}$ . Como  $j$  es arbitrario, obtenemos que cualquier componente  $\chi$  del supercampo quiral, satisface

$$(\square^{\frac{\omega}{2}} - m^\omega) \chi = 0 \quad (4.4)$$

con  $\omega = 2^{\frac{d}{2}-1}$  y  $d$  par. Para este cálculo hemos hecho uso de la identidad

$$\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \dots \partial_{\alpha_\omega}^{\dot{\alpha}_\omega} = \epsilon^{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \square^{\frac{\omega}{2}} \quad (4.5)$$

Podemos observar aquí lo siguiente, el hecho de haber exigido que la teoría sea invariante frente a transformaciones de supersimetría en todas las dimensiones, hace que el orden de la ecuación diferencial para los campos, esté ligado al número de dimensiones del espacio-tiempo, de la siguiente manera:

$$\omega = 2^{\frac{d}{2}-1} \quad (d \text{ par}) \quad (4.6)$$

Vemos que para  $d = 4$ ,  $\omega = 2^{\frac{4}{2}-1} = 2$ , la ecuación diferencial coincide con la ecuación de Klein-Gordon.

Para espacios de dimensión superior, el orden de la ecuación crece con el número de dimensiones según (4.6).

## 4.1 Corriente Spinorial Conservada

Como la acción es invariante frente a las transformaciones de supersimetría, tendrá que existir entonces (via teorema de Noether), una corriente conservada asociada a esta simetría.

Esta claro también que aparte del índice vectorial (de Lorentz), la corriente deberá tener un índice spinorial, ya que los generadores de supersimetría son spinores.

En nuestro caso el Lagrangiano depende de campos y sus  $\omega$  primeras derivadas.

$$L(\psi^j, \partial_{\mu_1} \psi^j, \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \psi^j, \dots, \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_\omega} \psi^j) \quad (4.7)$$

El teorema de Noether establece que cuando los campos obedecen las ecuaciones de movimiento, la variación del Lagrangiano frente a una transformación es :

$$\delta L = \partial_{\mu_1} J_1^{\mu_1} \quad (4.8)$$

con

$$J_1^{\mu_1} = \sum_{j=0}^{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} (-1)^{\omega-j} \partial_{\mu_{i+1}} \dots \partial_{\mu_{\omega-j}} \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\omega-j}} \psi^j} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_i} \delta \psi^j \quad (4.9)$$

Por lo tanto si  $\delta L = 0$ , entonces  $J_1^{\mu_1}$  es una corriente conservada. Pero en nuestro caso  $\delta L \neq 0$ , frente a transformaciones de supersimetría, la acción es invariante, pero el Lagrangiano se transforma como una divergencia

$$\delta L = \partial_{\mu_1} J_2^{\mu_1} \quad (4.10)$$

De (4.8) y (4.10) se ve que

$$J^{\mu_1} = J_{(1)}^{\mu_1} - J_{(2)}^{\mu_1} \quad (4.11)$$

es una corriente conservada, o sea que

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = \partial_{\mu} J_{(1)}^{\mu} - \partial_{\mu} J_{(2)}^{\mu} = 0 \quad (4.12)$$

Evaluemos entonces en primer lugar  $J_{(1)}^{\mu_1}$  dada por (4.9). Utilizando el Lagrangiano (4.1), podemos calcular

$$\frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{\omega-s}} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}} = \frac{i^s \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \Gamma_{\alpha_{s+1}}^{\mu_1 \dot{\alpha}_s} \dots \Gamma_{\alpha_\omega}^{\mu_{\omega-s} \dot{\alpha}_\omega}}{(\omega_s)! s! s!} \quad (4.13)$$

reemplazando (4.13) y la expresión de  $\delta\psi_{\alpha_1\dots\alpha_s}$  dada por (3.42) obtenemos

$$J_{\alpha(1)}^{\mu_1} = \epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_1} \sum_{s=0}^{\omega} \sum_{j=0}^{\omega} (-1)^{\omega-s} i^s \Gamma_{\alpha_{s+1}}^{\mu_1 \dot{\alpha}_s} \dots \Gamma_{\alpha_\omega}^{\mu_{\omega-s} \dot{\alpha}_\omega} \\ \times \partial_{\mu_{j+1}} \dots \partial_{\mu_{\omega-s}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s\dots\dot{\alpha}_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_j} \psi_{\alpha_1\dots\alpha_s} \quad (4.14)$$

Para calcular  $J_{\alpha(2)}^\mu$  lo haremos en dos partes

$$\partial_\mu J_{\alpha(2)}^\mu = \delta_\alpha L_0 + \delta_\alpha L_m \quad (4.15)$$

Donde  $L_0$  indica solo la parte cinética y  $L_m$  los términos de masa.

$$\delta L_0 = \sum_{s=0}^{\omega} \frac{i^s \epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_1}}{(\omega-s)!s!} [\delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s\dots\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_{s+1}}^{\dot{\alpha}_{s+1}} \dots \partial_{\alpha_\omega}^{\dot{\alpha}_\omega} \psi_{\alpha_1\dots\alpha_s} + \\ + (-1)^s \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s\dots\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_{s+1}}^{\dot{\alpha}_{s+1}} \dots \partial_{\alpha_\omega}^{\dot{\alpha}_\omega} \delta \psi_{\alpha_1\dots\alpha_s}] \quad (4.16)$$

El  $(-1)^s$  del segundo término aparece porque cuando  $s$  es impar los campos son fermiónicos y la variación actúa sobre éstos como un operador de Grassman.

Utilizando las expresiones (3.42) y (3.43) encontramos

$$\delta_\alpha L_0 = \partial_{\mu_1} \left( \sum_{s=0}^{\omega_2} \frac{i^s \epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_1}}{(\omega-s)!s!} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_{s+1}\dots\dot{\alpha}_2} \Gamma_{\alpha_{s+2}}^{\mu_1 \dot{\alpha}_{s+2}} \dots \Gamma_{\alpha_\omega}^{\mu_{\omega-s} \dot{\alpha}_\omega} \right. \\ \left. \times \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{s-1}} \psi_{\alpha_2\dots\alpha_{s+1}} \right) \quad (4.17)$$

Para llegar a esta expresión hemos usado la siguiente identidad tensorial:

$$\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_\omega} A_{\alpha_1\dots\alpha_s} B_{\alpha_{s+1}\dots\alpha_\omega\alpha} = \frac{s}{\omega-s+1} \epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_\omega} A_{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}\alpha} B_{\alpha_{s+1}\dots\alpha_\omega\alpha_s} \quad (4.18)$$

donde  $A_{\alpha_1\dots\alpha_s}$  y  $B_{\alpha_{s+1}\dots\alpha_\omega\alpha}$  son tensores totalmente antisimétricos.

Calculamos ahora

$$\delta L_m = m^{\frac{\omega}{2}} \sum_{s=0}^{\omega} \frac{\epsilon^{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_1}}{s!(\omega-s)!} [\delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_{s+1}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s\dots\dot{\alpha}_1} + (-1)^s \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_{s+1}} \delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s\dots\dot{\alpha}_1}]$$

Usando (3.43) obtenemos

$$\delta_\alpha L_m = 2im^{\frac{\omega}{2}} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_1} \partial_{\mu_1} \Gamma_{\alpha}^{\mu_1 \dot{\alpha}_1} \left( \sum_{s=1}^{\omega/2} \frac{1}{s!} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_{s+1}\dots\dot{\alpha}_2} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_\omega\dots\dot{\alpha}_{s+2}} \right) \quad (4.19)$$

De la (4.16) y (4.19) sale inmediatamente

$$\begin{aligned}
J_{\alpha}^{\mu_1} (2) &= \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{\omega}} \epsilon_{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_1} \sum_{s=0}^{\omega-2} \left( \frac{i^s}{(\omega-s)!s!} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}_{s+1} \dots \dot{\alpha}_2} \Gamma_{\alpha_{s+2}}^{\mu_1 \dot{\alpha}_{s+2}} \dots \Gamma_{\alpha_{\omega}}^{\mu_{\omega-s-1} \dot{\alpha}_{\omega}} \right. \\
&\times \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{s-1}} \psi_{\alpha \alpha_2 \dots \alpha_{s+1}} \Big) + \\
&+ 2im^{\frac{\omega}{2}} \epsilon_{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_1} \Gamma_{\alpha}^{\mu_1 \dot{\alpha}_1} \sum_{s=1}^{\omega/2} \frac{1}{s!} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}_{s+1} \dots \dot{\alpha}_2} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_{s+2}} \Big) \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Podemos escribir la corriente spinorial como

$$\begin{aligned}
J^{\mu_1} &= J_{(1)}^{\mu_1} - J_{(2)}^{\mu_1} \\
J_{\alpha}^{\mu_1} &= \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{\omega}} \epsilon_{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_1} \sum_{s=0}^{\omega-1} \sum_{j=1}^{\omega-s-1} \left( \frac{(-1)^{\omega-s-j} i^s}{(\omega-s)!s!} \Gamma_{\alpha_{s+1}}^{\mu_1 \dot{\alpha}_{s+1}} \dots \Gamma_{\alpha_{\omega}}^{\mu_{\omega-s} \dot{\alpha}_{\omega}} \right. \\
&\times \partial_{\mu_{j+1}} \dots \partial_{\mu_{\omega-s}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_j} \psi_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_s} \quad (4.21) \\
&- 2im^{\frac{\omega}{2}} \epsilon_{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_1} \Gamma_{\alpha}^{\mu_1 \dot{\alpha}_1} \sum_{s=1}^{\omega/2-1} \frac{1}{(\omega-s-1)!} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}_{s+1} \dots \dot{\alpha}_2} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_{s+2}} \Big)
\end{aligned}$$

Es posible simplificar más esta expresión eliminando, mediante el uso de las ecuaciones de movimiento, el término de masa. Esto se lleva a cabo de la siguiente manera: Separamos el término de masa en dos términos iguales,

$$J_{\alpha}^{\mu} m = 2J_{\alpha}^{\mu} m = J_{\alpha}^{\mu} m + J_{\alpha}^{\mu} m \quad (4.22)$$

En el primer término aplicamos las ecuaciones de movimiento al campo  $\overline{\psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1}$ , y en el segundo término se la aplicamos al campo  $\overline{\psi}^{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_{s+1}}$ . Luego haciendo uso de la relación (4.18) obtenemos

$$\begin{aligned}
J_{\alpha}^{\mu_1} &= \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{\omega}} \epsilon_{\dot{\alpha}_{\omega} \dots \dot{\alpha}_1} \sum_{s=0}^{\omega-2} \sum_{j=1}^{\omega-s} \frac{(-1)^{\omega-s-j} i^s}{(\omega-s)!s!} \Gamma_{\alpha_{s+1}}^{\mu_1 \dot{\alpha}_{s+1}} \dots \Gamma_{\alpha_{\omega}}^{\mu_{\omega-s} \dot{\alpha}_{\omega}} \times \\
&\times \partial_{\mu_{j+1}} \dots \partial_{\mu_{\omega-s}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_j} \psi_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_s} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Escrita de esta forma se puede comprobar fácilmente que

$$\partial_{\mu_1} J_{\alpha}^{\mu_1} = 0 \quad (4.24)$$

## 4.2 Transformadas de Fourier

Antes de proseguir analizando las propiedades del modelo es conveniente pasar al espacio de los impulsos. Examinaremos en este espacio la carga fermiónica, el Hamiltoniano etc. Para esto introducimos la transformada de Fourier de los campos.

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) = \int d^d k \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (4.25)$$

$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x)$  satisface la ecuación de movimiento

$$(\square^{\frac{\omega}{2}} - m^\omega) \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) = 0 \quad (4.26)$$

por lo tanto  $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k)$  satisface

$$(k^\omega - m^\omega) \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k) = 0 \quad (4.27)$$

lo que implica que  $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k)$  tiene la forma

$$\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k) = \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k) \delta(k^\omega - m^\omega) \quad (4.28)$$

siendo  $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k)$  una función arbitraria de  $k$ .

Podemos escribir por lo tanto

$$\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(k) = \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^i(k) \delta(k^2 - e^{-i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} m^2) \quad (4.29)$$

La  $\delta(k^2 - e^{-i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} m^2)$  debe ser interpretada como una funcional analítica en el plano complejo (ver ref. [16]).

Reemplazando en (4.25)

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) &= \sum_{j=1}^{\omega/2} \int d^d k e^{-ik_\mu x^\mu} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^j(k) \delta(k_0^2 - \omega_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^{\omega/2} \int \frac{d^{d-1} \vec{k}}{2\omega_j} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} (\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^i(\vec{k}) e^{-i\omega_j x^0} + \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^j(\vec{k}) e^{i\omega_j x^0}) \end{aligned} \quad (4.30)$$



con

$$\omega_j^2 = \vec{k}^2 + e^{-i\frac{4\pi j}{\omega}} m^2 \quad (4.31)$$

Podemos reescribir esta ecuación como

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} \int \frac{d^{d-1}k}{2\omega_j} (\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda(\vec{k}) e^{-ik_\lambda X} + \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda(-\vec{k}) e^{ik_\lambda x}) \quad (4.32)$$

donde  $k_\lambda = (\omega_\lambda, \vec{k})$ .

Se observa que la teoría tiene más grados de libertad si la comparamos con una teoría de segundo grado. Estos “nuevos” grados de libertad pueden interpretarse como campos de masa en general compleja siendo

$$m_\lambda^2 = e^{-i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} m^2$$

Para el campo conjugado adoptaremos la notación

$$\bar{\psi}_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} \int \frac{d^{d-1}k}{2\omega_j} (\bar{\phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda(\vec{k}) e^{-ik_\lambda X} + \bar{\chi}_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda(-\vec{k}) e^{ik_\lambda x}) \quad (4.33)$$

Es sencillo verificar que con esta notación, se cumple

$$\bar{\phi}^\lambda \neq \overline{\phi^\lambda} \quad (4.34)$$

salvo para  $\lambda = \omega/2$ , en el cual

$$\bar{\phi}^{\omega/2} = \overline{\phi^{\omega/2}} \quad (4.35)$$

(observese que esta componente es la que equivale a un campo de masa real).

De todas las componentes de los campos hay dos que se distinguen claramente,  $\lambda = \omega/2$  y  $\lambda = \omega/4$ . A la primera componente la llamaremos componente “normal”, ya que es un campo que satisface la ecuación de Klein-Gordon, mientras que a la segunda la llamaremos campo “taquiónico”, ya que satisface una ecuación de Klein-Gordon con el signo cambiado de  $m^2$ , o en otras palabras con masa imaginaria pura.

Podemos ahora intentar eliminar la componente  $\chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda(k)$  de la expresión (4.32). Para eso reemplazamos (4.32) y (4.33) en las ecuaciones de movimiento (4.26). Para realizar este cálculo encontramos una singularidad en la componente taquiónica; para  $\lambda = \omega/4$

$$\omega_{\omega/4}^2 = \vec{k}^2 - m^2 \quad (4.36)$$

lo que indica que  $\omega_{\omega/4}$  tiene diferente comportamiento si  $\vec{k}^2 > m^2$  o  $\vec{k}^2 < m^2$ . Vamos a separar entonces la componente taquiónica en dos partes

$$\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\omega/4} = \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^> + \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^< \quad (4.37)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^> &= \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\omega/4} \Theta(\vec{k}^2 - m^2) \\ \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^< &= \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\omega/4} \Theta(m^2 - \vec{k}^2) \end{aligned} \quad (4.38)$$

El campo  $\chi^{\omega/4}$  lo separamos de la misma manera.

Con estas definiciones encontramos para las ecuaciones de movimiento en el espacio de los impulsos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} K_{\alpha_{s+1}}^{\lambda \dot{\alpha}_{s+1}} \dots K_{\alpha_\omega}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega} \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda(-\vec{k}) = \\ -m^{\omega/2} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_{s+1}}(\vec{k}) \\ \frac{1}{s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} K_{\alpha_{s+1}}^{\lambda \dot{\alpha}_{s+1}} \dots K_{\alpha_\omega}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda(\vec{k}) = \\ i^{-2s} m^{\omega/2} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\chi}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_{s+1}}(-\vec{k}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} K_{\alpha_{s+1}}^{\lambda \dot{\alpha}_{s+1}} \dots K_{\alpha_\omega}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^<(\vec{k}) = \\ -(-1)^s m^{\omega/2} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\phi}^< \lambda \dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_{s+1}(\vec{k}) \\ \frac{1}{s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} K_{\alpha_{s+1}}^{\lambda \dot{\alpha}_{s+1}} \dots K_{\alpha_\omega}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega} \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^<(-\vec{k}) = \\ i^{-2s} m^{\omega/2} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\chi}^< \lambda \dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_{s+1}(-\vec{k}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Se ve claramente en (4.40), que se puede eliminar la componente  $\chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ , en todos los campos, salvo en el campo taquiónico cuando  $\vec{k}^2 < m^2$ . Esta división en el espacio de los impulsos, es típica de los taquiones y explicaremos sus implicaciones mas adelante.

Reemplazando (4.39) y (4.40) en (4.32) obtenemos

$$\psi_{\alpha_{s+1} \dots \alpha_\omega}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} \int \frac{d^{d-1}k}{2\omega_\lambda} (\phi_{\alpha_{s+1} \dots \alpha_\omega}^\lambda(\vec{k}) e^{-ik_\lambda X} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i^{\omega-2s}}{s!m^{\omega/2}} \epsilon_{\dot{\beta}_\omega \dots \dot{\beta}_1} K_{\alpha_{s+1}}^{\dot{\beta}_{s+1}} \dots K_{\alpha_\omega}^{\dot{\beta}_\omega} \bar{\phi}^{\lambda \beta_1 \dots \beta_s} e^{ik_\lambda x} \\
& - i \int \frac{d^{d-1}k}{2|\omega_T|} (\phi_{\alpha_{s+1} \dots \alpha_\omega}^<(\vec{k}) e^{-ik_T X} + \\
& + (\chi_{\alpha_{s+1} \dots \alpha_\omega}^<(-\vec{k}) e^{ik_T X})
\end{aligned} \tag{4.41}$$

con

$$k_\lambda = (\omega_\lambda, \vec{k}) \quad \omega_\lambda^2 = \vec{k}^2 - e^{i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} m^2$$

### 4.3 Carga Fermiónica

Hemos calculado anteriormente la corriente conservada asociada a la supersimetría. Existe, por lo tanto, una carga conservada dada por

$$Q_\alpha = \int d^{d-1}x J_\alpha^0 \tag{4.42}$$

Para calcularla reemplazamos las transformadas de Fourier (4.41), en la expresión de  $J_\alpha^0$ . La integración sobre  $x$  es trivial pues esta variable aparece en los exponenciales contribuyendo con términos del tipo  $\delta(k_1 - k_2)$ , haciendo también trivial la integración en  $k_2$ . Explicaremos en detalle el cálculo de la carga usando solo el primer término de (4.41), siendo el cálculo de las componentes  $\phi^<$  completamente análogo.

Despues de reemplazar la transformada de Fourier en la expresión de  $J^0$  e integrar, el resultado es

$$\begin{aligned}
Q_\alpha & = -i^{\omega-1} \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} \sum_{s=0}^{\omega-2} \int \frac{d\vec{k}}{4\omega_\lambda^2} \frac{\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \Gamma_{\alpha_{s+1}}^0 \dot{\alpha}_{s+1} K_{\alpha_{s+2}}^{\dot{\alpha}_{s+2}} \dots K_\omega^{\dot{\alpha}_\omega}}{(\omega-s-1)!s!s!} \\
& \times \bar{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s \alpha}^{\lambda} \\
& + i^{\omega-1} \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} \sum_{s=0}^{\omega-2} \int \frac{d\vec{k}}{4\omega_\lambda^2} (-1)^s \frac{\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_\omega} \epsilon_{\dot{\beta}_\omega \dots \dot{\beta}_1}}{(\omega-s-1)!s!s!(\omega-s)!(\omega-s-1)!m^\omega} \\
& \times K_{\alpha_{s+2}}^{\lambda \dot{\alpha}_{s+2}} \dots K_{\alpha_\omega}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega} K_{\beta_1}^{\lambda \dot{\alpha}_1} \dots K_{\beta_s}^{\lambda \dot{\alpha}_s} K_\alpha^{\lambda \dot{\beta}_1} K_{\alpha_s}^{\lambda \dot{\beta}_{s+1}} \phi_{\beta_{s+1} \dots \beta_\omega}^{\lambda} \bar{\phi}^{\lambda \dot{\beta}_\omega \dots \dot{\beta}_{s+2}}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Podemos simplificar esta expresión definiendo  $\tilde{K}_\alpha^{\lambda \dot{\alpha}}$  de tal forma que

$$K_\alpha^{\lambda \dot{\alpha}} \tilde{K}_\alpha^{\lambda \dot{\beta}} = m^2 \delta_\alpha^\beta \tag{4.44}$$

Observese que para cada  $\lambda$  la matriz  $\tilde{\Gamma}_{\dot{\alpha}}^{\lambda \beta}$  es distinta, o sea contiene una fase diferente.

Por otro lado sabemos que

$$\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} K_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \dots K_{\alpha_\omega}^{\dot{\alpha}_\omega} = m^\omega \epsilon^{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} \quad (4.45)$$

se deduce entonces que

$$\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\omega} \epsilon_{\dot{\alpha}_\omega \dots \dot{\alpha}_1} K_{\alpha_{s+1}}^{\lambda \dot{\alpha}_{s+1}} \dots K_{\alpha_\omega}^{\lambda \dot{\alpha}_\omega} = s! m^{\omega-2s} K_{\alpha_1}^{\lambda [\dot{\alpha}_1} \dots K_{\alpha_s}^{\lambda \dot{\alpha}_s]} \quad (4.46)$$

donde los [ ] significa antisimetrizar en todos los índices.

Otra relación a utilizar es

$$\Gamma_{\alpha_1}^0 \dot{\alpha} \tilde{\Gamma}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} = Tr(I) \omega_\lambda \quad (4.47)$$

donde  $Tr(I)$  es la traza de la identidad.

Utilizando (4.44), (4.45), (4.46) y (4.47) encontramos para  $Q_\alpha$

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= i\omega m^{\omega-2} \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} e^{i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} \int d\vec{k} \frac{(m^2)^{\frac{\omega}{2}-1}}{\omega_\lambda} \sum_{s=0}^{\omega-1} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} \dots \tilde{K}_{\dot{\alpha}_s}^{\alpha_s}}{s! m^{2s}} \overline{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \\ &- i\omega m^{\omega-2} \int d\vec{k} \frac{(m^2)^{\frac{\omega}{2}-1}}{\omega_T} \sum_{s=0}^{\omega-1} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{<} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{< \alpha_1} \dots \tilde{K}_{\dot{\alpha}_s}^{< \alpha_s}}{s! m^{2s}} \overline{\chi}^{< \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde

$$\begin{aligned} K_{<} &= (i\Omega, \vec{k}) \quad , \quad \Omega = \sqrt{m^2 - \vec{k}^2} \\ \tilde{K}_\lambda &= \bar{\alpha}_\lambda K_\lambda \quad \alpha_\lambda = e^{i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} \end{aligned}$$

Podemos ver que para la componente taquiónica no se puede eliminar el campo  $\chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ . En realidad lo que ocurre para taquiones en  $\vec{k} < m^2$  ocurre también para todos los campos de masa compleja ya que  $\overline{\phi}^\lambda \neq \overline{\phi}^{\lambda}$  (ver ref. [17]). Solo para los campos de masa real puede expresarse  $Q$  y  $H$  en función de  $\phi\phi^*$ , para el resto será  $\phi\chi$ .

## 4.4 Vector Energía-Impulso. Hamiltoniano

Para obtener el Hamiltoniano, o el vector energía-impulso, podemos trabajar con dos métodos distintos. Uno es en forma “canónica”, o sea efectuando

sobre el sistema una traslación infinitesimal, y calculando via teorema de Noether el tensor energía-impulso. Otra forma es obtenerlo a partir del álgebra de supersimetría; o sea, toda carga conservada es un generador de la simetría asociada, por lo tanto se deberá cumplir que  $Q_\alpha$  calculada en (4.48), sea un generador de supersimetría. Exigiendo esto y usando  $\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\} = P_\alpha^{\dot{\alpha}}$  es posible encontrar  $P_\mu$  o  $H$ . El resultado deberá coincidir con el resultado del método canónico.

Si realizamos sobre el sistema una transformación de supersimetría con parámetro  $\rho^\alpha$ , las componentes del supercampo quiral se transformarán como

$$\psi' = e^{i\rho^\alpha Q_\alpha} \psi e^{-i\rho^\alpha Q_\alpha} \quad (4.49)$$

Si además  $\rho^\alpha$  es un parámetro infinitesimal, se cumplirá que

$$\delta_\rho \psi = [i\rho^\alpha Q_\alpha, \psi] \quad (4.50)$$

Utilizando la expresión de las variaciones dadas en (3.42) y (3.43) obtenemos

$$[i\rho^\alpha Q_\alpha, \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}] = \rho^\alpha \psi_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_s} \quad (4.51)$$

$$[i\rho^\alpha Q_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1}] = -\frac{i}{(s-1)!} \rho^\alpha \partial_\alpha^{\dot{\alpha}_s} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s - 1 \dots \dot{\alpha}_1} \quad (4.52)$$

Si reemplazamos para  $\psi$  su transformada de Fourier encontramos

$$\sum_{\lambda=1}^{\omega/2} [i\rho^\alpha Q_\alpha, \phi_{\beta_1 \dots \beta_t}^\eta] = \rho^\alpha \phi_{\alpha \beta_1 \dots \beta_t}^\eta \quad (4.53)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\omega/2} [i\rho^\alpha Q_\alpha, \bar{\phi}^{\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_t}] = -\frac{1}{(t-1)!} \rho^\alpha K_\alpha^\eta [{}^{\dot{\alpha}_t} \bar{\phi}^{\dot{\alpha}_t - 1 \dots \dot{\alpha}_1}] \quad (4.54)$$

Para resolver éstas, la única solución es que

$$[i\rho^\alpha Q_\alpha^\lambda, \phi_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\lambda'}] = \delta^{\lambda\lambda'} \rho^\alpha \phi_{\alpha \beta_1 \dots \beta_t}^\lambda \quad (4.55)$$

$$[i\rho^\alpha Q_\alpha^\lambda, \bar{\phi}^{\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_t \lambda'}] = -\frac{\delta^{\lambda\lambda'}}{(t-1)!} \rho^\alpha K_\alpha^\lambda [{}^{\dot{\alpha}_t} \bar{\phi}^{\dot{\alpha}_t - 1 \dots \dot{\alpha}_1}] \quad (4.56)$$

en otras palabras, que no se mezclen campos de distinta especie, es decir distinto  $\lambda$ . Esto es así porque si  $(\square - m^2)\phi^\lambda = 0$  en el miembro de la izquierda

de (4.55), se deberá cumplir también  $(\square - m_\lambda^2)\phi^{\lambda'} = 0$  en el miembro de la derecha.

Una de las ecuaciones del álgebra de supersimetría es

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\} = \Gamma_\alpha^{\mu \dot{\alpha}} P_\mu \quad (4.57)$$

Reemplazando en (4.57) el valor de  $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ , (el conjugado de (4.48))

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha^{\mu \dot{\alpha}} P_\mu &= im^{\omega-2} \sum_{\lambda=1}^{\omega/2} e^{i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} \int d\vec{k} \frac{(m^2)^{\frac{\omega}{2}-1}}{\omega_\lambda} \times \\ &\times \sum_{s=0}^{\omega-1} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{\lambda \alpha_1} \dots \tilde{K}_{\dot{\alpha}_s}^{\lambda \alpha_s}}{s!m^{2s}} \{Q_\alpha, \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda \bar{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1}\} \\ &\quad - i\omega m^{\omega-2} \int d\vec{k} \frac{(m^2)^{\frac{\omega}{2}-1}}{\omega_t} \times \\ &\times \sum_{s=0}^{\omega-1} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{< \alpha_1} \dots \tilde{K}_{\dot{\alpha}_s}^{< \alpha_s} \{Q_\alpha, \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \bar{\phi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1}\} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Escribiendo  $Q_\alpha$  como

$$Q_\alpha = \sum_\lambda Q_\alpha^\lambda \quad (4.59)$$

y usando las relaciones (4.55) y (4.56) encontramos

$$P_\mu = \sum_\lambda P_\mu^\lambda \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} P_\mu^\lambda &= e^{i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} \int d\vec{k} \frac{(m^2)^{\frac{\omega}{2}-1}}{\omega_\lambda} k_\mu^\lambda \times \\ &\times \sum_s \bar{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{\lambda \alpha_1} \dots \tilde{K}_{\dot{\alpha}_s}^{\lambda \alpha_s}}{s!m^{2s}} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^\lambda \end{aligned} \quad (4.61)$$

En este cálculo, por simplicidad, no hemos considerado la parte taquiónica con  $\vec{k}^2 < m^2$ . De todas formas el cálculo es totalmente análogo al descripto, y volveremos a tratarlo con más detalle en los capítulos siguientes.

El Hamiltoniano quedará escrito entonces como

$$H = \sum_{\lambda} H^{\lambda} \quad (4.62)$$

con

$$H^{\lambda} = e^{i\frac{4\pi\lambda}{\omega}} \int d\vec{k} \frac{(m^2)^{\frac{\omega}{2}-1}}{\omega_{\lambda}} \omega_{\lambda} \times \\ \times \sum_s \bar{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{\lambda \alpha_1} \dots \tilde{K}_{\dot{\alpha}_s}^{\lambda \alpha_s}}{s! m^{2s}} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\lambda} \quad (4.63)$$

Se puede notar que para este cálculo, solo hemos usado las propiedades de simetría de la teoría, y no las reglas de conmutación entre los campos.

Volvemos a ver en este nivel las dificultades que se encuentran cuando se trabaja con ecuaciones de orden superior.

Salvo la componente  $\lambda = \omega/2$ , las demás componentes hacen que el Hamiltoniano no sea definido positivo. En general esto tiene como consecuencia que al agregar interacción la teoría es inestable, ya que cualquier proceso que involucre campos con  $\lambda \neq \omega/2$ , hace que se gane energía sin límites, haciendo de este modo todo el sistema inestable. Sin embargo veremos que este inconveniente se subsana con una elección apropiada del espacio de Fock.

Por último podemos notar que como consecuencia de las relaciones de supersimetría (4.51) y (4.52), los campos obedecen las ecuaciones de Heisenberg, ya que

$$[P_{\alpha}^{\dot{\alpha}}, \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\lambda}] = [\{Q_{\alpha}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\}, \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\lambda}] \quad (4.64)$$

Usando ahora (4.51), (4.52) y sus conjugadas es fácil deducir que

$$\begin{aligned} [P_{\alpha}^{\dot{\alpha}}, \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\lambda}] &= -K_{\alpha}^{\lambda \dot{\alpha}} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\lambda} \\ [P_{\alpha}^{\dot{\alpha}}, \bar{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1}] &= K_{\alpha}^{\lambda \dot{\alpha}} \bar{\phi}^{\lambda \dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \end{aligned} \quad (4.65)$$

## 4.5 El Modelo de Wess-Zumino en $d = 6$

Hemos desarrollado en el capítulo anterior algunos aspectos del modelo de Wess-Zumino en un número arbitrario (par) de dimensiones. Para comprender un poco más sus propiedades es conveniente analizarlo en un número de

dimensiones concreto. El más simple, aparte de  $d = 4$  que está ampliamente estudiado, es tomar  $d = 6$ .

En este caso los spinores de Weyl tienen dimensión  $2^{\frac{6}{2}-1} = 4$ , y la ecuación diferencial resultante es de cuarto orden.

Utilizando la expresión general para el Lagrangiano en  $d = 6$  obtenemos

$$L = \sum_{s=0}^4 \frac{i}{(4-s)!s!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_4 \dots \dot{\alpha}_1} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}_s \dots \dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_{s+1}}^{\dot{\alpha}_{s+1}} \dots \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} + m^2 \sum_{s=0}^4 \frac{\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_4}}{s!(4-s)!} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \psi_{\alpha_{s+1} \dots \alpha_4} + H.C. \quad (4.66)$$

Podemos reescribir este Lagrangiano usando las siguientes definiciones

$$F = \frac{1}{4!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_4} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_4} \quad (4.67)$$

$$F^{\alpha_4} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \quad (4.68)$$

$$F^{\alpha_3 \alpha_4} = \frac{1}{2!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \quad (4.69)$$

$$(4.70)$$

Utilizando además las relaciones (4.5) obtenemos

$$L = \bar{\psi} \square^2 \psi + i \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tilde{\partial}_{\dot{\alpha}}^{\alpha} \square \psi_{\alpha} - \frac{1}{2!2!} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \tilde{\partial}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2} \tilde{\partial}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} + \bar{F} F - i \bar{F}_{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}} F^{\alpha} - \bar{F}_{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} F^{\alpha_1 \alpha_2} + 2m^2 (\psi F + \psi_{\alpha} F^{\alpha} + \frac{1}{2!2!} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} F^{\alpha_1 \alpha_2}) + H.C. \quad (4.71)$$

En esta expresión tenemos tres campos principales, un campo escalar complejo  $\psi$ , un campo spinorial  $\psi_{\alpha}$ , y un campo vectorial  $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}$ .

Aparte tenemos los campos auxiliares  $F$ ,  $F^{\alpha}$ ,  $F^{\alpha_1 \alpha_2}$ .

Decimos que son auxiliares porque no tienen la misma dimensión que sus campos homólogos. Por ejemplo, se ve del Lagrangiano que el campo escalar  $F$ , no tiene las mismas dimensiones que el campo escalar  $\psi$  y lo mismo ocurre con el  $F^{\alpha}$  y  $\psi_{\alpha}$ .

Esto quiere decir que no van a ser "campos físicos", es decir, es posible eliminarlos de la teoría a través de las ecuaciones de movimiento. Obsérvese



que las dimensiones del campo  $F^{\alpha_1\alpha_2}$  son las mismas que  $\psi_{\alpha_1\alpha_2}$ , esto hace que sea trivial escribir uno en función del otro, simplemente fue introducido para mantener la simetría en la notación.

A partir de (4.71) es posible obtener las ecuaciones de movimiento en forma canónica, que deberá coincidir por supuesto con las obtenidas para  $d$  arbitrario cuando reemplazamos  $d = 6$ . Estas son:

$$\begin{aligned}\square^2\psi &= -m^2\bar{F} \\ \square^2\tilde{\partial}_{\dot{\alpha}}^{\alpha}\psi_{\alpha} &= im^2\bar{F}_{\dot{\alpha}} \\ \tilde{\partial}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1}\tilde{\partial}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2}\psi_{\alpha_1\alpha_2} &= m^2\bar{F}_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2}\end{aligned}\tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}F &= -m^2\bar{\psi} \\ \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}}F^{\alpha} &= im^2\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \\ \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1}\partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2}F^{\alpha_1\alpha_2} &= m^2\bar{\psi}^{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2}\end{aligned}$$

Todas las componentes de estos campos satisfacen

$$(\square^2 - m^4)\chi = 0\tag{4.73}$$

que puede ser reescrita como

$$(\square - m^2)(\square + m^2)\chi = 0\tag{4.74}$$

Toda solución de la ecuación de Klein-Gordon es solución de esta ecuación, pero además tenemos dos soluciones más que satisfacen la ecuación de “Klein-Gordon Taquiónica”.

Los taquiones han aparecido en la teoría como grados de libertad extra por el hecho de tener cuatro derivadas y no dos en la ecuación de movimiento.

Por otro lado hay que destacar que los taquiones no han sido agregados por ninguna circunstancia especial, sino que son consecuencia de exigir supersimetría en todas las dimensiones del espacio, y tanto la componente normal como la taquiónica pasan a ser componentes del mismo campo.

$$\psi_{\alpha_1\dots\alpha_s}(x) = \psi_{\alpha_1\dots\alpha_s}^b(x) + \psi_{\alpha_1\dots\alpha_s}^t(x)\tag{4.75}$$

Hemos usado los supraíndices  $b$  y  $t$  para denotar “normal” (o bradiónica) y “taquiónica” respectivamente.

Podemos entonces escribir la expresión de los campos  $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^b(x)$  y  $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^T(x)$ , de manera que satisfagan automáticamente las ecuaciones de movimiento (4.72) y (4.73).

Para la componente  $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^b(x)$  se cumplirá

$$\begin{aligned}
 \psi^b(x) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_b} (\phi^b e^{-ik_\mu^b x^\mu} + \bar{\varphi}^b e^{ik_\mu^b x^\mu}) \\
 \psi_\alpha^b(x) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_b} (\phi_\alpha^b e^{-ik_\mu^b x^\mu} + \frac{1}{m} k_\alpha^b \dot{\bar{\varphi}}_\alpha^b e^{ik_\mu^b x^\mu}) \\
 \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^b(x) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_b} (\phi_{\alpha_1 \alpha_2}^b e^{-ik_\mu^b x^\mu} + \frac{1}{m^2} k_{\alpha_1}^b \dot{k}_{\alpha_2}^b \bar{\varphi}_{\alpha_2 \dot{\alpha}_1}^b e^{ik_\mu^b x^\mu}) \\
 & \hspace{20em} (4.76) \\
 F_b^{\alpha_1 \alpha_2}(x) &= - \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_b} (\tilde{\phi}_b^{\alpha_1 \alpha_2} e^{-ik_\mu^b x^\mu} + \frac{1}{m^2} \tilde{k}_b^{\alpha_1 \dot{\alpha}_1} \tilde{k}_b^{\alpha_2 \dot{\alpha}_2} \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} e^{ik_\mu^b x^\mu}) \\
 F_b^\alpha(x) &= -m \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_b} (\varphi_b^\alpha e^{-ik_\mu^b x^\mu} + \frac{1}{m} \tilde{k}_b^{\alpha \dot{\alpha}} \bar{\phi}_b^{\dot{\alpha}} e^{ik_\mu^b x^\mu}) \\
 F_b(x) &= -m^2 \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_b} (\varphi_b e^{-ik_\mu^b x^\mu} + \bar{\phi}_b e^{ik_\mu^b x^\mu})
 \end{aligned}$$

donde  $\omega_b^2 = \vec{k}^2 + m^2$  y  $k^b = (\omega_b, \vec{k})$ .

Para la componente taquiónica hay que diferenciar dos regiones del espacio de los impulsos,  $\vec{k}^2 > m^2$ , y  $\vec{k}^2 < m^2$ . El comportamiento de estos campos es cualitativamente diferente en las dos regiones. Mientras que con  $\vec{k}^2 > m^2$  las soluciones son ondas planas, en la región  $\vec{k}^2 < m^2$ , muestra un comportamiento exponencial creciente o decreciente.

Las transformadas de Fourier quedan expresadas de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
 \psi^t(x) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_t} (\phi^> e^{-ik_\mu^> x^\mu} + \bar{\varphi}^> e^{ik_\mu^> x^\mu}) + \\
 &+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} (\phi^< e^{-|\omega|t} + \bar{\varphi}^< e^{|\omega|t}) + \\
 \psi_\alpha^t(x) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_t} (\phi_\alpha^> e^{-ik_\mu^> x^\mu} + \frac{1}{m} k_\alpha^> \dot{\bar{\varphi}}_\alpha^> e^{ik_\mu^> x^\mu}) \\
 &+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} (\phi_\alpha^< e^{-|\omega|t} + \frac{1}{m} k_\alpha^< \dot{\bar{\varphi}}_\alpha^< e^{|\omega|t})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha_1\alpha_2}^t(x) &= \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_t} (\phi_{\alpha_1\alpha_2}^> e^{-ik_\mu^>x^\mu} + \frac{1}{m^2} k_{\alpha_1}^> \dot{\alpha}_1 k_{\alpha_2}^> \dot{\alpha}_2 \bar{\phi}_{\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1}^> e^{ik_\mu^>x^\mu}) \\
&+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\phi_{\alpha_1\alpha_2}^< e^{-|\omega|t} + \frac{1}{m^2} k_{\alpha_1}^< \dot{\alpha}_1 k_{\alpha_2}^< \dot{\alpha}_2 \bar{\phi}_{\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1}^< e^{|\omega|t})
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
F_t^{\alpha_1\alpha_2}(x) &= - \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_t} (\tilde{\phi}_{\alpha_1\alpha_2}^> e^{-ik_\mu^>x^\mu} + \frac{1}{m^2} \tilde{k}_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \tilde{k}_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \bar{\tilde{\phi}}_{\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1}^> e^{ik_\mu^>x^\mu}) \\
&+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\tilde{\phi}_{\alpha_1\alpha_2}^< e^{-|\omega|t} + \frac{1}{m^2} \tilde{k}_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \tilde{k}_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \bar{\tilde{\phi}}_{\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1}^< e^{|\omega|t})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_t^\alpha(x) &= -m \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_t} (\varphi_{\alpha}^> e^{-ik_\mu^>x^\mu} + \frac{1}{m} \tilde{k}_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \bar{\phi}_{\dot{\alpha}}^> e^{ik_\mu^>x^\mu}) \\
&+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\varphi_{\alpha}^< e^{-|\omega|t} + \frac{1}{m} \tilde{k}_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \bar{\phi}_{\dot{\alpha}}^< e^{|\omega|t})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_t(x) &= -m^2 \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_t} (\varphi_{\alpha}^> e^{-ik_\mu^>x^\mu} + \bar{\phi}_{\alpha}^> e^{ik_\mu^>x^\mu}) \\
&+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\varphi_{\alpha}^< e^{-|\omega|t} + \bar{\phi}_{\alpha}^< e^{|\omega|t})
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi^> &= \phi_t \Theta(\vec{k}^2 - m^2) \\
\phi^< &= \phi_t \Theta(m^2 - \vec{k}^2)
\end{aligned}$$

Las expresiones (4.76) y (4.77) estan escritas de tal forma que automáticamente satisfacen las ecuaciones (4.72) y por supuesto (4.73).

## 4.6 Cuantificación

La cuantificación la haremos con el procedimiento descrito en la sección (4.4), o sea exigiendo que  $Q_\alpha$  sea efectivamente un generador de supersimetría. Si ello ocurre, las ecuaciones de Heisenberg se satisfacen automáticamente.

Podemos escribir entonces el vector impulso-energía como

$$\Gamma_\alpha^{\mu\dot{\alpha}} P_\mu = \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\} \tag{4.78}$$

Para escribirlo usamos simplemente el resultado de (4.59) evaluado en  $d = 6$ , y utilizando la notación introducida en (4.76) y (4.77).

El resultado es entonces:

$$P_\mu = P_\mu^b + P_\mu^t \quad (4.79)$$

donde

$$P_\mu^b = \int d\vec{k} k_\mu^b (\bar{\phi}_b \phi_b + \bar{\phi}_b^{\dot{\alpha}} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}}^\alpha}{m^2} \phi_\alpha^b + \bar{\phi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2}}{2!2!m^4} \phi_{\alpha_1 \alpha_2}^b + \bar{\varphi}_b \varphi_b + \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}} \frac{K_{\dot{\alpha}}^\alpha}{m^2} \varphi_\alpha^b + \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \frac{K_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} K_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2}}{2!2!m^4} \tilde{\varphi}_b^{\alpha_1 \alpha_2}) \quad (4.80)$$

$$P_\mu^t = - \int d\vec{k} k_\mu^t (\bar{\phi}_> \phi_> + \bar{\phi}_>^{\dot{\alpha}} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}}^\alpha}{m^2} \phi_>^\alpha + \bar{\phi}_>^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2}}{2!2!m^4} \phi_{\alpha_1 \alpha_2}^> + \bar{\varphi}_> \varphi_> + \bar{\varphi}_>^{\dot{\alpha}} \frac{K_{\dot{\alpha}}^\alpha}{m^2} \varphi_>^\alpha + \bar{\varphi}_>^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \frac{K_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} K_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2}}{2!2!m^4} \tilde{\varphi}_>^{\alpha_1 \alpha_2}) - \int d\vec{k} k_\mu^t (\bar{\varphi}_< \phi_< + \bar{\varphi}_<^{\dot{\alpha}} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}}^\alpha}{m^2} \phi_<^\alpha + \bar{\varphi}_<^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \frac{\tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2}}{2!2!m^4} \phi_{\alpha_1 \alpha_2}^< + \bar{\phi}_< \varphi_< + \bar{\phi}_<^{\dot{\alpha}} \frac{K_{\dot{\alpha}}^\alpha}{m^2} \varphi_<^\alpha + \bar{\phi}_<^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1} \frac{K_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} K_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2}}{2!2!m^4} \tilde{\varphi}_<^{\alpha_1 \alpha_2}) \quad (4.81)$$

Se pueden observar dos diferencias entre (4.80) y (4.81). La primera es el signo de  $P_\mu^b$  y  $P_\mu^t$ . La contribución de los campos taquiónicos a la energía del sistema, es de signo contrario a la contribución de los campos bradiónicos. Como vimos esto es típico de las ecuaciones diferenciales de orden superior y no está relacionado con el hecho que estos campos sean taquiónicos. Por supuesto esto es un problema, ya que cuando en la teoría se considere interacción entre bradiones y taquiones, tanto unos como los otros se harán inestables.

El otro punto a observar es que la contribución taquiónica tiene dos partes. La primera está definida para valores de  $\vec{k} > m^2$ , y es aparentemente similar a la de los bradiones; en cambio la segunda toma valores para  $\vec{k} < m^2$ , y podemos ver que mezclan los campos “ $\phi$ ” y “ $\varphi$ ”. Esto está ligado al hecho que esta contribución corresponde a polos del propagador situados en eje imaginario del plano complejo  $k_0$ . Este punto lo veremos con más detalle en el capítulo siguiente.

La cuantificación se completa, exigiendo reglas de conmutación o anticonmutación entre los campos, según sean bosones o fermiones, de tal forma que  $Q_\alpha$ , sea efectivamente el generador de las transformaciones de supersimetría.

Exigiendo esto obtenemos para los bradiones:

$$\begin{aligned}
 [\phi_b, \bar{\phi}_b] &= \frac{\omega}{m^2} \delta(k - k') \\
 \{\phi_\alpha^b, \bar{\phi}_b^{\dot{\alpha}}\} &= \frac{\omega}{m^2} K_\alpha^{\dot{\alpha}} \delta(k - k') \\
 [\phi_{\alpha_1 \alpha_2}^b, \bar{\phi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1}] &= \frac{\omega}{m^2} K_{\alpha_1}^{[\dot{\alpha}_1} K_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2]} \delta(k - k')
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
 [\varphi_b, \bar{\varphi}_b] &= \frac{\omega}{m^2} \delta(k - k') \\
 \{\varphi_b^\alpha, \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}}\} &= \frac{\omega}{m^2} \tilde{K}_{\dot{\alpha}}^\alpha \delta(k - k') \\
 [\tilde{\varphi}_b^{\alpha_1 \alpha_2}, \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1}] &= \frac{\omega}{m^2} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{[\alpha_1} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2]} \delta(k - k')
 \end{aligned}$$

Mientras que para los taquiones con  $\vec{k}^2 > m^2$

$$\begin{aligned}
 [\phi_{>}, \bar{\phi}_{>}] &= -\frac{\omega}{m^2} \delta(k - k') \\
 \{\phi_\alpha^>, \bar{\phi}_b^{\dot{\alpha}}\} &= -\frac{\omega}{m^2} K_\alpha^{\dot{\alpha}} \delta(k - k') \\
 [\phi_{\alpha_1 \alpha_2}^>, \bar{\phi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1}] &= -\frac{\omega}{m^2} K_{\alpha_1}^{[\dot{\alpha}_1} K_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2]} \delta(k - k')
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
 [\varphi_{>}, \bar{\varphi}_{>}] &= -\frac{\omega}{m^2} \delta(k - k') \\
 \{\varphi_\alpha^>, \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}}\} &= -\frac{\omega}{m^2} \tilde{K}_{\dot{\alpha}}^\alpha \delta(k - k') \\
 [\tilde{\varphi}_{>}^{\alpha_1 \alpha_2}, \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1}] &= -\frac{\omega}{m^2} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{[\alpha_1} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2]} \delta(k - k')
 \end{aligned}$$

y para los taquiones con  $\vec{k}^2 < m^2$

$$\begin{aligned}
 [\phi_{<}, \bar{\varphi}_{<}] &= i \frac{|\omega|}{m^2} \delta(k - k') \\
 \{\phi_\alpha^<, \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}}\} &= i \frac{|\omega|}{m^2} K_\alpha^{\dot{\alpha}} \delta(k - k') \\
 [\varphi_{\alpha_1 \alpha_2}^<, \bar{\varphi}_b^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_1}] &= i \frac{|\omega|}{m^2} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_1}^{[\alpha_1} \tilde{K}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2]} \delta(k - k')
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Las relaciones (4.82) son las reglas de conmutación habituales para los campos, mientras que las (4.83), presentan un signo de diferencia con las anteriores. Esto hace que el espacio de Fock de los estados tenga una métrica indefinida.

Por otro lado las relaciones (4.84) indican que las relaciones de conmutación entre los campos  $\phi^<$  y  $\varphi^<$  son del tipo de las de los impulsos y coordenadas canónicas, ya que aparece una "i" en el conmutador. Esto hace que la contribución de los campos  $\phi^<$  al Hamiltoniano tenga la forma de un producto de la coordenada por su impulso canónico.

Dado que el Hamiltoniano no es definido positivo y la métrica del espacio de Fock no es positiva, tendremos serios problemas si consideramos a los taquiones como partículas asintóticamente libres. Los problemas más serios los encontraremos en la teoría en interacción, ya que como veremos es prácticamente imposible construir una teoría unitaria con taquiones en los estados asintóticos. (ver ref. [26])

Por otro lado, la cuantificación debe complementarse con la construcción del espacio de Fock, o sea que hay que encontrar una base de representación sobre la cual actúen los operadores de campo. Una vez construido este espacio, es posible calcular los propagadores (valor de expectación de vacío del producto cronológico de dos campos), que son los objetos centrales de la teoría.

Este no es un problema trivial en el caso de los taquiones. Veremos que las propiedades físicas de estas partículas llevan a una estructura del espacio de Fock diferente a la de las partículas normales. El próximo capítulo lo dedicamos a discutir este tema.

## Capítulo 5

# Un Modelo Simplificado para el Campo Escalar

### 5.1 Ecuación Generalizada de Klein-Gordon

Hemos visto que la extensión natural de supersimetría a espacios de dimensión mayor que cuatro conduce a teorías cuya ecuación de movimiento contiene derivadas de orden superior a dos. En particular la extensión del modelo de Wess-Zumino para un supercampo quiral conduce a

$$(\square^\omega - m^{\omega/2})\chi = 0 \quad \omega = 2^{\frac{d}{2}-1} \quad (5.1)$$

para todas las componentes del supercampo.

En  $d = 6$  la ecuación es

$$(\square^2 - m^4)\chi = (\square + m^2)(\square - m^2)\chi = 0 \quad (5.2)$$

La última expresión hace evidente una característica de todas las ecuaciones (5.1), esto es, junto con los estados normales que obedecen la ecuación de Klein-Gordon, cuyos cuantos llamaremos “bradiones”, existen otros estados “taquiónicos” cuyos cuantos tienen masa al cuadrado negativa.

Si bien hemos tomado como “teoría completa” el modelo de Wess-Zumino en  $d = 6$ , para nuestros propósitos en este capítulo decidimos extraer del supercampo quiral, la componente escalar presentandola como un campo real independiente que obedece la ecuación (5.2).

Está claro que de esta forma perdemos supersimetría, pero por otro lado ganamos en claridad y simplicidad ya que las componentes multispinoriales del campo están ausentes y no es necesario repetir para ellas el procedimiento que llevaremos a cabo para el campo escalar.

## 5.2 Hamiltoniano

Si en la ecuación (5.2) introducimos la transformada de Fourier del campo (la métrica es  $+, -, -, \dots, -$ )

$$\psi(x) = \int dp e^{-ipx} \psi(p) \quad (5.3)$$

encontramos fácilmente que la solución general de (5.2) puede ser escrita como

$$\psi(x) = \psi^b(x) + \psi^t(x) \quad (5.4)$$

donde  $\psi^b$  es la parte “normal” o “bradiónica” de  $\psi(x)$

$$\psi^b(x) = \int dk e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \{ \psi_k e^{i\omega t} + \psi_{-k}^* e^{-i\omega t} \} \quad (5.5)$$

y  $\psi^t$  es la parte “anormal” o “taquiónica” de  $\psi(x)$

$$\begin{aligned} \psi^t(x) &= \int dk e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \{ \phi_k e^{i\omega' t} + \phi_{-k}^* e^{-i\omega' t} \} \Theta(\vec{k}^2 - m^2) + \\ &+ \int dk e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \{ \chi_k^1 e^{-\omega' t} + \chi_{-k}^2 e^{\omega' t} \} \Theta(m^2 - \vec{k}^2) \\ \omega' &= \sqrt{|\vec{k}^2 - m^2|}, \quad \omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es conveniente reescribir la componente taquiónica (5.6) de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 \quad (5.7)$$

con

$$\phi_0 = \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega}} (a_k e^{ikx} + a_k^* e^{-ikx}) \Theta(\vec{k}^2 - m^2) \quad (5.8)$$

$$\phi_1 = \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega}} (b_k^1 e^{-\omega t} + c_k^1 e^{\omega t}) \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) \Theta(m^2 - \vec{k}^2) \quad (5.9)$$

$$\phi_2 = \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega}} (b_k^2 e^{-\omega t} + c_k^2 e^{\omega t}) \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}) \Theta(m^2 - \vec{k}^2) \quad (5.10)$$



con  $k_0 = \omega = \sqrt{|\vec{k}^2 - m^2|}$

Podemos ahora calcular el Hamiltoniano con los métodos descritos en el primer capítulo. Esto conduce a

$$H = H^b - H^t \quad (5.11)$$

donde

$$H^b = \int d\vec{k} \omega (\psi_k^* \psi_k + \psi_k \psi_k^*) \quad (5.12)$$

y

$$H^t = H_0 + H_1 + H_2$$

con

$$H_0 = \int dk \frac{1}{2} \omega (a_k^* a_k + a_k a_k^*) \Theta(\vec{k}^2 - m^2) \quad (5.13)$$

$$H_j = \int dk \frac{1}{2} \omega (b_k^j c_k^j + c_k^j b_k^j) \Theta(m^2 - \vec{k}^2) \quad , \quad (j = 1, 2) \quad (5.14)$$

Si ahora imponemos que se cumplan las ecuaciones de Heisenberg

$$[H, \psi(x)] = -i\partial_0 \psi \quad (5.15)$$

y utilizamos (5.11), (5.12), (5.13), y (5.14) obtenemos las siguientes reglas de conmutación:

$$[\psi_k, \psi_{k'}^*] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.16)$$

$$[a_k, a_{k'}^*] = -\delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.17)$$

$$[b_k^l, c_{k'}^m] = i\delta^{lm} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.18)$$

En este punto podemos hacer algunas observaciones interesantes. De (5.12), (5.13) y (5.14), podemos ver que para  $\vec{k}^2 > m^2$ , el Hamiltoniano taquiónico tiene una estructura aparentemente similar al bradiónico, salvo por la función de Heaviside  $\Theta(\vec{k}^2 - m^2)$ . Mientras que para  $\vec{k}^2 < m^2$ , el Hamiltoniano taquiónico tiene estructura diferente.

Esta separación del espacio de los impulsos en dos regiones  $\vec{k}^2 > m^2$  y  $\vec{k}^2 < m^2$ , es típica en el tratamiento de taquiones. En general, la región con  $\vec{k}^2 < m^2$ , ha sido dejada de lado en trabajos anteriores sobre el tema [18].

Veremos aquí que ésta tiene una estructura muy interesante, y es esencial tenerla en cuenta para obtener una teoría unitaria.

La diferencia de comportamiento dentro y fuera de la esfera  $\vec{k}^2 = m^2$  se puede observar también en las relaciones de conmutación (5.16), (5.17) y (5.18), las relaciones (5.16) y (5.17) tienen la misma estructura, salvo la diferencia de signo que es típico en cualquier ecuación de cuarto orden. En cambio la ecuación (5.18), no tiene la forma de las relaciones de conmutación entre operadores de creación y destrucción, sino que es similar a las reglas de conmutación entre coordenadas e impulsos canónicos.

### 5.3 Espectro y autofunciones

La construcción del espacio de Fock para bradiones, es bien conocida, por lo que no repetiremos aquí el mecanismo para llevarla a cabo. En cambio, discutiremos en detalle la cuantificación del taquión. Seguiremos esencialmente la referencia [19].

En primer lugar analizaremos el problema de autovalores del Hamiltoniano  $H_0$  (eq. (5.13)), con las reglas de conmutación (5.17).

Para cada grado de libertad  $\vec{k}$  ( $\vec{k}^2 > m^2$ ) podemos escribir simplemente

$$h_0 = \frac{1}{2}\omega(a^*a + aa^*) \quad , \quad [a, a^*] = 1 \quad (5.19)$$

(obviamos aquí la diferencia de signo ya que para nuestro actual propósito es irrelevante)

De (5.19) se sigue que

$$[h_0, a^*] = \omega a^* \quad (5.20)$$

$$[h_0, a] = -\omega a \quad (5.21)$$

De manera tal que para cualquier autoestado de  $h_0$ , con autovalor  $E$

$$h_0|E\rangle = E|E\rangle \quad (5.22)$$

tenemos

$$h_0 a^*|E\rangle = (E + \omega)a^*|E\rangle \quad (5.23)$$

$$h_0 a|E\rangle = (E - \omega)a|E\rangle \quad (5.24)$$

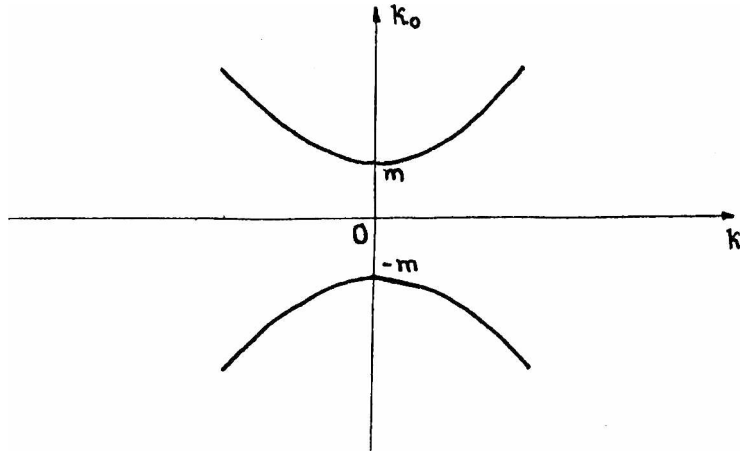


Figura 5.1: Hiperboloide de masa para un bradión

De (5.23) y (5.24) deducimos que el operador  $a^*$  incrementa la energía del estado una cantidad  $\omega$ , mientras que el operador  $a$  la disminuye.

Para una partícula bradiónica

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \quad (5.25)$$

y el lugar geométrico de todos los  $p_\mu$  que satisfacen ésta ecuación es un hiperboloide de dos hojas (ver figura (5.1)).

Cada una de estas hojas es invariante de Lorentz y pueden ser caracterizadas por el signo de  $p_0$ . El requerimiento que la energía de una partícula bradiónica sea positiva es por lo tanto invariante de Lorentz, y consecuentemente debe existir una base para la representación de (5.19), con la propiedad que uno de sus vectores (el vacío  $|0\rangle$ ) satisfaga

$$a|0\rangle = 0 \quad (5.26)$$

A partir de este vector podemos construir toda la base aplicando sucesivamente el operador de creación. Construimos de este modo el espacio de Fock para bradiones.

Para taquiones la situación es diferente. El lugar geométrico de los  $p_\mu$  que satisfacen

$$p^2 + m^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 + m^2 = 0 \quad (5.27)$$

es ahora un hiperboloide de una hoja, y ninguna parte propia es invariante de Lorentz (ver figura (5.2)). Se observa también que existe una simetría

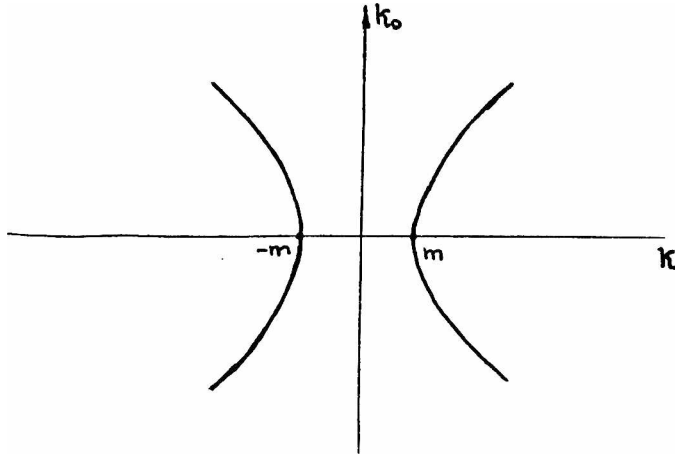


Figura 5.2: Hiperboloide de masa para un taquión

con respecto al signo de la energía y la base deberá tener esa propiedad. El espectro deberá estar formado por una serie de niveles igualmente espaciados centrados en el origen. Para ello tenemos dos posibilidades: o bien tenemos un vacío  $h_0|0\rangle = 0$ , o existen dos niveles que distan del origen  $\omega/2$ . Veremos que este último caso es inconsistente.

De hecho si

$$h_0|+\rangle = \frac{\omega}{2}|+\rangle$$

y

$$h_0|-\rangle = -\frac{\omega}{2}|-\rangle$$

con  $a^*|-\rangle = \alpha|+\rangle$  entonces

$$(a^*a + aa^*)|-\rangle = -|-\rangle, \quad \therefore aa^*|-\rangle = 0 \quad (5.28)$$

Pero entonces

$$\langle -|aa^*|-\rangle = |\alpha|^2 \langle +|+\rangle = 0 \quad (5.29)$$

y el estado  $|+\rangle$  o el  $|-\rangle$  no es normalizable.

Para un autoestado de energía cero de  $h_0$  tenemos

$$h_0|0\rangle = 0 \quad \therefore \quad (a^*a + aa^*)|0\rangle = 0$$

$$(2aa^* - 1)|0\rangle = 0 \quad (5.30)$$

$$aa^*|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle \quad (5.31)$$

$$a^*a|0\rangle = -\frac{1}{2}|0\rangle \quad (5.32)$$

Podemos construir ahora el espacio de Fock para el taquión aplicando sucesivas veces el operador de “crecimiento”  $a^*$  y de “decrecimiento”  $a$ .

$$a^{*m}|0\rangle = \alpha_m|m\rangle \quad ; \quad a^m|0\rangle = \beta_m|-m\rangle$$

$$aa^*|m\rangle = (m + \frac{1}{2})|m\rangle \quad (5.33)$$

$$a^*a|m\rangle = (m - \frac{1}{2})|m\rangle \quad (5.34)$$

$$h_0|m\rangle = m\omega|m\rangle \quad (5.35)$$

$$h_0|-m\rangle = -m\omega|-m\rangle \quad (5.36)$$

El número “ $m$ ” indica el número de unidades de energía  $\omega$  contenida en el estado  $|m\rangle$  y es un entero positivo, negativo, o nulo. El espectro de energía no está acotado ni superior ni inferiormente. Obviamente esto significa que la base no tendrá un producto escalar definido positivo, sin embargo  $aa^* + a^*a$  es un operador definido positivo en un espacio de Hilbert. Nuestros requerimientos llevan entonces a la adopción de una base que tiene métrica indefinida. Este tipo de métrica en teoría cuántica de campos ha sido estudiada de manera sistemática por ejemplo en la referencia [20]. Afortunadamente no será necesario preocuparnos por las formalidades relativas a este hecho, ya que como veremos los taquiones libres no podrán ocupar dichos estados.

Podemos observar también que a medida que  $\vec{k}^2 \rightarrow m^2$  ( $\vec{k}^2 > m^2$ ),  $\omega \rightarrow 0$ , y los niveles de energía son más y más densos. Veremos que para  $\vec{k}^2 < m^2$ , el espectro es continuo.

Volviendo a los operadores  $a_k$  definidos en (5.8), encontramos los siguientes valores de expectación de vacío

$$\langle 0|a_k a_{k'}|0\rangle = 0 = \langle 0|a_k^* a_{k'}^*|0\rangle \quad (5.37)$$

$$\langle 0|a_k a_{k'}^*|0\rangle = \frac{1}{2}\delta(\vec{k} - \vec{k}') = -\langle 0|a_{k'}^* a_k|0\rangle \quad (5.38)$$

Es interesante comparar (5.38) con el valor de expectación de productos de operadores de creación y destrucción de bradiones.

Tenemos que analizar ahora la forma del espectro para valores de  $\vec{k}^2 < m^2$ , el Hamiltoniano viene dado por (5.14), para cada grado de libertad  $\vec{k}$  con

$\vec{k}^2 < m^2$ , tiene la forma

$$h = \frac{1}{2}(pq + qp) = qp - \frac{i}{2} \quad ; \quad [q, p] = i \quad (5.39)$$

La ecuación de autovalores es

$$h\Psi = (qp - \frac{i}{2})\Psi = E\Psi \quad (5.40)$$

o en la representación usual de coordenadas:

$$-iq \frac{d}{dq} \Psi = (E + \frac{i}{2})\Psi \quad (5.41)$$

cuyas soluciones escribimos como

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} q_+^{iE - \frac{1}{2}} \quad ; \quad -\infty < E < +\infty \quad (5.42)$$

El espectro es continuo y toma valores a lo largo de todo el eje real  $E$ . En (5.42)  $q_+^\alpha = q^\alpha \Theta(q)$ . Existen soluciones análogas con  $q_-^\alpha = |q|^\alpha \Theta(-q)$

La normalización es tal que

$$(\Psi^E, \Psi^{E'}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dq q^{-iE - \frac{1}{2}} q^{iE' - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{q} q^{i(E' - E)} \quad (5.43)$$

y con el cambio de variables  $q \rightarrow y = \ln(q)$

$$(\Psi^E, \Psi^{E'}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{i(E' - E)y} = \delta(E' - E) \quad (5.44)$$

Las soluciones dadas en (5.42) son similares a las soluciones de ondas planas para partícula libre.

Las relaciones de ortogonalidad (5.43) y (5.44), están contenidas para  $E \neq E'$  en la expresión general [21]:

$$\int_0^{+\infty} dq q^z = 0, \quad (z \neq -1) \quad (5.45)$$

Esta fórmula muestra que el valor medio de  $q^\lambda$  (y de  $p^\lambda$ ) es cero en cualquier estado, para  $\lambda \neq 0$

$$(\Psi^E, q^\lambda \Psi^E) = \int_0^{+\infty} dq q^{\lambda-1} = 0 \quad , \quad (\lambda \neq 0) \quad (5.46)$$

Pero tenemos que

$$\begin{aligned} (\Psi^E, pq\Psi^E) &= \int_0^\infty dq q^{-iE-\frac{1}{2}} (-i) \frac{d}{dq} q q^{iE'-\frac{1}{2}} \\ &= (E' - \frac{i}{2}) \delta(E' - E) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Del mismo modo

$$(\Psi^E, qp\Psi^E) = (E' + \frac{i}{2}) \delta(E' - E) \quad (5.48)$$

Podemos escribir los valores medios entre estados de energía cero, usando una versión “discretizada” de (5.46), (5.47) y (5.48).

Si llamamos  $\Psi^{E=0} \equiv |0\rangle$ , entonces

$$\langle 0|q^\lambda|0\rangle = 0 = \langle 0|p^\lambda|0\rangle, \quad (\lambda \neq 0) \quad (5.49)$$

$$\langle 0|pq|0\rangle = -\frac{i}{2} = -\langle 0|qp|0\rangle \quad (5.50)$$

## 5.4 Valores de Expectación de Vacío de Producto de Operadores de Campo

En primer lugar evaluamos el valor de expectación de vacío para  $\phi_0$  dado por (5.8). Teniendo en cuenta (5.37) y (5.38)

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_0(x), \phi_0(y)|0\rangle &= \\ &= \langle 0| \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega}} \int \frac{dk'}{\sqrt{2\omega'}} (a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}) \times \\ &\quad \times (a_{k'} e^{-ik'y} + a_{k'}^* e^{ik'y}) |0\rangle \\ &= \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega}} \int \frac{dk'}{\sqrt{2\omega'}} \{ \langle 0|a_k a_{k'}^*|0\rangle e^{-ikx+ik'y} + \\ &\quad + \langle 0|a_k^* a_{k'}|0\rangle e^{ikx-ik'y} \} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dk}{2\omega} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Notemos que para bradiones hubiéramos obtenido el primer exponencial sin el factor  $\frac{1}{2}$ . Usando (5.51) podemos evaluar el valor de expectación de

vacio del producto cronológico.

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi_0(x)\phi_0(y)|0 \rangle &= \langle 0|\phi_0(x)\phi_0(y)|0 \rangle \Theta(x_0 - y_0) \\ &+ \langle 0|\phi_0(y)\phi_0(x)|0 \rangle \Theta(y_0 - x_0) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Como la (5.51) cambia de signo al cambiar  $x$  por  $y$

$$\langle 0|T\phi_0(x)\phi_0(y)|0 \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{dk}{2\omega} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) Sg(x_0 - y_0) \quad (5.53)$$

Para bradiones hubiéramos obtenido

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi^{br}(x)\phi^{br}(y)|0 \rangle &= \\ &= \int \frac{dk}{2\omega} (e^{-ik(x-y)} \Theta(x_0 - y_0) + e^{ik(x-y)} \Theta(y_0 - x_0)) \\ &= -i\Delta_F(x - y) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Es sencillo ver que (5.53) puede ser escrita como

$$\langle 0|T\phi_0(x)\phi_0(y)|0 \rangle = -\frac{i}{2} (\Delta_F^T(x - y) + \overline{\Delta_F^T(x - y)}) \quad (5.55)$$

donde  $\Delta_F^T$  es la función de Feynman "truncada" ( se suprime la esfera  $\vec{k}^2 < m^2$ )

Podemos tambien escribir (5.53) de la siguiente manera

$$\langle 0|T\phi_0(x)\phi_0(y)|0 \rangle = -\frac{i}{2} (\Delta_R^T(x - y) + \Delta_A^T(x - y)) \quad (5.56)$$

donde  $\Delta_R^T$  y  $\Delta_A^T$  son las funciones de Green (truncadas) retardada y avanzada respectivamente.

Podemos comprobar que el miembro izquierdo de las ecuaciones (5.53), (5.55) y (5.56) coincide con el valor principal de Cauchy en los polos  $k_0 = \pm\omega$ .

Del mismo modo, para  $\vec{k}^2 < m^2$ , teniendo en cuenta (5.49) y (5.50)

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_1(x), \phi_1(y)|0 \rangle &= \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega}} \int \frac{dk'}{\sqrt{2\omega'}} \\ &\{ \langle 0|b_k^1 c_{k'}^1|0 \rangle \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{y}) e^{\omega x_0 - \omega' y_0} + \\ &\langle 0|c_k^1 b_{k'}^1|0 \rangle \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{y}) e^{\omega' x_0 - \omega y_0} \} \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{dk}{2\omega} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{y}) (e^{-\omega(x_0 - y_0)} - e^{\omega(x_0 - y_0)}) \end{aligned} \quad (5.57)$$



Tambien

$$\begin{aligned} < 0 | \phi_2(x), \phi_2(y) | 0 > = \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{dk}{2\omega} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{y}) (e^{-\omega(x_0-y_0)} - e^{\omega(x_0-y_0)}) \end{aligned} \quad (5.58)$$

sumando (5.57) y (5.58) obtenemos

$$< 0 | \phi(x), \phi(y) | 0 > = \frac{i}{2} \int \frac{dk}{2\omega} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (e^{-\omega(x_0-y_0)} - e^{\omega(x_0-y_0)}) \quad (5.59)$$

de la cual obtenemos para la esfera  $S : \vec{k}^2 < m^2$

$$\begin{aligned} < 0 | T \phi(x), \phi(y) | 0 > = \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{dk}{2\omega} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (e^{-\omega(x_0-y_0)} - e^{\omega(x_0-y_0)}) Sg(x_0 - y_0) \\ &= -\frac{i}{2} (\Delta_R^S(x - y) + \Delta_A^S(x - y)) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Juntando esta última con (5.53) y (5.56)

$$\begin{aligned} < 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 > &= -\frac{i}{2} (\Delta_R(x - y) + \Delta_A(x - y)) \\ &= -i \Delta_{Cauchy}(x - y) \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde ahora incluimos todo el espacio  $\vec{k}$ .

La función de Green recién construida puede definirse en término de su transformada de Fourier. Cuando  $\vec{k}^2 > m^2$  la expresión  $(\vec{k}^2 - m^2)^{-1}$  tiene dos polos reales en  $k_0 = \pm\omega$  y la integración sobre  $k_0$  para  $\Delta_R$  corre a lo largo del eje real dejando los polos a la derecha. Lo mismo ocurre con  $\Delta_A$  pero dejando los polos a la izquierda.

Cuando  $\vec{k}^2 < m^2$  los polos se desplazan hacia el eje imaginario a  $\pm i|\omega|$  y la integración sobre  $k_0$  corre a lo largo del eje real pero substrayendo (respectivamente sumando) el residuo en  $+i|\omega|$  (respectivamente  $-i|\omega|$ ).

La función de Green para el taquión puede entonces ser definida como la transformada de Fourier de  $(\vec{k}^2 - m^2)^{-1}$ , donde la integración sobre  $k_0$  puede ser considerada como la superposición de dos ramas (eq.(5.61)). Una de ellas deja los dos polos ( $\pm\omega$  o  $\pm i|\omega|$ ) a la derecha del camino de integración, y la otra los deja a la izquierda.

# Capítulo 6

## Propagadores

### 6.1 Taquiones

Hemos desarrollado en el capítulo (4) algunas de las características del modelo de Wess-Zumino en  $d = 6$ . Deducimos a partir del álgebra de supersimetría las relaciones de conmutación de los campos, y dijimos también que la cuantificación se completaba construyendo el espacio de Fock de los estados y calculando los propagadores que son los objetos centrales en una teoría perturbativa.

Vimos también que la dificultad más importante que se presentaba era la presencia de estados taquiónicos. En el capítulo (5) describimos, sobre un modelo simplificado, como tratar esos estados.

Sería interesante en este punto, nombrar algunos de los trabajos pioneros en el tema, sin pretender hacer una lista exhaustiva de estos. En realidad siempre hubo alguna actividad a favor o en contra de incluir a los taquiones dentro de la corte de las partículas teóricamente respetables.

Desde un punto de vista más moderno el desarrollo del tema adquirió un impulso importante en los '60 con los trabajos de O.Billaniuk, V.Deshpande, E.Sudarshan, R.Jones, y G.Fainberg. [22]. Fue en esta última referencia donde la palabra taquión apareció por primera vez, mientras que la palabra "bradión" para partículas normales fue dado independientemente por R.Cawley [23], A.Barnard, E.Salling [24] y E.Recami [25]

En teoría cuántica se han hecho algunas propuestas en las cuales se consideraba a los taquiones como partículas virtuales, que solamente mediaban

la interacción. En particular, E.Sudarshan, introdujo un cut-off para el espacio de los impulsos en la esfera  $\vec{k}^2 = m^2$ .

Finalmente nos gustaría llamar la atención sobre el trabajo de la referencia [26] donde se muestra la imposibilidad de construir una matriz S unitaria con taquiones libres.

Creemos que todos estos argumentos sumados al que nunca se han observado taquiones, hace que esté generalmente aceptado que no es posible permitir que los taquiones aparezcan en estados asintóticos de una teoría consistente.

Esto mismo se puede concluir de la forma del propagador que encontramos en el capítulo anterior. Vimos que un tratamiento consistente de la cuantificación del taquíon conduce a un propagador que es una función de Cauchy.

$$\langle 0|T\phi^t(x)\phi^t(y)|0 \rangle = -i\Delta_{Cauchy}(x-y)$$

Esta función elimina automáticamente la  $\delta$  de la capa de masa y por lo tanto ninguna interacción puede poner una línea de taquíon (en un diagrama de Feynman) sobre la capa de masa (on shell). El correspondiente espacio de Fock no puede ser entonces ocupado y los taquiones no aparecen en los estados asintóticos.

En cierto sentido este es un espacio fantasma. A este respecto quisieramos puntualizar algunas diferencias importantes con las partículas fantasmas (ghosts). En primer lugar los taquiones no han sido introducidos para compensar algunos grados de libertad de una simetría local, tampoco son el resultado de fijar un gauge. Por el contrario, han sido incluidos en la ecuación de movimiento original en un pie de igualdad con respecto a los bradiones. Además, asignamos a los taquiones las relaciones normales de spin-estadística, en este caso la estadística de Bose-Einstein para el campo escalar, sin embargo ya que los taquiones no son observables, no están obligados a cumplir con el teorema de conexión spin-estadística. Este tema se puede encontrar desarrollado en la referencia [27].

Estas consideraciones recién expuestas, hacen posible la siguiente deducción eurística del propagador del taquíon, que quizás ayuden a aclarar los conceptos físicos involucrados.

La ausencia de taquiones en las patas externas de diagramas de Feynman significa que el campo libre asintótico correspondiente está desacoplado. Uno

debe tener en cuenta este hecho cuando define la función de Green.

$$(\square - m^2)G^t(x) = -\delta(x) \quad (6.1)$$

La transformada de Fourier de esta expresión es para  $p^2 + m^2 \neq 0$

$$G^t(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}$$

Para que la definición de la función de Green quede completamente determinada es necesario definirla en el polo, y es claro que dos soluciones cualquiera solo pueden diferir en una solución de la ecuación homogénea.

En los casos usuales, la cuantificación del campo lleva a un propagador que coincide con la prescripción de Feynman, o sea agregar una constante imaginaria ( $i\epsilon$ ) en el denominador, y tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  al final de los cálculos.

$$G_F^t(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 + i\epsilon} \quad (6.2)$$

Esta función de Green tiene un significado físico concreto, es cuantitativamente causal.

Podemos reescribir (6.2) de la siguiente forma

$$G_F^t(p) = P \frac{1}{p^2 + m^2} - i\pi \delta(p^2 + m^2) \quad (6.3)$$

donde P significa que en la singularidad debe tomarse el valor principal de Cauchy.

La ecuación (6.3) separa explícitamente la contribución de partícula libre dada por  $\delta(p^2 + m^2)$ , ya que

$$(p^2 + m^2)\delta(p^2 + m^2) = 0 \quad (6.4)$$

De acuerdo con el criterio aquí adoptado esta contribución debe ser eliminada, dando como resultado para la función de Green

$$G^t(p) = P \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (6.5)$$

Esta última expresión la tomaremos como el propagador del taquión cuando  $\vec{p}^2 \geq m^2$

Podemos dar algunas formas equivalentes al propagador recién definido, de (6.2) y (6.3)

$$P \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{p^2 + m^2 + i\epsilon} + i\pi\delta(p^2 + m^2) \quad (6.6)$$

$$G^t(p) = G_F^t(p) + i\pi\delta(p^2 + m^2) \quad (6.7)$$

El valor principal también puede ser escrito en función de la función de Green avanzada ( $G_A$ ) y retardada ( $G_R$ )

$$P \frac{1}{p^2 + m^2} = G^t(p) = \frac{1}{2}G_A^t(p) + \frac{1}{2}G_R^t(p) \quad (6.8)$$

Nuestro propagador queda entonces definido como la transformada de Fourier de  $(p^2 + m^2)^{-1}$ , donde la integración sobre  $p_0$  corre sobre el eje real pero se bifurca en los polos. Una de las ramas deja los dos polos por debajo del camino, mientras que la otra rama los deja por arriba.

Notemos que la evaluación del valor de expectación de vacío del orden cronológico de dos campos, confirma este propagador, como mostramos en el capítulo (5).

La expresión (6.8) para el propagador de Cauchy muestra que la función de Green (6.5) para el taquión, tiene un precedente en el trabajo de la referencia [28] para la propagación electromagnética.

## 6.2 Propagador de la Ecuación de Cuarto Orden

Vamos a construir ahora el propagador de la teoría de cuarto orden para el campo escalar presentada en el capítulo anterior.

La función de Green viene dada por

$$(\square^2 - m^4)G(x) = -\delta(x) \quad (6.9)$$

De (6.9) podemos deducir que para  $p^4 \neq m^4$

$$G(p) = \frac{1}{p^4 - m^4} = \frac{1}{2m^2} \left( \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2 + m^2} \right) \quad (6.10)$$

donde reconocemos fácilmente la contribución bradiónica y la taquiónica. Completamos entonces la definición de la función de Green con la prescripción de Feynman y de Cauchy respectivamente.

$$2m^2 G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - P \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (6.11)$$

Teniendo en cuenta (6.7) podemos transformar (6.11) en

$$2m^2 G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{1}{p^2 + m^2 + i\epsilon} - i\pi \text{“}\delta\text{”} \quad (6.12)$$

$$G(p) = \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)(p^2 + m^2 + i\epsilon)} - \frac{i\pi}{2m^2} \text{“}\delta\text{”} \quad (6.13)$$

$$G(p) = \frac{1}{p^4 - m^4 + ip^2\epsilon} - \frac{i\pi}{2m^2} \text{“}\delta\text{”} \quad (6.14)$$

Hay que tener cuidado para interpretar correctamente el significado de las fórmulas de (6.3) a (6.14).

La función “ $\delta$ ” que aparece en estas fórmulas, tiene en cuenta (suprime), ambos polos en el plano complejo  $p_0$ ; cuando  $\bar{p}^2 > m^2$  tenemos

$$\text{“}\delta\text{”} = \delta(p^2 + m^2) = \frac{1}{2\omega} \{ \delta(p_0 - \omega) + \delta(p_0 + \omega) \}, \quad (\bar{p}^2 > m^2) \quad (6.15)$$

cuando  $\bar{p}^2 < m^2$  debemos tener

$$\text{“}\delta\text{”} = \frac{i}{2\omega'} \{ \delta(p_0 - i\omega') + \delta(p_0 + i\omega') \}, \quad (\bar{p}^2 < m^2, \omega' = |\omega|) \quad (6.16)$$

Donde el significado de la “función- $\delta$ ” como funcional analítica en el plano complejo está tomada de la referencia [29].

De esta manera, “ $\delta$ ” no está definida como es usual para  $\bar{p}^2 > m^2$  sino también para  $\bar{p}^2 < m^2$ , esto es necesario para tener en cuenta los polos de  $(p^2 + m^2)^{-1}$ , tanto sobre el eje real como sobre el eje imaginario.

### 6.3 Propagadores del Modelo de Wess-Zumino en $d = 6$

Estamos en condiciones ahora de escribir los propagadores para todas las componentes del supercampo quiral en el modelo de Wess-Zumino en  $d = 6$ .

Las relaciones de conmutación ya fueron deducidas en (4.82), (4.83), y (4.84). El espacio de Fock lo construimos siguiendo las prescripciones del modelo simplificado del capítulo (5).

El propagador para la componente escalar del supercampo quirral es, como ya vimos

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \Delta = \Delta_F^b - \Delta_{Cauchy}^t \quad (6.17)$$

Si ahora realizamos el cálculo para todas las componentes del supercampo obtenemos

$$\langle 0|T\psi_{\alpha_1\dots\alpha_s}(x)\bar{\psi}^{\dot{\alpha}_s\dots\dot{\alpha}_1}(y)|0\rangle = i\partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \dots \partial_{\alpha_s}^{\dot{\alpha}_s} \Delta(x-y) \quad (6.18)$$

con  $s = 1, \dots, \omega$ .

Podemos expresar estos propagadores en función de los campos duales usando la notación de la sección (4.5), y el símbolo  $\langle \phi\psi \rangle$  para indicar el valor de expectación de vacío del producto cronológico de dos campos.

a) campo escalar

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1\bar{\varphi}_2 \rangle &= \Delta_{12} & \langle \varphi_1 F_2 \rangle &= -m^2 \Delta_{12} \\ \langle F_1\bar{F}_2 \rangle &= \square^2 \Delta_{12} & \langle \bar{\phi}_1\bar{F}_2 \rangle &= -m^2 \Delta_{12} \end{aligned}$$

b) campo fermiónico

$$\begin{aligned} \langle \varphi_\alpha\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \rangle &= i\partial_\alpha^{\dot{\alpha}} \Delta_{12} & \langle \varphi_\alpha F^\beta \rangle &= -m^2 \delta_\alpha^\beta \Delta_{12} \\ \langle F^\alpha\bar{F}_{\dot{\alpha}} \rangle &= -i\square\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}^\alpha \Delta_{12} & \langle \bar{\phi}^{\dot{\alpha}}\bar{F}_{\dot{\beta}} \rangle &= -m^2 \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \Delta_{12} \end{aligned}$$

c) campo vectorial

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\alpha_1\alpha_2}\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1} \rangle &= -\partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \Delta_{12} \\ \langle F^{\alpha_1\alpha_2}\bar{F}_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2} \rangle &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}_1}^{\alpha_1} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}_2}^{\alpha_2} \Delta_{12} \\ \langle \varphi_{\alpha_1\alpha_2}\bar{F}_{\dot{\beta}_2\dot{\beta}_1} \rangle &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3\dot{\beta}_4} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\beta}_3} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\beta}_4} \Delta_{12} \\ \langle \varphi_{\alpha_1\alpha_2}\varphi_{\beta_1\beta_2} \rangle &= m^2 \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} \Delta_{12} \\ \langle \phi_{\alpha_1\alpha_2} F^{\beta_1\beta_2} \rangle &= m^2 \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta_{\alpha_2}^{\beta_2} \Delta_{12} \end{aligned}$$

Antes de terminar esta sección escribiremos la parte vectorial de la teoría en representación tensorial, que resulta más familiar que la spinorial.

La representación spinorial está ligada a la tensorial mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1\alpha_2} &= A_\mu(\gamma^\mu C)_{\alpha_1\alpha_2} \\ \psi^\dagger{}^{\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1} &= -A_\mu^\dagger(C\gamma^\mu)^{\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_1} \end{aligned}$$

Usando la propiedad  $Tr(\gamma^\mu \tilde{\gamma}^\nu) = Tr(I)\eta^{\mu\nu}$  y que  $C^2 = -I$  podemos despejar  $A^\mu$  de estas relaciones

$$\begin{aligned} A_\mu &= -\frac{1}{n} Tr(\psi C \tilde{\gamma}_\mu) \\ A_\mu^\dagger &= \frac{1}{n} Tr(C \psi^\dagger \tilde{\gamma}_\mu) \end{aligned} \quad (6.19)$$

con  $n = Tr(I)$ . Es sencillo ahora reemplazar  $\psi_\alpha$  obteniendo

$$\begin{aligned} P_\mu &= Tr(I) \sum_{j=1}^2 \int \frac{dk}{\omega_j} \frac{k_\mu^j}{2!m^2} (2A_j^{\dagger \mu} A_j^\nu k_m u k_\nu - \\ &\quad k_j^\rho k_\rho^j A_j^{\dagger \mu} A_\nu^j) \end{aligned}$$

Las reglas de conmutación quedarán expresadas por

$$[A_\mu, A^{\dagger \nu}] = \frac{\omega}{m^2} K_\mu^\nu \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6.20)$$

con  $K_\mu^\nu = 2k_\mu k^\nu - k^2 \delta_\mu^\nu$  y  $K_\mu^\nu K_\nu^\rho = k^4 \delta_\mu^\rho$  y los propagadores son

$$\begin{aligned} \langle A_\mu, A^{*\nu} \rangle &= (\partial_\mu \partial^\nu - \square \delta_\mu^\nu) \Delta \\ \langle A_\mu, A^\nu \rangle &= m^2 \delta_\mu^\nu \Delta \end{aligned}$$



# Capítulo 7

## Unitariedad

### 7.1 Unitariedad Perturbativa

Hemos analizado hasta aquí un modelo simplificado para el campo escalar donde aparece una ecuación generalizada de Klein-Gordon que contiene derivadas de cuarto orden. Hemos cuantificado el modelo, y calculado también algunos valores de expectación de vacío de producto de operadores de campo y, quizás lo mas importante, encontramos los propagadores.

Una cuestión esencial en este punto es verificar la unitariedad de la teoría, ya que éste es el principal problema que presentan las teorías con ecuaciones diferenciales de orden superior.

Es bien sabido que la unitariedad está ligada al concepto físico de “conservación de la probabilidad”, y una teoría que no satisfaga esta conservación no es físicamente aceptable.

Matemáticamente, esta propiedad se describe a travez de la matriz  $S$  como

$$SS^\dagger = I \quad (7.1)$$

si escribimos  $S$  como

$$S = I + iT$$

la ecuación (7.1) toma la forma

$$i(T - T^\dagger) = -TT^\dagger \quad (7.2)$$

Podemos evaluar esta expresión entre dos estados arbitrarios  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$

$$i \langle \alpha | (T - T^\dagger) | \beta \rangle = - \langle \alpha | TT^\dagger | \beta \rangle \quad (7.3)$$

Introducimos ahora en el segundo miembro de (7.3) una identidad

$$I = \sum_{\gamma} |\gamma\rangle\langle\gamma| \quad (7.4)$$

obteniendo

$$i \langle\alpha|(T - T^\dagger)|\beta\rangle = - \sum_{\gamma} \langle\alpha|T|\gamma\rangle\langle\gamma|T^\dagger|\beta\rangle \quad (7.5)$$

si buscamos el elemento de matriz con  $\alpha = \beta$ , encontramos

$$i \langle\alpha|(T - T^\dagger)|\alpha\rangle = - \sum_{\gamma} |\langle\alpha|T|\gamma\rangle|^2 \quad (7.6)$$

o

$$2i \text{Im} T_{\alpha\alpha} = - \sum_{\gamma} \sigma_{\alpha\gamma} \quad (7.7)$$

Este es el llamado “teorema óptico”, y expresa que la parte imaginaria (“absortiva”) de la amplitud de transición en una dispersión hacia adelante ( $|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$ ), está relacionado con la sección eficaz total del proceso cuyo estado inicial es  $|\alpha\rangle$ , y los estados  $|\gamma\rangle$  son todos los estados dinamicamente accesibles.

Si expandimos  $T$  perturbativamente, tendremos expresadas las amplitudes en términos de diagramas de Feynman, y la ecuación (7.6), se transformará en una relación entre diagramas orden a orden.

Si escribimos  $T$  de la siguiente manera

$$T = \sum_n g^n T_n$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento, y remplazamos en (7.6) obtenemos

$$2i \langle\alpha|\text{Im} T_{2n}|\alpha\rangle = - \sum_{\gamma} |\langle\alpha|T_n|\gamma\rangle|^2 \quad (7.8)$$

Si la teoría verifica estas relaciones orden a orden, decimos que se verifica unitariedad perturbativa.

El objetivo de este capítulo es verificar explícitamente que se satisface la ecuación (7.8), en la teoría que expusimos en el capítulo (5), al menos en los órdenes mas bajos.

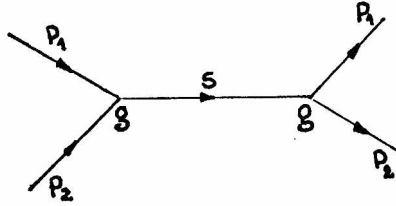


Figura 7.1: Contribución de orden dos a la dispersión de bradiones

## 7.2 Unitariedad en $\lambda\varphi^3$

Tomemos un campo escalar real  $\varphi$ , el cual satisface

$$(\square^2 - m^4)\varphi = g\varphi^2 \quad (7.9)$$

Podemos entonces hacer teoría de matriz  $S$ , dando las siguientes reglas de Feynman:

- de cada vértice salen tres líneas y lleva consigo una constante de acoplamiento  $g$ .
- a cada línea interna de un diagrama le corresponde el propagador de cuarto orden (6.11).
- a las líneas externas le corresponden estados bradiónicos.

En nuestro modelo simplificado tenemos dos componentes del campo, la componente bradiónica y la taquiónica. Vimos en (6.1) que la estructura del propagador del taquión, impide que estas partículas se produzcan en estados asintóticos. Por lo tanto en la identidad (7.4) solo incluimos estados bradiónicos. Es por esto que en los diagramas de Feynman todas las líneas externas representan estados bradiónicos.

Es fácil ver que a nivel árbol la (7.8) se satisface automáticamente. Por ejemplo tomemos el diagrama más sencillo a orden dos (ver figura (7.1)). En este caso

$$T_2 = g^2 G(s) = \frac{g^2}{2m^2} \left\{ \frac{1}{s^2 - m^2 + i\epsilon} - P \frac{1}{s^2 + m^2} \right\}$$

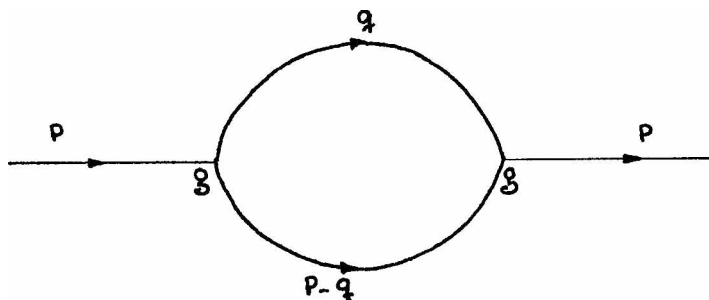


Figura 7.2: Diagrama de autoenergía de orden dos

Es claro que

$$2Im(T_2) = \frac{g^2}{m^2} \delta(s^2 - m^2)$$

en donde solo aparece la contribución del bradión.

El diagrama de dispersión de bradiones presenta una peculiaridad, debido a la contribución de taquiones. A pesar de que la amplitud es finita y puede ser evaluada fácilmente, está desacotada en la vecindad de cierto ángulo. Esto es debido al hecho que el bradión (cuando se acopla con el taquión) podría ser inestable si este último pudiera estar libre en un estado asintótico. Por supuesto, la prescripción del valor principal de Cauchy anula la amplitud cuando  $p^2 = -m^2$ , pero no cuando  $p^2 \neq -m^2$ , dando lugar a un comportamiento "resonante". Este hecho invalida el desarrollo perturbativo cerca de los valores de energía y ángulos que llevan a esta circunstancia, y es necesario utilizar algún otro método de aproximación para obtener resultados aceptables, por ejemplo se puede recurrir al procedimiento de Dyson [30].

El diagrama más simple a un loop es el diagrama de autoenergía, para el cual es necesario evaluar la convolución de  $iG * G$ . Como un ejemplo para ilustrar las técnicas de cálculo y también para verificar la relación de unitariedad, evaluaremos la parte absortiva de esta convolución [31]. El diagrama a calcular es el que se indica en la figura (7.2)

Para  $G(p)$  usaremos la forma (6.13), pero asignaremos dos masas arbitrarias  $m_1^2$  y  $m_2^2$  a las dos partículas en cuestión. Al final de los cálculos tomaremos  $m_1^2 = m^2$  y  $m_2^2 = -m^2$ .

Definimos

$$F(p^2) = \frac{1}{(p^2 - m_1^2 + i\epsilon)(p^2 - m_2^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx [p^2 - m_1^2 x - m_2^2(1-x) + i\epsilon]^{-2} \quad (7.10)$$

y escribimos

$$G'(p) = F(p^2) - \frac{i\pi}{(m_1^2 - m_2^2)} \delta(p^2 - m_2^2) \quad (7.11)$$

La convolución de (7.10) consigo misma da

$$\begin{aligned} iF(p^2) * F(p^2) &= i \int d^\nu q \int_0^1 dx \int_0^1 dy [q^2 - m_1^2 x - m_2^2(1-x) + i\epsilon]^{-2} \times \\ &\times [(p-q)^2 - m_1^2 y - m_2^2(1-y) + i\epsilon]^{-2} \quad (7.12) \\ &= i3! \int d^\nu q \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z) [q^2 + a + i\epsilon]^{-4} \end{aligned}$$

con

$$a = p^2 z(1-z) - (m_1^2 x + m_2^2(1-x))z - (m_1^2 y + m_2^2(1-y))(1-z) \quad (7.13)$$

donde usamos nuevamente el “trick” de Feynman para juntar los denominadores cuadráticos, y el origen de  $q_\mu$  fue corrido para eliminar el término  $\vec{p} \cdot \vec{q}$ .

Integrando en  $d^\nu q$  tenemos [32]

$$(7.12) = -\pi^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(4 - \frac{\nu}{2}) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z) [-(a + i\epsilon)]^{\frac{\nu}{2}-4} \quad (7.14)$$

(notese que (7.14) tiene polos para  $\nu$  par  $\geq 8$ )

Para facilitar la evaluación de la parte absorbiva en cualquier número de dimensiones, utilizamos la fórmula[33]

$$\Gamma(1 - \alpha) u^{\alpha-1} = \int_0^\infty \frac{dv v^{\alpha-1}}{u + v \Gamma(\alpha)} \quad (7.15)$$

Si en ésta fórmula escribimos  $\alpha = \frac{\nu}{2} - 3$  y  $\mu = -(a + i\epsilon)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Parte Abs. } \Gamma(4 - \frac{\nu}{2}) [-(a + i\epsilon)]^{\frac{\nu}{2}-4} &= \int_0^\infty \frac{dv v^{\frac{\nu}{2}-4}}{\Gamma(\frac{\nu}{2} - 3)} i\pi \delta(v - a) \\ &= \frac{i\pi a^{\frac{\nu}{2}-4}}{\Gamma(\frac{\nu}{2} - 3)} \quad (a_+^\alpha = \Theta(a) a^\alpha) \end{aligned}$$

por lo tanto de (7.14)

$$Im(7.12) = \frac{-\pi^{\frac{\nu}{2}+1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}-3)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z) a_+^{\frac{\nu}{2}-4} \quad (7.16)$$

De esta manera se pueden ignorar los polos de (7.14), que se encuentran solamente en la parte dispersiva (ver ref. [34]).

Elegimos integrar primero con respecto a  $x$  y a  $y$ , ya que éstas están contenidas linealmente en  $a$ .

No es difícil ver que el resultado de esta integración es

$$Im(7.12) = \frac{-\pi^{\frac{\nu}{2}+1}}{(m_2^2 - m_1^2)^2 \Gamma(\frac{\nu}{2} - 1)} \sum_{i,j} \int_0^1 dz (a_{ij}^{\frac{\nu}{2}-2})_+ (-1)^{i+j} \quad (7.17)$$

donde  $a_{ij}$  es el valor de  $a$  para  $x = i$ ;  $y = j$ , ( $i, j = 0, 1$ )

$$a_{ij} = -p^2 z^2 + z[p^2 + (m_1^2 - m_2^2)(j - i)] + (m_2^2 - m_1^2)j - m_2^2 \quad (7.18)$$

el cual puede ser reescrito como

$$a_{ij} = p^2(z - \alpha_{ij})(\beta_{ij} - z) \quad (7.19)$$

con  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$ , las raíces de la ecuación cuadrática

$$a_{ij} = 0 \quad (\alpha_{ij} \leq \beta_{ij})$$

Para que  $a_{ij}$  sea positivo es necesario que satisfaga la desigualdad  $\alpha_{ij} \leq z \leq \beta_{ij}$ . Esto significa que la integración en (7.17) debe ser realizada entre  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$ .

Luego tenemos

$$Im(7.12) = \frac{-\pi^{\frac{\nu}{2}+1}}{(m_2^2 - m_1^2)^2 \Gamma(\frac{\nu}{2} - 1)} \sum_{i,j} \int_{\alpha_{ij}}^{\beta_{ij}} dz (-1)^{i+j} [p^2(z - \alpha_{ij})(\beta_{ij} - z)]^{\frac{\nu}{2}-2} \quad (7.20)$$

Usando ahora [33]

$$\int_a^b [(x-a)(b-x)]^\alpha dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2\alpha+1}$$

obtenemos

$$Im(7.12) = \frac{-\pi^{\frac{\nu+3}{2}}(p^2)^{\frac{\nu}{2}-2}}{(m_2^2 - m_1^2)^2 \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \left(\frac{\beta_{ij} - \alpha_{ij}}{2}\right)^{\nu-3} \quad (7.21)$$

O, explícitamente, luego de tomar  $m_1^2 = -m_2^2 = m^2$ :

$$Im(7.12) = -\frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}(p^2)^{\frac{\nu-4}{2}}}{4m^4 \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{p^2}\right)_+^{\frac{\nu-3}{2}} - 2\left(\frac{1}{4} + \frac{m^4}{p^4}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} + \left(\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} \right\} \quad (7.22)$$

donde se pueden reconocer términos proporcionales a  $\delta(p^2 + m^2) * \delta(p^2 + m^2)$ ,  $\delta(p^2 + m^2) * \delta(p^2 - m^2)$ , y  $\delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2)$ .

En efecto, en el sistema en el cual  $\vec{p} = 0$ :

$$\begin{aligned} \delta(p^2 + m_1^2) * \delta(p^2 + m_2^2) &= \int d^\nu q \delta(q^2 + m_1^2) \delta((p-q)^2 + m_2^2) \\ &= \int d^\nu q \delta(q^2 + m_1^2) \delta(-p_0^2 + 2p_0 q_0 + m_2^2 - m_1^2) \\ &= \frac{1}{2|p_0|} \int d^{\nu-1} q \delta(\vec{q}^2 + m_1^2 - q_0^2) \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde  $q_0 = \frac{1}{2p_0}(p_0^2 + m_1^2 - m_2^2)$ .

Integrando en los ángulos obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta_1 * \delta_2 &= \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})|p_0|} \int_0^\infty d\vec{q}^2 q^2 \frac{\nu-3}{2} \delta(\vec{q}^2 + m_1^2 - q_0^2) \\ &= \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})|p_0|} \left[ \frac{(p_0^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4p_0^2} - m_1^2 \right]_+^{\frac{\nu-3}{2}} \end{aligned} \quad (7.24)$$

de la cual se deducen los tres términos de (7.22) tomando  $m_1^2 = m_2^2 = m^2$ , o  $m_1^2 = -m_2^2 = m^2$ , o  $m_1^2 = m_2^2 = -m^2$ .

La parte imaginaria del término cruzado de la convolución  $iG * G$  está formado también por la convolución de deltas.

El resultado es

$$Im\left[\frac{\pi}{2m^2} \text{"}\delta\text{"} * F(p^2)\right] = -\frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}(p^2)^{\frac{\nu-4}{2}}}{4m^4 \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \left\{ 2\left(\frac{1}{4} + \frac{m^4}{p^4}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} - \left(\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} \right\} \quad (7.25)$$

Finalmente tendríamos que evaluar  $Im i\delta * \delta$ , pero el resultado es cero, ya que la convolución de la parte real de la  $\delta$  anula exactamente la convolución de la parte imaginaria de  $\delta$ , y los términos cruzados dan cero.

Por razones de claridad, y por creer que el cálculo del término  $\delta * F(p^2)$  y  $\delta * \delta$ , no solo es útil para éste desarrollo, sino que tienen un cierto interés en si mismo, desarrollaremos en detalle este cálculo en la siguiente sección.

Sumando ahora (7.22) y (7.25) obtenemos

$$Im iG(p) * G(p) = -\frac{\pi^2}{2m^4} \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (7.26)$$

y solo los bradiones contribuyen a la parte absorptiva de la amplitud, como es necesario para que se cumplan las relaciones de unitariedad.

Notemos que la relación de unitariedad (7.26), es satisfecha para cualquier número de dimensiones, inclusive cuando la partícula esta fuera de su capa de masa. Lo que implica que todo diagrama construido con inserciones de éste cumplirá en forma automática esta relación.

### 7.3 Algunas Convoluciones

En el cálculo de la relación de unitariedad perturbativa, hemos dejado para esta sección el desarrollo del cálculo  $\delta * F(p)$  y  $i\delta * \delta$ .

Recordemos que la  $\delta$  (op.cit (6.16)), esta definida no solo para valores reales del argumento, sino también complejos; y si bien esta definición no es nueva en matemática [29], no es estandar en teoría de campos. Por lo que sería conveniente ilustrar como manejarse con este tipo de distribuciones.

Ya que las convoluciones antes citadas involucran funciones hipergeométricas, antes de realizarlas presentaremos algunas fórmulas que usaremos frecuentemente.

Las integrales involucradas en este tipo de cálculo son las siguientes [38].

$$\int_0^U x^{\nu-1} (x + \alpha)^\lambda (U - x)^{\mu-1} dx = \alpha^\lambda U^{\mu+\nu-1} \beta(\mu, \nu) F(-\lambda, \nu, \mu + \nu, -U/\alpha) \quad (7.27)$$

$$\int_U^\infty x^{-\lambda} (x + \beta)^\nu (x - U)^{\mu-1} dx =$$



$$U^{\mu+\nu-\lambda}\beta(\lambda-\mu-\nu,\mu)F(-\nu,\lambda-\mu-\nu,\lambda-\nu,-\beta/U) \quad (7.28)$$

Como nos interesa la parte absorbiva de las convoluciones será necesario calcular la parte imaginaria de funciones hipergeométricas, para esto es conveniente utilizar la representación integral

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \quad (7.29)$$

de donde

$$F(1,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)} dt \quad (7.30)$$

si en (7.30)  $z \rightarrow x \pm i\epsilon$  con  $x > 1$  tenemos que

$$\text{Im}(1-tz)^{-1} = \pm\pi\delta(1-tx)$$

$$\text{Im}F(1,b,c,z) = \pm\pi \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\delta(1-tx)dt \quad (7.31)$$

resolviendo la integral llegamos a [35]

$$\text{Im}F(1,b,c,z) = \pm\pi \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} x^{1-c}(x-1)_+^{c-b-1} \quad (7.32)$$

Recordemos entonces como está definida la "δ"

$$\begin{aligned} \text{"}\delta\text{"} &= \delta_R + \delta_I \\ &= \frac{1}{2\omega} \{\delta(k_0 - \omega) + \delta(k_0 + \omega)\} \Theta(\vec{k}^2 - m^2) \\ &\quad + \frac{i}{2\omega'} \{\delta(k_0 - i\omega') + \delta(k_0 + i\omega')\} \Theta(m^2 - \vec{k}^2) \end{aligned} \quad (7.33)$$

con  $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 - m^2}$  y  $\omega' = \sqrt{m^2 - \vec{k}^2}$ .

La delta con argumento, en general complejo está definida como un funcional analítica, via la integral de Cauchy [29]

$$\delta(k_0 - \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dk_0 \frac{1}{k_0 - \alpha} \quad (7.34)$$

donde  $C$  es un camino cerrado en el plano complejo  $k_0$  que encierra a  $\alpha$ .

Es conveniente en este punto, hacer un comentario sobre la conjugación de la  $\delta(k_0 - \alpha)$ . Según la (7.34)

$$\delta(k_0 - \alpha^*) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dk_0 \frac{1}{k_0 - \alpha^*} \quad (7.35)$$

si ahora pedimos que la funcional “ $\delta$ ” sea compleja solo a travez de su variable, o sea

$$\delta^*(k_0 - \alpha) = \delta(k_0 - \alpha^*) \quad (7.36)$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \delta^*(k_0 - \alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dk_0 \frac{1}{k_0 - \alpha^*} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{-C} dk_0 \frac{1}{k_0 - \alpha^*} \end{aligned} \quad (7.37)$$

donde  $-C$  indica que debe invertirse el sentido del camino cerrado de integración  $C$ .

Esto implica que cuando conjugemos una expresión proveniente de la convolución de deltas, hay que tener presente que la conjugación no solo implica cambiar  $i$  por  $-i$ , sino también cambiar el sentido de las integraciones. Notemos que sólo de esta manera obtenemos las propiedades de la delta de Dirac usual cuando  $\alpha$  es real.

### 7.3.1 “ $\delta$ ” \* “ $\delta$ ”

Calculemos entonces  $Im(i\frac{\pi^2}{m^4} \text{“}\delta\text{”} * \text{“}\delta\text{”})$ .

Esta convolución tiene tres partes  $Im(i\frac{\pi^2}{m^4} \delta_R * \delta_R)$ ,  $Im(i\frac{\pi^2}{m^4} \delta_I * \delta_I)$  y  $Im(i\frac{\pi^2}{m^4} \delta_R * \delta_I)$ .

Comencemos calculando la primera. Si bien ésta se puede evaluar con métodos estandar como en (7.24), utilizaremos la integral de Cauchy para ilustrar el método.

En el sistema en que  $\vec{p} = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \delta_R * \delta_R &= \int d^{\nu-1}k \frac{1}{4\omega^2} \int dk_0 \{ \delta(k_0 - \omega) \delta(p_0 - k_0 - \omega) \\ &+ \delta(k_0 + \omega) \delta(p_0 + k_0 - \omega) + 2\delta(k_0 - \omega) \delta(p_0 - k_0 + \omega) \} \end{aligned} \quad (7.38)$$

utilizando (7.34)

$$\begin{aligned}\delta_R * \delta_R &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int d^{\nu-1}k \frac{1}{4\omega^2} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{k_0 - \omega} \frac{1}{p_0 - k_0 - \omega} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{k_0 + \omega} \frac{1}{p_0 + k_0 - \omega} + 2 \frac{1}{k_0 - \omega} \frac{1}{p_0 + k_0 - \omega} \right\} \\ &= \frac{2}{p_0} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^{\nu-1}k}{4\omega^2} \left\{ \frac{p_0^2}{p_0^2 - 4\omega^2} + 1 \right\}\end{aligned}\quad (7.39)$$

sumando y restando  $4\omega^2$  en el numerador del primer término

$$\delta_R * \delta_R = \frac{2}{p_0 2\pi i} \int \frac{d^{\nu-1}k}{4\omega^2} \left\{ \frac{4\omega^2}{p_0^2 - 4\omega^2} + 2 \right\}\quad (7.40)$$

El segundo término de (7.40), puede ser eliminado, ya que está asociado a  $\delta(p_0)$ , que contribuye solo en el origen de  $p_0$ . Entonces

$$\delta_R * \delta_R = \frac{2}{p_0 2\pi i} \int d^{\nu-1}k \frac{1}{p_0^2 - 4\omega^2}\quad (7.41)$$

Integrando sobre los ángulos

$$\delta_R * \delta_R = \frac{2}{4p_0} \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{m^2}^{\infty} dk^2 \frac{(k^2)^{\frac{\nu-3}{2}}}{p_0^2/4 + m^2 - k^2}\quad (7.42)$$

Utilizando ahora (7.28) obtenemos

$$\delta_R * \delta_R = \frac{2}{4p_0} \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\frac{3-\nu}{2}) (m^2)^{\frac{\nu-3}{2}}}{(2\pi i) \Gamma(\frac{5-\nu}{2}) \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \frac{4m^2}{p_0^2} F\left(1, 1, \frac{5-\nu}{2}, 1 + \frac{4m^2}{p_0^2}\right)\quad (7.43)$$

Nos interesa calcular

$$Im(i\delta_R * \delta_R) = \frac{i}{2} \{ \delta_R * \delta_R + (\delta_R * \delta_R)^* \}\quad (7.44)$$

Recordemos que la conjugación de  $\delta_R * \delta_R$  debe hacerse en el sentido de (7.37). Esto conduce a

$$\begin{aligned}(Im(i\delta_R * \delta_R), f(p_0)) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_C \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\frac{3-\nu}{2}) (m^2)^{\frac{\nu-3}{2}}}{p_0 \Gamma(\frac{5-\nu}{2}) \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \frac{4m^2}{p_0^2} \\ &= F\left(1, 1, \frac{5-\nu}{2}, 1 + \frac{4m^2}{p_0^2}\right) f(p_0)\end{aligned}\quad (7.45)$$

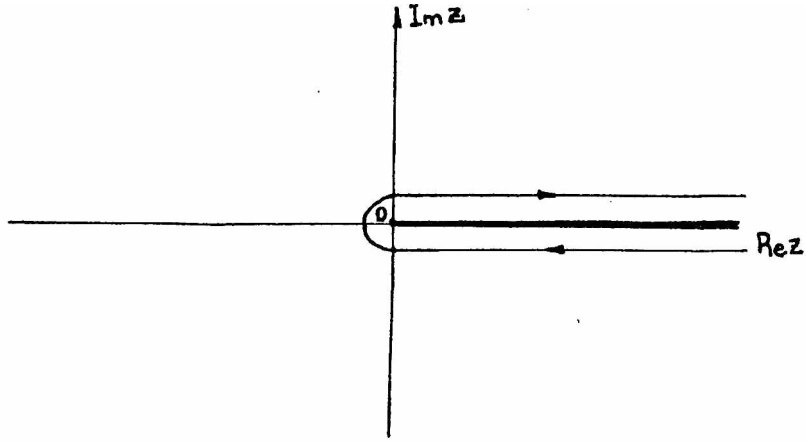


Figura 7.3: Estructura analítica de la función  $F(1, 1, \frac{5-\nu}{2}, 1+z)$

donde  $C$  es un camino cerrado de integración que encierra las singularidades de  $F$ .

Es más sencillo visualizar las propiedades analíticas de  $F$ , en función de la variable adimensional

$$z = \frac{4m^2}{p_0^2} \quad (7.46)$$

de esta forma la función hipergeométrica queda expresada por

$$F(1, 1, \frac{5-\nu}{2}, 1+z)$$

Esta función tiene un corte a lo largo del eje real positivo, y el camino de integración será como se muestra en la figura (7.3)

Es claro, que haciendo tender el camino al eje real, sólo sobrevivirá la discontinuidad de  $F$ , ya que entre la rama superior e inferior de la integración se cancela exactamente la parte continua.

El salto puede evaluarse mediante la ecuación (7.32), y debe multiplicarse por dos ya que la integración sobre la rama inferior de  $C$  contribuye exactamente igual a la rama superior. Realizando efectivamente este procedimiento encontramos.

$$Im(i \frac{\pi^2}{m^4} \delta_R * \delta_R) = -\frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}} (p_0^2)^{\frac{\nu-4}{2}}}{4m^4 \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} (\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p_0^2})^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (7.47)$$

que por supuesto coincide con (7.24). La expresión (7.47) debe entenderse como una funcional real en la variable  $p_0$ .

Podemos calcular ahora  $\delta_I * \delta_I$ .

$$\begin{aligned} \delta_I * \delta_I &= -\frac{1}{(2\pi i)} \int d^{\nu-1}k \frac{1}{4\omega^2} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{k_0 - i\omega'} \frac{1}{p_0 - k_0 - i\omega'} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{k_0 + i\omega'} \frac{1}{p_0 + k_0 - i\omega'} + 2 \frac{1}{k_0 - i\omega'} \frac{1}{p_0 + k_0 - i\omega'} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)} \frac{2}{p_0} \int d^{\nu-1}k \frac{1}{p_0^2 + 4\omega^2} \end{aligned} \quad (7.48)$$

donde también hemos desechado términos proporcionales a  $\delta(p_0)$ .

Integrando sobre los ángulos:

$$\delta_I * \delta_I = \frac{1}{(2\pi i)} \frac{2}{4p_0} \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_0^{m^2} dk^2 \frac{(k^2)^{\frac{\nu-3}{2}}}{p_0^2/4 + m^2 - k^2} \quad (7.49)$$

utilizando (7.27)

$$\delta_I * \delta_I = \frac{1}{(2\pi i)} \frac{2\pi^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\frac{\nu-1}{2}) (m^2)^{\frac{\nu-3}{2}}}{4p_0 \Gamma(\frac{\nu+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \frac{4m^2}{p_0^2 + 4m^2} F\left(1, \frac{\nu-1}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{4m^2}{p_0^2 + 4m^2}\right) \quad (7.50)$$

La parte imaginaria la calculamos de la siguiente manera

$$Im(i\delta_I * \delta_I) = \frac{i}{2} \{ \delta_I * \delta_I + (\delta_I * \delta_I)^* \} \quad (7.51)$$

Recordemos nuevamente que  $\delta_I * \delta_I$  es una funcional analítica y que la conjugación debe hacerse en el sentido de (7.37). Esto conduce a

$$\begin{aligned} (Im(i\delta_I * \delta_I), f(p_0)) &= \quad (7.52) \\ &\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\frac{\nu-1}{2}) (m^2)^{\frac{\nu-3}{2}}}{4m^4 \Gamma(\frac{\nu+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \times \\ &\times \oint_C dp_0 \frac{1}{4p_0^2} \frac{4m^2}{p_0^2 + 4m^2} F\left(1, \frac{\nu-1}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{4m^2}{p_0^2 + 4m^2}\right) f(p_0^2) \end{aligned}$$

Si reescribimos esta última función hipergeométrica en función de la variable  $z$  definida en (7.46), ésta toma la forma

$$F\left(1, \frac{\nu-1}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{z}{1+z}\right) \quad (7.53)$$

Investigando la estructura analítica de esta función, encontramos que tiene un corte en  $-1 < z < 0$ .

Recordemos también que, por un lado, estamos interesados en un camino de integración  $C$ , que encierre al eje  $z$  real positivo, ya que queremos calcular la parte imaginaria de una amplitud, sobre energías reales. En segundo lugar hemos separado el cálculo de “ $\delta$ ” \* “ $\delta$ ”, en  $\delta_R * \delta_R$  y  $\delta_I * \delta_I$ , solo por conveniencia, pero el camino  $C$  es “el mismo” en ambos cálculos.

No es difícil mostrar, que como el camino  $C$  es el mismo en ambas partes del cálculo, cuando integramos la función (7.53), la rama superior de integración se encuentra sobre una hoja de Riemann de la función  $F$ , y la rama inferior se encuentra sobre la otra hoja. Naturalmente el camino es cerrado ya que tanto  $z = 0$  como  $z = \infty$ , son puntos de ramificación.

Si observamos los coeficientes de la función hipergeométrica, verificamos rápidamente que tanto  $a$ ,  $c - b$ ,  $c - b - a$ , son números enteros, independientemente de  $\nu$ . Este tipo de funciones son “funciones hipergeométricas degeneradas”, y en general son de la forma

$$u(z) = z^\lambda(1+z)^\mu P_n(z) \quad (7.54)$$

donde  $P_n(z)$  es un polinomio de grado  $n$  y  $P_n(0) \neq 0$  y  $n$  y  $P_n(-1) \neq 0$ .

Las técnicas para encontrar explícitamente esta función se encuentran detalladas en la referencia [36].

Llevando a cabo efectivamente este procedimiento, encontramos:

$$Im(i \frac{\pi^2}{m^4} \delta_I * \delta_I) = \frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}} (p_0^2)^{\frac{\nu-4}{2}}}{4m^4 \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \left( \frac{1}{4} + \frac{m^2}{p_0^2} \right)^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (7.55)$$

Vemos que la (7.55) se anula exactamente con la (7.47). Es fácil convencerse también que el término  $\delta_R * \delta_I = 0$ , ya que en el sistema de reposo estas distribuciones tienen soportes disjuntos. Por lo tanto

$$Im(i \text{“}\delta\text{”} * \text{“}\delta\text{”}) = 0 \quad (7.56)$$

Un cálculo más completo sobre todo el plano complejo puede encontrarse en la referencia [37], en el cual si se toman los resultados sobre el eje de energías reales se obtienen los mismos resultados aquí expuestos.

### 7.3.2 “ $\delta$ ” \* $F$

Queremos calcular ahora  $Im(\delta * F)$ . Recordemos que  $F$  se puede escribir como

$$F = \frac{1}{2m^2}(\Delta_F^b - \Delta_F^t) \quad (7.57)$$

Entonces

$$Im(\delta * F) = \frac{1}{2m^2} \{ Im(\delta_R * \Delta_F^b) + Im(\delta_I * \Delta_F^b) - Im(\delta_R * \Delta_F^t) - Im(\delta_I * \Delta_F^t) \} \quad (7.58)$$

Comencemos calculando el primer término

$$\delta_R * \Delta_F^b = \frac{1}{2\pi i} \int d^{\nu-1}k \int \frac{dk_0}{\omega} \left( \frac{1}{k_0 - \omega} + \frac{1}{k_0 + \omega} \right) \times \frac{1}{(p-k)^2 + m^2 + i\epsilon} \quad (7.59)$$

Integrando sobre  $k_0$  y luego sobre los ángulos obtenemos

$$\delta_R * \Delta_F^b = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})(-p_0^2 + 2m^2)} \int_{m^2}^{\infty} dk^2 \frac{(k^2)^{\frac{\nu-1}{2}} (k^2 - m^2)^{1/2}}{\frac{(-p_0^2 + 2m^2 + i\epsilon)^2}{4p_0^2} + m^2 - k^2} \quad (7.60)$$

Utilizando (7.28)

$$\delta_R * \Delta_F^b = -\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}} (m^2)^{\frac{\nu-2}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})(-p_0^2 + 2m^2)} \frac{\Gamma(\frac{2-\nu}{2})\Gamma(3/2)}{\Gamma(\frac{5-\nu}{2})} F\left(1, \frac{2-\nu}{2}, \frac{5-\nu}{2}, \frac{(-p_0^2 + 2m^2 + i\epsilon)^2}{4p_0^2 m^2} + 1\right) \quad (7.61)$$

Tomamos ahora la parte imaginaria usando la fórmula (7.32).

$$Im\left(\frac{\pi^2}{2m^2} \delta_R * \Delta_F^b\right) = -\frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}} (p_0)^{\frac{\nu-4}{2}}}{4m^2 \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \left(\frac{1}{4} + \frac{m^4}{p^4}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (7.62)$$

El cálculo de  $\delta_I * \Delta_F^b$  es enteramente análogo y resulta

$$\delta_I * \Delta_F^b = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})(-p_0^2 + 2m^2)} \int_0^{m^2} dk^2 \frac{(k^2)^{\frac{\nu-1}{2}} (k^2 - m^2)^{1/2}}{\frac{(-p_0^2 + 2m^2 + i\epsilon)^2}{4p_0^2} + m^2 - k^2} \quad (7.63)$$

de (7.27)

$$\delta_I * \Delta_F^b = -\frac{i\pi^{\frac{\nu-1}{2}}(m^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})(-p_0^2 + 2m^2)} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\Gamma(3/2)}{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})} \left(\frac{p_0^2 + 2m^2}{4p_0^2} + m^2\right)^{-1} \\ F\left(1, \frac{\nu-1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \frac{1}{\frac{(-p_0^2 + 2m^2 + i\epsilon)^2}{4p_0^2 m^2} + 1}\right) \quad (7.64)$$

Para calcular la parte imaginaria y reducir esta función hipergeométrica, utilizamos la misma técnica que utilizamos para la (7.52) obteniendo

$$Im\left(i\frac{\pi^2}{2m^2}\delta_I * \Delta_F^b\right) = -\frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}(p_0)^{\frac{\nu-4}{2}}}{4m^2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \left(\frac{1}{4} + \frac{m^4}{p^4}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (7.65)$$

que es idéntica a la (7.62)

La convolución  $\delta_R * \Delta_F^t$ , se realiza por procedimientos estandar, y no repetiremos aquí su desarrollo. El resultado es:

$$Im\left(\frac{\pi^2}{2m^2}\delta_R * \Delta_F^t\right) = \frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}(p_0)^{\frac{\nu-4}{2}}}{2m^2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \left(\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (7.66)$$

Mostraremos en cambio el aporte de la delta imaginaria.

$$\delta_I * \Delta_F^t = \frac{i}{2\pi i} \int d^{\nu-1}k \int \frac{dk_0}{\omega} \left(\frac{1}{k_0 - i\omega} + \frac{1}{k_0 + i\omega}\right) \\ \times \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ = \frac{2i\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{p_0^2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_0^{m^2} dk^2 \frac{(k^2)^{\frac{\nu-3}{2}} \sqrt{m^2 - k^2}}{p_0^2/4 + m^2 + i\epsilon - k^2} \quad (7.67)$$

usando (7.27)

$$\delta_I * \Delta_F^t = -\frac{2i\pi^{\frac{\nu-1}{2}}(m^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})p_0^2} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\Gamma(3/2)}{\Gamma(\frac{2-\nu}{2})} F\left(1, \frac{\nu-1}{2}, \frac{2-\nu}{2}, \frac{1}{\frac{p_0^2}{4m^2} + 1}\right) \quad (7.68)$$

para  $\nu$  par

$$\delta_I * \Delta_F^t = 0 \quad (7.69)$$

ya que la función  $\Gamma(\frac{2-\nu}{2})$  en el denominador tiene un polo.



Si ahora juntamos los resultados obtenidos en (7.62), (7.65), (7.66), y (7.69) obtenemos

$$Im\left[\frac{\pi}{2m^2} \delta * F(p^2)\right] = -\frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}} (p^2)^{\frac{\nu-4}{2}}}{4m^4 \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)} \left\{ 2\left(\frac{1}{4} + \frac{m^4}{p^4}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} - \left(\frac{1}{4} + \frac{m^2}{p^2}\right)^{\frac{\nu-3}{2}} \right\} \quad (7.70)$$

que por supuesto es el resultado usado en (7.25)

# Capítulo 8

## Renormalización

Quisiéramos completar este trabajo, haciendo un comentario sobre la renormalización de la teoría expuesta en esta tesis. Existen algunas referencias donde se trata la renormalización de modelos supersimétricos en un espacio-tiempo extendido [38], sobre todo el comportamiento asintótico de éstos. Sin embargo en estos trabajos se utiliza el formalismo de supercampos cuantificados con integral funcional, donde no se usa (o está implícita) la forma de los propagadores de las componentes del supercampo quiral.

En particular hemos visto que la cuantificación de la componente taquiónica del supercampo lleva al propagador de Cauchy, y no es evidente, a priori, cómo va a influir en el comportamiento asintótico de la teoría.

Nuestro objetivo no es llevar a cabo aquí todo el programa de renormalización, sino más bien, estudiar en el modelo escalar el grado de divergencia ultravioleta de diversos diagramas y ver como depende este grado de divergencia, al aumentar el orden de aproximación en la constante de acoplamiento. También analizaremos algunas propiedades del modelo supersimétrico.

### 8.1 Divergencias a un Loop

El modelo a considerar es un autoacoplamiento  $\lambda\varphi^3$  con el propagador

$$G(k) = F(k) + \frac{i\pi}{2m^2} \delta(k^2 + m^2) \quad (8.1)$$

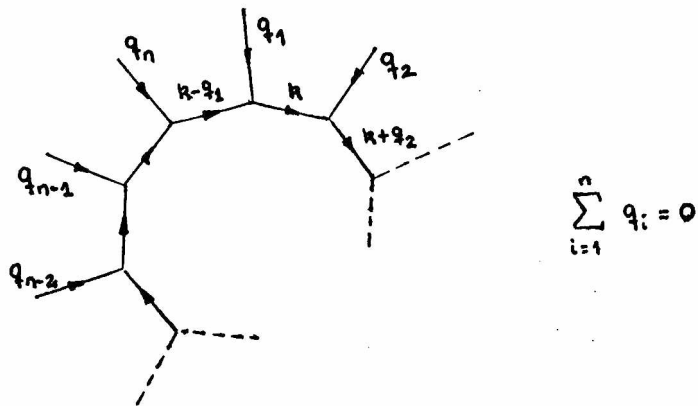


Figura 8.1: Diagrama general a un loop

donde

$$F(k^2) = \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 + m^2 + i\epsilon)} \quad (8.2)$$

con la métrica  $(+, -, \dots, -)$ .

Consideremos un diagrama general a un loop (ver fig. (8.1)).

La integral que representa este diagrama es

$$\Sigma = \frac{(i\lambda)^n}{n!} \int d^{\nu}k G(k)G(k + q_2) \dots G(k - q_1) \quad (8.3)$$

Usando (8.1) y (8.2) podemos poner esta expresión en función de  $F(k^2)$  y " $\delta$ ".

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{(i\lambda)^n}{n!} \left\{ \int d^{\nu}k F(k)F(k + q_2) \dots F(k - q_1) + \right. \\ &+ \frac{i\pi s_1}{2m^2} \int d^{\nu}k \delta(k^2 + m^2) F(k + q_2) \dots F(k - q_1) + \\ &+ \frac{-\pi s_2}{4m^4} \int d^{\nu}k \delta(k^2 + m^2) \delta((k + q_2)^2 + m^2) \dots F(k - q_1) + \\ &\vdots \\ &+ \left. \left( \frac{i\pi}{2m^2} \right)^j s_j \int d^{\nu}k \delta(k^2 + m^2) \dots \delta((k + q_2 + \dots + q_j)^2 + m^2) \dots F(k - q_1) \right\} \\ & \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8.4)$$

Tomemos la primera integral que no contiene deltas. Para  $k \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\int d^\nu k F(k^2) \dots F((k - q_1)^2) \approx \int \frac{d^\nu k}{\{(k^2)^2\}^n} \quad (8.5)$$

El grado de divergencia es

$$D = \nu - 4n \quad (8.6)$$

Consideremos ahora la integral que contiene una delta. Recordemos que la “ $\delta$ ” consta de dos partes, una parte real para  $\vec{k}^2 > m^2$  y otra imaginaria para  $\vec{k}^2 < m^2$  (op.cit (6.15), (6.16)).

La parte imaginaria de la delta, no contribuye a la divergencia ultravioleta, ya que despues de integrar en  $k_0$ , la función  $\Theta(m^2 - \vec{k}^2)$ , pone un “cutoff” natural a la integral. Por lo tanto la parte divergente está dominada por la contribución de la parte real de la delta.

Escribimos entonces

$$\begin{aligned} & \frac{i\pi}{2m^2} \int d^\nu k \delta(k^2 + m^2) F((k + q_2)^2) \dots F((k - q_1)^2) \\ = & \frac{i\pi}{2m^2} \int d^{\nu-1} k F(-m^2 + q_2^2 + 2\omega q_2^0 - 2\vec{k} \cdot \vec{q}_2) \dots \\ & \dots F(-m^2 + q_1^2 + 2\omega q_1^0 - 2\vec{k} \cdot \vec{q}_1) + \omega \longleftrightarrow -\omega \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos una integral sobre el espacio euclideo en  $\nu - 1$  dimensiones, y para  $k \rightarrow \infty$  tiene la forma

$$\int \frac{d^{\nu-1} k}{|\vec{k}|} F(\vec{k}, q_2) \dots F(\vec{k}, q_1) \approx \int \frac{d^{\nu-1} k}{|\vec{k}|} \frac{1}{(k^2)^{n-1}}$$

El grado de divergencia es en este caso

$$D = \nu - 2 - 2(n - 1) = \nu - 2n \quad (8.7)$$

Analicemos ahora que ocurre con el grado de divergencia de la integral que contiene dos deltas.

$$\begin{aligned} & \int d^\nu k \delta(k^2 + m^2) \delta((k + q_2)^2 + m^2) F((k + q_2 + q_3)^2) \dots F((k - q_1)^2) = \\ & = \int \frac{d^{\nu-1}k}{2\omega} \delta(q_2^2 - 2\omega q_2^0 + 2\vec{k} \cdot \vec{q}_2) F((k + q_2 + q_3)^2) \dots F((k - q_1)^2) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Si elegimos el sistema de referencia en el cual  $\vec{q}_2 = 0$  la expresión (8.8) toma la forma

$$(8.8) = \int \frac{d^{\nu-1}k}{2\omega} \delta(q_0^2 - 2\omega q_0) F((k + q_2 + q_3)^2) \dots F((k - q_1)^2) \quad (8.9)$$

Para integrar sobre la  $\delta(q_0^2 - 2\omega q_0)$ , utilizamos la siguiente propiedad de la delta de Dirac.

$$\delta(q_0(q_0 - 2\omega)) = \delta(q_0(-2\omega)) + \delta(2\omega(q_0 - 2\omega)) = \frac{\delta(q_0)}{2\omega} + \frac{\delta(q_0 - 2\omega)}{2\omega}$$

En esta expresión se puede ignorar el término proporcional a  $\delta(q_0)$ , ya que solo contribuye en  $q_0 = 0$  (recordemos que estamos en el sistema de referencia  $\vec{q}^2 = 0$ ). De esta manera la expresión (8.9) toma la forma

$$(8.9) = \int \Omega_{\nu-1} \int_m^\infty \frac{dk}{2\omega} k^{\nu-2} \delta(q_0 - \omega) F((k + q_2 + q_3)^2) \dots F((k - q_1)^2) \quad (8.10)$$

Para integrar la  $\delta(q_0 - \omega)$  utilizamos la siguiente propiedad

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad \text{con } f(x_i) = 0$$

Realizando la integración, encontramos finalmente

$$\begin{aligned} & \int d^\nu k \delta(k^2 + m^2) \delta((k + q_2)^2 + m^2) F((k + q_2 + q_3)^2) \dots F((k - q_1)^2) = \\ & = \frac{1}{\Lambda} \int \Omega_{\nu-1} \int_m^\infty \frac{dk}{2\omega} k^{\nu-2} \delta(k - \Lambda) F((k + q_2 + q_3)^2) \dots F((k - q_1)^2) \end{aligned} \quad (8.11)$$

con  $\Lambda = \sqrt{\frac{q_0^2}{4} - m^2}$ .

La  $\delta(k - \Lambda)$  hace que la integral sea convergente, por lo menos en el sentido de la divergencia ultravioleta.

Los términos que contienen más de dos deltas son cero, salvo para relaciones especiales entre los  $q_i$ .

Por lo tanto tenemos dos integrales que pueden aportar divergencias ultravioleta: la que no contiene “deltas” y la que contiene una sola “delta”. De (8.6) y (8.7), vemos que los grados de divergencia son respectivamente

$$\begin{aligned} D_F &= \nu - 4n \\ D_\delta &= \nu - 2n \end{aligned} \tag{8.12}$$

para  $\nu = 6$  y  $n \geq 2$ ,  $D_F < 0$ , o sea convergente. Mientras que

$$\begin{aligned} \text{para } n = 2 & \quad D_\delta = 2 \\ \text{para } n = 3 & \quad D_\delta = 0 \\ \text{para } n \geq 4 & \quad D_\delta < 0 \end{aligned}$$

Tenemos entonces una divergencia cuadrática en el diagrama de autoenergía, y una divergencia logarítmica en el diagrama triangular.

## 8.2 Divergencia Superficial

Estamos ahora interesados en calcular el grado de divergencia para un diagrama general. Para ver esto consideremos en principio un diagrama que no contenga “deltas”, y denotemos por:

- $E \equiv N^0$  de líneas externas.
- $I \equiv N^0$  de líneas internas.
- $l \equiv N^0$  de loops.
- $V \equiv N^0$  de vértices.

El grado de divergencia quedará expresado por

$$D = \nu l - 4I$$

Podemos relacionar el número de loops con el número de líneas internas y el número de vértices, esto es

$$l = I - (V - 1) = I - V + 1$$

obteniendo para  $D$

$$D = \nu + I(\nu - 4) - \nu V$$

como de cada vértice salen tres líneas que pueden ser externas o internas

$$3V = E + 2I$$

reemplazando  $I$  en  $D$  obtenemos

$$D = \nu - \frac{E}{2}(\nu - 4) + \frac{V}{2}(\nu - 12) \quad (8.13)$$

y para  $\nu = 6$

$$D = 6 - E - 3V \quad (8.14)$$

El valor mínimo que puede tomar  $V$  es  $V = E$ , por lo tanto, el grado de divergencia máximo será

$$D_{max} = 6 - 4E$$

y el valor mínimo que puede tomar  $E$  es  $E = 2$  entonces

$$D_{max} = -2 \quad (8.15)$$

lo que implica que en seis dimensiones los diagramas que no contienen "deltas" son todos convergentes.

Como los diagramas a un loop que divergen son los que contienen una delta, vamos a analizar el caso de diagramas de máxima divergencia. Estos serán aquellos que contengan una delta por cada loop.

La notación es igual que en el caso anterior, salvo que ahora

$$I = I_\delta + I_F$$

donde  $I_\delta$  es el número de líneas asociadas a una  $\delta$  y  $I_F$  es el número de líneas asociado a una  $F(k^2)$ .

Teniendo en cuenta (8.7), el grado de divergencia será en este caso

$$D = (\nu - 2)l - 2I_F \quad (8.16)$$

El número de loops se relaciona con  $I$  como

$$l = I - V + 1 = I_\delta + I_F - V + 1$$

pero estamos considerando el caso en que

$$l = I_\delta$$

Reemplazando en (8.16)

$$D = (\nu - 2)(I - V + 1) - 2(V - 1) \quad (8.17)$$

como en el caso anterior, se cumple que

$$3V = E + 2I$$

y reemplazando en (8.17) obtenemos

$$D = \nu - \frac{E}{2}(\nu - 2) + \frac{V}{2}(\nu - 6) \quad (8.18)$$

Vemos que para  $\nu > 6$ , el modelo simplificado no es renormalizable, ya que  $D$  crece con el número de vértices del diagrama.

Para  $\nu = 6$  la (8.18) se transforma en

$$D = 6 - 2E \quad (8.19)$$

$$\text{para } E = 2 \quad D = 2$$

$$\text{para } E = 3 \quad D = 0$$

$$\text{para } E > 3 \quad D < 0$$

por lo tanto tenemos solo dos divergencias primitivas que pueden ser absorbidas renormalizando la masa y la constante de acoplamiento.

Un detalle interesante es que el grado de divergencia (8.19) es el mismo que en una teoría  $\lambda\varphi^3$  en  $d = 6$ , pero con el propagador de Feynman habitual de orden dos [40].

### 8.3 Renormalización del Modelo de Wess-Zumino

Hemos deducido ya las propiedades de renormalizabilidad del modelo escalar simplificado y cabe ahora preguntarse como se modifican esas propiedades en el modelo supersimétrico.



Tomemos entonces el modelo de Wess-Zumino en  $d = 6$ . En este modelo tenemos seis campos, el escalar complejo, el spinorial, el vectorial, y sus respectivos campos auxiliares. Además, cada uno de estos campos tiene una componente bradiónica y otra taquiónica, cuyos respectivos propagadores fueron calculados en el capítulo (6). Se puede apreciar que el cálculo de un proceso concreto se complica notablemente. Sin embargo hay dos hechos a destacar: en primer lugar si la interacción es invariante frente a una transformación de supersimetría, las masas y las constantes de acoplamiento de todas las componentes del supercampo quiral están relacionadas entre sí. En segundo lugar, una transformación de supersimetría no mezcla las componentes bradiónicas con las taquiónicas. Esto hace que se produzcan efectos de “compensación” entre diagramas. Como este hecho se debe exclusivamente a la estructura del grupo de supersimetría, es más sencillo verlo en el formalismo de supercampos, donde la simetría está presente de manera explícita [39].

Para presentar este formalismo solo hace falta tener presente cómo integrar variables de Grassman.

Una integral indefinida sobre variables de Grassman se define como

$$\int d\eta = 0 \quad , \quad \int d\eta \eta = 1 \quad (8.20)$$

la función  $\delta$  se define como

$$\int f(\eta)\delta(\eta)d\eta = f(0) \quad (8.21)$$

y teniendo en cuenta que  $f(\eta)$  solo puede ser un polinomio en  $\eta$  de grado uno, ya que  $\eta^2 = 0$ , deducimos que

$$\delta(\eta) = \eta \quad (8.22)$$

Podemos definir también elementos de volumen en el superespacio como

$$\begin{aligned} d\theta^4 &= -\frac{1}{4!}d\theta^{\alpha_1} \dots d\theta^{\alpha_4} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_4} \\ d\bar{\theta}^4 &= -\frac{1}{4!}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}_1} \dots d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}_4} \epsilon^{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_4} \\ d\theta^8 &= d\theta^4 d\bar{\theta}^4 \end{aligned} \quad (8.23)$$

Consideremos ahora el Lagrangiano de Wess-Zumino con un término de interacción cúbico (op.cit (3.1))

$$L = \bar{\Phi}\Phi|_D + m^4\Phi^2|_F + \frac{g}{3!}\Phi^3|_F + H.C.. \quad (8.24)$$

utilizando desde (8.20) a (8.23) es posible escribir (8.24) como

$$L = \int \{ \bar{\Phi}\Phi + m^4\Phi^2\delta(\bar{\theta}) + \frac{g}{3!}\Phi^3\delta(\bar{\theta}) + H.C. \} d\theta^4 d\bar{\theta}^4 \quad (8.25)$$

Esto nos permite hacer teoría de perturbaciones en el superespacio como una extensión directa de la teoría de perturbaciones habitual.

En particular podemos calcular superpropagadores del siguiente modo:

$$\begin{aligned} < 0|T\{\Phi(x, \theta)\Phi(x', \theta')\}|0 > = \quad (8.26) \\ &= < 0|T\{(\varphi(x) + \theta^\alpha\varphi_\alpha(x) + \frac{1}{2!}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1\alpha_2}(x) + \frac{1}{3!}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\theta^{\alpha_3}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x) \\ &\quad + \frac{1}{4!}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\theta^{\alpha_3}\theta^{\alpha_4}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(x)) \\ &\quad (\varphi(x') + \theta^\alpha\varphi_\alpha(x') + \frac{1}{2!}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1\alpha_2}(x') + \frac{1}{3!}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\theta^{\alpha_3}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x') \\ &\quad + \frac{1}{4!}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\theta^{\alpha_3}\theta^{\alpha_4}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(x'))\}|0 > \end{aligned}$$

Utilizando (7.17) encontramos

$$< 0|T\Phi(x, \theta\bar{\theta})\Phi(x', \theta'\bar{\theta}')|o > = -im^2\delta(\theta - \bar{\theta}')e^{i(\theta\gamma^\mu\bar{\theta} - \theta'\gamma^\mu\bar{\theta}')}\partial_\mu G(x - x') \quad (8.27)$$

donde

$$G(x - x') = \Delta_F^b(x - x') - \Delta_{Cauchy}^t(x - x')$$

De manera similar calculamos

$$< 0|T\bar{\Phi}(x, \theta\bar{\theta})\bar{\Phi}(x', \theta'\bar{\theta}')|o > = im^2\delta(\theta - \bar{\theta}')e^{-i(\theta\gamma^\mu\bar{\theta} - \theta'\gamma^\mu\bar{\theta}')}\partial_\mu G(x - x') \quad (8.28)$$

$$< 0|T\Phi(x, \theta\bar{\theta})\bar{\Phi}(x', \theta'\bar{\theta}')|o > = im^2e^{i(\theta\gamma^\mu\bar{\theta} + \theta'\gamma^\mu\bar{\theta}' - 2\theta\gamma^\mu\bar{\theta}')}\partial_\mu G(x - x') \quad (8.29)$$

Notemos que una propiedad esencial para obtener este propagador es que el supercampo se puede descomponer en

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi^b(x, \theta, \bar{\theta}) + \Phi^t(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (8.30)$$

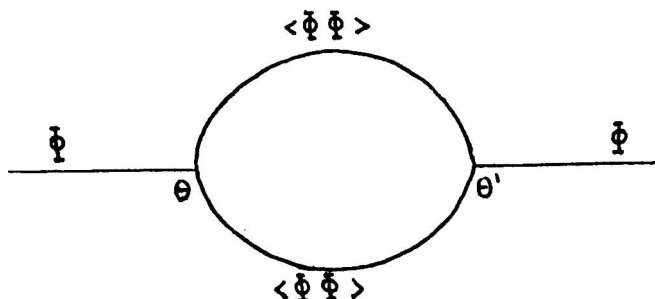


Figura 8.2: Diagrama de autoenergía del supercampo

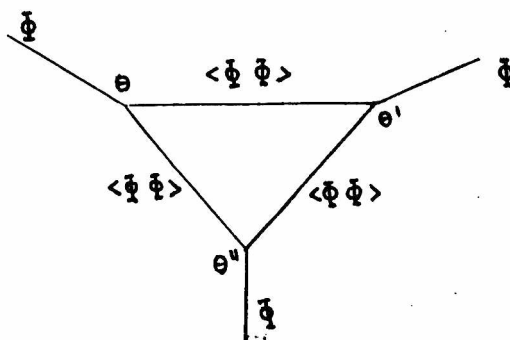


Figura 8.3: Corrección de vértice

y la supersimetría no mezcla  $\Phi^b$  con  $\Phi^t$ .

Calculemos ahora un diagrama de autoenergía en el superspacio (ver figura (8.2)).

De (8.27) se ve claramente que esta amplitud contendrá un factor  $\delta^2(\theta - \theta') = \delta(0) = 0$  (ver (8.22)). Por lo tanto no hay renormalización de masa, ni finita ni divergente.

Tengamos siempre presente que esta amplitud es en realidad una suma de amplitudes de los campos componentes, lo que quiere decir que los diferentes diagramas se compensan entre sí. Esta estructura está implícita en la supersimetría, y se ve reflejada en la dependencia de los superpropagadores con  $\theta$  y  $\bar{\theta}$ .

Otro diagrama interesante, es el que muestra la figura (8.3). En esta

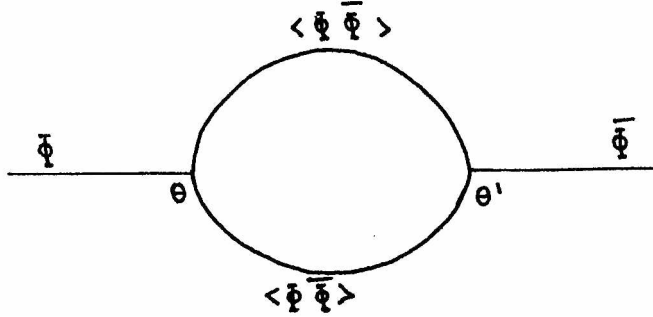


Figura 8.4: Corrección a un loop, al término  $\Phi\bar{\Phi}$

amplitud aparecerá un factor

$$\delta(\theta - \theta')\delta(\theta - \theta'')\delta(\theta' - \theta'') = \delta^2(\theta' - \theta'') = 0 \quad (8.31)$$

Por lo tanto tampoco existe renormalización de constante de acoplamiento, ni divergente ni finita.

Analicemos entonces el diagrama de la figura (8.4). Esta amplitud es proporcional a

$$\int dx^6 dx'^6 d\theta^4 d\theta'^4 d\bar{\theta}^4 d\bar{\theta}'^4 \delta(\bar{\theta})\delta(\theta') \times \{e^{i(\theta\gamma^\mu\bar{\theta} + \theta'\gamma^\mu\bar{\theta}' - 2\theta\gamma^\mu\bar{\theta}')} \partial_\mu G(x - x')\}^2 \quad (8.32)$$

integrando sobre las funciones  $\delta$  e integrando por partes obtenemos

$$(8.32) = \int dx^6 dx'^6 d\theta^4 d\theta'^4 G^2(x - x') \{\Phi(x, \theta, 0) e^{-2i\theta\gamma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu} \bar{\Phi}(x, \theta, 0)\} \quad (8.33)$$

El  $G^2(x - x')$  lleva como vimos en la sección anterior a una divergencia cuadrática.

Podemos concluir entonces que en el modelo supersimétrico existe una sola divergencia y proviene del término cinético del Lagrangiano, los aportes a la autoenergía y a la corrección de vértice se anulan entre si tanto la parte finita como la divergente.

# Capítulo 9

## Discusión y Conclusiones

Trataremos de resumir en pocas líneas el trabajo realizado en esta tesis, y fundamentalmente discutiremos los resultados encontrados, comentaremos también lo que a nuestro entender pueden ser los futuros trabajos que continúen esta línea de investigación.

En la primera parte, realizamos una extensión natural de la supersimetría, a espacios de dimensión superior, y analizamos en particular el modelo de Wess-Zumino para un supercampo quiral. En este tipo de extensión, el orden de la ecuación de movimiento para los campos, depende del número de dimensiones del espacio-tiempo, de tal forma que todas las componentes del supercampo quiral satisfacen una ecuación generalizada de Klein-Gordon del tipo

$$(\square^{\omega/2} - m^\omega)\phi = 0 \quad (9.1)$$

con  $\omega = 2^{\frac{d}{2}-1}$  ( $d$  par).

En las extensiones más usuales, se exige que la ecuación de movimiento sea de orden dos, pero se paga el precio de romper supersimetría en las dimensiones extra del espacio-tiempo. Por supuesto se tiene la esperanza de recuperarla al hacer el límite  $d \rightarrow 4$ , por algún mecanismo particular (por ejemplo compactificación). Se puede sospechar a esta altura, las dificultades que se encontrarán en la cuantificación ya que la corriente spinorial no es una cantidad conservada.

En nuestra extensión, la supersimetría se mantiene en todas las dimensiones, y como consecuencia

$$\partial_\mu J_\alpha^\mu = 0 \quad (9.2)$$

El precio que pagamos es tratar con ecuaciones diferenciales de orden superior a dos.

Es por este motivo que enfocamos nuestro trabajo, a dar una cuantificación consistente de los grados de libertad extra que aparecen en la teoría por el hecho de tener más de dos derivadas en la ecuación diferencial.

Por razones didácticas, decidimos mostrar nuestra técnica en un modelo simplificado, o sea extrajimos del supercampo quiral sólo su componente escalar. Es claro que en esta forma perdemos supersimetría, pero ganamos en simplicidad y claridad, ya que no tenemos que repetir los procedimientos para las componentes multispinoriales del supercampo. De todas formas la extensión a las otras componentes es directa y mostramos los resultados en el capítulo (6).

El modelo no trivial mas simple es, entonces, un campo escalar en seis dimensiones espacio-temporales, que obedece

$$(\square^2 - m^4)\phi = (\square - m^2)(\square + m^2)\phi = 0 \quad (9.3)$$

Aparte de la componente que satisface una ecuación de Klein-Gordon, a la que llamamos bradiónica, existe otra componente que satisface una ecuación de Klein-Gordon con masa imaginaria pura y la llamamos taquiónica.

La cuantificación canónica para el campo bradiónico como así también para el taquiónico con  $\vec{k}^2 > m^2$ , lleva a los operadores usuales de creación y destrucción  $a^*$  y  $a$ , los cuales determinan el operador energía  $h_k \approx \{a_k, a_k^*\}$  y obedecen las reglas de conmutación  $[a_k, a_{k'}^*] = \delta(k - k')$ . Existen muchas bases para representar estas relaciones y la elección de aquella apropiada debe satisfacer algunas condiciones físicas. Para el caso del bradión, la condición para que se encuentre en su capa de masa  $k^2 - m^2 = 0 = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2$ , define un hiperboloide de dos hojas, cada una de las cuales es invariante de Lorentz y está caracterizada por el signo de la energía. Si nos situamos en la hoja positiva, la base debe tener un vector de energía mínima  $|0\rangle$ , el cual es anulado por el operador  $a_k$ . La base completa puede ser construida ahora por aplicaciones repetidas del operador de creación de partícula  $a_k^*$ . Esta base solo contiene autovectores positivos del operador energía, y constituye un espacio de Fock invariante de Lorentz, apropiado para bradiones.

Para taquiones la situación es diferente. La condición para que éste se encuentre en su capa de masa  $k^2 + m^2 = 0$ , es ahora un hiperboloide de una hoja y ninguna parte propia de ésta es invariante de Lorentz. La base

recién descrita no es adecuada para este caso, en cambio, se requiere una base simétrica con respecto al signo de la energía. Una base de este tipo puede construirse fácilmente con el vector de energía cero  $|0\rangle$ , el cual es anulado por  $\{a_k, a_k^*\}$ , y actuando sobre él no solo con el operador de creación  $a_k^*$  sino también con el de destrucción  $a_k$ . De esta manera construimos una base caracterizada por un entero  $|m\rangle$  (para cada grado de libertad), el cual puede ser positivo, negativo o nulo, midiendo el número de cuantos del campo que llevan estos estados. Este es el espacio de Fock (con métrica indefinida) invariante de Lorentz apropiado para la representación del taquión.

Una vez construida esta base, es simple calcular  $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ . La simetría de esta situación sugiere, y los cálculos lo confirman, que el propagador es ahora la suma de la función de Green retardada más la avanzada. El propagador del taquión es, entonces, el valor principal de Cauchy.

Este es uno de los aportes originales centrales de esta tesis. Otro aporte original es incluir en el análisis la región  $\vec{k}^2 < m^2$  para la componente taquiónica, y esta inclusión es esencial para la unitariedad de la teoría. En esta región el Hamiltoniano es del tipo  $H = p.q + q.p$  con  $[q, p] = i$ . El espectro de energías es continuo y simétrico con respecto al signo de la energía. Podemos calcular en esta región  $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$  y obtenemos nuevamente que el propagador es la función de Green retardada más la avanzada. Debe notarse que para estos valores del impulso los polos del propagador están sobre el eje imaginario.

Concluimos entonces que el propagador del taquión es la función de Green avanzada más la retardada para todo valor del impulso  $\vec{k}$ . Este propagador, el cual llamamos de Cauchy, se puede escribir como (op cit (6.7))

$$\Delta_{Cauchy} = \Delta_F + i\pi \delta(k^2 + m^2) \quad (9.4)$$

Este resultado permite entender porqué los taquiones no pueden ser encontrados como partículas libres, ya que el propagador de Cauchy automáticamente elimina la función  $\delta$  de la capa de masa, y por lo tanto ninguna interacción puede poner una línea de taquión sobre esta capa. El correspondiente espacio de Fock no puede ser ocupado y los taquiones no aparecen en los estados asintóticos.

Puede observarse que la inclusión de la región  $\vec{k}^2 < m^2$ , hace que la función "δ", este definida no sólo para valores reales de su argumento, sino también para valores complejos. Esto es necesario para tener en cuenta los polos en el eje imaginario que presenta la función  $\Delta_F$  para el taquión.

En cierto sentido, los taquiones deben ser considerados como objetos fantasma, los cuales tienen “prohibido” escapar libremente a estados asintóticos. Sin embargo tienen las relaciones normales de spin-estadística, y llevan los grados de libertad extra que tiene la ecuación de movimiento si la comparamos con la de Klein-Gordon.

Este comportamiento es de alguna manera similar al fotón en la electrodinámica, si bien en los estados asintóticos solo aparece la polarización transversal, el propagador contiene todas las polarizaciones, y los “fotones longitudinales y temporales” no pueden escapar a los estados asintóticos.

En el capítulo (7) mostramos que la teoría de cuarto orden, cuantificada de la manera que acabamos de describir, verifica las relaciones que impone la unitariedad perturbativa. Para esto fue necesario calcular la convolución del propagador de cuarto orden consigo mismo, lo que lleva al cálculo de convoluciones de funcionales analíticas. En este cálculo se ve claramente la necesidad de haber tenido en cuenta la región  $\vec{k}^2 < m^2$  para que la teoría sea unitaria.

Para la verificación de unitariedad sólo nos interesa la parte imaginaria de las convoluciones cuando la variable (básicamente la energía) tiende al eje real. Un cálculo más completo en todo el plano complejo puede encontrarse en la referencia [37].

A pesar del hecho de que nuestra matriz  $S$  sólo tiene estados asintóticos bradiónicos, los cuales obedecen las relaciones de microcausalidad, en realidad hemos pagado un precio por el uso del propagador de Cauchy. Este propagador es puramente dispersivo, o sea su parte absorptiva es cero, de tal forma que las relaciones de dispersión usuales no son válidas. La parte dispersiva total no es la transformada de Hilbert de la parte absorptiva total. Esto hace que el propagador de cuarto orden no sea una función analítica de la energía. Por supuesto, no es de esperar que los teoremas que relacionan causalidad con analiticidad sean válidos cuando hay taquiones presentes. Si bien pareciera ser posible que la función avanzada introduzca efectos no físicos, es de hacer notar que Wheeler y Feynman [41], han utilizado la función de Green avanzada más la retardada para el campo de radiación electromagnética, y mostraron que uno obtiene una descripción de la naturaleza físicamente aceptable, y cuando ningún fotón escapa del sistema (nunca esta asintóticamente libre) sólo los efectos retardados son observados.

Quisieramos señalar que nuestro objetivo en este trabajo no fue el de construir una teoría realista, sino más bien una teoría lógicamente consistente.



También queda claro que si bien las relaciones de dispersión serían bienvenidas, si fueran válidas, la unitariedad es una necesidad "sine qua non", de tal forma que si fuera insalvable una contraposición entre ellas en teorías de orden superior, entonces la elección de cual debe retenerse parece clara y única.

En la última parte de esta tesis hacemos un breve comentario sobre la renormalización tanto del modelo simplificado como del supersimétrico. Podemos observar que el modelo simplificado es renormalizable, y encontramos dos divergencias primitivas, una cuadrática y otra logarítmica. En el modelo supersimétrico existe un fenómeno de compensación debido a esta simetría, y sólo aparece una divergencia cuadrática que viene del término cinético del Lagrangiano. Debido a esta compensación, no existe renormalización de masa ni de constante de acoplamiento, ni finita ni infinita, ya que los diagramas que contribuyen a estas correcciones son idénticamente nulos.

Dado que hemos podido construir una teoría de orden superior unitaria y renormalizable, creemos que esto abre el camino para continuar investigando en esta línea.

Un trabajo que ya se está realizando es considerar el modelo en  $d > 6$ . En este caso, a los bradiones y taquiones se agregan campos con masa compleja. Es posible aquí también cuantificar estas componentes y verificar unitariedad en la teoría [42].

Un tema que queda abierto es la existencia de relaciones de dispersión en el modelo, si bien sabemos que las relaciones usuales no son válidas, tampoco es claro que no existan, quizás con alguna otra forma, en teorías de orden superior.

A fin de acercarse a teorías más realistas, sería interesante investigar la extensión de supersimetría, aquí propuesta, en un modelo con invarianza de gauge. Los aspectos clásicos de este modelo fueron tratados en [43] y [44], pero su cuantificación aún no ha sido abordada.

Por supuesto que existe una gran cantidad de modelos que contienen ecuaciones diferenciales de orden superior. A nuestro entender, luego de estos resultados sería conveniente reexaminarlos, quizás con otra perspectiva.

# Bibliografía

- [1] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Math. Physics. Vol II.* Interscience Publishers. (1962).
- [2] R. Utiyama and B. S. Dewitt. *J. Math. Phys.* **3**, 608, (1962).
- [3] J. Z. Simon, *Phys. Rev. D*, **12**, 3720, (1990).
- [4] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, *Nucl. Phys.* **3325**, 389 (1989).
- [5] D. Gross and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B277**, (1986).
- [6] R. Delbourgo and V. B. Prasad, *J. Phys. G* **1**, 377 (1975).
- [7] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Phys. Rev. D* **32**, 3316 (1985).
- [8] S. W. Hawking, in *Quantum Field Theory and Quantum Statistics. Essays in honour of the sixtieth birthday of E. S. Fradkin.* Ed. I. A. Batalin, C. J. Isham, and C. A. Vilkovisky. (A. Higler, Bristol, 1987)
- [9] Ver por ejemplo, P. Van Nieuwenhuizen, *An introduction to simple Supergravity and the Kaluza-Klein program, course in relativité, Groupes et Topologie II, Les Houches 1983, North-Holland (1984).*
- [10] G. C. Bollini and J. J. Giambiagi, *Lagrangians Procedures for Higher Order Field Equations. Notas de Fisica. CBPF-UF-037/86.*
- [11] J. Barcelos Neto and C. P. Natividade, preprint IF-UFRJ, 24/90.
- [12] F. J. Belinfante, *Physica* **6** 887 (1939), *Physica* **7**, 305 (1940).
- [13] S. Coleman and J. Mandula, *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967).

- [14] R. Haag, J. T. Lopusansky and M. F. Sohnius, Nucl. Phys. B88, 257 (1975).
- [15] E. Cartan, Lecons sur la Theorie des Spineurs (Hermann, Paris, 1938).
- [16] I. M. Gel'fand and C. E. Shilov, "Generalized functions", **1**, Academic Press, New York and London (1964).
- [17] C. G. Bollini and L. E. Oxman, "Propagator for Complex Mass Particles", Preprint U.N.L.P. (1991).
- [18] G. Feinberg, Phys. Rev. **159**, 1089 (1967).
- [19] D. G. Barci, C. G. Bollini and M. Rocca, "The Tachyon Propagator". Preprint Depto. de Física U.N.L.P. (1990)
- [20] N. Nakanishi, Suplement of the Progress of Theoretical Physics, **51** (1972).
- [21] Ref [16], pag 70.
- [22] O.M. Bilaniuk, V.k. Deshpande and E.C.G. Sudarshan, Ann. J. Phys. **30**, 718 (1962).
- [23] R.G. Cawley, Ann. Phys. (N.Y.), **54**, 132 (1969).
- [24] A.C.L. Barnard and E.A. Salling, Phys. Today **22** (10), 9 (1969).
- [25] E. Recami, Accad. Naz. Lincei, Rend. Sci. ,**49**, 77 (1970).
- [26] T. Jacobson, N.C. Tsamis ,R. P. Woodard, Phys. Rev. D38, **6** 1823 (1988)
- [27] D. G. Barci, C. G. Bollini and M. Rocca, Il Nuovo Cimento, Vol **103A**. N.4, Pag. 597, Abril 1990.
- [28] J. A. Wheeler and R.P. Feynman, Rev. of Modern Phys. **17**, 157 (1945).
- [29] Ref [16], pag. 159.
- [30] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486, 1736 (1949).

- [31] D. G. Barci, C. G. Bollini and M. Rocca, preprint, "Tachyons and Higher Order Equations" Depto. de Física ( U.N.L.P.) (1990).
- [32] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Il Nuovo Cimento* **12B**, 20 (1971).
- [33] Y. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik, Academic Press Inc. (1980).
- [34] K. Nishijima, "Fields and Particles", W.A. Benjamin Inc. 314-315 (1969).
- [35] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi. *Notas de Física*, CBPF-NF- /91.
- [36] "Higher Trasendental Functions", Bateman Manuscript Projejt". Volumen 1 (sección 2.2), pag. 71. California Institute of Technology.
- [37] M. Rocca, Tesis Doctoral U.N.L.P. (1991)
- [38] H. H. Bang and H. N. Long, preprint IC/89/257.
- [39] "Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry. S. J. Gates,Jr. ,M. T. Griau, et. al. *Frontiers in Physics*. The Benjamin / Gumming Publishing Company, Inc.
- [40] "Field Theory, A modern primer." Pierre Ramond, *Frontiers in Physics*. Lecture Notes series 51, pag. 146.
- [41] J.A. Wheeler and R.P. Feynman, *Rev. of Modern Phys.* **21**, 425 (1949).
- [42] D. G. Barci, C. G. Bollini, L. E. Oxman and M. Rocca, preprint en preparación.
- [43] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Notas de Física*, CBPF-NF-052/88.
- [44] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Notas de Física*, CBPF-NF-043/88.