

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

TESIS DOCTORAL

DISTRIBUCIONES HADRÓNICAS DE MULTIPLICIDAD

ANTONIO OSVALDO BOUZAS

DIRECTOR

PROF. CARLOS ALBERTO GARCÍA CANAL

SEPTIEMBRE 1992

A mis padres

Agradecimientos.

Esta tesis refleja parcialmente mi trabajo de los últimos años en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de La Plata. Durante este período me he beneficiado con la colaboración de muchas personas, a las que deseo agradecer.

Quiero agradecer, en primer lugar, a los Profs. C. A. García Canal, L. N. Epele y H. Fanchiotti, quienes me orientaron y asistieron en mis estudios e hicieron posible mi estadía aquí en La Plata. También quisiera reconocer su preocupación por la continuación de mi carrera más allá de este período de doctorado.

Deseo agradecer también al Dr. C. Hojvat, quien me proporcionó los datos experimentales preliminares de la Colaboración E735 que se estudian en lo que sigue, y tuvo la amabilidad de discutir conmigo distintos aspectos de este trabajo. El Prof. H. Vucetich hizo varias sugerencias útiles en lo relativo al cálculo numérico.

Mi trabajo se vio facilitado por la colaboración de los encargados del sistema de computación y de los otros estudiantes del Departamento.

La realización de esta tesis la llevé a cabo como becario del Concejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y conté con el apoyo parcial del programa PROFICO de CONICET.

Indice

1	Introducción.	8
2	Fenomenología de las Distribuciones de Multiplicidad.	11
2.1	Nociones Básicas.	13
2.1.1	Variables dinámicas.	13
2.1.2	Eventos difractivos y centrales.	14
2.1.3	Eventos de sesgo mínimo.	14
2.1.4	Experiencias en CERN y FERMILAB.	16
2.2	Fenomenología.	19
2.2.1	Primeros Momentos.	19
2.2.2	Propiedades de escala.	23
2.3	Parametrizaciones.	36
2.3.1	Distribución binomial negativa.	36
2.3.2	Distribución logarítmico-normal.	39
2.4	Los datos de UA5.	39
2.5	Colisiones e^+e^-	44

<i>INDICE</i>	4
3 Datos de E735.	46
3.1 Características generales.	47
3.2 Momentos de la Distribución.	50
3.2.1 Moda y media.	50
3.2.2 C -momentos.	53
3.2.3 Dispersiones y cumulantes.	56
3.2.4 Momentos y cumulantes factoriales reducidos.	61
3.3 Parametrizaciones.	64
4 Modelos de Ramificación.	83
4.1 Ecuación de ramificación de partones.	85
4.2 Caracterización del proceso de ramificación.	90
4.2.1 Ecuaciones de evolución de Kolmogorov.	92
4.3 Momentos.	94
4.3.1 Valor medio.	95
4.3.2 Momentos de orden superior.	96
4.4 El caso $B = 0$	98
4.5 Propiedades asintóticas ($B > 0$).	100
4.5.1 Ecuaciones prospectivas.	100
4.5.2 Ecuaciones retrospectivas.	104
4.5.3 C -momentos.	106
4.6 Discusión.	108
5 Comentarios finales y perspectivas.	115

Lista de Figuras

2.1	Procesos difractivos y centrales.	15
2.2	Multiplicidad media de partículas cargadas en eventos inelásticos pp	21
2.3	Distribuciones de multiplicidad de bajas energías en variables KNO	30
2.4	Distribuciones de multiplicidad de ISR en variables KNO	32
2.5	C -momentos para eventos pp entre 6.1 y 62.2 GeV	33
2.6	C -momentos para eventos no difractivos simples entre 10 y 1000 GeV	35
2.7	Datos de UA5 en el espacio de fases completo en variables KNO.	40
2.8	Distribuciones de multiplicidad de UA5 para $\sqrt{s} = 200$ y 900 GeV ajustadas con la distribución binomial negativa.	41
2.9	Distribución de multiplicidad de UA5 para $\sqrt{s} = 900$ GeV ajustada con la distribución binomial negativa doble.	43
3.1	Multiplicidad media de los datos de E735 como función de \sqrt{s}	52
3.2	Evolución de C_2 y C_3 en función de $\langle n \rangle$	54
3.3	Evolución de C_4 y C_5 en función de $\langle n \rangle$	55

3.4	Dispersiones D_k en función de $\langle n \rangle$ con ajustes lineales.	57
3.5	Parámetros d_k en función de $\langle n \rangle$	58
3.6	Cumulantes κ_4, κ_5 en función de $\langle n \rangle$	61
3.7	Ajuste con DBN a la distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO.	66
3.8	Ajuste con DLN a la distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO.	67
3.9	Ajuste con DBND a la distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 300$ GeV en variables KNO.	69
3.10	Ajuste con DBND a la distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 546$ GeV en variables KNO.	70
3.11	Ajuste con DBND a la distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO.	71
3.12	Ajuste con DBND a la distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1800$ GeV en variables KNO.	72
3.13	Componentes de la DBND a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO.	73
4.1	Representación esquemática de la ecuación retrospectiva de Kolmogorov [57].	88

Lista de Tablas

2.1	Parámetros del ajuste a los datos de UA5 en el espacio de fases completo con la distribución binomial negativa.	42
2.2	Parámetros del ajuste a los datos de UA5 en el espacio de fases completo con la distribución binomial negativa doble.	43
3.1	Valor medio y primeros cinco C -momentos de las distribuciones de E735.	51
3.2	Parámetros de los ajustes a $\langle n \rangle$ como función de \sqrt{s}	52
3.3	Dispersiones y cumulantes para las distribuciones de E735.	56
3.4	Parámetros de D_k como función lineal de $\langle n \rangle$	59
3.5	Momentos y cumulantes factoriales reducidos para las distribuciones de E735.	63
3.6	Parámetros de los mejores ajustes a la distribución binomial negativa.	66
3.7	Parámetros de los mejores ajustes a la distribución binomial negativa doble.	69

Capítulo 1

Introducción.

En los últimos años ha habido un resurgimiento del interés en la física de las interacciones fuertes debido, en parte, a la abundancia de datos experimentales que abren a la investigación nuevas regiones de altas energías. Esto permite, por un lado, verificar y delimitar la validez de los aspectos mejor conocidos del Modelo Standard de las interacciones fundamentales, cuyo sector hadrónico, la QCD perturbativa, ha sido aplicado con éxito a una clase amplia de fenómenos en las dos décadas pasadas. Por otro lado, proporciona información indispensable para aumentar la comprensión de otros fenómenos que aún no han podido explicarse de manera satisfactoria en el marco de dicho modelo, como la interacción fuerte residual, las interacciones entre partones en el régimen de pequeño x y, en general, los aspectos no perturbativos.

Los nuevos resultados experimentales abarcan un espectro muy amplio de propiedades de las interacciones hadrónicas, lo que motiva una actividad teórica correspondientemente diversificada. Las distribuciones de multiplicidad de hadrones cargados pueden considerarse como las características más simples y fácilmente observables de los estados finales multi-hadrónicos. Ya que se trata de distribuciones de probabilidad, representan

muestras grandes de eventos de producción de hadrones y están determinadas, en parte, por la dinámica subyacente. Existen, sin embargo, aspectos estadísticos que no dependen de los detalles dinámicos, tal como ocurre, p.ej., con la distribución de energía de las moléculas de un gas en equilibrio térmico. Ambas facetas, la dinámica y la estadística, forman parte de una teoría comprensiva de la producción múltiple de partículas que aún está en desarrollo.

Además del interés básico en las interacciones hadrónicas, existen motivaciones de carácter práctico para el estudio de la multiplicidad de partículas en colisiones inelásticas. La energía de las colisiones hadrónicas ha tenido un incremento de un orden de magnitud con el $Spp\bar{S}$ de CERN y el TeVatrón de Fermilab. En la aniquilación e^+e^- , el acelerador LEP de CERN ha duplicado las energías de experimentos anteriores. Otros experimentos a energías aún más altas se prevén para el futuro mediato. Es necesario conocer con la mayor precisión posible el número de partículas que se producirán en los nuevos experimentos para desarrollar los detectores apropiados y determinar las configuraciones experimentales óptimas. Desde este punto de vista, es relevante el estudio independiente de modelos o teorías.

Es importante señalar también que las experiencias con partículas livianas, como la aniquilación e^+e^- , tienen severas limitaciones técnicas para energías mayores que las actuales, por lo que cabe esperar que la física hadrónica futura esté basada predominantemente en colisiones nucleónicas.

El propósito de esta tesis es el estudio de las distribuciones hadrónicas de multiplicidad desde un punto de vista fenomenológico. En el Capítulo 2 damos una introducción que comprende una síntesis de los aspectos experimentales esenciales para la comprensión de las observaciones. Incluimos también un resumen de los conceptos aplicados usualmente al análisis de los datos, tales como las propiedades de escala, las parametrizaciones y la evolución de los momentos con la energía. Concluimos el capítulo con una descripción de los datos experimentales de CERN en colisiones $p\bar{p}$ y e^+e^- .

El capítulo 3 lo dedicamos al estudio de datos experimentales muy recientes de colisiones $p\bar{p}$. Para ello hemos contado con la colaboración prestada por el experimento E735 del TeVatrón de Fermilab, donde fueron medidos. La intención principal es aquí la caracterización de las distribuciones observadas y de su evolución con la energía, así como la comparación, cuando es posible, con experimentos anteriores. El análisis de las observaciones experimentales lo basamos en distintos marcos fenomenológicos, explicados en el capítulo anterior, que orientan la elección de las magnitudes consideradas. En general, los conceptos aplicados provienen de leyes empíricas que no poseen un alto grado de generalidad. Las dificultades de la aplicación de la teoría de las interacciones fuertes, QCD, al problema específico de las distribuciones de multiplicidad se resuelve actualmente con modelos numéricos de simulación.

En el capítulo 4 presentamos un modelo matemático de ramificación de partones motivado, dentro de ciertas aproximaciones e hipótesis simplificatorias, por QCD perturbativa. El modelo es analizable formalmente, sin recurrir a métodos numéricos, y resulta un prototipo no trivial del *scaling* KNO. Aunque por su simplicidad no es posible aplicarlo directamente a las observaciones experimentales, sus propiedades son comunes a una clase amplia de modelos de ramificación y pone de relieve la naturaleza estadística de ciertas características de la producción múltiple de partículas. Nuestro propósito al realizar este análisis no es agregar un nuevo ajuste con parámetros libres a una lista ya muy extensa, sino aumentar nuestra comprensión y, deseablemente, dar un punto de partida para el estudio de modelos más completos que puedan describir de modo más satisfactorio la fenomenología.

Concluimos en el capítulo 5 con un breve resumen de lo expuesto, donde hacemos nuestros comentarios finales y discutimos las perspectivas para el trabajo futuro.

Capítulo 2

Fenomenología de las Distribuciones de Multiplicidad.

El propósito de este capítulo es rever brevemente los conceptos y características fundamentales del análisis fenomenológico de las distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas en colisiones hadrónicas. Consideraremos principalmente las interacciones protón-antiprotón ($p\bar{p}$) y protón-protón (pp), e incluiremos aquellos aspectos de las colisiones inelásticas $e^+e^- \rightarrow$ hadrones que presentan analogías con los procesos hadrónicos.

El estudio de las distribuciones de multiplicidad forma parte del dominio de la física hadrónica “blanda”, cuya descripción se basa en modelos específicos para la hadronización y la interacción de los estados hadrónicos iniciales, a diferencia de la física de *jets* que involucra procesos “duros” que pueden comprenderse en el marco de la QCD perturbativa. La complejidad de los fenómenos que tienen lugar en la interacción de los hadrones iniciales y la formación de los finales obliga a formular modelos computacionales de simulación, los únicos que actualmente son capaces de reproducir los resul-

tados experimentales a partir de hipótesis sobre la dinámica subyacente.

Las distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas se expresan convencionalmente en términos de las secciones eficaces topológicas σ_n , que miden en forma exclusiva el número de eventos en los que se produjeron n partículas cargadas

$$P_n = \frac{\sigma_n}{\sigma} \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \quad (2.2)$$

donde σ es la sección eficaz total a la que se normalizan los datos experimentales. En los experimentos más recientes de altas energías se toma a σ como la sección eficaz no difractiva simple total, con exclusión de los eventos difractivos simples, mientras que en los experimentos de colisión pp más antiguos, a energías más bajas, σ es generalmente la sección eficaz inelástica total.

También es usual definir la sección eficaz inclusiva

$$\sigma_{\text{inc}} = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n \quad (2.3)$$

$$\langle n \rangle = \frac{\sigma_{\text{inc}}}{\sigma} \quad (2.4)$$

que cuenta el número de partículas cargadas producidas. La relación entre σ_n y número de eventos y entre σ_{inc} y número de partículas está dada por una constante de proporcionalidad \mathcal{L} , llamada "luminosidad", que es característica del acelerador.

En mediciones en el espacio de fases completo, el número de partículas cargadas n_{ch} está restringido, debido a la conservación de la carga, a valores pares. Por este motivo, se suele tomar como "medida genuina de multiplicidad" el número n_+ de partículas de carga positiva, o n_- de carga negativa, menos la carga del estado inicial.

2.1 Nociones Básicas.

2.1.1 Variables dinámicas.

En los recientes experimentos de altas energías con *colliders*, el sistema centro de masa y laboratorio coinciden, a diferencia de lo que ocurre en el caso de blanco fijo. Los procesos inelásticos observados poseen simetría cilíndrica respecto a la dirección de los haces incidentes, por lo que la variable geométrica básica es el ángulo de dispersión θ de las partículas producidas. La energía de la reacción la denotamos mediante la variable s de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 \\ E &= \sqrt{s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las partículas incidentes.

El impulso de los productos se suele caracterizar por algún par de variables elegido entre las siguientes [1]

$$\begin{aligned} p_t &= p \sin \theta && \text{impulso transverso.} \\ p_l &= p \cos \theta && \text{impulso longitudinal.} \\ x_F &= \frac{p_l}{p_{1\max}} = \frac{2p_l}{\sqrt{s}} && \text{variable } x \text{ de Feynman.} \\ y &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{E + p_l}{E - p_l} \right) && \text{rapidez.} \\ \eta &= -\log \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) && \text{pseudorapidez.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

La rapidez y tiene la propiedad de transformarse aditivamente por transformaciones de Lorentz paralelas al eje de la colisión y, fenomenológicamente, conduce a distribuciones "suaves" de partículas.

Cuando $m = 0$ resulta $y \equiv \eta$, luego

$$E \gg m \Rightarrow y \approx \eta \quad (2.7)$$

y la aproximación es mejor para dispersión a grandes ángulos. La pseudo-rapidez η es más simple de determinar experimentalmente ya que, por ser puramente geométrica, no requiere mediciones de impulso.

2.1.2 Eventos difractivos y centrales.

Los procesos de dispersión hadrónica de altas energías se clasifican en difractivos y no difractivos o centrales. Así [1]

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{nd}} + \sigma_{\text{d}} \quad (2.8)$$

donde σ_{d} , la sección eficaz para procesos difractivos, incluye la dispersión elástica, difractiva simple y difractiva doble

$$\sigma_{\text{d}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{ds}} + \bar{\sigma}_{\text{ds}} + \sigma_{\text{dd}}. \quad (2.9)$$

Esta tipología, basada teóricamente en la naturaleza de las interacciones que predominan en cada caso, conduce a una caracterización de los eventos por su distribución de rapidez.

Los eventos difractivos se caracterizan por valores absolutos de rapidez grandes, mientras que los centrales tienen distribuciones de rapidez concentradas en valores pequeños alrededor de $y = 0$ (Figura 2.1).

Un evento típico de colisión hadrón-hadrón no pertenece a ninguno de estos tipos sino que muestra una estructura mixta con una distribución de rapidez caracterizada por un *plateau* central y dos regiones de fragmentación próximas a los valores máximos y mínimos posibles de y .

2.1.3 Eventos de sesgo mínimo.

Los experimentos de interacciones hadrónicas blandas a los que nos referiremos emplean el mismo tipo de *trigger* de sesgo mínimo (*minimum bias*)

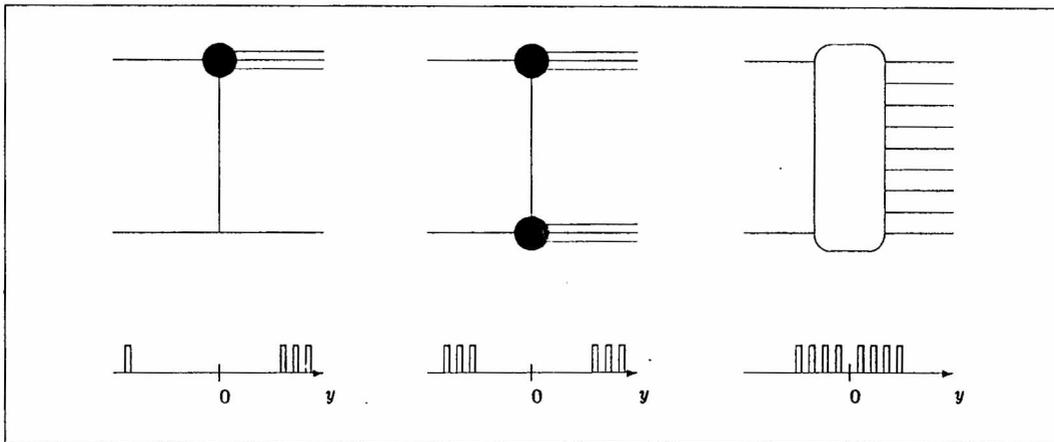


Figura 2.1: Representación esquemática de un proceso difractivo simple, uno doble y uno central y sus distribuciones de rapidez [1].

que acepta la totalidad de los eventos excepto los difractivos simples. En contraste, en experiencias destinadas a la investigación de la estructura hadrónica mediante el estudio de procesos a gran impulso transversal, sólo se tienen en cuenta eventos con una estructura topológica particular. Los *triggers* usados en estos casos pueden aceptar sólo eventos con un hadrón producido a gran impulso transversal (*trigger particle*), acompañado por un *jet* de partículas secundarias que no provienen de decaimientos de resonancias (*trigger jet*), o bien, directamente sólo aquellos eventos con *jets* a grandes ángulos (*triggers* calorimétricos), lo que permite estudiar la producción inclusiva de *jets* [2].

Dado que estos eventos son relativamente escasos en las interacciones hadrónicas, este tipo de estudios sólo considera una parte de la sección eficaz total, más pequeña aún en el caso de *particle triggers* que en el de *jet triggers*. Esta reducción de la sección eficaz se denomina [2] “sesgo del *trigger*” (*trigger bias*), de donde resulta el término de “sesgo mínimo” antes mencionado.

En las experiencias de sesgo mínimo los eventos resultan aproximadamente isotrópicos, excepto una fracción que contiene conglomerados (*clusters*) de partículas. La colaboración UA1 [3] ha estudiado la producción de estos conglomerados o “*minijets*” con una energía transversa mayor que 5 GeV depositada en una region de tamaño típico $(\Delta\eta)^2 + (\Delta\phi)^2 \approx 1$. Se observa experimentalmente que el número de eventos con *minijets* crece con la energía más rápido que el número de eventos isotrópicos con la misma multiplicidad, llegando a ser aproximadamente el 25% de la sección eficaz total $p\bar{p}$ a $\sqrt{s} = 900$ GeV.

2.1.4 Experiencias en CERN y FERMILAB.

Los resultados experimentales en multiplicidades en colisiones $p\bar{p}$ más recientes han sido obtenidos en los *colliders* del CERN ($Spp\bar{p}S$) y del Fermi National Accelerator Laboratory (TeVatron).

Las mediciones más completas y recientes en el CERN se llevaron a cabo para energías $\sqrt{s} = 200$ y 900 GeV (anteriormente para $\sqrt{s} = 546$ y 630 GeV) por los experimentos UA5 y UA1.

El detector UA5 [4] es de tipo visual, con un registro fotográfico de los eventos detectados. Su propósito específico es la medición de la multiplicidad de partículas cargadas y producción de fotones, esta última como complemento de la anterior en la búsqueda de eventos exóticos de tipo Centauro [4]. La determinación de multiplicidades incluye las distribuciones de partículas en pseudorapidez y las funciones de correlación de dos partículas $C(\eta_1, \eta_2)$. Consiste esencialmente en dos cámaras de tipo *streamer chamber* una encima y otra debajo del haz, con un complejo sistema óptico de fotografías estereoscópicas para la reconstrucción espacial de las trazas. El detector se completa con un par de hodoscopios centelladores frontales y posteriores que constituyen el *trigger*.

La aceptación geométrica del detector es de $|\eta| \leq 5$, lo que cubre la mayor parte del ángulo sólido total, excepto la región de circulación de los haces. Las mediciones publicadas son en su mayor parte para eventos no difractivos simples, los que se seleccionan directamente requiriendo coincidencia de al menos un impacto en cada uno de los hodoscopios frontal y posterior y el paso del haz. El experimento no tiene campo magnético aplicado, por lo que no provee medición de impulsos y por este motivo no determina rapidez sino pseudorapidez.

El experimento más reciente [5] registró 4156 eventos a $\sqrt{s} = 200$ GeV y 6839 eventos a $\sqrt{s} = 900$ GeV.

El detector UA1 [6] provee mediciones más amplias de las características generales de las colisiones $p\bar{p}$ mediante el análisis calorimétrico y magnético, que permite determinar el impulso de partículas cargadas, la energía de partículas cargadas y neutras depositadas en el calorímetro, la estructura topológica de los eventos, etc. Para las mediciones de multiplicidad se usa el Detector Central, de tipo *tracking chamber* con simetría cilíndrica y campo magnético, que tiene una aceptación geométrica de $|\eta| \leq 2.5$. La selección de eventos no difractivos simples se realiza mediante un *trigger* de sesgo mínimo de características similares a las descritas más arriba. El análisis calorimétrico permite asimismo la medición de distribuciones de energía transversal, lo que constituye una medida de la multiplicidad total (partículas cargadas y neutras) que complementan las mediciones de multiplicidades cargadas.

El experimento más reciente [6] está basado en 188000 eventos, 18% para $\sqrt{s} = 200$ GeV, 34% para $\sqrt{s} = 900$ GeV y el 48% restante en intervalos de \sqrt{s} centrados en $\sqrt{s} = 260, 380, 500, 620$ y 790 GeV.

El *collider* de Fermilab tuvo un período de recolección de datos en 1989, principalmente a la energía de $\sqrt{s} = 1800$ GeV y también para $\sqrt{s} = 300, 546$ y 1000 GeV. La medición de multiplicidades se lleva a cabo en el Detec-

tor Central y el detector E735. Este último [7,8] está diseñado para medir multiplicidades e impulso transversal de partículas cargadas con la intención de determinar la existencia de una transición de fase desconfiante en la materia hadrónica. El impulso transversal promedio puede interpretarse como una medida de la temperatura de la materia hadrónica formada en las colisiones, y la densidad de partículas en rapidez es proporcional a la densidad de entropía [7,9]. La forma del gráfico del impulso transversal promedio en función de la multiplicidad puede entonces indicar la presencia de una transición de fase [10].

El detector consta de un hodoscopio formado por 240 contadores de centelleo que rodean la región de interacción en el rango $|\eta| \leq 3.25$. Está dividido en un “cañón central” con una aceptación de $|\eta| \leq 1.64$ y dos “tapas” que completan el rango total. El *trigger* está constituido por dos hodoscopios situados fuera del hodoscopio de multiplicidades, uno en cada extremo del espectrómetro. La configuración es similar a las anteriores, requiriéndose coincidencia de un impacto en cada hodoscopio y el paso del haz para registrar un evento. De este modo se excluyen los eventos difractivos simples.

El experimento se completa con un espectrómetro magnético que permite la medición de impulso transversal. En el período 1988–1989 la colaboración E735 registró 2.8 millones de eventos de sesgo mínimo en el hodoscopio central, aunque los resultados finales aún no han sido publicados [8].

En experimentos más antiguos, en el rango de energías accesible en el ISR del CERN, $30 \leq \sqrt{s} \leq 60$ GeV, se usaron otros tipos de *triggers* de sesgo mínimo que aceptan todos los eventos inelásticos, y la separación de eventos difractivos simples se realiza durante el análisis posterior de los datos [12]. Este es el caso de las mediciones realizadas por la colaboración ABCDHW con el detector SFM (*Split Field Magnet*) situado en el *collider* de protones ISR. El detector consiste en un conjunto de cámaras

proporcionales multialámbricas dentro del generador de campo magnético. El carácter no visual del detector permite, como en el caso de E735, el manejo de muestras de eventos mucho mayores. La experiencia realizada en 1984 [11] produjo aproximadamente 37, 61, 27 y 58K eventos pp a energías $\sqrt{s} = 30.4, 44.5, 52.6$ y 62.2 GeV respectivamente.

El *trigger* de sesgo mínimo usado en este experimento sólo requiere la presencia de una traza en el detector, aceptando de este modo la totalidad (95%) de los eventos inelásticos. Se consideran difractivos simples aquellos eventos en los que sólo se detecta una partícula con $x_F \geq 0.8$ en uno de los hemisferios, o bien, cuando no se detecta ninguna partícula en uno de los hemisferios.

2.2 Fenomenología.

En esta Sección haremos un resumen de la fenomenología de las distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas en colisiones pp y $p\bar{p}$. El análisis de la evolución con la energía de las distribuciones y sus momentos revela regularidades que describiremos a continuación.

2.2.1 Primeros Momentos.

Valor Medio.

El valor medio de la distribución de multiplicidad $P_{n_{ch}}$

$$\langle n_{ch} \rangle = \sum_{n_{ch}} n_{ch} P_{n_{ch}} \quad (2.10)$$

es una función creciente suavemente con la energía \sqrt{s} y define la escala de la colisión.

La hipótesis de Feynman acerca de las propiedades de escala de la sección eficaz para las colisiones hadrónicas (ver 2.2.2) conduce, asintóticamente, a una dependencia logarítmica

$$\langle n_{\text{ch}} \rangle = a + b \log s \quad (2.11)$$

con la energía. En la referencia [13] se resumen las predicciones correspondientes a diferentes modelos, entre los que podemos citar el modelo estadístico de Fermi y el modelo hidrodinámico de Landau que conducen a una dependencia del tipo

$$\langle n_{\text{ch}} \rangle = a s^{1/4} \quad (2.12)$$

y la multiplicidad de gluones blandos para un jet de quark que tiene asintóticamente la forma [12,13]

$$\langle n \rangle = a \exp \left(b \sqrt{\log s} \right) \quad (2.13)$$

En la práctica, ninguna de estas expresiones es suficiente para describir los resultados experimentales, por lo que se usan las parametrizaciones generalizadas [1,4,6,12,13,14]

$$\langle n_{\text{ch}} \rangle = a + b \log \sqrt{s} + c (\log \sqrt{s})^2 \quad (2.14)$$

$$\langle n_{\text{ch}} \rangle = a + b s^c \quad (2.15)$$

$$\langle n_{\text{ch}} \rangle = a \exp \left[b \sqrt{\log \left(\frac{s}{\Lambda^2} \right)} \right] + c \quad (2.16)$$

donde a , b , c son parámetros libres (Figura 2.2). Aunque (2.16) parece ajustar mejor con los datos en la región de energías de los *colliders*, para concluir la inadecuación de cualquiera de ellas y, consecuentemente, del modelo que le da origen, son necesarios nuevos datos experimentales.

Dispersión.

Como mencionamos antes, el valor medio de la distribución de multiplicidad se usa frecuentemente como escala de energías en los estudios relacionados

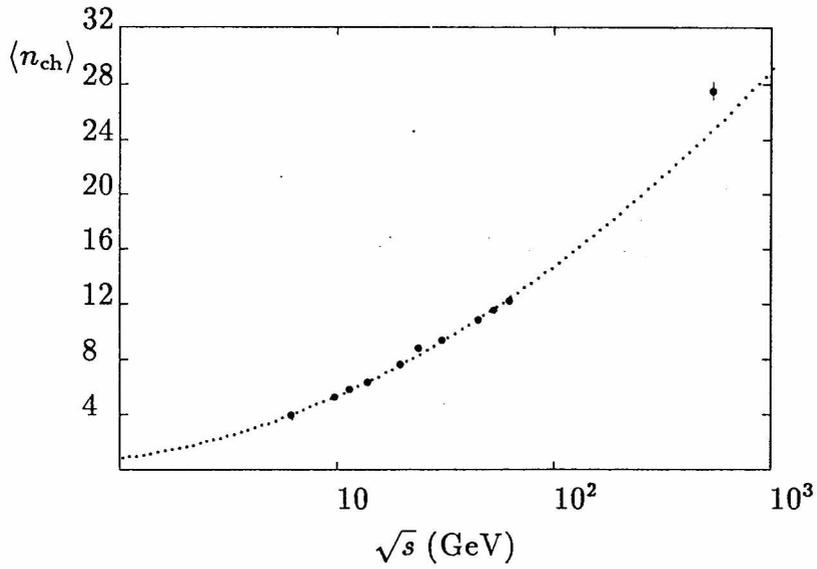


Figura 2.2: Valor medio de multiplicidad de partículas cargadas para eventos inelásticos pp . De izquierda a derecha, los seis primeros puntos son de [24], los cuatro siguientes de [11] y el último de [4]. La línea punteada es la parametrización (1.14) con los parámetros de [11].

con las multiplicidades. Los momentos de orden superior se parametrizan generalmente en términos de $\langle n_{\text{ch}} \rangle$ en lugar de s .

Una de las leyes empíricas mejor establecidas en la producción múltiple de partículas es la relación de Wróblewski [15], entre la dispersión

$$D_2^{\text{ch}} = \left[\sum_{n_{\text{ch}}} (n_{\text{ch}} - \langle n_{\text{ch}} \rangle)^2 P_{n_{\text{ch}}} \right]^{1/2} \quad (2.17)$$

y el valor medio en la forma

$$D_2^{\text{ch}} \propto (\langle n_{\text{ch}} \rangle - 1) \quad (2.18)$$

La validez de esta relación se extiende al rango de energías desde unos pocos GeV hasta las energías de los *colliders* (~ 200 GeV) [12,15]. Como veremos en el Capítulo 2, relaciones lineales del tipo (2.18) son también válidas en todo el rango del experimento E735, aunque no es posible estudiar el intervalo completo de energías desde 10 GeV hasta 1.8 TeV debido a la incompatibilidad de los datos experimentales. Por ejemplo, mientras que los datos correspondientes a bajas energías son generalmente inelásticos y corresponden al espacio de fases completo, los experimentos en los *colliders* registran eventos no difractivos simples y en el caso particular de E735, sólo en la región central $|\eta| \leq 3.25$. Asimismo, aún cuando la región del espacio de fases considerada sea la misma en diferentes experimentos, los distintos métodos de eliminación de los eventos difractivos pueden no ser compatibles entre sí [12].

Es interesante mencionar que esta relación de Wróblewski, así como las generalizaciones que consideraremos más adelante, no han sido aún explicadas teóricamente aunque encuentran sustento en el marco de modelos fenomenológicos (p. ej., [16]).

2.2.2 Propiedades de escala.

Propiedad de escala de Feynman.

Esta propiedad de escala predice un espectro asintótico de impulso longitudinal de la forma

$$\frac{E}{\sigma_{\text{tot}}} \frac{d^3 \sigma_{\text{inc}}}{dp_t d^2 p_t} \sim f(p_t, x_F) \quad (2.19)$$

donde x_F es la variable definida en (2.6). La ecuación (2.19) fue propuesta por Feynman [17] a partir del análisis de las teorías relativista de campos en el límite de energías muy grandes. Si se supone que el impulso transverso está limitado de manera independiente del impulso longitudinal p_1 , entonces las variables naturales para describir los impulsos de las partículas producidas y para comparar los resultados de experimentos a distintos valores de \sqrt{s} son, según [17], el impulso transverso p_t y x_F . Estos argumentos son independientes de modelos particulares, aunque existen varios modelos de colisiones hadrónicas que conducen a (2.19) ([13] y refs. allí citadas).

De las definiciones (2.6), vemos que usando la rapidez como variable resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_F} \right) \frac{2E_t}{\sqrt{s}} \sinh y \quad (2.20)$$

de donde, para p_t fijo, resulta que f es aproximadamente constante como función de y para

$$0 \leq y < \log s \quad (2.21)$$

es decir, el espectro de rapidez debe tener un *plateau* de longitud $\sim \log s$. La altura de este *plateau* en $y = 0 = x_F$ debe ser independiente de \sqrt{s} , cuando \sqrt{s} es suficientemente grande como para que valga (2.19).

La suposición adicional de Feynman de que la energía de la colisión \sqrt{s} se distribuye entre las distintas clases de partículas en proporciones fijas independientemente de s , permite obtener una predicción para la evolución de

$\langle n \rangle$. Pues en este caso, para un valor no nulo de x_F tenemos, asintóticamente

$$\frac{dp_l}{E} \sim \frac{dx_F}{x_F} \quad (2.22)$$

lo que conduce a un crecimiento logarítmico de $\langle n \rangle$ con \sqrt{s} .

Resultados experimentales recientes [4] muestran que $(d\sigma/dy)_{y=0}$ crece como $\log s$, lo que constituye una violación de la propiedad de escala de Feynman. Como vimos antes, el crecimiento del valor medio de partículas cargadas en procesos pp y $p\bar{p}$ (y también en e^+e^-) es más rápido que logarítmico. Por otro lado, la distribución de partículas en rapidez en la región central tiene una estructura más compleja que un simple *plateau* [1]. Se puede concluir entonces que la propiedad de escala de Feynman es válida sólo cualitativamente en intervalos limitados de \sqrt{s} .

Propiedad de escala KNO.

A partir de la hipótesis de la propiedad de escala de Feynman y de que las funciones de escala de Feynman

$$f^{(q)}(x_{F1}, p_{t1}; x_{F2}, p_{t2}; \dots; x_{Fq}, p_{tq}) = \frac{1}{\sigma_{\text{tot}}} \frac{d\sigma}{\frac{d^3p_1}{E_1} \frac{d^3p_2}{E_2} \dots \frac{d^3p_q}{E_q}} \quad (2.23)$$

no son singulares en $x_{F1} = x_{F2} = \dots = x_{Fq} = 0$, Koba, Nielsen y Olesen [18] derivaron la propiedad de escala asintótica para las distribuciones de multiplicidad (2.1)

$$P_n(s) = \frac{1}{\langle n \rangle} \psi \left(\frac{n}{\langle n \rangle} \right) + O \left(\frac{1}{\langle n \rangle^2} \right) \quad (2.24)$$

donde $\psi(z)$ es una función independiente de la energía que satisface las condiciones de normalización

$$\int_0^\infty dz \psi(z) = 1 = \int_0^\infty dz z \psi(z). \quad (2.25)$$

Estas ecuaciones implican la normalización de $P_n(s)$ si $\langle n \rangle$, es decir s , es suficientemente grande

$$\sum_n P_n \approx \int_0^\infty dz \psi(z) \quad (2.26)$$

$$\sum_n \frac{n}{\langle n \rangle} P_n \approx \int_0^\infty dz z \psi(z). \quad (2.27)$$

Una consecuencia inmediata de (2.24) es que los C -momentos

$$C_k \equiv \frac{\langle n^k \rangle}{\langle n \rangle^k} \quad (2.28)$$

son independientes de la energía \sqrt{s} . Nótese que esta es una forma asintótica, para $\langle n \rangle \gg 1$, de la relación de Wróblewski (2.18). Análogamente se deduce la relación

$$D_2^{\text{ch}} \propto \langle n_{\text{ch}} \rangle \quad (2.29)$$

La ecuación asintótica (2.24) es válida para cualquier especie de partículas producidas para la que se satisfaga la propiedad de escala de Feynman y, en particular, el crecimiento logarítmico de $\langle n \rangle$ con s . De acuerdo con la hipótesis de Feynman de que la energía de los campos se distribuye entre las diferentes clases de partículas en proporciones fijas, (2.24) puede referirse al número total de productos, al número de partículas cargadas o de un valor particular de carga, al número de π^0 o K^+ , etc.

La forma funcional de $\psi(z)$ puede depender, en principio, de las partículas iniciales y de las finales observadas. Koba *et al.* [18] proponen la universalidad de ψ , tanto respecto de las partículas iniciales como de las observadas en el estado final, basándose en propiedades de las secciones eficaces inclusivas comunes a una clase de modelos de bajas energías (factorización de la sección eficaz, modelos de Regge, etc.)

Es importante señalar que la propiedad de escala (2.24) fue obtenida independientemente por Polyakov [19] para el proceso $e^+e^- \rightarrow$ hadrones a partir de la hipótesis de que las interacciones en juego pueden ser descritas por

una teoría cuántica de campos locales invariante de escala asintóticamente. Los trabajos de Polyakov conducen a una imagen de la reacción $e^+e^- \rightarrow$ hadrones como un proceso estocástico de ramificación [19,20] análogo a los modernos modelos computacionales y a las ecuaciones de ramificación consideradas en el Capítulo 3.

Propiedad de escala KNO-G.

La propiedad de escala KNO es una predicción asintótica, válida para $\langle n \rangle \gg 1$. La validez aproximada de la misma para bajas energías en el rango $\langle n \rangle \sim 10$ sugiere que una reformulación es necesaria. En particular, las condiciones de normalización (2.25) y (2.26),(2.27) impuestas a ψ y P_n no pueden satisfacerse simultáneamente a energías no asintóticas.

Una generalización apropiada, denominada propiedad de escala KNO-G [21], consiste en introducir una densidad de probabilidad $P(\tilde{n})$ dependiente de una variable continua de multiplicidad \tilde{n} , de modo que

$$P_n = \int_n^{n+1} d\tilde{n} P(\tilde{n}) \quad (2.30)$$

Hemos supuesto que la multiplicidad n toma todos los valores enteros no negativos. Por ejemplo, en una reacción pp en el espacio de fases total podemos tomar $n = n_-$ o $n = n_+ - 2$ para evitar el vínculo de conservación de la carga eléctrica que obliga a n_{ch} a tomar sólo valores pares. En esta sección supondremos que n es una "medida genuina de multiplicidad" [12] como es conveniente en la discusión de la propiedad de escala KNO-G.

La hipótesis de escala es ahora que $P(\tilde{n})$ tiene un comportamiento KNO

$$P(\tilde{n}) = \frac{1}{\langle \tilde{n} \rangle} \psi \left(\frac{\tilde{n}}{\langle \tilde{n} \rangle} \right) \quad (2.31)$$

$$\langle \tilde{n} \rangle = \int_0^\infty d\tilde{n} \tilde{n} P(\tilde{n}) \quad (2.32)$$

con las condiciones de normalización (2.25) para la función de escala ψ . De este modo tenemos las igualdades exactas

$$\begin{aligned} \sum_n P_n &= \int_0^\infty d\tilde{n} P(\tilde{n}) = \int_0^\infty dz \psi(z) = 1 \\ \int_0^\infty dz z \psi(z) &= \frac{1}{\langle \tilde{n} \rangle} \int_0^\infty d\tilde{n} \tilde{n} P(\tilde{n}) = 1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

que son aplicables para todas las energías.

La propiedad de escala KNO-G suele reescribirse en la forma integrada, más apropiada para análisis gráficos [12,22]

$$P_n(\langle n \rangle) = \Phi\left(\frac{n+1}{\langle \tilde{n} \rangle}\right) - \Phi\left(\frac{n}{\langle \tilde{n} \rangle}\right) \quad (2.34)$$

$$\Phi(z) = \int_0^z dz \psi(z) - 1 \quad (2.35)$$

$$\int_0^\infty dz \Phi(z) = -1 \quad (2.36)$$

con el agregado de la igualdad aproximada

$$\langle \tilde{n} \rangle \approx \langle n \rangle + 0.5 \quad (2.37)$$

que es válida para $\langle n \rangle \geq 1$ [12,21,22]

El punto de vista KNO-G tiene otra ventaja además de su aplicabilidad a bajas energías: como consecuencia de sus hipótesis se deriva el conjunto completo de relaciones de Wróblewski. Usando n_{ch} como variable, se puede demostrar [12,22] que si $P_{n_{\text{ch}}}$ tiene la forma KNO-G, entonces las dispersiones de orden superior

$$D_k^{\text{ch}} = \left[\sum_{n_{\text{ch}}} (n_{\text{ch}} - \langle n_{\text{ch}} \rangle)^k P_{n_{\text{ch}}} \right]^{\frac{1}{k}} \quad (2.38)$$

satisfacen, para $\langle n_{\text{ch}} \rangle > 1$, las relaciones de Wróblewski generalizadas

$$D_k^{\text{ch}} \propto (\langle n_{\text{ch}} \rangle - 1) \quad (2.39)$$

con constantes de proporcionalidad que dependen sólo de k . Más aún, es posible reproducir la dependencia de D_k y C_k con la energía en el límite $\langle n \rangle \rightarrow 0$ aplicando las distribuciones KNO-G exactas [12].

Status de las propiedades de escala.

Históricamente, luego de la propuesta de Koba, Nielsen y Olesen [18] se encontró que la propiedad de escala KNO era válida con buena aproximación para los datos experimentales de la época, que distaban mucho de poder considerarse asintóticos. La verificación de la propiedad de escala se lleva a cabo usualmente de tres maneras distintas

- Graficando las distribuciones de multiplicidad en las variables KNO $\langle n \rangle P_n$.vs. $n/\langle n \rangle$. Si la ecuación (2.24) es válida, entonces los puntos experimentales correspondientes a diferentes energías deben yacer todos sobre una misma curva. Este *test* gráfico puede cuantificarse ajustando a los datos una función de escala ψ elegida apropiadamente y especificando la calidad del ajuste en la forma usual χ^2/dof .
- Examinando los C -momentos de la distribución, los que de acuerdo con la ecuación (2.29) deben ser independientes de la energía.
- Haciendo un ajuste lineal de la dependencia $D_2^{\text{ch}} = D_2^{\text{ch}}(\langle n_{\text{ch}} \rangle)$, que de acuerdo con la ecuación (2.29) debe tener ordenada al origen nula. Este último parámetro suele tomarse como medida de la violación de la propiedad de escala.

Así, Olesen [23] verificó la existencia de *scaling* para las distribuciones de multiplicidad de colisiones pp inelásticas a las energías $\sqrt{s} = 7, 19$ GeV ($\langle n_{\text{ch}} \rangle = 4.5, 7.65$).

En un análisis más detallado, Slattery [24] consideró datos experimentales de colisiones inelásticas pp para $\sqrt{s} = 6.1, 9.7, 11.4, 13.8, 19.6, 23.8$ GeV. La conclusión es que si se excluye la distribución correspondiente a la energía más baja, el *scaling* es válido con muy buena aproximación. La función de escala se toma, empíricamente, como

$$\psi_{\text{slat}}(z) = (3.79z + 33.7z^3 - 6.64z^5 + 0.332z^7) \exp(-3.04z) \quad (2.40)$$

(Figura 2.3). Sin embargo, los argumentos de KNO no pueden ser válidos a estas energías ($\langle n_{\text{ch}} \rangle = 4, 5.3, 5.89, 6.4, 7.7, 8.9$ resp.) por lo que Slattery sugiere considerar la propiedad de escala como una ley empírica aún no explicada teóricamente.

Esta distinción es importante, ya que la validez de la propiedad de escala como límite de las distribuciones de multiplicidad no está relacionada con su validez a energías finitas. Para separar ambos conceptos, en lo que sigue denominaremos “propiedad de escala KNO temprana” (o “*scaling* temprano”) a la versión empírica y reservaremos la designación de “propiedad de escala” (o “*scaling*”) para la ley asintótica (2.24). Eventualmente, para valores de $\langle n_{\text{ch}} \rangle$ suficientemente grandes, el *scaling* KNO temprano se considerará una corroboración empírica de la propiedad de escala KNO.

Similares resultados se obtuvieron en la referencia [25] para colisiones hadrón-protón en la región $\sqrt{s} \approx 5$ GeV. Independientemente de la especie del hadrón inicial, se encuentra que $D_2^{\text{ch}}/\langle n_{\text{ch}} \rangle \approx 1/2$ a partir de una energía que sí depende de la naturaleza del proyectil y que para $p\bar{p}$ es $\sqrt{s} \approx 4$ GeV. La función de escala usada en este caso es,

$$\psi_{\text{dao}} = 0.085 \exp(10.3z - 13.0z^2 + 7.54z^3 - 2.27z^4 + 0.26z^5) \quad (2.41)$$

para $0 \leq z \leq 3.1$, y también resulta independiente del proyectil usado. La función ψ_{slat} provee un ajuste de menor calidad. El rango para el caso $p\bar{p}$ es $\sqrt{s} = 4, 4.9, 5.5, 9.8, 19.7$ GeV.

Estos resultados fenomenológicos motivaron un análisis de la derivación de KNO a partir de la propiedad de escala de Feynman para energías finitas [26]. Si esta última fuera válida para los valores de \sqrt{s} mencionados, entonces los términos $O(1/\langle n_{\text{ch}} \rangle^2)$ en (2.24) violarían el *scaling* temprano, que no sería observable experimentalmente. La explicación de las observaciones debe ser, por lo tanto, distinta de la dada por KNO. Asimismo, puede demostrarse [26] que ningún modelo que conserve la energía puede satisfacer (2.24) exactamente sobre un intervalo finito de energías. Esta restricción

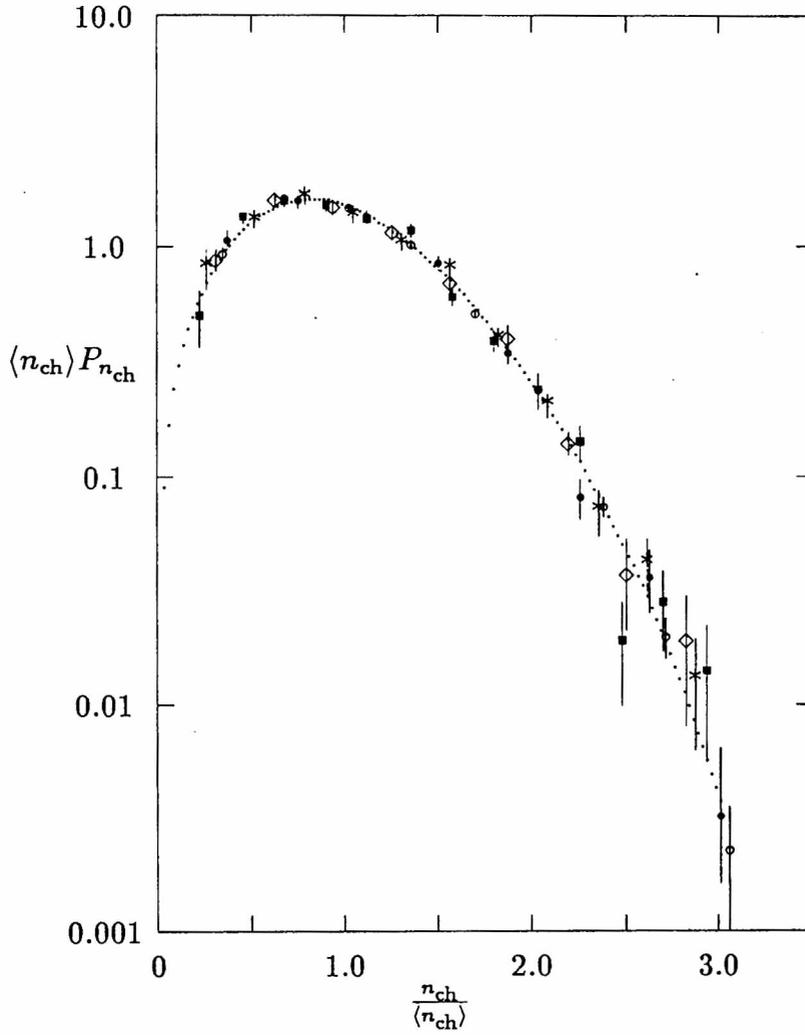


Figura 2.3: Distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas para $\sqrt{s} = 9.7, 11.4, 13.8, 19.6$ y 23.8 GeV en variables KNO. La línea punteada representa la función ψ_{slat} (ver texto) [24]

es, sin embargo, menos importante desde el punto de vista fenomenológico que la anterior, ya que es consecuencia de la existencia de una cota superior para el número de partículas producidas $n_{\text{ch}} \leq n_{\text{max}} \propto \sqrt{s}$ debida a la conservación de la energía.

Más recientemente, la colaboración ABCDHW [11] realizó experiencias de alta estadística en el acelerador ISR para colisiones pp inelásticas y no difractivas simples con $\sqrt{s} = 30.4, 44.5, 52.6, 62.2$ GeV ($9.43 \leq \langle n_{\text{ch}} \rangle \leq 12.25$ para los datos inelásticos y $10.5 \leq \langle n_{\text{ch}} \rangle \leq 13.7$ para los no difractivos). Los datos no difractivos simples satisfacen el *scaling* KNO con

$$D_2^{\text{ch}} = (0.439 \pm 0.007) \langle n_{\text{ch}} \rangle - (0.02 \pm 0.06) \quad (2.42)$$

(Figura 2.4) mientras que los inelásticos muestran una violación de la propiedad de escala con una ordenada al origen incompatible con un valor nulo

$$D_2^{\text{ch}} = (0.606 \pm 0.002) \langle n_{\text{ch}} \rangle - (0.74 \pm 0.02) \quad (2.43)$$

Para los primeros se halla que los momentos C_2 — C_5 son consistentes con un valor constante (Figura 2.5).

El *collider* $Spp\bar{S}$ del CERN abrió un nuevo rango de energías con las mediciones de la colaboración UA5 de eventos inelásticos y no difractivos con $\sqrt{s} = 546$ GeV [4]. La comparación de los datos de UA5 con los anteriores conduce a la conclusión de que para datos no difractivos simples la propiedad de escala KNO temprana es válida para $11.4 \leq \sqrt{s} \leq 62.2$ GeV con

$$\psi_{\text{UA5}} = 45.1z^{3.07} \exp(-2.63z - 0.61z^2) \quad (2.44)$$

con un valor de $\chi^2/\text{dof} = 149/122$ y además que la nueva distribución medida por UA5 tiene una forma diferente y no se superpone con los otros datos. El porcentaje de eventos en la “cola” de la distribución ($z > z_{\text{corte}} = 1.5, 2.0, 2.5$) crece lentamente con la energía en el rango de bajas energías citado, pero presenta un salto entre 62.2 y 546 GeV. El efecto es más

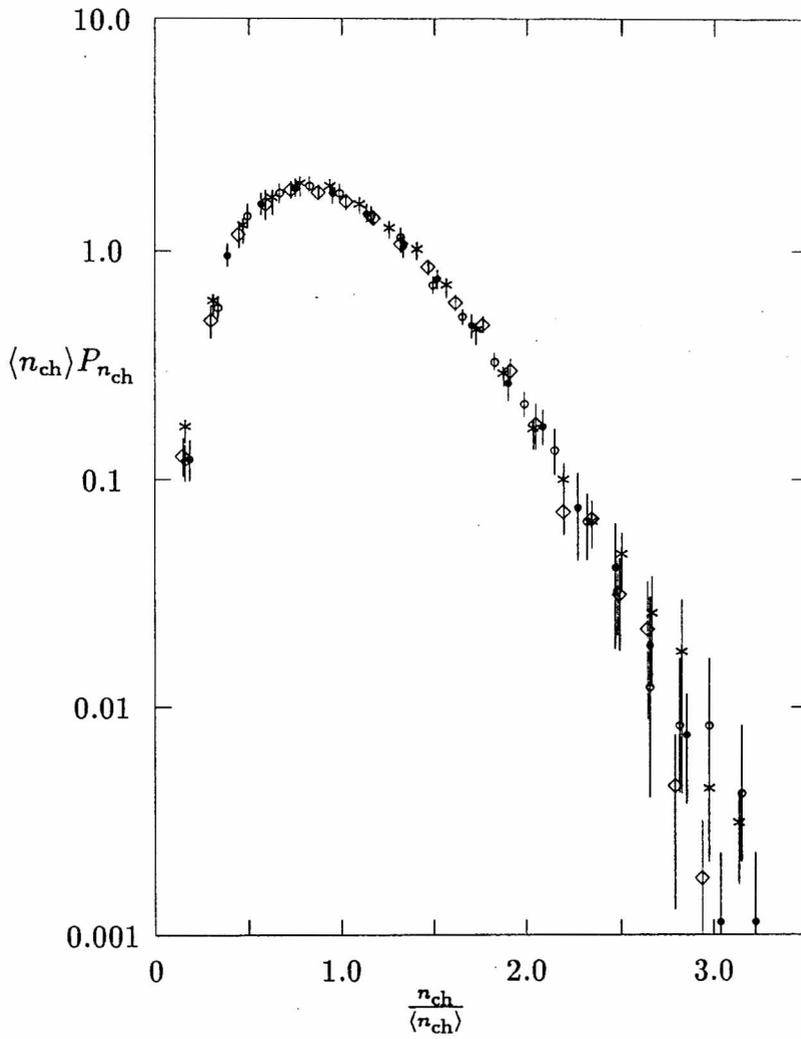


Figura 2.4: Distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas para $\sqrt{s} = 30.4, 44.5, 52.6$ y 62.2 GeV en variables KNO [11].

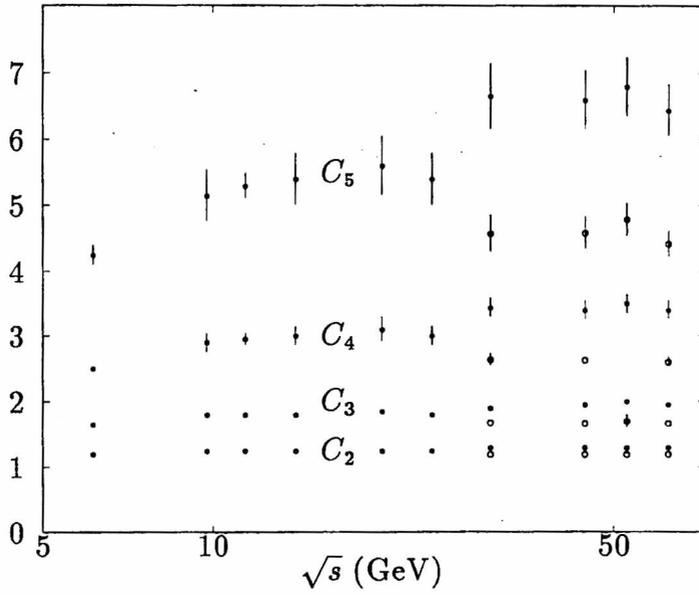


Figura 2.5: Valores de los primeros cuatro C -momentos para eventos pp en función de \sqrt{s} . Las cuatro energías más altas corresponden a ABCDHW, los círculos abiertos a datos no difractivos simples y los llenos a inelásticos [11], el resto a la selección de Slattery [24].

marcado cuanto mayor es z_{corte} . De acuerdo con la propiedad de escala debería ser independiente de s .

Un fenómeno similar es apreciable para los C -momentos, los que parecen estabilizarse entre 30 y 62 GeV pero toman valores considerablemente mayores a 546 GeV. Por ejemplo, C_5 pasa de 4.6 ± 0.2 a 7.6 ± 1.0 (Figura 2.6).

Los autores de [4] proponen que esta marcada violación del *scaling* KNO temprano puede deberse a la existencia del umbral de un nuevo mecanismo de producción múltiple de partículas entre 62.2 y 546 GeV, p. ej. la producción de *minijets*. Alternativamente, puede especularse que en realidad el *scaling* temprano no es válido en ningún caso y que su validez aproximada en el rango antes mencionado se debe sólo a la estrechez del intervalo de energías considerado.

Un resultado cualitativamente diferente se obtiene [4] en la región central $|\eta| < 1.3$, donde la propiedad de escala temprana no es violada como en el espacio de fases completo. Las mediciones posteriores de esta misma colaboración para $\sqrt{s} = 200$ y 900 GeV [5] confirman las conclusiones anteriores, como se detalla en la siguiente Sección.

Un punto de vista alternativo [12,21,22] consiste en sustituir la noción de *scaling* KNO temprano por la de *scaling* KNO-G. Como vimos, esta última es equivalente a la propiedad de escala KNO asintóticamente, pero puede aplicarse consistentemente a energías finitas. Un análisis exhaustivo de datos pp inelásticos en el espacio de fases completo entre $\sqrt{s} = 2.7$ GeV y 62.2 GeV muestra que la propiedad de escala KNO-G se satisface con excelente acuerdo [12,22]. Tomando como función de escala en la ecuación (2.34)

$$\Phi(z) = -\exp(-az - bz^2) \quad (2.45)$$

con un parámetro ajustable y el otro fijado por la normalización, se encuentra $\chi^2/\text{dof} = 1.1$ para treinta valores de \sqrt{s} comprendidos en el intervalo

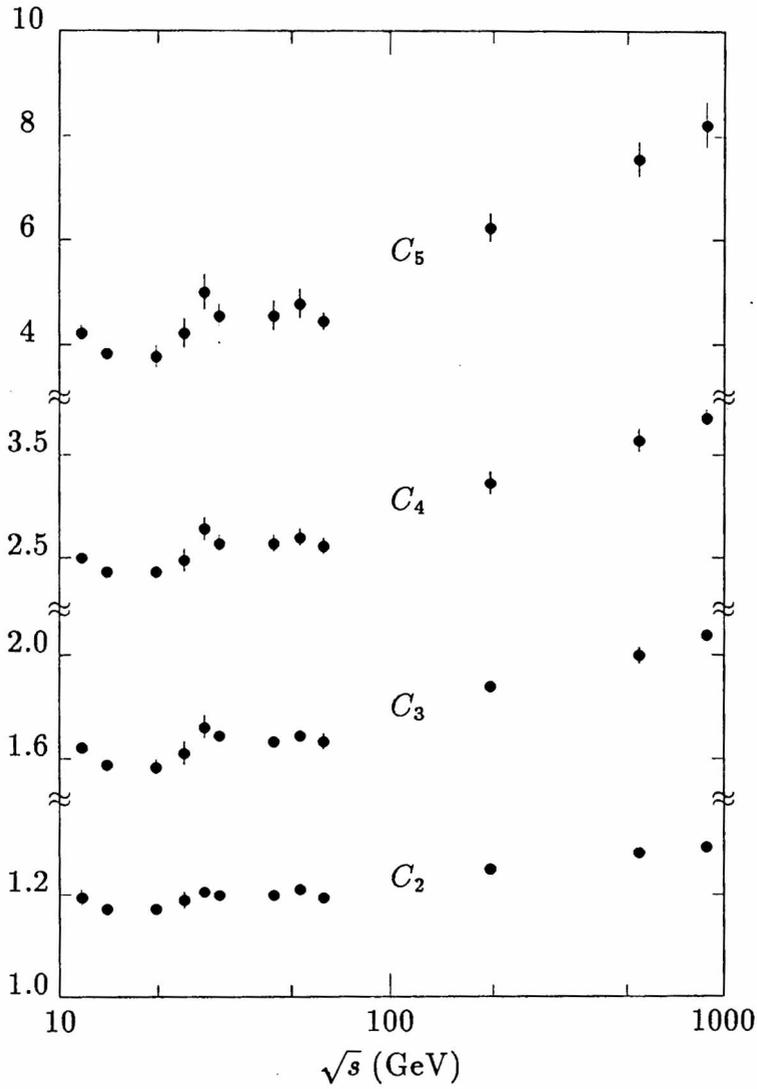


Figura 2.6: Valores de los primeros cuatro C -momentos para eventos no difractivos simples en función de \sqrt{s} . Las tres energías más altas corresponden a UA5; las otras son datos de Serpukhov, FNAL e ISR [5]

antes mencionado [12,22]. La misma función reproduce la dependencia con la energía de los C -momentos. En las referencias citadas se pueden hallar los detalles.

El problema de la validez de las propiedades de escala no ha sido resuelto aún. Ni siquiera se ha alcanzado un consenso en cuanto a la interpretación de los datos experimentales. ¿Debe eliminarse la componente difractiva simple para observar *scaling* KNO temprano entre ~ 20 y ~ 100 GeV? ¿Es este accidental? ¿O debemos considerar la totalidad de los eventos inelásticos en el marco KNO-G? Más importantes aún son las preguntas acerca del origen del *scaling* temprano o, si este es una consecuencia de la propiedad de escala KNO-G, sobre el origen de esta última. Nuestro análisis intentará dar alguna respuesta.

2.3 Parametrizaciones.

Los datos experimentales se describen usualmente en términos de parametrizaciones cuyos parámetros libres se ajustan para cada energía, a diferencia de las distribuciones KNO o KNO-G que se fijan para todas las energías. Existen numerosas parametrizaciones propuestas sobre bases fenomenológicas o teóricas para los distintos tipos de reacciones con estados finales multihadrónicos (en las referencias [27,28] se dan recopilaciones).

En esta sección consideraremos en detalle la parametrización más difundida, la distribución binomial negativa y, más brevemente, la distribución logarítmico-normal.

2.3.1 Distribución binomial negativa.

La distribución binomial negativa (DBN) fue propuesta como parametrización empírica para sustituir la noción de *scaling* KNO que no parece ser

válida a altas energías [4,29]. Ha sido aplicada con buenos resultados para ajustar los datos de colisiones pp [30,31], $p\bar{p}$ [4,5,6,29], νp y νn [32], πp [31] y e^+e^- [33], tanto en el espacio de fases completo como en ventanas centrales de rapidez o pseudorapidez.

La DBN está definida analíticamente por la expresión

$$P_n(\bar{n}, k) = \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+k} \right)^n \left(\frac{k}{\bar{n}+k} \right)^k \quad (2.46)$$

donde \bar{n} y k son parámetros, el primero es el valor medio y el segundo fija la forma de la distribución, y la multiplicidad n toma los valores $n = 0, 1, 2, \dots$

La distribución 2.46 puede caracterizarse por la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1} &= (a+bn)P_n & (2.47) \\ a &= \frac{\bar{n}k}{\bar{n}+k} \\ b &= \frac{\bar{n}}{\bar{n}+k} \end{aligned}$$

Para $k = \infty$ ($b = 0, a = \bar{n}$) (2.46) se reduce a una distribución de Poisson de valor medio \bar{n} , que corresponde a la emisión independiente de n partículas. Para $k = 1$ ($b = a$) se obtiene una distribución exponencial que es característica de la emisión estimulada. Si $k = 0$ ($a = 0, b < 1, n \geq 1$) se tiene la distribución logarítmica

$$P_n = \frac{b^n}{n} \left[\log \frac{1}{1-b} \right]^{-1} \quad (2.48)$$

La dispersión de P_n queda determinada por los parámetros en la forma

$$D_2 = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{k} \quad (2.49)$$

Luego, $D_2 > \bar{n}$ excepto en el caso en que k es negativo y entero, en que (2.46) se reduce a una distribución binomial ordinaria.

Los momentos de la DBN se expresan en términos de los parámetros en la forma [5]

$$C_2 = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{\bar{n}} \quad (2.50)$$

$$C_3 = 1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{3}{\bar{n}} \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{\bar{n}^2} \quad (2.51)$$

$$C_4 = 1 + \frac{6}{k} + \frac{11}{k^2} + \frac{6}{k^3} + \frac{6}{\bar{n}} \left(1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}\right) + \frac{7}{\bar{n}^2} \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{\bar{n}^3} \quad (2.52)$$

etc.,

o, más sencillamente, en términos de momentos factoriales [34]

$$\begin{aligned} \langle n(n-1)\cdots(n-q+1) \rangle_{\text{DBN}} &= \\ &= [k(k+1)\cdots(k+q-1)] \left(\frac{\bar{n}}{k}\right)^q \\ &= \frac{\Gamma(k+q)}{\Gamma(k)} \left(\frac{\bar{n}}{k}\right)^q \end{aligned} \quad (2.53)$$

Entre los distintos modelos que podrían originar la distribución binomial negativa [34], mencionaremos el modelo de clanes [35] que ha sido aplicado en varios trabajos experimentales (p.ej.[30,31,36,37]). En este modelo se supone que como resultado de la colisión se produce una gota de materia hadrónica que emite partículas primarias según una distribución de Poisson. Cada partícula primaria decae en partículas que a su vez decaen, etc., hasta llegar a los hadrones observados. Al conjunto de partículas con un ancestro primario en común se lo denomina "clan". La distribución de multiplicidades es entonces la convolución de la distribución poissoniana de clanes con la distribución de partículas por cada clan. Ajustando convenientemente esta última se obtiene una DBN cuyos parámetros quedan expresados en términos del número medio de clanes y de partículas por clan. Así, los parámetros que resultan de ajustar la DBN a los datos experimentales pueden interpretarse en términos de clanes [30,31,36]. El resultado general es que, para un intervalo dado de pseudorapidez, el número medio

de clanes no depende de la energía y es mayor en el caso e^+e^- que para colisiones hadrónicas. El número medio de partículas por clan aumenta con la energía y es menor para e^+e^- que para hadrones.

2.3.2 Distribución logarítmico-normal.

A diferencia de la DBN, la distribución logarítmica-normal (DLN) es función de la variable continua

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (2.54)$$

donde σ y μ son parámetros en términos de los cuales

$$\langle x \rangle = \exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (2.55)$$

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x \rangle^2 (e^{\sigma^2} - 1) \quad (2.56)$$

La DLN fue propuesta como distribución de multiplicidad independientemente en las referencias [38] y [39]. En esta última se propone la forma KNO-G en la que la expresión (2.54) juega el papel de función de escala en (2.31). A las energías de los *colliders* ($\langle n_{\text{ch}} \rangle \sim 25$), la diferencia entre ambas formas es pequeña, por lo que aplicaremos la más simple (2.54).

2.4 Los datos de UA5.

La colaboración UA5 midió las distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas en colisiones $p\bar{p}$ para $\sqrt{s} = 200$ y 900 GeV en el espacio de fases completo y en ventanas centrales de pseudorapidez con $|\eta| < \eta_c$, $0.5 \leq \eta_c \leq 5$ en pasos de 0.5 [5].

En las Figuras 2.7 y 2.8 se muestran las distribuciones correspondientes al espacio de fases completo. Los datos de 900 GeV tienen características

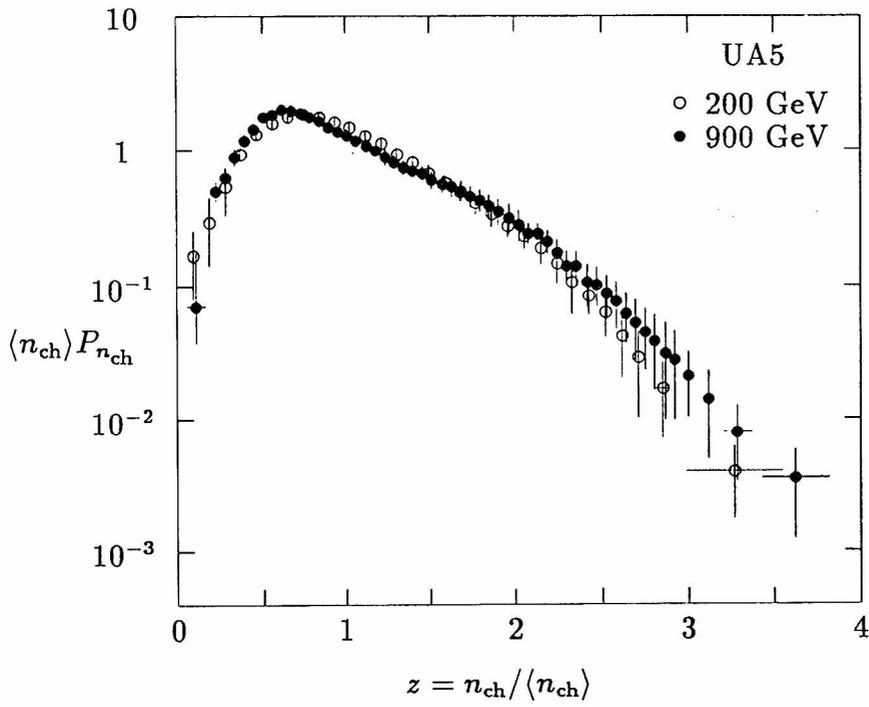


Figura 2.7: Datos de UA5 en el espacio de fases completo en variables KNO [5].

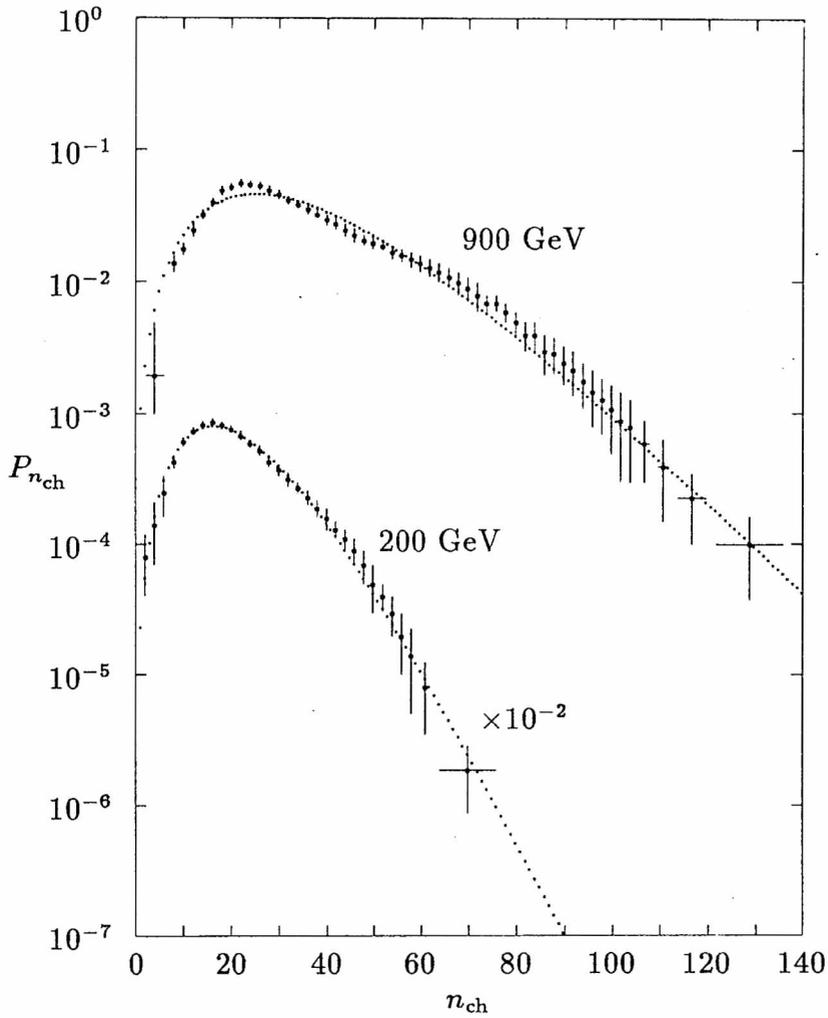


Figura 2.8: Distribuciones de multiplicidad de UA5 para $\sqrt{s} = 200$ y 900 GeV en el espacio de fases completo, ajustados con la distribución binomial negativa [5].

GeV	\bar{n}	k	χ^2	dof
200	21.2	4.8	50	43
900	35.2	3.7	160	73

Tabla 2.1: Parámetros de los mejores ajustes con DBN a los datos de UA5 en el espacio de fases completo [5].

cualitativamente distintas de las correspondientes a energías más bajas. La distribución es más ancha, mostrando una violación del *scaling* KNO. Como se ve en la Figura 2.8 la DBN no reproduce la forma de los datos; se aprecian claramente desviaciones sistemáticas que hacen inaceptable el ajuste (véase la Tabla 2.1). La estructura de esta distribución, que en escala logarítmica consiste en un pico estrecho en la región del máximo seguido de una oscilación para las multiplicidades medias (Figura 2.8), se repite para regiones centrales de pseudorapidez. Sin embargo, a medida que η_c decrece las distribuciones son mejor ajustadas por la DBN y, como ya se mencionó, para $\eta_c \sim 1$ se satisface aproximadamente el *scaling* KNO.

Desde la publicación de estos datos [5] se han dado numerosas explicaciones tentativas de la forma de la distribución de 900 GeV, la mayoría de ellas basadas en ajustes a distribuciones de dos componentes. En la Figura 2.9 se muestra la distribución binomial negativa doble (DBND)

$$P_n(\bar{n}_1, k_1; \bar{n}_2, k_2; \omega) = \omega \tilde{P}_n(\bar{n}_1, k_1) + (1 - \omega) \tilde{P}_n(\bar{n}_2, k_2) \quad (2.57)$$

con \tilde{P}_n la DBN y $\omega, \bar{n}_1, k_1, \bar{n}_2, k_2$ ($0 \leq \omega \leq 1$) parámetros libres. Como se muestra en la Tabla 2.2 el acuerdo es muy bueno, aunque al precio de incluir cinco parámetros libres. Otros ajustes y modelos fenomenológicos se compilan en [27,28,40,41,42].

Existe en la actualidad consenso acerca del origen del fenómeno mostra-

GeV	\bar{n}_1	k_1	\bar{n}_2	k_2	ω	χ^2	dof
200	20	5.7	40.7	52	0.07	40	40
900	25.5	8.1	54.2	10.6	0.35	81	70

Tabla 2.2: Parámetros de los mejores ajustes con DBND a los datos de UA5 en el espacio de fases completo [5,28].

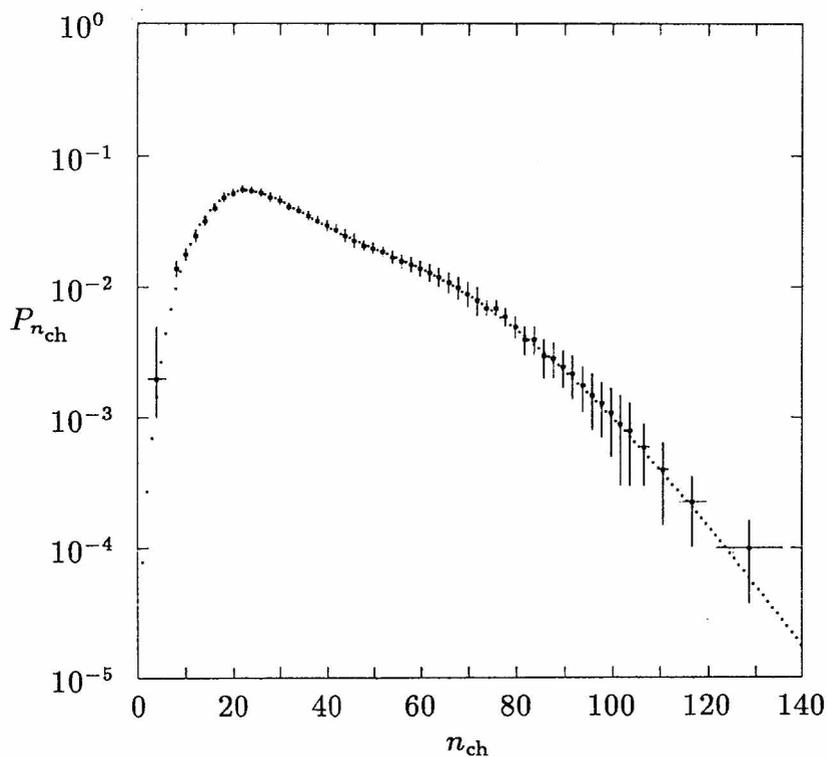


Figura 2.9: Distribución de multiplicidad de UA5 para $\sqrt{s} = 900$ GeV en el espacio de fases completo, ajustada con la distribución binomial negativa doble [28] (línea de puntos).

do por la distribución de UA5 900 GeV. Evidencia experimental sobre las distribuciones de multiplicidad para e^+e^- , que describimos en la siguiente sección, y experiencias de simulación de Monte-Carlo de colisiones hadrónicas [44] sugieren que la distribución total es superposición de las correspondientes a eventos con un número fijo de *minijets* (*jets* para e^+e^-). Cada una de ellas tiene la forma característica de las distribuciones de bajas energías, que puede ser descrita por la DBN. Por supuesto, para $\sqrt{s} < 100$ GeV la única componente “visible” corresponde a eventos sin minijets.

2.5 Colisiones e^+e^- .

Las distribuciones de multiplicidad de hadrones cargados en colisiones e^+e^- presentan diferencias cuantitativas con los datos de colisiones hadrónicas; por ejemplo, para $\langle n_{\text{ch}} \rangle \sim 20$ tenemos $D_2^{\text{ch}} \sim 6$ en e^+e^- ($\sqrt{s} = 91$ GeV) [33] y $D_2^{\text{ch}} \sim 11$ en $p\bar{p}$ ($\sqrt{s} = 200$ GeV) [5] y el parámetro k de la DBN es ~ 25 en un caso y ~ 5 en el otro. Sin embargo, los aspectos cualitativos son enteramente análogos y la comparación de ambos casos revela la universalidad de los mecanismos subyacentes, como es de esperar de acuerdo a la moderna concepción de las interacciones fuertes.

Los resultados experimentales más relevantes desde el punto de vista de la discusión de la sección anterior son los de la colaboración Delphi, obtenidos con el detector del mismo nombre en el Acelerador Lineal de Electrones y Positrones (LEP) en CERN [33]. Mencionaremos brevemente las características generales de los datos para $\sqrt{s} = 91$ GeV [33]

- El valor medio y la dispersión son $\langle n_{\text{ch}} \rangle = 20.71 \pm 0.8$ y $D_2^{\text{ch}} = 6.28 \pm 0.5$.
- La DBN ajusta los datos con $k^{-1} = 0.0411 \pm 0.0012$, $\bar{n}_{\text{ch}}/k = 0.879 \pm 0.025$ y $\chi^2/\text{dof} = 80/34$. La forma global de la DBN es correcta,

pero existen desviaciones sistemáticas en la región de multiplicidades medias que sigue al máximo.

La comparación con datos de energías más bajas permite concluir que

- El parámetro k^{-1} de la DBN crece linealmente con $\log(s)$, con una pendiente que es la mitad de la hallada para μp .
- La evolución de $\langle n_{\text{ch}} \rangle$ puede ser parametrizada con (1.14) y (1.16) pero no con (1.15).
- Se verifica el *scaling* KNO entre $\sqrt{s} = 20$ y 90 GeV con buena aproximación, tanto gráficamente como por la independencia de C_2-C_5 con la energía.

El estudio de los datos en regiones limitadas de rapidez $|y| < y_c$ (respecto del eje de *thrust* y suponiendo que todas las partículas son piones [33]) muestra que

- Las distribuciones presentan una estructura similar a la de la distribución de UA5 900 GeV [5]. Sin embargo, esta es más pronunciada en intervalos intermedios de rapidez $y_c = 1.5, 2$ que en el espacio de fases completo o en intervalos pequeños $y_c < 1$.
- Esta estructura resulta de la superposición de eventos de 2, 3, 4, ..., *jets* y es la causa de las desviaciones de la DBN.

Es interesante notar que las distribuciones, cuando son separadas en eventos de 2, 3, etc., *jets*, satisfacen la propiedad de escala KNO. Aquí, la componente dominante a bajas energías es la correspondiente a 2 *jets*. Estos resultados sugieren que una explicación análoga podría ser válida para los datos hadrónicos, como explicamos en la sección anterior.

Capítulo 3

Datos de E735.

Las distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas obtenidas experimentalmente por UA5, a $\sqrt{s} = 900$ GeV y diferentes valores de η_c [5], muestran claramente diferencias tanto de carácter cuantitativo como cualitativo respecto de las medidas anteriormente a energías más bajas (p. ej., [11,30]). Antes de intentar explicar las nuevas observaciones es necesario, sin duda, caracterizarlas mediante un estudio detallado de sus propiedades y su evolución con la energía. En particular, es importante establecer en qué rango de energías aparecen las nuevas características, p. ej. las desviaciones de la distribución binomial negativa, si la aparición de estas es gradual o existe un umbral, y qué ocurre a energías más altas que las observadas.

Es deseable también la confirmación experimental independiente. A este respecto cabe señalar la posibilidad de errores sistemáticos en los datos de UA5, lo que fue sugerido por varios autores (ver p. ej., [12], pág. 47). Debido a la estadística relativamente baja de dicho experimento [5], para hallar la distribución corregida, o “población” más probable, que corresponde a la distribución observada, se utilizan métodos estadísticos complejos [45]. La colaboración informó [5] que el método usado para corregir los datos de $\sqrt{s} = 546$ GeV [4] tiene inestabilidades que se manifiestan en la forma de

oscilaciones en la cola de la distribución. Este es justamente el fenómeno observado para 900 GeV, como se describió en el Capítulo anterior, si bien el nuevo algoritmo de corrección aplicado [5,45] parece ser estable.

Por las razones antes mencionadas, tienen gran interés los datos experimentales que estudiaremos en este capítulo. Estos datos, que fueron medidos por la Colaboración E735 en el TeVatrón de Fermilab, consisten en distribuciones de multiplicidad de partículas cargadas en colisiones $p\bar{p}$ no difractivas simples a las energías $\sqrt{s} = 300, 546, 1000$ y 1800 GeV y $|\eta| < 3.25$. Es importante notar que las cuatro energías abarcan un amplio rango que extiende el de las mediciones anteriores [4,5,6] y que provienen de un único experimento, lo que garantiza la consistencia de los datos. La discusión que presentamos es una versión extendida de [47,48].

En la sección 3.1 damos una descripción general de las distribuciones y de los métodos usados para su análisis. En las secciones subsiguientes se presenta un análisis cuantitativo detallado de los datos experimentales. En la sección 3.2 se resume una colección de momentos de las distribuciones que son significativos desde distintos puntos de vista. En la sección 3.3 damos los ajustes a los datos con las parametrizaciones descritas en el capítulo anterior y comentamos los resultados obtenidos.

3.1 Características generales.

Los datos preliminares de la Colaboración E735 [8,46] consisten en distribuciones de multiplicidad de hadrones cargados en eventos $p\bar{p}$ no difractivos simples para $\sqrt{s} = 0.3, 0.546, 1.0$ y 1.8 TeV. La región del espacio de fases observada es la ventana central de pseudorapidez definida por $|\eta| < 3.25$. Una descripción esquemática del experimento se dio en el capítulo anterior.

Las características principales de las distribuciones preliminares de E735

son las siguientes¹

1. Las distribuciones son unimodales, con moda independiente de la energía dentro de la resolución experimental.
2. El valor medio $\langle n \rangle$ crece con \sqrt{s} más rápido que $\log s$.
3. La dispersión D_2 crece linealmente con $\langle n \rangle$.
4. Los parámetros de *skewness* y *kurtosis* crecen con $\langle n \rangle$, más marcadamente a las energías más bajas.
5. Los C -momentos crecen con $\langle n \rangle$, mostrando una violación del *scaling* temprano.
6. Las violaciones del *scaling* temprano pueden observarse directamente en las distribuciones, especialmente en la cola de altas multiplicidades.
7. La forma de las distribuciones es claramente diferente de la distribución binomial negativa, aún para las energías más bajas.
8. Cuando se grafican los datos en escala logarítmica, muestran la oscilación característica de las distribuciones de UA5 900 GeV y UA1 [5,6].

Hemos insistido en el carácter preliminar de los datos experimentales esencialmente por los dos aspectos siguientes

- Los datos no están normalizados a la sección eficaz total para expresarlos como secciones eficaces topológicas en mb, ni están normalizados a 1 para expresarlos en forma de distribuciones de probabilidad.

¹En este Capítulo n se refiere siempre a partículas cargadas, por lo que omitimos el subíndice ch .

- Debido, presumiblemente, a una estadística inicial baja, los datos se presentan agrupados en intervalos de multiplicidad que, siguiendo la nomenclatura corriente en la literatura, denominaremos *bins*.

Respecto del primer punto, para los cálculos de momentos se normalizaron los datos a 1 usando el método de propagación de errores que se describe más abajo. Respecto del agrupamiento, en lugar de usar las correcciones de Sheppard [49], se prefirió un criterio más sencillo de aplicar y que además es suficientemente confiable. Puesto que los datos son ajustados con excelentes resultados por la distribución binomial negativa doble (DNBD) como veremos en la sección 3.3, comparamos los momentos calculados con los correspondientes a la DBND ajustada, lo que da una estimación del error de agrupamiento. En general, estas correcciones son pequeñas frente al error experimental, por lo que las mencionaremos sólo cuando sean relevantes.

La propagación de errores experimentales se realizó mediante simulación numérica en todos los casos en que no se especifique lo contrario. Para la simulación se hicieron dos hipótesis: en primer lugar, que los errores están distribuidos normalmente y en segundo lugar, que los distintos *bins* son estadísticamente independientes. La primera es necesaria puesto que los datos preliminares no presentan los errores estadísticos y sistemáticos en forma separada. Debido a la baja estadística es natural suponer que los primeros son los dominantes excepto, posiblemente, en los primeros *bins* donde la incerteza debida a la eliminación de eventos difractivos simples es mayor. La segunda también es necesaria desde el punto de vista práctico ya que no se dispone de los datos no corregidos. Sin embargo, es importante notar que el método de corrección usado por E735 [7] está basado en una relación funcional empírica entre la multiplicidad observada y la verdadera. Este procedimiento no introduce correlaciones *bin-bin* como en el caso de UA5, donde *bins* adyacentes están fuertemente correlacionados por la matriz estadística de corrección [45].

Las estimaciones de errores obtenidas de este modo son comparables en orden de magnitud con las de otros experimentos [5,11].

3.2 Momentos de la Distribución.

En esta Sección damos resultados cuantitativos sobre momentos cuyo estudio ha sido sugerido desde distintos puntos de vista.

3.2.1 Moda y media.

La moda, definida como el valor de multiplicidad más probable, es independiente de la energía dentro de la resolución experimental. Tomando como error el semiancho del *bin* de máxima probabilidad, la moda está dada por

$$m = 16.5 \pm 1.5 \quad (3.1)$$

para las cuatro distribuciones. Los datos de UA5 para $|\eta| < 3.0$ tienen $m = 10.0 \pm 1$ y $m = 11.0 \pm 1$ para 200 y 900 GeV respectivamente, de acuerdo con la Tabla 3 de [5]. Este comportamiento contrasta con el de los datos a energías más bajas, en los que m sigue aproximadamente la evolución de $\langle n \rangle$. De hecho, el *scaling* KNO temprano conduce a un crecimiento lineal de m con $\langle n \rangle$.

En el lenguaje de los modelos de bajas energías [50], la independencia con la energía de la moda corresponde a mecanismos “difractivos” en los que las partículas se producen en uno o dos *clusters* cuyo espectro de masas es independiente de \sqrt{s} , excepto por un corte cinemático a grandes masas debido a la conservación de la energía. A medida que se incrementa \sqrt{s} , la distribución de multiplicidades permanece constante salvo la cola de altas multiplicidades cuya población crece a medida que se hacen accesibles mayores masas para los *clusters*. La moda es entonces constante mientras que el valor medio, que depende de la distribución completa, crece con \sqrt{s} .

\sqrt{s}	300	546	1000	1800
$\langle n \rangle$	19.89 ± 0.78	23.55 ± 0.81	27.41 ± 0.75	32.54 ± 0.79
C_2	1.44 ± 0.05	1.48 ± 0.04	1.51 ± 0.04	1.56 ± 0.03
C_3	2.63 ± 0.19	2.80 ± 0.18	2.99 ± 0.15	3.19 ± 0.14
C_4	5.67 ± 0.64	6.35 ± 0.62	7.14 ± 0.57	7.91 ± 0.54
C_5	13.91 ± 2.14	16.43 ± 2.17	19.54 ± 2.06	22.37 ± 2.08
C_6	37.75 ± 7.14	47.13 ± 7.35	59.52 ± 7.74	70.12 ± 8.45

Tabla 3.1: Valor medio y primeros cinco C -momentos de las distribuciones de E735.

En contraste con este comportamiento, en la imagen “multiperiferal” [50] la producción de partículas procede a través de un número de *clusters* de masa aproximadamente constante creciente con \sqrt{s} , lo que conduce a una distribución de multiplicidades que se desplaza como un todo y, por lo tanto, a una moda que evoluciona con la energía de manera similar a la media $\langle n \rangle$.

La multiplicidad media $\langle n \rangle$ crece con la energía de acuerdo a la Tabla 3.1. Las parametrizaciones (2.14)–(2.16) ajustan los datos con los parámetros de la Tabla 3.2, con similares resultados (Figura 3.1). La comparación directa con los datos de bajas energías citados en el Capítulo anterior no es posible debido a que se trata de una región distinta del espacio de fases, y a que los datos son no difractivos, mientras que los anteriores son inelásticos. Sin embargo, el crecimiento parece ser más marcado en los presentes datos que el citado en [4]. Nótese que para la comparación es necesario considerar $c/4$ ya que en (2.14) usamos \sqrt{s} y no s .

El problema de la comparación con los datos de bajas energías, que en general son para el espacio de fases completo, lo encontraremos nuevamente

Eq.	(2.14)	(2.15)	(2.16)
a	27.333	4.131	7.992
b	-7.596	2.469	0.089
c	1.105	0.326	2.050
χ^2	0.130	0.100	0.105

Tabla 3.2: Parámetros de los ajustes a $\langle n \rangle$ como función de \sqrt{s} .

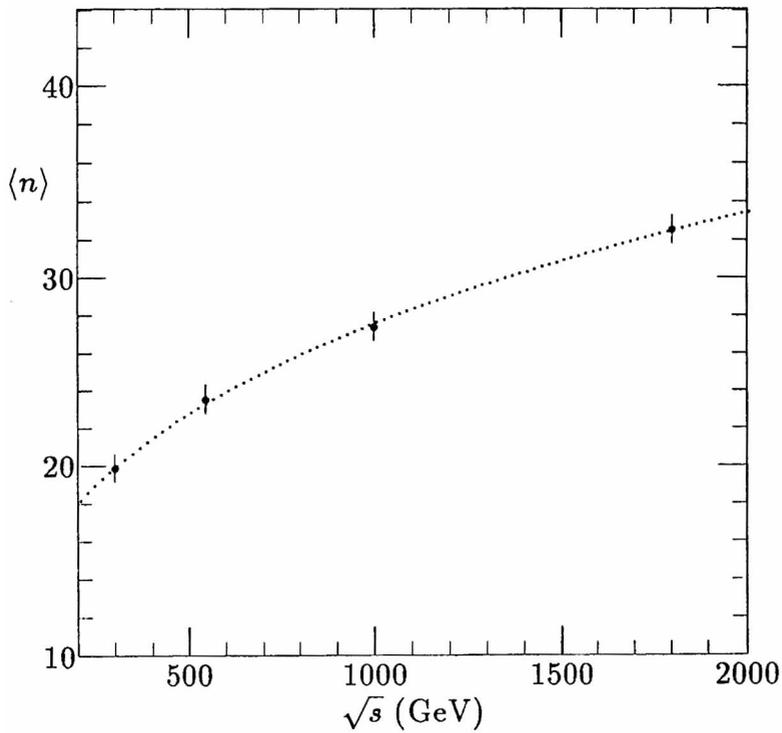


Figura 3.1: Multiplicidad media de los datos de E735 como función de \sqrt{s} . Los círculos corresponden a la Tabla 3.1, la línea punteada es la función (2.14) con los parámetros de la Tabla 3.2.

en conexión con los momentos de orden más alto. Sin embargo, el amplio rango de energías cubierto en un único experimento por E735 [8,46] es suficiente para cuantificar las tendencias de los datos sin recurrir a otras fuentes, de aquí la importancia del presente análisis.

3.2.2 C -momentos.

En la Tabla 3.1 y las Figuras 3.2 y 3.3 se muestran los C -momentos

$$C_k = \frac{\langle n^k \rangle}{\langle n \rangle^k} \quad (3.2)$$

para $k = 2, \dots, 5$. Como se puede ver, crecen suavemente con $\langle n \rangle$, más marcadamente cuanto mayor es k . Cada C -momento es consistente, dentro del error, con el valor de los adyacentes. No obstante, al considerar las cuatro energías juntas se detecta un crecimiento sistemático con $\langle n \rangle$, lo que constituye, como ya explicamos, una violación del *scaling* temprano.

En las Figuras 3.2 y 3.3 se incluyen también los datos correspondientes a UA5 con $|\eta| < 3.0$ [5], los que son consistentes con los valores obtenidos por E735 dentro del error experimental. Los puntos correspondientes a UA5 900 GeV con $|\eta| < 3.0$ aparecen a la izquierda de los de E735 a 546 GeV; si hubiéramos considerado los datos con $|\eta| < 3.5$, los puntos aparecerían bien ordenados en el eje horizontal pero no en el vertical, ya que $\langle n \rangle$ crece con η_c y C_k decrece. Estos detalles muestran la variación de los datos con η_c y ejemplifican los problemas que presenta la comparación cuantitativa.

La comparación con los datos del rango de energías de ISR [11], con la salvedad del diferente rango de pseudorapidez, muestra que los C -momentos son mayores para las presentes energías. En particular, para $k = 5$ que es el caso extremo, hay un factor del orden de 4 de diferencia entre los valores de ISR y los de TeVatrón.

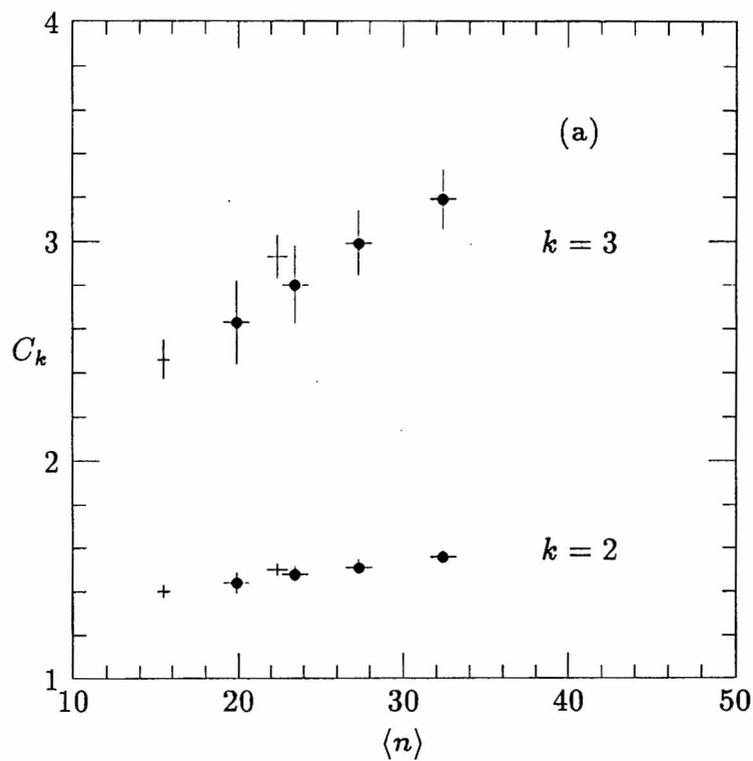


Figura 3.2: C -momentos en función de $\langle n \rangle$ (círculos) para $k = 2, 3$. También se muestran los valores de UA5 correspondientes a $|\eta| < 3$ [5] (puntos).

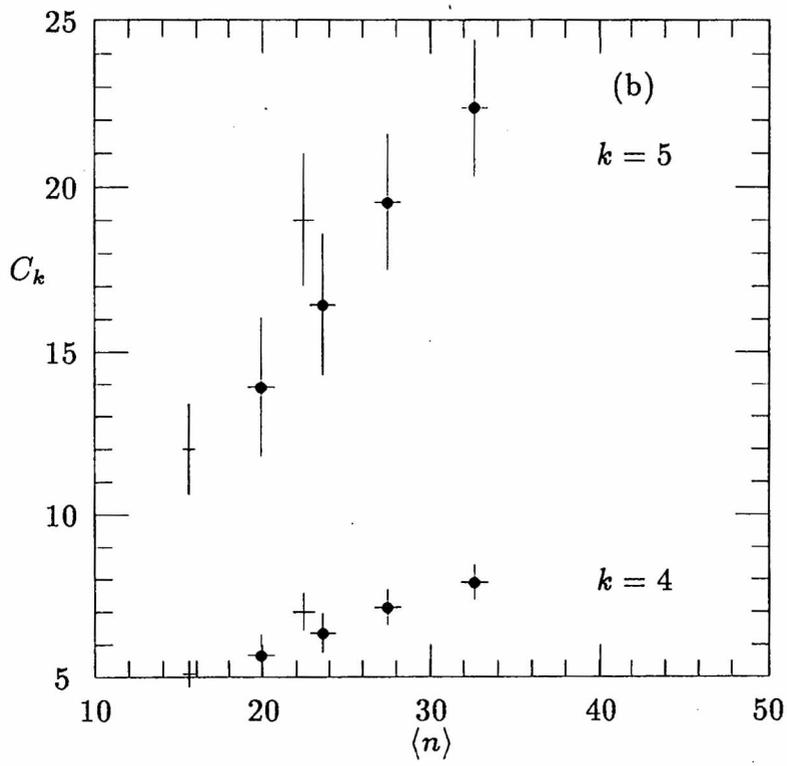


Figura 3.3: Igual que la figura anterior, con $k = 4, 5$.

\sqrt{s}	300	546	1000	1800
D_2	13.214 ± 0.228	16.253 ± 0.230	19.609 ± 0.191	24.244 ± 0.191
D_3	13.354 ± 0.159	16.938 ± 0.157	21.099 ± 0.149	26.32 ± 0.161
D_4	18.880 ± 0.234	23.574 ± 0.233	28.930 ± 0.208	35.771 ± 0.232
D_5	21.319 ± 0.240	26.853 ± 0.237	33.290 ± 0.254	41.141 ± 0.263
D_6	24.431 ± 0.320	30.708 ± 0.274	38.105 ± 0.302	46.869 ± 0.285
δ_3	1.011 ± 0.016	1.042 ± 0.013	1.076 ± 0.009	1.086 ± 0.007
δ_4	1.429 ± 0.010	1.450 ± 0.009	1.475 ± 0.008	1.475 ± 0.006
δ_5	1.613 ± 0.019	1.652 ± 0.015	1.698 ± 0.014	1.697 ± 0.009
δ_6	1.849 ± 0.028	1.889 ± 0.020	1.943 ± 0.020	1.933 ± 0.014
$\kappa_4^{1/4}$	13.734 ± 0.255	17.761 ± 0.207	22.513 ± 0.240	27.840 ± 0.233
$\kappa_5^{1/5}$	11.964 ± 1.856	16.233 ± 0.681	21.661 ± 0.764	25.452 ± 0.743
$\kappa_6^{1/6}$	-16.055 ± 1.234	-20.217 ± 0.689	-23.190 ± 0.696	-31.966 ± 0.637

Tabla 3.3: Dispersiones D_k , dispersiones normalizadas δ_k y cumulantes $\kappa_k^{1/k}$ (el signo en $\kappa_6^{1/6}$ se refiere al signo de κ_6).

3.2.3 Dispersiones y cumulantes.

Definimos las dispersiones de orden k como

$$D_k = \langle (n - \langle n \rangle)^k \rangle^{1/k} \tag{3.3}$$

y las formas reducidas

$$\delta_k = \frac{D_k}{D_2} \tag{3.4}$$

Las mismas se muestran en la Tabla 3.3 y las Figuras 3.4 y 3.5. δ_3 y δ_4 son la raíz cúbica y cuártica de los parámetros de *skewness* y *kurtosis* respectivamente [12].

En el marco del *scaling* KNO-G [21], se puede demostrar [12,22] que las

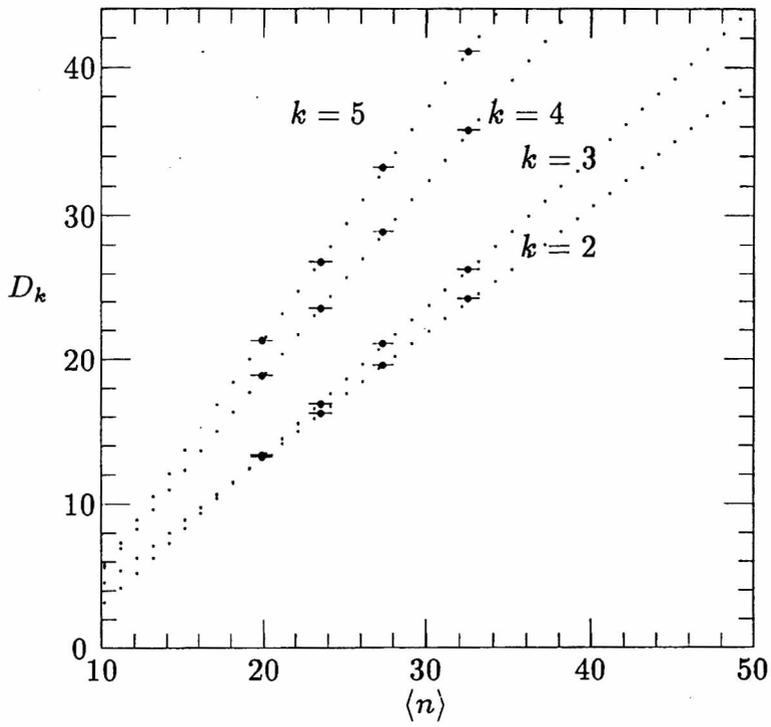


Figura 3.4: Dispersiones D_k en función de $\langle n \rangle$ para $k = 2, 3, 4, 5$. Los parámetros de los ajustes lineales son los de la Tabla 3.4.

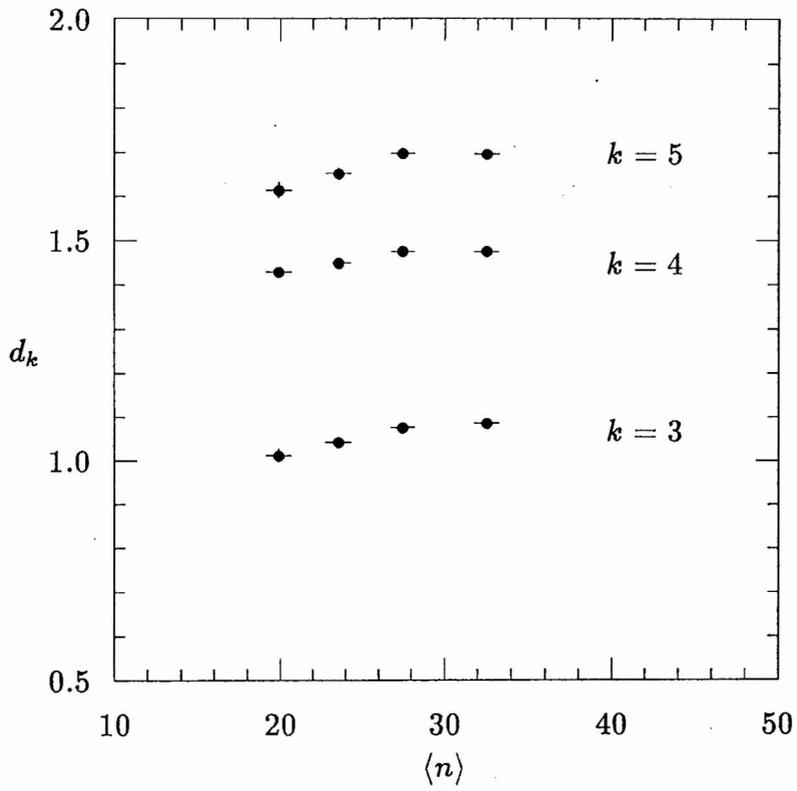


Figura 3.5: Parámetros d_k en función de $\langle n \rangle$ para $k = 3, 4, 5$.

k	a_k	b_k	χ^2
2	0.87 ± 0.07	-4.21 ± 1.79	0.04 ± 1.14
3	1.03 ± 0.07	-7.18 ± 1.79	0.03 ± 1.70
4	1.34 ± 0.10	-7.84 ± 2.49	0.04 ± 2.68
5	1.58 ± 0.11	-10.08 ± 2.82	0.11 ± 4.29

Tabla 3.4: Pendiente y ordenada al origen a_k , b_k para D_k como función lineal de $\langle n \rangle$.

dispersiones D_k satisfacen las relaciones de Wróblewski generalizadas

$$D_k = a_k \langle n \rangle - a_k \quad (3.5)$$

con coeficientes a_k independientes de la energía. Esta relación se satisface con buena aproximación para datos pp inelásticos con $\sqrt{s} < 100$ GeV [12]. De (3.5) resulta que

$$\delta_k = \frac{a_k}{a_2} \quad (3.6)$$

son constantes.

Para los presentes datos encontramos que son válidas relaciones similares a (3.5)

$$D_k = a_k \langle n \rangle + b_k \quad (3.7)$$

con los parámetros a_k y b_k dados en la Tabla 3.4 (ver Figura 3.4). Nótese que los errores citados en esta Tabla 3.4 fueron estimados por el método descrito en la Sección 3.1. Si hubiéramos utilizado el método más usual de variación de χ^2 en una unidad, los errores obtenidos hubieran resultado considerablemente más pequeños.

Las ecuaciones (3.7) proveen muy buenos ajustes a los datos. Si suponemos que relaciones de este tipo son también válidas para los datos de

UA5, podemos analizar la dependencia de los parámetros a_k y b_k con η_c . De la Tabla 2 de [5] resulta que mientras a_2 decrece con η_c , el valor de b_2/a_2 no tiene una tendencia definida, oscilando de manera irregular. Si el *scaling* KNO-G fuera válido para η_c fijo, entonces debería ser $b_k/a_k = -1$ para todo η_c , de acuerdo con (3.5). Finalmente, los valores de b_k/a_k de la Tabla 3.4 son consistentes con un único valor

$$\frac{b_k}{a_k} = -6.2 \pm 0.5 \quad (3.8)$$

Los parámetros δ_k varían poco con $\langle n \rangle$. La Tabla 3.3 y la Figura 3.5 muestran un incremento suave, más marcado a energías más bajas. Es importante notar que para comparar la variación de C_k con la de δ_k , lo que constituye una comparación entre el *scaling* KNO temprano y el KNO-G, hay que considerar la k -ésima potencia δ_k^k . Para los valores de $\langle n \rangle$ alcanzados a las presentes energías la diferencia entre ambas leyes de *scaling* es pequeña, contrariamente a lo que podría deducirse de una comparación directa entre la Figuras 3.2 y 3.5.

Los cumulantes están relacionados con los momentos centrales por [34]

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \langle n \rangle \\ \kappa_2 &= \sigma_2^2 \\ \kappa_3 &= \sigma_3^3 \\ \kappa_4 &= \sigma_4^4 - 3\sigma_2^2 \\ \kappa_5 &= \sigma_5^5 - 10\sigma_3^3\sigma_2^2 \\ \kappa_6 &= \sigma_6^6 - 15\sigma_2^2\sigma_4^4 - 10\sigma_3^6 + 30\sigma_2^6 \end{aligned} \quad (3.9)$$

y tienen la propiedad estadística importante de ser aditivos para variables aleatorias independientes [34]. Si la ecuación (3.5) es válida, entonces de (3.9) resulta ser válida también para los cumulantes (más exactamente, para sus raíces k -ésimas). En la Tabla 3.3 y la Figura 3.6 se resumen los cumulantes correspondientes los datos de E735. κ_k decrece con k , tomando

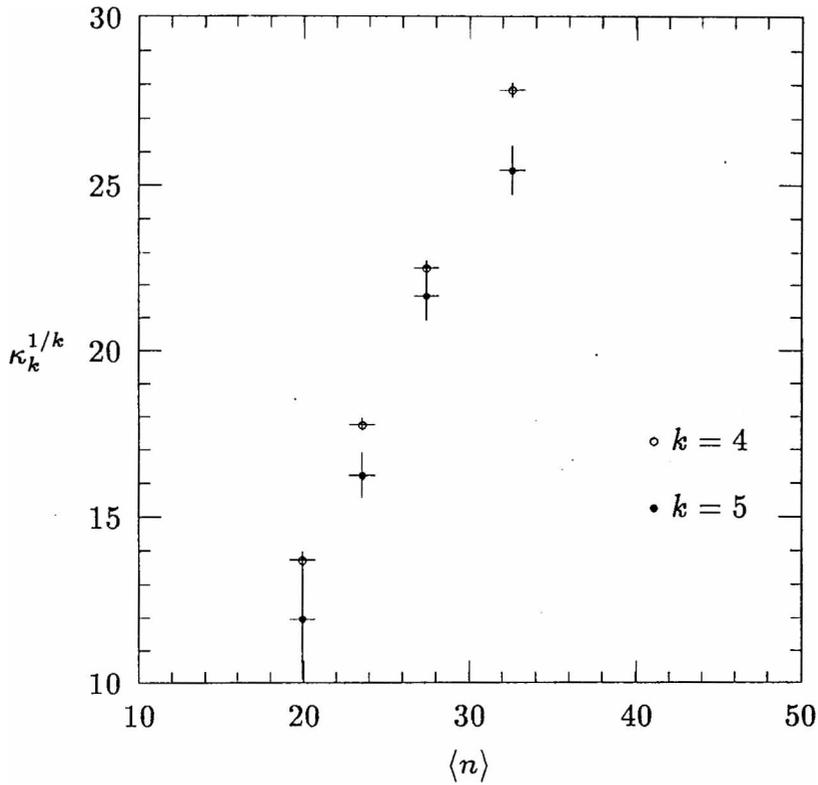


Figura 3.6: Cumulantes κ_4 , κ_5 en función de $\langle n \rangle$.

el valor absoluto mínimo para $k = 5$ y cambiando de signo entre $k = 5$ y 6. Como se ve en la Figura 3.6 κ_4 y κ_5 crecen de manera aproximadamente lineal con $\langle n \rangle$, lo que refleja el ensanchamiento de la distribución a medida que \sqrt{s} crece.

3.2.4 Momentos y cumulantes factoriales reducidos.

Los momentos factoriales reducidos están definidos por

$$F_k = \frac{\langle n(n-1)\dots(n-k+1) \rangle}{\langle n \rangle^k}. \quad (3.10)$$

Tienen un papel central en los estudios de intermitencia [51], que por definición consiste en un crecimiento de la forma

$$\langle F_k \rangle \propto (\Delta\eta)^{-\phi_k} \quad (3.11)$$

cuando $\Delta\eta \rightarrow 0$. En (3.11), $\Delta\eta$ es el tamaño de los subintervalos o *bins* en los que se divide la ventana de pseudorapidez considerada, F_k es el k -ésimo momento factorial en cada subintervalo y $\langle F_k \rangle$ es el promedio sobre subintervalos y eventos de F_k . Los coeficientes ϕ_k se denominan “coeficientes de intermitencia”. Este fenómeno ha sido observado en distintos procesos de producción múltiple de hadrones, $p\bar{p}$, e^+e^- , etc. (ver [52,53], donde se dan *reviews* sobre este tema). Aunque los datos que estamos considerando corresponden a un solo intervalo de pseudorapidez, por lo que no es posible extraer coeficientes de intermitencia, damos los valores de los seis primeros F_k en la Tabla 3.5 por completitud.

Los momentos factoriales $\langle n \rangle^k F_k$ resultan de la integración de las secciones eficaces inclusivas sobre el espacio de fases [18], mientras que las integrales de las funciones de correlación producen los cumulantes factoriales. Los cumulantes factoriales reducidos K_k fueron propuestos en [34,54] en relación con el fenómeno de intermitencia en lugar, o como complemento, de los momentos F_k . Están relacionados con estos por las expresiones [34]

$$K_2 = F_2 - 1$$

$$K_3 = F_3 - 3F_2 + 2$$

$$K_4 = F_4 - 4F_3 + 12F_2 - 3F_2^2 - 6$$

$$K_5 = F_5 - 5F_4 - 10F_3F_2 + 20F_3 + 30F_2^2 - 60F_2 + 24$$

$$K_6 = F_6 - 6F_5 - 15F_4F_2 + 30F_4 - 10F_3^2 + 120F_3F_2 - 120F_3 + 30F_2^3 - 270F_2^2 + 360F_2 - 120$$

Los cumulantes factoriales $\langle n \rangle^k K_k$ son, como los cumulantes κ_k , aditivos para variables estadísticamente independientes. Su importancia radica en

\sqrt{s}	300	546	1000	1800
F_2	1.391 ± 0.041	1.434 ± 0.042	1.475 ± 0.036	1.524 ± 0.031
F_3	2.414 ± 0.153	2.616 ± 0.161	2.829 ± 0.147	3.053 ± 0.132
F_4	4.916 ± 0.482	5.665 ± 0.533	6.505 ± 0.524	7.334 ± 0.488
F_5	11.282 ± 1.506	13.906 ± 1.756	17.067 ± 1.871	20.046 ± 1.805
F_6	28.411 ± 4.822	37.589 ± 5.945	49.607 ± 6.910	60.419 ± 6.876
K_2	0.391 ± 0.048	0.434 ± 0.40	0.475 ± 0.034	0.524 ± 0.032
K_3	0.241 ± 0.038	0.315 ± 0.040	0.403 ± 0.037	0.48 ± 0.043
K_4	0.147 ± 0.031	0.238 ± 0.040	0.363 ± 0.047	0.444 ± 0.057
K_5	-0.011 ± 0.030	0.040 ± 0.027	0.162 ± 0.055	0.145 ± 0.045
K_6	-0.295 ± 0.112	-0.456 ± 0.131	-0.489 ± 0.165	-0.994 ± 0.197

Tabla 3.5: Momentos F_k y cumulantes K_k factoriales reducidos para las distribuciones de E735.

que sólo contribuyen a K_k correlaciones de k partículas, mientras que F_k puede estar dominado por correlaciones de orden más bajo [54]. El cumulante K_k es nulo si sólo hay presentes en el sistema correlaciones de $(k - 1)$ partículas.

En la Tabla 3.5 se incluyen los cumulantes factoriales reducidos K_2 - K_6 . Para \sqrt{s} fija, K_k decrece con k cambiando su signo entre $k = 5$ y $k = 6$ (excepto a $\sqrt{s} = 300$ GeV, entre $k = 4$ y 5). El valor absoluto mínimo se alcanza para $k = 5$, lo que ocurre también para datos de UA5 y UA1 [55] y sugiere que no hay correlaciones de orden superior [54,55]. Sin embargo, en todos los casos $|K_6| > |K_5|$, por lo que no es posible concluir que $|K|$ sigue siendo pequeño para $k > 5$. K_k crece suavemente con \sqrt{s} para k fijo (excepto K_5 que decrece a la energía más alta) mostrando un comportamiento similar a los datos de UA5 y UA1 [55].

3.3 Parametrizaciones.

La forma de las distribuciones experimentales hace inaceptable las parametrizaciones sencillas que se aplican a los datos de energías más bajas [28,27]. Por este motivo, sólo consideraremos la distribución binomial negativa (DBN) y la distribución logarímic-normal (DLN) que son las más ampliamente usadas para ajustar los datos experimentales en distintos tipos de reacciones de producción múltiple de partículas.

En todos los casos usamos

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_B} \frac{(P_i - \sum_{\text{bin}} f(n, \alpha))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.12)$$

para ajustar los datos, donde

- N_B es el número de *bins*,
- P_i es la probabilidad del i -ésimo *bin*,

- $\varsigma = \sum_{i=1}^{N_B} P_i$ es un factor de normalización,
- \sum_{bin} se refiere a la multiplicidad en cada *bin*,
- f es la función a ajustar,
- α los parámetros del ajuste, y
- σ_i el error experimental en P_i .

Debido a que el error σ_i contiene componentes sistemáticos además de estadísticos y también a que los datos están corregidos por la eficiencia del detector, la cantidad χ^2 no tiene la interpretación estadística usual. Por este motivo, citaremos los valores de χ^2/dof para facilitar la comparación entre las distintas parametrizaciones, pero no les atribuiremos valor de probabilidad.

La DBN ajusta los datos con los parámetros de la Tabla 3.6 (ver Figura 3.7). La hipótesis de una forma binomial de los datos es claramente inaceptable. Las distribuciones se apartan sistemáticamente de la DBN en la región de multiplicidades medias de modo análogo a las de UA5 900 GeV[5], y de manera más pronunciada en la región de altas multiplicidades. Las distribuciones de multiplicidad de E735 tienen una proporción menor de eventos en la cola que las de UA5, lo que hace más marcada la imposibilidad de ajustarlas con parametrizaciones dependientes de sólo dos parámetros.

En la Figura 3.8 se muestra el mejor ajuste a los datos de 1 TeV con la DLN con un parámetro de desplazamiento c [38,39]

$$f_{\text{dln}}(n; \mu, \sigma, c) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{n+c} \exp\left(-\frac{[\log(n+c) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.13)$$

La función (3.13) reproduce bien los datos en la cola de la distribución, pero se desvía fuertemente en la región del máximo. El valor de $\chi^2/\text{dof} = 64/26$ para $\mu = 6.96$, $\sigma = 0.03$ y $c = 1063.3$ es más pequeño que el correspondiente

GeV	\bar{n}	k	χ^2	dof
300	21.37	3.45	116.23	19
546	25.47	3.09	305.14	23
1000	28.435	2.42	316.25	27
1800	33.48	2.14	780.58	30

Tabla 3.6: Parámetros de los mejores ajustes a la DBN.

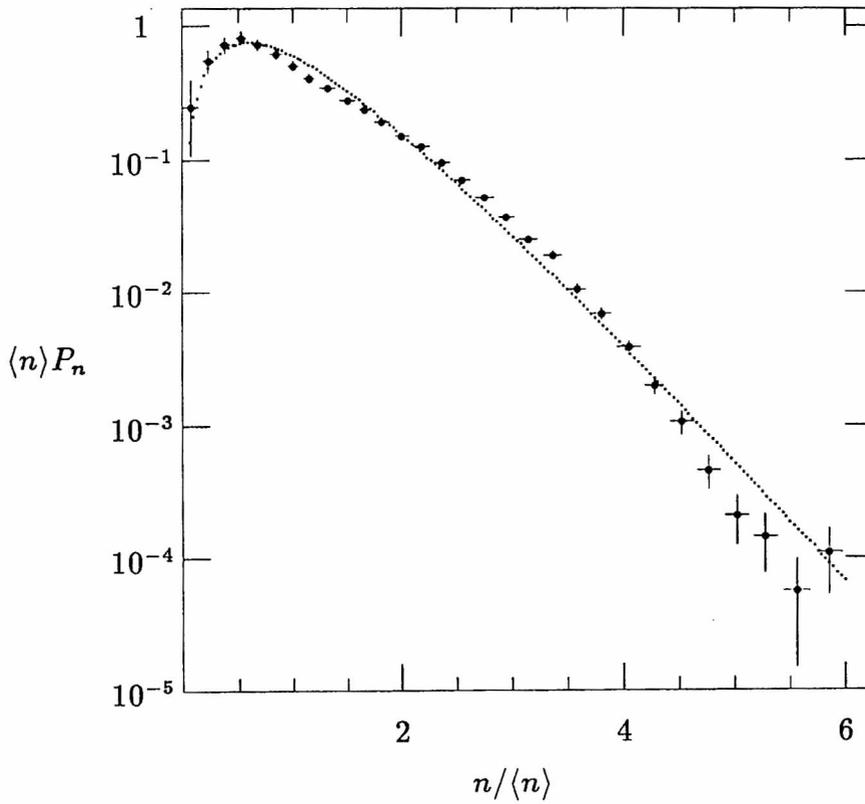


Figura 3.7: Distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO. La línea punteada es la DBN.

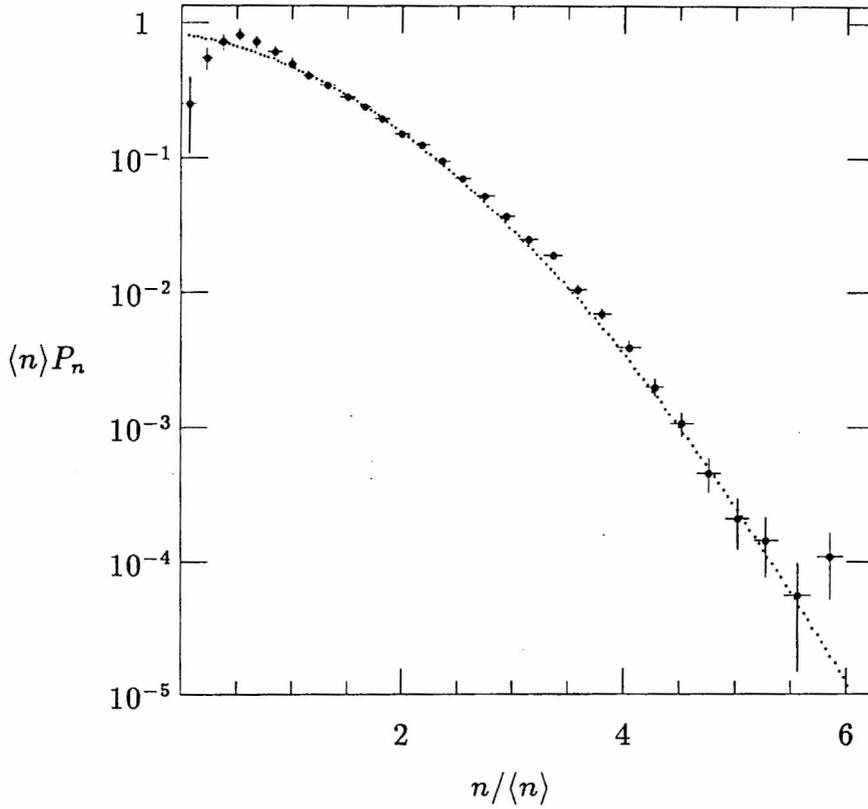


Figura 3.8: Distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO. La línea punteada es la DLN.

a la DBN, pero de todas maneras es muy alto. Las desviaciones sistemáticas hacen inaceptable el ajuste.

La Figura 3.8 se explica teniendo en cuenta la forma global de la DLN. En escala logarítmica, la función $\log_{10} f_{\text{dlN}} \propto \log f_{\text{dlN}}$ tiene un punto de inflexión en

$$x_i = \exp(\mu - \sigma^2 + 1) - c$$

más allá del cual el gráfico de la distribución es convexo. Puesto que la cola de la distribución experimental es cóncava, x_i debe situarse a la derecha de los datos, por lo que sólo se usa para el ajuste la región del máximo

de f_{dln} que es demasiado ancha para reproducir las rápidas variaciones de los puntos experimentales cerca del pico. Los datos de UA5 tienen un decrecimiento más suave, por lo que es posible ajustarlos de modo más satisfactorio [38]. En síntesis, la forma cualitativa de 3.13 no es compatible con los datos aunque los valores de χ^2/dof sean relativamente bajos.

Como se sugiere en [28] la DBND

$$f_{dbnd}(n) = \omega f_{dbn}(n; \bar{n}_1, k_1) + (1 - \omega) f_{dbn}(n; \bar{n}_2, k_2) \quad (3.14)$$

con cinco parámetros libres ω , \bar{n}_1 , k_1 , \bar{n}_2 , k_2 , con $0 < \omega < 1$, produce muy buenos ajustes a los datos. En la Tabla 3.7 se dan los parámetros de los ajustes mostrados en las Figuras 3.9–3.12. Una interpretación posible es que las interacciones complejas que tienen lugar en los eventos $p\bar{p}$ de sesgo mínimo pueden dividirse en dos componentes que interfieren débilmente, cada una de las cuales da lugar a una DBN con un peso estadístico. En el Capítulo anterior vimos que este es el caso para las colisiones e^+e^- a 91 GeV [33], donde las diferentes componentes corresponden a eventos con distinto número de *jets*. Así, podríamos interpretar el parámetro ω como la proporción de eventos con *mini-jets* [28] (ver Figura 3.13). Sin embargo, puesto que no existe aún evidencia experimental conclusiva sobre este punto, consideraremos a la DBND como una parametrización conveniente de los datos, que puede ser útil para extrapolar a energías más altas.

GeV	\bar{n}_1	k_1	\bar{n}_2	k_2	ω	χ^2	dof
300	38.25	12.77	17.16	3.21	0.136	11.14	16
546	45.88	10.58	19.57	2.97	0.158	15.33	20
1000	55.01	9.49	22.25	2.62	0.158	22.86	24
1800	65.80	8.56	25.85	2.26	0.168	30.39	27

Tabla 3.7: Parámetros de los mejores ajustes a la DBND.

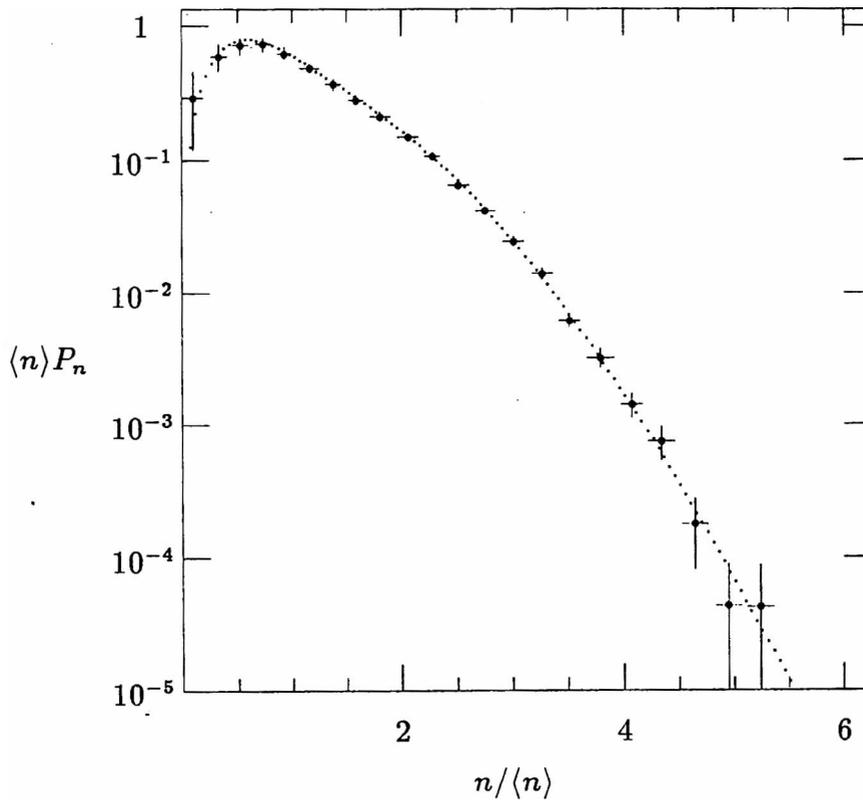


Figura 3.9: Distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 300$ GeV en variables KNO. La línea punteada es la DBND con los parámetros de la Tabla 3.7.

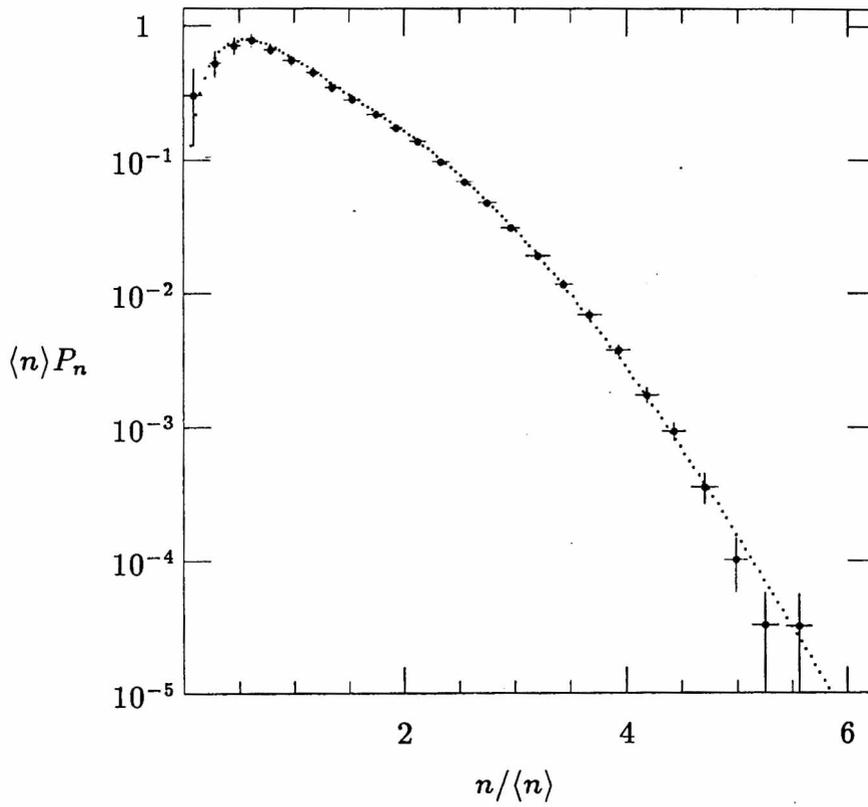


Figura 3.10: Distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 546$ GeV en variables KNO. La línea punteada es la DBND con los parámetros de la Tabla 3.7.

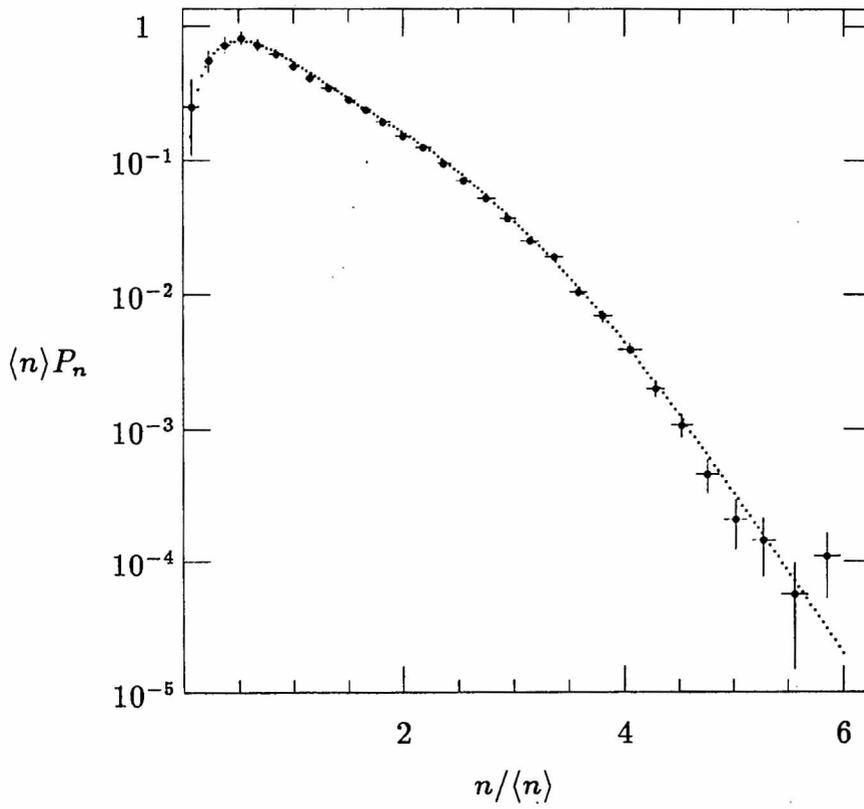


Figura 3.11: Distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO. La línea punteada es la DBND con los parámetros de la Tabla 3.7.

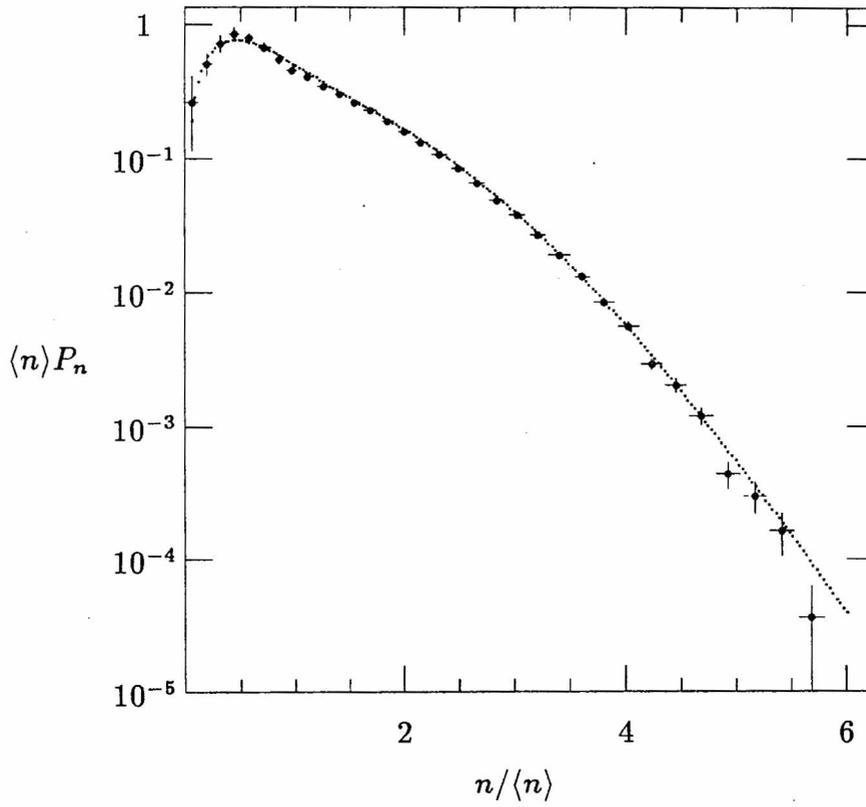


Figura 3.12: Distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1800$ GeV en variables KNO. La línea punteada es la DBND con los parámetros de la Tabla 3.7.

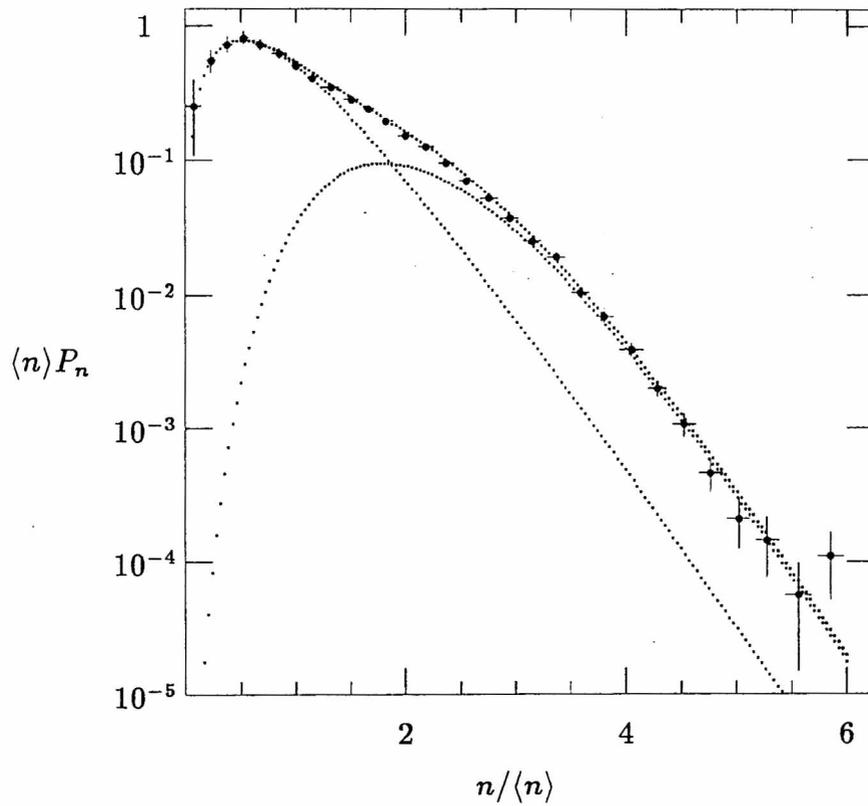


Figura 3.13: Distribución de multiplicidad de E735 a $\sqrt{s} = 1000$ GeV en variables KNO. La línea punteada es la DBND con los parámetros de la Tabla 3.7, separada en sus dos componentes.


```
if(modo.eq.'exp') then
sum=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
sum=sum+p(j)
end do
end do
res(1)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
res(1)=res(1)+float(m)*(p(j)/sum)
end do
end do
err(1)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
err(1)=err(1)+(p(j)/sum)*(float(m)-res(1))**2
end do
end do
do k=2,nk
res(k)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
res(k)=res(k)+(float(m)/res(1))**k*(p(j)/sum)
end do
end do
end do
do k=3,nk
err(k)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
```



```
ccc simulacion de errores ccc
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
else if(modo.eq.'sim') then
call umach(-2,4)
call rnopt(iopt)
call rnset(iseed)
do i=1,ne
do j=1,nbin
sp(i,j)=p(j)+ep(j)*rnnof()
if(sp(i,j).lt.0.) sp(i,j)=0.
end do
end do
do i=1,ne
ssum(i)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
ssum(i)=ssum(i)+sp(i,j)
end do
end do
end do
do i=1,ne
do j=1,nbin
sp(i,j)=sp(i,j)/ssum(i)
end do
end do
cccccccccccc promedio ccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
do i=1,ne
sc(1,i)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
sc(1,i)=sc(1,i)+float(m)*sp(i,j)
```

```
end do
end do
end do
res(1)=0.
do i=1,ne
res(1)=res(1)+sc(1,i)
end do
res(1)=res(1)/float(ne)
err(1)=0.
do i=1,ne
err(1)=err(1)+(res(1)-sc(1,i))**2
end do
err(1)=sqrt(err(1)/float(ne))
type 151, '<n>=',res(1),'(',err(1),')'
151 format(1x,a,f8.4,a,f7.4,a)
cccccccccccccc C-momentos ccccccccccccccccccc
do i=1,ne
do k=2,nk
sc(k,i)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
sc(k,i)=sc(k,i)+(float(m)/sc(1,i))**k*sp(i,j)
end do
end do
end do
end do
do k=2,nk
res(k)=0.
do i=1,ne
res(k)=res(k)+sc(k,i)
end do
```

```
res(k)=res(k)/float(ne)
end do
do k=2,nk
err(k)=0.
do i=1,ne
err(k)=err(k)+(res(k)-sc(k,i))**2
end do
err(k)=sqrt(err(k)/float(ne))
end do
do k=2,nk
type 295,'C',k,'=',res(k),'(',err(k),')'
end do
295 format(1x,a,i1,a,f7.4,a,f7.4,a)
cccccccccccccccc dispersion ccccccccccc
do i=1,ne
sd(2,i)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
sd(2,i)=sd(2,i)+(float(m)-sc(1,i))**2*sp(i,j)
end do
end do
sd(2,i)=sqrt(sd(2,i))
end do
res(2)=0.
do i=1,ne
res(2)=res(2)+sd(2,i)
end do
res(2)=res(2)/float(ne)
err(2)=0.
do i=1,ne
err(2)=err(2)+(res(2)-sd(2,i))**2
```

```
end do
err(2)=sqrt(err(2)/float(ne))
type 151,'sigma=',res(2),'(',err(2),')'
cccccccccccccc D-momentos ccccccccccccccc
do i=1,ne
do k=3,nk
sd(k,i)=0.
do j=1,nbin
do m=minm(j),maxm(j)
sd(k,i)=sd(k,i)+((float(m)-sc(1,i))/sd(2,i))**k
*sp(i,j)
end do
end do
end do
end do
do k=3,nk
res(k)=0.
do i=1,ne
res(k)=res(k)+sd(k,i)
end do
res(k)=res(k)/float(ne)
end do
do k=3,nk
err(k)=0.
do i=1,ne
err(k)=err(k)+(res(k)-sd(k,i))**2
end do
err(k)=sqrt(err(k)/float(ne))
end do
do k=3,nk
type 295,'D',k,'=',res(k),'(',err(k),')'
```

```
end do
cccccccccccccc d-momentos ccccccccccccccc
do i=1,ne
do k=3,nk
sd(k,i)=sd(k,i)**(1./float(k))
end do
end do
do k=3,nk
res(k)=0.
do i=1,ne
res(k)=res(k)+sd(k,i)
end do
res(k)=res(k)/float(ne)
end do
do k=3,nk
err(k)=0.
do i=1,ne
err(k)=err(k)+(res(k)-sd(k,i))**2
end do
err(k)=sqrt(err(k)/float(ne))
end do
do k=3,nk
type 295,'d',k,',',res(k),',(',err(k),',)'
end do
cccccccccccccc momentos centrados ccccccccccccccc
do i=1,ne
do k=3,nk
sd(k,i)=sd(k,i)*sd(2,i)
end do
end do
do k=3,nk
```

```
res(k)=0.
do i=1,ne
res(k)=res(k)+sd(k,i)
end do
res(k)=res(k)/float(ne)
end do
do k=3,nk
err(k)=0.
do i=1,ne
err(k)=err(k)+(res(k)-sd(k,i))**2
end do
err(k)=sqrt(err(k)/float(ne))
end do
do k=3,nk
type 780,'<(n-<n>)**',k,'>**(1/',k,')=',
res(k),'(',err(k),')'
end do
780 format(1x,a,i1,a,i1,a,f8.4,a,f8.4,a)
else
type *,'modo desconocido'
endif
stop
end
```

Capítulo 4

Modelos de Ramificación.

La producción múltiple de hadrones en reacciones de altas energías ya sea en la aniquilación e^+e^- como en la dispersión inelástica hadrónica y semileptónica se interpreta generalmente [56,57,58] en términos de una imagen de “cascada de partones”. En esta imagen, los partones producidos inicialmente evolucionan a un estado multipartónico final, ramificándose repetidamente a través de los procesos permitidos por los vértices de QCD. Debido a la propiedad de libertad asintótica de las interacciones fuertes, la etapa de ramificación de partones, al tener lugar a grandes escalas de virtualidad es perturbativa, y se supone que es seguida por una etapa no perturbativa de hadronización que da origen a los hadrones observados finalmente.

La tarea de obtener predicciones teóricas que puedan contrastarse con las observaciones experimentales se lleva a cabo actualmente, casi con exclusividad, mediante modelos computacionales de simulación [57,58,59,60]. Estos incorporan, a su vez, modelos fenomenológicos para el tratamiento de las interacciones no perturbativas que ocurren entre los hadrones iniciales y en la etapa final de hadronización. Por otra parte, los algoritmos que describen la etapa intermedia de evolución perturbativa generan dis-

tribuciones de partones que satisfacen las ecuaciones de Altarelli-Parisi [57]. Estos incluyen además los efectos de la cinemática exacta y las correlaciones angulares debidas a la polarización de los gluones, así como correcciones de orden más alto a la aproximación de logaritmo dominante que son importantes, en particular, debido a las divergencias infrarrojas de QCD.

Los modelos complejos construídos de este modo reproducen la intrincada fenomenología hadrónica a partir de “primeros principios”. Esta complejidad constituye al mismo tiempo una desventaja del enfoque computacional, ya que los resultados de las simulaciones son muchas veces tan difíciles de interpretar y de atribuir a alguno de los ingredientes teóricos incluídos, como los datos experimentales mismos. De hecho, los datos numéricos que resultan de los “experimentos de simulación” suelen tratarse por métodos similares a los experimentales y cada modelo, o clase de modelos, tiene su propia “fenomenología”. Por este motivo, tiene interés básico comprender los mecanismos de ramificación de partones en un marco puramente analítico.

Los modelos analíticos, debido a las dificultades mencionadas, se dirigen al estudio de aspectos parciales tanto de la teoría como de la fenomenología. Si bien permiten una comprensión más profunda de la naturaleza de los mecanismos en juego, tienen severas limitaciones en cuanto a la formulación de predicciones y a la comparación con los experimentos debido, precisamente, a su simplicidad. Los resultados obtenidos en este contexto tienen en general el carácter de progresos conceptuales y metodológicos más que fenomenológicos y pueden complementar de este modo a los modelos de Monte-Carlo. Su valor heurístico, sin embargo, no debe dejarse completamente de lado; por ejemplo, la distribución binomial negativa, que se aplica para parametrizar todas las reacciones de producción de partículas con buenos resultados, fue propuesta a partir de la ecuación de ramificación como veremos en lo que sigue.

En este capítulo estudiaremos, como paradigma de distintos enfoques

posibles para el tratamiento analítico [54], un modelo de ramificación de partones inspirado en QCD perturbativa que comparte algunas características con los modelos de Monte-Carlo de tipo “*parton shower*” [57,59]. El modelo involucra sólo grados de libertad de multiplicidad, los que evolucionan de acuerdo a la “ecuación de ramificación de partones” obtenida en [61] a partir de la ecuación de Altarelli-Parisi-Lipatov-Gribov en la aproximación de logaritmo dominante. El punto de vista puramente estocástico que adoptaremos y que nos permitió obtener resultados de interés fue propuesto en [62], donde se formuló el modelo explícitamente en términos de las ecuaciones de Kolmogorov para procesos markovianos numerables, y ha sido analizado y aplicado a la descripción fenomenológica de multiplicidades hadrónicas en varios trabajos previos [37,41,43,65,66].

El carácter de este capítulo es diferente del anterior ya que no haremos hincapié en los datos experimentales, sino que daremos un tratamiento formal y matemático de las ecuaciones de ramificación de partones. Su relación con la fenomenología se discutirá *a posteriori*. En las primeras dos secciones damos la motivación y el planteo del modelo de ramificación, cuyas propiedades se analizan y discuten en las secciones subsiguientes. Como veremos, el modelo resulta ser, pese a su simplicidad, un prototipo no trivial de la propiedad de escala KNO que en el contexto considerado es equivalente a la convergencia en distribución.

4.1 Ecuación de ramificación de partones.

En esta sección presentamos una deducción de la ecuación de ramificación de partones siguiendo las líneas que llevan a la formulación de los métodos de simulación de la evolución partónica [57,58,59]. La deducción es menos rigurosa desde el punto de vista formal que la original [61], pero por su sencillez permite comprender la naturaleza de las aproximaciones involucradas

y provee una motivación para los desarrollos de las siguientes secciones.

El punto de partida es la ecuación de Altarelli-Parisi-Lipatov-Gribov [57,58,59]

$$\frac{d\mathcal{P}_{a \rightarrow bc}}{d\tau} = \int dz \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{a \rightarrow bc} \quad (4.1)$$

donde

- $d\mathcal{P}_{a \rightarrow bc}$ es la probabilidad de que un partón de tipo a se ramifique en b y c , a través de los vértices triples de QCD, durante un intervalo $d\tau$.
- $\tau = \log(m^2/\Lambda^2)$ es el parámetro de evolución en virtualidad Q^2 dado en términos de la masa virtual del partón a y la escala Λ^2 de QCD.
- $\alpha_s(Q^2) = 1/\beta \log(Q^2/\Lambda^2)$ es la constante de acoplamiento *running* para las interacciones fuertes en la aproximación de un *loop*.
- $2\pi\beta = (11N_c - 2N_f)/6$, con N_c y N_f el número de colores y de sabores efectivos a la escala considerada, respectivamente. Si β es positivo, la teoría es asintóticamente libre.
- $P_{a \rightarrow bc}(z)$ es el núcleo de Altarelli-Parisi correspondiente a la transición $a \rightarrow bc$ con la fracción de impulso z para b .

A la fracción de impulso z la consideramos definida respecto del centro de masa global del sistema. En la aproximación de un *loop* y sin tener en cuenta correcciones de orden superior, el argumento de α_s en (4.1) es $Q^2 = m^2$ [57,58,59], por lo que α_s no contribuye a la integración sobre z .

La probabilidad de que no ocurra ninguna transición en el intervalo (τ, τ_0) la llamaremos $\Delta_a(\tau, \tau_0)$. En un intervalo infinitesimal $\delta\tau$ la probabilidad de no emisión es $(1 - \delta\tau d\mathcal{P}_{a \rightarrow bc}/d\tau)$. Para un intervalo finito toma la forma exponencial y, de acuerdo con (4.1), debe satisfacer

$$\frac{d\Delta_a(\tau, \tau_0)}{d\tau} = -\Delta_a(\tau, \tau_0) \alpha_s \int dz \sum_b P_{a \rightarrow bc}(z) \quad (4.2)$$

Se suele denominar a $\Delta_a(\tau, \tau_0)$ “factor de forma de Sudakov” del partón a [57,58,59], y está relacionado con las divergencias infrarrojas de QCD, las que aparecen en (4.2) en los núcleos $P_{a \rightarrow bc}$. Las transiciones $q \rightarrow qg$ y $g \rightarrow gg$ tienen asociadas probabilidades $P_{a \rightarrow bc}(z)$ divergentes cuando $z = 0$ ó $z = 1$. Estas suelen regularizarse [57,58,59] atribuyendo una masa a los partones, es decir, una cota inferior para su virtualidad. La conservación del impulso en el proceso $a \rightarrow bc$ impone entonces límites $z_{\min} > 0$ y $z_{\max} < 1$ que excluyen los valores singulares y que dependen de τ y de la masa regularizadora. Los límites cinemáticos $z_{\min, \max}$ dependen también de la definición de z especificada. Para integrar la ecuación (4.2) de manera cerrada usaremos, en lugar de esta regularización, un parámetro ϵ de corte infrarrojo [62] de modo que en (4.2) la integral se extiende de ϵ a $1 - \epsilon$. De este modo no se tiene en cuenta la cinemática exacta y, por lo tanto, la definición de z no juega un papel importante en la teoría.

Llamando entonces

$$\lambda_a = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} dz \sum_b P_{a \rightarrow bc}(z) \quad (4.3)$$

y teniendo en cuenta que $\alpha_s(m^2) = 1/\beta\tau$, de (4.2) obtenemos

$$\Delta_a(\tau, \tau_0) = \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{\lambda_a} \quad (4.4)$$

Es conveniente hacer un cambio de variable de modo que a la masa virtual mínima m_0^2 a la que termina el proceso, le corresponda un parámetro de evolución nulo. Puesto que las probabilidades de transición por unidad de τ , λ_a , son constantes, el origen en el eje τ puede elegirse arbitrariamente. Haremos al mismo tiempo una reparametrización que lleve Δ_a a la forma exponencial. Definimos t como

$$\begin{aligned} 2\pi\beta t &= \log(\tau) - \log\left(\log \frac{m_0^2}{\Lambda^2}\right) \\ &= \log\left(1 + \alpha\beta \log\left(\frac{m^2}{m_0^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

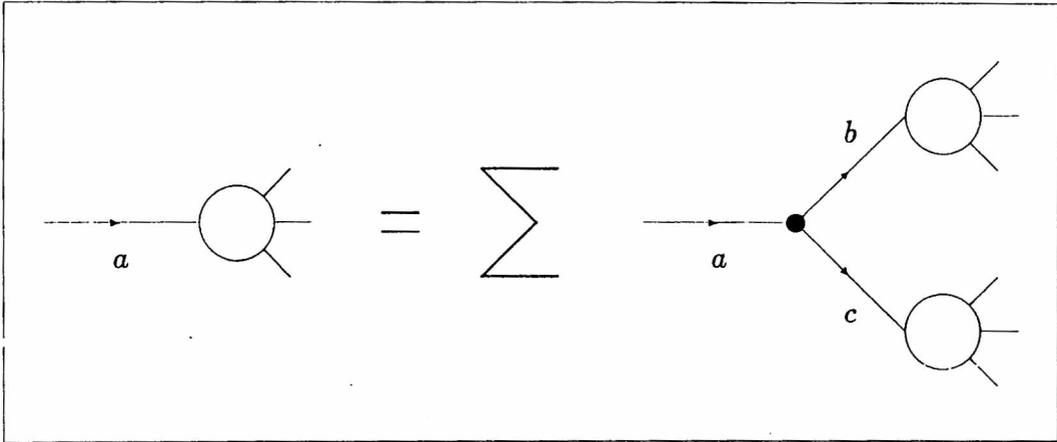


Figura 4.1: Representación esquemática de la ecuación retrospectiva de Kolmogorov [57].

donde $\alpha = \alpha_\epsilon(m_0^2)$. En esta nueva variable resulta, ya que τ_0 corresponde a $t_0 = 0$,

$$\Delta_a(t) = \exp -[t(\lambda_a 2\pi\beta)] \tag{4.6}$$

de modo que las probabilidades de no transición entre t y 0 son, en cada caso [62]

$$\begin{aligned} q \rightarrow qg : \quad \Delta_{qg}(t) &= e^{-\tilde{A}t} ; \quad \tilde{A} = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c\epsilon} \\ g \rightarrow gg : \quad \Delta_{gg}(t) &= e^{-At} ; \quad A = \frac{N_c}{\epsilon} \\ g \rightarrow qq : \quad \Delta_{qq}(t) &= e^{-Bt} ; \quad B = \frac{N_f}{3} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Los parámetros \tilde{A}, A, B resultan de (4.3) y (4.6) excepto por una redefinición de ϵ necesaria para unificar nuestra notación con la de [62]. Nótese que \tilde{A}, A dependen del corte infrarrojo ϵ y son, por lo tanto, divergentes, mientras que B es finito.

Las expresiones (4.7) muestran que las Δ son exponenciales en la va-

riable t por lo que el proceso es markoviano [63,64]. Podemos entonces arribar a las ecuaciones integrodiferenciales de Kolmogorov aplicando los métodos usuales [63]. Si llamamos $\mathcal{G}(u_g, u_q; t)$ a la función generatriz para una cascada iniciada por un gluón de virtualidad t y $\mathcal{Q}(u_g, u_q; t)$ a la correspondiente a un quark inicial, entonces considerando la primera transición resulta [57,63,64] (ver Figura 4.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(u_g, u_q; t) = & \\ & \Delta_{gg}(t)\Delta_{gq}(t)\mathcal{G}(u_g, u_q; 0) + \int_0^t dt' \frac{d}{dt'} (\Delta_{gg}(t-t')\Delta_{gq}(t-t')) \times \\ & \times \left(\frac{A}{A+B}\mathcal{G}^2(t') + \frac{B}{A+B}\mathcal{Q}^2(t') \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde el primer término representa la probabilidad de que no ocurra ninguna transición y el segundo que la primera transición se produzca en t' entre 0 y t y que conduzca a dos cascadas independientes de longitud $(t-t')$. De esta ecuación, aplicando (4.7) y pasando a la transformada de Laplace, obtenemos la ecuación retrospectiva de Kolmogorov, (denotando la derivada respecto a t con un punto)

$$\dot{\mathcal{G}}(u_g, u_q; t) = -(A+B)\mathcal{G}(u_g, u_q; t) + A\mathcal{G}^2(u_g, u_q; t) + B\mathcal{Q}^2(u_g, u_q; t) \quad (4.9)$$

con la condición inicial

$$\mathcal{G}(u_g, u_q; 0) = u_g \quad (4.10)$$

Análogamente, obtenemos la ecuación correspondiente a un quark inicial

$$\dot{\mathcal{Q}}(u_g, u_q; t) = -\tilde{A}\mathcal{Q}(u_g, u_q; t) + \tilde{A}\mathcal{G}(u_g, u_q; t)\mathcal{Q}(u_g, u_q; t) \quad (4.11)$$

con la condición inicial

$$\mathcal{Q}(u_g, u_q; 0) = u_q \quad (4.12)$$

Si en lugar de la primera transición hubiéramos considerado la última, habríamos obtenido las ecuaciones prospectivas de Kolmogorov, que son equivalentes a las anteriores [63]. Esto lo haremos en la siguiente sección, donde caracterizamos el proceso de ramificación desde el punto de vista matemático.

4.2 Caracterización del proceso de ramificación.

Desde el punto de vista matemático [63,67,68], el proceso de ramificación descrito en la sección anterior queda completamente determinado por las distribuciones de probabilidad de los “tiempos” t de transición y las funciones generatrices infinitesimales. La distribución de los “tiempos” de transición está dada por (4.7) y la hipótesis de independencia de partones que enunciaremos enseguida. La probabilidad de que un sistema formado por n_g gluones y n_q quarks, que denotaremos “estado (n_g, n_q) ”, no sufra ninguna transición en el intervalo (t_0, t_1) está dada, según (4.7) y la independencia de partones, por

$$[\Delta_{gg}(t_1 - t_0)\Delta_{gq}(t_1 - t_0)]^{n_g} [\Delta_{qq}(t_1 - t_0)]^{n_q} \quad (4.13)$$

Las “velocidades” de transición A, \bar{A}, B definen las probabilidades infinitesimales de transición o núcleo estocástico [63] que se pueden expresar en términos de las funciones generatrices infinitesimales [62]

$$\omega_g(u_g, u_q) = -(A + B)u_g + Au_g^2 + Bu_q^2 \quad (4.14)$$

$$\omega_q(u_g, u_q) = -\bar{A}u_q + \bar{A}u_gu_q \quad (4.15)$$

para el gluón y el quark respectivamente. El hecho de que A, \bar{A}, B sean constantes implica la homogeneidad del proceso [62].

Llamamos

$$P_{m_g m_q}(n_g, n_q; t)$$

a la probabilidad de que se produzca la transición $(m_g, m_q) \rightarrow (n_g, n_q)$ en un intervalo de longitud t . Las correspondientes funciones generatrices son

$$\Gamma_{m_g m_q}(u_g, u_q; t) = \sum_{n_g, n_q=0}^{\infty} P_{m_g m_q}(n_g, n_q; t) u_g^{n_g} u_q^{n_q}. \quad (4.16)$$

En los casos particulares $(m_g, m_q) = (1, 0)$ o $(0, 1)$ usamos las notaciones abreviadas

$$\begin{aligned} G_{n_g n_q}(t) &= P_{10}(n_g, n_q; t) \\ Q_{n_g n_q}(t) &= P_{01}(n_g, n_q; t) \\ \mathcal{G}(u_g, u_q; t) &= \Gamma_{10}(u_g, u_q; t) \\ \mathcal{Q}(u_g, u_q; t) &= \Gamma_{01}(u_g, u_q; t) \end{aligned}$$

Estas son las funciones básicas del proceso, ya que las correspondientes a otras condiciones iniciales resultan de ellas aplicando la independencia de partones.

La hipótesis de independencia de partones establece que en el proceso de ramificación los partones evolucionan independientemente unos de otros [62], lo que es una de las características de los procesos matemáticos de ramificación [67,68]. Esto se expresa matemáticamente en la forma

$$P_{m_g m_q}(n_g, n_q; t) = \sum_{\substack{I_g(m_g+m_q) \\ |I_g|=n_g}} \sum_{\substack{I_q(m_g+m_q) \\ |I_q|=n_q}} \prod_{j=1}^{m_g} G(i_{g_j}, i_{q_j}; t) \prod_{k=m_g+1}^{m_g+m_q} Q(i_{g_k}, i_{q_k}; t) \quad (4.17)$$

donde $I(k) = (i_1, \dots, i_k)$ es un multiíndice de k componentes enteras no negativas, $|I(k)| = \sum_{j=1}^k i_j$ y $\sum_{I(k)} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k}$. A partir de (4.16) es posible escribir (4.17) en términos de funciones generatrices

$$\Gamma_{m_g m_q}(u_g, u_q; t) = [\mathcal{G}(u_g, u_q; t)]^{m_g} [\mathcal{Q}(u_g, u_q; t)]^{m_q} \quad (4.18)$$

lo que expresa de manera más compacta el hecho de que un conjunto de $(m_g + m_q)$ partones evoluciona como $(m_g + m_q)$ conjuntos de 1 partón, gluón o quark.

Una consecuencia de la hipótesis de independencia (4.17) es la composición de probabilidades infinitesimales,

$$\begin{aligned}
 P_{m_g m_q}(n_g, n_q; \Delta t) = & \\
 & (1 - m_q \tilde{A} \Delta t - m_g A \Delta t - m_g B \Delta t) \delta_{m_g n_g} \delta_{m_q n_q} \\
 & + m_q \tilde{A} \Delta t \delta_{m_g+1, n_g} \delta_{m_q n_q} + m_g A \Delta t \delta_{m_g+1, n_g} \delta_{m_q n_q} \\
 & + m_g B \Delta t \delta_{m_g-1, n_g} \delta_{m_q+2, n_q} + O(\Delta t^2) \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

De aquí, con $(m_g, m_q) = (1, 0)$ o $(0, 1)$ resultan las funciones generatrices a orden Δt

$$\mathcal{G}(u_g, u_q; \Delta t) = u_g + \omega_g(u_g, u_q) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (4.20)$$

$$\mathcal{Q}(u_g, u_q; \Delta t) = u_q + \omega_q(u_g, u_q) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (4.21)$$

Con estos elementos tenemos un proceso estocástico bien definido, cuyas ecuaciones de evolución consideramos a continuación.

4.2.1 Ecuaciones de evolución de Kolmogorov.

Las ecuaciones (4.13)-(4.18) definen un proceso markoviano homogéneo de ramificación [67] que satisface las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov [63,67]

$$P_{m_g m_q}(n_g, n_q; t + t') = \sum_{l_g, l_q=0}^{\infty} P_{m_g m_q}(l_g, l_q; t) P_{l_g l_q}(n_g, n_q; t') \quad (4.22)$$

En términos de funciones generatrices se escriben, para un partón inicial

$$\mathcal{G}(u_g, u_q; t + t') = \mathcal{G}(\mathcal{G}(u_g, u_q; t'), \mathcal{Q}(u_g, u_q; t'); t) \quad (4.23)$$

$$\mathcal{Q}(u_g, u_q; t + t') = \mathcal{Q}(\mathcal{G}(u_g, u_q; t'), \mathcal{Q}(u_g, u_q; t'); t) \quad (4.24)$$

Si en estas últimas reemplazamos $t' = \Delta t$, aplicando (4.20) y (4.21) en el $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ resultan las ecuaciones prospectivas de Kolmogorov

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(u_g, u_q; t) = \left[-(A + B)u_g + Au_g^2 + Bu_q^2 \right] \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u_g}(u_g, u_q; t)$$

$$+ \tilde{A}u_q(u_g - 1) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u_q}(u_g, u_q; t) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t}(u_g, u_q; t) = & \left[-(A + B)u_g + Au_g^2 + Bu_q^2 \right] \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_g}(u_g, u_q; t) \\ & + \tilde{A}u_q(u_g - 1) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_q}(u_g, u_q; t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Usando $t = \Delta t$ y procediendo de la misma manera, obtenemos las ecuaciones retrospectivas de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(u_g, u_q; t) = & -(A + B)\mathcal{G}(u_g, u_q; t) + A\mathcal{G}^2(u_g, u_q; t) \\ & + B\mathcal{Q}^2(u_g, u_q; t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t}(u_g, u_q; t) = -\tilde{A}\mathcal{Q}(u_g, u_q; t) + \tilde{A}\mathcal{G}(u_g, u_q; t)\mathcal{Q}^2(u_g, u_q; t) \quad (4.28)$$

En ambos casos las condiciones iniciales correspondientes a un único partón inicial son

$$\mathcal{G}(u_g, u_q; 0) = u_g \quad (4.29)$$

$$\mathcal{Q}(u_g, u_q; 0) = u_q \quad (4.30)$$

Las ecuaciones de evolución para las probabilidades $G_{n_g, n_q}(t)$ y $Q_{n_g, n_q}(t)$ se obtienen de modo análogo partiendo de (4.22) y aplicando (4.19). Sin embargo, es conveniente para el análisis posterior hacer un cambio en las variables. Nótese que debido a que el número de quarks sólo cambia a través del mecanismo de creación de pares, las regiones n_q par y n_q impar están desconectadas, lo que constituye una manifestación de la ley de conservación de la carga eléctrica. En lugar de n_q usamos la variable n_p , número de pares producidos, que en el caso de un gluón inicial es $n_p = n_q/2$ mientras que para un quark inicial vale $n_p = (n_q - 1)/2$. En esta nueva variable las ecuaciones de Kolmogorov para el jet^1 de gluón se escriben

$$\frac{dG_{n_g, n_p}}{dt} = - \left[(A + B)n_g + 2\tilde{A}n_p \right] G_{n_g, n_p} + A(n_g - 1)G_{n_g - 1, n_p}$$

¹En este capítulo usamos la palabra *jet* en el sentido de “estado final del proceso de ramificación” [62]

$$\begin{aligned}
& + 2\tilde{A}n_p G_{n_g-1, n_p} + B(n_g + 1)G_{n_g+1, n_p-1} \\
\frac{dG_{n_g, n_p}}{dt} = & - (A + B)G_{n_g, n_p} + A \sum_{j=0}^{n_g} \sum_{l=0}^{n_p} G_{j, l} G_{n_g-j, n_p-l}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$+ B \sum_{j=0}^{n_g} \sum_{l=0}^{n_p} Q_{j, l} Q_{n_g-j, n_p-l} \tag{4.32}$$

con la condición inicial

$$G_{n_g, n_p}(t = 0) = \delta_{n_g 1} \delta_{n_p 0} \tag{4.33}$$

La primera es la ecuación prospectiva y la segunda la retrospectiva. Análogamente para el *jet* de quark resulta

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_{n_g, n_p}}{dt} = & - \left[(A + B)n_g + \tilde{A}(2n_p + 1) \right] Q_{n_g, n_p} + A(n_g - 1)Q_{n_g-1, n_p} \\
& + \tilde{A}(2n_p + 1)Q_{n_g-1, n_p} + B(n_g + 1)Q_{n_g+1, n_p-1}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\frac{dQ_{n_g, n_p}}{dt} = - \tilde{A}Q_{n_g, n_p} + \tilde{A} \sum_{j=0}^{n_g} \sum_{l=0}^{n_p} G_{j, l} Q_{n_g-j, n_p-l} \tag{4.35}$$

con

$$Q_{n_g, n_p}(t = 0) = \delta_{n_g 0} \delta_{n_p 0} \tag{4.36}$$

Estas ecuaciones no han sido resueltas analíticamente aún, desde su formulación en [61]. Por este motivo se suelen considerar casos particulares ($B = 0$, $2\tilde{A} = A$ [62,65,66]) o se utilizan métodos numéricos (p.ej., [41]).

4.3 Momentos.

Las ecuaciones de ramificación de partones pueden expresarse en términos de los momentos de las distribuciones de probabilidad. En esta sección daremos soluciones analíticas para el valor medio y estudiaremos las ecuaciones para los momentos factoriales de orden superior. Aunque en principio es posible hallar todos los momentos analíticamente, la resolución es impracticable más allá del segundo orden, por lo que nos limitaremos a mostrar los valores propios de las ecuaciones.

4.3.1 Valor medio.

De las ecuaciones (4.31)–(4.36) es posible deducir las ecuaciones prospectivas para las multiplicidades medias de gluones y pares en el *jet* de gluón y quark, respectivamente

$$\frac{d\langle n_g \rangle_i}{dt} = (A - B)\langle n_g \rangle_i + 2\bar{A}\langle n_p \rangle_i + \bar{A}\delta_{iQ} \quad (4.37)$$

$$\frac{d\langle n_p \rangle_i}{dt} = B\langle n_g \rangle_i \quad (4.38)$$

donde $i = G, Q$ indica el correspondiente partón inicial. De modo análogo, de las ecuaciones retrospectivas tenemos

$$\frac{d\langle n_g \rangle_G}{dt} = (A - B)\langle n_g \rangle_G + 2B\langle n_g \rangle_Q \quad (4.39)$$

$$\frac{d\langle n_p \rangle_G}{dt} = (A - B)\langle n_p \rangle_G + 2B\langle n_p \rangle_Q + B \quad (4.40)$$

$$\frac{d\langle n_g \rangle_Q}{dt} = \bar{A}\langle n_g \rangle_G \quad (4.41)$$

$$\frac{d\langle n_p \rangle_Q}{dt} = \bar{A}\langle n_p \rangle_G \quad (4.42)$$

Los dos conjuntos de ecuaciones son equivalentes, como es sencillo probar, y conducen a las soluciones

$$\langle n_g \rangle_G = \frac{\lambda_+}{\Gamma} e^{\lambda_+ t} - \frac{\lambda_-}{\Gamma} e^{\lambda_- t} \quad (4.43)$$

$$\langle n_p \rangle_G = \frac{B}{\Gamma} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) \quad (4.44)$$

$$\langle n_g \rangle_Q = \frac{\bar{A}}{\Gamma} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) \quad (4.45)$$

$$\langle n_p \rangle_Q = \frac{B\bar{A}}{\Gamma\lambda_+} (e^{\lambda_+ t} - 1) + \frac{B\bar{A}}{\Gamma\lambda_-} (1 - e^{\lambda_- t}) \quad (4.46)$$

con $\Gamma = ((A - B)^2 + 8\bar{A}B)^{1/2}$ y $\lambda_{\pm} = ((A - B) \pm \Gamma)/2$. De estas expresiones es inmediato que $\langle n_g \rangle_Q / \langle n_p \rangle_G = \bar{A}/B = cte$. Nótese que $\lambda_- < 0$, por lo que

hay una combinación lineal de n_g y n_p asintóticamente nula, mientras la componente correspondiente a λ_+ crece exponencialmente. Esto sugiere que para cascadas de longitud muy larga ($t \gg 1/|\lambda_-|$) el proceso es esencialmente unidimensional. En las siguientes secciones se establece este resultado con mayor precisión.

En lo que sigue nos restringimos al caso $A > B > 0$, en el cual $\frac{d}{dt}\langle n_g \rangle > 0$ para todo t y $\langle n_{g,p} \rangle \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ en ambos casos G y Q . Como hemos mencionado, el caso $A > B$ es el más interesante físicamente ya que A corresponde al proceso de fisión de gluón, mientras que B es la “velocidad” de creación de pares que es finita cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

4.3.2 Momentos de orden superior.

Los momentos de orden superior para el caso de un partón inicial satisfacen ecuaciones de evolución que obtendremos a partir de las ecuaciones para las funciones generatrices \mathcal{G} y \mathcal{Q} . Las ecuaciones retrospectivas son equivalentes a las prospectivas. Consideraremos sólo \mathcal{Q} , ya que el caso de \mathcal{G} es análogo.

En las variables n_g, n_p , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t}(u_g, u_p; t) &= [A(u_g^2 - u_g) + B(u_p - u_g)] \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_g} \\ &\quad + 2\tilde{A}u_p(u_g - 1) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_p}(u_g, u_p; t) + \tilde{A}(u_g - 1)\mathcal{Q} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{k_g+k_p} \mathcal{Q}}{\partial u_g^{k_g} \partial u_p^{k_p}} \right|_{\substack{u_g=1 \\ u_p=1}} &= \langle n_g(n_g - 1) \cdots (n_g - k_g + 1) \times \\ &\quad \times n_p(n_p - 1) \cdots (n_p - k_p + 1) \rangle_Q \end{aligned} \quad (4.48)$$

Derivando ambos miembros resultan las ecuaciones para los momentos fac-

toriales

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial^{k_g+k_p} \dot{Q}}{\partial u_g^{k_g} \partial u_p^{k_p}} \right|_{\substack{u_g=1 \\ u_p=1}} &= \\
 k_g(A-B) \left. \frac{\partial^{k_g+k_p} Q}{\partial u_g^{k_g} \partial u_p^{k_p}} \right|_{\substack{u_g=1 \\ u_p=1}} &+ k_g 2\tilde{A} \left. \frac{\partial^{k_g+k_p} Q}{\partial u_g^{k_g-1} \partial u_p^{k_p+1}} \right|_{\substack{u_g=1 \\ u_p=1}} \\
 + k_p B \left. \frac{\partial^{k_g+k_p} Q}{\partial u_g^{k_g+1} \partial u_p^{k_p-1}} \right|_{\substack{u_g=1 \\ u_p=1}} &+ k_g(k_g-1)A \left. \frac{\partial^{k_g+k_p-1} Q}{\partial u_g^{k_g-1} \partial u_p^{k_p}} \right|_{\substack{u_g=1 \\ u_p=1}} \\
 + k_g \tilde{A} \left. \frac{\partial^{k_g+k_p-1} Q}{\partial u_g^{k_g-1} \partial u_p^{k_p}} \right|_{\substack{u_g=1 \\ u_p=1}} & \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

La ecuación homogénea está dada por una matriz que es fácilmente diagonalizable. Para $k_g + k_p = 2l$ fijo tenemos $(2l + 1)$ autovalores $\lambda_{l\sigma}$ de la forma

$$\lambda_{l\sigma} = l(A - B) + \sigma\Gamma \quad (4.50)$$

donde Γ fue definido en la sección anterior, σ varía de $-l$ a l en pasos enteros y l toma todos los valores enteros y semienteros positivos. Puesto que los términos inhomogéneos sólo acoplan cada orden l con los momentos de orden $l - 1/2$, las ecuaciones pueden resolverse iterativamente empezando por $l = 1/2$ (ecuaciones (4.43)–(4.46)), y son de la forma

$$\sum_{m=0}^l \sum_{\sigma=-m}^m c_{m\sigma} e^{\lambda_{m\sigma} t} \quad (4.51)$$

con m tomando todos los valores enteros y semienteros hasta l . Aunque no daremos una prueba inductiva de (4.50), mencionaremos que la matriz del sistema de ecuaciones (4.49), con un valor dado de $k_g + k_p$, puede generarse numéricamente y sus autovalores pueden calcularse con una rutina *standard* [69]. Los valores obtenidos de este modo coinciden con (4.50) con una precisión de 10^{-8} para los primeros cien valores de l .

La resolución analítica es laboriosa más allá del primer orden, por lo que no podemos dar la forma explícita de (4.51). Para “tiempos” t breves ($t \ll 1/\min |\lambda_{l\sigma}|$) es posible resolver las ecuaciones (4.49) numéricamente. Sin embargo, los autovalores $\lambda_{l\sigma}$ toman valores positivos y negativos con valores absolutos de distintos órdenes de magnitud, lo que resulta en componentes del vector de momentos que crecen o se amortiguan exponencialmente con distintos “tiempos” característicos. El sistema de ecuaciones es entonces rígido (“*stiff*”, ver [69]), lo que dificulta la resolución numérica para cascadas de longitud larga.

De la expresión (4.50) para los autovalores resulta que entre los $(2l+1)$ $\lambda_{l\sigma}$ hay l valores negativos, por lo que los momentos factoriales de orden l (4.48) tienen l componentes asintóticamente nulas. Esto indica que en el límite $t \rightarrow \infty$ no sólo hay una combinación lineal de n_g y n_p de valor medio nulo, sino que también decaen exponencialmente las fluctuaciones estadísticas (sección 4.5)

4.4 El caso $B = 0$.

Cuando se suprime el proceso elemental de creación de pares, que corresponde a fijar $B=0$, el problema es resoluble analíticamente. La aproximación $B = 0$ es físicamente significativa, ya que como vimos B es finito infrarrojo a diferencia de A y \bar{A} . Puesto que en este caso $n_p = 0$, la aproximación sólo puede ser válida para cascadas de longitud t suficientemente pequeñas como para que valga $\langle n_p \rangle \ll 1$. Sin embargo, el crecimiento exponencial de $\langle n_p \rangle$ con $(\lambda_+ t)$ muestra la imposibilidad de tomar el caso $B = 0$ como orden más bajo de un desarrollo perturbativo.

Las ecuaciones de ramificación pueden resolverse en el caso $B = 0$ con n_{g0} y n_{q0} gluones y quarks iniciales, respectivamente. Llamando \bar{n}_g el número de gluones producidos tenemos, con notación autoexplicativa, la

ecuación prospectiva

$$\begin{aligned} \frac{dP_{n_{g0}n_{q0}}^{\tilde{n}_g}}}{dt} = & -[A(\tilde{n}_g + n_{g0}) + \tilde{A}n_{q0}]P_{n_{g0}n_{q0}}^{\tilde{n}_g} + \tilde{A}n_{q0}P_{n_{g0}n_{q0}}^{\tilde{n}_g-1} \\ & + A(\tilde{n}_g + n_{g0} - 1)P_{n_{g0}n_{q0}}^{\tilde{n}_g-1} \end{aligned} \quad (4.52)$$

cuya solución es una distribución binomial negativa \tilde{n}_g (ver también [65,66], donde se dan soluciones usando otras variables)

$$P_{n_{g0}n_{q0}}^{\tilde{n}_g} = \binom{\tilde{n}_g + k - 1}{k - 1} \left[\frac{\langle \tilde{n}_g \rangle_{n_{g0}n_{q0}}}{\langle \tilde{n}_g \rangle_{n_{g0}n_{q0}} + k} \right]^{\tilde{n}_g} \left[\frac{k}{\langle \tilde{n}_g \rangle_{n_{g0}n_{q0}} + k} \right]^k \quad (4.53)$$

con

$$\langle \tilde{n}_g \rangle_{n_{g0}n_{q0}} = k(e^{At} - 1) \quad (4.54)$$

$$k = \frac{\tilde{A}}{A}n_{q0} + n_{g0} \quad (4.55)$$

La propiedad asintótica de los procesos estocásticos de ramificación análoga al *scaling* KNO fenomenológico [18] está dada por el límite de escala definido por

$$\lim_z = \lim \left(\begin{array}{l} t \rightarrow \infty \\ \tilde{n}_g \rightarrow \infty \\ \frac{\tilde{n}_g}{\langle \tilde{n}_g \rangle_{n_{g0}n_{q0}}} \rightarrow z \end{array} \right) \quad (4.56)$$

Como es conocido [34], la distribución binomial negativa tiende a una distribución gama en el límite de escala

$$\lim_z \langle \tilde{n}_g \rangle_{n_{g0}n_{q0}} P_{n_{g0}n_{q0}}^{\tilde{n}_g} = \frac{k^k}{\Gamma(k)} z^{k-1} e^{-kz} \quad (4.57)$$

Este resultado establece las propiedades asintóticas de la ramificación con $B = 0$.

4.5 Propiedades asintóticas ($B > 0$).

En esta sección estudiaremos las propiedades asintóticas del proceso de ramificación definido en las secciones anteriores en el caso general $B \neq 0$, aunque con la restricción $A > B > 0$ que asegura que el valor medio del número de gluones es siempre creciente (sección 4.3.1). Cuando la longitud de la cascada es grande, las distribuciones de multiplicidad convergen a una distribución límite que es la función de escala KNO del proceso. Así, la propiedad de escala KNO que fue introducida en el capítulo 2 de manera operacional resulta equivalente a la convergencia en distribución en el contexto de los procesos estocásticos. Como veremos, el proceso bidimensional original, que involucra quarks y gluones, se contrae en el límite de escala a un problema unidimensional. Esto se manifiesta en el carácter singular de la distribución asintótica.

Las propiedades asintóticas que describiremos [70] tienen interés ya que no pueden ser obtenidas por métodos numéricos además de que contradicen explícitamente resultados anteriores [65].

4.5.1 Ecuaciones prospectivas.

La generalización natural a dos dimensiones del límite de escala (4.56) es

$$\lim_{z_g, z_p} \langle n_g \rangle_G \langle n_p \rangle_G G_{n_g, n_p}(t) = \gamma_G(z_g, z_p) \quad (4.58)$$

con

$$\lim_{z_g, z_p} \equiv \lim(t \rightarrow \infty, n_g \rightarrow \infty, n_p \rightarrow \infty, \frac{n_g}{\langle n_g \rangle_G} \rightarrow z_g, \frac{n_p}{\langle n_p \rangle_G} \rightarrow z_p)$$

Este límite es el análogo del *scaling* KNO [18,65] en el contexto de los procesos de ramificación, con $\gamma_G(z_g, z_p)$ como función de escala. Hemos considerado la distribución G_{n_g, n_p} correspondiente al *jet* de gluón para fijar ideas, el caso de Q_{n_g, n_p} es similar.

Queremos saber si la ecuación límite (4.58) es consistente con la caracterización del proceso que hemos dado, en particular las ecuaciones de evolución, y si es posible determinar γ_G . Comenzaremos con la ecuación prospectiva (4.31) y luego pasaremos a la retrospectiva. El punto de partida será el *Ansatz*

$$G_{n_g, n_p}(t) = \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_G(x_g, x_p) \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_G) \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_G) \quad (4.59)$$

donde los valores medios del miembro derecho están dados por (4.43) y (4.44) y la distribución de Poisson $\mathcal{P}_n(x)$ se define en el Apéndice A. La ecuación límite (A2), demostrada en el Apéndice B, muestra que (4.59) implica el límite (4.58). De hecho, la única información adicional que contiene la primera respecto de la última es la forma particular de los valores medios involucrados, que determina la manera en que se produce la aproximación al límite.

La ecuación (4.59) expresa la distribución G_{n_g, n_p} como transformada de Poisson bidimensional de γ_G . En el caso $B = 0$ una expresión de este tipo es válida para todo t , ya que la DBN (4.53) es la transformada de Poisson de la distribución gama (4.57). Cuando $B > 0$, (4.59) no se satisface para t finito, pero constituye la hipótesis más simple para el comportamiento asintótico. El procedimiento que aplicaremos consistirá en sustituir el *Ansatz* (4.59) en la ecuación prospectiva (4.31) y tomar el límite de escala con ayuda de (4.58).

Derivando ambos lados de (4.59) con respecto a t y aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dG_{n_g, n_p}}{dt} = & \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_G(x_g, x_p) \left[\frac{d\langle n_g \rangle_G}{dt} \frac{\partial}{\partial \langle n_g \rangle_G} \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_G) \times \right. \\ & \left. \times \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_G) + \frac{d\langle n_p \rangle_G}{dt} \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_G) \frac{\partial}{\partial \langle n_p \rangle_G} \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_G) \right] \quad (4.60) \end{aligned}$$

Usamos ahora la ecuación (A7) para cambiar las derivadas con respecto a $\langle n \rangle$ por derivadas con respecto a x , integramos por partes, notando que los términos de superficie son nulos para $n_g, n_p > 0$ y reemplazamos las derivadas de $\langle n_g \rangle_G, \langle n_p \rangle_G$ por los miembros derechos de las ecuaciones (4.37), (4.38). Todo esto finalmente conduce a

$$\begin{aligned} \frac{dG_{n_g, n_p}}{dt} = & \iint_0^\infty dx_g dx_p \left[- \left(A - B + 2\tilde{A} \frac{\langle n_p \rangle_G}{\langle n_g \rangle_G} \right) \left(x_g \frac{\partial \gamma_G}{\partial x_g} + \gamma_G \right) \right. \\ & \left. - B \left(\frac{\langle n_g \rangle_G}{\langle n_p \rangle_G} \right) \left(x_p \frac{\partial \gamma_G}{\partial x_p} + \gamma_G \right) \right] \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_G) \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_G) \end{aligned} \quad (4.61)$$

De (4.43),(4.44) tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle n_g \rangle_G}{\langle n_p \rangle_G} = \frac{\lambda_+}{B} \quad (4.62)$$

de donde,

$$\lim_{z_g, z_p} \langle n_g \rangle_G \langle n_p \rangle_G \frac{dG_{n_g, n_p}}{dt} = -\lambda_+ \left(z_g \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_g} + z_p \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_p} + 2\gamma_G \right) \quad (4.63)$$

Hay que señalar que la hipótesis de independencia de γ_G respecto a t no es necesaria, sólo necesitamos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\gamma_G}{dt}(z_g, z_p, t) = 0$ para llegar a (4.63).

Del miembro derecho de la ecuación prospectiva (4.31) tenemos, omitiendo los argumentos de las funciones

$$\begin{aligned} \frac{dG_{n_g, n_p}}{dt} = & \iint_0^\infty dx_g dx_p \left\{ - \left[(A + B)n_g + 2\tilde{A}n_p \right] \gamma_G \mathcal{P}_{n_g} \mathcal{P}_{n_p} + A(n_g - 1)\gamma_G \times \right. \\ & \left. \times \mathcal{P}_{n_g-1} \mathcal{P}_{n_p} + 2\tilde{A}n_p \gamma_G \mathcal{P}_{n_g-1} \mathcal{P}_{n_p} + B(n_g + 1)\mathcal{P}_{n_g+1} \mathcal{P}_{n_p-1} \right\} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Usando las ecuaciones (A5) y (A3) para sustituir los términos con \mathcal{P}_{n-1} por términos de la forma \mathcal{P}_n y $\partial \mathcal{P}_n / \partial x$, y (A6) para eliminar los términos \mathcal{P}_{n+1} ,

e integrando por partes, llegamos finalmente a

$$\begin{aligned} \frac{dG_{n_g, n_p}}{dt} = & \iint_0^\infty dx_g dx_p \left\{ -(A - B)\gamma_G + \left[Bx_g - 2\tilde{A} \frac{n_p}{\langle n_p \rangle_G} \frac{\langle n_p \rangle_G}{\langle n_g \rangle_G} - A \frac{n_g - 1}{\langle n_g \rangle_G} \right] \frac{\partial \gamma_G}{\partial x_g} \right. \\ & \left. - Bx_g \frac{\langle n_g \rangle_G}{\langle n_p \rangle_G} \frac{\partial \gamma_G}{\partial x_p} \right\} \mathcal{P}_{n_g} \mathcal{P}_{n_p} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Tomando límite de escala,

$$\begin{aligned} \lim_{z_g, z_p} \langle n_g \rangle_G \langle n_p \rangle_G \frac{d\tilde{G}_{n_g, n_p}}{dt} = & -(A - B)\gamma_G + \left[Bz_g - \frac{2\tilde{A}B}{\lambda_+} z_p - Az_g \right] \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_g} - \lambda_+ z_g \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_p} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Debemos igualar (4.63) y (4.66), lo que conduce a la siguiente ecuación para γ_G

$$[2\lambda_+ - (A - B)]\gamma_G + (\lambda_+ - (A - B))(z_g - z_p) \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_g} - \lambda_+(z_g - z_p) \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_p} = 0 \quad (4.67)$$

donde usamos que $A - B + 2\tilde{A}B/\lambda_+ = \lambda_+$. La solución general de esta ecuación es de la forma

$$\gamma_G(z_g, z_p) = \left(\frac{C_1}{|z_g - z_p|} + C_2 \delta(z_g - z_p) \right) f \left(z_g + \frac{\lambda_+ - A + B}{\lambda_+} z_p \right)$$

con C_1, C_2 constantes de integración y f una función arbitraria. Puesto que γ_G debe ser normalizable en $[0, \infty] \times [0, \infty]$ debemos tener $C_1 = 0$, de donde resulta

$$\gamma_G(z_g, z_p) = \delta(z_g - z_p) \psi_G(z_g) \quad (4.68)$$

Con esta expresión para γ_G , el *Ansatz* (4.59) toma la forma más simple

$$G_{n_g, n_p} = \int_0^\infty dx \psi_G(x) \mathcal{P}_{n_g}(x \langle n_g \rangle_G) \mathcal{P}_{n_p}(x \langle n_p \rangle_G) \quad (4.69)$$

Si sustituimos (4.69) en la ecuación prospectiva (4.31) llegamos a una identidad en el límite de escala.

Resultados similares valen para la probabilidad de transición correspondiente al *jet* de quark.

$$Q_{n_g, n_p} = \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_Q(x_g, x_p) \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_Q) \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_Q) \quad (4.70)$$

$$\gamma_Q(x_g, x_p) = \delta(x_g - x_p) \psi_Q(x_g) \quad (4.71)$$

Las ecuaciones (4.68) y (4.71) muestran, como habíamos anunciado, que asintóticamente sólo hay una variable independiente. Podemos interpretar el límite de escala como un límite termodinámico que describe la “materia partónica” originada en la ramificación de un partón inicial. Esta situación es una idealización del plasma frío de quarks y gluones de Van Hove [71]. Las variables “macroscópicas” z_g, z_p son idénticas con probabilidad 1, de acuerdo a (4.68) y (4.71), lo que conduce en términos de las variables “microscópicas” n_g, n_p a

$$\frac{n_g}{n_p} = \frac{\lambda_+}{B}$$

Esta es la composición relativa del “plasma” ideal. Las distribuciones ψ_G, ψ_Q contienen la información estadística de las fluctuaciones de las variables z_g, z_p alrededor de su valor medio 1.

4.5.2 Ecuaciones retrospectivas.

Las funciones de escala ψ_G, ψ_Q quedan completamente determinadas requiriendo que se satisfagan asintóticamente las ecuaciones retrospectivas. Esto puede hacerse reemplazando (4.69) y (4.70),(4.71) en las ecuaciones retrospectivas (4.32) y (4.35) y tomando luego límite de escala. En lugar de eso, usaremos los *Ansätze* (4.59) y (4.70) completos y sólo al final aplicaremos (4.68),(4.71) para obtener las ecuaciones para ψ_G, ψ_Q . Ambos procedimientos son, por supuesto, equivalentes y conducen a los mismos resultados.

Consideraremos la ecuación retrospectiva (4.35) para el *jet* de quark. La derivada respecto a t de Q_{n_g, n_p} la obtenemos procediendo como antes,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{n_g, n_p}}{dt} = & \\ & - \iint_0^\infty dx_g dx_p \left[\bar{A} \frac{\langle n_g \rangle_G}{\langle n_g \rangle_Q} \left(x_g \frac{\partial \gamma_Q}{\partial x_g} + \gamma_Q \right) \right. \\ & \left. + \bar{A} \frac{\langle n_p \rangle_G}{\langle n_p \rangle_Q} \left(x_p \frac{\partial \gamma_Q}{\partial x_p} + \gamma_Q \right) \right] \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_Q) \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_Q) \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\lim_{z_g, z_p} \langle n_g \rangle_Q \langle n_p \rangle_Q \frac{dQ_{n_g, n_p}}{dt} = -\lambda_{+z_g} \frac{\partial \gamma_Q}{\partial z_g} - \lambda_{+z_p} \frac{\partial \gamma_Q}{\partial z_p} - 2\lambda_{+} \gamma_Q \quad (4.73)$$

Sustituimos ahora G, Q por (4.59), (4.70) en el miembro derecho de la ecuación retrospectiva (4.35)

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{n_g, n_p}}{dt} = & \\ & - \bar{A} \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_Q \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_Q) \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_Q) \\ & + \bar{A} \iint_0^\infty dx_g dx_p \iint_0^\infty dx'_g dx'_p \gamma_G(x_g, x_p) \gamma_Q(x'_g, x'_p) \times \\ & \times \mathcal{P}_{n_g}(x_g \langle n_g \rangle_G + x'_g \langle n_g \rangle_Q) \mathcal{P}_{n_p}(x_p \langle n_p \rangle_G + x'_p \langle n_p \rangle_Q) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Sacando $\langle n_g \rangle_Q$ y $\langle n_p \rangle_Q$ como factor común en los argumentos de las dos últimas distribuciones de Poisson, podemos pasar al límite

$$\begin{aligned} \lim_{z_g, z_p} \langle n_g \rangle_Q \langle n_p \rangle_Q Q_{n_g, n_p} = & -\bar{A} \gamma_Q(z_g, z_p) \\ & + \bar{A} \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_G(x_g, x_p) \gamma_Q \left(z_g - \frac{\lambda_{+}}{\bar{A}} x_g, z_p - \frac{\lambda_{+}}{\bar{A}} x_p \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Igualando ahora (4.73) y (4.75) llegamos entonces a la ecuación

$$\begin{aligned} (2\lambda_{+} - \bar{A}) \gamma_Q(z_g, z_p) + \lambda_{+z_g} \frac{\partial \gamma_Q}{\partial z_g} + \lambda_{+z_p} \frac{\partial \gamma_Q}{\partial z_p} + \\ + \bar{A} \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_G(x_g, x_p) \gamma_Q \left(z_g - \frac{\lambda_{+}}{\bar{A}} x_g, z_p - \frac{\lambda_{+}}{\bar{A}} x_p \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

De la ecuación para gluón (4.32) obtenemos, análogamente

$$\begin{aligned} & (2\lambda_+ - A - B)\gamma_G(z_g, z_p) + \lambda_+ z_g \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_g} + \lambda_+ z_p \frac{\partial \gamma_G}{\partial z_p} + \\ & + A \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_G(x_g, x_p) \gamma_G(z_g - x_g, z_p - x_p) + \\ & + \frac{B\lambda_+^2}{A^2} \iint_0^\infty dx_g dx_p \gamma_Q(x_g, x_p) \gamma_Q\left(\frac{\lambda_+}{A} z_g - x_g, \frac{\lambda_+}{A} z_p - x_p\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Aplicando las soluciones prospectivas (4.68), (4.71), resultan ecuaciones para ψ_G, ψ_Q

$$z\psi'_Q(z) + (1 - \bar{a})\psi_Q(z) + \bar{a} \int_0^\infty dx \psi_G(x)\psi_Q\left(z - \frac{x}{\bar{a}}\right) = 0 \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} z\psi'_G(z) + (1 - a - b)\psi_G(z) + a \int_0^\infty dx \psi_G(x)\psi_G(z - x) + \\ + \frac{b}{\bar{a}} \int_0^\infty dx \psi_Q(x)\psi_Q\left(\frac{z}{\bar{a}} - x\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

donde las “velocidades” de transición reducidas a, b, \bar{a} se definen como $\frac{A}{\lambda_+}, \frac{B}{\lambda_+}, \frac{\bar{A}}{\lambda_+}$, respectivamente, y la prima denota derivada respecto al argumento. Estas ecuaciones, junto con las condiciones de normalización

$$\int_0^\infty dx \psi_i(x) = 1 = \int_0^\infty dx x\psi_i(x) \quad (4.80)$$

$i = G, Q$, determinan las funciones de escala ψ_i .

4.5.3 C-momentos.

Las distribuciones ψ_G, ψ_Q describen las propiedades estadísticas del sistema en el límite de escala. Las ecuaciones (4.78) y (4.79) que las determinan no son fácilmente resolubles analítica o numéricamente, por lo que es conveniente pasar a las transformadas de Laplace respectivas $\bar{\psi}_G, \bar{\psi}_Q$ de ψ_G, ψ_Q . Las ecuaciones transformadas son más manejables y nos permitirán encontrar relaciones de recurrencia para los momentos. Llamando p a la variable

conjugada de z , de (4.78),(4.79) tenemos

$$p\tilde{\psi}'_Q(p) = -\bar{a}\tilde{\psi}_Q(p) + \bar{a}\tilde{\psi}_G\left(\frac{p}{\bar{a}}\right)\tilde{\psi}_Q(p) \quad (4.81)$$

$$p\tilde{\psi}'_G(p) = -(a+b)\tilde{\psi}_G(p) + a\tilde{\psi}_G^2(p) + b\tilde{\psi}_Q^2(\bar{a}p) \quad (4.82)$$

con las condiciones de normalización (4.80) expresadas en la forma

$$\tilde{\psi}_i(0) = 1 = -\tilde{\psi}'_i(0) \quad (4.83)$$

$i = G, Q$. En el miembro derecho de (4.81),(4.82) reconocemos las funciones generatrices infinitesimales del proceso de ramificación (4.14), (4.15).

Definimos los momentos de la función ψ_G como

$$C_n^G \equiv \int_0^\infty dx x^n \psi_G(x) = (-1)^n \tilde{\psi}_G^{(n)}(0) \quad (4.84)$$

y análogamente para ψ_Q . Llamando $f_{k_g k_p}$ a los momentos factoriales de la forma (4.48), del *Ansatz* reducido (4.69) resulta la igualdad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{k_g k_p}}{\langle n_g \rangle^{k_g} \langle n_p \rangle^{k_p}} = C_{k_g + k_p} \quad (4.85)$$

en cada caso G y Q .

En términos de los C las condiciones de normalización (4.80) se escriben

$$C_0^{G,Q} = 1 = C_1^{G,Q} \quad (4.86)$$

La derivada n -ésima de (4.81),(4.82) conduce entonces a las siguientes relaciones de recurrencia para $n > 1$

$$nC_n^Q - \bar{a}^{1-n}C_n^G = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \bar{a}^{1-k} C_k^G C_{n-k}^Q \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} (n+b-a)C_n^G - 2b\bar{a}^n C_n^Q &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} C_k^G C_{n-k}^G \\ &+ b\bar{a}^n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} C_k^Q C_{n-k}^Q \end{aligned} \quad (4.88)$$

Relaciones de recurrencia similares, aunque no iguales para el *jet* de gluón, resultan en el contexto de la aproximación de logaritmo doble en QCD perturbativa, con $b = 0$ [72].

4.6 Discusión.

Hemos mostrado que la hipótesis de *scaling* KNO es consistente con las ecuaciones de ramificación (4.31)–(4.35) y que el requerimiento de consistencia determina completamente las distribuciones asintóticas. Nuestros resultados están de acuerdo con los teoremas generales sobre procesos de ramificación markovianos homogéneos hipercríticos, en particular las ecs. (4.68),(4.71) [68]. De hecho, se sabe que la convergencia de $n_g(t)/\langle n_g \rangle$, $n_p(t)/\langle n_p \rangle$ es “casi segura” (*a.s.*) [67,68], lo que implica la convergencia en distribución que hemos demostrado y que equivale al *scaling* KNO.

Las ecuaciones (4.81),(4.82) para las funciones $\bar{\psi}_G, \bar{\psi}_Q$ son formalmente idénticas a las (4.27), (4.28) para \mathcal{G}, \mathcal{Q} . Esto permite concluir que las distribuciones asintóticas bastan para determinar el proceso a t finito.

La aplicación de este modelo a la fenomenología ha sido discutida en varios trabajos [37,41,43,62,65,66]. Cuando se considera la aproximación $B = 0$, se tiene una DBN, que puede ajustar los datos experimentales, con las limitaciones mencionadas en los capítulos anteriores. No es posible, sin embargo, justificar la forma aproximadamente binomial negativa de las distribuciones observadas a partir de este modelo, ya que de las ecuaciones (4.5), (4.54) y (4.55) resulta que la multiplicidad media del modelo crece como $\log s$ y el parámetro k es constante. Similares consideraciones valen en cuanto a otros ajustes propuestos sobre bases similares [66]. Si se desea utilizar un modelo de este tipo para explicar las observaciones experimentales es imprescindible, en nuestra opinión, que reproduzca la evolución con s de por lo menos los dos primeros momentos en un rango de energías

razonablemente amplio.

En el caso $B > 0$ no se conocen soluciones analíticas, como hemos mencionado. Es necesario determinar además qué distribución se va a comparar con los datos experimentales ya que tenemos dos variables de multiplicidad. Un posible enfoque es adoptar un modelo *ad hoc* de hadronización que transforme las multiplicidades partónicas en hadrónicas [20,41]. Otro punto de vista es tomar $A, \bar{A}, B > 0$ y considerar cascadas de longitud $t < 1/B$, de modo que podamos desprestigiar el número de pares n_p . La simulación numérica sugiere que la distribución marginal de n_g está próxima a una DBN en el sentido del *test* χ^2 y que el parámetro k de la DBN que mejor ajusta decrece con t , en analogía cualitativa con la evolución de los datos. Alternativamente, podemos ajustar los datos con las distribuciones asintóticas ψ_G, ψ_Q que dependen de una sola variable. Con cualquiera de estos métodos es necesario considerar los parámetros básicos A, \bar{A}, B como libres (u otro juego de parámetros, p.ej., t_0, n_{g0}, n_{q0} [41]) ya que la evolución con s que predice el modelo es insuficiente para describir las observaciones.

Apéndice A.

En este apéndice reunimos las igualdades matemáticas relacionadas con la distribución de Poisson que usamos en este capítulo.

Denotamos $\mathcal{P}_n(x)$ la distribución de Poisson

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{e^{-x} x^n}{n!} \quad (\text{A1})$$

En el apéndice siguiente se muestra que satisface la ecuación límite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty \\ n/\mu \rightarrow z}} \mu \mathcal{P}_n(x\mu) &= \delta(z - x) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

De la definición (A1) es inmediato que se cumplen las siguientes relaciones, donde la prima indica derivada respecto al argumento

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}_n(x\mu) = \mu \mathcal{P}'_n(x\mu) \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mathcal{P}_n(x\mu) = x \mathcal{P}'_n(x\mu) \quad (\text{A4})$$

$$\mathcal{P}'_n(x) = \mathcal{P}_{n-1}(x) - \mathcal{P}_n(x) \quad (\text{A5})$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}_n(x\mu) = n \mathcal{P}_n(x\mu) - (n+1) \mathcal{P}_{n+1}(x\mu) \quad (\text{A6})$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \mathcal{P}_n(x\mu) = x \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}_n(x\mu) \quad (\text{A7})$$

Apéndice B.

En este apéndice damos una demostración de la relación (A2) para la distribución de Poisson,

$$\lim_z \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \delta(x - z)$$

donde

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{e^{-x} x^n}{n!}$$

$$\lim_z = \lim(\mu \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \frac{n}{\mu} \rightarrow z)$$

Para esto necesitaremos algunos resultados previos.

Lema 1 Sea $p > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{n!} p^n = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1/e \\ \infty & \text{si } p \geq 1/e \end{cases}$$

Demostración. Resulta de aplicar la aproximación de Stirling [73] para el factorial ■

Para el límite puntual de $\mathcal{P}_n(x)$ tenemos

Lema 2

$$\lim_z \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq z \\ \infty & \text{si } x = z \end{cases}$$

Demostración. La función

$$\mathcal{P}_1(x) = e^{-x} x : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

tiene un máximo en $x = 1$, $\mathcal{P}_1(1) = 1/e$, es estrictamente creciente para $x \in (0, 1)$ y estrictamente decreciente para $x \in (1, \infty)$. Entonces, usando que

$$\lim_z \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{n!} \left[\mathcal{P}_1\left(\frac{x}{z}\right) \right]^n$$

y aplicando el Lema 1 resulta el enunciado ■

Nos interesa estudiar el límite de integrales de $\mathcal{P}_n(x)$. Para esto distinguimos el caso de intervalos finitos e infinitos.

Lema 3 Sea (a, b) un intervalo finito tal que $z \notin (a, b)$. Entonces

$$\lim_z \int_a^b dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = 0$$

Demostración. Puesto que $\mu = n/z$, tenemos

$$\int_a^b dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \int_{a/z}^{b/z} dy [\mathcal{P}_1(y)]^n \frac{n^{n+1}}{n!}$$

Si $b/z < 1$, entonces el máximo de $[\mathcal{P}_1(y)]^n$ en $(a/z, b/z)$ es $(e^{-b/z} b/z)^n < 1/e$, luego, aplicando el Lema 1

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_z \int_a^b dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) &= \lim_z \int_{a/z}^{b/z} dy [\mathcal{P}_1(y)]^n \frac{n^{n+1}}{n!} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{n!} \cdot \left(e^{-b/z} \frac{b}{z} \right)^n \left(\frac{b}{z} - \frac{a}{z} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si $1 < a/z$ resulta el enunciado de modo análogo ■

Lema 4 Sea $X > z$, entonces

$$\lim_z \int_X^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = 0$$

Demostración. La demostración resulta como antes de considerar

$$\lim_z \int_X^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{X/z}^\infty dy [e^{-y} y]^n$$

y notar que para $n > 1$, $X/z > 1$ e $y \geq X/z$ resulta

$$(e^{-y} y)^{n-1} \leq \left(e^{-X/z} \frac{X}{z} \right)^{n-1}$$

de donde

$$(e^{-y} y)^n \leq \left(e^{-X/z} \frac{X}{z} \right)^n \frac{e^{-y} y}{e^{-X/z} \frac{X}{z}}$$

Entonces

$$0 \leq \lim_z \int_X^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{n!} \left[e^{-X/z} \frac{X}{z} \right]^n \left(1 + \frac{X}{z} \right) = 0$$

por el Lema 1 ■

Lema 5 Sean a, b cualesquiera tal que $0 \leq a < b \leq \infty$, entonces

$$\lim_z \int_a^b dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin (a, b) \\ 1 & \text{si } z \in (a, b) \end{cases}$$

Demostración. Puesto que

$$\int_0^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = 1 \quad \forall n, \mu$$

vale

$$\lim_z \int_0^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = 1$$

Por los Lemas anteriores sabemos que el límite de escala es nulo para cualquier intervalo finito o infinito que no contenga a z , de donde resulta el enunciado ■

Finalmente, el resultado deseado es

Lema 6

$$\lim_z \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \delta(x - z)$$

Demostración. Tenemos que ver que si $\gamma(x)$ es buena [73], entonces

$$\lim_z \int_0^\infty dx \gamma(x) \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \gamma(z)$$

Por el Lema 5

$$\int_0^\infty dx \gamma(x) \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \int_0^\infty dx (\gamma(x) - \gamma(z)) \mu \mathcal{P}_n(\mu x) + \gamma(z)$$

y entonces basta ver que dado $\epsilon > 0 \exists n > 1$ tal que

$$\left| \int_0^\infty dx (\gamma(x) - \gamma(z)) \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \right| < \epsilon$$

Sea $\delta > 0$ tal que $|\gamma(x) - \gamma(z)| < \epsilon/3 \forall x \in (z - \delta, z + \delta)$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty dx (\gamma(x) - \gamma(z)) \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \right| &\leq \int_0^\infty dx |\gamma(x) - \gamma(z)| \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \\ &= \int_0^{z-\delta} dx |\gamma(x) - \gamma(z)| \mu \mathcal{P}_n(\mu x) + \int_{z-\delta}^{z+\delta} dx |\gamma(x) - \gamma(z)| \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \\ &\quad + \int_{z+\delta}^\infty dx |\gamma(x) - \gamma(z)| \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \\ &\leq B \int_0^{z-\delta} dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) + \frac{\epsilon}{3} + B' \int_{z+\delta}^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \end{aligned}$$

Para acotar la primera y tercera integral usamos que $\gamma(x)$ es acotada por hipótesis, y para la segunda usamos la elección de δ

$$\begin{aligned} \int_{z-\delta}^{z+\delta} dx |\gamma(x) - \gamma(z)| \mu \mathcal{P}_n(\mu x) &\leq \frac{\epsilon}{3} \int_{z-\delta}^{z+\delta} dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} \int_0^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) = \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Usando el Lema 5, podemos elegir n suficientemente grande como para que

$$\begin{aligned} B \int_0^{z-\delta} dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) &< \frac{\epsilon}{3} \\ B' \int_{z+\delta}^\infty dx \mu \mathcal{P}_n(\mu x) &< \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

y entonces

$$\left| \int_0^\infty dx (\gamma(x) - \gamma(z)) \mu \mathcal{P}_n(\mu x) \right| < \epsilon$$

de donde resulta el Lema ■

Capítulo 5

Comentarios finales y perspectivas.

En los capítulos anteriores analizamos dos aspectos diferentes de la fenomenología de las distribuciones de multiplicidad de hadrones cargados en reacciones de producción múltiple de partículas. El capítulo 3 lo dedicamos al estudio de datos experimentales muy recientes de colisiones $p\bar{p}$, medidos por la colaboración E735 en el TeVatrón de Fermilab. En el capítulo 4 estudiamos un modelo analítico de ramificación desde un punto de vista predominantemente matemático. Ciertamente, el contenido de este trabajo no agota el tema estudiado. Existen otros enfoques teóricos posibles que no hemos analizado, entre los que podemos incluir los modelos de simulación numérica y los estudios sobre intermitencia. Sólo hemos mencionado los aspectos experimentales indispensables para la comprensión de los datos. Pese a estas omisiones, inevitables si se desea algún grado de detalle en la presentación, creemos que los temas tratados alcanzan para transmitir una imagen razonablemente fiel del estado actual de esta área de la fenomenología. Para concluir, haremos un breve resumen de los resultados presentados en los capítulos previos y describiremos las orientaciones

posibles del trabajo futuro.

Los datos de la colaboración E735 tienen gran interés ya que abarcan cuatro energías en un rango amplio que extiende el de las mediciones anteriores. Las características más notables de las distribuciones observadas son esencialmente cualitativas: la forma de las mismas y su evolución con la energía son distintas de las que se observan en el rango de ISR. Respecto de la forma de las distribuciones, las parametrizaciones estudiadas muestran claramente diferencias con las correspondientes a bajas energías, que pueden representarse por la DBN. Los datos muestran la estructura característica de los de UA5 a 900 GeV. Existen, sin embargo, diferencias con estos últimos. El ajuste con la DBN a los datos correspondientes a $\sqrt{s} = 300$ GeV es inaceptable, como se muestra en el capítulo 3, a diferencia de lo que ocurre con la distribución de UA5 a 200 GeV y con distintos valores de η_c . Si bien la DBN no produce ajustes aceptables a la distribución de UA5 a 900 GeV, los C -momentos que se obtienen a partir de los parámetros de los mejores ajustes coinciden con excelente aproximación con los experimentales, lo que permite concluir que la DBN describe los datos "globalmente". Esto no ocurre en el caso de E735, con valores para C_2 , C_3 y C_4 que caen por debajo de los experimentales aún teniendo en cuenta los errores, que son algo mayores en nuestro caso que los de UA5. En síntesis, la estructura de *shoulder* aparece más marcadamente y para energías más bajas en los datos aquí analizados. Creemos que este efecto está relacionado con el método de mínima entropía aplicado por UA5 para obtener la distribución corregida, que selecciona la población más suave posible estadísticamente consistente con la muestra, lo que tiende a atenuar las estructuras observadas.

Respecto de la evolución con la energía, los datos de E735 permiten caracterizarla de manera más completa en el rango abarcado. Como hemos señalado, las distribuciones cambian con \sqrt{s} esencialmente en la cola de altas multiplicidades mientras la moda permanece fija, a diferencia del régimen de *scaling* observado por debajo de 60 GeV. La violación del *scaling*

temprano se manifiesta en el crecimiento sistemático de los C -momentos, debido a que las altas multiplicidades son más probables en relación a las bajas cuanto mayor es \sqrt{s} . También crecen con \sqrt{s} las dispersiones y cumulantes, que son sensibles al ancho de la distribución. La relación lineal entre las dispersiones y el valor medio, que cuantifica el ensanchamiento con la energía, es similar a las relaciones de Wróblewski válidas a bajas energías. Como hemos visto, estas relaciones no son derivables del *scaling* KNO-G ya que $|b_k/ak| > 1$.

Cabe señalar que no existen, en nuestro conocimiento, datos experimentales correspondiente al rango de energías intermedio entre ISR y TeVatrón, en el que aparecen las diferencias señaladas. Otros experimentos muestran que el impulso transversal promedio $\langle p_T \rangle$ es aproximadamente constante por debajo de $\sqrt{s} = 100$ GeV y crece con \sqrt{s} por encima de ese valor. Para \sqrt{s} fijo, $\langle p_T \rangle$ crece con $\langle n_{ch} \rangle$ [74]. También se observa el crecimiento de la sección eficaz de eventos con *minijets* [3]. Todo esto sugiere que la producción de *minijets* a partir de valores de \sqrt{s} alrededor de 100 GeV es la causa de las características de los datos que resumimos más arriba. Apoya esta hipótesis el análisis de la colaboración DELPHI de eventos inelásticos e^+e^- a $\sqrt{s} = 91$ GeV, que muestra que un comportamiento cualitativamente similar al de las distribuciones de multiplicidad en colisiones $p\bar{p}$ pueden explicarse completamente por la superposición de eventos con distinto número de *jets* [33]. Desde el punto de vista teórico, un modelo de Monte-Carlo reciente [44] que incorpora la producción de *minijets* a la descripción de las colisiones $p\bar{p}$, reproduce las distribuciones de multiplicidad en todo el rango de energías entre 5 y 1800 GeV, así como las correlaciones entre $\langle p_T \rangle$ y $\langle n_{ch} \rangle$ y otras características generales de la fenomenología. Las distribuciones de multiplicidad resultan ser, en este modelo, una suma de componentes correspondientes a eventos con 0, 1, 2, ... *minijets*, similar a la DBND discutida en el capítulo 3. La comprobación experimental de esta hipótesis sería así un paso decisivo en la comprensión de este sector de la fenomenología

hadrónica.

El crecimiento de la sección eficaz de eventos con *minijets* con \sqrt{s} se debe a que para p_T fijo, la densidad de partones con $x = p_T/\sqrt{s}$ en el nucleón es mayor cuanto menor sea x [74]. Si las violaciones al *scaling* KNO temprano se deben a este tipo de eventos, entonces el crecimiento de los C -momentos (y de las dispersiones D_k , etc.) estaría directamente relacionado con las funciones de estructura del nucleón, de manera análoga a lo que ocurre con la violación del *scaling* de Bjorken en la dispersión inelástica profunda. La explicación de los datos experimentales en términos de la estructura del nucleón y de procesos elementales partónicos está implícita en los modelos de Monte-Carlo, aunque se ve oscurecida por las interacciones complejas entre los nucleones iniciales. El tratamiento explícito de este problema se vería facilitado, en parte, por la separación de las distribuciones observadas en componentes con propiedades más simples (*scaling* aproximado, forma binomial, etc.) análogamente a lo que se observa en la aniquilación e^+e^- .

El modelo de ramificación estudiado en el capítulo 4 es una versión simplificada de la evolución perturbativa de los partones producidos en un proceso duro. Su relativa sencillez permite caracterizar sus propiedades asintóticas, aunque la resolución analítica completa resulta muy difícil. La propiedad de escala KNO, en la forma de convergencia en distribución, es válida con una función de escala singular que conduce a la igualdad de las variables de escala con probabilidad 1. Esta propiedad tiene una validez más general que la que se desprende de nuestro tratamiento.

El modelo no predice correctamente la evolución de las distribuciones con la energía, lo que no es sorprendente en vista de las aproximaciones realizadas y teniendo en cuenta que se ha ignorado el proceso de hadronización. En particular, el valor medio de la multiplicidad crece logarítmicamente con la energía, más lentamente que los datos experimentales de procesos e^+e^- , $p\bar{p}$, μp , etc. Una extensión posible del modelo consiste en usar una masa como regularización infrarroja en (4.2) y (4.3) con los límites z_{\min} y z_{\max}

que resultan de la cinemática. En este caso, las probabilidades elementales de transición resultan dependientes de t , lo que puede dar un carácter más realista al modelo. El uso de distintas masas permite la introducción de distintos tipos de quarks que pueden identificarse con el número cuántico de sabor. Sin embargo, este tipo de complicaciones del modelo nos aleja de la intención original que es el tratamiento analítico.

La perspectiva más interesante es la inclusión de una variable dinámica, p.ej. la rapidez y , en las ecuaciones de ramificación de partones. Las propiedades asintóticas de un modelo extendido de este modo incluirían la intermitencia de una manera más relevante a la física de partículas que otros modelos estadísticos considerados en la literatura, como los modelos de tipo Ising, percolación, etc. Ya hemos visto como las transformadas de Poisson aparecen naturalmente en esta clase de procesos, lo que muestra que la hipótesis de “ruido Poissoniano” [51] es una consecuencia de las hipótesis básicas y no una suposición independiente. Creemos que la investigación de esta clase de modelos puede conducir a una comprensión más profunda del fenómeno de intermitencia en la producción múltiple de partículas.

Bibliografía

- [1] G.Giacomelli, *Int.Jou.Mod.Phys.* **5A**, (1990), 223.
- [2] W.Geist *et al.*, “*Hadronic Production of Particles at Large Transverse Momentum: Its Relevance to Hadron Structure, Parton Fragmentation and Scattering*”, European Organization for Nuclear Research Preprint CERN/EP 89-159, (1989).
- [3] UA1 Coll., *Nucl.Phys.* **B309**, (1988), 405.
- [4] UA5 Coll., *Phys.Rep.* **154**, (1987), 247.
- [5] UA5 Coll., *Z.Phys.* **C43**, (1989), 357.
- [6] UA1 Coll., *Nucl.Phys.* **B335**, (1990), 261.
- [7] E735 Coll., “*Multiplicity Dependence of the Transverse Momentum Spectrum for Centrally Produced Hadrons*”, Duke Univ.Preprint DUKHEP 88-1, (1988).
- [8] E735 Coll., “*Multiplicity Distributions of Charged Particle Secondaries from Proton-Antiproton Collisions at the Tevatron Collider $\sqrt{s} = 1.8 \text{ TeV}$* ”, contribución a “*Particles and Fields '91*”, Vancouver, Canada, (1991).
- [9] L.Landau, *Iz.Akad.Nauk.SSSR Ser.Fiz.* **17**, (1953), 51.

- [10] L.Van Hove, Phys.Lett. **118B**, (1982), 138.
- [11] ABCDHW Coll., Phys.Rev. **D30**, (1984), 528.
- [12] R.Szwed, "*Multiplicity Distributions in Proton-Proton and Nucleus-Nucleus Collisions*", Warsaw Univ.Preprint IFD/6/1989, (1989).
- [13] R.Gavai y H.Satz, Phys.Lett. **112B**, (1982), 413.
- [14] UA5 Coll., Phys.Lett. **167B**, (1986), 476.
- [15] A.Wróblewski, Acta Phys.Pol. **B4**, (1973), 857.
- [16] W.Ochs, Z.Phys. **C23**, (1984), 131.
- [17] R.Feynman, Phys.Rev.Lett. **23**, (1969), 1415.
- [18] Z.Koba, H.Nielsen y P.Olesen, Nucl.Phys. **B40**, (1972), 317.
- [19] A.Polyakov, Sov.Phys. JETP **32**, (1971), 296; **33**, (1971), 850.
- [20] S.Orfanidis y V.Rittenberg, Phys.Rev. **D10**, (1974), 2892.
- [21] A.Golokhvastov, Sov.Jou.Nucl.Phys. **27**, (1978), 430; **30**, (1979), 128.
- [22] R.Szwed y G.Wrochna, Z.Phys. **C29**, (1985), 255.
- [23] P.Olesen, Phys.Lett. **41B**, (1972), 602.
- [24] P.Slattey, Phys.Rev. **D7**, (1973), 2073.
- [25] F.Dao, L.Lach y J.Whitmore, Phys.Lett. **45B**, (1973), 513.
- [26] A.Chodos, M.Rubin y R.Sugar, Phys.Rev. **D8**, (1973), 1620.
- [27] A.Wróblewski, "*Soft Hadron Physics*", Proceedings of the International Conference on High Energy Physics, K.Phua Ed., World Scientific, Singapore, (1991).

- [28] C.Fuglesang, “*UA5 Multiplicity Distributions and Fits of Various Functions*”, Proceedings of Multiparticle Dynamics (Festschrift Léon Van Hove), A.Giovannini y W.Kittel Eds., World Scientific, Singapore, (1990).
- [29] UA5 Coll., Phys.Lett. **160B**, (1985), 199.
- [30] ABCDHW Coll., Nuov.Cim. **102A**, (1989), 1199.
- [31] NA22 Coll., Z.Phys. **37C**, (1988), 215.
- [32] G.Giacomelli, “*Multiplicity Distributions and Cross Sections at High Energies*”, European Organization for Nuclear Research Preprint CERN-EP/89-179, (1989).
- [33] DELPHI Coll., Z.Phys. **C50**, (1991), 185; Z.Phys. **C52**, (1991), 271.
- [34] P.Carruthers y C.Shih, Int.Jou.Mod.Phys. **A2**, (1987), 1447.
- [35] A.Giovannini y L.Van Hove, Z.Phys. **C30**, (1986), 391.
- [36] D.Battacharjee, D.Maity y P.Churian, Z.Phys. **C52**, (1991), 265.
- [37] A.Giovannini, S.Lupia y R.Ugoccioni, “*Multiplicity Distributions in High Energy Collisions*”, Torino Univ.Preprint DFTT 33/91, (1991).
- [38] G.Engelmann y S.Carius, “*The Log-Normal Distribution for Cascade Multiplicities in Hadron Collisions*”, Uppsala Univ.Preprint TSL/ISV-90-0035, (1990).
- [39] R.Szwed, G.Wrochna y A.Wróblewski, Mod.Phys.Lett. **A5**, (1990), 1851; **A6**, (1991), 245.
- [40] T.Gaisser *et al.*, Phys.Lett. **166B**, (1986), 219.
- [41] S.Sakai, Phys.Rev. **40D**, (1989), 1430.

- [42] P.Chliapnikov y O.Tchikilev, Phys.Lett. **242B**, (1990), 275.
- [43] A.Giovannini y R.Ugoccioni, “ *The Simplified Parton Shower Model*”, Torino Univ.Preprint DFTT 39/91, (1991).
- [44] X.-N.Wang y M.Gyulassy, Phys.Rev. **D44**, 3501; **D45**, (1992), 844.
- [45] C.Fuglesang, “*A Method for Correcting Observed Distributions of Multiplicities Using the Maximum Entropy Principle*”, European Organization for Nuclear Research Preprint CERN-EP/88-174, (1988).
- [46] C.Hojvat, comunicación privada.
- [47] L.Epele, “*Multiplicity Distributions in $p\bar{p}$ Collisions*”, en los Proceedings of the LEP-HEP Conference, Geneva, (1991).
- [48] A.Bouzas, L.Epele, H.Fanchiotti y C.García Canal, “*Multiplicity Distributions in $p\bar{p}$ Collisions at TeV Energies*”, Z.Phys. **C**, (1992), en prensa.
- [49] H.Cramér, “*Mathematical Methods of Statistics*”, Princeton Univ. Press., Princeton, (1974).
- [50] B.Webber, Phys.Lett. **42B**, (1972), 69.
- [51] A.Białas y R.Peschanski, Nucl.Phys. **B273**, (1986), 703; **B308**, (1988), 857.
- [52] N.Schmitz, “*A review of experimental results on intermittency*”, Max Planck Institut für Physik Preprint MPI-PhE/91-09, (1991).
- [53] A.Białas, Nucl.Phys. **A525**, (1991), 345c.
- [54] P.Carruthers, Phys.Rev. **A43**, (1991), 2632.

- [55] H.Eggers, "*Intermittency, moments and correlations in distributions of particles created in high-energy collisions*", Ph.D. Thesis, Univ. of Arizona, (1991).
- [56] G.Gustafson, "Properties of QCD parton cascades", Lund Univ. Preprint LU TP 91-34, (1991).
- [57] B.Webber, Ann.Rev. of Part.Sci. **36**, (1986), 253.
- [58] T.Sjöstrand, "*QCD and jets at LEP*", European Centre for Nuclear Research Preprint CERN-TH/5902-90, (1990).
- [59] M.Bengtsson y T.Sjöstrand, Nucl.Phys. **289**, (1987), 810.
- [60] B. Bambah *et al.*, "*QCD generators for LEP*", European Centre for Nuclear Research Preprint CERN-TH/5466-89, (1989).
- [61] K.Konishi, A.Ukawa y G.Veneziano, Nucl.Phys. **B157**, (1979), 45.
- [62] A.Giovannini, Nucl.Phys. **B161**, (1979), 429.
- [63] W. Feller, "*An Introduction to Probability Theory and Its Applications*", John Wiley, New York, (1971), Vol. 2.
- [64] A.Bharucha-Reid, "*Elements of the theory of Markov processes and their applications*", Mc Graw-Hill, New York, (1960).
- [65] B.Durand e I.Sarcevic, Phys.Lett. **B172**, (1986), 104; Phys.Rev. **D36**, (1987), 2693.
- [66] A.Chan y C.Chew, Phys.Rev. **D41**, (1990), 851.
- [67] T.Harris, "*The theory of branching processes*", Springer-Verlag, Berlin, (1963).
- [68] K.Athreya y P.Ney, "*Branching processes*", Springer-Verlag, Berlin. (1972).

- [69] IMSL Math-Library User's Manual, IMSL Inc., Houston, (1987).
- [70] A.Bouzas, "*Parton branching equations and scaling*", La Plata Univ. Preprint 92-03, (1992), a ser publicado.
- [71] L.Van Hove, Ann.Phys. (NY) **192**,(1989),66.
- [72] Yu.Dokshitzer, V.Khoze y S.Troyan, "*Coherence and physics of QCD jets*", Deutches Elektronen-Synchrotron Preprint DESY 88-093, (1988).
- [73] D.Jones, "*Generalised functions*", Mc. Graw-Hill, London, (1966).
- [74] M.Jacob y P.Landshoff, "*Deep inside matter*", European Centre for Nuclear Research Preprint CERN-TH/4556-86, (1986).