

Algoritmos Scan-Line para Computar Refracciones¹

Gustavo A. Patow

Claudio A. Delrieux

LIFIA-Laboratorio de Investigación y
Formación en Informática Avanzada
Universidad Nacional de La Plata
c.c.11 - La Plata - ARGENTINA
dagush@ada.info.unlp.edu.ar

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Instituto de Ciencias e Ingeniería de Computación
Universidad Nacional del Sur
Alem 1253 - Bahía Blanca - ARGENTINA
usdelrie@criba.edu.ar

Abstract

Se presenta la formalización de un método de aproximación de refracciones basado en mapas de entorno [3]. Esta aproximación se puede incorporar fácilmente en el proceso de *rendering* con algoritmos *scan-line* [14] sin el excesivo costo computacional que involucraría su solución exacta por medio de *ray-tracing* [4]. Dicha aproximación permite computar rayos paraxiales refractados utilizando un mecanismo similar a los mapas de reflexión de Blinn y Newell [2]. Para computar la geometría de la refracción, los objetos translucidos son aproximados como lentes esféricas. Se presenta la justificación de dicha aproximación, así como los elementos necesarios para derivar la expresión analítica de la lente a partir de la descripción poligonal del objeto. Estos resultados permiten proponer un modelo de iluminación que generaliza el modelo de Phong [11] de una manera más adecuada que lo propuesto por Kay y Greenberg [7].

¹Este trabajo fue parcialmente financiado por una beca de Fundación Antorchas

1 Introducción

Los modelos no locales de iluminación constituyen el desafío más significativo en la representación de realismo gráfico [3]. La técnica de *rendering* más satisfactoria al respecto parece ser en la actualidad el *ray-tracing* [4]. En efecto, esta forma de computar los modelos de iluminación es geoméricamente exacta por definición. Muchas objeciones, sin embargo, pueden hacerse al *ray-tracing* (ver por ejemplo [14]). Una de ellas proviene de que el modelo de iluminación incorrectamente considera los términos locales (ambiente, especular y difuso) de una manera diferente a los globales (reflejado y refractado). Es decir, no considera a los componentes globales del mismo modo que a los iluminantes. Una segunda objeción es que si bien el modelo es geoméricamente exacto, la representación de objetos en los cuales el modelo es efectivamente (o prácticamente) computable es muy limitada. Por ejemplo, el *ray-tracing* de parches bicúbicos [1] —extensivamente utilizados para el modelado de sólidos— es excesivamente laborioso, engorroso y sujeto a errores [6].

Estas consideraciones llevaron a investigar modelos de iluminación no locales dentro del marco de los sistemas de *rendering* tradicionales, es decir, los sistemas *scan-line*. El primer paso importante en dicho sentido fue dado por Blinn y Newell [2] con los *mapas de reflexión*. La idea subyacente a los mismos consiste en computar un mapa de la iluminación desde un punto adecuado (por ejemplo, el centroide) del objeto reflectivo y proyectar dicha iluminación sobre una superficie adecuada que lo contenga (un cubo o una esfera). Dichos valores de iluminación son luego utilizados de una manera similar a un mapa de textura, es decir, no se modifican localmente los atributos del objeto según el mapa, sino los atributos de los iluminantes en un modelo local similar al de Phong. Este modelo no es geoméricamente exacto, dado que no es posible determinar adecuadamente la posición en el espacio de un punto dado en el mapa de reflexión². Sin embargo, para mapear la reflexión producida por objetos a una distancia relativa, los resultados son aceptables.

El estado del arte en el *rendering scan-line* de refracciones, sin embargo, está en un estado mucho más primitivo. Los modelos más usuales ignoran la geometría de la refracción, y realizan únicamente un modelo de la transparencia del objeto traslúcido. Esta transparencia se puede computar interpolando el color del pixel p en función del color del objeto traslúcido P_1 y del color del objeto (opaco) P_2 que se encuentra detrás: $I_f(p) = (1 - k)I_{P_1}(p) + kI_{P_2}(p)$, donde $0 \leq k \leq 1$ es el coeficiente de transmitancia del objeto traslúcido, normalmente dependiente de la longitud de onda. Este esquema es denominado *transparencia interpolada* en [3]. Otro esquema posible es utilizar *transparencia filtrada*, en la cual se considera que P_1 “filtra” el color de P_2 con un coeficiente O de transparencia: $I_f(p) = I_{P_1}(p) + O.k.I_{P_2}(p)$.

Claramente se observa que estos mecanismos son *ad hoc*, dado que —al margen de ignorar la geometría de la refracción— plantean una fórmula de interpolación que no proviene de un modelo de iluminación. Una ulterior mejora fue propuesta por Kay y Greenberg [7], donde el coeficiente de transmitancia k es una función no lineal de z_n , la componente z del normal. Kay y Greenberg sugirieron $k = k_{min} + [k_{max} - k_{min}] \cdot [1 - (1 - z_n)^m]$, donde k_{min} and k_{max} son las transparencias mínima y máxima respectivamente, y m es un coeficiente arbitrario, generalmente entre 2 y 3, donde un m mayor modela un objeto traslúcido de menor grosor.

En este trabajo se propone un modelo de *rendering scan-line* de objetos traslúcidos con características superiores a otros modelos presentados, dado que no solo se computa un modelo de

²Una solución para este problema, consistente en computar el mapa de reflexión con un z -buffer, fue presentada en [8], y los errores de geometría de dicha solución fueron determinados en [9]

iluminación adecuado, sino que además se considera *la geometría* de la refracción. Básicamente, el modelo aproxima la forma de los objetos traslúcidos interpolando superficies esféricas de la expresión poligonal de los mismos. Dicha aproximación permite considerar a cada objeto traslúcido como una *lente*, para la cual es sencillo encontrar una expresión analítica de la geometría de la refracción, expresión que puede simplificarse considerando la aproximación paraxial de los rayos de luz [5]. La determinación de los elementos refractados se efectúa utilizando mapas de entorno procesados por medio de dicha expresión analítica. El modelo de iluminación considerado en este caso extiende el modelo local de Phong para incorporar la componente refractada, por lo cual es más adecuado que el modelo de *ray tracing* dado que le da un tratamiento uniforme a las distintas fuentes de iluminación, sean locales o globales. Una ulterior simplificación, considerar la geometría de la refracción en una lente delgada, permite encontrar una expresión más simple. En particular, se demuestra que en este caso la geometría de la refracción es sencillamente obtenible a partir de la geometría de la reflexión, y que por lo tanto un preprocesamiento de un mapa de reflexiones estándar permite computar la refracción. Por último, se considera la representación de objetos complejos como series de lentes, lo cual constituye una primera aproximación muy económica.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección consideraremos los aspectos principales del formalismo subyacente a la aproximación de objetos traslúcidos por medio de lentes esféricas. En la sección 3 derivaremos un conjunto de expresiones adecuadas para computar eficientemente la geometría de los rayos refractados a través de lentes esféricas. Luego se considerarán algunos ejemplos y casos particulares de refracción computada como preprocesamiento de un mapa de reflexión. En la sección 5, por último, se discuten las conclusiones y el trabajo futuro.

2 Aproximación de la forma de los objetos

La geometría subyacente a los modelos de refracción mencionados en la sección anterior es considerar que el objeto traslúcido consiste en un par de caras planas paralelas, y que los rayos son normales a dichas caras. Una aproximación mejor consiste en considerar que el objeto traslúcido es una lente esférica, es decir, está limitado por dos segmentos de esfera: la superficie “de entrada” P_1 (con curvatura $\rho_1 = \frac{1}{r_1}$), y la superficie “de salida” P_2 (con curvatura $\rho_2 = \frac{1}{r_2}$). El sistema óptico tiene simetría axial con respecto al eje que interseca los centros de las esferas, denominado *eje óptico* (ver figura 1). La intersección de las esferas con el eje óptico determina los *vértices* v_i de la lente. Los signos de las curvaturas ρ_i se asignan positivos por convención si la superficie es convexa con respecto a la dirección de incidencia del rayo óptico, y negativos si es cóncava. El *grosor* de la lente es la distancia d entre los vértices.

En esta sección consideraremos primero una justificación formal del modelo de lentes como aproximación de un determinado orden, para luego presentar de qué manera pueden obtenerse los parámetros de las mismas a partir de los datos poligonales de los objetos traslúcidos. Consideraremos que la superficie S de un objeto traslúcido puede aproximarse localmente con una función $z = f(x, y)$. La serie de Taylor multivariada en (x_0, y_0) es

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + \\ + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 + \frac{2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) + \dots \quad (1)$$

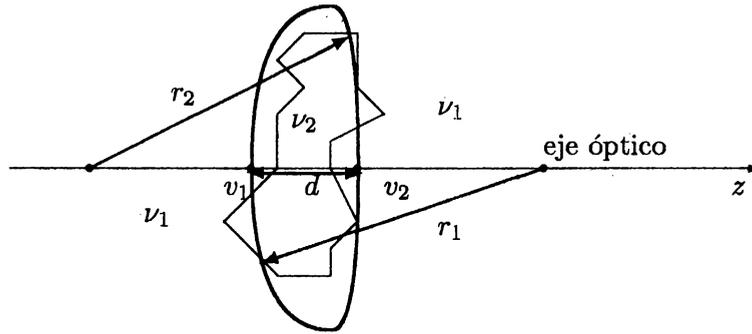


Figura 1: Parámetros geométricos de una lente.

DEFINICIÓN 1 El vector normal unitario \mathbf{n} de la superficie S en $p = (x, y, z)$ es dado por $\mathbf{n} = \frac{(\nabla f)(p)}{\|(\nabla f)(p)\|}$. Dada una función suave f en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, y un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, la derivada de f con respecto a \mathbf{v} es el escalar $\nabla_{\mathbf{v}} f = (f \circ \tilde{\alpha})'(t_0)$, donde $\tilde{\alpha} : [0, 1] \leftarrow U$ es cualquier curva de parámetro U tal que $\tilde{\alpha}'(t_0) = \mathbf{v}$, y $\tilde{\alpha}'(t_0)$ representa la derivada de $\tilde{\alpha}$ con respecto a t evaluada en t_0 . Por la regla de la cadena, $\nabla_{\mathbf{v}} f = (\nabla f(p)) \cdot \mathbf{v}$. Por su lado, la derivada de un campo vectorial \mathbf{X} en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ con respecto a un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $p \in U$, está definido como $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} = (\mathbf{X} \circ \tilde{\alpha})'(t_0)$, donde $(\mathbf{X} \circ \tilde{\alpha})'$ es la derivada componente a componente de la composición de funciones vectoriales (ver [13]). \square

DEFINICIÓN 2 El mapa de Weingarten de la superficie S en el punto p es el mapa lineal $\vec{L}_p : S_p \leftarrow S_p$, donde $S_p \subset \mathbb{R}^3$ (i.e., el espacio tangente de S en p) está dado por $\vec{L}_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n}$. \square

Esta expresión puede reescribirse como $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} = (\mathbf{n} \circ \tilde{\alpha})'(t_0)$, donde $\tilde{\alpha} : [0, 1] \leftarrow S$ es cualquier curva parametrizada en S tal que $\tilde{\alpha}'(t_0) = \mathbf{v}$. Es fácil ver que $\vec{L}_p(\mathbf{v})$ es una medida de la tasa de variación de \mathbf{n} (la cual, por definición, es de longitud constante) al pasar por p siguiendo una curva arbitraria $\tilde{\alpha}$.

DEFINICIÓN 3 La curvatura normal de la superficie S en el punto p en la dirección \mathbf{v} (con $\|\mathbf{v}\| = 1$) es el escalar $k(\mathbf{v}) = \vec{L}_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$. \square

Es fácil ver que si $k(\mathbf{v}) > 0$, entonces la superficie se curva hacia \mathbf{n} en la dirección \mathbf{v} , y si $k(\mathbf{v}) < 0$, entonces la superficie se curva alejándose de \mathbf{n} .

EJEMPLO 1 Consideremos el caso en el que S es una esfera tridimensional $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, con orientación $\mathbf{n}(p) = \frac{\vec{p}}{\|p\|}$. Entonces \vec{L}_p es simplemente la multiplicación por $\frac{1}{r}$. Más aún, $k(\mathbf{v}) = \frac{1}{r}$ asume el mismo valor al seguir cualquier dirección \mathbf{v} y en cualquier punto $p \in S$. \square

Como puede verse en el ejemplo, en una superficie tridimensional suave S , la curvatura normal $k(\mathbf{v})$ está definida para cada vector \mathbf{v} del espacio tangente S_p a S en el punto p . Entonces, la curvatura normal en p es una función real con dominio en la esfera unitaria en S_p . Dado que la función es continua, y su dominio es compacto, la función asume valores extremos para ciertas direcciones en S_p . Estos extremos son los autovalores del mapa de Weingarten, \vec{L}_p , y sus direcciones asociadas son los autovectores [13].

TEOREMA 1 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea $L : V \leftarrow V$ una transformación lineal auto-adjunta en V . Entonces los autovectores de L conforman una base ortonormal para V (ver [13]). \square

Los autovalores de L_p son las *curvaturas principales* de S , y sus respectivos autovectores son las *direcciones principales de curvatura* de S . Cada curvatura principal es un valor estacionario de la curvatura normal.

TEOREMA 2 Sea S una superficie en \mathfrak{R}^{n+1} , sea $p \in S$ y sean $\{k_1(p), \dots, k_n(p)\}$ las curvaturas principales de S en p , con direcciones de curvatura asociadas $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Entonces la curvatura normal $k(\mathbf{v})$ en cualquier dirección $\mathbf{v} \in S_p$ (con $\|\mathbf{v}\| = 1$) está dada por

$$k(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n k_i(p)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i)^2$$

(ver [13]). \square

Esta base formal nos permite considerar la aproximación de superficies por medio de esferas como una aproximación de mayor orden con respecto a la aproximación con pares de caras paralelas. El paso siguiente, la aproximación con superficies de tercer orden (bicúbicas) queda planteado para un análisis ulterior. Consideraremos ahora el problema de extraer los datos necesarios para computar los parámetros geométricos de una lente a partir de los datos del objeto traslúcido a aproximar.

El primer paso consiste en encontrar el plano principal P de la lente. Dicho plano debe contener los ejes de mayor dispersión geométrica en los datos del objeto a aproximar (normalmente los puntos o vértices que determinan su descripción poligonal). Para encontrar P en forma sencilla, se consideran los coeficientes de la ecuación del plano $ax + by + cz + d = 0$ con la restricción adicional $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, y luego se ajustan a, b, c, d con regresión por cuadrados mínimos.

Luego es necesario transformar al objeto a un espacio en el cual el plano xy coincida con P , y el origen de coordenadas coincida con el centroide o baricentro del objeto. El paso final consiste en encontrar la curvatura media de los puntos por encima y por debajo de P . Ésto también puede realizarse utilizando regresión por cuadrados mínimos, en este caso con respecto a la forma funcional $F(u, z) = (z - z_0) - \rho(u + \frac{(z-z_0)^2}{2}) = 0$, donde $2u = x^2 + y^2$ es dos veces la distancia al cuadrado hacia el origen, expresado en coordenadas cilíndricas, ρ es la curvatura de la lente, y z_0 es un vértice de la lente. F es biparamétrica, y por lo tanto dicha regresión es directa.

3 Geometría de la refracción

Las leyes ópticas de la reflexión y refracción obedecen la siguiente propiedad, la cual puede derivarse a partir de las ecuaciones de Maxwell.

PROPIEDAD 1 Consideremos un rayo luminoso atravesando la interfase entre dos medios m_1 y m_2 en el punto p . Sea s un vector cuya dirección apunta en la dirección del rayo incidente, y cuya

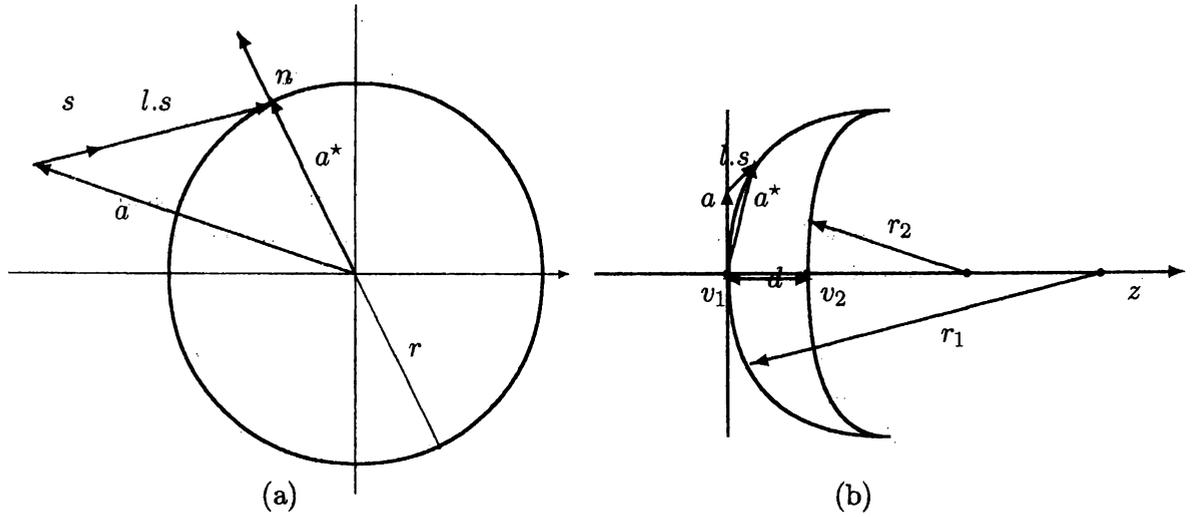


Figura 2: (a) La descripción de $\mathbf{a}^* = \mathbf{a} + l \cdot \mathbf{s}$ y la relación entre \mathbf{a}^* y \mathbf{n} ; (b) La elección del origen y posición de \mathbf{a} (con $l = 0$ en la ecuación 5).

longitud es igual al coeficiente de refracción ν_1 de m_1 . Sea \mathbf{o} el normal interior a la superficie en p . \mathbf{s}' será un vector en la dirección reflejada o refractada, con longitud ν_2 . Entonces

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s} + \Gamma \mathbf{o}, \quad (2)$$

donde Γ , la constante astigmática, es

$$\Gamma = \left(\sqrt{(\nu_2)^2 - (\nu_1)^2 + (\mathbf{o} \cdot \mathbf{s})^2} - \mathbf{o} \cdot \mathbf{s} \right) \quad (3)$$

para refracciones; y

$$\Gamma = -2(\mathbf{o} \cdot \mathbf{s}) \quad (4)$$

para reflexiones. \square

Cada rayo \mathbf{a}^* puede considerarse como un origen \mathbf{a} más una dirección paramétrica $l \cdot \mathbf{s}$:

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} + l \cdot \mathbf{s}, \quad (5)$$

donde $l \in [0, \infty]$ and $l \cdot \nu_1$ es la distancia métrica desde el origen \mathbf{a} a \mathbf{a}^* , donde utilizamos el superíndice \star para referirnos a la primer superficie intersectada por el rayo hacia la dirección \mathbf{s} . Más aún, en una esfera podemos establecer la relación $\mathbf{a}^* = -r\mathbf{o} = r\mathbf{n}$ entre el punto de intersección y el normal unitario a la superficie correspondiente (ver figura 2(a)).

Es posible demostrar [5] que una consideración bidimensional del problema es equivalente, dado que la superficie posee simetría axial. En nuestra convención, podemos abstraer el eje z y trabajar con las entidades proyectadas en el plano xy , con el origen de coordenadas coincidente con el vértice de la superficie de entrada. Para simplificar la notación, seguiremos la convención que designa a las entidades proyectadas con su correspondiente letra mayúscula (i.e., si $\mathbf{s} = (\eta, \xi, \zeta)$, entonces $\mathbf{S} = (\eta, \xi, 0)$). Por último, siguiendo la ecuación 5 podemos elegir \mathbf{a} en el rayo original y en el plano que contiene al vértice de la figura, es decir, $\mathbf{a} = (x, y, 0)$ (ver figura 2(b)).

PROPIEDAD 2 Para computar los rayos de salida, es necesario conocer, como se verá más adelante, que los mismos son combinaciones lineales de los rayos de entrada:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{S} \\ \mathbf{S}' &= \gamma \mathbf{A} + \delta \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son escalares tales que $\alpha\delta + \beta\gamma = 1$. Denotando con \vec{z} al versor unitario en el eje z , encontramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{s} + c_1\vec{z} \\ \mathbf{s}' &= \gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{s} + c_2\vec{z}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes apropiadas. Finalmente, es sencillo verificar que el sistema de ecuaciones 6 es la proyección del sistema de ecuaciones 7 sobre el plano xy . \square

La propiedad 2 permite computar z' y ζ' por medio del siguiente procedimiento.

PROCEDIMIENTO 1 Sea $\mathbf{a} = (x, y, z)$, $\mathbf{a}' = (x', y', z')$, $\mathbf{s} = (\eta, \xi, \zeta)$, $\mathbf{s}' = (\eta', \xi', \zeta')$. Entonces, a partir de la tercera componente de la ecuación 7,

$$\begin{aligned} z' &= \alpha z + \beta\zeta + c_1 \\ \zeta' &= \gamma z + \delta\zeta + c_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Dado que $(\mathbf{s}')^2 = (\zeta')^2 + \mathbf{S}'^2 = (\nu_2)^2$, entonces

$$\zeta' = \pm\sqrt{(\nu_2)^2 - ((\eta')^2 + (\xi')^2)}, \quad (9)$$

tomando signo positivo si ocurrió una cantidad par de reflexiones (incluyendo ninguna reflexión), y signo negativo en todo otro caso³. \square

ζ' permanece indeterminado en la ecuación 8, dado que c_2 es desconocido. Pero, como se mostrará más adelante, se puede computar con la ecuación 9. c_1 depende de la elección particular del origen del sistema de coordenadas. Entonces es fácil utilizar las expresiones del procedimiento 1 para efectuar la conversión de un sistema de coordenadas al otro. Más aún, normalmente es más sencillo utilizar los vectores $\mathbf{P} \equiv \zeta\mathbf{A}$ y $\mathbf{P}' \equiv \zeta'\mathbf{A}'$ en vez de \mathbf{A} y \mathbf{A}' .

Consideremos ahora la superficie esférica de la lente, tal cual es obtenida en la sección anterior, descrita con la ecuación

$$F(u_1^*, z_1) = z_1 - \rho_1 \left(u_1^* + \frac{(z_1)^2}{2} \right) = 0,$$

con $2u_1^* = (x_1^*)^2 + (y_1^*)^2$, donde, como dijimos, el vertice de la superficie es el origen de nuestro sistema auxiliar de coordenadas, y x_1^*, y_1^*, z_1 son las coordenadas del punto de intersección del rayo con la superficie de entrada de curvatura ρ_1 .

PROCEDIMIENTO 2 El recorrido de un rayo genérico (dado por \mathbf{P} y \mathbf{S}) a través de la primer superficie puede ser computado con las siguientes evaluaciones⁴.

1. $(\zeta_1)^2 \leftarrow (\nu_1)^2 - \mathbf{S}^2$.

³Aquí adoptamos la convención de elegir la dirección del rayo incidente tiene una tercer componente positiva. Si esto no fuera el caso, entonces el signo de la tercera componente del rayo reflejado o refractado debe modificarse, es decir, multiplicarse por el signo de ζ .

⁴Una justificación adecuada es demasiado extensa para considerarla aquí. Los lectores interesados pueden consultar [10].

$$2. (q_1)^2 \leftarrow (\rho_1(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}) - (\zeta_1)^2)^2 - (\nu_1)^2(\rho_1)^2 \mathbf{P}^2$$

con $q_1 > 0$.

$$3. z_1 \leftarrow \frac{\rho_1 \mathbf{P}^2}{q_1 - \rho_1(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}) + (\zeta_1)^2}$$

(i.e., la componente según z de la intersección con la primer superficie).

$$4. (q'_1)^2 \leftarrow ((\nu_2)^2 - (\nu_1)^2)(\zeta_1)^2 + (q_1)^2$$

con $q'_1 > 0$ para refracciones y $q'_1 = -q_1$ para reflexiones.

$$5. \Psi_1 \leftarrow \frac{q'_1 - q_1}{(\zeta_1)^2},$$

donde ν_1 es el índice de refracción del medio inicial y ν_2 el índice correspondiente a la lente.
finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_1 - \mathbf{P} &= \Psi_1(\mathbf{P} + z_1\mathbf{S}), \\ \mathbf{S}'_1 - \mathbf{S} &= -\rho_1\Psi_1(\mathbf{P} + z_1\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (10)$$

]

La expresión correspondiente para la segunda superficie, es decir, la salida del rayo, puede obtenerse con el procedimiento anterior reemplazando \mathbf{P}_2 por \mathbf{P} , \mathbf{S}_2 por \mathbf{S} , y todo subíndice 1 por un subíndice 2 y viceversa. Más aún, la relación entre los sistemas de coordenadas auxiliares de las superficies de entrada y salida (y de sus respectivos sistemas de ecuaciones) es

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}'_1 + d\mathbf{S}'_1 \\ \mathbf{S}_2 &= \mathbf{S}'_1 \\ \zeta_2 &= (\nu_2)^2 - (\mathbf{S}_2)^2, \end{aligned} \quad (11)$$

donde d , como dijimos, es el grosor de la lente. El resultado final, el rayo emergente, está dado por \mathbf{S}'_2 y \mathbf{P}'_2 (ver figura 3).

4 Aproximaciones, detalles de implementación y ejemplos

Uno de los primeros puntos a considerar a la hora de implementar las ideas expresadas en las dos secciones anteriores es de qué manera simplificar los cálculos, efectuando aproximaciones si es necesario. En particular, utilizaremos la aproximación Gaussiana, también conocida como aproximación paraxial, dado se considera que los rayos de luz son cercanos y paralelos al eje óptico.

TEOREMA 3 Utilizando la aproximación Gaussiana, las ecuaciones 10 y subsiguientes se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_2 &= \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{S} \\ \mathbf{S}'_2 &= \gamma\mathbf{A} + \delta\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (12)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_1\gamma_1 + 1 \\ \beta &= \beta_1 \\ \gamma &= \gamma_1\beta_1\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2 \\ \delta &= \beta_1\gamma_2 + 1, \end{aligned}$$

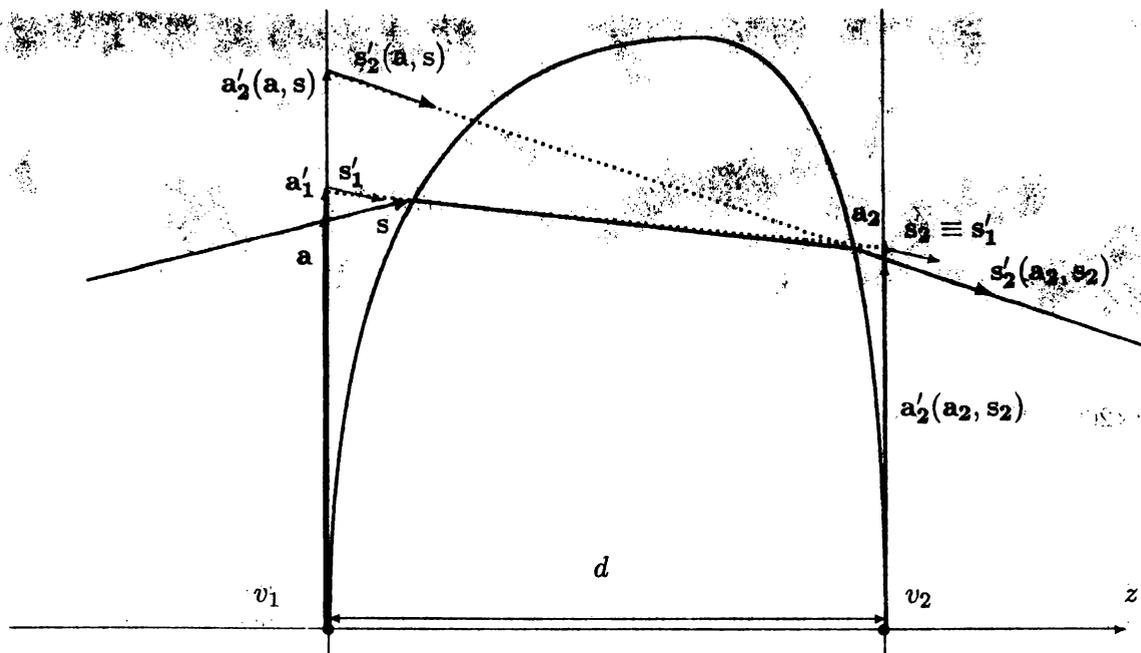


Figura 3: Geometría de la refracción a través de una lente y los diferentes vectores que surgen al trazar un rayo inicial dado por a y s .

y si suponemos que el primer medio es el aire (i.e., $\nu_1 = 1$) y reemplazando a ν_2 por ν , encontramos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{d}{\nu} \\ \gamma_1 &= (1 - \nu)\rho_1 \\ \gamma_2 &= (\nu - 1)\rho_2, \end{aligned} \tag{13}$$

□

La demostración es directa si se desdoblán las expresiones en el procedimiento 2 y se descartan los términos de segundo orden, i.e., los que contienen \mathbf{P}^2 , \mathbf{S}^2 o $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$.

PROPIEDAD 3 Dado el sistema de ecuaciones 12, reemplazando las aproximaciones 13 y descartando el subíndice 2 en \mathbf{A}'_2 y \mathbf{S}'_2 , la aproximación paraxial del sistema de ecuaciones se puede computar con

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \left[\frac{d}{\nu}(1 - \nu)\rho_1 + 1 \right] \mathbf{A} + \left[\frac{d}{\nu} \right] \mathbf{S} \\ \mathbf{S}' &= \left[(1 - \nu)(\rho_1 - \rho_2) - (\nu - 1)^2 \rho_1 \rho_2 \frac{d}{\nu} \right] \mathbf{A} + \left[1 + \frac{d}{\nu}(\nu - 1)\rho_2 \right] \mathbf{S}. \end{aligned} \tag{14}$$

□

Estas expresiones pueden ser utilizadas para computar en forma económica los rayos refractados, utilizando un mapa de entorno con z -buffer (como el presentado en [8]). Más aún, si las refracciones se producen en objetos traslúcidos pequeños o al refractar objetos distantes, (como en [2]), entonces \mathbf{S}' es suficiente para computar el rayo refractado, pudiéndose ignorar el valor

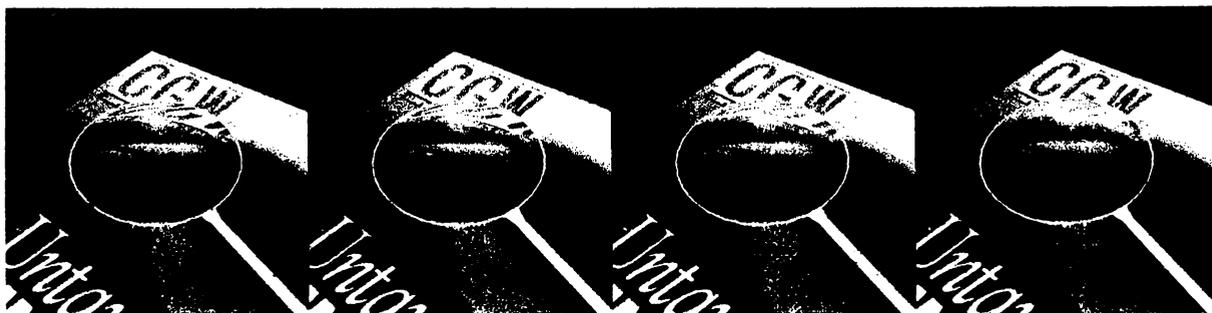


Figura 4: Ejemplo de aproximación de refracción con mapas de entorno de resoluciones 400×400 , 200×200 , 100×100 y 50×50 .

de A' . La figura 4 se obtuvo con dicho procedimiento, para distintas resoluciones del mapa de entorno.

La luz refractada por el objeto traslúcido es computada con el mapa de entorno, y esta información se combina con las componentes difusa y especular del modelo de Phong :

$$rc = dc.D + sc.S, \quad (15)$$

donde rc es el color refractado del pixel, dc es el coeficiente de refracción, D es la iluminación difusa, sc es el coeficiente de refracción de Snell (cuya computación es exacta, como se mostró más arriba), y S es la iluminación especular. Es importante notar que la componente ambiente es tenida en cuenta al computar la componente de iluminación difusa.

Puede realizarse una simplificación adicional si se considera que los objetos traslúcidos son lentes delgadas.

PROPIEDAD 4 En lentes donde d es pequeño, más generalmente, cuando $\frac{d}{\nu}(\nu - 1)\rho_2 \simeq 0$, la expresión para S' en la ecuación 14 se reduce a

$$S' = [(1 - \nu)(\rho_1 - \rho_2)] A + S. \quad (16)$$

□

La ecuación 16 es bastante económica en términos computacionales, y puede utilizarse como buena primer aproximación de la ecuación 14 en la mayoría de los casos. En particular, dado que nuestro objetivo es computar las refracciones con mapas de entorno —una idea originalmente desarrollada para computar reflexiones— estableceremos una comparación entre estos resultados y los consignados para reflexiones.

TEOREMA 4 Las aproximaciones que permitieron derivar la ecuación 16, en el caso de la reflexión en una superficie esférica obtendrían

$$S_r' = [2\rho_1] A + S \quad (17)$$

(ver [5]). Las ecuaciones 16 y 17 son comparables cuando $\rho_2 \sim \frac{\nu + 1}{\nu - 1}\rho_1$, y ambas computan la proyección del rayo reflejado o refractado en el plano xy . Luego, para obtener s' y s_r' necesitamos obtener ζ y ζ' . Partiendo de la ecuación 9 y de que ambos rayos incidente y reflejado están en el mismo medio ($\nu = 1$), se demuestra

$$\begin{aligned} \zeta' &= +\sqrt{1 - ((\eta')^2 + (\xi')^2)} \\ \zeta_r' &= -\sqrt{1 - ((\eta_r')^2 + (\xi_r')^2)}. \end{aligned}$$

□



Figura 5: Algunos cuadros de una animación efectuada en una escena estática utilizando un único mapa de entorno preprocesado.

Entonces, un rayo refractado puede computarse como una operación M_{xy} que efectúa un *mirror* sobre el rayo reflejado en el plano xy (es decir, invierte su componente z). Luego, el costo computacional de las refracciones con estas aproximaciones es el mismo que el de las reflexiones. La figura 5 muestra algunos cuadros de una animación realizada utilizando preprocesamiento del mapa de entorno. Es importante destacar en este caso que dicho preprocesamiento es independiente de la ubicación de la cámara, y por lo tanto puede reutilizarse para animaciones de escenas estáticas como la mostrada.

Una última consideración surge de observar que la operación M_{xy} definida más arriba para preprocesar los mapas de entorno efectúa un *mirror* respecto de un plano genérico. Se puede especificar dicho plano por medio de su normal unitario \vec{u} , lo cual es equivalente a determinar una rotación con respecto a sus ángulos de Euler [12]. Es decir, una operación $M_{\vec{u}}$ efectúa un *mirror* con respecto a un plano determinado por su normal unitario \vec{u} . Esto permite aproximar objetos complejos como superposición de n lentes, de modo que la refracción asociada puede computarse como una sucesión de operaciones $M_{\vec{u}_i}$ ($0 \leq i \leq n$), donde cada $M_{\vec{u}_i}$ representa la refracción ocurrida en la i -ésima lente. Esta aproximación no coincide necesariamente con una aproximación de orden superior en la ecuación 1 y los subsiguientes desarrollos realizados en la sección 2 para superficies esféricas. Sin embargo, en muchos casos puede ser utilizada en forma efectiva, donde la precisión no es mandatoria (ver figura 6).

5 Conclusiones y trabajo futuro

Se ha propuesto un modelo de *rendering scan-line* de objetos traslúcidos con características superiores a otros modelos presentados, dado que no solo se computa un modelo de iluminación adecuado, sino que además se considera la *geometría* de la refracción. Los objetos traslúcidos fueron aproximados interpolando superficies esféricas a partir de la expresión poligonal de los mismos, lo cual permite considerar a cada objeto traslúcido como una *lente*. Se encontró una expresión analítica de la geometría de la refracción, determinándose los elementos refractados por medio de mapas de entorno procesados por medio de dicha expresión analítica.

El modelo de iluminación considerado en este caso extiende el modelo local de Phong para incorporar la componente refractada, por lo cual es más adecuado que el modelo de *ray tracing* dado que le da un tratamiento uniforme a las distintas fuentes de iluminación, sean locales o globales. La expresión matemática que representa la geometría de la refracción se simplificó de dos maneras, logrando gran economía. Primero se consideró la aproximación paraxial de los rayos de luz, para luego considerar la geometría de la refracción en una lente delgada. Se



Figura 6: Aproximación de objetos complejos como lentes múltiples.

demonstró que en este último caso la geometría de la refracción es sencillamente obtenida de la geometría de la reflexión, y que por lo tanto un preprocesamiento de un mapa de altura estándar permite computar la refracción. Por último, se consideró la representación de objetos complejos como series de lentes, lo cual constituye una primera aproximación muy

Actualmente se está procurando extender el modelo en varios sentidos. Por un lado, se busca una expresión de orden superior para la aproximación de la forma de los objetos, de modo de abarcar las superficies bicúbicas de uso tan extendido. Como la expresión de la refracción en una superficie de alto orden puede ser inmanejable, una forma alternativa de estudiar para computar la refracción en objetos complejos consiste en considerarlos compuestos por *celdas* de lentes. De esa manera, la superficie del objeto es aproximada en el punto de incidencia, lo cual permite conocer el camino del rayo refractado; dicho camino eventualmente lo lleva de nuevo a la superficie del objeto, donde el rayo emergente es calculado con otra aproximación local. El camino del rayo emergente, a su vez, es calculado con un mapa de entorno combinado con un *z*-buffer para recuperar adecuadamente la profundidad de la escena.

Para el caso de trabajar con lentes esféricas tal cual fueron presentadas aquí, quedan varios caminos para explorar. Uno de ellos es considerar el fenómeno de la *dispersión*, es decir, la dependencia del coeficiente de refracción con la longitud de onda de la luz. En el modelo usual RGB será inadecuado, dado que produce solo tres muestras espectrales en un espectro continuo. Otra posibilidad es el modelo de interacción entre varias lentes, que da origen a sistemas ópticos complejos como los de cámaras fotográficas o filmadoras, que da origen a fenómenos como la profundidad de campo, el *vignetting* y otros.

Referencias

- [1] R. Bartels, J. Beatty, and B. Barsky. *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [2] J. F. Blinn and M. E. Newell. Texture and Reflection in Computer Generated Images. *Communications of the ACM*, 19(10):542-547, October 1976.
- [3] J. Foley, A. Van Dam, S. Feiner, and J. Hughes. *Computer Graphics. Principles and Practice*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 1990.
- [4] A. Glassner. *An Introduction to Ray Tracing*. Academic Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.
- [5] Max Herzberger. *Modern Geometrical Optics*. Interscience Publishing, 1958.
- [6] James T. Kajiya. Ray Tracing Parametric Patches. *ACM Computer Graphics*, 16(3):245-254, 1982.
- [7] T. L. Kay and D. Greenberg. Transparency for Computer Synthesized Images. *ACM Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '79)*, 13(3):158-164, 1979.
- [8] Gustavo A. Patow. Accurate Reflections Through Z-Buffered Environment Maps. En *Proceedings of the XV International Conference of the Chilean Computer Society*, págs. 385-392, Arica, Chile, 1995. SCCC.
- [9] Gustavo A. Patow. Análisis del Error en Modelos de Reflexión para Computación Gráfica. En *XXV JAIIO*, Buenos Aires, 1996. SADIO.
- [10] Gustavo A. Patow and Claudio A. Delrieux. On Low Cost Refraction Models. *Enviado al IX Simposio Brasileiro de Computacao Grafica e Processamento de Imagens*, Minas Gerais, Brasil, 1996. IX SIBGRAPI.
- [11] Bui-Tong Phong. Illumination for Computer-Generated Pictures. *Communications of the ACM*, 18(6):311-317, 1975.
- [12] D. Rogers and J. Adams. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, second edition, 1976.
- [13] J. A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [14] Alan Watt and Mark Watt. *Advanced Animation and Rendering Techniques*. Addison-Wesley, London, 1992.