

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
DEPARTAMENTO DE FISICA**

TESIS DOCTORAL

**PROCEDIMIENTOS LAGRANGIANOS EN ECUACIONES
DE ORDEN SUPERIOR**

MARIO CARLOS ROCCA

DIRECTOR : CARLOS GUIDO BOLLINI

MAYO 1992

AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas que han contribuido para la realizacion de esta tesis y a las que les debo mi mas profundo agradecimiento.

El Dr. Carlos G Bollini , que fue quien me inicio en la investigacion y ha sido mi "maestro" durante todos estos años.

Los Drs. Carlos García Canal y Luis N. Epele que fueron quienes se preocuparon por mi formacion cientifica y me relacionaron co el Dr. Bollini hace ya algunos años.

E Dr. Hector Vucetich quien ha leído algunos de los trabajos originales de esta tesis y co quien he mantenido "acaloradas discusiones" sobre el tema . Ellas han servido ademas para la elaboracion de algunos puntos del capitulo V.

Mis compañeros de trabajo , Daniel Barci y Luis Oxman , con quienes he discutido gran parte de las ideas expuestas en esta tesis.

Finalmente deseo agradecer tambien a los Drs. H. Falomir , H. Fanchiotti , E. M. Santangelo y al Dr. J. E. Solomin , quien leyo el manuscrito original del apéndice A.

INDICE

I __ INTRODUCCION

II __ SUPERSIMETRIA SIMPLE EN SEIS DIMENSIONES

- 0 _ Introduccion 3
- 1 _ Espinores en seis dimensiones 3
- 2 _ Supersimetria simple en seis dimensiones 5
- 3 _ Operadores diferenciales 6
- 4 _ Campos quirales 8
- 5 _ Campos componentes 9
- 6 _ Transformaciones infinitesimales 10
- 7 _ Lagrangiano de un campo quiral 15

III __ PROCEDIMIENTOS LAGRANGIANOS DE ORDEN SUPERIOR

- 0 _ Introduccion 17
- 1 _ Ecuaciones de Lagrange de orden superior 17
- 2 _ Corriente conservada de orden superior 19
- 3 _ Tensor de impulso-energia 24

IV __ EL CAMPO DEL TAQUION ESCALAR

- 0 _ Introduccion 27
- 1 _ Cuantificación del taquion escalar 27
- 2 _ Autofunciones 32
- 3 _ Espectro 33
- 4 _ Valores medios de vacio 36
- 5 _ Propagador 38
- 6 _ Invariancia de Poincaré 44

V __ UNA ECUACION DE ORDEN SUPERIOR

- 0 _ Introduccion 65
- 1 _ Lagrangiano y cuantificación 65
- 2 _ Unitariedad 70
- 3 _ Cálculo de $\delta_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{Q}}(p^2 u_1^2) + \delta_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{Q}}(p^2 u_2^2)$ 76
- 4 _ Cálculo de $\delta^{\mathbb{Q}}(p^2 u_1^2) + \delta_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{Q}}(p^2 u_2^2)$ 86
- 5 _ Cálculo de $-iPV(p^2 u_1^2) + \delta_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{Q}}(p^2 u_2^2)$ 92
- 6 _ Cálculo de $-iPV(p^2 u_1^2) + \delta_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{Q}}(p^2 u_2^2)$ 98

VI __ RENORMALIZACION

- 0 _ Introduccion 102
- 1 _ El modelo y sus divergencias 102
- 2 _ Grado de divergencia y divergencias primitivas 107

VII__ EL MODELO DE WESS-ZUMINO

- 0_ Introduccion 109
- 1_ Ecuaciones de movimiento 109
- 2_ Impulso 112
- 3_ Cuantificacion de los campos componentes 120
- 4_ Impulso ordenado normalmente 126
- 5_ Valores medios de vacío 127
- 6_ Propagadores 130
- 7_ El campo vectorial 131
- 8_ Diagonalizacion de las relaciones de conmutacion y anticonmutacion 136

VIII_ EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE SCHWINGER-FEYNMAN

- 0_ Introduccion 144
- 1_ El principio variacional de Schwinger-Feynman 144
- 2_ Coincidencia de las cuantificaciones canónica y supersimetrica 146

IX__ CONCLUSIONES 158

APENDICE A_ MATEMATICA DE LA TEORIA 160

APENDICE B_ DISTRIBUCIONES DELTA 181

APENDICE C_ FUNCION HIPERGEOMETRICA 187

APENDICE D_ CONVOLUCIONES 191

APENDICE E_ MATRICES Y OPERADORES DIFERENCIALES 225

BIBLIOGRAFIA 227

CAPITULO I

0_INTRODUCCION

La posibilidad de usar ecuaciones diferenciales de orden superior en la descripción de sistemas físicos no es nueva. Ya en teoría de la elasticidad aparecen estas ecuaciones [1]. Asimismo el tratamiento Lagrangiano de las ecuaciones de orden superior se presenta en el libro de Courant-Hilbert [2] y la función de Green retardada puede ser hallada en la referencia [3].

Actualmente el tema adquiere interés debido a la consideración de teorías gravitatorias con Lagrangianos que contienen términos cuadráticos en el tensor de curvatura [4]. Además debe tenerse en cuenta que la supersimetría en espacios de dimensión superior está íntimamente ligada a las ecuaciones diferenciales de orden superior tal como se muestra en la referencia [5]. En ella se demuestra que para un espacio-tiempo de dimensión $d=4r$ $r \in \mathbb{N}$, los campos componentes $\chi(x)$ del modelo de WESS-ZUMINO satisfacen las ecuaciones de movimiento $(\square^{\omega/2} - m^2)\chi(x) = 0$

donde $\omega = 2^{d/2-1}$, de manera que al incrementar la dimensión del espacio-tiempo, aumenta el orden de las ecuaciones diferenciales que verifican los campos componentes.

En esta tesis seguiremos la formulación dada por [5] a la cual le aplicaremos los procedimientos canónicos que ya han sido descritos en la referencia [6].

Debemos hacer notar, sin embargo que el tratamiento cuántico habitual de las teorías cuyas ecuaciones de movimiento son superiores a dos conduce a dificultades tales como la aparición de energías negativas en el espectro, debido a que el Hamiltoniano no resulta definido positivo, métrica

indefinida en el espacio de Hilbert, pérdida de unitariedad, existencia de taquiones, ...etc..

El estudio del taquion en forma clásica ha sido realizado por diferentes autores. Puede consultarse por ejemplo la referencia [7], donde además se da una bibliografía completa sobre este tema. En forma cuántica el taquion ha sido motivo de tratamiento por parte de diversos autores. Mencionaremos por ejemplo las referencias [8] y [9], haciendo la salvedad que la cuantificación obtenida en la referencia [8] no es invariante Poincaré, tal como se muestra en la referencia [9]. En la referencia [10] se muestra la imposibilidad de construir una matriz S unitaria que tiene taquiones en sus estados asintóticos. Además debe aclararse que el tratamiento cuántico del taquion escapa a la formulación conocida de la teoría cuántica de campos tal como se halla en la referencia [11], en donde se trabaja en un espacio de distribuciones de tipo S' . En efecto, la aparición de soluciones exponenciales reales hace que el taquion escape a este tratamiento pues dicha solución no es una distribución del tipo S' .

El desarrollo de esta tesis es el siguiente: en el capítulo II damos un breve tratamiento de la supersimetría simple en seis dimensiones y damos las definiciones básicas que serán utilizadas durante este trabajo.

En el capítulo III describimos los procedimientos Lagrangianos para ecuaciones de orden superior. En el IV se presenta la cuantificación para el taquion. Dicha cuantificación está exenta de algunas de las dificultades que presenta la cuantificación habitual del taquion y en particular podemos mencionar que es invariante Poincaré.

En el capítulo V estudiamos un modelo escalar simplificado que conduce a una ecuación de orden superior y demostramos que la autoenergía del campo satisface las relaciones de unitariedad. En el VI mostramos la renormalizabilidad del modelo simplificado estudiado en el capítulo V.

En el capítulo VII hacemos el tratamiento del modelo de Wess-Zumino en seis dimensiones . En el capítulo VIII estudiamos la posibilidad de extender el principio variacional de Schwinger-Feynman a teorías ed campos supersimétricas de dimension superior y la coincidencia del las cuantificaciones supersimétrica y canónica.Finalmente en el capítulo IX discutimos los resultados obtenidos.

Debemos mencionar tambien el apéndice A donde se describe la setructura de los espacios de Hilbert equipados de tipo W, espacios que son utilizados por primera vez par tratar teorías de campos, el apéndice B en donde se da una definicion general de distribución delta aun no aparecida en la literatura, una demostracion de la no localización de la $\delta(x+i\epsilon)$ para a real y la extension del $\mathcal{N}/x-a$ al plano complejo.

CAPITULO II

SUPERSIMETRIA SIMPLE EN SEIS DIMENSIONES

0 INTRODUCCION

En este capítulo damos una introducción a la supersimetría simple en seis dimensiones con vista a su posterior utilización. A diferencia de lo que ocurre en el espacio-tiempo ordinario ($d=4$) el conjugado ξ^c de un spinor ξ de un dado tipo es uno del mismo tipo, y, además, dicho spinor ξ^c no se obtiene conjugando en forma habitual un spinor dado ξ pues ξ^+ (el conjugado habitual de un spinor) no es un spinor. Definimos entonces ξ^c conjugando en forma habitual dicho spinor y multiplicándolo por una matriz adecuada, en forma que ahora ξ^c es también un spinor.

A continuación damos la definición de producto escalar de spinores, las matrices de Dirac para un espacio de seis dimensiones y los generadores de la superálgebra simple, de los cuales damos sus expresiones en términos de operadores diferenciales.

Luego damos las definiciones de campos quirales y antiquirales y sus campos componentes. Estudiamos las transformaciones supersimétricas infinitesimales y las variaciones del campo quiral y sus campos componentes por ellas.

Finalmente obtenemos el Lagrangiano del campo quiral, conocido como Lagrangiano de Wess-Zumino y damos su expresión en función de los campos componentes.

1 ESPINORES EN SEIS DIMENSIONES

Las propiedades aquí mencionadas han sido tomadas de las referencias [12] y [13]. En seis dimensiones el número de componentes de un spinor de Weyl es $w=2^3=8$.

Al igual que en el espacio cuatridimensional ordinario, en el espacio seis-dimensional hay dos tipos de spinores de Weyl a los que se los llama spinores de primera y segunda especie.

A ellos los notamos respectivamente:

$$[\theta_\alpha] = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \text{ (1ra especie)} \quad [\theta_\alpha^+] = \begin{pmatrix} \theta_1^+ \\ \theta_2^+ \\ \theta_3^+ \\ \theta_4^+ \end{pmatrix} \text{ (2da especie)} \quad (\text{II.1.1})$$

En seis dimensiones, a diferencia del espacio ordinario ($d=4$) el conjugado de un spinor de un dado tipo es igualmente un spinor del mismo tipo. El spinor conjugado esta definido por [12]

$$\phi^c = c \phi^\dagger \quad \bar{\phi} = \phi^{t c} \quad (\text{II.1.2})$$

donde $c = \gamma^2 \gamma^5$ $\gamma^5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$ con

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3) \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.3})$$

donde σ^i son las matrices de Pauli e \mathbb{I} es la identidad $\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
Segun la referencia [12] (pág 114) el producto escalar de dos spinores de Weyl de distinto tipo está dado por

$$\langle \psi, \phi \rangle = -\psi^t c \phi = \text{escalar} \quad (\text{II.1.4})$$

Así podemos tomar el producto escalar de un spinor de segunda especie $\bar{\psi}$ con uno de primera especie

$$\langle \bar{\psi}, \phi \rangle = -\bar{\psi} c \phi = -\psi^c c \phi = \psi_{\dot{\alpha}} \delta^{\dot{\alpha} \alpha} \phi_{\alpha} = \psi^{\alpha} \phi_{\alpha} = \psi_{\dot{\alpha}} \phi^{\dot{\alpha}} \quad (\text{II.1.5})$$

donde hemos definido

$$\psi_{\alpha} = \psi_{\dot{\alpha}} \delta^{\dot{\alpha} \alpha} \quad (2da \text{ especie}) \quad \phi^{\dot{\alpha}} = \delta^{\dot{\alpha} \alpha} \phi_{\alpha} \quad (1ra \text{ especie}) \quad (\text{II.1.6})$$

En seis dimensiones las matrices γ^{μ} juegan el mismo papel que las matrices de Pauli en cuatro

$$\gamma^{\mu} = (\gamma^0, \gamma^i) \quad (i=1,2,3,4,5) \quad \sigma^{\mu} = (\mathbb{I}, \sigma^i) \quad (i=1,2,3) \quad (\text{II.1.7})$$

$$\{\gamma^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{II.1.8})$$

$$\text{con } \tilde{\gamma}^{\mu} = \gamma^{\mu} \quad \mu=1, \dots, 5 \quad \gamma \quad \tilde{\gamma}^0 = -\gamma^0 = \gamma_0 = \mathbb{I}$$

donde la métrica del espacio tiempo está dada por

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1,1,1,1,1,-1) \quad (\text{II.1.9})$$

Las componentes spinoriales de un vector seis dimensional V están dadas por

$$V_{\alpha}^{\dot{\alpha}} = \gamma_{\alpha}^{\mu\dot{\alpha}} V_{\mu} \quad (\text{II.1.10})$$

Hasta ahora hemos considerado solamente spinores de Weyl de 1ra y 2da especie que generan las representaciones $D(1/2,0)$ y $D(0,1/2)$ respectivamente. Se pueden construir spinores de Dirac mediante la representación $D(1/2,0) \oplus D(0,1/2)$. Para esta representación las matrices de Dirac Γ_{μ} viene dadas por

$$\Gamma_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu} \\ \tilde{\gamma}_{\mu} & 0 \end{pmatrix} \quad \{ \Gamma_{\mu}, \Gamma_{\nu} \} = 2g_{\mu\nu} \quad (\text{II.1.11})$$

Podemos definir entonces la matriz de trasposición \mathcal{C} mediante

$$\mathcal{C} \Gamma_{\mu} = -\Gamma_{\mu}^t \mathcal{C} \quad \mathcal{C}^2 = \mathbb{I}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^t = \Gamma_0 \Gamma_2 \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.12})$$

2 SUPERSIMETRIA SIMPLE EN SEIS DIMENSIONES

Los generadores de la superálgebra simple en seis dimensiones son dos generadores Q_{α} y $Q^{+\dot{\alpha}}$ y los generadores vectoriales P_{μ} . Ellos verifican

$$\begin{aligned} \{ Q_{\alpha}, Q_{\beta} \} &= 0 \\ \{ Q^{+\dot{\alpha}}, Q^{+\dot{\beta}} \} &= 0 \\ \{ Q_{\alpha}, Q^{+\dot{\alpha}} \} &= -P_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{II.2.1})$$

$$[Q_{\alpha}, P_{\mu}] = 0$$

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0$$

Un elemento cualquiera del grupo de transformaciones de supersimetría puede expresarse en la forma

$$h(x, \theta, \theta^+) = e^{i(x^\mu p_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha - \theta^+_{\dot{\alpha}} Q^{+\dot{\alpha}})} \quad (\text{II.2.2})$$

donde x_μ son las coordenadas del espacio-tiempo, $\theta^+_{\dot{\alpha}}$ es un spinor de segunda especie y $\theta^\alpha = (\delta^{\alpha\dot{\beta}} \theta^+_{\dot{\beta}})^+$. Al espacio cuyas coordenadas son $(x_\mu, \theta^+_{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha)$ se lo llama superespacio. Dado un sistema físico, en una teoría supersimétrica el estado del sistema es un

multiplete tal como sucede con determinadas simetrías de una teoría de campos "habitual", por ejemplo el isospin. Al efectuar una transformación de supersimetría dichos estados se transforman de acuerdo a un elemento del grupo de la supersimetría [14] y pasa a ser una función de las coordenadas del superespacio. Así se define el supercampo $\phi(x, \theta, \theta^+)$

$$\phi(x, \theta, \theta^+) = h(x, \theta, \theta^+) | \rangle \quad (\text{II.2.3})$$

3 OPERADORES DIFERENCIALES

Los generadores dados por (II.2.1) pueden ser representados por operadores diferenciales actuando sobre supercampos [3]. Para ello junto con la derivada habitual

$$\partial_\alpha = \gamma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \quad [\partial_\alpha, f(x)] = \partial_\alpha f(x) \quad (\text{II.3.1})$$

debemos definir las derivadas respecto de las variables de Grassman θ^α y $\theta^+_{\dot{\alpha}}$ a las que llamaremos derivadas "fermionicas" [3]

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \quad \{ \partial_\alpha, \theta^\beta \} = \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \theta^\alpha} = \delta_\alpha^\beta$$

$$(\text{II.3.2})$$

$$\partial^{+\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \theta^{+\dot{\alpha}}} \quad \{ \partial^{+\dot{\alpha}}, \theta^{+\dot{\beta}} \} = \frac{\partial \theta^{+\dot{\beta}}}{\partial \theta^{+\dot{\alpha}}} = \delta^{+\dot{\beta}}_{+\dot{\alpha}}$$

De acuerdo con la fórmula (II.2.3) al realizar una transformación de supersimetría obtenemos un supercampo. Si tomamos un estado

$$| \rangle = e^{i \epsilon^\alpha Q_\alpha} | \rangle \quad (\text{II.3.3})$$

obtendremos un nuevo supercampo

$$\begin{aligned}
 \phi'(x, \theta, \theta^+) &= h(x, \theta, \theta^+) | \rangle \\
 &= e^{i(x_\alpha^\alpha P_\alpha^\alpha + \theta^\alpha Q_\alpha + \theta_\alpha^+ Q^{+\alpha})} e^{i\varepsilon_\alpha^\alpha P_\alpha^\alpha} | \rangle \\
 &= e^{i[(x_\alpha^\alpha + \varepsilon_\alpha^\alpha) P_\alpha^\alpha + \theta^\alpha Q_\alpha + \theta_\alpha^+ Q^{+\alpha}]} | \rangle \\
 &= h(x + \varepsilon, \theta, \theta^+) | \rangle
 \end{aligned}$$

$$\phi'(x, \theta, \theta^+) = \phi(x + \varepsilon, \theta, \theta^+) \quad (\text{II.3.4})$$

Utilizando ahora el desarrollo de Taylor

$$f(x_\alpha^\alpha + \varepsilon_\alpha^\alpha) = e^{\varepsilon_\alpha^\alpha \partial_\alpha^\alpha} f(x_\alpha^\alpha) \quad (\text{II.3.5})$$

la (II.3.4) se transforma en

$$\begin{aligned}
 \phi'(x, \theta, \theta^+) &= e^{\varepsilon_\alpha^\alpha \partial_\alpha^\alpha} \phi(x, \theta, \theta^+) \\
 \phi'(x, \theta, \theta^+) &= e^{i\varepsilon_\alpha^\alpha (-i\partial_\alpha^\alpha)} \phi(x, \theta, \theta^+) \quad (\text{II.3.6})
 \end{aligned}$$

Vemos así que actuando sobre supercampos el operador P_α^α está representado por el operador

$$P_\alpha^\alpha = -i \partial_\alpha^\alpha \quad (\text{II.3.7})$$

De la misma forma se pueden encontrar las expresiones para las cargas Q^α y Q_α^+ [14]

$$\begin{aligned}
 Q_\alpha &= -(i\partial_\alpha + \frac{1}{2}\theta_\alpha^+ \partial_\alpha^\alpha) \\
 Q_\alpha^+ &= -(i\partial_\alpha^+ + \frac{1}{2}\theta^\alpha \partial_\alpha^\alpha) \quad (\text{II.3.8})
 \end{aligned}$$

4 CAMPOS QUIRALES

Los supercampos definidos por (II.2.3) son la base apropiada para la representación de los generadores (II.2.1) mediante operadores diferenciales. Sin embargo no son bases irreducibles. Debemos por lo tanto encontrar bases irreducibles. Para hacerlo definimos los operadores

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \frac{i}{2} \theta_\alpha^\dagger \partial_{\alpha^\dagger} \quad (\text{II.4.1})$$

$$D^{\alpha^\dagger} = \partial^{\alpha^\dagger} + \frac{i}{2} \theta^\alpha \partial_\alpha$$

Estos no son otra cosa que derivadas covariantes en el superspacio y verifican las reglas

$$\{D_\alpha, D^{\alpha^\dagger}\} = -P_\alpha^{\alpha^\dagger}$$

$$\{Q_\alpha, D_\beta\} = \{Q_\alpha, D^{\beta^\dagger}\} = \{Q^{\alpha^\dagger}, D_\beta\} = \{Q^{\alpha^\dagger}, D^{\beta^\dagger}\} = 0$$

$$[D_\alpha, P_\beta^{\beta^\dagger}] = [D^{\alpha^\dagger}, P_\beta^{\beta^\dagger}] = 0 \quad (\text{II.4.2})$$

Definimos entonces los campos quirales y antiquirales como las soluciones de

$$D^{\alpha^\dagger} \phi = 0 \quad (\text{quiral})$$

$$D_\alpha \psi = 0 \quad (\text{antiquiral}) \quad (\text{II.4.3})$$

El supercampo obtenido por una transformación de supersimetría de un campo quiral o antiquiral tiene dicho caracter. En efecto como consecuencia de (II.4.2)

$$D^{\beta^\dagger} e^{i(x_\alpha^\dagger P_\alpha^{\alpha^\dagger} + \theta^\alpha Q_\alpha + \theta_\alpha^\dagger Q^{\alpha^\dagger})} \phi =$$

$$= e^{i(x_\alpha^\dagger P_\alpha^{\alpha^\dagger} + \theta^\alpha Q_\alpha + \theta_\alpha^\dagger Q^{\alpha^\dagger})} D^{\beta^\dagger} \phi = 0$$

e igual para D_α .

De acuerdo a (II.4.3) en los campos quirales las variables X y θ^\dagger deben aparecer en la

combinacion

$$x_{\alpha}^{\alpha} - \frac{i}{2} \theta_{\alpha}^{\dagger} \theta^{\alpha}$$

o sea

$$\phi(x, \theta, \theta^{\dagger}) = \phi_0(x_{\alpha}^{\alpha} - \frac{i}{2} \theta_{\alpha}^{\dagger} \theta^{\alpha}, \theta^{\alpha})$$

que puede ser escrita usando (II.3.5) como

$$\phi(x, \theta, \theta^{\dagger}) = e^{-\frac{i}{2} \theta_{\alpha}^{\dagger} \theta^{\alpha} \partial_{\alpha}^{\dagger}} \phi_0(x, \theta) \quad (\text{II.4.4})$$

Es posible mostrar que los campos quirales (II.4.4) son una base irreducible para las transformaciones (II.2.2)

5 CAMPOS COMPONENTES

La funcion más general $\phi_0(x, \theta)$ puede ser escrita

$$\phi_0(x, \theta) = \sum_{s=0}^4 \frac{1}{s!} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_s} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) \quad (\text{II.5.1})$$

con solo tener en cuenta que θ^{α} es una variable de Grassman cuyo cuadrado es nulo. La (II.5.1) puede ser escrita

$$\phi_0(x, \theta) = \psi(x) + \sum_{s=1}^3 \frac{1}{s!} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_s} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x) + \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 F(x) \quad (\text{II.5.2})$$

donde hemos definido

$$F(x) = \psi_{1234}(x) \quad (\text{II.5.3})$$

Los campos $\psi, \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ ($s=1,2,3$) y F son llamados los campos componentes del supercampo quiral.

El desarrollo de (II.4.4) en campos componentes es

$$\begin{aligned} \phi(x, \theta, \theta^{\dagger}) = & \psi(x) + \theta^{\alpha_1} \psi_{\alpha_1}(x) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) + \frac{1}{3!} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \theta^{\alpha_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x) + \\ & + \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 F(x) + \dots + \dots + \dots + \dots \quad (\text{II.5.4}) \\ & + \frac{1}{24} \frac{1}{4!} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \theta^{\alpha_3} \theta^{\alpha_4} \theta_{\alpha_1}^{\dagger} \theta_{\alpha_2}^{\dagger} \theta_{\alpha_3}^{\dagger} \theta_{\alpha_4}^{\dagger} \partial_{\alpha_1}^{\dagger} \partial_{\alpha_2}^{\dagger} \partial_{\alpha_3}^{\dagger} \partial_{\alpha_4}^{\dagger} \psi(x) \end{aligned}$$

6 TRANSFORMACIONES INFINITESIMALES

Estudiaremos ahora las transformaciones producidas en los campos por variaciones infinitesimales en los parámetros de un elemento del grupo de las supersimetrías. Por ejemplo el desplazamiento $x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu$ produce en un supercampo el cambio (a_μ infinitesimal)

$$\begin{aligned} \phi'(x, \theta, \theta^+) &= e^{i a_\alpha^\mu P_\mu^\alpha} \phi(x, \theta, \theta^+) \\ \delta \phi(x, \theta, \theta^+; a) &= a_\alpha^\mu \partial_\mu^\alpha \phi(x, \theta, \theta^+) = \quad (\text{II.6.1}) \\ &= \partial_\alpha^\mu [a_\alpha^\mu \phi(x, \theta, \theta^+)] \end{aligned}$$

donde por ser la variación una divergencia utilizamos la notación DIV. Por otra parte veremos mas adelante que terminos que se reduzcan a divergencias no nos van a interesar.

Si ahora realizamos el cambio $x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu$ $\theta^\alpha \rightarrow \theta^\alpha + \rho^\alpha \theta^+$ $\theta^+ \rightarrow \theta^+ + \rho^+ \theta^\alpha$ tendremos

$$\begin{aligned} \phi'(x, \theta, \theta^+) &= e^{i(a_\alpha^\mu P_\mu^\alpha + \rho^\alpha Q_\alpha + \rho^+ Q^+)} \phi \quad (\text{II.6.2}) \\ \delta \phi &= i(a_\alpha^\mu P_\mu^\alpha + \rho^\alpha Q_\alpha + \rho^+ Q^+) \phi \end{aligned}$$

o sea

$$\delta_x \phi = \text{Div.}$$

$$\delta_\theta \phi = \rho^\alpha Q_\alpha \phi + \text{Div} \quad (\text{II.6.3})$$

$$\delta_{\theta^+} \phi = \rho^+ Q^+ \phi + \text{Div}$$

Un supercampo tiene el desarrollo

$$\phi(x, \theta, \theta^+) = \psi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \theta^+_{\dot{\alpha}} \psi^{+\dot{\alpha}}(x) + \dots + \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 \theta^+_{\dot{1}} \theta^+_{\dot{2}} \theta^+_{\dot{3}} \theta^+_{\dot{4}} D(x)$$

donde la componente que tiene la máxima potencia en θ y θ^+ se llama componente D del supercampo. Su variación es

$$\delta\phi = \delta\psi + \theta^\alpha \delta\psi_\alpha + \theta_{\dot{\alpha}}^+ \delta\psi^{\dot{\alpha}} + \dots + \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 \theta_{\dot{1}}^+ \theta_{\dot{2}}^+ \theta_{\dot{3}}^+ \theta_{\dot{4}}^+ \delta D \quad (\text{II.6.4})$$

Las derivadas spinoriales (II.3.2) eliminan una de las variables θ^α o $\theta_{\dot{\alpha}}^+$ en ϕ . Por lo tanto ningún término de $\rho^\alpha \partial_\alpha \phi$ o $\rho_{\dot{\alpha}}^+ \partial^{\dot{\alpha}} \phi$ está multiplicado por las ocho variables de Grassman θ, θ^+ así que δD tiene que ser uno de los términos de DIV. con lo que

$$\delta D = \text{Div} \quad (\text{II.6.5})$$

Si ahora ϕ es un campo quiral

$$\phi = e^{-\frac{i}{2} \theta_{\dot{\alpha}}^+ \theta^\alpha \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}} \phi_0$$

$$\phi = \phi_0 - \frac{i}{2} \theta_{\dot{\alpha}}^+ \theta^\alpha \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \phi_0 - \frac{1}{2!} \frac{1}{4} \theta_{\dot{\alpha}_1}^+ \theta^\alpha \theta_{\dot{\alpha}_2}^+ \theta^{\alpha_2} \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_2} \phi_0 + \dots$$

+

Sea

$$\phi' = e^{i\rho^\alpha \theta_\alpha} \phi$$

$$\delta\phi = i\rho^\alpha \partial_\alpha \phi = i\rho^\alpha \left(-i\partial_\alpha - \frac{1}{2} \theta_{\dot{\alpha}}^+ \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \right) \left(\phi_0 - \frac{i}{2} \theta_{\dot{\alpha}}^+ \theta^\alpha \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \phi_0 - \frac{1}{8} \theta_{\dot{\alpha}_1}^+ \theta^{\alpha_1} \theta_{\dot{\alpha}_2}^+ \theta^{\alpha_2} \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_2} \phi_0 + \dots \right)$$

(II.6.6)

$$\delta\phi = \rho^\alpha \partial_\alpha \phi_0 - \frac{i}{2} \rho^\alpha \theta_{\dot{\alpha}}^+ \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \phi_0 + \frac{1}{2} \rho^\alpha \theta_{\dot{\alpha}}^+ \theta^\alpha \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \phi_0 + \dots$$

Por otro lado $\delta\phi$ es quiral. Así

$$\delta\phi = \delta\phi_0 - \frac{i}{2} \theta_{\alpha}^{\dagger} \theta^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi_0 - \frac{1}{2!} \frac{1}{4} \theta_{\alpha_2}^{\dagger} \theta^{\alpha_1} \theta_{\alpha_2}^{\dagger} \theta^{\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \phi_0 + \dots \quad (\text{I.6.7})$$

Ahora ϕ_0 es independiente de θ^{\dagger} y por lo tanto $\delta\phi_0$ lo es.

En (II.6.6) el unico termino que es independiente de θ^{\dagger} es $\rho^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi_0$, con lo que podemos escribir

$$\delta\phi_0 = \rho^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi_0 \quad (\text{II.6.8})$$

Teniendo en cuenta que

$$\delta\phi_0 = \delta\psi + \theta^{\alpha} \delta\psi_{\alpha} + \frac{1}{2!} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \delta\psi_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{3!} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \theta^{\alpha_3} \delta\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + \theta^{\dagger} \theta^2 \theta^3 \theta^{\dagger} \delta F$$

$$\rho^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi_0 = \rho^{\alpha} \psi_{\alpha} - \theta^{\alpha} \rho^{\alpha} \psi_{\alpha \alpha_2} + \frac{1}{2!} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \rho^{\alpha} \psi_{\alpha \alpha_1 \alpha_2} - \frac{1}{3!} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \theta^{\alpha_3} \epsilon_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \rho^{\alpha} F \quad (\text{II.6.9})$$

obtenemos comparando potencias de θ

$$\delta\psi = \rho^{\alpha} \psi_{\alpha}$$

$$\delta\psi_{\alpha_1} = -\rho^{\alpha} \psi_{\alpha \alpha_1}$$

$$(\text{II.6.10})$$

$$\delta\psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \rho^{\alpha} \psi_{\alpha \alpha_1 \alpha_2}$$

$$\delta\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = -\rho^\alpha \epsilon_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3} F \quad (\text{II.6.10})$$

$$\delta F = 0$$

Interesa conocer la variación del campo $\bar{\phi} = (\phi)^\dagger$ conjugado del campo quiral ϕ por la misma transformación. La expresión para $\bar{\phi}$ es

$$\bar{\phi} = e^{\frac{i}{2} \theta_{\alpha}^+ \theta^\alpha \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}}} \bar{\phi}_0(x, \theta^+)$$

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_0 + \frac{i}{2} \theta_{\alpha}^+ \theta^\alpha \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \bar{\phi}_0 - \frac{i}{8} \theta_{\alpha_1}^+ \theta^{\alpha_1} \theta_{\alpha_2}^+ \theta^{\alpha_2} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \bar{\phi}_0 + \dots \quad (\text{II.6.11})$$

+ - - -

El cambio $\bar{\phi}$ es

$$\bar{\phi}' = e^{i\rho^\alpha Q_\alpha} \bar{\phi}$$

$$\delta\bar{\phi} = i\rho^\alpha Q_\alpha \bar{\phi}$$

(II.6.12)

$$\delta\bar{\phi} = i\rho^\alpha (-i\partial_\alpha - \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^+ \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}}) (\bar{\phi}_0 + \frac{i}{2} \theta_{\alpha_1}^+ \theta^{\alpha_1} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \bar{\phi}_0 - \frac{i}{8} \theta_{\alpha_1}^+ \theta^{\alpha_1} \theta_{\alpha_2}^+ \theta^{\alpha_2} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \bar{\phi}_0 + \dots)$$

Como $\partial_\alpha \bar{\phi}_0 = 0$ ya que $\bar{\phi}_0$ es función de x y θ^+

$$\delta\bar{\phi} = -i\rho^\alpha \theta_{\alpha}^+ \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \bar{\phi}_0 + \frac{i}{4} \rho^\alpha \theta_{\alpha}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \theta^{\alpha_2} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \bar{\phi}_0 + \dots$$

(II.6.13)

Simultáneamente es

$$\delta\bar{\phi} = \delta\bar{\phi}_0 + \frac{i}{2} \theta_{\alpha}^+ \theta^\alpha \partial_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \delta\bar{\phi}_0 + \dots \quad (\text{II.6.14})$$

El primer término de (II.6.13) es independiente de θ al igual que $\delta\bar{\Phi}_0$ en (II.6.14) por lo que

$$\delta\bar{\Phi}_0 = -i \rho^\alpha \theta_{\alpha_1}^+ \partial_{\alpha_1}^+ \bar{\Phi}_0 \quad (\text{II.6.15})$$

El cálculo de las variaciones de los campos componentes requiere mas elaboracion

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0 = & \psi^+_{\alpha_1} \theta_{\alpha_2}^+ \psi^{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{2!} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \psi^{\alpha_1 \alpha_2} - \\ & \frac{1}{3!} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \theta_{\alpha_3}^+ \psi^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + \frac{1}{4!} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \theta_{\alpha_3}^+ \theta_{\alpha_4}^+ F^+ \end{aligned} \quad (\text{II.6.16})$$

Utilizando (II.6.15) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Phi}_0 = & -\theta_{\alpha_1}^+ (-i \rho^\alpha \partial_{\alpha_1}^+ \psi^+) + \frac{1}{2!} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ (i \rho^\alpha \delta_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1}^+ \psi^{\beta_1 \beta_2}) \\ & - \frac{1}{3!} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \theta_{\alpha_3}^+ \left(-\frac{i}{2!} \rho^\alpha \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \partial_{\alpha_1}^+ \psi^{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \right) + \\ & + \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \theta_{\alpha_3}^+ \theta_{\alpha_4}^+ \left(\frac{i}{3!} \rho^\alpha \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_1}^+ \psi^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.6.17})$$

donde $\delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ es la delta de Kronecker generalizada [15].
Ademas

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Phi}_0 = & \delta\psi^+_{\alpha_1} \theta_{\alpha_2}^+ \psi^{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{1}{2!} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \delta\psi^{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{1}{3!} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \theta_{\alpha_3}^+ \delta\psi^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \\ & + \frac{1}{4!} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \theta_{\alpha_1}^+ \theta_{\alpha_2}^+ \theta_{\alpha_3}^+ \theta_{\alpha_4}^+ \delta F^+ \end{aligned} \quad (\text{II.6.18})$$

Comparando (II.6.17) con (II.6.18) se obtiene

$$\delta\psi = 0$$

$$\delta\psi + \alpha_1 = -i p^\alpha \partial_\alpha \psi + \alpha_1$$

$$\delta\psi + \alpha_1 \alpha_2 = i p^\alpha \delta_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_\alpha \psi + \beta_1 \beta_2$$

$$\delta\psi + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{i}{2!} p^\alpha \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \partial_\alpha \psi + \beta_1 \beta_2 \beta_3 \quad (\text{II. 6.19})$$

$$\delta F = \frac{i}{3!} p^\alpha \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_\alpha \psi + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

7 LAGRANGIANO DE UN CAMPO QUIRAL

De acuerdo con (II.6.5) y (II.6.10) las componentes F y D del campo quiral resultan aptas para construir un lagrangiano hermítico y supersimétrico.

Así el Lagrangiano apropiado, llamado de "Wess-Zumino" resulta ser [5]

$$\mathcal{L} = \bar{\phi} \phi|_D + \frac{m^2}{2} \phi^2|_F + \text{H.C.} + \text{T.I} \quad (\text{II. 7.1})$$

donde $|_D$ y $|_F$ significan componentes D y F de $\bar{\phi} \phi$ y ϕ^2 respectivamente, H.C significa conjugado hermítico y T.I términos de interacción.

Con este Lagrangiano la acción es invariante supersimétrico ya que el producto de campos quirales es quiral y las variaciones de las componentes D y F por una transformación supersimétrica son divergencias. Utilizando las expresiones (II.4.4), (II.6.11) y eliminando los términos de interacción en (II.7.1) resulta ser

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} \psi + \square^2 \psi - \frac{1}{96} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_1} \psi + \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} \psi + \frac{1}{64} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_3} \partial_{\alpha_4} \psi + \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \psi +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{96} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \psi \\
& + \frac{1}{16} \square^2 \psi + \psi + \frac{i}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1} \\
& - \frac{i}{16} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \psi_{\alpha_1} \\
& + \frac{i}{16} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \psi_{\alpha_1} \\
& - \frac{i}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \psi_{\alpha_1} \\
& + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_3 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& - \frac{i}{16} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& + \frac{i}{72} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \\
& - \frac{i}{72} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + F + F \\
& - u^2 (\psi F - \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}) \\
& + \frac{1}{8} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \psi_{\alpha_3 \alpha_4} + \psi + F + \\
& - \frac{1}{6} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \psi + \dot{\alpha}_2 \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \psi + \frac{1}{8} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \psi + \dot{\alpha}_3 \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi).
\end{aligned}
\tag{II.7.2}$$

Observese que en la expresion de \mathcal{L} (II.7.2) aparecen terminos que contienen derivadas de orden superior. Estos términos darán origen a ecuaciones de Euler-Lagrange, que, naturalmente, serán de orden superior.

CAPITULO III

PROCEDIMIENTOS LAGRANGIANOS DE ORDEN SUPERIOR

0_INTRODUCCION

En este capítulo obtendremos las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de un lagrangiano que contiene términos que son derivadas de orden superior de los campos. Veremos que las ecuaciones obtenidas (ecuaciones (III.1.7)) contienen términos con derivadas de orden superior. Veremos además que la corriente conservada obtenida a partir de una simetría contiene términos de orden superior y calcularemos como caso particular de esta el tensor de impulso-energía correspondiente a dicho Lagrangiano.

1_ECUACIONES DE LAGRANGE DE ORDEN SUPERIOR

En capítulos posteriores estudiaremos el Lagrangiano (II.7.2). Dicho lagrangiano es uno del tipo

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\phi_A, \partial_\rho \phi_A, \partial_\rho \partial_{\rho_2} \phi_A, \partial_\rho \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \phi_A, \dots) \quad A=1, 2, \dots, s. \quad (\text{III.1.1})$$

Otendremos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al Lagrangiano (III.1) en un espacio tiempo n-dimensional.

De acuerdo con el principio de mínima acción podemos escribir

$$S = \int \mathcal{L}_0 d^N x \quad (\text{III.1.2})$$

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L}_0 d^N x = 0 \quad (\text{III.1.3})$$

con

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_0 = & \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi_A} \delta \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_{\rho_1} \phi_A} \partial_{\rho_1} \delta \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \phi_A} \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \delta \phi_A + \dots + \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \dots \partial_{\rho_m} \phi_A} \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \dots \partial_{\rho_m} \delta \phi_A + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

y donde hemos usado el convenio de sumación de índices repetidos de Einstein. Ahora

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_m \phi_A} \partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_m \delta \phi_A = \\
& (-1)^m \left(\partial r_m \dots \partial r_2 \partial r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_m \phi_A} \right) \delta \phi_A \\
& + (-1)^{m-1} \partial r_1 \left[\left(\partial r_m \dots \partial r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_2 \partial r_3 \dots \partial r_m \partial r_1 \phi_A} \right) \delta \phi_A \right] + \dots + \\
& + (-1)^{m-(j-1)} \partial r_2 \left[\left(\partial r_m \dots \partial r_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_j \dots \partial r_m \partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_{j-1} \phi_A} \right) \partial r_2 \partial r_3 \dots \partial r_{j-1} \delta \phi_A \right] + \dots \\
& + \dots + \dots + \dots + \dots \\
& + (-1)^{m-m} \partial r_2 \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_m \phi_A} \right) \partial r_2 \partial r_3 \dots \partial r_m \delta \phi_A \right]. \quad (\text{III.1.5})
\end{aligned}$$

Utilizando (III.1.4) y (III.1.5) e introduciéndolas en (III.1.3), al integrar por partes y teniendo en cuenta que $\delta \phi_A = 0$ en la frontera, obtendremos

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \phi_A} + \partial r_1 \partial r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \partial r_2 \phi_A} + \dots + \dots \right. \\
& \left. + (-1)^m \partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_m \phi_A} + \dots \right) \delta \phi_A = 0 \\
& (\text{III.1.6})
\end{aligned}$$

Al ser $\delta \phi_A$ arbitraria debe ser nulo el paréntesis de (III.1.6)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \phi_A} + \partial r_2 \partial r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial r_1 \partial r_2 \dots \phi_A} + \dots + \dots$$

$$+ (-1)^m \partial_{p_m} \dots \partial_{p_2} \partial_{p_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{p_1} \partial_{p_2} \dots \partial_{p_m} \phi_A} + \dots = 0 \quad (\text{III.1.7})$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange para Lagrangianos de orden superior.

2 LA CORRIENTE CONSERVADA DE ORDEN SUPERIOR

Sea la acción (III.1.2). Hallaremos la corriente conservada por una variación arbitraria de las coordenadas y los campos dada por

$$x' = x + \delta x \quad (\text{III.2.1})$$

$$\phi'_A(x') = \phi_A(x) + \delta \phi_A(x) \quad (\text{III.2.2})$$

$$\delta \phi_A(x) = \phi'_A(x') - \phi_A(x) = \phi'_A(x') - \phi'_A(x) + \phi'_A(x) - \phi_A(x)$$

Llamando

$$\delta_0 \phi_A(x) = \phi'_A(x) - \phi_A(x)$$

y teniendo en cuenta que

$$\phi'_A(x') - \phi'_A(x) = \partial_\mu \phi'_A(x) \delta x^\mu$$

podemos escribir

$$\delta \phi_A(x) = \partial_\mu \phi'_A(x) \delta x^\mu + \delta_0 \phi_A(x) \quad (\text{III.2.3})$$

Por lo tanto

$$\delta = \delta x^\mu \partial_\mu + \delta_0 \quad (\text{III.2.4})$$

Ahora

$$d^{\mu}_{x'} = |J| d^{\mu}_x \quad |J| = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$$

$$d^{\mu}_{x'} = d^{\mu}_x + \partial_\mu \delta x^\mu d^{\mu}_x$$

Así

$$\delta d^m x = \partial_\mu \delta x^\mu d^m x \quad (\text{III.2.5})$$

Para (III.1.2) tenemos

$$\delta S = \int \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) + \delta_0 \mathcal{L} d^m x \quad (\text{III.2.6})$$

Sabiendo que

$$\begin{aligned} \delta_0 \mathcal{L} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \delta_0 \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_1 \phi_A} \partial \rho_1 \delta_0 \phi_A + \dots + \dots \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_1 \partial \rho_2 \dots \partial \rho_m \phi_A} \partial \rho_1 \partial \rho_2 \dots \partial \rho_m \delta_0 \phi_A + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.2.7})$$

Utilizando (III.1.5) y teniendo en cuenta que los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento (III.1.7) podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta_0 \mathcal{L} = & \partial_{\rho_1} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_1 \phi_A} - \partial_{\rho_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_2 \partial \rho_1 \phi_A} + \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_2 \partial \rho_3 \partial \rho_1 \phi_A} + \dots + \right. \right. \\ & + (-1)^{m-1} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \dots \partial_{\rho_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_2 \partial \rho_3 \dots \partial \rho_m \partial \rho_1 \phi_A} + \dots \left. \right] \delta_0 \phi_A + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_1 \partial \rho_2 \phi_A} - \right. \\ & \partial_{\rho_3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_3 \partial \rho_1 \partial \rho_2 \phi_A} + \partial_{\rho_3} \partial_{\rho_4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_3 \partial \rho_4 \partial \rho_1 \partial \rho_2 \phi_A} + \dots + \left. \right. \\ & + (-1)^{m-2} \partial_{\rho_3} \partial_{\rho_4} \dots \partial_{\rho_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_3 \dots \partial \rho_m \partial \rho_1 \partial \rho_2 \phi_A} + \dots \left. \right] \partial_{\rho_2} \delta_0 \phi_A + \dots \\ & + \dots \\ & + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_1 \partial \rho_2 \dots \partial \rho_m \phi_A} - \partial_{\rho_{m+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \rho_{m+1} \partial \rho_1 \partial \rho_2 \dots \partial \rho_m \phi_A} + \dots \right] \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \dots \partial_{\rho_m} \delta_0 \phi_A + \dots \\ & + \dots \dots \dots \left. \right\} \quad (\text{III.2.8}) \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}
 [1]_A^{p_1} &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_1} \phi_A} - \partial_{r_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_2} \partial_{r_1} \phi_A} + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{m-1} \partial_{r_2} \partial_{r_3} \dots \partial_{r_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_2} \partial_{r_3} \dots \partial_{r_m} \partial_{r_1} \phi_A} + \dots \right] \\
 [2]_A^{p_1 p_2} &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_1} \partial_{r_2} \phi_A} - \partial_{r_3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_3} \partial_{r_1} \partial_{r_2} \phi_A} + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{m-2} \partial_{r_3} \partial_{r_4} \dots \partial_{r_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_3} \dots \partial_{r_m} \partial_{r_1} \partial_{r_2} \phi_A} + \dots \right] \quad (\text{III.2.9}) \\
 \vdots \\
 [m]_A^{p_1 p_2 \dots p_m} &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_1} \partial_{r_2} \dots \partial_{r_m} \phi_A} - \partial_{r_{m+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{r_{m+1}} \partial_{r_1} \partial_{r_2} \dots \partial_{r_m} \phi_A} + \dots \right] \\
 \vdots
 \end{aligned}$$

Luego podemos escribir (III.2.8)

$$\begin{aligned}
 \delta_0 \mathcal{L} &= \partial_{r_1} \left\{ [1]_A^{p_1} \delta_0 \phi_A + [2]_A^{p_1 p_2} \partial_{r_2} \delta_0 \phi_A + [3]_A^{p_1 p_2 p_3} \partial_{r_2} \partial_{r_3} \delta_0 \phi_A + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \dots + [m]_A^{p_1 p_2 \dots p_m} \partial_{r_2} \partial_{r_3} \dots \partial_{r_m} \delta_0 \phi_A + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right\} \quad (\text{III.2.10})
 \end{aligned}$$

Utilizando (III.2.10) podemos escribir (III.2.6) como

$$\delta S = \int \partial_{\rho_2} \left\{ \mathcal{L}_0 \delta x^{\rho_1} + [1]_A^{\rho_1} \delta \phi_A + [2]_A^{\rho_1 \rho_2} \partial_{\rho_2} \delta \phi_A + \dots + \dots \right. \\ \left. + [M]_A^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_M} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \dots \partial_{\rho_M} \delta \phi_A + \dots \right\} d^M x = 0 \quad (\text{III.2.12})$$

De (III.2.3) es

$$\delta \phi_A(x) = \delta \phi_A(x) - \delta x^{\beta_1} \partial_{\beta_1} \phi_A(x)$$

Con lo que finalmente (III.2.11) toma la forma

$$\delta S = \int \partial_{\rho_1} \left\{ \mathcal{L}_0 \delta x^{\rho_1} - [1]_A^{\rho_1} \delta x^{\beta_1} \partial_{\beta_1} \phi_A - [2]_A^{\rho_1 \rho_2} \partial_{\rho_2} \delta x^{\beta_1} \partial_{\beta_1} \phi_A \right. \\ - [3]_A^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \delta x^{\beta_1} \partial_{\beta_1} \phi_A + \dots + \dots \\ - [M]_A^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_M} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \dots \partial_{\rho_M} \delta x^{\beta_1} \partial_{\beta_1} \phi_A + \dots + \dots \\ \left. + [1]_A^{\rho_1} \delta \phi_A + [2]_A^{\rho_1 \rho_2} \partial_{\rho_2} \delta \phi_A + [3]_A^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \delta \phi_A + \dots \right. \\ \left. + \dots + \dots \right\} d^M x = 0 \\ (\text{III.2.12})$$

Supongamos por ejemplo que las variaciones de los campos y coordenadas dependan de r parámetros infinitesimales $\delta \omega^a$ ($a=1,2,\dots,r$) de modo tal que

$$\delta \phi_A = \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} \delta \omega^a \quad \delta x^{\beta_1} = \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \delta \omega^a \quad (\text{III.2.13})$$

Entonces (III.2.13) toma la forma

$$\delta S = \int \partial_{\rho_1} \left\{ \mathcal{L}_0 \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} - [1]_A^{\rho_1} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A + \dots \right\} d^M x$$

$$- [2]_A^{p_1 p_2} \partial_{p_2} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A - [3]_A^{p_1 p_2 p_3} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A + \dots +$$

$$- [m]_A^{p_1 p_2 \dots p_m} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \dots \partial_{p_m} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A + \dots + [1]_A^{p_1} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} +$$

$$[2]_A^{p_1 p_2} \partial_{p_2} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} + [3]_A^{p_1 p_2 p_3} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} + \dots +$$

$$+ [m]_A^{p_1 p_2 \dots p_m} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \dots \partial_{p_m} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} + \dots +$$

$$+ \dots \left. \vphantom{\frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a}} \right\} \delta \omega^a d^N x = 0$$

(III. 2.14)

See

$$J_a^{p_1} = [1]_A^{p_1} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A + [2]_A^{p_1 p_2} \partial_{p_2} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A +$$

$$+ [3]_A^{p_1 p_2 p_3} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A + \dots +$$

$$+ [m]_A^{p_1 p_2 \dots p_m} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \dots \partial_{p_m} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} \partial_{\beta_1} \phi_A + \dots +$$

$$- \int \delta_{\beta_1}^{p_1} \frac{\delta x^{\beta_1}}{\delta \omega^a} - [1]_A^{p_1} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} - [2]_A^{p_1 p_2} \partial_{p_2} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} -$$

$$- [3]_A^{p_1 p_2 p_3} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} - \dots -$$

$$- [m]_A^{p_1 p_2 \dots p_m} \partial_{p_2} \partial_{p_3} \dots \partial_{p_m} \frac{\delta \phi_A}{\delta \omega^a} - \dots -$$

(III. 2.15)

Con (III.2.15), (III.2.14) puede ser escrita

$$\delta S = - \int \partial_{\rho_i} J_a^{\rho_i} \delta \omega^a d^N x = 0 \quad (\text{III.2.16})$$

Al ser $\delta \omega^a$ arbitraria (III.2.16) implica

$$\partial_{\rho_i} J_a^{\rho_i} = 0 \quad (\text{III.2.17})$$

Lo que nos dice que las corrientes $J_a^{\rho_i}$ son conservadas ($a=1,2,\dots,r$).

3 TENSOR DE IMPULSO ENERGIA

Elijamos especializar (III.3.13) al caso de una variación infinitesimal de las coordenadas del espacio tiempo.

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \delta \omega^{\rho}$$

donde $\delta \omega^{\rho}$ no depende de las coordenadas espaciales. En ese caso, teniendo en cuenta la invariancia de los campos por desplazamientos obtenemos

$$\phi'_A(x') = \phi_A(x)$$

Así

$$\delta \phi_A = 0$$

$$\delta x^{\rho} = \delta \omega^{\rho}$$

$$\frac{\delta x^{\rho}}{\delta \omega^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\rho}$$

En ese caso

$$J_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu} \quad \mu = a \quad \nu = \rho_i$$

A T_{μ}^{ν} se lo llama tensor de impulso-energía y está dado de acuerdo a (III.2.15) por

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{\nu} = & [1]_A^{\nu} \partial_{\mu} \phi_A + [2]_A^{\nu \rho_2} \partial_{\rho_2} \partial_{\mu} \phi_A + [3]_A^{\nu \rho_2 \rho_3} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \partial_{\mu} \phi_A + \dots + \dots \\
& + [m]_A^{\nu \rho_2 \dots \rho_m} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \dots \partial_{\rho_m} \partial_{\mu} \phi_A + \dots + \dots \\
& + \dots - S_{\mu}^{\nu} \mathcal{L} \qquad \qquad \qquad (\text{III.3.1})
\end{aligned}$$

o de acuerdo a los valores de los corchetes dados por (III.2.9)

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{\nu} = & \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} \phi_A} - \partial_{\rho_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_1} \partial_{\nu} \phi_A} + \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \partial_{\nu} \phi_A} + \dots \right. \\
& \left. + \dots + (-1)^{m-1} \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \partial_{\nu} \phi_A} \right] \partial_{\mu} \phi_A + \\
& + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} \partial_{\rho_1} \phi_A} - \partial_{\rho_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_2} \partial_{\nu} \partial_{\rho_1} \phi_A} + \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \partial_{\nu} \partial_{\rho_1} \phi_A} + \dots + \dots \right. \\
& \left. + (-1)^{m-2} \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_2} \partial_{\rho_3} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \partial_{\nu} \partial_{\rho_1} \phi_A} \right] \partial_{\rho_1} \partial_{\mu} \phi_A + \\
& + \dots + \dots + \\
& + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \phi_A} - \partial_{\rho_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_m} \partial_{\nu} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \phi_A} + \dots \right. \\
& \left. + \partial_{\rho_m} \partial_{\rho_{m+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\rho_m} \partial_{\rho_{m+1}} \partial_{\nu} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \phi_A} + \dots \right. \\
& \left. + \dots + \dots \right] \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \dots \partial_{\rho_{m-1}} \partial_{\mu} \phi_A + \dots + \dots
\end{aligned}$$

$$+ \dots - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L} \quad (\text{III. 3.2})$$

De (III.2.17) sabemos que T_{μ}^{ν} es conservado

$$\partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = 0 \quad (\text{III. 3.3})$$

Obsérvese que en las ecuaciones de movimiento (III.1.7) los términos que contienen derivadas de orden superior tienen la expresión $(-1)^m \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_m} \phi_A}$ con $m \geq 2$.

CAPITULO IV

EL CAMPO DEL TAQUION ESCALAR

0 _ INTRODUCCION

En este capítulo abordaremos la cuantificación del taquion escalar, para lo cual debemos primeramente resolver la ecuacion de movimiento. En las teorías que tienen solamente bradiones, las soluciones de las ecuaciones de movimiento se obtienen en el espacio de Hilbert equipado (S, L^2, S^*) .

Para las teorías con taquiones este espacio no es apto pues en las soluciones de las ecuaciones de movimiento aparecen exponenciales reales. Debemos por lo tanto utilizar un espacio que generalice a (S, L^2, S^*) . Un espacio apto es $(W_{x^j, t, a}, L, W_{x^j, t, a})$, que contiene a (S, L^2, S^*) y admite soluciones exponenciales reales como distribuciones.

Una vez solucionada la ecuacion de movimiento, cuantificamos el campo utilizando el principio variacional de Schwinger-Feynman, calculamos las autofunciones y estudiamos el espectro.

A diferencia del campo escalar bradiónico, para el cual la superficie que define la frecuencia W es un hiperboloide de dos hojas que no intersecta al origen, la superficie para el taquión es un hiperboloide de una hoja que contiene puntos para los cuales $W=0$. Esto nos permite pasar de soluciones con frecuencia positiva a soluciones con frecuencia negativa por medio de una transformación de Lorentz propia (cosa que no sucede con el bradión ya que las dos hojas del hiperboloide son propiamente invariantes) para lo cual debemos suponer entonces que $a_2(t=0) \neq 0$ siendo $a_2(t=0)$ un operador de aniquilación.

Calculamos luego el propagador del campo. Dicho propagador resulta ser el propagador de Feynman habitual para los taquiones al que se le restan los polos tanto del eje real como del eje imaginario. El efecto obtenido es sacar al taquión de la capa de masa, impidiéndole aparecer como una partícula libre.

Finalmente demostramos la invariancia de Poincaré de la cuantificación obtenida.

1 _ CUANTIFICACION DEL TAQUION ESCALAR

El Lagrangiano que describe a un taquión escalar es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (\text{IV.1.1})$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \quad (\text{IV.1.2})$$

obtenemos

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (\text{IV.1.3})$$

De acuerdo con (III.3.2) el tensor de impulso-energía correspondiente a (IV.1.1) es

$$T_{\mu}^{\nu} = -\partial^{\nu}\phi\partial_{\mu}\phi + \delta_{\mu}^{\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_{\rho}\phi\partial^{\rho}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right) \quad (\text{IV.1.4})$$

y el impulso es entonces

$$P_{\mu} = \int T_{\mu}^0 d^{n-1}x \quad (\text{IV.1.5})$$

(estamos llevando a cabo la cuantificación en un espacio de Minkowsky de dimensión n y tensor métrico

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1).$$

Debemos resolver la ecuación de movimiento (IV.1.3). Lo haremos en el espacio de Hilbert equipado $(W_{x^i/t, L^2}, W_{x^i/t, L^2})$ (Ver apéndice A). En dicho espacio $-i\partial_{\mu}$ es autoadjunto y por lo tanto la transformada de Fourier es completa. Proponemos entonces para el desarrollo

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{\phi}(u_{\mu}) e^{i u_{\mu} x^{\mu}} d^n x \quad (\text{IV.1.6})$$

De acuerdo con (IV.1.3) es entonces

$$(\kappa_0^2 - \vec{u}^2 + m^2) \tilde{\phi}(u_{\mu}) = 0 \quad (\text{IV.1.7})$$

Por lo tanto

$$\left[\kappa_0^2 - (\sqrt{\vec{u}^2 + m^2})^2 \right] \tilde{\phi}(u_{\mu}) = 0 \quad (\text{IV.1.8})$$

La solución de (IV.1.18) para $u^2 > m^2$ es

$$\tilde{\phi}(u_{\mu}) = \phi_1(\vec{u}) \delta(\kappa_0 - \sqrt{\vec{u}^2 + m^2}) + \phi_2(\vec{u}) \delta(\kappa_0 + \sqrt{\vec{u}^2 + m^2}) \quad (\text{IV.1.9})$$

Si $u^2 < m^2$

$$\left[\kappa_0^2 + (\sqrt{m^2 - \vec{u}^2})^2 \right] \tilde{\phi}(u_{\mu}) = 0 \quad (\text{IV.1.10})$$

que tiene como solución

$$\tilde{\phi}(u_{\mu}) = \phi_3(\vec{u}) \delta(\kappa_0 + i\sqrt{m^2 - \vec{u}^2}) + \phi_4(\vec{u}) \delta(\kappa_0 - i\sqrt{m^2 - \vec{u}^2}) \quad (\text{IV.1.11})$$

donde $\delta(\kappa_0 + i\sqrt{m^2 - \bar{n}^2})$ y $\delta(\kappa_0 - i\sqrt{m^2 - \bar{n}^2})$ están definidas en el apéndice B.

Así sumando las soluciones (IV.1.9) y (IV.1.11) obtenemos la solución completa

$$\begin{aligned} \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int & \left\{ \left[\phi_1(\bar{n}) \delta(\kappa_0 - \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}) + \phi_2(\bar{n}) \delta(\kappa_0 + \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}) \right] H(\bar{n}^2 - m^2) + \right. \\ & \left. + \left[\phi_3(\bar{n}) \delta(\kappa_0 + i\sqrt{m^2 - \bar{n}^2}) + \phi_4(\bar{n}) \delta(\kappa_0 - i\sqrt{m^2 - \bar{n}^2}) \right] H(m^2 - \bar{n}^2) \right\} \times \\ & \times e^{i\bar{n} \cdot x} d^n \bar{n} \end{aligned}$$

donde

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1.12})$$

Integrando la variable κ_0 es

$$\begin{aligned} \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int & \left[\left(\phi_1(\bar{n}) e^{i\omega x_0} + \phi_2(\bar{n}) e^{-i\omega x_0} \right) H(\bar{n}^2 - m^2) + \right. \\ & \left. + \left(\phi_3(\bar{n}) e^{-\omega x_0} + \phi_4(\bar{n}) e^{\omega x_0} \right) H(m^2 - \bar{n}^2) \right] e^{i\bar{n} \cdot \vec{x}} d^{n-1} \bar{n} \end{aligned}$$

donde

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{\bar{n}^2 - m^2} & \bar{n}^2 > m^2 \\ \sqrt{m^2 - \bar{n}^2} & m^2 > \bar{n}^2 \end{cases} \quad (\text{IV.1.13})$$

Definiendo

$$a_i(\bar{n}) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \phi_i(\bar{n}) \quad b_i(\bar{n}) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \phi_{i+2}(\bar{n}) \quad i=1,2 \quad (\text{IV.1.14})$$

Obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \int & \left[\left(\frac{a_1(\bar{n})}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega x_0} + \frac{a_2(\bar{n})}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega x_0} \right) H(\bar{n}^2 - \omega^2) \right. \\ & \left. + \left(\frac{b_1(\bar{n})}{\sqrt{2\omega}} e^{-\omega x_0} + \frac{b_2(\bar{n})}{\sqrt{2\omega}} e^{\omega x_0} \right) H(\omega^2 - \bar{n}^2) \right] e^{i\bar{n} \cdot \bar{x}} d^{n-1}\bar{n} \quad (\text{IV.1.15}) \end{aligned}$$

Con la solución (IV.1.15), P_μ dado por (IV.1.5) tiene la expresión

$$\begin{aligned} P_\mu = \int & \left\{ \kappa_\mu (a_1(\bar{n})a_2(-\bar{n}) + a_2(-\bar{n})a_1(\bar{n})) H(\bar{n}^2 - \omega^2) + \right. \\ & \left. + i\kappa_\mu (b_1(\bar{n})b_2(-\bar{n}) + b_2(-\bar{n})b_1(\bar{n})) H(\omega^2 - \bar{n}^2) \right\} \frac{d^{n-1}\bar{n}}{2} \quad (\text{IV.1.16}) \end{aligned}$$

donde

$$\kappa_0 = \begin{cases} \omega & \bar{n}^2 > \omega^2 \\ i\omega & \bar{n}^2 < \omega^2 \end{cases} \quad (\text{IV.1.17})$$

y W está dada en (IV.1.13)

Para implementar la cuantificación utilizamos el Principio Variacional de Schwinger-Feynman

$$\delta \phi = i [\delta S, \phi] \quad (\text{IV.1.18})$$

del cual se deduce la ecuación de Heisenberg

Para cuantificar el campo utilizamos la componente 0 de (IV.1.19)

$$\partial_0 \phi = i [\rho_0, \phi] \quad (\text{IV.1.20})$$

Utilizando (IV.1.15) e introduciéndola en (IV.1.20) obtenemos las ecuaciones

$$[\rho_0, a_1(\bar{u})] = \omega a_1(\bar{u}) \quad \bar{u}^2 > m^2 \quad (\text{IV.1.21.a})$$

$$[\rho_0, a_2(-\bar{u})] = -\omega a_2(-\bar{u}) \quad \bar{u}^2 > m^2 \quad (\text{IV.1.21.b})$$

$$[\rho_0, b_1(\bar{u})] = i\omega b_1(\bar{u}) \quad \bar{u}^2 < m^2 \quad (\text{IV.1.21.c})$$

$$[\rho_0, b_2(\bar{u})] = -i\omega b_2(-\bar{u}) \quad \bar{u}^2 < m^2 \quad (\text{IV.1.21.d})$$

De (IV.1.21.a) con la expresión (IV.1.16) para ρ_0 es

$$\begin{aligned} \int d^{\mu-1} u' \omega' [a_2(-\bar{u}'), a_1(\bar{u})] a_1(\bar{u}') H(\bar{u}'^2 - m^2) H(\bar{u}^2 - m^2) = \\ = \int d^{\mu-1} u' \omega' a_1(\bar{u}') \delta(\bar{u} - \bar{u}') H(\bar{u}'^2 - m^2) \end{aligned}$$

De esta igualdad se deduce

$$[a_2(-\bar{u}'), a_1(\bar{u})] = \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad \bar{u}^2 > m^2 \quad \bar{u}'^2 > m^2 \quad (\text{IV.1.22})$$

En igual forma

$$\begin{aligned} \int d^{\mu-1} u' (-\omega') [b_2(-\bar{u}'), b_1(\bar{u})] b_1(\bar{u}') H(m^2 - \bar{u}'^2) H(m^2 - \bar{u}^2) = \\ = i \int d^{\mu-1} u' \omega' b_1(\bar{u}') \delta(\bar{u} - \bar{u}') H(\bar{u}^2 - m^2) \end{aligned}$$

de donde

$$[b_1(\bar{n}), b_2(-\bar{n}')] = i \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad \bar{n}^2 < \omega^2 \quad \omega'^2 < \omega^2 \quad (\text{IV.1.23})$$

Para deducir (IV.1.22) y (IV.1.23) hemos utilizado

$$[a_i(\bar{n}), b_j(\bar{n}')] = 0 \quad (\text{IV.1.24})$$

2 AUTOFUNCIONES

De (IV.1.16) vemos que para $\bar{n}^2 > \omega^2$ por ser $a_i^\dagger(\bar{n}) = a_2(-\bar{n})$, para cada \bar{n} , el Hamiltoniano es el correspondiente a un oscilador armónico. Para $\bar{n}^2 < \omega^2$, el Hamiltoniano no corresponde a un oscilador armónico ($b_1^\dagger(\bar{n}) = b_1(-\bar{n})$, $b_2^\dagger(\bar{n}) = b_2(-\bar{n})$) sino que es de la forma $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(q\dot{p} + \dot{q}p)$ con $[q, p] = i$ (si discretizamos las variables) ya que en ese caso

$$[b_1(\bar{n}), b_2(-\bar{n}')] = i \delta_{\bar{n}\bar{n}'}$$

con $\delta_{\bar{n}\bar{n}'}$ la delta de Kronecker.

El problema de autovalores de $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p\dot{q} + \dot{q}p)$ ha sido discutido en la referencia [16]. Daremos aquí una breve explicación. Debemos resolver el problema de autovalores

$$\frac{1}{2}(q\dot{p} + p\dot{q})\psi = \epsilon\psi \quad (\text{IV.2.1})$$

que en la representación q es ($p = -i \frac{d}{dq}$)

$$-\frac{i}{2}\left(\frac{d}{dq}q + q\frac{d}{dq}\right)\psi = \epsilon\psi$$

dando lugar a la ecuación diferencial

$$q \frac{d\psi}{dq} = (i\epsilon - \frac{1}{2})\psi \quad (\text{IV.2.2})$$

Las soluciones de la ecuación (IV.2.2) son (en $W_{x^{1/2}, 1}$)

$$\psi_+(q) = A q_+^{i\epsilon - \frac{1}{2}}$$

$$\psi_-(q) = B q_-^{i\epsilon - \frac{1}{2}} \quad (\text{IV.2.3})$$

donde

$$q_\pm^\lambda = q^\lambda H(q)$$

$$q_{\pm}^{\lambda} = |q|^{\lambda} H(\pm q)$$

Ya que $H(q) \cdot H(-q) = 0$ es evidente que ψ_{+} y ψ_{-} son ortogonales. Debemos calcular las constantes de normalización A y B. Para dos autofunciones distintas $\psi_{+}^{\epsilon_1}$ y $\psi_{+}^{\epsilon_2}$ es

$$\langle \psi_{+}^{\epsilon_1} | \psi_{+}^{\epsilon_2} \rangle = A_1 A_2^* \int_0^{\infty} dq q^{i(\epsilon_1 - \epsilon_2) - 1}$$

Haciendo el cambio de variables

$$q = e^y$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi_{+}^{\epsilon_1} | \psi_{+}^{\epsilon_2} \rangle &= A_1 A_2^* \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{i(\epsilon_1 - \epsilon_2)y} \\ &= A_1 A_2^* 2\pi \delta(\epsilon_1 - \epsilon_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.4})$$

Eligiendo las constantes $A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, las funciones $\psi_{+}^{\epsilon_1}$ y $\psi_{+}^{\epsilon_2}$ son ortonormales. De igual forma se trata ψ_{-} . Así la (IV.2.3) es

$$\begin{aligned} \psi_{+}(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} q^{i\epsilon - \frac{1}{2}} \\ \psi_{-}(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} q^{-i\epsilon - \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{IV.2.5})$$

De acuerdo con (IV.2.5) el desarrollo del campo (IV.1.15) no corresponde a un desarrollo en autofunciones del Hamiltoniano para $\vec{u}^2 < u^2$. En particular debe observarse que la frecuencia $\omega = \sqrt{u^2 - \vec{u}^2}$ no es la energía, ya que esta corresponde a las potencias de q_{+} y q_{-} en (IV.2.5).

3 ESPECTRO

Utilizando (IV.1.15) y (IV.1.16) e introduciendolas en la ecuación (IV.1.19) se obtiene

$$[P_{\mu}, a_i(\vec{u})] = \nu_{\mu} a_i(\vec{u})$$

$$[P_{\mu}, a_2(-\bar{n})] = -\kappa_{\mu} a_2(-\bar{n})$$

$$[P_{\mu}, b_1(\bar{n})] = \kappa_{\mu} b_1(\bar{n})$$

$$[P_{\mu}, b_2(-\bar{n})] = -\kappa_{\mu} b_2(-\bar{n})$$

Para generar todo el espectro de estados elegimos el vacío como el estado de mínima energía que anula P_0 , es decir

$$P_0|0\rangle = 0$$

(IV.3.2) es equivalente a

$$(a_1(\bar{n})a_2(-\bar{n}) + a_2(-\bar{n})a_1(\bar{n}))|0\rangle = 0 \quad \bar{n}^2 > m^2 \quad (\text{IV.3.3.a})$$

$$(b_1(\bar{n})b_2(-\bar{n}) + b_2(-\bar{n})b_1(\bar{n}))|0\rangle = 0 \quad \bar{n}^2 < m^2 \quad (\text{IV.3.3.b})$$

Una vez elegido el vacío, definimos

$$|\bar{n}\rangle_1 = a_1(\bar{n})|0\rangle \quad \bar{n}^2 > m^2$$

$$|\bar{n}\rangle_2 = a_2(-\bar{n})|0\rangle \quad \bar{n}^2 > m^2$$

$$|\bar{n}\rangle'_1 = b_1(\bar{n})|0\rangle \quad \bar{n}^2 < m^2$$

$$|\bar{n}\rangle'_2 = b_2(-\bar{n})|0\rangle \quad \bar{n}^2 < m^2$$

(IV.3.4)

(Debe tenerse en cuenta que $\langle \bar{n} |' = \langle 0 | b_2(-\bar{n})$ $\langle \bar{n} | = \langle 0 | b_1(\bar{n})$). De acuerdo con (IV.3.1) y (IV.3.2) los estados (IV.3.4) satisfacen

$$P_{\mu}|\bar{n}\rangle_1 = \kappa_{\mu}|\bar{n}\rangle_1$$

$$P_{\mu}|\bar{n}\rangle_2 = -\kappa_{\mu}|\bar{n}\rangle_2$$

$$P_{\mu}|\bar{n}\rangle'_1 = \kappa_{\mu}|\bar{n}\rangle'_1$$

$$P_{\mu}|\bar{n}\rangle'_2 = -\kappa_{\mu}|\bar{n}\rangle'_2$$

(IV.3.5)

Los estados (IV.3.5) generan todo el espectro de partícula para el taquión. Obsérvese que en (IV.3.4) no hemos elegido como se hace habitualmente $a_2(-\vec{n})|0\rangle = 0$ $b_2(-\vec{n})|0\rangle = 0$. El motivo de esta elección es el siguiente : para un bradion se debe satisfacer

$$k^2 + m^2 = 0$$

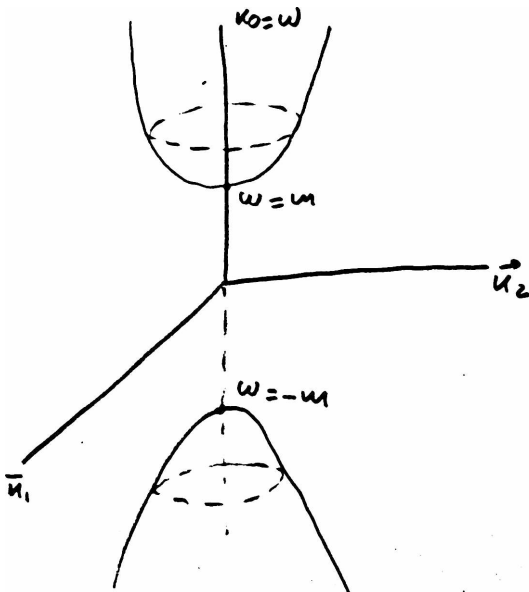
o

$$\bar{k}^2 - k_0^2 + m^2 = 0 \quad (\text{IV.3.6})$$

lo que conduce a

$$k_0 = \omega = \pm \sqrt{\bar{k}^2 + m^2}$$

(IV.3.6) y (IV.3.7) definen una variedad Lorentziana que en este caso es un hiperboloide de dos hojas.



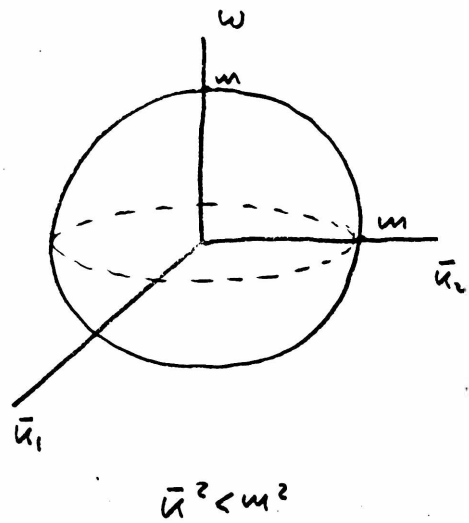
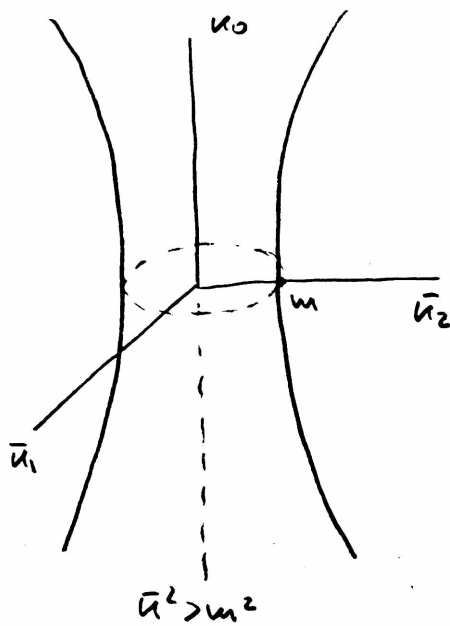
Dichas hojas corresponden a los dos posibles valores del signo de w . Por una transformación de Lorentz correspondiente a la napa conexa, también llamada ortocrona o restringida, notada por L y con las propiedades $\det L = 1, \Lambda^0_0 \geq 1$ (donde Λ^{μ}_{ν} son los elementos de matriz de L), dichas hojas permanecen invariantes, es decir no se puede pasar de un estado de energía positiva a uno de energía negativa. Esto motiva la definición $a_2(-\vec{n})|0\rangle = 0$ para un bradion. Para un taquion la situación es distinta, ya que el debe satisfacer

$$k^2 - m^2 = 0$$

o

$$k_0^2 = \bar{k}^2 - m^2$$

Para el caso $\bar{u}^2 > m^2$ la variedad Lorentziana es un hiperboloide de una hoja.



Si definimos $w = u_0 = \pm \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}$ podemos pasar de $w > 0$ a $w < 0$ mediante una transformación de L^{\uparrow}_+ que cambie el signo de u_0 . Por lo tanto no podemos exigir ahora que $a_1(-u)|0\rangle = 0$. Igual razonamiento se aplica al caso $\bar{u}^2 < m^2$ en el cual $w = \pm \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}$ o $w^2 + k^2 = m^2$ que no es otra cosa que una esfera de radio m . Debe notarse que en (IV.3.4) genera un producto escalar que no es definido positivo, lo que nos obligaría a introducir una métrica indefinida (estudiada detalladamente en la referencia [17]). Sin embargo debemos puntualizar que no debemos preocuparnos por la introducción de tal métrica, pues como veremos más adelante, a un taquion no le está permitido ocupar dichos estados.

4 VALORES MEDIOS DE VACIO

Para calcular los valores medios utilizaremos (IV.1.22), (IV.1.23), (IV.1.24), (IV.3.3) y el hecho que $p_{\mu}|0\rangle = 0$ implica $a_{\mu}|0\rangle = 0$ por ser p_{μ} hermítico. Luego podemos escribir para los operadores

$$[a_1(\bar{u})a_2(-\bar{u}) + a_2(-\bar{u})a_1(\bar{u})]|0\rangle = 0 \quad (\text{IV.3.3}') \\ \langle 0|[a_1(u)a_2(-u) + a_2(-u)a_1(u)] = 0$$

Como consecuencia de las dos primeras ecuaciones podemos escribir

$$\langle 0 | [a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'), a_2(-\bar{u}'') a_1(\bar{u}'') + a_1(\bar{u}'') a_2(-\bar{u}'')] | 0 \rangle = 0 \quad (\text{IV.4.1})$$

ya que

$$\begin{aligned} [a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'), a_2(-\bar{u}'') a_1(\bar{u}'')] &= a_2(-\bar{u}'') [a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'), a_1(\bar{u}'')] + [a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'), a_2(-\bar{u}'')] a_1(\bar{u}'') \\ &= \delta(\bar{u}-\bar{u}'') a_2(-\bar{u}'') a_1(\bar{u}') - \delta(\bar{u}'-\bar{u}'') a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'') \\ &= [\delta(\bar{u}-\bar{u}'') - \delta(\bar{u}'-\bar{u}'')] a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}') \end{aligned}$$

y en igual forma

$$[a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'), a_1(\bar{u}'') a_2(-\bar{u}'')] = [\delta(\bar{u}-\bar{u}'') - \delta(\bar{u}'-\bar{u}'')] a_1(\bar{u}') a_2(-\bar{u}'')$$

(IV.4.1) se transforma en

$$\langle 0 | a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}') + a_1(\bar{u}') a_2(-\bar{u}) | 0 \rangle [\delta(\bar{u}-\bar{u}'') - \delta(\bar{u}'-\bar{u}'')] = 0$$

o

$$\langle 0 | a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}') + a_1(\bar{u}') a_2(-\bar{u}) | 0 \rangle \delta(\bar{u}-\bar{u}') =$$

$$\langle 0 | a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'') + a_1(\bar{u}'') a_2(-\bar{u}) | 0 \rangle \delta(\bar{u}'-\bar{u}'')$$

Integrando en \bar{u}'

$$\left[\int \langle 0 | a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}') + a_1(\bar{u}') a_2(-\bar{u}) | 0 \rangle d\bar{u}' \right] \delta(\bar{u}-\bar{u}') =$$

$$= \langle 0 | a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}'') + a_1(\bar{u}'') a_2(-\bar{u}) | 0 \rangle$$

Sea

$$f(\bar{u}) = \int \langle 0 | a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}') + a_1(\bar{u}') a_2(-\bar{u}) | 0 \rangle d\bar{u}' \quad (\text{IV.4.2})$$

Entonces

$$\langle 0 | a_2(-\bar{n}) a_1(\bar{n}') + a_1(\bar{n}') a_2(-\bar{n}) | 0 \rangle = f(\bar{n}) \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad (\text{IV.4.3.a})$$

$$\langle 0 | a_2(-\bar{n}) a_1(\bar{n}) + a_1(\bar{n}) a_2(-\bar{n}) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{IV.4.3.b})$$

De (IV.4.3.a) y (IV.4.3.b) se deduce

$$\langle 0 | [a_2(-\bar{n}) a_1(\bar{n}') + a_1(\bar{n}') a_2(-\bar{n})] | 0 \rangle = 0 \quad (\text{IV.4.4})$$

Utilizamos ahora (IV.1.22) y tomamos su valor medio de vacío

$$\langle 0 | [a_2(-\bar{n}) a_1(\bar{n}') - a_1(\bar{n}') a_2(-\bar{n})] | 0 \rangle = \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad (\text{IV.4.5})$$

Sumando (IV.4.4) y (IV.4.5) obtenemos

$$\langle 0 | a_2(-\bar{n}) a_1(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{1}{2} \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad (\text{IV.4.6})$$

Restando (IV.4.4) y (IV.4.5)

$$\langle 0 | a_1(\bar{n}') a_2(-\bar{n}) | 0 \rangle = -\frac{1}{2} \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad (\text{IV.4.7})$$

De igual forma se deduce a partir de imponer

$$[b_1(\bar{n}) b_2(-\bar{n}') + b_2(-\bar{n}') b_1(\bar{n})] | 0 \rangle = 0 \quad (\text{IV.4.8})$$

la ecuación

$$\langle 0 | b_1(\bar{n}) b_2(-\bar{n}') + b_2(-\bar{n}') b_1(\bar{n}) | 0 \rangle = 0$$

que junto con (IV.1.23) conduce a

$$\langle 0 | b_1(\bar{n}) b_2(-\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{i}{2} \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad (\text{IV.4.9})$$

$$\langle 0 | b_2(-\bar{n}') b_1(\bar{n}) | 0 \rangle = -\frac{i}{2} \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad (\text{IV.4.10})$$

5 PROPAGADOR

Como sucede para los bradiones, para el campo escalar taquionico es

$$\underline{\phi(x)\phi(y)} = \langle 0 | T \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle & x^0 > y^0 \\ \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (\text{IV.5.1})$$

Escribiendo

$$\phi(x) = \phi_a(x) + \phi_b(x) \quad (\text{IV.5.2})$$

con

$$\phi_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \int \frac{d^{n-1}u}{\sqrt{2\omega}} (a_1(\bar{u}) e^{i u_\mu x^\mu} + a_2(-\bar{u}) e^{-i u_\mu x^\mu}) H(\bar{u}^2 - m^2) \quad (\text{IV.5.3})$$

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}$$

$$\phi_b(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \int \frac{d^{n-1}u}{\sqrt{2\omega}} (b_1(\bar{u}) e^{i u_\mu x^\mu} + b_2(-\bar{u}) e^{-i u_\mu x^\mu}) H(\bar{u}^2 - m^2) \quad (\text{IV.5.4})$$

$$i\omega = \omega_0 = i\sqrt{\bar{u}^2 - m^2}$$

como los campos $\phi_a(x)$ y $\phi_b(x)$ conmutan es

$$\underbrace{\phi(x)\phi(y)} = \begin{cases} \langle 0 | \phi_a(x)\phi_a(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_b(x)\phi_b(y) | 0 \rangle & x^0 > y^0 \\ \langle 0 | \phi_a(y)\phi_a(x) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_b(y)\phi_b(x) | 0 \rangle & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (\text{IV.5.5})$$

o

$$\underbrace{\phi(x)\phi(y)} = \underbrace{\phi_a(x)\phi_a(y)} + \underbrace{\phi_b(x)\phi_b(y)} \quad (\text{IV.5.6})$$

Sea $x^0 > y^0$. Entonces

$$\underbrace{\phi_a(x)\phi_a(y)} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \frac{d^{n-1}u d^{n-1}u'}{2|\omega\omega'|} \left[\langle 0 | a_1(\bar{u}) a_2(-\bar{u}') | 0 \rangle e^{i(u_\mu x^\mu - u'_\mu y^\mu)} + \langle 0 | a_2(-\bar{u}) a_1(\bar{u}') | 0 \rangle e^{-i(u_\mu x^\mu - u'_\mu y^\mu)} \right] H(\bar{u}^2 - m^2)$$

Utilizando (IV.4.6) y (IV.4.7) obtenemos así

$$\underbrace{\phi_a(x)\phi_a(y)} = \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{d^{N-1}u}{4\omega} \left[\bar{e}^{i\omega(x_2-y_0)} e^{i\omega(x_2-y_0)} \right] e^{i\bar{u}\cdot(\bar{x}-\bar{y})} H(\bar{u}^2 - \omega^2) \quad (\text{IV.5.7})$$

Para $x^0 < y^0$ es en la misma forma

$$\underbrace{\phi_a(x)\phi_a(y)} = \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{d^{N-1}u}{4\omega} \left[e^{i\omega(x_2-y_0)} \bar{e}^{-i\omega(x_2-y_0)} \right] e^{i\bar{u}\cdot(\bar{x}-\bar{y})} H(\bar{u}^2 - \omega^2) \quad (\text{IV.5.8})$$

(IV.5.7) y (IV.5.8) pueden ser escritas en forma conjunta para todo x, y como

$$\underbrace{\phi_a(x)\phi_a(y)} = -\frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{d^{N-1}u}{4\omega} \left[e^{i\omega|x_2-y_0|} \bar{e}^{-i\omega|x_2-y_0|} \right] e^{i\bar{u}\cdot(\bar{x}-\bar{y})} H(\bar{u}^2 - \omega^2) \quad (\text{IV.5.9})$$

Para $\phi_b(x)$ con $x^0 > y^0$ es

$$\underbrace{\phi_b(x)\phi_b(y)} = \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{d^{N-1}u}{2|\omega\omega'|} \left[\langle 0 | b_1(\bar{u}) b_2(-\bar{u}') | 0 \rangle e^{i(u_\mu x^\mu - u'_\mu y^\mu)} + \langle 0 | b_2(-\bar{u}) b_1(\bar{u}') | 0 \rangle e^{-i(u_\mu x^\mu - u'_\mu y^\mu)} \right] H(\omega^2 - \bar{u}^2)$$

Hacemos ahora uso de (IV.4.9) y (IV.4.10) par obtener

$$\underbrace{\phi_b(x)\phi_b(y)} = -\frac{i}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{d^{N-1}u}{4\omega} \left[\bar{e}^{-\omega(x_2-y_0)} e^{-\omega(x_2-y_0)} \right] e^{i\bar{u}\cdot(\bar{x}-\bar{y})} H(\omega^2 - \bar{u}^2) \quad (\text{IV.5.10})$$

Para $x^0 < y^0$ es

$$\underbrace{\phi_b(x)\phi_b(y)} = -\frac{i}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{d^{N-1}u}{4\omega} \left[\bar{e}^{-\omega(x_2-y_0)} e^{\omega(x_2-y_0)} \right] e^{i\bar{u}\cdot(\bar{x}-\bar{y})} H(\omega^2 - \bar{u}^2) \quad (\text{IV.5.11})$$

De (IV.5.10) y (IV.5.11) es para todo x^0, y^0

$$\underbrace{\phi_b(x) \phi_b(y)} = -\frac{i}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{d^N u}{4\omega} (e^{\omega|x^2-y^2|} - e^{-\omega|x^2-y^2|}) e^{i\vec{u} \cdot (x-\vec{y})} H(\omega^2 - \vec{u}^2) \quad (\text{IV.5.12})$$

El propagador del campo es de acuerdo a (IV.5.6) la suma de (IV.5.9) y (IV.5.12). Así obtenemos

$$\Delta_{TC}(x-y) = \underbrace{\phi(x) \phi(y)} = -\frac{i}{(2\pi)^{N-1}} \int d^N k \left\{ [e^{i\omega|x^2-y^2|} - e^{-i\omega|x^2-y^2|}] \times \right. \\ \left. \times \frac{H(\vec{u}^2 - \omega^2)}{4\omega} + i [e^{\omega|x^2-y^2|} - e^{-\omega|x^2-y^2|}] \frac{H(\omega^2 - \vec{u}^2)}{4\omega} \right\} \times \\ \times e^{i\vec{u} \cdot (x-\vec{y})} \quad (\text{IV.5.13})$$

Se puede encontrar la expresión de (IV.5.13) que corresponde al espacio de los impulsos (su transformada de Fourier). Para hacerlo notemos primeramente que

$$\frac{1}{\omega^2 - \vec{u}^2} = \frac{1}{\omega^2 - \vec{u}^2 - i\epsilon} - i\pi \delta(\omega^2 - \vec{u}^2) \quad \epsilon \rightarrow 0$$

En lo que sigue omitiremos la mención $\epsilon \rightarrow 0$ por comodidad. Por lo tanto

$$\frac{i}{(2\pi)^N} \int_{\omega^2 > \vec{u}^2} \frac{e^{i\eta_{\mu}(x^{\mu} - y^{\mu})}}{\omega^2 - \vec{u}^2} d^N u = \frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{e^{i\eta_{\mu}(x^{\mu} - y^{\mu})}}{\omega^2 - \vec{u}^2 - i\epsilon} d^N u + \\ + \frac{\pi}{(2\pi)^6} \int \delta(\omega^2 - \vec{u}^2) e^{i\eta_{\mu}(x^{\mu} - y^{\mu})} d^N u$$

Sea

$$\Delta_{FT} = -\frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{e^{i\eta_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{u^2 - m^2 - i\epsilon} H(\bar{u}^2 - m^2) d^N u \quad (\text{IV.5.14})$$

Podemos escribir entonces

$$\begin{aligned} \frac{PV}{(2\pi)^N} \int \frac{e^{i\eta_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{u^2 - m^2} d^N u &= -\Delta_{FT} + \\ &+ \frac{\pi}{(2\pi)^6} \int \delta(u^2 - m^2) e^{i\eta_\mu(x^\mu - y^\mu)} d^N u \quad (\text{IV.5.15}) \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \Delta_{FT}(x-y) - \frac{\pi}{(2\pi)^N} \int \delta(u^2 - m^2) e^{i\eta_\mu(x^\mu - y^\mu)} d^N u &= \\ = -\frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int d^{N-1} u \left[e^{i\omega|x^2 - y^2|} - e^{-i\omega|x^2 - y^2|} \right] \frac{H(\bar{u}^2 - m^2)}{4\omega} & \quad (\text{IV.5.16}) \end{aligned}$$

Sabiendo que (ver apéndice B para la definición de las "δ")

$$\begin{aligned} \int \left[\delta(u_0 + i\omega) + \delta(u_0 - i\omega) - \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{u_0^2 + \omega^2} \right] e^{i\omega_0(x^0 - y^0)} d u_0 &= \\ = e^{\omega|x^2 - y^2|} - e^{-\omega|x^2 - y^2|} & \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{\pi}{2\omega} \left[\delta(u_0 + i\omega) + \delta(u_0 - i\omega) - \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{u_0^2 + \omega^2} \right] H(m^2 - \bar{u}^2) e^{i\eta_\mu(x^\mu - y^\mu)} d^N u &= \\ = -\frac{i}{(2\pi)^{N-1}} \int \left[e^{\omega|x^2 - y^2|} - e^{-\omega|x^2 - y^2|} \right] \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{4\omega} e^{i\bar{u} \cdot (\bar{x} - \bar{y})} d^{N-1} u & \quad (\text{IV.5.17}) \end{aligned}$$

Si definimos

$$\begin{aligned} \Delta_{FT}^{\vec{u}^2 < u^2} &= -\frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{e^{i\vec{u}_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{u^2 - u^2 - i\epsilon} H(u^2 - \vec{u}^2) d^N u \\ &= \frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{e^{i\vec{u}_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{u^2 + u^2} (1 + (u^2 - u^2)) d^N u \end{aligned} \quad (\text{IV.5.18})$$

podemos reemplazarla en (IV.5.17) para obtener

$$\begin{aligned} \Delta_{FT}^{\vec{u}^2 < u^2} &= \frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{\pi}{2\omega} [\delta(u_0 + i\omega) + \delta(u_0 - i\omega)] H(u^2 - \vec{u}^2) e^{i\vec{u}_\mu(x^\mu - y^\mu)} d^N u = \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{N-1}} \int \left[e^{\omega|x^2 - y^2|} - e^{-\omega|x^2 - y^2|} \right] \frac{H(u^2 - \vec{u}^2)}{4\omega} e^{i\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} d^{N-1} u \end{aligned} \quad (\text{IV.5.19})$$

Si tenemos en cuenta que

$$\Delta_{FT} = -\frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{e^{i\vec{u}_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{u^2 - u^2 - i\epsilon} d^N u = \Delta_{FT}^{\vec{u}^2 > u^2} + \Delta_{FT}^{\vec{u}^2 < u^2} \quad (\text{IV.5.20})$$

Podemos sumar (IV.5.16) y (IV.5.20) y obtener (IV.5.13) como

$$\Delta_{T_C}(x-y) = \Delta_{F_T}(x-y) - \frac{\pi}{(2\pi)^N} \int \delta(u^2 - m^2) e^{i u_\mu (x^\mu - y^\mu)} d^N u$$

$$- \frac{i}{(2\pi)^N} \int \frac{\pi}{2\omega} \left[\delta(u_0 + i\omega) + \delta(u_0 - i\omega) \right] H(\omega^2 - u^2) e^{i u_\mu (x^\mu - y^\mu)} d^N u$$

(IV.5.21)

donde debe tenerse en cuenta que $\delta(u^2 - m^2) = 0$ si $\vec{u}^2 < m^2$

De la simple lectura de $\Delta_{F_T}(x-y)$, vemos que este es $\Delta_{F_T}(x-y)$ al que se le han restado los polos, tanto en el eje real como en el eje imaginario. Esto no es otra cosa que haber sacado al taquion de la capa de masa y en consecuencia no permitirle ocupar estados de partícula libre. Como veremos en el capítulo que viene, sin embargo, el taquion puede coexistir con otras partículas, apareciendo en los lazos internos de la matriz S, pero nunca en las patas externas de ésta, pues sino la teoría resultante no sería consistente con el propagador (IV.5.21).

6 INVARIANCIA DE POINCARÉ

En la sección 1 de este capítulo calculamos el impulso correspondiente al campo del taquion. Ahora haremos lo mismo con el momento angular, definido por

$$M_{\mu\nu} = \int (x_\mu T_\nu^0 - x_\nu T_\mu^0) d^{N-1} x \quad (\text{IV.6.1})$$

Lo haremos en dos partes. Primero calcularemos

$$M_{ij} = \int (x_i T_j^0 - x_j T_i^0) d^{N-1} x \quad (\text{IV.6.2})$$

Teniendo en cuenta (IV.1.4) es

$$T_i^0 = -\partial^0 \phi \partial_i \phi = \partial_0 \phi \partial_i \phi \quad (\text{IV.6.3})$$

Utilizando la expresión (IV.1.15) del campo calculamos T_i^0 , T_j^0 y los introducimos en (IV.6.2). Así obtenemos

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \int d^{N-1} \bar{u} \left\{ -iH(\bar{u}^2 u^2) \left[(L_{ij}(\vec{a}) a_{i,1}(\bar{u})) a_{2,1}(-\bar{u}) + a_{2,1}(-\bar{u}) (L_{ij}(\bar{u}) a_{i,1}(\bar{u})) \right] + \right. \\ \left. + H(u^2 \bar{u}^2) \left[(L_{ij}(\bar{u}) b_{i,1}(\bar{u})) b_{2,1}(-\bar{u}) + b_{2,1}(-\bar{u}) (L_{ij}(\bar{u}) b_{i,1}(\bar{u})) \right] \right\} \quad (\text{IV.6.4})$$

donde

$$L_{ij}(\bar{u}) = u_i \partial_j - u_j \partial_i \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (\text{IV.6.5})$$

Calculamos ahora M_{0j} dado por

$$M_{0j} = \int (x_0 T_j^0 - x_j T_0^0) d^{N-1} x \quad (\text{IV.6.6})$$

Teniendo en cuenta que

$$P_j = \int T_j^0 d^{N-1} x$$

podemos escribir

$$M_{0j} = x_0 P_j - \int x_j T_0^0 d^{N-1} x \quad (\text{IV.6.7})$$

siendo

$$T_0^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} u^2 \phi^2 \quad (\text{IV.6.8})$$

donde

$$\dot{\phi} = \partial_0 \phi$$

Nuevamente con la expresión (IV.1.15) del campo, calculamos T_0^0 dado por (IV.6.8) y con P_j dado por (IV.1.16) podemos calcular (IV.6.7). La expresión final para M_{0j} es

$$M_{0j} = \frac{1}{2} \int d^{N-1} \bar{u} \left\{ -iH(\bar{u}^2 u^2) u_0 \left[(\partial_j a_{i,1}(\bar{u})) a_{2,1}(-\bar{u}) + a_{2,1}(-\bar{u}) (\partial_j a_{i,1}(\bar{u})) \right] + \right.$$

$$+ H(m^2 - \bar{u}^2) \kappa_0 \left[(\partial_j b_1(\bar{u})) b_2(-\bar{u}) + b_2(-\bar{u}) \partial_j (b_1(\bar{u})) \right] \} \quad (\text{IV.6.9})$$

donde

$$\kappa_0 = \begin{cases} \omega = \sqrt{\bar{u}^2 - m^2} & \bar{u}^2 > m^2 \\ i\omega = i\sqrt{m^2 - \bar{u}^2} & m^2 > \bar{u}^2 \end{cases} \quad (\text{IV.6.10})$$

Con (V.1.16), (V.6.4) y (V.6.9) se pueden calcular los conmutadores $[P_\mu, P_\nu]$, $[P_\alpha, M_{\mu\nu}]$ y $[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}]$. El cálculo es largo y tedioso y al final de él encontramos que los operadores P_α y $M_{\mu\nu}$ satisfacen el álgebra de Lorentz

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\alpha, M_{\mu\nu}] = i [g_{\mu\alpha} P_\nu - g_{\nu\alpha} P_\mu] \quad (\text{IV.6.11})$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i [g_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} M_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} M_{\nu\alpha}]$$

Debemos aclarar aquí que los operadores $M_{\mu\nu}$ son representativos de los generadores del álgebra de Lorentz que dan origen a transformaciones de L_+^\uparrow que no modifican el signo de la frecuencia del taquion. Mas adelante veremos que las transformaciones de L_+^\downarrow que cambian el signo de la frecuencia no pueden ser implementadas en esta forma. Nos falta aún verificar que el campo satisface

$$\partial_\mu \phi = i [P_\mu, \phi] \quad (\text{IV.1.29})$$

$$(X_\mu \partial_\nu - X_\nu \partial_\mu) \phi = i [M_{\mu\nu}, \phi] \quad (\text{IV.6.12})$$

Para ello utilizamos las expresiones (IV.1.16) para P_μ , (IV.6.4) para M_{ij} y reescribimos M_{0j} como

$$M_{0j} = -\frac{i}{2} \int d^{n-1} \bar{u} \left\{ \sqrt{\omega} \left[\partial_j (\sqrt{\omega} a_1(\bar{u})) a_2(-\bar{u}) + a_2(-\bar{u}) \partial_j (\sqrt{\omega} a_1(\bar{u})) \right] \right\} H(\bar{u}^2 - m^2) -$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\omega} \left[\partial_j (\sqrt{\omega} b_1(\vec{n})) b_2(-\vec{n}) + b_2(-\vec{n}) \partial_j (\sqrt{\omega} b_1(\vec{n})) \right] H(\omega^2 - \vec{n}^2) \Big\} = \\
& = -\frac{i}{2} \int d^4x \left\{ \sqrt{\omega} \left[a_1(-\vec{n}) \partial_j (\sqrt{\omega} a_2(\vec{n})) + \partial_j (\sqrt{\omega} a_2(\vec{n})) a_1(-\vec{n}) \right] H(\vec{n}^2 - \omega^2) \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\omega} \left[b_1(-\vec{n}) \partial_j (\sqrt{\omega} b_2(\vec{n})) + \partial_j (\sqrt{\omega} b_2(\vec{n})) b_1(-\vec{n}) \right] H(\omega^2 - \vec{n}^2) \right\} \\
& \hspace{15em} (\text{IV.6.13})
\end{aligned}$$

con w dada por (IV.1.13).

Con las expresiones anteriores se verifican rápidamente las igualdades (IV.1.19) y (IV.6.12). (Obsérvese que de (IV.1.19) solo hay que verificar la parte espacial, ya que la temporal fue usada para cuantificar).

Tenemos así un representativo para el álgebra de Poincaré dado por

$$D(a, \Lambda) = e^{i(a_\mu P^\mu - \Lambda^{\mu\nu} M_{\mu\nu})} \quad (\text{IV.6.14})$$

donde los parámetros a^μ corresponden a desplazamientos y los $\Lambda^{\mu\nu}$ a elementos de matriz de transformaciones de Lorentz que no cambian el signo de la frecuencia. Ya que el campo ϕ satisface (IV.1.19) y (IV.6.12), también verifica

$$D^{-1}(a, \Lambda) \phi(x) D(a, \Lambda) = \phi[\Lambda^{-1}(x-a)] \quad (\text{IV.6.15})$$

Estudiaremos ahora la forma en que varían los operadores $a_1(\vec{n})$, $a_2(-\vec{n})$, $b_1(\vec{n})$ y $b_2(-\vec{n})$ por una transformación de Lorentz de L^\dagger_+ incluyendo ahora las transformaciones que cambian el signo de la frecuencia y exigiendo que para estas últimas se verifique en forma análoga a (IV.6.15) con $a=0$

$$U^{-1}(\Lambda) \phi(x) U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (\text{IV.6.16})$$

en general, y con

$$U_\pm(\Lambda) = D(\Lambda) = e^{-i\Lambda^{\mu\nu} M_{\mu\nu}} \quad (\text{IV.6.17})$$

para el caso en que Λ no cambie el signo de la frecuencia.

Para poder estudiar el campo vamos a extender su transformada de Fourier $\tilde{\phi}(\vec{n})$ al campo complejo y considerar ahora a $\tilde{\phi}(\vec{n})$ como un elemento de $\omega^{1/2} \mathbb{C}^2$ (ver apéndice A, definiciones 7, 8, 23, y teorema 5). Ya que las componentes $\phi_a(x)$ y $\phi_b(x)$ se transforman

separadamente (ver (IV.5.3) y (IV.5.4), estudiaremos primeramente ϕ y luego ϕ_a . Segun (IV.5.3) el campo $\phi_a(x)$ tiene la expresi3n

$$\phi_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{2\omega}} (a_1(\bar{u}) e^{i u_\mu x^\mu} + a_2(-\bar{u}) e^{-i u_\mu x^\mu}) d^{N-1} u$$

$$k_0 = \omega = \sqrt{\bar{u}^2 - u^2} \quad (\text{IV.6.18})$$

Sea C_0 una curva en el plano k_0 totalmente contenida en $k_0 > 0$. Podemos escribir

$$\phi_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \int_{C_0} \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{2k_0}} \delta(k_0 - \omega) [a_1(\bar{u}) e^{i u_\mu x^\mu} + a_2(-\bar{u}) e^{-i u_\mu x^\mu}] d\omega d^{N-1} u$$

Sea ahora C_i una curva en el plano k_i que rodea al punto k_i^1 y sea $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{N-1}$ (para una definici3n de la \oint compleja ver ap3ndice B. Entonces

$$\phi_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \oint_C \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{2k_0}} \delta(k_0 - \omega) \delta(\bar{u} - \bar{u}^1) [a_1(\bar{u}) e^{i u_\mu x^\mu} + a_2(-\bar{u}) e^{-i u_\mu x^\mu}] d\omega d^{N-1} u \quad (\text{IV.6.19})$$

El campo transformado puede ser escrito

$$\phi_a(\Lambda x) = \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \oint_{C''} \frac{H(\bar{u}''^2 - u''^2)}{\sqrt{2k_0''}} \delta(k_0'' - \omega'') \delta(\bar{u}'' - \bar{u}''^1) [a_1(\bar{u}'') e^{i(\Lambda'' u'')_\mu x^\mu} + a_2(-\bar{u}'') e^{-i(\Lambda'' u'')_\mu x^\mu}] d\omega'' d^{N-1} u''$$

donde $C'' = C_0'' \cup C_1'' \cup \dots \cup C_{N-1}''$ rodea a w y est3 totalmente contenida en $\text{Re } \omega'' > 0$ y C_i'' rodea a k_i^1 .

Supongamos que la transformaci3n no cambie el signo de k_0 es decir

$$\text{sgn Re}(\Lambda^{-1} k)_0 = \text{sgn Re } k_0$$

Entonces

$$e^{i(\Lambda u'')_n x^n} = \oint_C \delta(\Lambda u'' - u) e^{i u_n x^n} d^n u$$

$$\bar{e}^{i(\Lambda u)''_n x^n} = \oint_C \delta(\Lambda u'' - u) e^{-i u_n x^n} d^n u$$

donde C es una curva enteramente contenida en $\text{Re } u_0 > 0$
Luego podemos escribir

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda x) = & \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \int \oint_{C''} \oint_C \frac{H(\bar{u}'^2 - m^2)}{|2k_0''|} \delta(k_0'' - \omega') \delta(\bar{u}'' - \bar{u}') \left[a_1(u'') \delta(\Lambda u'' - u) e^{i u_n x^n} \right. \\ & \left. + a_2(-u'') \delta(\Lambda u'' - u) \bar{e}^{-i u_n x^n} \right] \end{aligned}$$

o integrando en k''

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda x) = & \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \int \oint_C \frac{H(\bar{u}'^2 - m^2)}{|2(\Lambda' u)_0|} \delta[(\Lambda' k)_0 - \omega'] \delta(\Lambda' \bar{u} - \bar{u}') \times \\ & \times \left(a_1(\Lambda' u) e^{i u_n x^n} + a_2(-\Lambda' u) \bar{e}^{-i u_n x^n} \right) d^{N-1} u' d^N u \end{aligned}$$

(IV.6.20)

De acuerdo con (IV.6.16) y utilizando (IV.6.19) el campo transformado puede ser escrito

$$\Phi_a(\Lambda x) = \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \int \oint_C \frac{H(\bar{u}'^2 - m^2)}{|2k_0''|} \delta(k_0'' - \omega') \delta(\bar{u}'' - \bar{u}') \left[U_2(\Lambda) a_1(u) U_2^{-1}(\Lambda) e^{i u_n x^n} + \right.$$

$$+ U_2(\lambda) a_2(-\lambda) U_2^{-1}(\lambda) e^{-i\tilde{u}_\mu x^\mu} \Big] d^N_{\tilde{u}} d^{N-1}_{\tilde{u}'} \quad (\text{IV.6.22})$$

Así si $\beta_0(\lambda) > 0$ o sea la transformación no cambia el signo de la frecuencia para k real, de (IV.6.20) y (IV.6.21) debe ser

$$\int \frac{H(\tilde{u}^2 - m^2)}{\sqrt{2\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\tilde{u} - \tilde{u}') U_2(\lambda) a_2(\lambda) U_2^{-1}(\lambda) d^{N-1}_{\tilde{u}'} =$$

$$= \int \frac{H(\tilde{u}^2 - m^2)}{\sqrt{2(\lambda^0)_0}} \delta[(\lambda^0)_0 - \omega'] \delta(\lambda^0 \tilde{u} - \tilde{u}') a_2(\lambda^0 \lambda) d^{N-1}_{\tilde{u}'} \quad (\text{IV.6.22.a})$$

$$\int \frac{H(\tilde{u}^2 - m^2)}{\sqrt{2\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\tilde{u} - \tilde{u}') U_2(\lambda) a_2(-\lambda) U_2^{-1}(\lambda) d^{N-1}_{\tilde{u}'} =$$

$$= \int \frac{H(\tilde{u}^2 - m^2)}{\sqrt{2(\lambda^0)_0}} \delta[(\lambda^0)_0 - \omega'] \delta(\lambda^0 \tilde{u} - \tilde{u}') a_2(-\lambda^0 \lambda) d^{N-1}_{\tilde{u}'} \quad (\text{IV.6.22.b})$$

Las soluciones de las ecuaciones (IV.6.22) son

$$a_2(\lambda^0 \lambda) = U_2(\lambda) a_2(\lambda) U_2^{-1}(\lambda) \quad a_2(\lambda^0 \lambda) = U_2(\lambda) a_2(\lambda) U_2^{-1}(\lambda) \quad (\text{IV.6.23})$$

Haremos ahora la comprobación. Como consecuencia de (IV.6.22) y (IV.6.23) debe ser

$$\int \frac{H(\tilde{u}^2 - m^2)}{\sqrt{\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\tilde{u} - \tilde{u}') d^{N-1}_{\tilde{u}'} =$$

$$= \int \frac{H(\tilde{u}^2 - m^2)}{\sqrt{(\lambda^0)_0}} \delta[(\lambda^0)_0 - \omega'] \delta(\lambda^0 \tilde{u} - \tilde{u}') d^{N-1}_{\tilde{u}'} \quad \square$$

$$\int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{u_0}} \left[\frac{\delta(u_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}')}{\sqrt{u_0}} - \frac{\delta[(\bar{u}' - u)_0 - w'] \delta(\bar{u}' - \bar{u}')}{\sqrt{(\bar{u}' - u)_0}} \right] d^{N-1} u' = 0$$

y por lo tanto

$$\oint_C \int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{w'}} \left[\delta(u_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}') - \delta[(\bar{u}' - u)_0 - w'] \delta(\bar{u}' - \bar{u}') \right] d^{N-1} u' d^N u = 0$$

o

$$\oint_C \int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{w'}} \left[\delta(u_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}') - \oint_{C'_0} \delta(u_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}') du'_0 \right] d^{N-1} u' d^N u = 0$$

que puede ser reescrita

$$\int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{w'}} \left[\oint_C \delta(u_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}') d^N u - \oint_C \oint_{C'_0} \delta(u_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}') du'_0 d^N u \right] d^{N-1} u' = 0$$

Integrando es finalmente

$$\int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{|w|}} \left[\oint_{C_0} \delta(\kappa_0 - w') d\kappa_0 - \oint_{C'_0} \delta(\kappa'_0 - w') d\kappa'_0 \right] d^{N-1}u' = 0$$

Como el corchete es nulo, la igualdad es satisfecha.

Si $\text{Re}(\lambda \cdot u)_0 < 0$ o sea la transformación cambia el signo de la frecuencia, entonces

$$e^{i(\lambda u'')_{\mu} x^{\mu}} = \oint_C \delta(\lambda u'' + u) \bar{e}^{i' u_{\mu} x^{\mu}} d^N u$$

$$\bar{e}^{i(\lambda u'')_{\mu} x^{\mu}} = \oint_C \delta(\lambda u'' + u) e^{i' u_{\mu} x^{\mu}} d^N u$$

donde C está contenida enteramente en $\text{Re} \kappa_0 > 0$. Al campo transformado lo escribimos ahora en la forma

$$\begin{aligned} \phi_a(\lambda x) &= \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \left(\oint_C \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{-2(\lambda u)_0}} \delta[(\lambda^{-1}u)_0 + w'] \delta(\lambda^{-1}u + \bar{u}') \times \right. \\ &\quad \left. \times (a_2(\lambda^{-1}u) e^{i' u_{\mu} x^{\mu}} + a_1(-\lambda^{-1}u) \bar{e}^{i' u_{\mu} x^{\mu}}) d^{N-1}u' d^N u = \right. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N-1/2}} \left(\oint_C \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{2\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}') (U_2(\lambda) a_1(u) U_2^{-1}(\lambda) \bar{e}^{i' u_{\mu} x^{\mu}} + \right. \\ &\quad \left. + U_2(\lambda) a_2(-u) U_2^{-1}(\lambda) e^{i' u_{\mu} x^{\mu}}) d^{N-1}u' d^N u \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.6.24})$$

donde $U_2(\lambda)$ es antilineal. Así se deben satisfacer

$$\begin{aligned} &\int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{2\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - w') \delta(\bar{u} - \bar{u}') U_2(\lambda) a_1(u) U_2^{-1}(\lambda) d^{N-1}u' = \\ &= \int \frac{H(\bar{u}^2 - u^2)}{\sqrt{-2(\lambda u)_0}} \delta[(\lambda^{-1}u)_0 + w'] \delta(\lambda^{-1}u + \bar{u}') a_1(-\lambda^{-1}u) d^{N-1}u' \quad (\text{IV.6.25.a}) \end{aligned}$$

$$\int \frac{H(\bar{n}^2 - m^2)}{\sqrt{2\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\bar{n} - \bar{n}') U_2(\kappa) a_2(-\kappa) U_2(\kappa) d^{N-1} \kappa' =$$

$$= \int \frac{H(\bar{n}^2 - m^2)}{\sqrt{-2(\kappa^0)_0}} \delta[(\kappa^0)_0 + \omega'] \delta(\kappa^i \bar{n} + \bar{n}') a_2(\kappa^i) d^{N-1} \kappa \quad (\text{IV.6.25.6})$$

Las soluciones de (IV.6.25) son

$$a_2(\kappa^i) = U_2(\kappa) a_2(-\kappa) U_2^{-1}(\kappa) \quad a_2(\kappa^i) = U_2(\kappa) a_2(-\kappa) U_2^{-1}(\kappa) \quad (\text{IV.6.26})$$

De (IV.6.25) y (IV.6.26) vemos que se debe cumplir

$$\int \frac{H(\bar{n}^2 - m^2)}{\sqrt{2\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\bar{n} - \bar{n}') d^{N-1} \kappa' =$$

$$= \int \frac{H(\bar{n}^2 - m^2)}{\sqrt{-2(\kappa^0)_0}} \delta[(\kappa^0)_0 + \omega'] \delta(\kappa^i \bar{n} + \bar{n}') d^{N-1} \kappa'$$

o sea

$$\oint_C \left(\frac{H(\bar{n}^2 - m^2)}{\sqrt{\omega'}} \left[\delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\bar{n} - \bar{n}') - \delta[(\kappa^0)_0 + \omega'] \delta(\kappa^i \bar{n} + \bar{n}') \right] d^{N-1} \kappa' \right) d^N \kappa =$$

$$= \int \frac{H(\bar{n}^2 - m^2)}{\sqrt{\omega'}} \left[\oint_C \delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\bar{n} - \bar{n}') d^N \kappa - \right.$$

$$\left. \oint_C \oint_{C'_0} \delta(\kappa_0 - \omega') \delta(\kappa^i \bar{n} + \bar{n}') d^N \kappa d\kappa'_0 \right] d^{N-1} \kappa'$$

o integrando en las n-1 variables espaciales k

$$\int \frac{H(\eta^2 - \omega^2)}{\sqrt{\omega^2}} \left[\oint_C \delta(\omega_0 - \omega') d\omega_0 - \oint_{C'} \delta(\omega_0' - \omega') d\omega_0' \right] d^{n-1} \omega' = 0$$

De las ecuaciones (IV.6.23) y (IV.6.26) vemos que $U(\Lambda)$ opera en la forma

$$\begin{aligned} U(\Lambda) a_1(\eta) U^{-1}(\Lambda) &= U_2(\Lambda) a_1(\eta) U_2^{-1}(\Lambda) H \left[\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right] + \\ &U_2(\Lambda) a_2(\eta) U_2^{-1}(\Lambda) H \left[-\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right] = \\ &= a_2(\Lambda^{-1}\eta) H \left[\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right] + a_2(-\Lambda^{-1}\eta) H \left[-\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(\Lambda) a_2(\eta) U^{-1}(\Lambda) &= U_2(\Lambda) a_2(\eta) U_2^{-1}(\Lambda) H \left[\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right] + \\ &U_2(\Lambda) a_2(\eta) U_2^{-1}(\Lambda) H \left[-\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right] = \end{aligned}$$

$$= a_2(\Lambda^{-1}\eta) H \left[\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right] + a_2(-\Lambda^{-1}\eta) H \left[-\frac{\text{Re}(\Lambda^{-1}\eta)_0}{\text{Re}\eta_0} \right]$$

Analizamos ahora el campo $\phi_b(x)$. Este es según (IV.5.4)

$$\phi_b(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \int \frac{H(\omega^2 - \bar{\omega}^2)}{\sqrt{2\omega}} \left(b_1(\omega) e^{i\omega x} + b_2(-\omega) e^{-i\omega x} \right) d^{n-1} \omega \quad \omega_0 = i\omega$$

y en forma análoga a ϕ_a puede ser escrito

$$\phi_b(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \int_C \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-2i'k_0}} \delta(k_0 - i\omega') \delta(\bar{u} - \bar{u}') \times \\ \times (b_1(u) e^{i'k_\mu x^\mu} + b_2(-u) e^{-i'k_\mu x^\mu}) d^{n-1}u' d^n u \quad (\text{IV.6.29})$$

donde ahora C_0 es una curva enteramente contenida en $\text{Im } k_0 > 0$.
En forma análoga a ϕ_a , para $\text{Im } k_0 > 0$ es para ϕ_b

$$\phi_b(\lambda x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \int_C \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-2i'(\lambda'k)_0}} \delta[(\lambda'k)_0 - i\omega'] \delta(\lambda'\bar{u} - \bar{u}') \times \\ \times (b_1(\lambda'u) e^{i'k_\mu x^\mu} + b_2(-\lambda'u) e^{-i'k_\mu x^\mu}) d^{n-1}u' d^n u \quad (\text{IV.6.30})$$

Por (IV.6.16) y (IV.6.29) es

$$\phi_b(\lambda x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \int_C \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-2i'k_0}} \delta(k_0 - i\omega') \delta(\bar{u} - \bar{u}') [U_2(\lambda) b_1(u) U_1^{-1}(\lambda) e^{i'k_\mu x^\mu} \\ + U_1(\lambda) b_2(-u) U_2^{-1}(\lambda) e^{-i'k_\mu x^\mu}] d^{n-1}u' d^n u \quad (\text{IV.6.31})$$

Por lo tanto de (IV.6.30) y (IV.6.31) es con $\text{Im}(\lambda'k)_0 > 0$

$$\int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-2i'k_0}} \delta(k_0 - i\omega') \delta(\bar{u} - \bar{u}') U_2(\lambda) b_1(\bar{u}) U_1^{-1}(\lambda) d^{n-1}u' = \\ = \int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-2i'(\lambda'k)_0}} \delta[(\lambda'k)_0 - i\omega'] \delta(\lambda'\bar{u} - \bar{u}') b_1(\lambda'u) d^{n-1}u' \quad (\text{IV.6.32.a})$$

$$\int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-2i\omega_0}} \delta(\omega_0 - i\omega') \delta(\bar{u} - \bar{u}') U_2(\lambda) b_2(-u) U_2^{-1}(\lambda) d^{N-1}u' =$$

$$\int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-2i(\lambda' u)_0}} \delta[(\lambda' u)_0 - i\omega'] \delta(\lambda' \bar{u} - \bar{u}') b_2(-\lambda' u) d^{N-1}u' \quad (\text{IV.6.32.b})$$

Las soluciones de las ecuaciones (IV.6.32) son

$$b_1(\lambda' u) = U_2(\lambda) b_1(u) U_2^{-1}(\lambda) \quad b_2(\lambda' u) = U_2(\lambda) b_2(u) U_2^{-1}(\lambda) \quad (\text{IV.6.33})$$

Comprobaremos ahora esta afirmación. Como consecuencia de (IV.6.29) y (IV.6.30) es

$$\int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-i\omega_0}} \delta(\omega_0 - i\omega') \delta(\bar{u} - \bar{u}') d^{N-1}u' =$$

$$\int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{-i(\lambda' u)_0}} \delta[(\lambda' u)_0 - i\omega'] \delta(\lambda' \bar{u} - \bar{u}') d^{N-1}u'$$

En igual forma que para los operadores $a_1(u)$ y $a_2(u)$ podemos escribir

$$\int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{|\omega|}} \left[\oint_c \delta(\omega_0 - i\omega') \delta(\bar{u} - \bar{u}') d^{N-1}u' - \oint_c \oint_{c_0} \delta(u_0 - i\omega') \delta(u - \lambda u') du_0' d^{N-1}u' \right]$$

o sea

$$\int \frac{H(m^2 - \bar{u}^2)}{\sqrt{|\omega|}} \left[\oint_c \delta(\omega_0 - i\omega') du_0 - \oint_{c_0} \delta(\omega_0 - i\omega') du_0' \right] d^{N-1}u' = 0$$

Nuevamente el corchete es nulo y la igualdad se satisface.
 Si $\text{Im}(\lambda) < 0$ debe ser

$$\int \frac{H(\mu^2 - \bar{\mu}^2)}{\sqrt{-2i\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - i\omega') \delta(\bar{\mu} - \bar{\mu}') U_2(\lambda) b_1(\mu) U_2^{-1}(\lambda) d^{\mu-1} \mu' =$$

$$\int \frac{H(\mu^2 - \bar{\mu}^2)}{\sqrt{2i(\lambda^{-1}\kappa)_0}} \delta[(\lambda^{-1}\kappa)_0 + i\omega'] \delta(\lambda^{-1}\bar{\mu} + \bar{\mu}') b_1(-\lambda^{-1}\mu) d^{\mu-1} \mu' \quad (\text{IV.6.34.a})$$

$$\int \frac{H(\mu^2 - \bar{\mu}^2)}{\sqrt{-2i\kappa_0}} \delta(\kappa_0 - i\omega') \delta(\bar{\mu} - \bar{\mu}') U_2(\lambda) b_2(-\mu) U_2^{-1}(\lambda) d^{\mu-1} \mu' =$$

$$\int \frac{H(\mu^2 - \bar{\mu}^2)}{\sqrt{2i(\lambda^{-1}\kappa)_0}} \delta[(\lambda^{-1}\kappa)_0 + i\omega'] \delta(\lambda^{-1}\bar{\mu} + \bar{\mu}') b_2(\lambda^{-1}\mu) d^{\mu-1} \mu' \quad (\text{IV.6.34.b})$$

las soluciones de estas ecuaciones son

$$b_2(\lambda^{-1}\mu) = U_2(\lambda) b_1(-\mu) U_2^{-1}(\lambda) \quad b_2(\lambda^{-1}\mu) = U_2(\lambda) b_2(-\mu) U_2^{-1}(\lambda) \quad (\text{IV.6.35})$$

como se puede comprobar repitiendo los pasos dados anteriormente. De las ecuaciones (IV.6.33) y (IV.6.35) vemos que $U(\lambda)$ opera en la forma

$$\begin{aligned} U(\lambda) b_1(\mu) U^{-1}(\lambda) &= U_2(\lambda) b_1(\mu) U_2^{-1}(\lambda) H \left[\frac{\text{Im}(\lambda^{-1}\mu)_0}{\text{Im} \kappa_0} \right] + \\ &\quad U_2(\lambda) b_2(\mu) U_2^{-1}(\lambda) H \left[-\frac{\text{Im}(\lambda^{-1}\mu)_0}{\text{Im} \kappa_0} \right] = \\ &= b_1(\lambda^{-1}\mu) H \left[\frac{\text{Im}(\lambda^{-1}\mu)_0}{\text{Im} \kappa_0} \right] + b_2(-\lambda^{-1}\mu) H \left[-\frac{\text{Im}(\lambda^{-1}\mu)_0}{\text{Im} \kappa_0} \right] \quad (\text{IV.6.36}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(\Lambda) b_2(u) U^{-1}(\Lambda) &= U_2(\Lambda) b_2(u) U_2^{-1}(\Lambda) H \left[\frac{\text{Im}(\Lambda^{-1}u)_0}{\text{Im} u_0} \right] + \\
&U_2(\Lambda) b_2(u) U_2^{-1}(\Lambda) H \left[-\frac{\text{Im}(\Lambda^{-1}u)_0}{\text{Im} u_0} \right] = \\
&= b_2(\Lambda^{-1}u) H \left[\frac{\text{Im}(\Lambda^{-1}u)_0}{\text{Im} u_0} \right] + b_2(-\Lambda^{-1}u) H \left[-\frac{\text{Im}(\Lambda^{-1}u)_0}{\text{Im} u_0} \right] \quad (\text{IV.6.37})
\end{aligned}$$

Puede comprobarse que si $\Lambda'' = \Lambda' \Lambda$ entonces

$$U(\Lambda'') = U(\Lambda') U(\Lambda)$$

Veremos ahora que $U(\Lambda)$ deja invariante el vacío

$$U(\Lambda) |0\rangle = |0\rangle \quad (\text{IV.6.38})$$

Para ello debemos probar primeramente que $M_{\mu\nu} |0\rangle = 0$
 Ahora de (IV.3.2) y (IV.1.16) se ve inmediatamente que

$$P_\mu |0\rangle = 0 \quad (\text{IV.6.39})$$

Utilizamos ahora las relaciones de conmutación (IV.6.11). De

$$[P_\alpha, M_{\mu\nu}] = i(g_{\mu\alpha} P_\nu - g_{\nu\alpha} P_\mu)$$

es por (IV.6.39)

$$[P_\alpha, M_{\mu\nu}] |0\rangle = 0$$

o

$$P_\alpha (M_{\mu\nu} |0\rangle) = 0$$

Por lo tanto suponiendo la unicidad del vacío (al igual que en ref[11], axioma 0, para la teoría de campos bradionica) debe ser

$$M_{\mu\nu} |0\rangle = \lambda_{\mu\nu} |0\rangle \quad (\text{IV.6.40})$$

Donde $\lambda_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico de dos índices formado por constantes. De

$$[M_{0i}, M_{0j}] = i M_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

se deduce

$$(M_{0i} M_{0j} - M_{0j} M_{0i}) |0\rangle = i M_{ij} |0\rangle$$

Por (IV.6.40)

$$(\lambda_{0j} \lambda_{0i} - \lambda_{0i} \lambda_{0j}) |0\rangle = i \lambda_{ij} |0\rangle$$

como

$$\lambda_{0j} \lambda_{0i} - \lambda_{0i} \lambda_{0j} = 0$$

es

$$\lambda_{ij} = 0 \quad M_{ij} |0\rangle = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (\text{IV.6.41})$$

De

$$[M_{0i}, M_{ij}] = i M_{0j} \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

deducimos

$$(M_{0i} M_{ij} - M_{ij} M_{0i}) |0\rangle = i M_{0j} |0\rangle$$

o

$$- M_{ij} M_{0i} |0\rangle = i M_{0j} |0\rangle$$

Como

$$M_{ij} M_{0i} |0\rangle = M_{ij} \lambda_{0i} |0\rangle = \lambda_{0i} M_{ij} |0\rangle = 0$$

es

$$M_{0j} |0\rangle = 0$$

Así, teniendo en cuenta (IV.6.41) y (IV.6.42) es en general

$$M_{\mu\nu} |0\rangle = 0$$

Así en los dominios $M_{P,1}^{\mu}(a_i)$ y $M_{P,1}^{\nu}(b_i)$ (M^{μ} es el espacio de Minkowsky de las variables del impulso), en los cuales se cumplen (IV.6.23) y (IV.6.33) respectivamente es

$$U_{\pm} |0\rangle = |0\rangle \quad U_{\pm}^{\dagger} = U^{-1}$$

Nos falta demostrar que $U |0\rangle = |0\rangle$ en los dominios $M_{P,2}^{\nu}(a_i)$ y $M_{P,2}^{\mu}(b_i)$ en los cuales se cumplen (IV.6.26) y (IV.6.35) respectivamente. Para ello notamos que como los coeficientes $a^i(u)$ y $b^i(u)$ $1 \leq i \leq 2$ pertenecen a $\mathbb{W}^{1/2,1}$ son funciones analíticas enteras del parámetro k , las igualdades (IV.3.3) pueden ser extendidas a todo el plano complejo. Así se cumple

$$(a_1(u) a_2(-u) + a_2(-u) a_1(u)) |0\rangle = 0$$

u complejo (IV.6.44)

$$(b_1(u) b_2(-u) + b_2(-u) b_1(u)) |0\rangle = 0$$

Además a_i y b_i $1 < i < 2$ verifican (escribimos la dependencia con k y w)

$$a_2^{\dagger}(w_1, \vec{u}) = a_2(-w_1, -\vec{u}) \quad b_2^{\dagger}(-i w_1, \vec{u}) = b_2(i w_1, -\vec{u})$$

$$a_2^{\dagger}(w_1, \vec{u}) = a_2(-w_1, -\vec{u}) \quad b_2^{\dagger}(-i w_1, \vec{u}) = b_2(i w_1, \vec{u})$$

Así si dos funciones enteras verifican sobre el eje real (o sobre cualquier trozo de curva del plano complejo)

$$f^{\dagger}(x) = g(x)$$

en el plano complejo será

$$f^{\dagger}(z) = g(z)$$

Lo mismo sucede con los a_i y b_i . Estos satisfacen

$$a_1^+(u) = a_2(-u) \quad b_2^+(u) = b_1(-u)$$

$$a_2^+(u) = a_1(-u) \quad b_1^+(u) = b_2(-u)$$

Por lo tanto de (IV.6.26)

$$a_1^+(\Lambda^{-1}u) = U_2^{+-1}(\Lambda) a_1^+(-u) U_2^+(u)$$

o

$$a_2(-\Lambda^{-1}u) = U_2^{+-1}(\Lambda) a_2(u) U_2^+(\Lambda)$$

Pero por (IV.6.25) a_2 satisface

$$a_2(-\Lambda^{-1}u) = U_2(\Lambda) a_2(u) U_2^{-1}(\Lambda)$$

Por lo tanto $U_2^+ = U_2^{-1}$ sobre $M_{P,2}^N(a_i)$. De igual manera se prueba que $U_2^+ = U_2^{-1}$ en $M_{P,2}^N(b_i)$ (actuando sobre los b_i). Obsérvese que por (IV.6.44)

$$\begin{aligned} (a_2(\Lambda u) a_2(-\Lambda u) + a_2(-\Lambda u) a_2(\Lambda u)) |0\rangle &= 0 \\ (b_2(\Lambda u) b_1(-\Lambda u) + b_1(-\Lambda u) b_2(\Lambda u)) |0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.6.45})$$

Escribiendo P_μ como

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int_{M_{P,1}^N(a_i)} \frac{d^{N-1}u}{2} \kappa_\mu (a_1(u) a_2(-u) + a_2(-u) a_1(u)) H(\bar{u}^2 - u^2) + \\ &+ \int_{M_{P,2}^N(a_i)} \frac{d^{N-1}u}{2} \kappa_\mu (a_1(u) a_2(-u) + a_2(-u) a_1(u)) H(\bar{u}^2 - u^2) + \end{aligned}$$

$$\int_{M_{P_{1,2}}^N(b_i)} \frac{d^{n-1}u}{2} i u_M (b_1(u) b_2(-u) + b_2(-u) b_1(u)) H(u^2 - \bar{u}^2) +$$

$$+ \int_{M_{P_{1,2}}^N(b_i)} \frac{d^{n-1}u}{2} i u_M (b_1(u) b_2(-u) + b_2(-u) b_1(u)) H(u^2 - \bar{u}^2)$$

es por (IV.6.17) y (IV.6.45)

$$U^\dagger P_M U |0\rangle = 0$$

o

$$P U |0\rangle = 0$$

lo que implica

$$U |0\rangle = a |0\rangle \quad (\text{IV.6.46})$$

siendo a una constante compleja. Ahora de (IV.6.46) es

$$\langle 0 | U^\dagger = \langle 0 | a^\dagger \quad (\text{IV.6.47})$$

De (IV.6.46) y (IV.6.47) se deduce que

$$\langle 0 | U^\dagger a - a^\dagger U |0\rangle = 0 \quad (\text{IV.6.48})$$

De (IV.6.46)

$$(U - aI)|0\rangle = 0$$

y por lo tanto

$$\langle 0|(U^\dagger + a^\dagger I)(U - aI)|0\rangle = 0$$

Usando (IV.6.48) obtenemos

$$(\pm - |a|^2)\langle 0|0\rangle = 0$$

o sea

$$|a|^2 = \pm$$

que implica

$$a = e^{i\alpha}$$

Por ser una fase podemos elegirla igual a 1 y escribir

$$U|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{IV.6.49})$$

(con solo redefinir $U \rightarrow e^{-i\alpha}U$)

Pasamos ahora a estudiar las transformaciones de Poincaré. Una transformación de Poincaré será implementada en la forma

$$U(a, \Lambda) = e^{i a^\mu P_\mu} U(\Lambda) \quad (\text{IV.6.50})$$

$$U^\dagger(a, \Lambda) \phi(x) U(a, \Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x - a) \quad (\text{IV.6.51})$$

En efecto, usando (IV.6.15) y (IV.6.16) es

$$U^\dagger(a, \Lambda) \phi(x) U(a, \Lambda) = U^\dagger(\Lambda) e^{-i a^\mu P_\mu} \phi(x) e^{i a^\mu P_\mu} U(\Lambda) =$$

$$= U^\dagger(\Lambda) \phi(x - a) U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x - a)$$

Nos falta estudiar aún la inversión temporal y la simetría espacial, pero en virtud de que son operaciones análogas a las definidas para los bradiones no lo haremos.

Debemos puntualizar además que en todas las deducciones no hemos considerado transformaciones con $w=0$ ya que de la definición

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

queda excluido el punto cero en las integrales.

CAPITULO V

UNA ECUACION DE ORDEN SUPERIOR

0 INTRODUCCION

En este capítulo abordaremos la cuantificación de una ecuación de orden superior: el modelo escalar simplificado correspondiente al modelo de Wess-Zumino en seis dimensiones. A este modelo escalar (elegido por ser uno de los más simples) le corresponde una ecuación de movimiento de cuarto orden $(\square^2 - m^4)\phi = 0$

El campo solución de esta ecuación ϕ es la suma de dos campos ϕ_B (bradionico) y ϕ_T (taquionico). El propagador del campo total es igual al propagador habitual de Feynman para bradiones, al que se le resta el propagador correspondiente a los taquiones obtenido en el capítulo IV (ec. IV.5.21).

Utilizando este resultado pasamos a estudiar la unitariedad de la autoenergía correspondiente al modelo escalar simplificado al que le incorporamos una interacción $\lambda\phi^3$, al nivel de un lazo. A este nivel resulta que la autoenergía verifica las relaciones de unitariedad, y esto se debe al hecho de haber sacado al taquion de las patas externas de la matriz S (que es consistente con el propagador del taquion. La presencia de la distribución δ_{\pm}

imaginaria en el propagador del taquion es la responsable de las cancelaciones en la ecuación (V.2.18) (ver ecuaciones (V.2.19) a (V.2.26)), que conducen a la verificación de las relaciones de unitariedad. Resultan así de importancia las soluciones de la ecuación de movimiento del taquion con $|k|^2 = m^2$, pues de estas se deduce el término que contiene las δ_{\pm} en el propagador del taquion.

1 LAGRANGIANO, CUANTIFICACION Y PROPAGADOR

Estudiaremos ahora el campo escalar que tiene por lagrangiano

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \square\phi\square\phi - \frac{m^4}{2}\phi^2 \quad (\text{V.1.1})$$

Utilizando (III.1.7), la ecuación de movimiento correspondiente a (V.1) es

$$(\square^2 - m^4)\phi = 0 \quad (\text{V.1.2})$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma

$$(\square - m^2)(\square + m^2)\phi = 0 \quad (\text{V.1.3})$$

Vemos así que al igual que en (IV.1.3) para resolver (V.1.3) debemos hacerlo en $(m_{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}, m_{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5})$
Proponemos entonces nuevamente

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{\phi}(u_n) e^{i u_n x^\mu} d^6 u_n \quad (\text{V.1.4})$$

Así de (V.1.3) es

$$[(k_0^2 - \bar{u}^2) - m^2][k_0^2 - \bar{u}^2 + m^2] \hat{\phi}(u_\mu) = 0 \quad (\text{V.1.5})$$

Para $\bar{k}^2 > m^2$ podemos escribir

$$[k_0^2 - (\sqrt{\bar{u}^2 + m^2})^2][k_0^2 - (\sqrt{\bar{u}^2 - m^2})^2] \hat{\phi}(u_\mu) = 0 \quad (\text{V.1.6})$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(u_\mu) = & \phi_1'(\bar{u}) \delta(k_0 - \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}) + \phi_2'(\bar{u}) \delta(k_0 + \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}) + \\ & + \phi_3'(u) \delta(k_0 - \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}) + \phi_4'(u) \delta(k_0 + \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}) \end{aligned} \quad (\text{V.1.7})$$

Para $\bar{k}^2 < m^2$ es

$$[k_0^2 - (\sqrt{\bar{u}^2 + m^2})^2][k_0^2 + (\sqrt{m^2 - \bar{u}^2})^2] \hat{\phi}(u_\mu) = 0 \quad (\text{V.1.8})$$

con solución

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(u_\mu) = & \phi_5'(\bar{u}) \delta(k_0 - \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}) + \phi_6'(u) \delta(k_0 + \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}) + \\ & + \phi_7'(u) \delta(k_0 + i\sqrt{m^2 - \bar{u}^2}) + \phi_8'(u) \delta(k_0 - i\sqrt{m^2 - \bar{u}^2}) \end{aligned} \quad (\text{V.1.9})$$

Llamando ahora

$$\phi_1(\bar{u}) = \begin{cases} \phi_1'(\bar{u}) & \bar{u}^2 > m^2 \\ \phi_3'(\bar{u}) & \bar{u}^2 < m^2 \end{cases} \quad \phi_2(\bar{u}) = \begin{cases} \phi_2'(\bar{u}) & \bar{u}^2 > m^2 \\ \phi_6'(\bar{u}) & \bar{u}^2 < m^2 \end{cases} \quad (\text{V.1.10})$$

$$\phi_3'(\bar{u}) = \phi_3(\bar{u}) \quad \phi_4'(\bar{u}) = \phi_4(\bar{u}) \quad \phi_7'(\bar{u}) = \phi_5(\bar{u}) \quad \phi_8'(\bar{u}) = \phi_6(\bar{u})$$

podemos escribir de acuerdo a (V.1.4) integrando la variable k_0

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\phi_1(\vec{u}) e^{i x^0 \sqrt{\vec{u}^2 + m^2}} + \phi_2(\vec{u}) e^{-i x^0 \sqrt{\vec{u}^2 + m^2}} \right] e^{i \vec{u} \cdot \vec{x}} d^3 \vec{u} + \\ & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[(\phi_3(\vec{u}) e^{i x^0 \sqrt{\vec{u}^2 - m^2}} + \phi_4(\vec{u}) e^{-i x^0 \sqrt{\vec{u}^2 - m^2}}) \theta(\vec{u}^2 - m^2) + \right. \\ & \left. + (\phi_5(\vec{u}) e^{-x^0 \sqrt{m^2 - \vec{u}^2}} + \phi_6(\vec{u}) e^{x^0 \sqrt{m^2 - \vec{u}^2}}) \theta(m^2 - \vec{u}^2) \right] e^{i \vec{u} \cdot \vec{x}} d^3 \vec{u} \end{aligned} \quad (\text{V.1.11})$$

Vemos así que la solución (V.1.11) es la suma de un bradion escalar mas un taquion escalar.

Utilizando (III.3.2) tenemos para el tensor de impulso-energía

$$T_{\mu}^{\nu} = -\partial^{\nu} \phi \partial_{\mu} \phi + \phi \partial^{\nu} \partial_{\mu} \phi - \delta_{\mu}^{\nu} \left(\frac{1}{2} \partial \phi \partial \phi - \frac{m^{\nu} \phi^2}{2} \right) \quad (\text{V.1.12})$$

El impulso es como habitualmente

$$P_{\mu} = \int T_{\mu}^0 d^3 x \quad (\text{V.1.13})$$

Utilizando la solución (V.1.11) y la expresión (V.1.12) para T_{μ}^{ν} obtenemos para P_{μ} (donde hemos tomado orden normal ::)

$$\begin{aligned} P_{\mu} = & \frac{m^2}{\pi} : \int (\vec{u}^2 + m^2) (\phi_1(\vec{u}) \phi_2(-\vec{u}) + \phi_2(-\vec{u}) \phi_1(\vec{u})) - \\ & - (\vec{u}^2 - m^2) (\phi_3(\vec{u}) \phi_4(-\vec{u}) + \phi_4(-\vec{u}) \phi_3(\vec{u})) \theta(\vec{u}^2 - m^2) + \\ & + (m^2 - \vec{u}^2) (\phi_5(\vec{u}) \phi_6(-\vec{u}) + \phi_6(-\vec{u}) \phi_5(\vec{u})) \theta(m^2 - \vec{u}^2) d^3 \vec{u} : \end{aligned} \quad (\text{V.1.14})$$

Utilizamos ahora la ecuación (V.1.20). De ella obtenemos para el campo (V.1.11) las ecuaciones

$$\begin{aligned} [P_{01}, \phi_1(\vec{u})] &= \sqrt{\vec{u}^2 + m^2} \phi_2(\vec{u}) \\ [P_{01}, \phi_2(-\vec{u})] &= -\sqrt{\vec{u}^2 + m^2} \phi_2(-\vec{u}) \\ [P_{01}, \phi_3(\vec{u})] &= \sqrt{\vec{u}^2 - m^2} \phi_3(\vec{u}) \\ [P_{01}, \phi_4(-\vec{u})] &= -\sqrt{\vec{u}^2 - m^2} \phi_4(-\vec{u}) \end{aligned} \quad (\text{V.1.15})$$

$$[\rho_0, \phi_5(\bar{u})] = i\sqrt{u^2 - \bar{u}^2} \phi_5(\bar{u}) \quad (\text{V.1.15})$$

$$[\rho_0, \phi_6(-\bar{u})] = -i\sqrt{u^2 - \bar{u}^2} \phi_6(-\bar{u})$$

Las ecuaciones (V.1.15) son las que utilizamos ahora para hallar las relaciones de conmutación. De acuerdo a (V.1.14) es entonces

$$[\phi_2(-\bar{u}), \phi_2(\bar{u}')] = \frac{\pi}{2u^2\sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[\phi_4(-\bar{u}), \phi_3(\bar{u}')] = -\frac{\pi}{2u^2\sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad (\text{V.1.16})$$

$$[\phi_6(-\bar{u}), \phi_5(\bar{u}')] = \frac{i\pi}{2u^2\sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

Para calcular el propagador exigiremos nuevamente, al igual que en el capítulo IV, que

$$\rho_1 |0\rangle = 0 \quad (\text{V.1.17})$$

Así (V.1.17) conduce junto con (V.1.16) a los valores medios de vacío

$$\langle 0 | \phi_2(-\bar{u}') \phi_1(\bar{u}) | 0 \rangle = \frac{\pi}{2u^2\sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \phi_1(\bar{u}) \phi_2(-\bar{u}') | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \phi_4(-\bar{u}') \phi_3(\bar{u}') | 0 \rangle = -\frac{\pi}{4u^2\sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad (\text{V.1.18})$$

$$\langle 0 | \phi_3(\bar{u}) \phi_4(-\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4u^2\sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \phi_6(\bar{u}) \phi_5(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad (\text{V.1.18})$$

$$\langle 0 | \phi_5(\bar{u}) \phi_6(-\bar{u}') | 0 \rangle = - \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

Debe observarse que para calcular los valores medios de vacío del campo del taquion se ha utilizado la prescripción dada en los apartados 3 y 4 del capítulo IV. Estamos ahora en condiciones de calcular el propagador del campo. Este se define como

$$\phi(x) \phi(y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle & x^0 > y^0 \\ \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (\text{V.1.19})$$

Con esta definición y con la ayuda de (V.1.18) es inmediato su cálculo al igual que en la sección 5 del capítulo IV, solo que en este caso debemos sumarle el propagador del bradion escalar y observar que el propagador del taquion tiene el signo contrario al dado en (IV.5.13). Dicho cambio de signo proviene del cambio de signo en la cuantificación (V.1.16), que a la vez se debe a un cambio de signo en el impulso del taquion (comparar (V.1.14) con (V.1.16)).

Así el propagador del campo resulta ser

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{2m^2} \frac{1}{(2\pi)^5} \left\{ \iint \left[\frac{1}{2\sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} e^{-i|x^2 - y^2| \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \left(e^{i|x^2 - y^2| \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} - e^{-i|x^2 - y^2| \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right) H(\bar{u}^2 - m^2) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{i}{4\sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \left(e^{|x^2 - y^2| \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} - e^{-|x^2 - y^2| \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \right) H(m^2 - \bar{u}^2) \right] e^{i\bar{u} \cdot (\bar{x} - \bar{y})} dS_{\bar{u}} \right\} \quad (\text{V.1.20})$$

De acuerdo con (IV.5.13) y (IV.5.21) es

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{2m^2} \left[\Delta_F(x-y) - \Delta_{TC}(x-y) \right] \quad (\text{V.1.21})$$

donde $\Delta_{TC}(x-y)$ está dada por (IV.5.21) con $n=6$ y

$$\Delta_F(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^6} \int \frac{e^{i'q_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{k^2 + m^2 - i'\epsilon} d^6k \quad (\text{V.1.22})$$

es el propagador corriente del bradion escalar. (V.1.21) puede ser escrita

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{2m^2} \left\{ \Delta_F(x-y) - \Delta_{FT}(x-y) + \frac{1}{(2\pi)^6} \int \pi \delta(k^2 - m^2) e^{i'k_\mu(x^\mu - y^\mu)} d^6k \right. \\ \left. + \frac{i}{(2\pi)^6} \int \frac{\pi}{2\sqrt{m^2 - \vec{k}^2}} \left[\delta(k_0 + i\sqrt{m^2 - \vec{k}^2}) + \delta(k_0 - i\sqrt{m^2 - \vec{k}^2}) \right] H(m^2 - \vec{k}^2) e^{i'k_\mu(x^\mu - y^\mu)} d^6k \right\} \quad (\text{V.1.23})$$

2_ UNITARIEDAD

Para que una teoría sea físicamente aceptable, las representaciones de las álgebras de los grupos de simetría de dicha teoría deben ser unitarias, ya que sino no se puede asegurar la conservación de la probabilidad en el marco de la teoría. En función del operador S la conservación de la probabilidad se escribe

$$S S^\dagger = I \quad (\text{V.2.1})$$

Escribiendo a S en función del operador de transición T

$$S = I - iT \quad (\text{V.2.2})$$

(V.2.1) es ahora

$$i(T - T^\dagger) = T T^\dagger \quad (\text{V.2.3})$$

Si tomamos elementos de matriz en (V.2.3) para estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ arbitrarios es

$$i\langle\alpha|T-T^+|\beta\rangle = \langle\alpha|TT^+|\beta\rangle \quad (\text{V.2.4})$$

Utilizando ahora la identidad

$$I = \int |\gamma\rangle d\sigma(\gamma) \langle\gamma| \quad (\text{V.2.5})$$

podemos escribir

$$i\langle\alpha|T-T^+|\beta\rangle = \int \langle\alpha|T|\gamma\rangle \langle\gamma|T^+|\beta\rangle d\sigma(\gamma) \quad (\text{V.2.6})$$

Si elegimos $|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ obtenemos de (V.2.6)

$$i\langle\alpha|T-T^+|\alpha\rangle = \int |\langle\alpha|T|\gamma\rangle|^2 d\sigma(\gamma) \quad (\text{V.2.7})$$

o

$$2i \text{Im} T_{\alpha\alpha} = \int \sigma_{\alpha\gamma} d\sigma(\gamma) \quad (\text{V.2.8})$$

donde

$$\sigma_{\alpha\gamma} = |\langle\alpha|T|\gamma\rangle|^2 \quad (\text{V.2.9})$$

es la sección eficaz diferencial del proceso.

Si hacemos una expansión perturbativa del operador S, las amplitudes quedaran ahora expresadas en función de diagramas de Feynman, y (V.2.6), (V.2.7) se transforman en ecuaciones que se verifican orden a orden. En efecto, haciendo un desarrollo de S en función de la constante de acoplamiento de la teoría, λ es

$$S = \sum_N \lambda^N S_N \quad (\text{V.2.10})$$

$$T = \sum_N \lambda^N T_N \quad (\text{V.2.11})$$

Si reemplazamos (V.2.11) en (V.2.6) obtenemos orden a orden

$$i \langle \alpha | T_N - T_N^\dagger | \beta \rangle = \int \sum_{m=1}^{N-1} \langle \alpha | T_{N-m} | \delta \rangle \langle \delta | T_m^\dagger | \beta \rangle d\sigma(\delta) \quad (\text{V.2.12})$$

Si una teoría satisface (V.2.12) para todo n , decimos que la unitariedad ha sido verificada perturbativamente.

En este capítulo mostraremos que (V.2.12) se verifica para la autoenergía correspondiente al lagrangiano (V.1.1) al que le incorporamos una interacción $\frac{\lambda}{3} \phi^3$, es decir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \square \phi \square \phi - \frac{m^4}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{3} \phi^3 \quad (\text{V.2.13})$$

Cabe aclarar que la (V.2.12) se puede verificar a nivel árbol en forma sencilla para el caso de la teoría (V.2.13). La autoenergía $\Sigma'(p)$ para (V.2.13) es

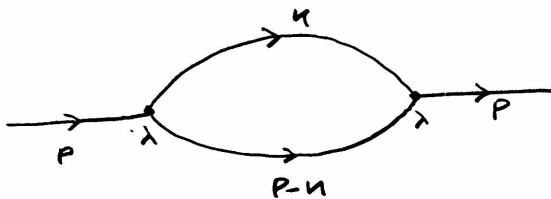


FIG. V.2.1

y donde en las patas externas sólo está el bradion escalar.

Al no haber taquiones en las patas externas la parte imaginaria de $i \Sigma'(p)$ debe ser igual a la parte imaginaria de $i \Sigma_b(p)$ bradionica, es decir (para el cálculo de $\text{Im} \Sigma_b(p)$ ver apéndice D)

$$\begin{aligned} \text{Im}(i \Sigma'(p)) &= \frac{1}{4m^4} \text{Im} [i \Delta_F(p) * \Delta_F(p)] = \\ &= \frac{\pi^2}{2m^4} \delta(p^2 + m^2) * \delta(p^2 + m^2) \end{aligned} \quad (\text{V.2.14})$$

Teniendo en cuenta el propagador (V.1.23) y llamando

$$\delta_{\pm}(k^2 - m^2) = \frac{i}{2\sqrt{m^2 - \vec{k}^2}} \left[\delta(k_0 + i\sqrt{m^2 - \vec{k}^2}) + \delta(k_0 - i\sqrt{m^2 - \vec{k}^2}) \right] \theta(k^2 - \vec{k}^2)$$

(V.2.15)

podemos escribir en el espacio de impulsos

$$\Delta(p) = \frac{1}{2m^2} \left[\Delta_F(p) - \Delta_{F_T}(p) + \pi \delta(p^2 - m^2) + \pi \delta_{\pm}(p^2 - m^2) \right] \quad (\text{V.2.16})$$

con lo que

$$\begin{aligned} \text{Im}(i\Sigma'(p)) = \frac{1}{4m^4} & \left\{ \text{Im}[i\Delta_F(p) * \Delta_F(p)] - 2 \text{Im}[i\Delta_F(p) * \Delta_{F_T}(p)] \right. \\ & + \text{Im}[i\Delta_{F_T}(p) * \Delta_{F_T}(p)] + 2\pi \text{Im}[i\Delta_F(p) * \delta(p^2 - m^2)] \\ & + \pi^2 \text{Im}[i\delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2)] + \pi^2 \text{Im}[i\delta_{\pm}(p^2 - m^2) * \delta_{\pm}(p^2 - m^2)] + \\ & \left. + 2\pi \text{Im}[i\delta(p^2 - m^2) * \delta_{\pm}(p^2 - m^2)] + 2\pi \text{Im}[i\Delta_F(p) * \delta_{\pm}(p^2 - m^2)] + \right. \end{aligned}$$

$$-2\pi \operatorname{Im} [i \Delta_F(p) * \delta(p^2 - m^2)] - 2\pi \operatorname{Im} [i \Delta_{FT}(p) * \delta_I(p^2 - m^2)] \left. \vphantom{\operatorname{Im}} \right\} \quad (\text{V.2.17})$$

$\Sigma'(p)$ debe verificar (V.2.14). Teniendo en cuenta (V.2.17) se debe cumplir

$$\begin{aligned} & -2 \operatorname{Im} [i \Delta_F(p) * \Delta_{FT}(p)] + \operatorname{Im} [i \Delta_{FT}(p) * \Delta_{FT}(p)] + \\ & + 2\pi \operatorname{Im} [i \Delta_F(p) * \delta(p^2 - m^2)] + \pi^2 \operatorname{Im} [i \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2)] \\ & + \pi^2 \operatorname{Im} [i \delta_I(p^2 - m^2) * \delta_I(p^2 - m^2)] + 2\pi \operatorname{Im} [i \delta(p^2 - m^2) * \delta_I(p^2 - m^2)] \\ & + 2\pi \operatorname{Im} [i \Delta_F(p) * \delta_I(p^2 - m^2)] - 2\pi \operatorname{Im} [i \Delta_{FT}(p) * \delta(p^2 - m^2)] \\ & - 2\pi \operatorname{Im} [i \Delta_{FT}(p) * \delta_I(p^2 - m^2)] = 0 \quad (\text{V.2.18}) \end{aligned}$$

Mostraremos ahora que (V.2.18) se verifica para $P_0 > 0$ ya que se cumple

$$\operatorname{Im} [i \Delta_{FT}(p) * \Delta_{FT}(p)] = 2\pi^2 \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{V.2.19})$$

$$\operatorname{Im} [i \Delta_F(p) * \Delta_{FT}(p)] = 2\pi^2 \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 + m^2) \quad (\text{V.2.20})$$

$$\operatorname{Im} [i \Delta_F(p) * \delta(p^2 - m^2)] = \pi \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{V.2.21})$$

$$\operatorname{Im} [i \delta_I(p^2 - m^2) * \delta_I(p^2 - m^2)] = -\delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{V.2.22})$$

$$\operatorname{Im} [i \delta(p^2 - m^2) * \delta_I(p^2 - m^2)] = 0 \quad (\text{V.2.23})$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[i \Delta_F(p) * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] &= \text{Im} \left[i \left(\frac{-i p_V}{p^2 + m^2} \right) * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] = \\ &= \pi \delta(p^2 + m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad p_0 > 0 \end{aligned} \quad (\text{V.2.24})$$

$$\text{Im} \left[i \Delta_{FT}(p) * \delta(p^2 - m^2) \right] = \pi \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{V.2.25})$$

$$\text{Im} \left[i \Delta_{FT}(p) * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] = \text{Im} \left[i \left(\frac{-i p_V}{p^2 - m^2} \right) * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] = 0 \quad (\text{V.2.26})$$

Las ecuaciones (V.2.19), (V.2.20), (V.2.21) y (V.2.25) se pueden demostrar y son habituales en la teoría de campos. Esto ha sido hecho en el apéndice D. No sucede lo mismo con las ecuaciones (V.2.22), (V.2.23), (V.2.24) y (V.2.26), ya que $\delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2)$ en el eje real es una serie infinita de deltas de Dirac (referencia [18]).

Para demostrarlas las extendemos al plano complejo k_0 , utilizando el formalismo de las distribuciones analíticas. A las cantidades extendidas le agregaremos el superíndice e. Así $\delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - m^2)$

significa $\delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2)$ extendida a k complejo, etc...

Usando el formalismo de las distribuciones analíticas demostraremos que

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] &= \text{Re} \left[\delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - m^2) * \delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - m^2) \right] = \\ &= -\delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \end{aligned} \quad (\text{V.2.22}')$$

$$\text{Re} \left[\delta(p^2 - m^2) * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] = \text{Re} \left[\delta^e(p^2 - m^2) * \delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - m^2) \right] = 0 \quad (\text{V.2.23}')$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[-\frac{i p_V}{p^2 + m^2} * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] &= \text{Re} \left[-\frac{i p_V^e}{p^2 + m^2} * \delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - m^2) \right] = \\ &= \pi \delta(p^2 + m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad p_0 > 0 \end{aligned} \quad (\text{V.2.24}')$$

$$\text{Re} \left[-\frac{i p_V}{p^2 - m^2} * \delta_{\mathbb{I}}(p^2 - m^2) \right] = \text{Re} \left[-\frac{i p_V^e}{p^2 - m^2} * \delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - m^2) \right] = 0 \quad (\text{V.2.26}')$$

Teniendo en cuenta el apéndice (B.2.2) es

$$\delta_{\mathbb{I}}^e(u^2 - u^2) = \frac{i\kappa(u^2 - \bar{u}^2)}{2\sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\kappa_0 + i\sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} + \frac{1}{\kappa_0 - i\sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} \right] \quad (\text{V.2.27})$$

$$\delta^e(u^2 - u^2) = \frac{4(\bar{u}^2 - u^2)}{2\sqrt{u^2 - u^2}} \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\kappa_0 + \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} + \frac{1}{\kappa_0 - \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} \right] \quad (\text{V.2.28})$$

$$\Delta_F^e(u) = -\frac{i\rho v e}{u^2 + u^2} + \kappa \delta^e(u^2 + u^2) \quad (\text{V.2.29})$$

$$\Delta_{FT}^e(u) = -\frac{i\rho v e}{u^2 - u^2} + \kappa \delta^e(u^2 - u^2) \quad (\text{V.2.30})$$

3 CALCULO DE $\delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - u_1^2) * \delta_{\mathbb{I}}^e(p^2 - u_2^2)$

El cálculo de $\delta_{\mathbb{I}}^e * \delta_{\mathbb{I}}^e$ lo haremos en el sistema de reposo $P_\mu = (P_0, 0, 0, 0)$. Supongamos que $u_2 \gg u_1$ y que la dimension del espacio es ν

$$\langle (\delta_{\mathbb{I}_1}^e + \delta_{\mathbb{I}_2}^e)(p), \phi(p) \rangle = \int_C d\rho_0 \int d^{\nu-1}u H(u_1^2 - u^2) \frac{1}{4\pi\omega_1} \left[\frac{1}{\kappa_0 + i\omega_1} + \frac{1}{\kappa_0 - i\omega_1} \right] *$$

$$* \frac{1}{4\pi\omega_2} \left[\frac{1}{\rho_0 + i\omega_2} + \frac{1}{\rho_0 - i\omega_2} \right] \phi(\rho_0 + u) = \quad (\text{V.3.1})$$

$$= -\frac{1}{4} \int 4(u_1^2 - \bar{u}^2) \frac{d^{\nu-1}u}{\omega_1\omega_2} \left[\phi(i\omega_1 + i\omega_2) + \phi(i\omega_2 - i\omega_1) + \right.$$

$$+ \phi(-i\omega_1 + i\omega_2) + \phi(-i\omega_1 - i\omega_2) \Big] \quad (\text{V.3.1})$$

donde

$$\omega_1 = \sqrt{m_1^2 - \vec{n}^2} \quad \omega_2 = \sqrt{m_2^2 - \vec{n}^2} \quad (\text{V.3.2})$$

$$\delta_{\mathbb{I}_1}^e(\rho) = \delta_{\mathbb{I}}^e(\rho^2 - m_1^2) \quad \delta_{\mathbb{I}_2}^e(\rho) = \delta_{\mathbb{I}}^e(\rho^2 - m_2^2)$$

De ahora en adelante haremos

$$p_0 = z \quad \text{Re } p_0 = x \quad \text{Im } p_0 = y$$

Utilizando la fórmula de Cauchy es

$$\langle (\delta_{\mathbb{I}_1}^e * \delta_{\mathbb{I}_2}^e)(z), \phi(z) \rangle = -\frac{1}{4} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \int_0^1 H(m_1^2 - \vec{n}^2) \frac{d^{V+1}k}{\omega_1 \omega_2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{z - (i\omega_1 + i\omega_2)} + \frac{1}{z - (i\omega_1 - i\omega_2)} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{z - (-i\omega_1 + i\omega_2)} + \frac{1}{z - (-i\omega_1 - i\omega_2)} \right] \quad (\text{V.3.3})$$

Ahora

$$\frac{1}{z - (i\omega_1 + i\omega_2)} + \frac{1}{z - (i\omega_1 - i\omega_2)} + \frac{1}{z - (-i\omega_1 + i\omega_2)} + \frac{1}{z - (-i\omega_1 - i\omega_2)} =$$

$$= \frac{2}{z} \left[1 + \frac{z^4 - (m_2^2 - m_1^2)^2}{z^4 + 2z^2(m_2^2 - m_1^2) + (m_2^2 - m_1^2)^2 + 4z^2\omega_1^2} \right] \quad (\text{V.3.4})$$

El lado derecho de la igualdad tiene dos miembros. El primero que es z/z contribuye con una $\delta(z)$ a la convolución, que es nula sobre el eje real pues hemos supuesto $\rho_0 \neq 0$. Así eligiendo $\phi(0) = 0$

$$\langle (\delta_{I_2}^e * \delta_{I_2}^e)(z), \phi(z) \rangle = -\frac{1}{4} \frac{1}{2\pi i} \oint dz \left(\frac{d^{v-1}}{u} H(m_1^2 - u^2) \times \right. \\ \left. \times \frac{z}{z} \frac{z^4 - (m_2^2 - m_1^2)^2}{z^4 + 2z^2(m_2^2 - m_1^2) + (m_2^2 - m_1^2)^2 + 4z^2\omega_1^2} \phi(z) = \right.$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi i} \oint_c dz \left(\frac{d^{v-1}}{\omega_1 \omega_2} H(m_1^2 - \bar{u}^2) \frac{z}{z} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{z^4 - (m_2^2 - m_1^2)^2}{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 + 4z^2\omega_1^2} \phi(z) = \right.$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{v-1}{2})} \frac{1}{2\pi i} \oint_c dz \frac{\phi(z)}{z^3} [z^4 - (m_2^2 - m_1^2)^2] \times$$

$$\times \int_0^{\omega_1} \frac{u^{v-2}}{\omega_1 \omega_2} \frac{u}{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 + \omega_1^2} du \quad (\text{V.3.5})$$

Ahora utilizando apéndice (C.3) podemos escribir

$$\int_0^{u_1} \frac{u^{v-2}}{\omega_1 \omega_2} \frac{1}{\frac{(z^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{4z^2} + u_1^2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{u_1^2} dx \cdot x^{\frac{v-3}{2}} (u_1^2 - x)^{-1/2} (u_2^2 - x)^{-1/2} \quad (*)$$

$$(*) \left[\frac{(z^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{4z^2} + u_1^2 - x \right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{v-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(v/2)} (u_1^2)^{\frac{v-2}{2}} z^{-2} (u_2^2)^{-1/2} \times$$

$$\times F_2 \left(\frac{v-1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{v}{2}; \frac{u_1^2}{z^2}, \frac{u_1^2}{u_2^2} \right) \quad (V.3.6)$$

donde

$$z_2 = \frac{(z^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{4z^2} + u_1^2 \quad (V.3.7)$$

Utilizando ahora apéndice (C.9) es

$$F \left(\frac{v-1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{v}{2}; \frac{u_1^2}{z^2}, \frac{u_1^2}{u_2^2} \right) = \frac{i\pi \Gamma(v/2)}{\Gamma(v/2) \Gamma(v/2)} \left[\frac{(z^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{4z^2 u_1^2} + 1 \right]^{\frac{v-1}{2}} \times$$

$$\times \frac{4z^2 u_1 u_2}{z^4 - (u_2^2 - u_1^2)^2} \quad (V.3.8)$$

y así (V.3.6) se convierte en

$$\frac{2\pi i z^2}{z^4 + (u_2^2 - u_1^2)^2} \left[\frac{(z^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{4z^2} + u_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} \quad (V.3.9)$$

Reemplazando (V.3.9) en (V.3.5) obtenemos

$$\langle \delta_{\mathbb{R}^3}^e * \delta_{\mathbb{R}^3}^e(z), \phi(z) \rangle = \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{\Gamma(\frac{v-1}{2})} \oint_C \frac{\phi(z)}{z} \left[\frac{(z^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{4z^2} + u_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} dz \quad (\text{V.3.10})$$

donde C es un contorno del plano complejo que rodea los puntos singulares del integrando. Así para calcular (V.3.10) debemos integrar sobre los cortes. Los puntos de ramificación son solución de

$$z_1 = 0 \quad (\text{V.3.11})$$

o sea

$$\frac{(z^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{4z^2} + u_1^2 = 0$$

Las soluciones son

$$z = \pm i(u_2 \pm u_1) \quad (\text{V.3.12})$$

Para definir los cortes hallamos los lugares geométricos en los que z_1 es real. Estos lugares geométricos surgen de resolver

$$z_1 = \bar{z}_1 \quad (\text{V.3.13})$$

Utilizando (V.3.7), (V.3.13) se convierte en

$$x \vee \left[|z|^4 - (u_2^2 - u_1^2) \right] = 0 \quad (\text{V.3.14})$$

Las soluciones son $x=0$, $y=0$, $|z| = \sqrt{u_2^2 - u_1^2}$. Así es real en el eje x , el eje y , y en la circunferencia de radio $\sqrt{u_2^2 - u_1^2}$.

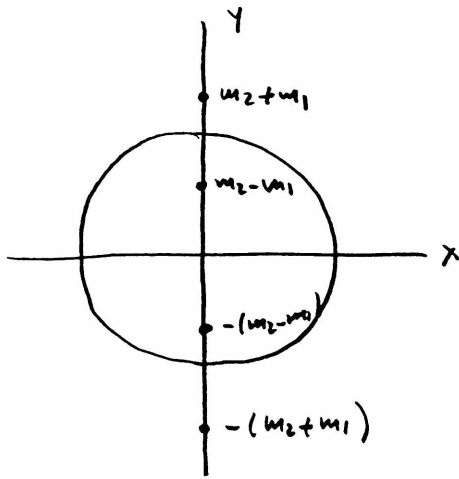


FIG. V.3.1

Determinamos ahora en los lugares geométricos anteriores las zonas en donde $z_1 > 0$ y $z_1 < 0$. Estas zonas son (Fig.V.3.2)

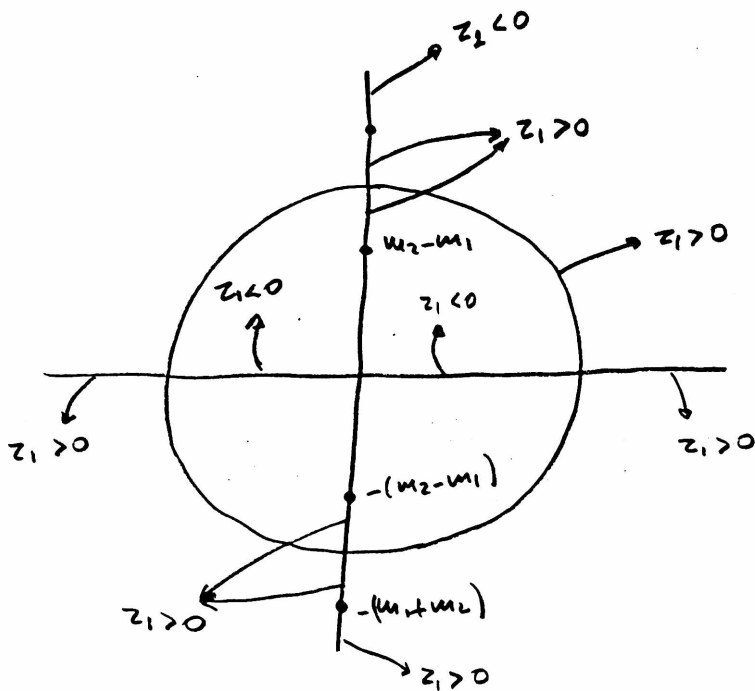


FIG. V.3.2

La parte imaginaria de z_1 es

$$\text{Im } z_1 = \frac{x y}{|z|^4} \left[|z|^4 - (m_2^2 - m_1^2)^2 \right] \quad (\text{V.3.15})$$

Sobre los ejes y la circunferencia $\text{Im } z_1 = 0$. En la Fig.V.3.3 especificamos el signo de $\text{Im } z_1$.

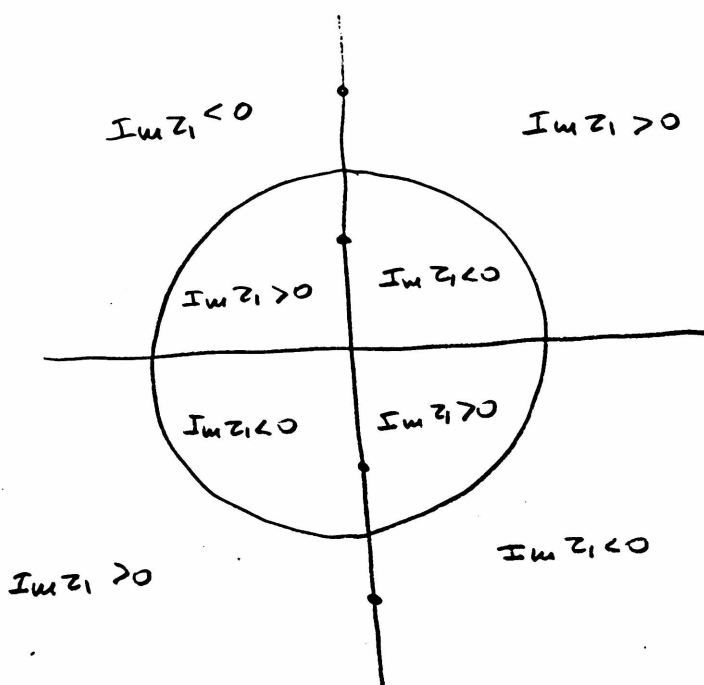


FIG. V.3.3

Al ser cuatro puntos de ramificación, elegimos dos curvas que unan cada una dos puntos. Estas curvas están mostradas en la Fig.V.3.4.

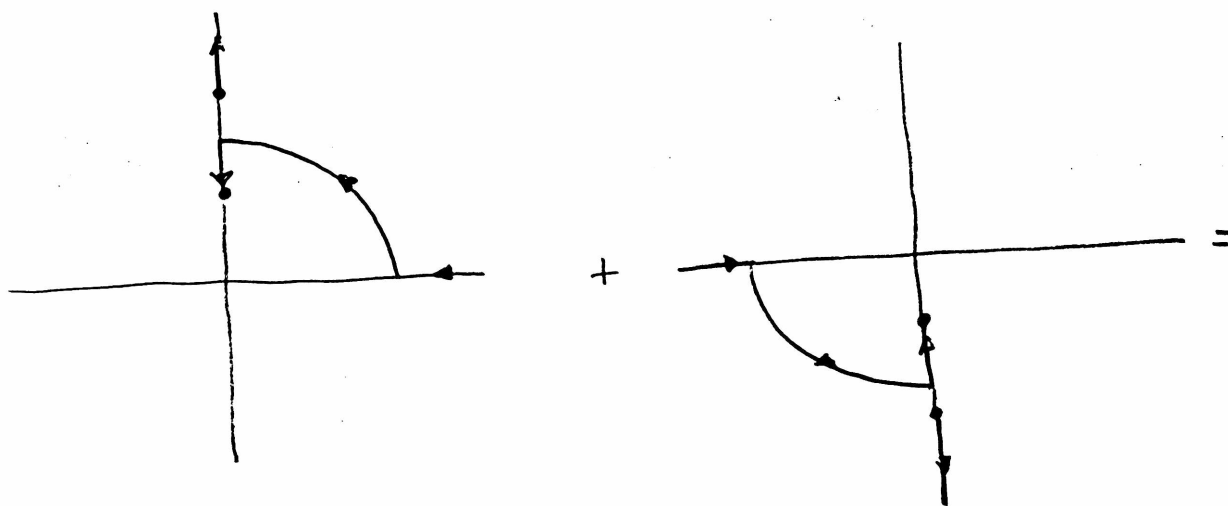


FIG V.3.4

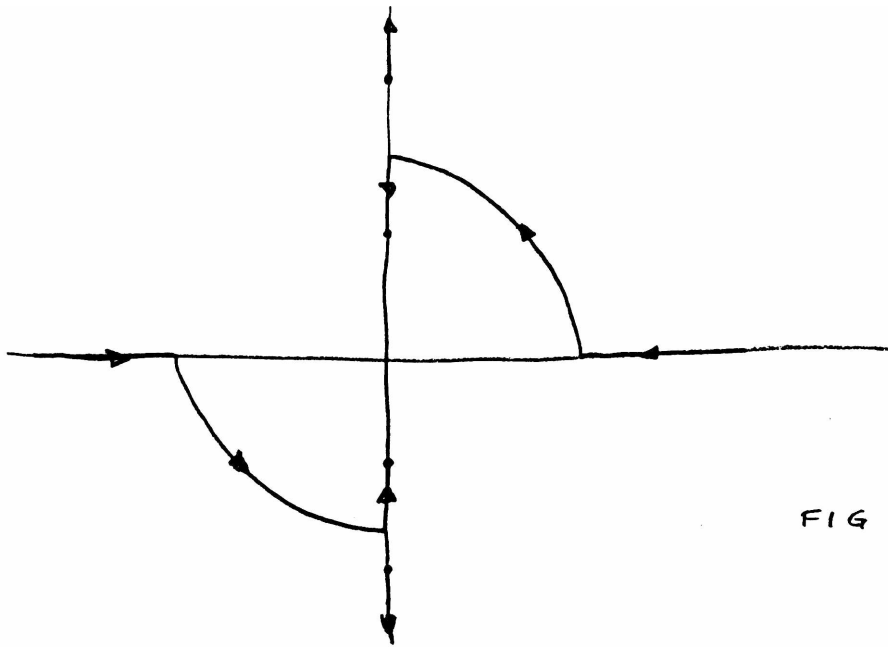


FIG V.3.4

La asignación de la fase θ a lo largo de los cortes es

$$z_1 > 0$$

$$\text{Im } z_1 > 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\text{Im } z_1 < 0 \Rightarrow \theta = 2\pi$$

$$z_1 < 0$$

$$\text{Im } z_1 > 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\text{Im } z_1 < 0 \Rightarrow \theta = -\pi$$

La curva C que rodea a los puntos singulares está graficada en la Fig.V.3.5.

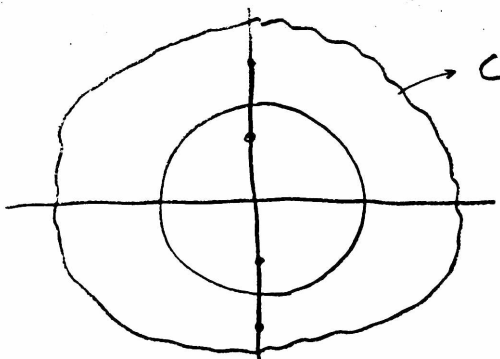


FIG V.3.5

y puede ser deformada de acuerdo a nuestra elección de los cortes a

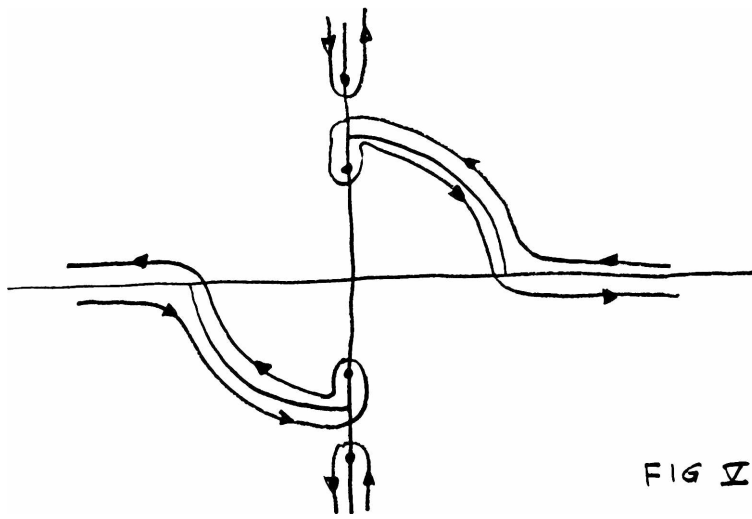


FIG V.3.6

Utilizando el teorema de los residuos puede demostrarse que integrar sobre los contornos anteriores es equivalente a integrar en los siguientes contornos y con la siguiente asignación de fases

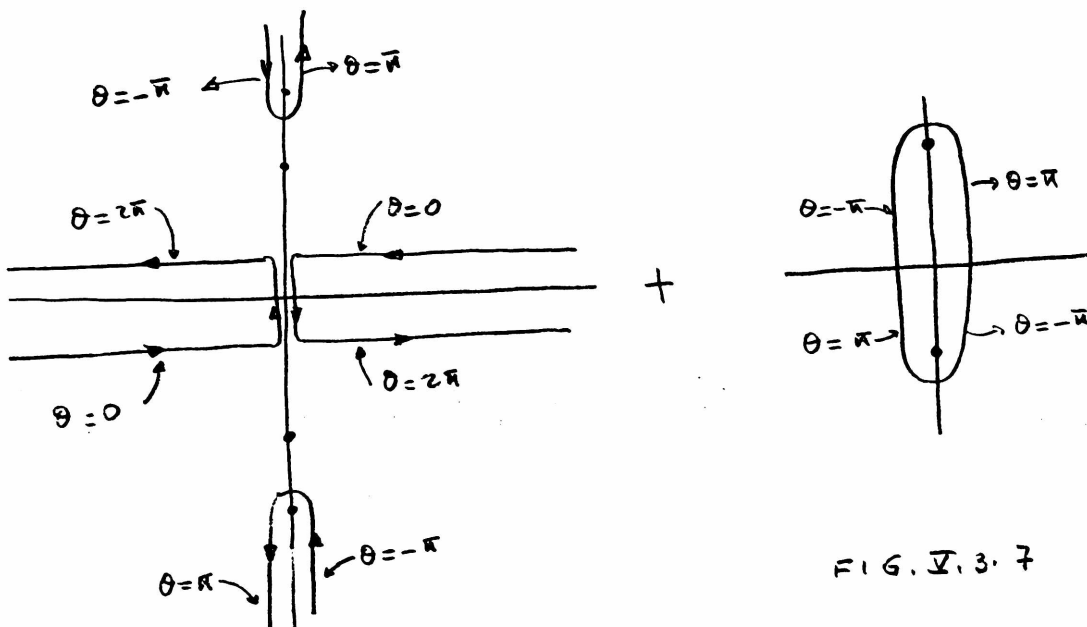


FIG. V.3.7

Así V.3.10 se convierte en

$$\langle (\xi_1^e \rightarrow \xi_2^e)(z), \phi(z) \rangle = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint_C \frac{\phi(z)}{z} z^{\frac{\nu-3}{2}} dz =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} x_2^{\frac{\nu-3}{2}} e^{i\pi(\nu-3)} dx + \int_0^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} x_1^{\frac{\nu-3}{2}} dx + \right. \\
& \int_0^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} x_2^{\frac{\nu-3}{2}} e^{i\pi(\nu-3)} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\phi(x)}{x} x_1^{\frac{\nu-3}{2}} dx + \\
& \int_{m_1+m_2}^{\infty} \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy + \int_{\infty}^{m_1+m_2} \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{-i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy + \\
& \int_{m_1+m_2}^{\infty} \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy + \int_{-\infty}^{-(m_1+m_2)} \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{-i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy + \\
& \int_{-(m_2-m_1)}^0 \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{-i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy + \int_0^{m_2-m_1} \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy + \\
& \left. \int_{m_2-m_1}^0 \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{-i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy + \int_0^{-(m_2-m_1)} \frac{\phi(iy)}{y} y_1^{\frac{\nu-3}{2}} e^{i\pi(\frac{\nu-3}{2})} dy \right\} \quad (\text{V.3.17})
\end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{(x^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4x^2} + m_1^2 \quad y_2 = \frac{(-y^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{-4y^2} + m_1^2 \quad (\text{V.3.18})$$

Finalmente (V.3.17) puede ser escrita

$$\begin{aligned}
\langle \delta_{\mathbb{I}^+}^e * \delta_{\mathbb{I}^c}^e \rangle(z), \phi(z) \rangle &= -\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{|x|} \left[\frac{(x+m_2^2-m_1^2)^2}{4x^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dx \\
&+ \frac{i(-1)^{\nu/2} \pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H[y^2 - (m_1+m_2)^2] + H[y^2 - (m_2-m_1)^2] \right\} \frac{\phi(iy)}{|y|} \otimes \\
&\otimes \left[\frac{(-y^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{-4y^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dy \quad (\text{V.3.19})
\end{aligned}$$

La (V.3.19) nos dice que sobre el eje real

$$\delta_{\mathbb{I}^+}(p^2 - m_1^2) * \delta_{\mathbb{I}^+}(p^2 - m_2^2) = \delta_{\mathbb{I}^+}(p^2 - m_1^2) * \delta_{\mathbb{I}^+}(p^2 - m_2^2) =$$

$$= - \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{v-1}{2})|p_0|} \left[\frac{(p_0^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4p_0^2} + m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}}$$

y pasando al sistema (p_0, \vec{p}) es entonces

$$\begin{aligned} \delta_{\pm}(p^2, m_1^2) * \delta_{\pm}(p^2, m_2^2) &= - \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{v-1}{2})|(-p^2)|^{1/2}} \left[\frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{-4p^2} + m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} = \\ &= \delta(p^2, m_1^2) * \delta(p^2, m_2^2) \end{aligned} \quad (\text{V.3.20})$$

Cuando $m_1^2 = m_2^2 = m^2$ obtenemos (V.2.22) y (V.2.22')

4 CALCULO DE $\delta^e(p^2, m_1^2) * \delta_{\pm}^e(p^2, m_2^2)$

Nuevamente en el sistema de reposo

$$\begin{aligned} \langle \delta^e(p^2, m_1^2) * \delta_{\pm}^e(p^2, m_2^2) \rangle | \phi(p) \rangle &= \oint_C dp_0 \int d^v k \frac{H(\vec{k}^2, m_1^2)}{2\pi i} \frac{1}{2\omega_1} * \\ &* \frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{1}{k_0 - \omega_1} + \frac{1}{k_0 + \omega_1} \right] \frac{H(m_2^2 - k^2)}{2\pi} * \\ &* \frac{1}{2\omega_2} \left[\frac{1}{p_0 + i\omega_2} + \frac{1}{p_0 - i\omega_2} \right] \phi(p_0 + k_0) \end{aligned} \quad (\text{V.4.1})$$

donde

$$\omega_1 = \sqrt{\bar{u}^2 - m_1^2} \quad \omega_2 = \sqrt{m_2^2 - \bar{u}^2}$$

Obsérvese que si $m_1 > m_2$ $\delta^e(\rho \pm m_1 z) * \delta_{\mp}^e(\rho \pm m_2 z) = 0$ ya que el producto de las funciones de Heaviside es nulo. Así debemos considerar el caso $m_2 \geq m_1$. En ese caso (V.4.1) es

$$\begin{aligned} \langle \delta^e(\rho \pm m_1 z) * \delta_{\mp}^e(\rho \pm m_2 z), \phi(\rho) \rangle &= \frac{i}{4} \int_{m_1 \leq |\bar{u}| \leq m_2} \frac{d^{v-1} \bar{u}}{\omega_1 \omega_2} \left[\phi(\omega_1 + i\omega_2) + \phi(\omega_1 - i\omega_2) + \right. \\ &+ \left. \phi(-\omega_1 + i\omega_2) + \phi(-\omega_1 - i\omega_2) \right] = \frac{1}{8\pi} \oint_C dz \int_{m_1 \leq |\bar{u}| \leq m_2} \frac{d^{v-1} \bar{u}}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{z - (\omega_1 + i\omega_2)} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{z - (\omega_1 - i\omega_2)} + \frac{1}{z - (-\omega_1 + i\omega_2)} + \frac{1}{z - (-\omega_1 - i\omega_2)} \right] \phi(z) \end{aligned} \quad (\text{V.4.2})$$

Ahora

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z - (\omega_1 + i\omega_2)} + \frac{1}{z - (\omega_1 - i\omega_2)} + \frac{1}{z - (-\omega_1 + i\omega_2)} + \frac{1}{z - (-\omega_1 - i\omega_2)} = \\ &= \frac{2}{z} \left[1 + \frac{z^4 - (m_2^2 - m_1^2)}{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 - 4z^2 m_1^2} \right] \end{aligned}$$

Como $\phi(0) = 0$ es nuevamente

$$\langle \delta^e(\rho \pm m_1 z) * \delta_{\mp}^e(\rho \pm m_2 z), \phi(\rho) \rangle = \frac{1}{4\pi} \oint dz \int_{m_1 \leq |\bar{u}| \leq m_2} \frac{d^{v-1} \bar{u}}{\omega_1 \omega_2} \frac{\phi(z)}{z} *$$

$$x \frac{z^{\nu} (m_2^2 - m_1^2)^2}{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 - 4z^2 m_1^2} = -\frac{\pi^{\nu-1}}{8 \Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \frac{1}{2\alpha i} \oint_c \frac{\phi(z)}{z^3} [z^{\nu} (m_2^2 - m_1^2)^2] \otimes$$

$$\otimes \int_{m_1^2}^{m_2^2} x^{\frac{\nu-3}{2}} (m_2^2 - x)^{-1/2} (m_1^2 - x)^{-1/2} \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 - x \right]^{-1} dx$$

(IV.4.3)

Calculamos ahora la integral en x

$$\int_{m_1^2}^{m_2^2} x^{\frac{\nu-3}{2}} (m_2^2 - x)^{-1/2} (m_1^2 - x)^{-1/2} \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 - x \right]^{-1} dx =$$

$$(-1)^{\nu/2} \int_0^{\frac{m_2^2 - m_1^2}{z^2}} y^{-1/2} (m_2^2 - m_1^2 - y)^{-1/2} (-m_1^2 - y)^{\frac{\nu-3}{2}} \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4x^2} - y \right]^{-1} dy =$$

$$(-1)^{\nu/2} [\Gamma(1/2)]^2 z_2^{-3} (-m_1^2)^{\frac{\nu-3}{2}} F_2 \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3-\nu}{2}, 1, \frac{m_2^2 - m_1^2}{z_1}, \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2} \right)$$

(IV.4.4)

donde hemos usado apéndice (C.3) y donde

$$z_2 = \frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2}$$

Utilizando nuevamente apéndice (C.9) es

$$F \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3-\nu}{2}, 1, \frac{m_2^2 - m_1^2}{z_1}, \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2} \right) = -2 \left(1 + \frac{z_1}{m_1^2} \right)^{\frac{\nu-3}{2}} \frac{z_1^{1/2} z}{z^2 + m_1^2 m_2^2}$$

y así (V.4.4) se convierte en

$$(V.4.4) = -i\pi(m_1^2 + z_1)^{\frac{\nu-3}{2}} \frac{4z^2}{z^4 - (m_2^2 - m_1^2)^2} \quad (V.4.5)$$

Reemplazando (V.4.5) en (V.4.3) obtenemos

$$\langle \delta^e(z^2 - m_1^2) * \delta^e(z^2 - m_2^2), \phi(z) \rangle = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint_C \frac{\phi(z)}{z} \times \\ \times \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dz \quad m_2 > m_1 \quad (V.4.6)$$

Así para todo m_1, m_2 es

$$\langle \delta^e(z^2 - m_1^2) * \delta^e(z^2 - m_2^2), \phi(z) \rangle = 4(m_2 - m_1) \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint_C dz \frac{\phi(z)}{z} \times \\ \times \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (V.4.7)$$

El integrando (V.4.7) es el mismo que (V.3.10), así que tiene los mismos puntos de ramificación. Por lo tanto elegimos el corte

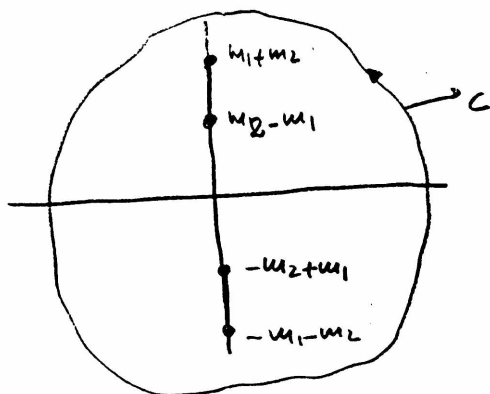


FIG V.4.1

y lo deformamos en forma continua a

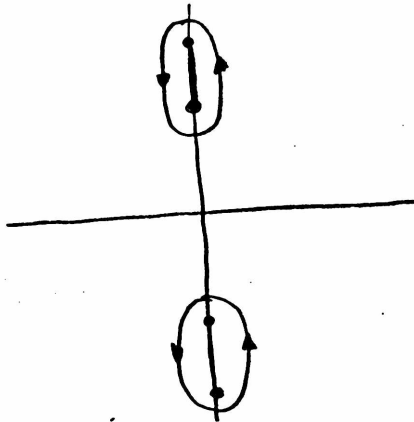


FIG V.4.2

En la figura que sigue mostramos el signo de la parte imaginaria a lo largo del corte

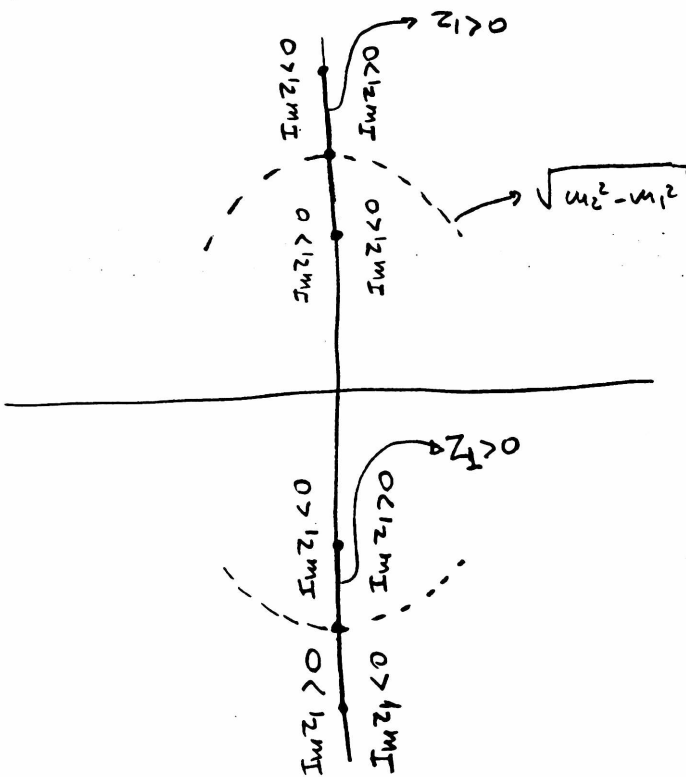


FIG V.4.3

integrando a lo largo de los cortes obtenemos finalmente

$$\langle \delta^e(z^2 - m_1^2) * \delta_{\pm}^e(z^2 - m_2^2), \phi(z) \rangle = -H(m_2 - m_1) \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H[\gamma^2 - (m_2 - m_1)^2] - H[\gamma^2 - (m_2^2 - m_1^2)] \right\} \frac{\phi(i\gamma)}{|\gamma|} \times$$

$$\left[\frac{(-\gamma^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{-4\gamma^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} d\gamma + H(m_2 - m_1) \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H[\gamma^2 - (m_2^2 - m_1^2)] - H[\gamma^2 - (m_2 + m_1)^2] \right\} \frac{\phi(i\gamma)}{|\gamma|} \times$$

$$\left[\frac{(-\gamma^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{-4\gamma^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} d\gamma \quad (\text{V.4.8})$$

Así (V.4.8) nos muestra que sobre el eje real

$$\delta(\rho^2 - m_1^2) * \delta_{\pm}(\rho^2 - m_2^2) = \delta^e(\rho^2 - m_1^2) * \delta_{\pm}^e(\rho^2 - m_2^2) = 0$$

obteniéndose entonces (V.2.23)-(V.2.23')

5_CALCULO DE $-i \text{Pve}/\rho^2 + m_1^2 * \delta_{\mathbb{R}}^e(\rho^2 - m_2^2)$

Para calcular la convolución entre $-i \text{Pve}/\rho^2 + m_1^2$ y $\delta_{\mathbb{R}}^e(\rho^2 - m_2^2)$ utilizaremos las propiedades de la transformada de Hilbert dadas en la ref. [19] que conducen a las igualdades

$$\int \frac{\text{Pv}}{x-y} \frac{\text{Pv}}{x-z} dx = -\frac{i\pi \text{sgn}(\text{Im} z)}{y-z} \quad x, y \text{ reales} \quad (\text{V.5.1})$$

$$\int \frac{\text{Pv}}{x-y} \frac{\text{Pv}}{x-z} dx = \pi^2 \delta(x-z) \quad x, y, z \text{ reales} \quad (\text{V.5.2})$$

Así

$$\begin{aligned} \langle -i \text{Pve}/\rho^2 + m_1^2 * \delta_{\mathbb{R}}^e(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \rangle &= \frac{i}{8\pi} \oint \left(\frac{d\rho_0 d\eta}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{\text{Pve}}{\eta_0 - \omega_1} - \frac{\text{Pve}}{\eta_0 + \omega_1} \right] \right) \times \\ &\times \left[\frac{1}{\rho_0 + i\omega_2} + \frac{1}{\rho_0 - i\omega_2} \right] \phi(\rho_0 + \eta_0) H(m_2^2 - \bar{\eta}^2) \end{aligned}$$

Utilizando apéndice (B.4.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle -i \frac{\text{Pve}}{\rho^2 + m_1^2} * \delta_{\mathbb{R}}^e(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \rangle &= \frac{i}{8\pi} \oint \left(\frac{dz d\eta}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{\text{Pv}}{\eta_0 - \omega_1} - \frac{\text{Pv}}{\eta_0 + \omega_1} \right] \right) \times \\ &\times \left[\frac{1}{z - \eta_0 - i\omega_2} + \frac{1}{z - \eta_0 + i\omega_2} \right] \phi(z) H(m_2^2 - \bar{\eta}^2) \end{aligned} \quad (\text{V.5.3})$$

Por (V.5.1) es por ejemplo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Pv}}{\eta_0 - \omega_1} \frac{1}{z - \eta_0 - i\omega_2} d\eta_0 = \frac{i\pi \text{sgn} \text{Im}(z - i\omega_2)}{\omega_1 - z + i\omega_2}$$

Calculando en igual forma los términos restantes en (V.5.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle -\frac{i\rho v e}{\rho^2 + m_1^2} * \delta_{\pm}(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \rangle &= \frac{1}{8} \oint \left(\frac{d^{v-1} dz}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{\mp \operatorname{Im}(z - i\omega_2)}{z - \omega_1 - i\omega_2} + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\mp \operatorname{Im}(z + i\omega_2)}{z - \omega_1 + i\omega_2} - \frac{\mp \operatorname{Im}(z - i\omega_2)}{z + \omega_1 - i\omega_2} - \frac{\mp \operatorname{Im}(z + i\omega_2)}{z + \omega_1 + i\omega_2} \right] \right) \times \\ &\times \phi(z) H(m_2^2 - u^2) \quad (\text{V.5.4}) \end{aligned}$$

Utilizando (V.5.1) podemos escribir (V.5.4) en la forma

$$\begin{aligned} \langle -\frac{i\rho v e}{\rho^2 + m_1^2} * \delta_{\pm}(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \rangle &= -\frac{i}{8\pi} \oint \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz dx d^{v-1} u}{\omega_1 \omega_2} \frac{\rho v}{x} \otimes \\ \otimes \left[\frac{1}{z - x - \omega_1 - i\omega_2} + \frac{1}{z - x - \omega_2 + i\omega_2} - \frac{1}{z - x + \omega_1 - i\omega_2} \right. \\ &\left. - \frac{1}{z - x + \omega_1 + i\omega_2} \right] \phi(z) H(m_2^2 - u^2) \quad (\text{V.5.5}) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $z - x \rightarrow z$ es

$$\begin{aligned} \langle -\frac{i\rho v e}{\rho^2 + m_1^2} * \delta_{\pm}(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \rangle &= \frac{i}{2\pi} \oint \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz dx d^{v-1} u}{\omega_2} \otimes \\ \otimes \frac{z^2 - m_1^2 - m_2^2}{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2 - 4z^2 m_1^2} \frac{\rho v}{x} \phi(z+x) H(m_2^2 - u^2) &= \\ \frac{i\pi^{\frac{v-1}{2}}}{4\pi\Gamma(\frac{v-1}{2})} \oint \int_{-\infty}^{+\infty} dz dx \frac{\rho v}{x} \phi(z+x) \frac{z^2 - m_1^2 - m_2^2}{z^2} \otimes \end{aligned}$$

$$\int_0^{u_2} \frac{u^{v-2}}{\omega_2} \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 - u^2 \right]^{-1} du \quad (\text{V.5.6})$$

De acuerdo con el apéndice (C.11) es

$$\int_0^{u_2} \frac{u^{v-2}}{\omega_2} \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 - u^2 \right]^{-1} du = \frac{1}{2} \int_0^{u_2^2} x^{\frac{v-3}{2}} (u_2^2 - x)^{-1/2} \otimes$$

$$\otimes [z_1 - x]^{-1} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{v-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})} (u_2^2)^{\frac{v}{2}-1} z_1^{-1} \otimes$$

$$\otimes F\left(\frac{v-1}{2}, 1, \frac{v}{2}, \frac{u_2^2}{z_1}\right) \quad (\text{V.5.7})$$

donde

$$z_1 = \frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \quad (\text{V.5.8})$$

Según la referencia [13]

$$F\left(\frac{v-1}{2}, 1, \frac{v}{2}, \frac{u_2^2}{z_1}\right) = \frac{1}{v} F_2\left(\frac{v-1}{2}, 1, 1, \frac{v+2}{2}, \frac{u_2^2}{z_1}, 1\right) \quad (\text{V.5.9})$$

y utilizando apéndice (C.9)

$$F\left(\frac{v-1}{2}, 1, 1, \frac{v+2}{2}, \frac{u_2^2}{z_1}, 1\right) = -i\pi \frac{\Gamma(\frac{v+2}{2})}{\Gamma(\frac{v-1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})} \left(\frac{z_1}{u_2^2}\right)^{\frac{v-1}{2}} \left(1 - \frac{z_1}{u_2^2}\right)^{-1/2} \quad (\text{V.5.10})$$

Reemplazando (V.5.8), (V.5.9) y (V.5.10) en (V.5.7) obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu/2)} (m_2^2)^{\frac{\nu-2}{2}} z_2^{-2} F\left(\frac{\nu-1}{2}, 2, \frac{\nu}{2}, \frac{m_2^2}{z_1}\right) =$$

$$= -\frac{\pi z}{z^2 - m_1^2 - m_2^2} \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (\text{V.5.11})$$

Reemplazando (V.5.11) en (V.5.6) es

$$\langle -i \frac{P\nu^e}{p^2 + m_1^2} \times \delta_{\pm}^e(p^2 - m_2^2), \phi(p) \rangle =$$

$$= -\frac{i}{\pi} \frac{\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P\nu}{x} \frac{\phi(z+x)}{z} \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dz dx \quad (\text{V.5.12})$$

Teniendo en cuenta que

$$\int \frac{P\nu}{x} \frac{1}{z-x} \left\{ \frac{[(z-x)^2 + m_1^2 + m_2^2]^2}{4(z-x)^2} - m_1^2 \right\}^{\frac{\nu-3}{2}} dx =$$

$$= -i \pi \delta_{\pm}^e(-m_2 z) \frac{1}{z} \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (\text{V.5.13})$$

podemos escribir

$$\langle -i \frac{P\nu^e}{p^2 + m_1^2} \times \delta_{\pm}^e(p^2 - m_2^2), \phi(p) \rangle =$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint_C \frac{\phi(z)}{z} \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} = \gamma_{\pm} I_{m_2 z} \quad (\text{V.5.14})$$

Llevando a cabo un análisis similar al hecho en el apartado 3 obtenemos los cortes que unen los puntos de ramificación de a pares. Estos puntos resultan estar en $z = \pm u_1, \pm i u_2$ y están unidos por arcos de circunferencia de radio

$$|z| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

En la Fig. V.5.1 se muestran los cortes

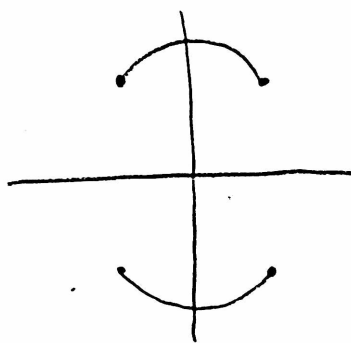


FIG (V.5.1)

La curva C en (V.5.13) rodea los cuatro puntos de ramificación, es decir

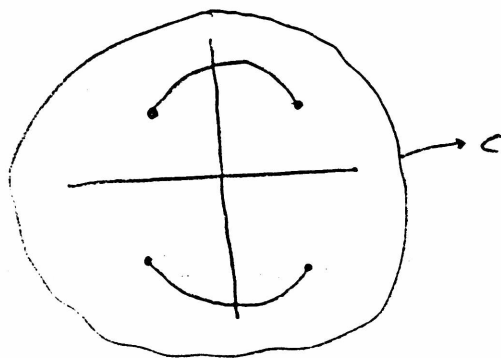


FIG V.5.2

y puede ser deformada en forma continua a

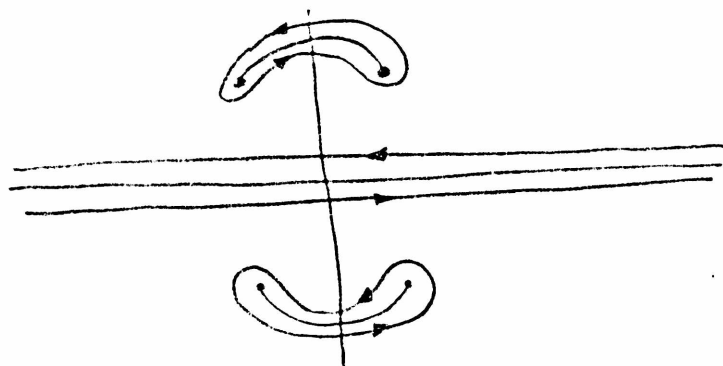
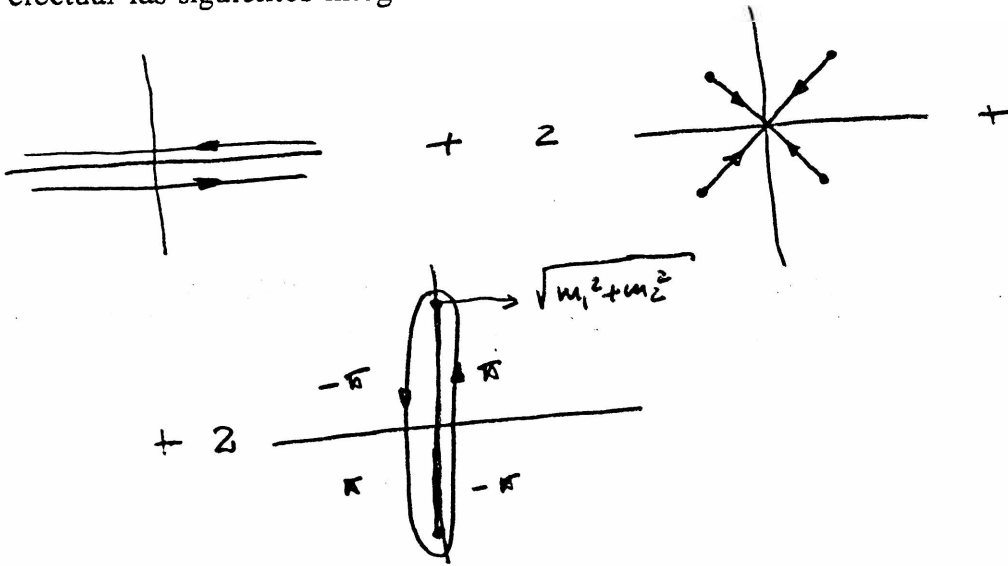


FIG. V.5.3

La integración a lo largo de los caminos graficados en la figura (V.5.3) es equivalente a efectuar las siguientes integraciones



Así el resultado de (V.5.14) es

$$\langle -\frac{i p v e}{p^2 + m_1^2} * \delta_{\pm}^e(p^2 - m_2^2), \phi(p) \rangle = \frac{\pi^{\frac{v+1}{2}}}{2 \Gamma(\frac{v-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} \left[\frac{(x^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4x^2} - m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} dx$$

$$- i (-1)^{v/2} \pi^{\frac{v+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(y^2 - m_1^2 - m_2^2) \frac{\phi(iy)}{y} \left[\frac{(-y^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{-4y^2} - m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} dy$$

$$+ \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{\Gamma(\frac{v-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} H(m_1^2 - x^2) \frac{\phi\left[\frac{x}{m_1} (m_1 + i m_2)\right]}{x} \left\{ \frac{\left[\frac{x^2}{m_1^2} (m_1 + i m_2)^2 + m_1^2 + m_2^2\right]}{\frac{4x^2}{m_1^2} (m_1 + i m_2)^2} - m_1^2 \right\}^{\frac{v-3}{2}} dx$$

$$+ \frac{\pi \frac{v}{2}}{\Gamma(\frac{v-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} H(u_1^2 - x^2) \phi \left[-\frac{x}{u_1} (u_1 + i u_2) \right] \left\{ \frac{\left[\frac{x^2}{u_1^2} (u_1 - i u_2) + u_1^2 + u_2^2 \right]^2}{4 x^2 (u_1 - i u_2)^2} - u_1^2 \right\}^{\frac{v-3}{2}} dx$$

(V.5.15)

Vemos que sobre el eje real y pasando al sistema (p_0, \vec{p}) en $p_0 > 0$

$$= -\frac{i p v}{p^2 + u_1^2} * \delta_{\pm}(p \pm u_1^2) = -\frac{i p v e}{p^2 + u_1^2} * \delta_{\pm}^e(p \pm u_1^2) =$$

$$= \frac{\pi \frac{v+1}{2}}{2 \Gamma(\frac{v-1}{2}) (-p^2)^{1/2}} \left[\frac{(p^2 - u_1^2 - u_2^2)^2 - u_1^2}{-4 p^2} \right]^{\frac{v-3}{2}} = \pi \delta(p^2 + u_1^2) + \delta(p^2 - u_1^2)$$

(V.5.16)

Haciendo $u_1 = u_2$ obtenemos (V.2.24)-(V.2.24').

6. CALCULO DE $-i p v e / p^2 - u_1^2 * \delta_{\pm}^e(p^2 - u_1^2)$

Sea $u_1 \geq u_2$. Por ser

$$-\frac{i p v e}{p^2 - u_1^2} = \frac{i}{2 u_1} \left[\frac{p v e}{p_0 - u_1} - \frac{p v e}{p_0 + u_1} \right] H(p^2 - u_1^2) +$$

$$+ \frac{1}{2 u_2} \left[\frac{1}{p_0 - i u_1} - \frac{1}{p_0 + i u_1} \right] H(u_1^2 - p^2) \quad (\text{V.6.1})$$

es entonces

$$\langle -\frac{i p v e}{p^2 - m_1^2} * \delta_{\pm}^e(p^2 - m_2^2), \phi(p) \rangle = \oint \left[\frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{1}{\omega_0 - i\omega_1} - \frac{1}{\omega_0 + i\omega_2} \right] \frac{1}{4\pi\omega_2} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{p_0 + i\omega_2} + \frac{1}{p_0 - i\omega_2} \right] H(\omega_2^2 - \bar{u}^2) \phi(p_0 + \omega_0) d p_0 d^v u =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{2\pi^{(v-1)/2}} \oint dz \frac{\phi(z)}{z^2} (z^2 + m_1^2 - m_2^2) \int_0^{\omega_2} du \frac{u^{v-2}}{\omega_2} \times$$

$$\times \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 - u^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{V.6.2})$$

Utilizando nuevamente apéndices (C.9) y (C.11)

$$\int_0^{\omega_2} \frac{u^{v-2}}{\omega_2} \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 - u^2 \right]^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= -\frac{\pi z (z_1)^{\frac{v-3}{2}}}{z^2 + m_1^2 - \omega_2^2}$$

(V.6.3)

con

$$z_1 = \frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 \quad (\text{V.6.4})$$

con lo que

$$\langle -\frac{i p v e}{p^2 - m_1^2} * \delta_{\pm}^e(p^2 - m_2^2), \phi(p) \rangle = -\frac{\pi^{\frac{v+1}{2}}}{2\pi^{(v-1)/2}} \oint dz \frac{\phi(z)}{z} \times$$

$$\times \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} \quad (\text{V.6.4})$$

El corte elgido y la curva C son

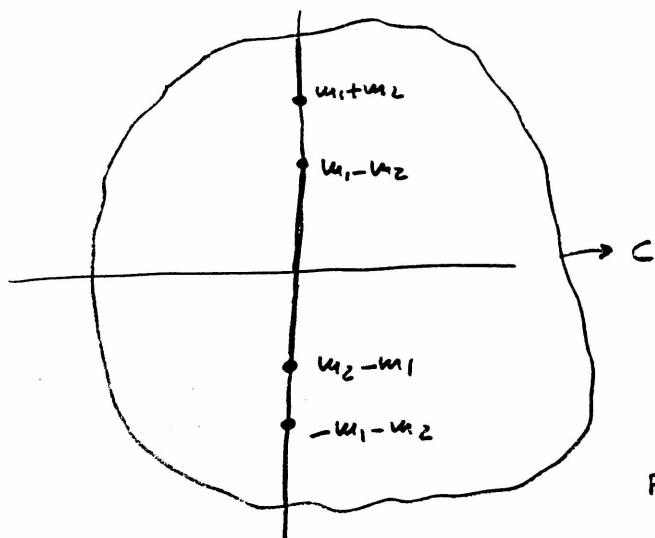


FIG V.6.1

Al deformar C en forma continua obtenemos

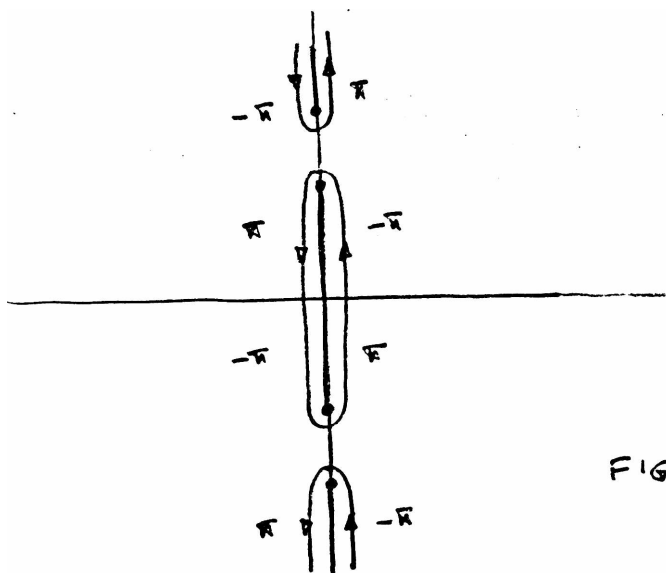


FIG V.6.2

Por lo tanto (V.6.4) se transforma en

$$\left\langle -\frac{i\rho v e}{\rho^2 - m_1^2} * \delta_{\mathcal{I}}^e(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \right\rangle = \frac{i(-1)^{\nu/2} \pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\rho^{|\nu-1|}} \int_{\omega}^{+\infty} \left\{ H[\gamma^2 - (m_2 - m_1)^2] \right.$$

$$\left. - H[\gamma^2 - (m_1 + m_2)^2] \right\} \frac{\phi(i\gamma)}{|\gamma|} \left[\frac{(-\gamma^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{-4\gamma^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} d\gamma$$

V.6.5

De (V.6.5) podemos concluir entonces que

$$\text{Im} \left\{ i \left[\frac{-i\rho v}{\rho^2 - m_1^2} * \delta_{\mathcal{I}}^e(\rho^2 - m_2^2) \right] \right\} = 0$$

Haciendo $m_1 = m_2 = m$ quedan probadas (V.2.26)-(V.2.26'). Hemos demostrado así que se verifican las ecuaciones (V.2.22)-(V.2.23)-(V.2.24) y (V.2.26). Además en el apéndice D demostramos (V.2.19)-(V.2.20)-(V.2.21) y (V.2.25). De acuerdo con esto para se satisface la ecuación (V.2.18), verificandose por lo tanto la unitariedad de la autoenergía a un loop.

CAPITULO VI

RENORMALIZACION

0 INTRODUCCION

En este capítulo mostramos la renormalizabilidad del modelo escalar simplificado. El objetivo no es llevar a cabo un programa de renormalización, sino estudiar el grado de divergencia de los diagramas, hallar las divergencias primitivas y así mostrar que el modelo es renormalizable.

Primeramente estudiamos entonces las divergencias a un lazo, suprimiendo del propagador la δ_{\pm} pues ella no contribuye a las divergencias ultravioletas. Escribiendo el propagador como $\Delta_c(u) = F(u^2) + \pi \delta(u^2 - m^2)$

concluimos que el término que tiene el mayor grado de divergencia, para un diagrama de n vértices, es aquel que es la integral en k de $n-1$ funciones $F(u^2)$ y una δ

y dicho grado es igual a $\nu - 2N$ donde ν es la dimensión del espacio. Luego mostramos, para un diagrama arbitrario, que el grado de divergencia es el que corresponde a una teoría $(\lambda/3) \phi^3$

donde el propagador es el propagador habitual de Feynman y que en seis dimensiones tenemos $D = 6 - 2E$ donde E es el número de patas externas del diagrama. Finalmente hallamos las divergencias primitivas, mostrando que éstas son cuatro: una fluctuación de vacío, el tadpole, la autoenergía y el vértice.

1 EL MODELO Y SUS DIVERGENCIAS

En este capítulo mostraremos la renormalizabilidad de la teoría correspondiente al lagrangiano del capítulo anterior (V.1.1) al que le adicionamos una interacción $\frac{\lambda}{3} \phi^3$ es decir

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \square \phi \square \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{3} \phi^3 \quad (\text{VI.1.1})$$

El propagador (V.1.23) puede ser escrito, en el espacio de impulsos como

$$\Delta(u) = \frac{i}{(u^2 + m^2 - i\epsilon)(u^2 - m^2 - i\epsilon)} + \pi \delta(u^2 - m^2) \quad (\text{VI.1.2})$$

donde

$$\delta(u^2 - m^2) = \delta(u^2 - m^2) + \delta_{\pm}(u^2 - m^2) \quad (\text{VI.1.3})$$

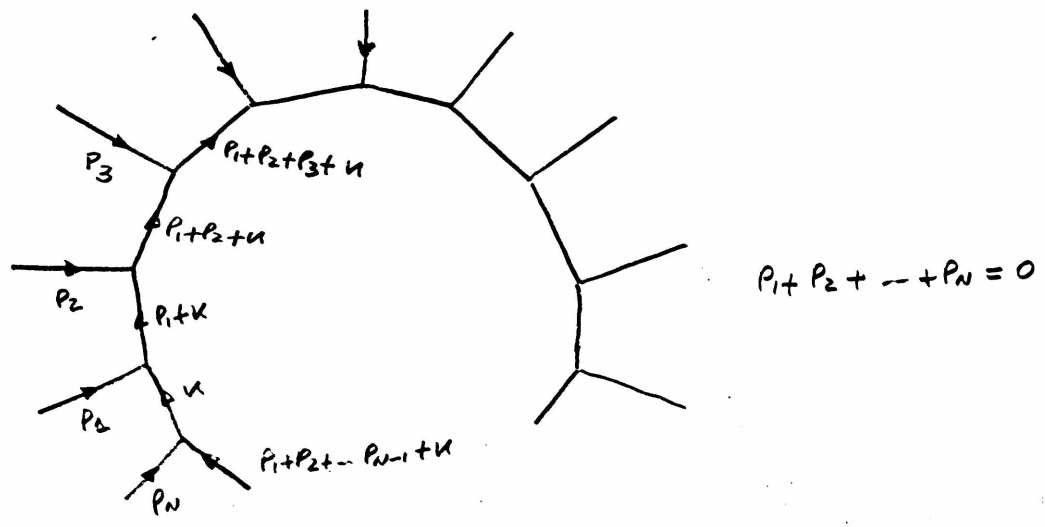
Primeramente estudiaremos las divergencias a un lazo, y para ello suprimiremos del propagador (V.1.2) la $\delta_{\pm}(u^2 - m^2)$ pues ella tiene el factor $H(u^2 - m^2)$ que impide que aparezcan divergencias ultravioletas, pues dicho factor es nulo para $u^2 > m^2$ y la integral sobre k_0 es finita pues $\delta_{\pm}(u^2 - m^2)$ fija k_0 en $\pm i\omega$. Así consideraremos

$$\Delta_c(u) = F(u^2) + \pi \delta(u^2 - m^2) \quad (\text{VI.1.4})$$

donde

$$F(u^2) = \frac{i}{(u^2 + m^2 - i\epsilon)(u^2 - m^2 - i\epsilon)} \quad (\text{VI.1.5})$$

Analizamos ahora un diagrama general a un loop



La amplitud de este diagrama es

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(p_1, \dots, p_N) &= \frac{(i\lambda)^N}{3^N N!} \int d^4k \Delta_c(u) \Delta_c(p_1+k) \Delta_c(p_1+p_2+k) \dots \Delta_c(p_1+p_2+\dots+p_N+k) = \\ &= \frac{(i\lambda)^N}{3^N N!} \left\{ \int d^4k F(u^2) F[(p_1+k)^2] \dots F[(p_1+p_2+\dots+p_{N-1}+k)^2] + \right. \\ &\quad \left. + \pi \int d^4k \delta(u^2 - m^2) F[(p_1+k)^2] \dots F[(p_1+p_2+\dots+p_{N-1}+k)^2] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi \int d^4k F(k^2) \delta[(p_1+k)^2 - m^2] \dots F[(p_1+p_2+\dots+p_{N-1}+k)^2] + \\
& + \dots \dots \dots \\
& + \pi \int d^4k F(k^2) F[(p_1+k)^2] \dots F[(p_1+p_2+\dots+p_{N-2}+k)^2] \times \\
& \times \delta[(p_1+p_2+\dots+p_{N-1}+k)^2 - m^2] + \pi^2 \int \delta(k^2 - m^2) \delta[(p_1+k)^2 - m^2] \times \\
& F[(p_1+p_2+k)^2] \dots F[(p_1+p_2+\dots+p_{N-1}+k)^2] d^4k + \\
& \dots \dots \dots \\
& + \pi^2 \int d^4k F(k^2) \dots F[(p_1+p_2+\dots+p_{N-3}+k)^2] \times \\
& \times \delta[(p_1+p_2+\dots+p_{N-2}+k)^2 - m^2] \delta[(p_1+p_2+\dots+p_{N-1}+k)^2 - m^2] + \pi^3 \text{ términos} \\
& \text{con 3 } \delta + \dots + \pi^N \text{ términos con NS.} \quad (\text{VI.1.6})
\end{aligned}$$

Analizemos primeramente la integral que contiene todas funciones Para grandes valores de k es

$$\int F(k^2) F[(p_1+k)^2] \dots F[(p_1+p_2+\dots+p_{N-1}+k)^2] d^4k = \int \frac{d^4k}{(k^2)^N} \quad (\text{VI.1.7})$$

así que el grado de divergencia es

$$D = 4 - 4N \quad (\text{VI.1.8})$$

Para el término con una delta

$$\int \delta(u^2 - w^2) F[(p_1 + u)^2] \dots \dots F[(p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + u)^2] d^4 u =$$

$$= \int \frac{\delta(u_0 - w)}{2w} F[(p_1 + u)^2] \dots \dots F[(p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + u)^2] d^4 u + w \rightarrow -w$$

(VI.1.9)

Integrando en K_0

$$(VI.1.9) = \int \frac{d^4 u}{2w} F(p_1^2 + u^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{u} + 2p_{10}w) \dots \dots + w \rightarrow -w =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty dw \int_{\Omega} d\Omega (w^2 + u^2)^{\frac{\nu-3}{2}} F(p_1, w) \dots \dots F(p_n, w) + w \rightarrow -w$$

(V.1.20)

Si analizamos por ejemplo el primero de los dos sumandos de (VI.1.10) para grandes valores de $|\vec{u}|$ o equivalentemente para grandes valores de w , teniendo en cuenta que cada $F \sim w^{-2}$ es

$$\int_0^\infty dw \int_{\Omega} d\Omega (w^2 + u^2)^{\frac{\nu-3}{2}} F(p_1, w) \dots \dots F(p_n, w) \sim \int dw \frac{w^{\nu-3}}{(w^2)^{\nu-1}}$$

(VI.1.21)

2 GRADO DE DIVERGENCIA Y DIVERGENCIAS PRIMITIVAS

Estamos ahora en condiciones de calcular el grado de divergencia de un diagrama arbitrario. Antes de pasar a calcularlo debemos tener en cuenta que la presencia de la $\delta(k^2 - m^2)$ en el diagrama baja la potencia del denominador de $F(k^2)$ de 4 a 2 al fijar $k^2 = m^2$ y F pasa a ser una función de ω^{-2} en lugar de k^{-4} . Por otro lado el comportamiento de la $\delta(k^2 - m^2)$ para grandes valores de k es también ω^{-2} por lo que no es necesario distinguir la línea interna de la δ de la línea interna correspondiente a $F(k^2)$ en el cálculo del grado de divergencia. Además, como cada propagador se comporta como el propagador ordinario de Feynman de orden dos, el grado de divergencia de la teoría que exponemos debe ser igual al de la teoría $\lambda \phi^3$ donde el propagador es el corriente de Feynman de orden 2.

Así si N es el número de vértices, E es el número de patas externas, I el número de líneas internas y L el número de lazos es

$$3N = E + 2I \quad (\text{VI.2.1})$$

$$L = I - N + 1 \quad (\text{VI.2.2})$$

El grado de divergencia es como habitualmente

$$D = \nu L - 2I \quad (\text{VI.2.3})$$

De (VI.2.1) y (VI.2.2) despejando L e I en función de E y N obtenemos

$$D = \nu - \frac{E}{2}(\nu - 2) + \frac{N}{2}(\nu - 6) \quad (\text{VI.2.3})$$

De acuerdo a (VI.1.18) para $\nu > 6$ la teoría no es renormalizable pues el grado de divergencia crece con el número de vértices. Para $\nu = 6$

$$D = 6 - 2E \quad (\text{VI.2.4})$$

la teoría es estrictamente renormalizable.

Para $\nu < 6$ la teoría es super-renormalizable, ya que el grado de divergencia decrece al aumentar el número de vértices.


Estamos ahora en condiciones de identificar las divergencias primitivas en el caso $\nu = 6$. Así tenemos

$$E=0 \quad D=6$$




$\sim k^6$ (Fluctuación de vacío)

E=1 D=4

 $\sim k^4$ (Tadpole)

E=2 D=2

 $\sim k^2$ (Autoenergía)

E=3 D=0

 $\sim k^0$ (Vértice)

CAPITULO VII

EL MODELO DE WESS-ZUMINO

0 INTRODUCCION

En este capítulo estudiamos el modelo de Wess-Zumino. Utilizando los procedimientos desarrollados en el capítulo III hallamos las ecuaciones de movimiento correspondientes y mostramos que en este caso la supersimetría en seis dimensiones conduce a ecuaciones de movimiento de cuarto orden. Calculamos luego el tensor de impulso-energía y mostramos que este puede ser descompuesto en la suma de tres tensores, cada uno con divergencia nula, con lo que el impulso también se descompone en tres vectores, cada uno con derivada temporal nula. A continuación cuantificamos los campos componentes utilizando el principio variacional de Schwinger-Feynman, pudiéndose apreciar las ventajas de éste método para cuantificar campos con vínculos, ya que la cuantificación se reduce a resolver sistemas lineales de ecuaciones algebraicas. Posteriormente hallamos los propagadores y encontramos que los correspondientes a los campos spinoriales son derivadas spinoriales del propagador correspondiente al campo escalar, tal como sucede en cuatro dimensiones. Finalmente llevamos a cabo la diagonalización de las relaciones de conmutación y anticonmutación obtenidas para los campos componentes mediante un método desarrollado especialmente para ello, permitiéndonos esto identificar la métrica que corresponde a cada campo componente.

1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Al modelo correspondiente al Lagrangiano (II.7.2) se lo llama modelo de Wess-Zumino. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (III.1.7) podemos encontrar las ecuaciones de movimiento para este Lagrangiano. Estas resultan ser

$$\square^2 \psi^+(x) + m^2 F(x) = 0 \quad (\text{VII.1.1})$$

$$\square^2 \psi(x) + m^2 F^+(x) = 0 \quad (\text{VII.1.2})$$

$$i \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^{\alpha_1}(x) - m^2 \psi_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.3})$$

$$i \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1}(x) - m^2 \psi^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.4})$$

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\alpha_3} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\alpha_4} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) + 2m^2 \psi_{\alpha_3 \alpha_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.5})$$

$$\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\alpha_3} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\alpha_4} \psi_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) + 2m^2 \psi^{\dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.6})$$

$$i \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x) - 6m^2 \psi_{\alpha_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.7})$$

$$i \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x) - 6 m^2 \psi^{\dot{\alpha}_4 \alpha_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.8})$$

$$F^+(x) + m^2 \psi(x) = 0 \quad (\text{VII.1.9})$$

$$F(x) + m^2 \psi^+(x) = 0 \quad (\text{VII.1.10})$$

Si llamamos $\chi(x)$ a cualquiera de los campos $F(x), F^+(x), \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x), \psi^{\dot{\alpha}_4 \alpha_4}(x), \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x), \psi^{\dot{\alpha}_4 \alpha_4}(x)$, entonces $\chi(x)$ satisface

$$(\square^2 - m^2) \chi(x) = 0 \quad (\text{VII.1.11})$$

A título de ejemplo demostraremos (VII.1.11) para el campo $\psi^{\dot{\alpha}_4 \alpha_4}(x)$. Para ello utilizamos primeramente la ecuación (VII.1.3) a la que derivamos respecto de $\partial_{\alpha_5}^{\dot{\alpha}_5}$ y la multiplicamos por $i \varepsilon^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}$. Así obtenemos

$$\begin{aligned} - \varepsilon^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_5}^{\dot{\alpha}_5} \psi^{\dot{\alpha}_1 \alpha_1}(x) &= \\ &= i m^2 \varepsilon^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \partial_{\alpha_5}^{\dot{\alpha}_5} \psi_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.12}) \end{aligned}$$

De acuerdo a apéndice (E.2.5) es

$$\varepsilon^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_5}^{\dot{\alpha}_5} = \varepsilon^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4 \dot{\alpha}_5} \square^2$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4 \dot{\alpha}_5} \varepsilon_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \square^2 \psi^{\dot{\alpha}_1 \alpha_1}(x) - i m^2 \varepsilon^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \times \\ \times \partial_{\alpha_5}^{\dot{\alpha}_5} \psi_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(x) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.1.13})$$

De (VII.1.18)

$$\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \square^2 \psi^{\alpha_1}{}_{\alpha_4}(x) = 6 m \psi^{\alpha_1}{}_{\alpha_4}(x) \quad (\text{VII.1.25})$$

Reemplazando (VII.1.15) en (VII.1.13) obtenemos

$$\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \square^2 \psi^{\alpha_1}{}_{\alpha_4}(x) - 6 m \psi^{\alpha_1}{}_{\alpha_4}(x) = 0 \quad (\text{VII.1.26})$$

Usamos ahora las propiedades

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_r i_{r+1} \dots i_n} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n} = \delta_{j_1 j_2 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_r i_{r+1} \dots i_n} \quad (\text{VII.1.27})$$

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_r}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \frac{(n-r)!}{(n-r)!} \delta_{j_1 j_2 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_r i_{r+1} \dots i_n} \quad (\text{VII.1.28})$$

donde $\delta_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}$ es la delta de kronecker generalizada (ver ref. [15]). Así de (VII.1.17) y (VII.1.18)

$$\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} = \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} = 6 \delta_{\alpha_1}^{\alpha_1}$$

con lo que (VII.1.16) toma la forma

$$6 \delta_{\alpha_1}^{\alpha_1} \square^2 \psi^{\alpha_1}{}_{\alpha_4}(x) - 6 m \psi^{\alpha_1}{}_{\alpha_4}(x) = 0$$

o sea

$$(\square^2 - m) \psi^{\alpha_1}{}_{\alpha_4}(x) = 0$$

La solución de la ecuación (VII.1.12) está dada por (V.1.11) con $\phi(x) = \chi(x)$ o sea

$$\begin{aligned} \chi(x) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\chi_1(\bar{u}) e^{i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} + \chi_2(\bar{u}) e^{-i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \right] e^{i \bar{u} \cdot \bar{x}} d\bar{u} \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\chi_3(\bar{u}) e^{i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} + \chi_4(\bar{u}) e^{-i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right] e^{i \bar{u} \cdot \bar{x}} d\bar{u} \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\chi_5(\bar{u}) e^{-i x^0 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} + \chi_6(\bar{u}) e^{i x^0 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \right] e^{i \bar{u} \cdot \bar{x}} d\bar{u} \end{aligned}$$

(VII.1.19)

con

$$\begin{aligned} \chi_i(\bar{u}) = & \psi_i(\bar{u}), \psi_i^\dagger(\bar{u}), \psi_{i\alpha}(\bar{u}), \psi_i^{\dagger\dot{\alpha}}(\bar{u}), \psi_{i\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), \psi_i^{\dagger\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{i\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\bar{u}), \\ & \psi_i^{\dagger\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3}(\bar{u}), f_i(\bar{u}), f_i^\dagger(\bar{u}), \quad 1 \leq i \leq 6 \end{aligned} \quad (\text{VII.1.20})$$

2 IMPULSO

Para poder calcular el impulso debemos conocer previamente el tensor de impulso-energía correspondiente al lagrangiano (II.7.2). Dicho tensor se evalúa mediante la fórmula (III.3.2) y es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\frac{7}{192} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_1}^{\nu\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \partial_{\mu} \psi + \\ & \frac{5}{192} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_1}^{\nu\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \partial_{\nu} \psi + \partial_{\mu} \psi + \\ & -\frac{1}{96} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_3\dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_1}^{\nu\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \psi + \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \\ & -\frac{1}{16} \partial^{\nu} \square \psi + \partial_{\mu} \psi + \frac{1}{16} \square \psi + \partial^{\nu} \partial_{\mu} \psi - \frac{1}{16} \partial^{\nu} \psi + \square \partial_{\mu} \psi - \frac{1}{16} \psi + \partial^{\nu} \square \partial_{\mu} \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{7}{192} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_1}^{\nu \alpha_1} \partial_{\alpha_2}^{\alpha_2} \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi + \partial_{\mu} \psi + \\
& + \frac{5}{192} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_1}^{\nu \alpha_1} \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi \partial_{\alpha_2}^{\alpha_2} \partial_{\mu} \psi + \\
& - \frac{1}{96} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_1}^{\nu \alpha_1} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi \partial_{\alpha_2}^{\alpha_2} \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\mu} \psi + \\
& - \frac{1}{16} \partial^{\nu} \square \psi \partial_{\mu} \psi + \frac{1}{16} \square \psi \partial^{\nu} \partial_{\mu} \psi - \frac{1}{16} \partial^{\nu} \psi \square \partial_{\mu} \psi + \frac{1}{16} \psi \partial^{\nu} \square \partial_{\mu} \psi + \\
& - \frac{3}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_3}^{\nu \alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_3}^{\nu \alpha_3} \psi + \alpha_1 \alpha_2 \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& - \frac{3}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_3}^{\nu \alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\mu} \psi + \alpha_1 \alpha_2 \\
& + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_3}^{\nu \alpha_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \partial_{\mu} \psi + \alpha_1 \alpha_2 \\
& + \frac{7i}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\nu \alpha_2} \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi + \alpha_1 \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1} \\
& - \frac{i}{12} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\nu \alpha_2} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi + \alpha_1 \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1} \\
& + \frac{i}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\nu \alpha_2} \psi + \alpha_1 \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1} \\
& + \frac{7i}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\nu \alpha_2} \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi_{\alpha_1} \partial_{\mu} \psi + \alpha_2 \\
& - \frac{i}{12} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\nu \alpha_2} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \psi_{\alpha_1} \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\mu} \psi + \alpha_2 \\
& + \frac{i}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_2}^{\nu \alpha_2} \psi_{\alpha_1} \partial_{\alpha_3}^{\alpha_3} \partial_{\alpha_4}^{\alpha_4} \partial_{\mu} \psi + \alpha_2 +
\end{aligned}$$

$$+\frac{i}{72} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \dot{\alpha}_4} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} +$$

$$+\frac{i}{72} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \alpha_4} \psi_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3}$$

$$- \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \quad (\text{VII.2.1})$$

donde \mathcal{L} está dado por (II.7.2)

Este tensor puede ser descompuesto en la suma de tres tensores, cada uno con divergencia nula

$$T_\mu^\nu = T_\mu^\nu(\psi, \psi^\dagger, F, F^\dagger) + T_\mu^\nu(\psi_{\alpha_1 \alpha_2}, \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}) + T_\mu^\nu(\psi_{\alpha_1}, \psi^{\dot{\alpha}_1}, \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3}) \quad (\text{VII.2.2})$$

donde

$$T_\mu^\nu(\psi, \psi^\dagger, F, F^\dagger) = -\frac{7}{192} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi^\dagger +$$

$$+\frac{5}{192} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi^\dagger +$$

$$-\frac{1}{96} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi^\dagger +$$

$$-\frac{1}{16} \partial^\nu \square \psi^\dagger \partial_\mu \psi + \frac{1}{16} \square \psi^\dagger \partial^\nu \partial_\mu \psi - \frac{1}{16} \partial^\nu \psi^\dagger \square \partial_\mu \psi - \frac{1}{16} \psi^\dagger \partial^\nu \square \partial_\mu \psi +$$

$$-\frac{7}{192} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi^\dagger +$$

$$+\frac{5}{192} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi^\dagger +$$

$$-\frac{1}{96} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\nu \dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3} \partial_\mu \psi^\dagger +$$

$$-\frac{1}{16} \partial^\nu \square \psi \partial_\mu \psi^\dagger + \frac{1}{16} \square \psi \partial^\nu \partial_\mu \psi^\dagger - \frac{1}{16} \partial^\nu \psi \square \partial_\mu \psi^\dagger + \frac{1}{16} \psi \partial^\nu \square \partial_\mu \psi^\dagger +$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{\mu}^{\nu} \left[\frac{1}{16} \psi + \square^2 \psi - \frac{1}{96} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_2} \psi + \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \psi \right. \\
& + \frac{1}{64} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi + \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \psi \\
& - \frac{1}{96} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi + \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_2} \psi \\
& \left. + \frac{1}{16} \square^2 \psi + \psi + F + F - \omega^2 (\psi F + \psi + F) \right] \quad (\text{VII.2.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{\nu}(\psi_{\alpha_1 \alpha_2}, \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2) &= -\frac{3}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& - \frac{3}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\mu} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \\
& + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\mu} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \\
& - \delta_{\mu}^{\nu} \left[\frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \right. \\
& - \frac{1}{16} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_1} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \\
& \left. - \frac{\omega^2}{8} (\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \psi_{\alpha_3 \alpha_4} + \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \psi + \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4) \right] \quad (\text{VII.2.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{\nu}(\psi_{\alpha_1}, \psi + \dot{\alpha}_1, \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \psi + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3) &= \frac{7i}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \times \\
& \times \gamma_{\alpha_2}^{\nu \dot{\alpha}_2} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi + \dot{\alpha}_1 \partial_{\mu} \psi_{\alpha_1} +
\end{aligned}$$

Que cada uno de estos tensores tenga divergencia nula se debe a que las ecuaciones de movimiento (V.1.1-10) relacionan a $\psi(x)$ solo con $F^+(x)$, a $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x)$ con $\psi^{+\alpha_1 \alpha_2}(x)$ y a $\psi_{\alpha_1}(x)$ solo con $\psi^{+\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x)$.

Teniendo en cuenta ahora que

$$P_\mu = \int T_\mu^0 d^5x \quad (\text{VII.2.6})$$

podemos escribir

$$P_\mu = P_\mu(\psi, \psi^+, F, F^+) + P_\mu(\psi_{\alpha_1 \alpha_2}, \psi^{+\alpha_1 \alpha_2}) + P_\mu(\psi_{\alpha_1}, \psi^{+\alpha_1}, \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \psi^{+\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}) \quad (\text{VII.2.7})$$

donde

$$P_\mu(\psi, \psi^+, F, F^+) = \int T_\mu^0(\psi, \psi^+, F, F^+) d^5x \quad (\text{VII.2.8})$$

$$P_\mu(\psi_{\alpha_1 \alpha_2}, \psi^{+\alpha_1 \alpha_2}) = \int T_\mu^0(\psi_{\alpha_1 \alpha_2}, \psi^{+\alpha_1 \alpha_2}) d^5x \quad (\text{VII.2.9})$$

$$P_\mu(\psi_{\alpha_1}, \psi^{+\alpha_1}, \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \psi^{+\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}) = \int T_\mu^0(\psi_{\alpha_1}, \psi^{+\alpha_1}, \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \psi^{+\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}) d^5x \quad (\text{VII.2.10})$$

Como cada uno de los tensores de impulso-energía tiene divergencia nula, cada uno de los vectores impulso tiene derivada temporal nula. Despejando F y F^+ de (VII.1.9) y (VII.1.10), utilizando para ψ y ψ^+ el desarrollo (VII.1.19), reemplazando estas en (VII.2.3), y una vez hecho ese reemplazo, introduciendo (VII.2.3) en (VII.2.8) obtenemos

$$P_\mu(\psi, \psi^+, F, F^+) = \frac{u_0^2}{R} \left(\kappa_0^{(1)} \kappa_\mu^{(1)} (\psi_1^+(\vec{a}) \psi_1(\vec{a}) + \psi_1(\vec{a}) \psi_1^+(\vec{a})) + \kappa_0^{(2)} \kappa_\mu^{(2)} (\psi_2^+(\vec{a}) \psi_2(\vec{a}) + \psi_2(\vec{a}) \psi_2^+(\vec{a})) - [\kappa_0^{(3)} \kappa_\mu^{(3)} (\psi_3^+(\vec{a}) \psi_3(\vec{a}) + \psi_3(\vec{a}) \psi_3^+(\vec{a}))] \right) +$$

$$+ \left[\kappa_{\mu}^{(5)} \kappa_{\alpha_4}^{(5)} \dot{\alpha}_4 \left(\psi_6^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) + \psi_5^{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_6^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right) + \right. \\ \left. + \kappa_{\mu}^{(6)} \kappa_{\alpha_4}^{(6)} \dot{\alpha}_4 \left(\psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) + \psi_6^{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right) \right] d^5 \bar{u}$$

donde

$$\kappa_{\alpha}^{(j)} = \delta^{\mu \alpha} \kappa_{\mu}^{(j)} \quad (\text{VII.2.14})$$

$$P_{\mu}(\psi_{\alpha_1}, \psi^{+\alpha_1}, \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \psi^{+\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}) = -\frac{1}{\kappa} \int \kappa_0^{(1)} \kappa_{\mu}^{(1)} \tilde{\kappa}_{\alpha_1}^{(1)} \left(\psi_1^{+\alpha_1}(\bar{u}) \psi_{\alpha_1}(\bar{u}) - \psi_{\alpha_1}(\bar{u}) \psi_1^{+\alpha_1}(\bar{u}) + \kappa_0^{(2)} \kappa_{\mu}^{(2)} \tilde{\kappa}_{\alpha_1}^{(2)} \left(\psi_2^{+\alpha_1}(\bar{u}) \psi_{2\alpha_1}(\bar{u}) - \psi_{2\alpha_1}(\bar{u}) \psi_2^{+\alpha_1}(\bar{u}) \right) + \right. \\ \left. + \left[\kappa_0^{(3)} \kappa_{\mu}^{(3)} \tilde{\kappa}_{\alpha_1}^{(3)} \left(\psi_3^{+\alpha_1}(\bar{u}) \psi_{3\alpha_1}(\bar{u}) - \psi_{3\alpha_1}(\bar{u}) \psi_3^{+\alpha_1}(\bar{u}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa_0^{(4)} \kappa_{\mu}^{(4)} \tilde{\kappa}_{\alpha_1}^{(4)} \left(\psi_4^{+\alpha_1}(\bar{u}) \psi_{4\alpha_1}(\bar{u}) - \psi_{4\alpha_1}(\bar{u}) \psi_4^{+\alpha_1}(\bar{u}) \right) \right] H(\bar{u}^2 - u^2) + \right. \\ \left. + \left[\kappa_0^{(5)} \kappa_{\mu}^{(5)} \tilde{\kappa}_{\alpha_1}^{(5)} \left(\psi_6^{+\alpha_1}(\bar{u}) \psi_{5\alpha_1}(\bar{u}) - \psi_{5\alpha_1}(\bar{u}) \psi_6^{+\alpha_1}(\bar{u}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa_0^{(6)} \kappa_{\mu}^{(6)} \tilde{\kappa}_{\alpha_1}^{(6)} \left(\psi_5^{+\alpha_1}(\bar{u}) \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}) - \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}) \psi_5^{+\alpha_1}(\bar{u}) \right) \right] H(u^2 - \bar{u}^2) d^5 \bar{u}$$

$$(\text{VII.2.15})$$

con

$$\kappa_{\alpha}^{(j)\dot{\alpha}} = \tilde{\gamma}_{\alpha}^{\mu\dot{\alpha}} \psi_{\mu}^{(j)} \quad (\text{VII.2.16})$$

y donde $\tilde{\gamma}_{\alpha}^{\mu\dot{\alpha}}$ ha sido definida en el apéndice E.

3_CUANTIFICACION DE LOS CAMPOS COMPONENTES

Para cuantificar los campos componentes recurrimos nuevamente a (IV.1.20). Obsérvese que por las ecuaciones de movimiento (IV.1.1-10) es suficiente cuantificar los campos $\psi_1, \psi_{2\alpha}, \psi_{3\alpha}$. Para los campos escalares la cuantificación es análoga a la hecha en el capítulo V para el campo escalar real, así que solo damos su resultado

$$[\psi_1^+(\bar{n}), \psi_1(\bar{n}')] = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$[\psi_2(\bar{n}), \psi_2^+(\bar{n}')] = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$[\psi_3^+(\bar{n}), \psi_3(\bar{n}')] = - \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$[\psi_4(\bar{n}), \psi_4^+(\bar{n}')] = - \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

(VII.3.1)

$$[\psi_6^+(\bar{n}), \psi_5(\bar{n}')] = \frac{i\pi}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$[\psi_5^+(\bar{n}), \psi_6(\bar{n}')] = - \frac{i\pi}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

Para el campo ψ_{α} utilizamos (IV.1.20) con (VII.2.15) para θ , ya que las otras dos partes de θ conmutan con ψ_{α} . De (IV.1.20) se deduce inmediatamente para las componentes $\psi_{i\alpha}(\bar{n})$ de ψ_{α} que

$$[P_0, \psi_{1\alpha}(\bar{n})] = \sqrt{\bar{n}^2 + m^2} \psi_{1\alpha}(\bar{n})$$

$$[P_0, \psi_{2\alpha}(\bar{n})] = -\sqrt{\bar{n}^2 + m^2} \psi_{2\alpha}(\bar{n})$$

$$[P_0, \psi_{3\alpha_1}(\vec{n})] = \sqrt{\vec{n}^2 - m^2} \psi_{3\alpha_1}(\vec{n})$$

$$[P_0, \psi_{4\alpha_1}(\vec{n})] = -\sqrt{\vec{n}^2 - m^2} \psi_{4\alpha_1}(\vec{n})$$

$$[P_0, \psi_{5\alpha_1}(\vec{n})] = i\sqrt{m^2 - \vec{n}^2} \psi_{5\alpha_1}(\vec{n})$$

$$[P_0, \psi_{6\alpha_1}(\vec{n})] = -i\sqrt{m^2 - \vec{n}^2} \psi_{6\alpha_1}(\vec{n})$$

(VII.3.2)

De (VI.3.2) se deduce por ejemplo para $\psi_{1\alpha_1}(\vec{n})$ que

$$-\frac{1}{\hbar} (\vec{n}^2 + m^2) \tilde{u}_{\alpha_1}^{(1)} \left[\psi_{1+\alpha_1}(\vec{n}) \psi_{1\alpha_1}(\vec{n}) - \psi_{1\alpha_1}(\vec{n}) \psi_{1+\alpha_1}(\vec{n}), \psi_{1\beta_1}(\vec{n}') \right] =$$

$$= \sqrt{\vec{n}^2 + m^2} \psi_{1\beta_1}(\vec{n}') \delta(\vec{n} - \vec{n}') \quad (\text{VII.3.3})$$

Usando ahora

$$[A, B, C] = A \{B, C\} - \{A, C\} B$$

(VI.3.3) es

$$\frac{2}{\hbar} (\vec{n}^2 + m^2) \tilde{u}_{\alpha_1}^{(1)} \psi_{1\alpha_1}(\vec{n}) \{ \psi_{1+\alpha_1}(\vec{n}), \psi_{1\beta_1}(\vec{n}') \} =$$

$$= \sqrt{\vec{n}^2 + m^2} \psi_{1\beta_1}(\vec{n}') \delta(\vec{n} - \vec{n}') \quad (\text{VII.3.4})$$

Proponemos como solución de la ecuación (VII.3.4) a

$$\{ \psi_{1+\alpha_1}(\vec{n}), \psi_{1\beta_1}(\vec{n}') \} = \lambda \tilde{u}_{\beta_1}^{(1)} \delta(\vec{n} - \vec{n}') \quad (\text{VII.3.5})$$

donde λ es una constante a determinar. Reemplazando (VII.3.5) en (VII.3.4)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} (\bar{u}^2 + u^2) \lambda u^{(1)}_{\beta_1} \alpha_1 \tilde{u}^{(1)}_{\alpha_1} \psi_{1\alpha_1}(\bar{u}) \delta(\bar{u} - \bar{u}') &= \\ &= \sqrt{\bar{u}^2 + u^2} \psi_{1\beta_1}(\bar{u}') \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad (\text{VII.3.6}) \end{aligned}$$

De apéndice (E.2.7) es

$$u^{(1)}_{\beta_1} \alpha_1 \tilde{u}^{(1)}_{\alpha_1} = -u^2 \delta_{\beta_1}^{\alpha_1}$$

Con esta última (VII.3.6) es ahora

$$\begin{aligned} -\frac{2u^2}{\pi} (\bar{u}^2 + u^2) \lambda \delta(\bar{u} - \bar{u}') \psi_{1\beta_1}(\bar{u}') &= \\ &= \sqrt{\bar{u}^2 + u^2} \psi_{1\beta_1}(\bar{u}') \delta(\bar{u} - \bar{u}') \end{aligned}$$

De (VII.3.7) se deduce

$$\lambda = -\frac{\pi}{2u^2 \sqrt{\bar{u}^2 + u^2}}$$

En igual forma se hallan las relaciones de anticonmutación de las demás componentes de $\psi_{\alpha(x)}$. Damos ahora esas relaciones

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_{1+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{1\alpha_1}(\bar{u}') \right\} &= -\frac{\pi}{2u^2 \sqrt{\bar{u}^2 + u^2}} u^{(1)}_{\alpha_1} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \\ \left\{ \psi_{2\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{2+\alpha_1}(\bar{u}') \right\} &= \frac{\pi}{2u^2 \sqrt{\bar{u}^2 + u^2}} u^{(2)}_{\alpha_1} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \\ \left\{ \psi_{3+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{3\alpha_1}(\bar{u}') \right\} &= \frac{\pi}{2u^2 \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} u^{(3)}_{\alpha_1} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \\ \left\{ \psi_{4\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{4+\alpha_1}(\bar{u}') \right\} &= -\frac{\pi}{2u^2 \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} u^{(4)}_{\alpha_1} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \end{aligned}$$

$$\{ \psi_6^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{5\alpha_1}(\bar{u}') \} = - \frac{i\bar{\kappa}}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \psi_{\alpha_1}^{(5)} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad (\text{VII.3.8})$$

$$\{ \psi_5^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}') \} = \frac{i\bar{\kappa}}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \psi_{\alpha_1}^{(6)} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

Para el campo $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$ se deduce de (IV.1.20) que

$$[P_0, \psi_{1\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})] = \sqrt{\bar{u}^2 + m^2} \psi_{1\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$$

$$[P_0, \psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})] = -\sqrt{\bar{u}^2 + m^2} \psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$$

$$[P_0, \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})] = \sqrt{\bar{u}^2 - m^2} \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$$

$$[P_0, \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})] = -\sqrt{\bar{u}^2 - m^2} \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$$

$$[P_0, \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})] = i\sqrt{m^2 - \bar{u}^2} \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$$

$$[P_0, \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})] = -i\sqrt{m^2 - \bar{u}^2} \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$$

(VII.3.9)

De (VII.3.9) se deduca para $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$ que

$$\frac{1}{8\bar{\kappa}} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{0\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_3} \int d\bar{u}' \sqrt{\bar{u}'^2 + m^2} \left\{ \psi_{\alpha_4}^{(1)} \psi_{1\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) [\psi_{1\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}'), \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}')] \right. \\ \left. - \psi_{\alpha_4}^{(2)} \psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) [\psi_{2\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}'), \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}')] \right\} = \sqrt{\bar{u}'^2 + m^2} \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}') \quad (\text{VII.3.10})$$

o

$$\frac{1}{8\bar{\kappa}} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{0\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_3} \sqrt{\bar{u}'^2 + m^2} \psi_{\alpha_4}^{(1)} \psi_{1\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) [\psi_{1\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}'), \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}')] +$$

$$+ \psi_2^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}) \left[\psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(-\bar{u}), \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}') \right] = \sqrt{\bar{u}'^2 + m^2} \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}') \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad (\text{VII.3.11})$$

Obsérvese que hemos tenido en cuenta que $\psi_{1\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$, $\psi_2^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u})$, $\psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$ y $\psi_1^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u})$ no son independientes ya que están relacionados por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} u^{(1) \dot{\alpha}_3} u^{(1) \dot{\alpha}_4} \psi_1^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}) - 2m^2 \psi_{2\alpha_3 \alpha_4}(\bar{u}) &= 0 \\ \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} u^{(1) \alpha_3} u^{(1) \alpha_4} \psi_{1\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) - 2m^2 \psi_2^{+\dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4}(\bar{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.3.12})$$

Las ecuaciones (VII.3.12) se deducen de (VII.1.5-6).

Reemplazando $\psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u})$ y $\psi_2^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u})$ mediante (VII.3.12) en (VII.3.11) llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma^{\dot{\alpha}_3} u^{(1) \dot{\alpha}_4} \left\{ \psi_{1\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \left[\psi_1^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}') \right] + \right. \\ & + \frac{1}{4m^4} \varepsilon^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8} \varepsilon_{\dot{\alpha}_5 \dot{\alpha}_6 \dot{\alpha}_7 \dot{\alpha}_8} u^{(1) \dot{\alpha}_5} u^{(1) \dot{\alpha}_6} u^{(1) \dot{\alpha}_7} u^{(1) \dot{\alpha}_8} \psi_{1\alpha_7 \alpha_8}(\bar{u}) \times \\ & \left. \times \left[\psi_1^{+\dot{\alpha}_7 \dot{\alpha}_8}(\bar{u}), \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}') \right] \right\} = \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}') \delta(\bar{u} - \bar{u}') \end{aligned} \quad (\text{VII.3.13})$$

Proponemos para el conmutador en (VII.3.13)

$$\begin{aligned} \left[\psi_1^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{1\beta_1 \beta_2}(\bar{u}') \right] &= \lambda \delta_{\beta_1 \beta_2} u^{(1) \dot{\alpha}_1} u^{(1) \dot{\alpha}_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \\ &= \lambda \left[u^{(1) \dot{\alpha}_1} u^{(1) \dot{\alpha}_2} - u^{(1) \dot{\alpha}_2} u^{(1) \dot{\alpha}_1} \right] \delta(\bar{u} - \bar{u}') \end{aligned} \quad (\text{VII.3.14})$$

donde λ es una constante a determinar.

Reemplazando (VII.3.14) en (VII.3.13) y luego de un largo cálculo (VII.3.13) se transforma en

$$-\frac{\lambda m^2}{2\pi} \psi_{\mu}^{(1)} \tilde{\gamma}^{\mu \alpha 5} \psi_{\beta_1 \beta_2}^{(1)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') = \psi_{\beta_1 \beta_2}^{(1)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') \quad (\text{VII.3.15})$$

Todas las matrices $\tilde{\gamma}^{\mu}$, excepto $\tilde{\gamma}^0$ tienen traza nula, así que de (VII.3.15) deducimos que

$$-\frac{\lambda m^2}{2\pi} \tilde{\gamma}^0 \alpha 5 \psi_0^{(1)} = 1$$

o sea

$$\lambda = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}}$$

El mismo tratamiento debe repetirse para las demás componentes de $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{(x)}$. Esto nos permite arribar a las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\psi_1^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}), \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{(1)}(\bar{u}')] &= -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{\gamma}^1 \alpha_1 \tilde{\gamma}^2 \alpha_2 \psi_1^{(1)} \psi_2^{(1)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') \\ [\psi_2^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}), \psi_2^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}')] &= -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{\gamma}^1 \alpha_1 \tilde{\gamma}^2 \alpha_2 \psi_1^{(2)} \psi_2^{(2)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') \\ [\psi_3^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}), \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{(1)}(\bar{u}')] &= \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{\gamma}^1 \alpha_1 \tilde{\gamma}^3 \alpha_2 \psi_1^{(3)} \psi_2^{(3)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') \\ [\psi_4^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}), \psi_4^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}')] &= \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{\gamma}^1 \alpha_1 \tilde{\gamma}^4 \alpha_2 \psi_1^{(4)} \psi_2^{(4)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') \\ [\psi_6^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}), \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{(1)}(\bar{u}')] &= -\frac{i\pi}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{\gamma}^1 \alpha_1 \tilde{\gamma}^5 \alpha_2 \psi_1^{(5)} \psi_2^{(5)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') \\ [\psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}), \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{(1)}(\bar{u}')] &= \frac{i\pi}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{\gamma}^1 \alpha_1 \tilde{\gamma}^6 \alpha_2 \psi_1^{(6)} \psi_2^{(6)} \delta(\bar{u}-\bar{u}') \end{aligned}$$

(VII.3.16)

4 IMPULSO ORDENADO NORMALMENTE

Para ordenar normalmente el impulso debemos tener en cuenta que solamente los operadores $\chi_1(\vec{r})$ y $\chi_2^+(\vec{r})$ son operadores de creación y solamente $\chi_1^+(\vec{r})$ y $\chi_2(\vec{r})$ son operadores de aniquilación, por lo que el orden normal sólo afectará a los operadores. De acuerdo a estas consideraciones y utilizando el orden normal usado habitualmente en teoría de campos tenemos para P_M

$$\begin{aligned}
 P_M = & \frac{2m^2}{\pi} \left\{ \kappa_0^{(1)} \kappa_M^{(1)} \psi_1(\vec{r}) \psi_1^+(\vec{r}) + \kappa_0^{(2)} \kappa_M^{(2)} \psi_2^+(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left[\kappa_0^{(3)} \kappa_M^{(3)} (\psi_3^+(\vec{r}) \psi_3(\vec{r}) + \psi_3(\vec{r}) \psi_3^+(\vec{r})) + \right. \\
 & \left. \kappa_0^{(4)} \kappa_M^{(4)} (\psi_4^+(\vec{r}) \psi_4(\vec{r}) + \psi_4(\vec{r}) \psi_4^+(\vec{r})) \right] H(\vec{r}^2 - m^2) \\
 & - \frac{1}{2} \left[\kappa_0^{(5)} \kappa_M^{(5)} \psi_5^+(\vec{r}) \psi_5(\vec{r}) + \psi_5(\vec{r}) \psi_5^+(\vec{r}) + \right. \\
 & \left. \kappa_0^{(6)} \kappa_M^{(6)} (\psi_5^+(\vec{r}) \psi_6(\vec{r}) + \psi_6(\vec{r}) \psi_5^+(\vec{r})) \right] H(m^2 - \vec{r}^2) \Big\} d^5r \\
 & + \frac{2}{\pi} \left\{ \kappa_0^{(1)} \kappa_M^{(1)} \tilde{r}_{\alpha_1}^{(1)} \alpha_1 (\psi_{\alpha_1}(\vec{r}) \psi_1^+(\vec{r})) - \kappa_0^{(2)} \kappa_M^{(2)} \tilde{r}_{\alpha_1}^{(2)} \alpha_1 \psi_2^+(\vec{r}) \psi_{2\alpha_1}(\vec{r}) \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left[\kappa_0^{(3)} \kappa_M^{(3)} \tilde{r}_{\alpha_1}^{(3)} \alpha_1 (\psi_3^+(\vec{r}) \psi_{3\alpha_1}(\vec{r}) - \psi_{3\alpha_1}(\vec{r}) \psi_3^+(\vec{r})) \right. \\
 & \left. + \kappa_0^{(4)} \kappa_M^{(4)} \tilde{r}_{\alpha_1}^{(4)} \alpha_1 (\psi_4^+(\vec{r}) \psi_{4\alpha_1}(\vec{r}) - \psi_{4\alpha_1}(\vec{r}) \psi_4^+(\vec{r})) \right] H(\vec{r}^2 - m^2) \\
 & - \frac{1}{2} \left[\kappa_0^{(5)} \kappa_M^{(5)} \tilde{r}_{\alpha_1}^{(5)} \alpha_1 (\psi_6^+(\vec{r}) \psi_{5\alpha_1}(\vec{r}) - \psi_{5\alpha_1}(\vec{r}) \psi_6^+(\vec{r})) \right. \\
 & \left. + \kappa_0^{(6)} \kappa_M^{(6)} \tilde{r}_{\alpha_1}^{(6)} \alpha_1 (\psi_5^+(\vec{r}) \psi_{6\alpha_1}(\vec{r}) - \psi_{6\alpha_1}(\vec{r}) \psi_5^+(\vec{r})) \right] H(m^2 - \vec{r}^2) \Big\} d^5\vec{r} \\
 & + \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \delta_{\alpha_3}^{\alpha_4} \int \left\{ \kappa_M^{(1)} \kappa_{\alpha_4}^{(1)} \alpha_4 \psi_{1\alpha_1}(\vec{r}) \psi_1^+(\vec{r}) + \right. \\
 & \left. + \kappa_M^{(2)} \kappa_{\alpha_4}^{(2)} \alpha_4 \psi_2^+(\vec{r}) \psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\vec{r}) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left[\kappa_M^{(3)} \kappa_{\alpha_4}^{(3)} \alpha_4 (\psi_3^+(\vec{r}) \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\vec{r}) + \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\vec{r}) \psi_3^+(\vec{r})) \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa_N^{(4)} \kappa_N^{(4)} \frac{i\omega}{4} \left(\psi_4^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) + \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \psi_4^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \right) \Big] H(\bar{n}^2 - m^2) + \\
& + \frac{1}{2} \left[\kappa_N^{(5)} \kappa_N^{(5)} \frac{i\omega}{4} \left(\psi_6^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) + \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \psi_6^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \right) + \right. \\
& \left. \kappa_N^{(6)} \kappa_N^{(6)} \frac{i\omega}{4} \left(\psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) + \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{n}) \right) \right] H(m^2 - \bar{n}^2) \Big\} d^5 \bar{n} \quad (\text{VII.4.2})
\end{aligned}$$

5 VALORES MEDIOS DE VACIO

El cálculo de los valores medios de vacío es análogo a los realizados en los capítulos IV apartado 4 y V apartado 1, por lo que solo daremos el resultado del mismo. Este es

$$\langle 0 | \psi_1(\bar{n}') \psi_1^+(\bar{n}) | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_1^+(\bar{n}) \psi_1(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_2^+(\bar{n}) \psi_2(\bar{n}') | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_2(\bar{n}') \psi_2^+(\bar{n}) | 0 \rangle = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_3^+(\bar{n}) \psi_3(\bar{n}') | 0 \rangle = - \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_3(\bar{n}) \psi_3^+(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_4(\bar{n}') \psi_4^+(\bar{n}) | 0 \rangle = - \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_4^+(\bar{n}) \psi_4(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 - m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

(VII.5.1)

$$\langle 0 | \psi_6^+(\bar{n}) \psi_5(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_5(\bar{n}') \psi_6^+(\bar{n}) | 0 \rangle = - \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_5^+(\bar{n}) \psi_6(\bar{n}') | 0 \rangle = - \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_6(\bar{n}) \psi_5^+(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{1\alpha_1}(\bar{n}) \psi_{1\alpha_1}^+(\bar{n}') | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_{1\alpha_1}^+(\bar{n}) \psi_{1\alpha_1}(\bar{n}') | 0 \rangle = - \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(1)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{2\alpha_1}^+(\bar{n}) \psi_{2\alpha_1}(\bar{n}') | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_{2\alpha_1}(\bar{n}) \psi_{2\alpha_1}^+(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(2)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{3\alpha_1}^+(\bar{n}) \psi_{3\alpha_1}(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(3)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{3\alpha_1}(\bar{n}) \psi_{3\alpha_1}^+(\bar{n}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(3)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{4\alpha_1}^+(\bar{n}) \psi_{4\alpha_1}(\bar{n}') | 0 \rangle = - \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(4)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{4\alpha_1}(\bar{n}) \psi_{4\alpha_1}^+(\bar{n}') | 0 \rangle = - \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(4)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{5\alpha_1}^+(\bar{n}) \psi_{5\alpha_1}(\bar{n}') | 0 \rangle = - \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(5)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_{5\alpha_1}(\bar{n}) \psi_{5\alpha_1}^+(\bar{n}') | 0 \rangle = - \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{n}^2}} \kappa_{\alpha_1}^{(5)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\langle 0 | \psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} u^{(6)}_{\alpha_1} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}) \psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} u^{(6)}_{\alpha_1} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_1^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_1^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) | 0 \rangle = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(1)}_{\alpha_1} u^{(1)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_2^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_{2\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_2^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(2)}_{\alpha_1} u^{(2)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_3^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(3)}_{\alpha_1} u^{(3)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_3^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = -\frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(3)}_{\alpha_1} u^{(3)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_4^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = -\frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(4)}_{\alpha_1} u^{(4)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_4^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(4)}_{\alpha_1} u^{(4)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_6^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = -\frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(5)}_{\alpha_1} u^{(5)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_6^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(5)}_{\alpha_1} u^{(5)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(6)}_{\alpha_1} u^{(6)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \psi_5^{+\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}') | 0 \rangle = -\frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} u^{(6)}_{\alpha_1} u^{(6)\alpha_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

6 PROPAGADORES

Analizamos primeramente el propagador del campo escalar. Su cálculo es igual al realizado para el campo escalar real en el capítulo V. Así de (V.5.1) obtenemos

$$\Delta(x-y) = \langle 0 | T \psi(x) \psi^\dagger(y) | 0 \rangle = \frac{1}{2m^2} [\Delta_F(x-y) - \Delta_{FT}(x-y)] \quad (\text{VII.6.1})$$

que es idéntica a (V.1.20-21).

Para el campo $\psi(x)$, que es spinorial definimos como habitualmente

$$T \psi_{\alpha_i}(x) \psi^\dagger_{\beta_j}(y) = \begin{cases} \psi_{\alpha_i}(x) \psi^\dagger_{\beta_j}(y) & x^0 > y^0 \\ -\psi^\dagger_{\beta_j}(y) \psi_{\alpha_i}(x) & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (\text{VIII.6.2})$$

Con la definición (VI.6.2) y con los valores medios de vacío dados por (VII.5.2) obtenemos para $x^0 > y^0$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi_{\alpha_i}(x) \psi^\dagger_{\beta_j}(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^0} \left\{ \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} u^{(2)}_{\alpha_i} e^{-i(x^0 - y^0) \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \right. \\ &+ \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \left[u^{(3)}_{\alpha_i} e^{i(x^0 - y^0) \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right. \\ &- \left. \left. u^{(4)}_{\alpha_i} e^{-i(x^0 - y^0) \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right] H(\bar{u}^2 - m^2) + \right. \\ &+ \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \left[u^{(6)}_{\alpha_i} e^{(x^0 - y^0) \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} + \right. \\ &\left. \left. - u^{(5)}_{\alpha_i} e^{-i(x^0 - y^0) \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \right] H(m^2 - \bar{u}^2) \right\} e^{i\bar{u} \cdot (x - y)} d\bar{u} = -i \partial_{x\alpha_i} \Delta(x-y) \end{aligned} \quad (\text{VII.6.3})$$

y para $x^0 < y^0$

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(x) \psi^{\dagger \alpha_1}(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \left\{ \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} u^{(1)}_{\alpha_1} e^{i(x^2 - y^0) \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \right. \\
 &+ \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \left[u^{(4)}_{\alpha_1} e^{-i(x^2 - y^0) \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right. \\
 &- \left. u^{(3)}_{\alpha_1} e^{i(x^2 - y^0) \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right] H(\bar{u}^2 - m^2) + \\
 &+ \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \left[u^{(5)}_{\alpha_1} e^{-(x^2 - y^0) \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \right. \\
 &- \left. u^{(6)}_{\alpha_1} e^{(x^2 - y^0) \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \right] H(m^2 - \bar{u}^2) \Big\} e^{i\bar{u} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} d^5 u = -i \partial_{x^{\alpha_1}} \Delta(x-y)
 \end{aligned}$$

(VII.6.4)

Así de (VII.6.3) y (VII.6.4) obtenemos

$$\Delta_{\alpha_1}^{\alpha_1}(x-y) = \langle 0 | T \psi_{\alpha_1}(x) \psi^{\dagger \alpha_1}(y) | 0 \rangle = -i \partial_{x^{\alpha_1}} \Delta(x-y) \quad (\text{VII.6.5})$$

El cálculo del propagador del campo $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x)$ es análogo al anterior, solo que la definición de orden temporal es igual a la del campo escalar. Así se obtiene

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x-y) = \langle 0 | T \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \psi^{\dagger \alpha_1 \alpha_2}(y) | 0 \rangle = \delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{\beta_1 \beta_2} \partial_{\beta_1}^{\alpha_1} \partial_{\beta_2}^{\alpha_2} \Delta(x-y) \quad (\text{VII.6.6})$$

7 EL CAMPO VECTORIAL

El campo vectorial $\psi_{\mu}(x)$ se define vía la igualdad

$$\psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) = \psi_{\mu}(x) \delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{\mu} \quad \psi^{\dagger \alpha_1 \alpha_2}(x) = \psi_{\mu}^{\dagger}(x) \delta^{\mu \alpha_1 \alpha_2} \quad (\text{VII.7.1})$$

(ver ref.[1]) donde las matrices δ^{μ} están definidas en el apéndice E. Debemos notar que las ecuaciones de movimiento, el impulso,...etc. para el campo $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x)$ provienen de la parte del lagrangiano (II.7.2) que involucra sólo a los campos $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x)$ y $\psi^{\alpha_1 \alpha_2}(x)$. Esa parte es en sí misma un lagrangiano que notaremos por \mathcal{L}_V y es igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V = & \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \psi^{\alpha_1 \alpha_2}(x) \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \\ & - \frac{1}{16} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \psi^{\alpha_1 \alpha_2}(x) \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \\ & + \frac{1}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^{\alpha_1 \alpha_2}(x) \psi_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \\ & + \frac{m^2}{8} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \psi_{\alpha_3 \alpha_4}(x) + \frac{m^2}{8} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \psi^{\alpha_1 \alpha_2}(x) \psi^{\alpha_3 \alpha_4}(x) \end{aligned} \quad (\text{VII.7.2})$$

Reemplazando (VII.7.1) en (VII.7.2) podemos escribir \mathcal{L}_V en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V = & -\psi^{\mu\nu}(x) \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \psi_{\nu_1 \nu_2}(x) + \frac{1}{2} \psi^{\nu_1 \nu_2}(x) \square \psi_{\nu_1 \nu_2}(x) + \partial_{\nu_2} \psi^{\mu\nu}(x) \partial_{\nu_1} \psi_{\nu_2}(x) \\ & - \partial_{\nu_2} \psi^{\mu\nu}(x) \partial_{\nu_1} \psi_{\nu_2}(x) + \partial_{\nu_1} \psi^{\mu\nu}(x) \partial_{\nu_2} \psi_{\nu_1 \nu_2}(x) - \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \psi^{\mu\nu}(x) \psi_{\nu_1 \nu_2}(x) \\ & + \frac{1}{2} \square \psi^{\mu\nu}(x) \psi_{\nu_1 \nu_2}(x) + m^2 \psi_{\nu_1 \nu_2}(x) \psi^{\mu\nu}(x) + m^2 \psi_{\nu_1 \nu_2}^+(x) \psi^{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (\text{VII.7.3})$$

De (VII.7.3) se deducen las ecuaciones de movimiento

$$\square \psi^{\mu\nu}(x) - 2 \partial^{\mu} \partial_{\nu} \psi^{\nu\mu}(x) + m^2 \psi^{\mu\nu}(x) = 0$$

$$\square \psi_{\mu\nu}(x) - 2 \partial^{\mu} \partial_{\nu} \psi^{\nu\mu}(x) + m^2 \psi^{\mu\nu}(x) = 0$$

$$(\text{VII.7.4})$$

que conducen a

$$\begin{aligned}
 (\square^2 - m^2) \psi^\mu(x) &= 0 \\
 (\square^2 - m^2) \psi^{\mu\dagger}(x) &= 0
 \end{aligned}
 \quad (\text{VII.7.5})$$

Las ecuaciones (VII.7.4) se pueden deducir de (VII.1.5) y (VII.1.6) con la ayuda de (VII.7.1), pero el procedimiento es más complicado que el expuesto aquí.

De (VII.7.5) vemos que $\psi^\mu(x)$ y $\psi^{\mu\dagger}(x)$ son de la forma (VII.1.19), es decir, el desarrollo de Fourier de $\psi^\mu(x)$ tiene seis componentes $\psi_{\nu}^{(\mu)}$ $1 \leq \nu \leq 6$.

Utilizando las relaciones de conmutación (VII.3.16) junto con (VII.7.1) se obtienen las relaciones de conmutación para las componentes del campo $\psi^\mu(x)$. Estas son

$$[\psi_{1\mu}^+(\bar{u}), \psi_{1\nu}(\bar{u}')] = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} [2\kappa_{\mu}^{(1)} \kappa_{\nu}^{(1)} + m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[\psi_{2\mu}(\bar{u}), \psi_{2\nu}^+(\bar{u}')] = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} [2\kappa_{\mu}^{(2)} \kappa_{\nu}^{(2)} + m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[\psi_{3\mu}^+(\bar{u}), \psi_{3\nu}(\bar{u}')] = -\frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} [2\kappa_{\mu}^{(3)} \kappa_{\nu}^{(3)} - m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[\psi_{4\mu}(\bar{u}), \psi_{4\nu}^+(\bar{u}')] = -\frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} [2\kappa_{\mu}^{(4)} \kappa_{\nu}^{(4)} - m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[\psi_{5\mu}^+(\bar{u}), \psi_{5\nu}(\bar{u}')] = \frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} [2\kappa_{\mu}^{(5)} \kappa_{\nu}^{(5)} - m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[\psi_{6\mu}(\bar{u}), \psi_{6\nu}^+(\bar{u}')] = -\frac{i\pi}{4m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} [2\kappa_{\mu}^{(6)} \kappa_{\nu}^{(6)} - m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

(VII.7.6)

Para calcular el propagador del campo vectorial debemos conocer el impulso P_μ , y para conocer éste debemos calcular previamente el tensor de impulso-energía $T_{\mu\nu}$. Ahora $T_{\mu\nu}$ no es otra cosa que $T_{\mu\nu}(\psi_{\alpha, \beta}, \psi^{\alpha\dagger, \beta\dagger})$ donde hacemos el reemplazo (VII.7.1). Así de (VII.2.4) es

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= \frac{3}{2} \partial_\nu \psi^{\nu\dagger}(x) \partial_\mu \psi_\nu(x) - \frac{3}{2} \partial_\nu \psi_{\nu\dagger}(x) \partial_\mu \psi_\nu(x) + \\
 &\quad \frac{3}{2} \partial_\nu \psi_{\nu\dagger}(x) \partial_\mu \psi^\nu(x) - \frac{1}{2} \psi^{\nu\dagger}(x) \partial_\nu \partial_\mu \psi_\nu(x) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \psi^{\nu_1}(x) \partial^\nu \partial_\mu \psi_{\nu_1}(x) - \frac{1}{2} \psi_{\nu_1}^+(x) \partial^{\nu_1} \partial_\mu \psi^\nu(x) \\
& + \frac{3}{2} \partial^{\nu_1} \psi_{\nu_1}(x) \partial_\mu \psi^\nu(x) - \frac{3}{2} \partial^\nu \psi_{\nu_1}(x) \partial_\mu \psi^{\nu_1+}(x) \\
& + \frac{3}{2} \partial_{\nu_2} \psi^\nu(x) \partial_\mu \psi_{\nu_1}^+(x) - \frac{1}{2} \psi^{\nu_1}(x) \partial_{\nu_1} \partial_\mu \psi^{\nu_1+}(x) \\
& + \frac{1}{2} \psi^{\nu_1}(x) \partial^\nu \partial_\mu \psi_{\nu_1}^+(x) - \frac{1}{2} \psi^\nu(x) \partial^{\nu_1} \partial_\mu \psi_{\nu_2}^+(x) \\
& - \delta_\mu^\nu \left[m^2 \psi_{\nu_1}(x) \psi^{\nu_1}(x) + m^2 \psi_{\nu_1}^+(x) \psi^{\nu_1+}(x) \right]
\end{aligned}
\tag{VII.7.7}$$

Con la solución (VII.1.19) podemos calcular ahora el impulso. Este es

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \frac{2}{\pi} \int u_\mu^{(1)} \left[u^{(1)\nu_1} \psi_{\nu_1}(\bar{u}) \psi_1^{+0}(\bar{u}) - u^{(1)0} \psi_{2\nu_1}(\bar{u}) \psi_1^{+\nu_1}(\bar{u}) \right. \\
& + u^{(1)\nu_1} \psi_1^0(\bar{u}) \psi_1^{+\nu_1}(\bar{u}) + u_\mu^{(2)} \left[u^{(2)\nu_1} \psi_2^{+0} \psi_{2\nu_1}(\bar{u}) \right. \\
& - u^{(2)0} \psi_2^{+\nu_1}(\bar{u}) \psi_{2\nu_1}(\bar{u}) + u^{(2)\nu_1} \psi_2^{+\nu_1}(\bar{u}) \psi_2^0(\bar{u}) + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ u_\mu^{(3)} \left[u^{(3)\nu_1} (\psi_3^{+0}(\bar{u}) \psi_{3\nu_1}(\bar{u}) + \psi_{3\nu_1}(\bar{u}) \psi_3^{+0}(\bar{u})) \right. \right. \\
& - u^{(3)0} (\psi_3^{+\nu_1}(\bar{u}) \psi_{3\nu_1}(\bar{u}) + \psi_{3\nu_1}(\bar{u}) \psi_3^{+\nu_1}(\bar{u})) \\
& + u^{(3)\nu_2} (\psi_3^{+\nu_1}(\bar{u}) \psi_3^0(\bar{u}) + \psi_3^0(\bar{u}) \psi_3^{+\nu_1}(\bar{u})) \left. \right] + \\
& + u_\mu^{(4)} \left[u^{(4)\nu_1} (\psi_4^{+0}(\bar{u}) \psi_{4\nu_1}(\bar{u}) + \psi_{4\nu_1}(\bar{u}) \psi_4^{+0}(\bar{u})) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - u^{(4)0} (\psi_4^{+v_1}(\bar{u}) \psi_{4v_1}(\bar{u}) + \psi_{4v_1}(\bar{u}) \psi_4^{+v_1}(\bar{u})) \\
& + u^{(4)v_1} (\psi_4^{+v_2}(\bar{u}) \psi_4^0(\bar{u}) + \psi_4^0(\bar{u}) \psi_4^{+v_1}(\bar{u})) \Big] \Big\} H(\bar{u}^2 - m^2) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ u_M^{(5)} \left[u^{(5)v_1} (\psi_6^{+0}(\bar{u}) \psi_{5v_1}(\bar{u}) + \psi_{5v_1}(\bar{u}) \psi_6^{+0}(\bar{u})) \right. \right. \\
& - u^{(5)0} (\psi_6^{+v_1}(\bar{u}) \psi_{5v_1}(\bar{u}) + \psi_{5v_1}(\bar{u}) \psi_6^{+v_1}(\bar{u})) + \\
& \left. \left. + u^{(5)v_2} (\psi_6^{+v_1}(\bar{u}) \psi_5^0(\bar{u}) + \psi_5^0(\bar{u}) \psi_6^{+v_1}(\bar{u})) \right] + \right. \\
& + u_M^{(6)} \left[u^{(6)v_1} (\psi_5^{+0}(\bar{u}) \psi_{6v_1}(\bar{u}) + \psi_{6v_1}(\bar{u}) \psi_5^{+0}(\bar{u})) \right. \\
& - u^{(6)0} (\psi_5^{+v_1}(\bar{u}) \psi_{6v_1}(\bar{u}) + \psi_{6v_1}(\bar{u}) \psi_5^{+v_1}(\bar{u})) \\
& \left. \left. + u^{(6)v_1} (\psi_5^{+v_1}(\bar{u}) \psi_6^0(\bar{u}) + \psi_6^0(\bar{u}) \psi_5^{+v_1}(\bar{u})) \right] \right\} H(m^2 - \bar{u}^2) d^5 u \\
\end{aligned}$$

(VII.7.8)

Exigiendo nuevamente que $P_{\mu} |0\rangle = 0$ y utilizando las relaciones de conmutación (VII.7.6) obtenemos los valores medios de vacío necesarios para calcular el propagador. Estos son

$$\langle 0 | \psi_{1\nu}(\bar{u}') \psi_{1\mu}^{\dagger}(\bar{u}) | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_{1\mu}^{\dagger}(\bar{u}) \psi_{1\nu}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} [2u_{\mu}^{(1)} u_{\nu}^{(1)} + m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{2\nu}^{\dagger}(\bar{u}') \psi_{2\mu}(\bar{u}) | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \psi_{2\mu}(\bar{u}) \psi_{2\nu}^{\dagger}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{4m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} [2u_{\mu}^{(2)} u_{\nu}^{(2)} + m^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{3\mu}^+(\bar{u}) \psi_{3\nu}(\bar{u}') | 0 \rangle = - \frac{\pi}{\delta m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} [2u_\mu^{(3)} u_\nu^{(3)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{2\nu}(\bar{u}') \psi_{3\mu}^+(\bar{u}) | 0 \rangle = \frac{\pi}{\delta m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} [2u_\mu^{(3)} u_\nu^{(3)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{4\mu}(\bar{u}) \psi_{4\nu}^+(\bar{u}') | 0 \rangle = - \frac{\pi}{\delta m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} [2u_\mu^{(4)} u_\nu^{(4)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{4\nu}^+(\bar{u}) \psi_{4\mu}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{\pi}{\delta m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - u^2}} [2u_\mu^{(4)} u_\nu^{(4)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{5\mu}^+(\bar{u}) \psi_{5\nu}(\bar{u}') | 0 \rangle = \frac{i\pi}{\delta m^2 \sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} [2u_\mu^{(5)} u_\nu^{(5)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{5\nu}(\bar{u}) \psi_{5\mu}^+(\bar{u}') | 0 \rangle = - \frac{i\pi}{\delta m^2 \sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} [2u_\mu^{(5)} u_\nu^{(5)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{6\mu}^+(\bar{u}) \psi_{6\nu}(\bar{u}') | 0 \rangle = - \frac{i\pi}{\delta m^2 \sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} [2u_\mu^{(6)} u_\nu^{(6)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\langle 0 | \psi_{6\nu}(\bar{u}') \psi_{6\mu}^+(\bar{u}) | 0 \rangle = \frac{i\pi}{\delta m^2 \sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} [2u_\mu^{(6)} u_\nu^{(6)} - u^2 g_{\mu\nu}] \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

(VII.7.9)

Utilizando la definición habitual de producto temporal ordenado, y a partir de (VII.7.9) obtenemos para el propagador

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T \psi_\mu(x) \psi_\nu^+(y) | 0 \rangle = \left(\partial_\mu \partial_\nu - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \square \right) \Delta(x-y) \quad (\text{VII.7.10})$$

donde $\Delta(x-y)$ está dada por (VII.6.1).

8 DIAGONALIZACION DE LAS RELACIONES DE CONMUTACION Y ANTICONMUTACION

Las relaciones de conmutación (VII.3.1) están expresadas en forma "diagonal" en el sentido que relacionan al campo y a su conjugado hermítico. No sucede lo mismo con

(VII.3.8) y (VII.3.16). Por ejemplo obsérvese que la primer relación de anticonmutación en (VII.3.8) es distinta de cero para $\alpha_1 \neq \alpha_1$. Esto no nos permite saber si la cuantificación llevada a cabo es la habitual para los campos bradiónicos, o si hemos cuantificado y como resultado hemos obtenido una métrica indefinida. Para poder saberlo debemos expresar cada campo en otra base de componentes de Fourier, base en la cual las relaciones serán distintas de cero solo entre el campo y su conjugado. Para hacer esto es suficiente con diagonalizar las matrices $u^{(j)}_{\alpha} \quad 1 \leq j \leq 6$ como veremos ahora. Primeramente entonces diagonalizaremos las matrices $u^{(j)}_{\alpha}$. Para ello hallamos los valores y vectores propios que les corresponden, resolviendo el polinomio característico

$$\det(u^{(j)}_{\alpha} - \lambda I) = 0 \quad (\text{VII.8.1})$$

Así obtenemos

$$\lambda^{(j)} = -u_0^{(j)} \pm \sqrt{u_0^{(j)2} - u^2} \quad 1 \leq j \leq 2 \text{ (bradiones)} \quad (\text{VII.8.2})$$

$$\lambda^{(j)} = -u_0^{(j)} \pm \sqrt{u_0^{(j)2} + u^2} \quad 3 \leq j \leq 6 \text{ (tachiones)} \quad (\text{VII.8.3})$$

Haciendo ahora

$$[u^{(j)}_{\alpha} - \lambda^{(j)} I] [v] = 0 \quad (\text{VII.8.4})$$

obtenemos los vectores propios y la matriz de cambio de base $B^{(j)}$. No daremos aquí los vectores propios ya que no los necesitamos. Sí daremos, en cambio, las matrices $B^{(j)}$ $1 \leq j \leq 6$. Las matrices $B^{(j)}$ son unitarias y tales que para los bradiones

$$B^{(j)} + [u^{(j)}_{\alpha}] B^{(j)} = \begin{pmatrix} -u_0^{(j)} + \delta_{\pm}^{(j)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_0^{(j)} + \delta_{\pm}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_0^{(j)} - \delta_{\pm}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_0^{(j)} - \delta_{\pm}^{(j)} \end{pmatrix} \quad 1 \leq j \leq 2 \quad (\text{VII.8.5})$$

$$\delta_1^{(j)} = \sqrt{k_0^{(j)2} - \omega^2}$$

Teniendo en cuenta que $k_0^{(1)2} = k_0^{(2)2} = k_0^2 = \bar{k}^2 + \omega^2$ escribimos

$$B^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{2\delta_1}} \begin{pmatrix} \frac{k_4 + \delta_1}{\sqrt{k_4 + \delta_1}} & 0 & \frac{k_4 - \delta_1}{\sqrt{\delta_1 - k_4}} & 0 \\ 0 & \frac{k_4 + \delta_1}{\sqrt{\delta_1 + k_4}} & 0 & \frac{k_4 - \delta_1}{\sqrt{\delta_1 - k_4}} \\ \frac{k_3 + i k_5}{\sqrt{\delta_1 + k_4}} & \frac{k_1 - i k_2}{\sqrt{\delta_1 + k_4}} & \frac{k_1 + i k_5}{\sqrt{\delta_1 - k_4}} & \frac{k_1 - i k_2}{\sqrt{\delta_1 - k_4}} \\ \frac{k_1 + i k_2}{\sqrt{\delta_1 + k_4}} & -\frac{k_3 - i k_5}{\sqrt{\delta_1 + k_4}} & \frac{k_1 + i k_2}{\sqrt{\delta_1 - k_4}} & \frac{k_3 - i k_5}{\sqrt{\delta_1 - k_4}} \end{pmatrix} \quad (VII.8.6)$$

$1 \leq i \leq 2$

$$\delta_1 = \sqrt{k_0^2 - \omega^2}$$

Para los taquiones

$$B^{(j)†} [k^{(j)}] B^{(j)} = \begin{pmatrix} -k_0^{(j)} + \delta_2^{(j)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_0^{(j)} + \delta_2^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0^{(j)} - \delta_2^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_0^{(j)} - \delta_2^{(j)} \end{pmatrix} \quad 3 \leq j \leq 6 \quad (VII.8.7)$$

$$\delta_2^{(j)} = \sqrt{k_0^{(j)2} + \omega^2}$$

Como $k_0^{(3)2} = k_0^{(4)2} = k_0^{(5)2} = k_0^{(6)2} = \bar{k}^2 - \omega^2$ es

$$B^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}\delta_2} \begin{pmatrix} \frac{u_4 + \delta_2}{\sqrt{u_4 + \delta_2}} & 0 & \frac{u_4 - \delta_2}{\sqrt{\delta_2 - u_4}} & 0 \\ 0 & \frac{u_4 + \delta_2}{\sqrt{\delta_2 + u_4}} & 0 & \frac{u_4 - \delta_2}{\sqrt{\delta_2 - u_4}} \\ \frac{u_3 + i u_5}{\sqrt{\delta_2 + u_4}} & \frac{u_3 - i u_5}{\sqrt{\delta_2 + u_4}} & \frac{u_3 + i u_5}{\sqrt{\delta_2 - u_4}} & \frac{u_3 - i u_5}{\sqrt{\delta_2 - u_4}} \\ \frac{u_4 i u_2}{\sqrt{\delta_2 + u_4}} & -\frac{u_3 - i u_5}{\sqrt{\delta_2 + u_4}} & \frac{u_4 + i u_2}{\sqrt{\delta_2 - u_4}} & -\frac{u_3 - i u_5}{\sqrt{\delta_2 - u_4}} \end{pmatrix} \quad (\text{VII. 8.8})$$

$\delta_2 = \sqrt{u_0^2 + u^2}$

Podemos expresar ahora las relaciones de conmutación en forma diagonal mediante una redefinición de las componentes $\chi_i(\vec{u})$ en (VII.1.19). Para el campo escalar definimos

$$a_i(\vec{u}) = \psi_i(\vec{u}) \quad 1 \leq i \leq 6 \quad (\text{VII. 8.9})$$

Para el campo spinorial tenemos, por ejemplo para $\psi_{1\alpha}(\vec{u})$

$$\{\psi_1^{+\alpha_1}(\vec{u}), \psi_{1\alpha_1}(\vec{u}')\} = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{u^2 + u'^2}} \lambda^{(1)}_{\alpha_1} \delta(\vec{u} - \vec{u}')$$

o

$$\begin{aligned} & \psi_1^{+\alpha_1}(\vec{u}) \psi_{1\alpha_1}(\vec{u}') + \psi_{1\alpha_1}(\vec{u}') \psi_1^{+\alpha_1}(\vec{u}) = \\ & = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{u^2 + u'^2}} B^{(1)}_{\alpha_1} \lambda^{(1)}_{\alpha_2} B^{(1) + \alpha_2}_{\alpha_1} \delta(\vec{u} - \vec{u}') \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} & B^{(1) + \alpha_2}_{\alpha_1} B^{(1)}_{\alpha_2} \lambda^{(1)}_{\alpha_1} (\psi_1^{+\alpha_2}(\vec{u}) \psi_{1\alpha_2}(\vec{u}') + \psi_{1\alpha_2}(\vec{u}') \psi_1^{+\alpha_2}(\vec{u})) = \\ & = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{u^2 + u'^2}} \lambda^{(1)}_{\alpha_1} \delta(\vec{u} - \vec{u}') \quad (\text{VII. 8.10}) \end{aligned}$$

Reordenando

$$\begin{aligned} \psi_1^{+\alpha_2}(\bar{n}) B_{\alpha_2}^{(1)\alpha_1} B_{\alpha_1}^{(1)+\alpha_2} \psi_{1\alpha_2}(\bar{n}') + B_{\alpha_1}^{+\alpha_2} \psi_{1\alpha_2}(\bar{n}') \psi_1^{+\alpha_2} B_{\alpha_2}^{(1)\alpha_1} &= \\ &= - \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \lambda_{\alpha_1}^{(1)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}') \quad (\text{VII.8.11}) \end{aligned}$$

Si definimos

$$a_{1\alpha_1}(\bar{n}) = B_{\alpha_1}^{(1)+\alpha_2} \psi_{1\alpha_2}(\bar{n})$$

$$a_1^{+\alpha_1}(\bar{n}) = \psi_1^{+\alpha_2}(\bar{n}) B_{\alpha_2}^{(1)\alpha_1}$$

es de (VII.8.11)

$$\{a_1^{+\alpha_1}(\bar{n}), a_{1\alpha_1}(\bar{n}')\} = - \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \lambda_{\alpha_1}^{(1)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

Los casos restantes son iguales a este. Así si definimos

$$a_{i\alpha_i}(\bar{n}) = B_{\alpha_i}^{(i)+\alpha_2} \psi_{i\alpha_2}(\bar{n}) \quad 1 \leq i \leq 6 \quad (\text{VII.8.12})$$

$$a_i^{+\alpha_i}(\bar{n}) = \psi_i^{+\alpha_2}(\bar{n}) B_{\alpha_2}^{(i)\alpha_i} \quad 1 \leq i \leq 6 \quad (\text{VII.8.13})$$

tendremos

$$\{a_i^{+\alpha_i}(\bar{n}), a_{i\alpha_i}(\bar{n}')\} = - \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \lambda_{\alpha_i}^{(i)\alpha_i} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\{a_{2\alpha_1}(\bar{n}), a_2^{+\alpha_1}(\bar{n}')\} = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \lambda_{\alpha_1}^{(2)\alpha_1} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

$$\{a_3^{+\alpha_1}(\bar{u}), a_{3\alpha_1}(\bar{u}')\} = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \lambda_{\alpha_1}^{(3)} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\{a_{4\alpha_1}(\bar{u}), a_4^{+\alpha_1}(\bar{u}')\} = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \lambda_{\alpha_1}^{(4)} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$\{a_6^{+\alpha_1}(\bar{u}), a_{5\alpha_1}(\bar{u}')\} = -\frac{i\pi}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \lambda_{\alpha_1}^{(5)} \delta(\bar{u} - \bar{u}') \quad (\text{VII. 8.14})$$

$$\{a_5^{+\alpha_1}(\bar{u}), a_{6\alpha_1}(\bar{u}')\} = \frac{i\pi}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \lambda_{\alpha_1}^{(6)} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

En igual forma se hace el tratamiento para el campo de dos índices. Definiendo

$$a_{1\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) = \beta_{\alpha_1}^{(1)+\alpha_3} \beta_{\alpha_2}^{(1)+\alpha_4} \psi_{1\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) \quad (\text{VII. 8.15})$$

$$a_1^{+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) = \psi^{+\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) \beta_{\alpha_3}^{(1)\dot{\alpha}_1} \beta_{\alpha_4}^{(1)\dot{\alpha}_2} \quad (\text{VII. 8.16})$$

obtenemos

$$[a_1^{+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), a_{1\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}')] = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \delta_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma_1\gamma_2} \lambda_{\alpha_1}^{(1)\dot{\alpha}_1} \lambda_{\alpha_2}^{(1)\dot{\alpha}_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[a_{2\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), a_2^{+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}')] = -\frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \delta_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma_1\gamma_2} \lambda_{\alpha_1}^{(2)\dot{\alpha}_1} \lambda_{\alpha_2}^{(2)\dot{\alpha}_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[a_3^{+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), a_{3\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}')] = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma_1\gamma_2} \lambda_{\alpha_1}^{(3)\dot{\alpha}_1} \lambda_{\alpha_2}^{(3)\dot{\alpha}_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[a_{4\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), a_4^{+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}')] = \frac{\pi}{2m^2 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \delta_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma_1\gamma_2} \lambda_{\alpha_1}^{(4)\dot{\alpha}_1} \lambda_{\alpha_2}^{(4)\dot{\alpha}_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[a_6^{+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), a_{5\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}')] = -\frac{i\pi}{2m^2 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma_1\gamma_2} \lambda_{\alpha_1}^{(5)\dot{\alpha}_1} \lambda_{\alpha_2}^{(5)\dot{\alpha}_2} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

$$[a_{5\alpha_1\alpha_2}^+(\bar{u}), a_{6\alpha_1\alpha_2}(\bar{u})] = \frac{i\pi}{2u^2 \sqrt{u^2 - \bar{u}^2}} \delta_{\alpha_1\alpha_2}^{2122} \lambda_{\alpha_1}^{(6)} \lambda_{\alpha_2}^{(6)} \delta(\bar{u} - \bar{u}')$$

Las relaciones (VII.8.14) y (VII.8.17) permiten identificar la métrica correspondiente a cada campo. Por ejemplo ya que $\lambda_{\alpha_1\alpha_2}^{(1)} < 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$

al spinor $a_{\alpha_1\alpha_2}(\bar{u})$ le corresponde una métrica positiva,...etc.

Con las fórmulas (VII.8.9), (VII.8.12) y (VII.8.15) podemos reescribir los campos. El campo $\psi(x)$ permanece sin cambios ya que sólo hay que reemplazar $\psi(\bar{u})$ por $a_i(\bar{u})$. Para el campo $\psi_{\alpha_1\alpha_2}(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1\alpha_2}(x) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[B_{\alpha_1}^{(1)\alpha_2} a_{1\alpha_2}(\bar{u}) e^{i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \right. \\ & \left. + B_{\alpha_1}^{(2)\alpha_2} a_{2\alpha_2}(\bar{u}) e^{-i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \right] e^{i \bar{u} \cdot \bar{x}} dS\bar{u} \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\{ \left[B_{\alpha_1}^{(3)\alpha_2} a_{3\alpha_2}(\bar{u}) e^{i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{\alpha_1}^{(4)\alpha_2} a_{4\alpha_2}(\bar{u}) e^{-i x^0 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right] H(\bar{u}^2 - m^2) + \right. \\ & \left. + \left[B_{\alpha_1}^{(5)\alpha_2} a_{5\alpha_2}(\bar{u}) e^{-x^0 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{\alpha_1}^{(6)\alpha_2} a_{6\alpha_2}(\bar{u}) e^{x^0 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \right] H(m^2 - \bar{u}^2) \right\} e^{i \bar{u} \cdot \bar{x}} dS\bar{u} \end{aligned}$$

(VII.8.18)

y para $\psi_{\alpha_1\alpha_2}(x)$

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha_1, \alpha_2}(x) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[B_{\alpha_1}^{(1)} \alpha_3 B_{\alpha_2}^{(1)} \alpha_4 a_{1\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) e^{i x_0 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} + \right. \\
& \left. + B_{\alpha_1}^{(2)} \alpha_3 B_{\alpha_2}^{(2)} \alpha_4 a_{2\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) e^{-i x_0 \sqrt{\bar{u}^2 + m^2}} \right] e^{i \bar{u} \cdot \bar{x}} d^5 u \\
& + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\{ \left[B_{\alpha_1}^{(3)} \alpha_3 B_{\alpha_2}^{(3)} \alpha_4 a_{3\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) e^{i x_0 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{\alpha_1}^{(4)} \alpha_3 B_{\alpha_2}^{(4)} \alpha_4 a_{4\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) e^{-i x_0 \sqrt{\bar{u}^2 - m^2}} \right] H(\bar{u}^2 - m^2) + \right. \\
& \left. + B_{\alpha_1}^{(5)} \alpha_3 B_{\alpha_2}^{(5)} \alpha_4 a_{5\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) e^{-x_0 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} + \right. \\
& \left. + B_{\alpha_1}^{(6)} \alpha_3 B_{\alpha_2}^{(6)} \alpha_4 a_{6\alpha_3\alpha_4}(\bar{u}) e^{x_0 \sqrt{m^2 - \bar{u}^2}} \right\} H(m^2 - \bar{u}^2) \} e^{i \bar{u} \cdot \bar{x}} d^5 u
\end{aligned}$$

(VII.8.19)

CAPITULO VIII

EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE SCHWINGER-FEYNMAN

0_INTRODUCCION

En este capítulo extendemos el principio variacional de Schwinger-Feynman a teorías de campos supersimétricas de orden superior. Para ello calculamos la carga conservada por una transformación supersimétrica de parámetro spinorial ρ^α para el modelo de Wess-Zumino y utilizando el principio variacional llevamos a cabo la cuantificación con la carga supersimétrica (a la cual llamamos cuantificación supersimétrica). Mostramos entonces que esta cuantificación coincide con la obtenida en forma canónica en el capítulo VII y que el impulso obtenido a partir de la carga supersimétrica coincide con el impulso obtenido a partir del tensor de impulso-energía.

1_EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE SCHWINGER-FEYNMAN

En este capítulo exploraremos la posibilidad de extender a teorías de campos supersimétricas de orden superior el principio variacional de Schwinger-Feynman (ref.[20]).

Este puede ser enunciado en la siguiente forma:

Toda variación infinitesimal hermítica δS de la acción engendra una transformación canónica en el espacio vectorial donde el sistema cuántico está definido, siendo el generador de esta transformación el operador δS .

Así el principio puede ser escrito para un conjunto de campos ψ_A , $1 \leq A \leq N$

$$\delta \psi_A(x) = i [\delta S, \psi_A(x)] \quad (\text{VIII.1.1})$$

En esta tesis este principio fué utilizado para cuantificar los campos, pero cabe agregar que además el principio variacional provee los representativos, en el espacio de Fock, de los generadores de los grupos de simetría bajo los cuales la acción es invariante. Así por ejemplo para el grupo de Poincaré y para una acción invariante bajo él es

$$\delta S = -a^\mu P_\mu + \frac{a^{\mu\nu}}{2} M_{\mu\nu}$$

donde a^μ son los parámetros del desplazamiento a , $a^{\mu\nu}$ los parámetros de la transformación de Lorentz Λ , P_μ el impulso y $M_{\mu\nu}$ el momento angular. El principio variacional nos provee el representativo $D(\Lambda, a)$. En efecto

$$\psi_A'(x) = \psi_A(x) + i [\delta S, \psi_A(x)] = (I + i \delta S) \psi_A(x) (I - i \delta S) =$$

$$e^{i\delta S} \psi_A(x) e^{-i\delta S} = D^{-1}(\Lambda) \psi_A(x) D(\Lambda)$$

donde

$$D(\Lambda) = I - i\delta S = e^{-i\delta S} = e^{i(a^\mu p_\mu - \frac{a^{\mu\nu}}{2} M_{\mu\nu})} \quad (\text{VIII}, 1.3)$$

Para una simetría interna, por ejemplo una invariancia respecto de un grupo de Lie, sean T_a los generadores tales que

$$[T_a, T_b] = C_{ab}^c T_c \quad 1 \leq a, b, c \leq m$$

$$\psi'(x) = e^{-i\delta\omega^a T_a} \psi(x) \quad 1 \leq a \leq m$$

$$\delta\psi(x) = -i\delta\omega^a T_a \psi(x)$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

tenemos ahora

$$\delta S = -Q_a \delta\omega^a$$

y por lo tanto de

$$\delta\psi_A(x) = i[\delta S, \psi_A(x)]$$

$$\begin{aligned} \psi_A'(x) = \psi_A(x) + i[\delta S, \psi_A(x)] &= e^{-i\delta\omega^a Q_a} \psi_A(x) e^{i\delta\omega^a Q_a} = \\ &= U^{-1}(\omega) \psi_A(x) U(\omega) \end{aligned}$$

Luego el representativo de $e^{-i\delta\omega^a T_a}$ es

$$U(\omega) = e^{i\delta\omega^a Q_a} \quad (\text{VIII.2.4})$$

donde

$$\omega = e^{-i\delta\omega^a T_a} = 1 - i\delta\omega^a T_a$$

Este principio ha sido usado en la referencia [21] para llevar a cabo la cuantificación del modelo de Wess-Zumino utilizando la carga supersimétrica. Nuestro objetivo es mostrar que usando el principio variacional, la cuantificación canónica coincide con la realizada con la carga supersimétrica.

2_COINCIDENCIA DE LAS CUANTIFICACIONES CANONICA Y SUPERSIMETRICA

Sea una transformación supersimétrica infinitesimal tal que

$$\begin{aligned} \Phi'(x, \theta, \theta^+) &= e^{iP^\alpha Q_\alpha} \Phi(x, \theta, \theta^+) = \\ &= (1 + iP^\alpha Q_\alpha) \Phi(x, \theta, \theta^+) \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.1})$$

donde Q_α está dada por (II.3.8), $\Phi(x, \theta, \theta^+)$ dado por (II.4.4) y P^α es un spinor de Grassman. Por (VIII.2.1)

$$\delta\phi = iP^\alpha Q_\alpha \Phi(x, \theta, \theta^+)$$

de la cual se deduce

$$\begin{aligned} \delta\psi^+ &= 0 \\ \delta\psi^+ \dot{\alpha}_1 &= -iP^\alpha \partial_\alpha^{\dot{\alpha}_1} \psi^+(x) \\ \delta\psi^+ \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 &= -iP^\alpha \delta_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2} \partial_\alpha^{\dot{\alpha}_1} \psi^+(x) \end{aligned}$$

$$\delta \psi^{+i_1 i_2 i_3} = -\frac{i}{2} \rho^\alpha \delta_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} \partial_\alpha \psi^{j_2 j_3}(x)$$

$$\delta F^+ = \frac{i}{3!} \rho^\alpha \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \partial_\alpha \psi^{+i_1 i_2 i_3}(x)$$

$$\delta \psi = \rho^\alpha \psi_\alpha(x)$$

$$\delta \psi_{\alpha_1} = -\rho^\alpha \psi_{\alpha_1}(x)$$

(VIII. 2.3)

$$\delta \psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \rho^\alpha \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x)$$

$$\delta \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = -\rho^\alpha \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} F(x)$$

$$\delta F = 0$$

Bajo estas transformaciones podemos escribir

$$SL = \rho^\alpha \partial_\nu \Lambda^\nu_\alpha$$

con

$$\begin{aligned} \Lambda^\nu_\alpha &= \delta^\nu_\alpha \left[-\frac{7}{96} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \psi^{+i_1 i_2 i_3}(x) \partial_{\alpha_2}^{i_2} \partial_{\alpha_3}^{i_3} \partial_{\alpha_4}^{i_4} \psi_{\alpha_1}(x) \right. \\ &- \frac{1}{32} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \partial_{\alpha_4}^{i_4} \psi^{+i_1 i_2 i_3}(x) \partial_{\alpha_2}^{i_2} \partial_{\alpha_3}^{i_3} \psi_{\alpha_1}(x) \\ &+ \frac{1}{32} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \partial_{\alpha_3}^{i_3} \partial_{\alpha_4}^{i_4} \psi^{+i_1 i_2 i_3}(x) \partial_{\alpha_2}^{i_2} \psi_{\alpha_1}(x) \\ &- \frac{1}{96} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \partial_{\alpha_2}^{i_2} \partial_{\alpha_3}^{i_3} \partial_{\alpha_4}^{i_4} \psi^{+i_1 i_2 i_3}(x) \psi_{\alpha_1}(x) \\ &- \frac{5i}{32} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \psi^{+i_1 i_2 i_3}(x) \partial_{\alpha_3}^{i_3} \partial_{\alpha_4}^{i_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \\ &\left. - \frac{i}{16} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \partial_{\alpha_4}^{i_4} \psi^{+i_1 i_2 i_3}(x) \partial_{\alpha_3}^{i_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{i}{32} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^{\dagger \alpha_2}(x) \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x)$$

$$- \frac{i}{4m^4} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \square \psi^{\dagger \alpha_2}(x) \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \square \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \quad (\text{VIII. 2.5})$$

donde hemos utilizado las ecuaciones de movimiento (VII.1.1-10) para eliminar los campos auxiliares.

Por otra parte, por el teorema de Noether (II.2.16) tenemos

$$\delta S = - \int p^\alpha \partial_\alpha J_\alpha^M d^6 x \quad (\text{VIII. 2.6})$$

donde

$$J_\alpha^V = - \frac{7}{192} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^\dagger(x) \psi_\alpha(x)$$

$$+ \frac{5}{192} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \gamma_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^\dagger(x) \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \psi_\alpha(x)$$

$$- \frac{1}{96} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^\dagger(x) \partial_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \psi_\alpha(x)$$

$$+ \frac{1}{16} \square \psi^\dagger(x) \partial^\nu \psi_\alpha(x) - \frac{1}{16} \partial^\nu \psi^\dagger(x) \square \psi_\alpha(x) + \frac{1}{16} \psi^\dagger(x) \partial^\nu \square \psi_\alpha(x)$$

$$- \frac{7}{48} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1}(x) \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \psi^\dagger(x)$$

$$+ \frac{1}{12} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \gamma_{\alpha_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1}(x) \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \psi^\dagger(x) +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{48} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_2}^{\nu \dot{\alpha}_2} \psi_{\alpha_1}(x) \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dagger}(x) \\
& -\frac{i}{12} \epsilon^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha}^{\nu \dot{\alpha}_4} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3}(x) F(x) \\
& -\frac{3}{32} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \\
& +\frac{1}{32} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \\
& -\frac{3i}{16} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3}(x) \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \\
& +\frac{i}{16} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_3}^{\nu \dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3}(x) \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(x) \\
& +\frac{7i}{48} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_2}^{\nu \dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \psi_{\alpha_1 \alpha_3}(x) \\
& -\frac{i}{12} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_2}^{\nu \dot{\alpha}_2} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \psi_{\alpha_1 \alpha_3}(x) \\
& +\frac{i}{48} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_2}^{\nu \dot{\alpha}_2} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(x) \partial_{\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\alpha_4}^{\dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_3}(x) \\
& -\frac{1}{24} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \delta_{\alpha_4}^{\nu \dot{\alpha}_4} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \partial_{\alpha_1}^{\dot{\alpha}_1} \psi^{\dagger \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3}(x)
\end{aligned}
\tag{VIII.2.7}$$

Vemos así que por una transformación de supersimetría $\delta \neq 0$ (VIII.2.4) y δS es la integral de una divergencia (VIII.2.6). De (VIII.2.4) y (VIII.2.6) podemos escribir

$$\delta S - \int \delta \mathcal{L} d^6 x = 0$$

de la que se deduce

$$\partial_\nu (J_\alpha^\nu - \Lambda_\alpha^\nu) = 0$$

O sea que

$$J_{\alpha}^{\nu} = J_{\alpha}^{\nu} - \Lambda_{\alpha}^{\nu} \quad (\text{VIII. 2. 8})$$

es tal que

$$\partial_{\nu} J_{\alpha}^{\nu} = 0 \quad (\text{VIII. 2. 9})$$

Podemos definir entonces una carga spinorial conservada

$$Q_{\alpha} = \int J_{\alpha}^0 d^5x \quad (\text{VIII. 2. 10})$$

Reemplazando ahora (VII.1.19) en (VIII.2.5) y (VIII.2.7), introduciendo estas dos últimas en (VIII.2.8) y luego reemplazando (VIII.2.8) en (VIII.2.10) obtenemos

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} = & -\frac{2i\omega^2}{\pi} \left\{ \left(\kappa_0^{(1)} \psi_1^+(\bar{u}) \psi_{1\alpha}(\bar{u}) + \kappa_0^{(2)} \psi_2^+(\bar{u}) \psi_{2\alpha}(\bar{u}) \right. \right. \\ & - \left. \left(\kappa_0^{(3)} \psi_3^+(\bar{u}) \psi_{3\alpha}(\bar{u}) + \kappa_0^{(4)} \psi_4^+(\bar{u}) \psi_{4\alpha}(\bar{u}) \right) H(\bar{u}^2 - m^2) \right. \\ & \left. + \left(\kappa_0^{(5)} \psi_5^+(\bar{u}) \psi_{6\alpha}(\bar{u}) + \kappa_0^{(6)} \psi_6^+(\bar{u}) \psi_{5\alpha}(\bar{u}) \right) H(m^2 - \bar{u}^2) \right\} d^5\bar{u} \\ & + \frac{2i}{\pi} \left\{ \left(\kappa_0^{(1)} \tilde{\eta}_{\dot{\alpha}_1}^{(1)\alpha_1} \psi_1^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \psi_{1\alpha_1}(\bar{u}) + \kappa_0^{(2)} \tilde{\eta}_{\dot{\alpha}_1}^{(2)\alpha_1} \psi_2^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \psi_{2\alpha_1}(\bar{u}) \right. \right. \\ & + \left. \left(\kappa_0^{(3)} \tilde{\eta}_{\dot{\alpha}_1}^{(3)\alpha_1} \psi_3^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \psi_{3\alpha_1}(\bar{u}) + \kappa_0^{(4)} \tilde{\eta}_{\dot{\alpha}_1}^{(4)\alpha_1} \psi_4^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \psi_{4\alpha_1}(\bar{u}) \right) H(\bar{u}^2 - m^2) \right. \\ & \left. + \left(\kappa_0^{(5)} \tilde{\eta}_{\dot{\alpha}_1}^{(5)\alpha_1} \psi_6^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \psi_{5\alpha_1}(\bar{u}) + \kappa_0^{(6)} \tilde{\eta}_{\dot{\alpha}_1}^{(6)\alpha_1} \psi_5^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}) \right) H(m^2 - \bar{u}^2) \right\} d^5\bar{u} \end{aligned}$$

(VIII. 2. 11)

Llamamos ahora

$$\delta_e S = \delta S - \int \delta \mathcal{L} d^4x \quad (\text{VIII.2.12})$$

La variación calculada ahora entre dos superficies de género espacio arbitrarias conduce a

$$\delta_e S = \int \delta Q_\alpha \quad (\text{VIII.2.13})$$

Extendemos ahora el principio variacional de Schwinger-Feynman en la forma

$$\delta \chi = i [\delta_e S, \chi(x)] \quad (\text{VIII.2.14})$$

Por (VIII.2.3), (VIII.2.13) y (VIII.2.14) deberá ser

$$\psi_\alpha(x) = i [Q_\alpha, \psi(x)]$$

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = -i [Q_\alpha, \psi_\beta(x)] \quad (\text{VIII.2.15})$$

$$\psi_{\alpha\rho\gamma}(x) = i [Q_\alpha, \psi_{\rho\gamma}(x)]$$

Utilizando (VIII.2.15), la cuantificación así obtenida es exactamente igual a la obtenida en el capítulo VII (ver (VII.3.1), (VII.3.8) y (VII.3.16)). A título de ejemplo cuantificaremos una componente de Fourier de $\psi(x)$ y una de $\psi(x)$. Así para $\psi(\vec{n})$ es

$$\psi_{\alpha}^{(\vec{n})}(\vec{n}-\vec{n}') = \frac{2m^2}{\kappa} u_0^{(\vec{n})} [\psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{n}') \psi_{\alpha}(\vec{n}'), \psi_{\alpha}(\vec{n})]$$

o sea

$$[\psi_1^+(\bar{n}'), \psi_1(\bar{n})] = \frac{\hbar}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

Para $\psi_{1,\alpha}(\bar{n})$ es

$$\psi_{1,\alpha\beta}(\bar{n}) \delta(\bar{n} - \bar{n}') = \frac{2}{\hbar} v_0^{(1)'} \tilde{K}^{(1)'} \alpha_i \{ \psi_1^{+\alpha_i}(\bar{n}') \psi_{1,\alpha_i}(\bar{n}'), \psi_{1,\beta}(\bar{n}) \}$$

o

$$\psi_{1,\alpha\beta}(\bar{n}) \delta(\bar{n} - \bar{n}') = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\bar{n}^2 + m^2} \tilde{K}^{(1)'} \alpha_i \{ \psi_1^{+\alpha_i}(\bar{n}') \psi_{1,\beta}(\bar{n}') \} \psi_{1,\alpha_i}(\bar{n}') \quad \text{VIII.2.16}$$

La solución de (VIII.2.16) es precisamente

$$\{ \psi_1^{+\alpha_i}(\bar{n}'), \psi_{1,\beta}(\bar{n}') \} = - \frac{\hbar}{2m^2 \sqrt{\bar{n}^2 + m^2}} v_0^{(1)'} \alpha_i \delta(\bar{n} - \bar{n}')$$

y para comprobarlo sólo hace falta tener en cuenta que

$$v_0^{(1)'} \alpha_i \tilde{K}^{(1)'} \alpha_i = -m^2 \delta_{\beta}^{\alpha_i}$$

También el impulso calculado usando (II.2.1) coincide con (VII.2.7). Para comprobarlo conjugamos (VIII.2.11) para obtener Q_{α}^{\dagger} y hacemos

$$P_{\alpha}^{\dagger} = - \{ Q_{\alpha}, Q^{\dagger \alpha} \}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned}
P_{\alpha}^{\dot{\alpha}} = & \frac{m^2}{\pi} \left\{ u_0^{(1)} u_{\alpha}^{(1)\dot{\alpha}} \{ \psi_1^+(\bar{u}), \psi_1(\bar{u}) \} + u_0^{(2)} u_{\alpha}^{(2)\dot{\alpha}} \{ \psi_2^+(\bar{u}), \psi_2(\bar{u}) \} \right. \\
& - \left[u_0^{(3)} u_{\alpha}^{(3)\dot{\alpha}} \{ \psi_3^+(\bar{u}), \psi_3(\bar{u}) \} + u_0^{(4)} u_{\alpha}^{(4)\dot{\alpha}} \{ \psi_4^+(\bar{u}), \psi_4(\bar{u}) \} \right] H(\bar{u} \geq m^2) \\
& - \left[u_0^{(5)} u_{\alpha}^{(5)\dot{\alpha}} \{ \psi_5^+(\bar{u}), \psi_5(\bar{u}) \} + u_0^{(6)} u_{\alpha}^{(6)\dot{\alpha}} \{ \psi_5^+(\bar{u}), \psi_6(\bar{u}) \} \right] H(m^2 - \bar{u}^2) \left. \right\} d^5k \\
& - \frac{1}{\pi} \left\{ u_0^{(1)} u_{\alpha}^{(1)\dot{\alpha}} \tilde{u}^{(1)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 [\psi_1^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}), \psi_{1\alpha_1}(\bar{u})] + \right. \\
& + u_0^{(2)} u_{\alpha}^{(2)\dot{\alpha}} \tilde{u}^{(2)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 [\psi_2^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}), \psi_{2\alpha_1}(\bar{u})] + \\
& + \left[u_0^{(3)} u_{\alpha}^{(3)\dot{\alpha}} \tilde{u}^{(3)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 [\psi_3^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}), \psi_{3\alpha_1}(\bar{u})] + \right. \\
& + u_0^{(4)} u_{\alpha}^{(4)\dot{\alpha}} \tilde{u}^{(4)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 [\psi_4^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}), \psi_{4\alpha_1}(\bar{u})] \left. \right] H(\bar{u} \geq m^2) \\
& + \left[u_0^{(5)} u_{\alpha}^{(5)\dot{\alpha}} \tilde{u}^{(5)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 [\psi_6^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}), \psi_{5\alpha_1}(\bar{u})] + \right. \\
& + u_0^{(6)} u_{\alpha}^{(6)\dot{\alpha}} \tilde{u}^{(6)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 [\psi_5^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}), \psi_{6\alpha_1}(\bar{u})] \left. \right] H(m^2 - \bar{u}^2) \left. \right\} d^5k + \\
& + \frac{1}{\pi} \left\{ u_0^{(1)} \tilde{u}^{(1)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 \{ \psi_{1\alpha_1}(\bar{u}), \psi_1^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \} + u_0^{(2)} \tilde{u}^{(2)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 \{ \psi_{2\alpha_1}(\bar{u}), \psi_2^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \} + \right. \\
& + \left[u_0^{(3)} \tilde{u}^{(3)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 \{ \psi_{3\alpha_1}(\bar{u}), \psi_3^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \} + u_0^{(4)} \tilde{u}^{(4)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 \{ \psi_{4\alpha_1}(\bar{u}), \psi_4^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \} \right] H(\bar{u} \geq m^2) \\
& + \left[u_0^{(5)} \tilde{u}^{(5)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 \{ \psi_{5\alpha_1}(\bar{u}), \psi_6^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \} + \right. \\
& + u_0^{(6)} \tilde{u}^{(6)}_{\dot{\alpha}_1} \alpha_1 \{ \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}), \psi_5^{+\dot{\alpha}_1}(\bar{u}) \} \left. \right] H(m^2 - \bar{u}^2) \left. \right\} d^5k
\end{aligned}$$

(VIII . 2.17)

Utilizando las igualdades

$$\begin{aligned}
 & \int \left\{ u_0^{(1)} \tilde{u}^{(1)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_{1\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{1+\alpha_1}(\bar{u}) \right\} + \right. \\
 & \left. + u_0^{(2)} \tilde{u}^{(2)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_{2\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{2+\alpha_1}(\bar{u}) \right\} \right\} d^5 u = \\
 & = -\frac{1}{4m^2} \int \left\{ u_0^{(1)} u_{\alpha}^{(1)} \tilde{u}^{(1)}_{\alpha_1} \tilde{u}^{(1)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_{1\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), \psi_{1+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right. \\
 & \left. + u_0^{(2)} u_{\alpha}^{(2)} \tilde{u}^{(2)}_{\alpha_1} \tilde{u}^{(2)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_{2\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), \psi_{2+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right\} d^5 u \quad (\text{VIII. 2.18}) \\
 & \int \left\{ u_0^{(3)} \tilde{u}^{(3)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_{3\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{3+\alpha_1}(\bar{u}) \right\} + \right. \\
 & \left. + u_0^{(4)} \tilde{u}^{(4)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_{4\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{4+\alpha_1}(\bar{u}) \right\} \right\} H(\bar{u}^2 - mc^2) d^5 u \\
 & = \frac{1}{4m^2} \int \left\{ u_0^{(3)} u_{\alpha}^{(3)} \tilde{u}^{(3)}_{\alpha_1} \tilde{u}^{(3)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_{3\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), \psi_{3+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right. \\
 & \left. + u_0^{(4)} u_{\alpha}^{(4)} \tilde{u}^{(4)}_{\alpha_1} \tilde{u}^{(4)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_{4\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), \psi_{4+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right\} H(\bar{u}^2 - mc^2) d^5 u \quad (\text{VIII. 2.19}) \\
 & \int \left\{ u_0^{(5)} \tilde{u}^{(5)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_{5\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{5+\alpha_1}(\bar{u}) \right\} + \right. \\
 & \left. + u_0^{(6)} \tilde{u}^{(6)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_{6\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{6+\alpha_1}(\bar{u}) \right\} \right\} H(m^2 - \bar{u}^2) d^5 u =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4m^2} \int \left\{ u_0^{(5)} u^{(5)}_{\alpha} \tilde{u}^{(5)}_{\alpha_1} u_0^{(5)} u^{(5)}_{\alpha_2} \tilde{u}^{(5)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_{5\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), \psi_{6+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) \right\} + \right. \\
&\quad \left. + u_0^{(6)} u^{(6)}_{\alpha} \tilde{u}^{(6)}_{\alpha_1} u_0^{(6)} u^{(6)}_{\alpha_2} \tilde{u}^{(6)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_{6\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}), \psi_{5+\alpha_1\alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right\} H(m^2\bar{u}^2) d^5\bar{u} \\
&\hspace{20em} (\text{VIII.2.20})
\end{aligned}$$

y reemplazándolas en (VIII.2.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
P_{\alpha}^{\dot{\alpha}} &= \frac{m^2}{\hbar} \int \left\{ u_0^{(1)} u^{(1)}_{\alpha} \tilde{u}^{(1)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_1^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_1(\bar{u}) \right\} + u_0^{(2)} u^{(2)}_{\alpha} \tilde{u}^{(2)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_2^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_2(\bar{u}) \right\} \right. \\
&\quad - \left[u_0^{(3)} u^{(3)}_{\alpha} \tilde{u}^{(3)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_3^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_3(\bar{u}) \right\} + u_0^{(4)} u^{(4)}_{\alpha} \tilde{u}^{(4)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_4^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_4(\bar{u}) \right\} \right] H(\bar{u}^2 - m^2) \\
&\quad - \left[u_0^{(5)} u^{(5)}_{\alpha} \tilde{u}^{(5)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_5^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_5(\bar{u}) \right\} + u_0^{(6)} u^{(6)}_{\alpha} \tilde{u}^{(6)}_{\alpha_1} \left\{ \psi_6^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_6(\bar{u}) \right\} \right] H(m^2\bar{u}^2) \Big\} d^5\bar{u} \\
&\quad - \frac{1}{\hbar} \int \left\{ u_0^{(1)} u^{(1)}_{\alpha} \tilde{u}^{(1)}_{\alpha_1} \left[\psi_1^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{1\alpha_1}(\bar{u}) \right] \right. \\
&\quad + u_0^{(2)} u^{(2)}_{\alpha} \tilde{u}^{(2)}_{\alpha_1} \left[\psi_2^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{2\alpha_1}(\bar{u}) \right] + \\
&\quad \left[u_0^{(3)} u^{(3)}_{\alpha} \tilde{u}^{(3)}_{\alpha_1} \left[\psi_3^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{3\alpha_1}(\bar{u}) \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[u_0^{(4)} u^{(4)}_{\alpha} \tilde{u}^{(4)}_{\alpha_1} \left[\psi_4^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{4\alpha_1}(\bar{u}) \right] \right] H(\bar{u}^2 - m^2) + \right. \\
&\quad \left. \left[u_0^{(5)} u^{(5)}_{\alpha} \tilde{u}^{(5)}_{\alpha_1} \left[\psi_6^{+\alpha_1}(\bar{u}), \psi_{5\alpha_1}(\bar{u}) \right] + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{0\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \int \left\{ u^{(3)}_{\alpha} \dot{u}^{(3)}_{\alpha\gamma} \left\{ \psi_3^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right. \\
& \left. + u^{(4)}_{\alpha} \dot{u}^{(4)}_{\alpha\gamma} \left\{ \psi_4^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right\} H(\bar{u}^2 - u^2) d^5 u \\
& = \frac{1}{4\pi u^2} \int \left\{ u_0^{(3)} u_{\alpha}^{(3)} \dot{u}^{(3)}_{\alpha_1} \dot{u}^{(3)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_3^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{3\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right. \\
& \left. + u_0^{(4)} u_{\alpha}^{(4)} \dot{u}^{(4)}_{\alpha_1} \dot{u}^{(4)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_4^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{4\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right\} H(\bar{u}^2 - u^2) d^5 u \\
& \hspace{25em} (\text{VIII.2.23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{0\alpha_3}^{\dot{\alpha}_3} \int \left\{ u^{(5)}_{\alpha} \dot{u}^{(5)}_{\alpha\gamma} \left\{ \psi_5^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right. \\
& \left. + u^{(6)}_{\alpha} \dot{u}^{(6)}_{\alpha\gamma} \left\{ \psi_6^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right\} H(u^2 - \bar{u}^2) d^5 u \\
& = \frac{1}{4\pi u^2} \int \left\{ u_0^{(5)} u_{\alpha}^{(5)} \dot{u}^{(5)}_{\alpha_1} \dot{u}^{(5)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_5^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{5\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right. \\
& \left. + u_0^{(6)} u_{\alpha}^{(6)} \dot{u}^{(6)}_{\alpha_1} \dot{u}^{(6)}_{\alpha_2} \left\{ \psi_6^{+\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}(\bar{u}), \psi_{6\alpha_1 \alpha_2}(\bar{u}) \right\} \right\} H(u^2 - \bar{u}^2) d^5 u \\
& \hspace{25em} (\text{VIII.2.24})
\end{aligned}$$

y reemplazándolas en (VII.2.7) obtenemos también (VIII.2.21). Por lo tanto el impulso calculado con la carga supersimétrica (VIII.2.17) coincide con el impulso calculado en forma canónica (VII.2.7).

CAPITULO IX

CONCLUSIONES

Daremos ahora un breve resumen de los resultados obtenidos en este trabajo de tesis. En primer lugar dimos una reseña de la supersimetría seis-dimensional y los procedimientos lagrangianos de orden superior. A continuación pasamos a cuantificar el campo del taquión escalar con un procedimiento distinto al habitual. La razón de haber utilizado dicho procedimiento está basada en que la variedad que define la frecuencia de un taquión es un hiperboloide de una hoja en lugar de uno de dos hojas como sucede para un bradión. Para un bradión cada una de las hojas del hiperboloide es invariante por una transformación de L^2 y esto obliga a exigir $a(\vec{n})|0\rangle = 0$ ya que no se puede pasar de una hoja a la otra. Para un taquión por el contrario no se puede exigir $a(\vec{n})|0\rangle = 0$ pues podemos pasar de un estado de energía positiva a uno de energía cero y de este a uno de energía negativa. Como la invariancia de Lorentz debe ser mantenida se debe cumplir $P_{\mu}|0\rangle = 0$ y es equivalente a $\{a(\vec{n}), a^{\dagger}(\vec{n})\}|0\rangle = 0$ $\vec{n}^2 > m^2$ que no es otra cosa que la ecuación utilizada para obtener los estados del campo. Lo mismo sucede con $m^2 > \vec{n}^2$ sólo que en este caso la variedad que define la frecuencia es una esfera. Una vez hecho esto calculamos los valores medios de vacío necesarios para obtener el propagador. Al obtener éste concluimos que el taquión ha sido eliminado de la capa de masa y eso nos permite sacar al taquión de los estados asintóticos en la matriz S. En este propagador al no haber suprimido el aporte de la zona $m^2 > \vec{n}^2$ aparece un término $\pi \delta_{\pm}(\vec{n}^2 - m^2)$ siendo esta $\delta_{\pm}(\vec{n}^2 - m^2)$ la responsable del cumplimiento de las relaciones de unitariedad para la autoenergía en el modelo escalar simplificado. Por último la invariancia de Poincaré es demostrada usando la teoría de funcionales analíticas (distribuciones complejas). La obtención de una cuantificación consistente e invariante de Poincaré es el primer aporte original de esta tesis. La utilización de un procedimiento de regularización con funcionales analíticas es el segundo aporte original.

Un párrafo aparte merece el espacio de Hilbert Equipado en el cual están definidas las soluciones de las ecuaciones de movimiento para el taquión. Este espacio $(W_{\mu, \nu, \rho, \sigma} | L^2, W_{\mu, \nu, \rho, \sigma} | L^2)$ generaliza al utilizado en la teoría de campos para bradiones (distribuciones de tipo S, referencia [11]) y es otro aporte original.

En el capítulo V, antes de pasar a estudiar el modelo supersimétrico de Wess-Zumino, tratamos el modelo escalar simplificado. Para dicho modelo y para su autoenergía mostramos que se verifican las relaciones de unitariedad a un loop mediante el uso de funcionales analíticas y en el capítulo VI mostramos la renormalizabilidad del modelo. Este es otro aporte original.

En el capítulo VII estudiamos el modelo de Wess-Zumino y damos un método para la diagonalización de las relaciones de conmutación, lo que nos permite redefinir las componentes de Fourier de los campos y expresar a éstos en componentes que tienen relaciones de conmutación diagonales, de modo que podemos identificar la métrica del espacio de Hilbert. Estos son también aportes originales.

En el capítulo VIII estudiamos la posibilidad de extender el principio variacional de Schwinger-Feynman a teorías de campos supersimétricas de orden superior, llegando a concluir que esto es posible para el modelo que estamos considerando y que para él

las cuantificaciones canónica y supersimétrica coinciden. Este es otro aporte original. Finalmente damos un breve panorama de la investigación que se está llevando a cabo. Ya se está trabajando en un modelo simplificado de dimensión mayor que seis. En este modelo, además de haber bradiones y taquiones, hay partículas de masa compleja. Ya ha sido realizada la cuantificación de este modelo.

Estamos explorando, además, nuevas soluciones para las ecuaciones de movimiento, tanto para taquiones como para bradiones en el espacio $(w_{x^2, z, t}, w_{x^2, z, t}^*)$.

Queda también por investigar el problema de la existencia de relaciones de dispersión para el modelo descrito. Por ser el propagador del taquión puramente dispersivo, las relaciones de dispersión usuales no son válidas para el modelo estudiado aquí, lo que no significa que no existan estas relaciones para ecuaciones de orden superior.

APENDICE A

MATEMATICA DE LA TEORIA

0_INTRODUCCION

El motivo de la introducción de este apéndice es la necesidad de dar un marco matemático adecuado a la teoría de campos que hemos desarrollado. En él se muestran distintas a las habitualmente utilizadas en teoría de campos. Ellas son las distribuciones de tipo W y los espacios de Hilbert Equipados (también conocidos como Tríadas Hilbertianas).

1_DEFINICIONES Y TEOREMAS

Definición 1. Espacio vectorial topológico T [18]

Se llama espacio vectorial topológico T a un conjunto Φ que verifica los siguientes axiomas:

- 1) Φ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales R (o complejos C).
- 2) Φ es un espacio topológico T_1 .
- 3) La suma de los elementos de Φ y su multiplicación por números reales (o complejos) son operaciones continuas con respecto a la topología del espacio Φ .

Recordemos que un espacio topológico T_1 es un conjunto Φ del cual se puede obtener un sistema de subconjuntos $\{U\}$ llamados vecindades abiertas que verifican:

- 1) Todo punto $\varphi \in \Phi$ pertenece a cierta vecindad
- 2) Si el punto φ pertenece a dos vecindades U y V, entonces él pertenece a una vecindad W, enteramente contenida en la intersección de U y V.
- 3) Para todo par de puntos $\varphi \neq \psi$ existe una vecindad $U(\varphi)$ conteniendo al punto φ y no conteniendo al punto ψ .

Definición 2. Espacio perfecto [18]

Un espacio perfecto es un espacio normado numerable, en el cual todo conjunto acotado es relativamente compacto.

Definición 3. Formas lineales sobre un espacio normado [18]

Consideremos un espacio normado completo Φ y su dual Φ^* .

Una familia de formas lineales y continuas f_λ dependientes de un parámetro $\lambda \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ posee por definición una variación fuertemente acotada en λ si para toda partición

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = b$$

se tiene

$$\sum_{j=0}^{n-1} \|f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j}\| < c$$

Sea ahora \mathcal{E} un espacio normado numerable. Sea \mathcal{E}_p la completación de \mathcal{E} según la norma $\| \cdot \|_p$

La familia de formas lineales f_λ definida sobre un espacio normado numerable \mathcal{E} , posee por definición una variación fuertemente acotada en λ si existe un número p tal que la forma lineal f_λ pertenece para todo λ al espacio \mathcal{E}_p^* , y f_λ posee una variación fuertemente acotada en λ respecto de la norma de \mathcal{E}_p , de tal suerte que se tiene

$$\sum_{j=0}^{n-1} \| f_{\lambda_{j+1}} - f_{\lambda_j} \|_p < c$$

Se dice además que f_λ es de variación débilmente acotada sobre $[a,b]$ si para cada $\phi \in \mathcal{E}$ es

$$\sum_{j=0}^{n-1} | f_{\lambda_{j+1}}(\phi) - f_{\lambda_j}(\phi) | < c \phi$$

donde la constante $c\phi$ depende sólo de ϕ .

Definición 4. Espacio nuclear [18].

Un espacio normado es nuclear o un N-espacio si toda familia de formas lineales y continuas f_λ sobre \mathcal{E} , a variación débilmente acotada en λ , lo es también a variación fuertemente acotada.

Definición 5. Espacio $\mathcal{K}\{M_p\}$ [18].

Sea la sucesión de funciones

$$1 \leq M_0(x) \leq M_1(x) \leq \dots \leq M_p(x) \leq \dots$$

definidas en \mathbb{R}^N a valores finitos o infinitos. Supondremos que el comportamiento en el infinito de estas funciones es el mismo simultáneamente para todos los p y que en todo punto donde ellas son acotadas, son continuas.

El espacio $\mathcal{K}\{M_p\}$ es el conjunto de todas las funciones indefinidamente derivables tales que los productos

$$M_p(x) D^q \phi(x) \quad |q| \leq p \quad p \in \mathbb{N}$$

son continuos y acotados en todo el espacio y donde

$$D^q = \frac{\partial^{q_1 + q_2 + \dots + q_N}}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \dots \partial x_N^{q_N}} \quad q = q_1 + q_2 + \dots + q_N$$

Definimos además

$$\|\phi\|_p = \sup_x \max_{|q| \leq p, p \in \mathbb{N}} M_p(x) |D^q \phi(x)|$$

Definición 6. Espacio S [18],[24].

El espacio S está formado por funciones ϕ indefinidamente derivables que verifican

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^p |D^q \phi(x)| = 0$$

para p y q arbitrarios y D dada en la definición 5.

El espacio S es un caso particular de $\mathcal{U}(M_p)$ con sólo tomar

$$M_p(x) = \sup_{k \leq p} |x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N}| \quad k_1 + k_2 + \dots + k_N = p$$

La norma en S_p es

$$\|\phi\|_p = \sup_x \max_{|q| \leq p} |D^q \phi(x)| \quad p \in \mathbb{N}$$

Definición 7. Espacio $W_{m,a}$ [18].

Sea $\mu(\varepsilon)$ ($0 \leq \varepsilon \leq \infty$) una función continua creciente con

$$\mu(0) = 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mu(\varepsilon) = \infty$$

Sea para $x \geq 0$

$$M(x) = \int_0^x \mu(\varepsilon) d\varepsilon$$

$M(x)$ es una función convexa, creciente, continua y

$$M(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \infty$$

Definimos para $x < 0$ $M(x) = M(-x)$

Designamos por $W_{M,a}$ el conjunto de funciones indefinidamente derivables que satisfacen

$$|D^q \phi(x)| \leq C_q e^{-M(\bar{a}x)} \quad \forall q > 0 \quad q \in \mathbb{N}$$

y \bar{a} es una constante inferior a a .

$W_{M,a}$ es un caso particular de $W\{M, \rho\}$ eligiendo

$$M_\rho(x) = e^{M\left[a\left(1 - \frac{1}{\rho+2}\right)x\right]} \quad 0 \leq \rho \in \mathbb{N}$$

La norma en $W_{M,a,\rho}$ es

$$\|\phi\|_\rho = \sup_{|q| \leq \rho} \sup_x e^{M\left[\bar{a}\left(1 - \frac{1}{\rho+2}\right)x\right]} |D^q \phi(x)| \quad \rho \in \mathbb{N}$$

Definición 8. Espacio $W^{\Omega, \beta}$ [18].

Sea $\omega(\eta)$ ($0 < \eta < \infty$) una función monótona creciente

$$\omega(0) = 0 \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \omega(\eta) = \infty$$

Sea para $y \geq 0$

$$\Omega(y) = \int_0^y \omega(\eta) d\eta$$

$\Omega(y)$ es una función convexa, creciente, continua y

$$\Omega(0) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \Omega(y) = \infty$$

Para $y < 0$ definimos $\Omega(y) = \Omega(-y)$

El espacio $\mathcal{W}^{\Omega, b}$ está formado por funciones enteras (funciones uniformes y analíticas en todo el plano exceptuando el punto del infinito) que verifican para $p > 0$

$$|z^n \phi(z)| \leq C_{kp} e^{\Omega[(b+p)y]}$$

La norma en $\mathcal{W}_{kp}^{\Omega, b}$ se define mediante

$$\|\phi\|_{kp} = \sup_z |z^n \phi(z)| e^{-\Omega[(b+p)y]}$$

Definición 9. Condición (P) [18].

Decimos que la sucesión de funciones $1 \leq M_0(x) \leq M_1(x) \leq \dots \leq M_p(x) \leq \dots$ satisface la condición (P) si para $p > 0$ dado, existe p' tal que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar N tal que si $|x| > N$ donde

$M_p(x) > N$ entonces $M_p(x) < \varepsilon M_{p'}(x)$. Si en particular $M_p(x)$ es acotada sobre todo dominio acotado, entonces la condición (P) toma la forma

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)} = 0$$

Definición 10. Condición (N) [18].

Decimos que la sucesión de funciones $1 \leq M_0(x) \leq M_1(x) \leq \dots \leq M_p(x) \leq \dots$ satisface la condición (N) si para cada p existe $p' > p$ tal que

$$\frac{M_{p'}(x)}{M_p(x)} = M_{p'p}(x)$$

es una función sumable.

Teorema 1 [18].

- 1) El espacio $K\{M_p\}$ es perfecto si verifica la condición (P).
- 2) El espacio S es perfecto.
- 3) El espacio $W_{M,A}$ es perfecto

Teorema 2 [18]

- 1) El espacio $K\{M_p\}$ es nuclear si verifica la condición (N).
- 2) El espacio S es nuclear.
- 3) El espacio $W_{M,A}$ es nuclear.

Para su posterior generalización con la teoría de distribuciones enunciamos el

Teorema 3: Ritz [22], [23].

Toda funcional sobre un espacio de Hilbert H se puede escribir como

$$f(x) = \langle x_0, x \rangle$$

Definición 11

Sea H un espacio de Hilbert. El dual de H , H^* se define como

$$H^* = \left\{ f: H \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal} \right\}$$

Sean

$$x = \sum_i x_i e_i$$

$$\bar{z} = \sum_i \bar{x}^i e_i$$

donde la barra significa conjugación y $\{e_i\}$ es la base canónica de H . Definimos

$$f_{\bar{z}} \in H^*$$

por

$$f_{\bar{z}}(y) = \langle z, y \rangle$$

Podemos escribir

$$f_{\bar{z}} = \sum_i \bar{x}^i f_{e_i}$$

Definiendo

$$\|f_{\bar{z}}\| = \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{|f_{\bar{z}}(y)|}{\|y\|}$$

es

$$\|f_{\bar{z}}\| = \|z\|$$

Además

$$f_{\overline{z+y}} = f_{\bar{z}} + f_{\bar{y}}$$

$$f_{\overline{\lambda z}} = \bar{\lambda} f_{\bar{z}}$$

$$\overline{(f_{\bar{z}})} = f_z$$

$$\overline{(f\bar{x} + f\bar{y})} = f\bar{x} + f\bar{y}$$

$$\overline{(f\lambda\bar{x})} = \bar{\lambda} f\bar{x}$$

En H^* definimos

$$\langle f\bar{x}, f\bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$$

Se puede probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en H^* , que H^* es un espacio de Hilbert y que $\{f\bar{e}_n\}$ es una base de H^* .

Definición [12], [22], [23].

Sea $g: H_2 \rightarrow K$ lineal y continua. Sea $A: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal (H_1 y H_2 espacios de Hilbert). Definimos el operador traspuesto A^t del operador A como

$$A^t: H_2^* \rightarrow H_1^*$$

$$A^t g = g \circ A$$

Definición 13. [22], [23].

Definimos $F: H \rightarrow H^*$ mediante

$$F(\bar{x})(\bar{y}) = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

Luego

$$F(\bar{x}) = f\bar{x}$$

$F^{-1}: H^* \rightarrow H$ está dada por

$$\langle F^{-1}(g), \bar{x} \rangle = g(\bar{x})$$

Definición 14. [22], [23].

Sea $A: H \rightarrow H$ un operador lineal. Luego $A^t: H^* \rightarrow H^*$
Sabemos que

$$F^{-1}: H^* \rightarrow H \quad F: H \rightarrow H^*$$

Se define el operador adjunto de A , A^+ como

$$A^+: H \rightarrow H$$

$$A^+ = F^{-1} A^t F$$

Definición 15. [22], [23].

Se define el operador conjugado $A^*: H^* \rightarrow H^*$ del operador A como

$$A^* = (A^+)^t$$

Veamos ahora como actúan los operadores A , A^+ , A^t , y A^* . Así para A^t es

$$A^t f_{\bar{x}} = f_{\bar{x}} A$$

$$\begin{aligned} (A^t f_{\bar{x}})(\varphi) &= f_{\bar{x}}(A\varphi) = \langle \bar{x}, A\varphi \rangle = \\ &= \langle A^+\bar{x}, \varphi \rangle = f_{(A^+\bar{x})}(\varphi) \end{aligned}$$

Luego

$$\varphi = A^+\bar{x} \iff f_{\bar{x}} = f_{\bar{x}} A$$

que en notación de Dirac es

$$|\varphi\rangle = A^+ |\bar{x}\rangle \iff \langle \varphi | = \langle \bar{x} | A$$

$$\begin{aligned} (A^* f_{\bar{x}})(\bar{y}) &= f_{\bar{x}}(A^+ \bar{y}) = \langle \bar{x}, A^+ \bar{y} \rangle = \\ &= \langle A \bar{x}, \bar{y} \rangle = f_{\overline{(A \bar{x})}}(\bar{y}) \end{aligned}$$

Luego

$$\bar{y} = A \bar{x} \iff f_{\bar{y}} = f_{\bar{x}} A^+$$

Definición 16. [18].

Llamaremos espacio fundamental o básico a un espacio vectorial topológico T_x, Φ formado por funciones $\phi(x)$ definidas sobre un cierto conjunto R . Dicho conjunto R será el espacio Euclideo n -dimensional R^n o el espacio complejo C^n .

Definición 17. [18].

Llamaremos distribuciones a las funcionales lineales continuas sobre un espacio fundamental cualquiera Φ .

Teorema 4. [18].

Toda funcional lineal y continua sobre el espacio $\Phi = \{ \phi \mid \phi \in \Phi \}$ es de la forma

$$F(\phi) = \langle f, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq p} \int M_\alpha(x) D^\alpha \phi(x) d\sigma(x)$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$$

Esta expresión incluye a los espacios S y $W_{M,p}$.

Definición 18. [18].

Se define la derivada de una distribución como

$$\frac{\partial F(\phi)}{\partial x_j} = - F\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)$$

o

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle$$

Definición 19. [18].

La transformada de Fourier de una función fundamental es

$$\hat{\phi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-i\alpha x} dx$$

podemos invertir la fórmula anterior y obtener

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Definición 20. [18].

Definimos la transformada de Fourier de una distribución F, \hat{F} , como

$$\hat{F}(\hat{\phi}) = (2\pi)^N F(\phi)$$

o

$$\langle \hat{f}, \hat{\phi} \rangle = (2\pi)^N \langle f, \phi \rangle$$

Hasta este momento no hemos considerado a las distribuciones complejas definidas por el espacio fundamental $\mathcal{W}^{q,1,b}$. Lo haremos ahora.

Definición 21. [18].

Llamaremos funcional analítica del espacio $W^{\alpha, b}$ a la funcional

$$G(\phi) = \langle g, \phi \rangle = \int_{\Gamma} g(z) \phi(z) dz$$

donde $g(z)$ es una cierta función y el contorno Γ rodea todos los puntos singulares de $g(z)$

Definición 22. [18].

Se define la derivada de una funcional analítica como

$$\frac{\partial G}{\partial z_j}(\phi) = - G\left(\frac{\partial \phi}{\partial z_j}\right)$$

donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_j} = \lim_{\Delta z_j \rightarrow 0} \frac{\phi(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + \Delta z_j, \dots, z_N) - \phi(z_1, \dots, z_N)}{\Delta z_j}$$

Definición 23. [18].

Sean $M(x)$ y $\Omega(x)$ dadas por las definiciones 7 y 8. Decimos que M y Ω son duales en el sentido de Young si

$$\mu[\omega(\eta)] = \eta \quad \text{y} \quad \omega[\mu(\varepsilon)] = \varepsilon$$

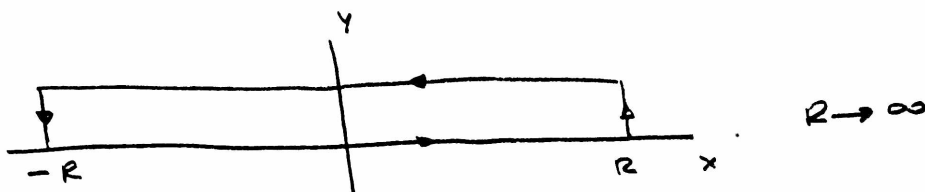
Las funciones fundamentales $\phi \in W_{M, \Omega}$ decrecen para $|x| \rightarrow \infty$ más rápido que $e^{-\lambda|x|}$ $\forall \lambda > 0$ lo que nos permite extender su transformada de Fourier al dominio complejo $s = \alpha + i\sigma$ y escribir

$$\hat{\phi}(s) = \hat{\phi}(\alpha + i\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{i(\alpha + i\sigma)x} dx$$

Sea ahora $\phi(z) \in \mathcal{W}^{\Omega, b}$. La función $\phi(z)$ tiende a cero para $|z| \rightarrow \infty$ más rápido que toda potencia de $|z|$ y uniformemente en $|y| \leq y_0$. Por lo tanto aplicando la fórmula de Cauchy a la transformada de Fourier

$$\hat{\phi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{i\alpha x} dx$$

con el contorno



obtenemos

$$\hat{\phi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+iy) e^{i\alpha(x+iy)} dx$$

Con estas nociones se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5. [18].

Si llamamos $\tilde{W}_{M, a}$ y $\tilde{W}^{\Omega, b}$ a los espacios transformados por Fourier de $W_{M, a}$ y $W^{\Omega, b}$ y si $M(x)$ y $\Omega(y)$ son duales en el sentido de Young entonces

$$\tilde{W}_{M, a} = W^{\Omega, 1/a}$$

$$\tilde{W}^{\Omega, b} = W_{M, 1/b}$$

De este teorema se deduce que $\tilde{W}_{M, a}^* = W^{\Omega, 1/a^*}$ y $\tilde{W}^{\Omega, b^*} = W_{M, 1/b^*}$
Una distribución es representada como

$$F(\phi) = \int f(x) \phi(x) d\sigma(x)$$

Llamaremos Φ^1 al espacio de los representativos $f(x)$. Tenemos así tres espacios

$$\Phi, \Phi^1 \text{ y } \Phi^*$$

Definición 24. Espacio de Hilbert contable [18].

Sea \mathfrak{F} un espacio lineal. Supongamos dado en \mathfrak{F} un sistema contable de productos escalares $\langle \psi, \phi \rangle_N (\psi, \phi \in \mathfrak{F})$ en los cuales son compatibles en el siguiente sentido: si una secuencia $\{\phi_n\}$ de elementos de \mathfrak{F} converge a cero en la norma $\|\phi\|_m = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_m}$ y es una secuencia fundamental en la norma $\|\phi\|_N$

entonces ella también converge a cero en la norma $\|\phi\|_N$.

Introduzcamos una topología en \mathfrak{F} tomando como una base completa de vecindades de cero en \mathfrak{F} todos los conjuntos U_{ϵ} definidos por $\phi \in U_{\epsilon}$ si $\|\phi\|_N < \epsilon$. Decimos entonces que junto con la dada colección contable de productos es un espacio de Hilbert contable si es completo. Por completo entendemos a \mathfrak{F} completo como espacio métrico definido por la métrica

$$\|\phi\| = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|\phi\|_N}{1 + \|\phi\|_N}$$

Denotaremos por \mathfrak{F}_N la completación de \mathfrak{F} relativa al producto escalar $\langle \psi, \phi \rangle_N$. Obsérvese que \mathfrak{F}_N es un espacio de Hilbert ya que \mathfrak{F} es completo con respecto a la norma N . Daremos ahora una definición de espacio nuclear equivalente a la definición 4.

Definición 25 [18].

Sea \mathfrak{F} un espacio de Hilbert contable y sea \mathfrak{F}_N su completación por la norma $\|\phi\|_N = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle_N}$. Supondremos que $\langle \phi, \phi \rangle_m \leq \langle \phi, \phi \rangle_N$ si $m \leq n$. Llamaremos $\phi^{(n)}$ y $\phi^{(m)}$ al elemento $\phi \in \mathfrak{F}$ considerado como elemento de \mathfrak{F}_N y \mathfrak{F}_m respectivamente. De esto se sigue que la aplicación $\epsilon_m^N : \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_N \rightarrow \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_m$

es continua, donde ϵ_m^N viene dada por $\epsilon_m^N \phi^{(n)} = \phi^{(m)}$. Extendemos ahora ϵ_m^N a una aplicación $T_m^N : \mathfrak{F}_N \rightarrow A \subset \mathfrak{F}_m$ donde A es denso en \mathfrak{F}_m .

Decimos que un espacio de Hilbert contable \mathfrak{F} es nuclear si para cualquier m hay un n tal que la aplicación T_m^N es nuclear, es decir

$$T_m^N \phi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \phi, \phi_k \rangle_N \psi_k \quad \phi \in \mathfrak{F}_N$$

donde $\{\phi_k\}$ y $\{\psi_k\}$ son sistemas de vectores ortogonales en los espacios \mathfrak{F}_N y \mathfrak{F}_m respectivamente, $\lambda_k > 0$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ converge.

Definición 26. Espacio de Hilbert Equipado [18].

Supongamos que en un espacio de Hilbert contable nuclear \mathfrak{F} , definido por los productos escalares $\langle \phi, \psi \rangle_N$, hay definido otro producto escalar continuo en cada

variable, esto es, un producto $\langle \psi, \phi \rangle$ tal que

$$1) \langle \psi, \phi_1 + \phi_2 \rangle = \langle \psi, \phi_1 \rangle + \langle \psi, \phi_2 \rangle$$

$$2) \langle \psi, \lambda \phi \rangle = \lambda \langle \psi, \phi \rangle$$

$$3) \langle \psi, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, \psi \rangle}$$

$$4) \langle \phi, \phi \rangle \geq 0 \text{ y } \langle \phi, \phi \rangle = 0 \text{ sólo cuando } \phi = 0.$$

$$5) \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi, \phi_n \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$$

Construimos ahora un espacio de Hilbert H completando Φ respecto de la norma $\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}$. Φ es denso en H , por lo que podemos definir un operador lineal continuo T dado por $T: \Phi \rightarrow H$ $T\phi = \psi$. Consideremos ahora el dual de Φ , Φ^* . Sea $T^t: H^* \rightarrow \Phi^*$ dada por

$$(T^t f_{\bar{x}})(\phi) = f_{\bar{x}}(T\phi) = \langle \bar{x}, T\phi \rangle \quad \bar{x} \in H$$

Definimos

$$T': H \rightarrow \Phi^*$$

mediante

$$T'(\bar{x}) = T^t(f_{\bar{x}})$$

T' es antilineal. En efecto

$$\begin{aligned} T'(\lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{y}) &= T^t \left[f_{\overline{(\lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{y})}} \right] = T^t \left(\overline{\lambda_1} f_{\bar{x}} + \overline{\lambda_2} f_{\bar{y}} \right) = \\ &= \overline{\lambda_1} T^t f_{\bar{x}} + \overline{\lambda_2} T^t f_{\bar{y}} = \overline{\lambda_1} T'(\bar{x}) + \overline{\lambda_2} T'(\bar{y}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau' \tau: \Phi \rightarrow \Phi^*$ también es antilineal.

Llamaremos al triple de espacios $\Phi \subset H \subset \Phi^*$, teniendo las propiedades establecidas anteriormente (Φ un espacio nuclear de Hilbert contable en el cual hay definido un producto escalar no degenerado, H la completación de Φ por ese producto escalar y Φ^* el dual de Φ) un espacio de Hilbert equipado.

Definición 27.

Sea $F_{\bar{x}} \in \Phi^*$. $F_{\bar{x}}$ define en Φ un elemento \bar{x} vía

$$F_{\bar{x}}(\phi) = \int \bar{x}(x) \phi(x) d\sigma(x) = \langle \bar{x}, \phi \rangle \quad \phi \in \Phi$$

Definimos por lo tanto

$$A^t: \Phi^* \rightarrow \Phi^*$$

como

$$A^t F_{\bar{x}} = F_{\bar{x}} A$$

y

$$A^*: \Phi^* \rightarrow \Phi^*$$

como

$$A^* = (A^t)^t$$

de tal forma que

$$A^* F_{\bar{x}} = F_{\bar{x}} A^t$$

Vemos así que si A es simétrico o sea $D(A^t) \subset D(A^*)$ es en $D(A^t)$

$$A^t = A^*$$

Se puede definir la extensión $\tilde{A}: \Phi' \rightarrow \Phi'$ de A como

$$F_{(\tilde{A}\tilde{x})} = F_{\tilde{x}} A^+ \quad \tilde{x} \in \Phi'$$

o sea

$$F_{(\tilde{A}\tilde{x})}(\phi) = F_{\tilde{x}}(A^+\phi) \quad \phi \in \Phi$$

que en Φ' es

$$\langle \tilde{A}\tilde{x}, \phi \rangle = \langle \tilde{x}, A^+\phi \rangle$$

y podemos definir \tilde{A}^+ como

$$F_{(\tilde{A}^+\tilde{x})} = F_{\tilde{x}} A$$

o sea

$$F_{(\tilde{A}^+\tilde{x})}(\phi) = F_{\tilde{x}}(A\phi)$$

que en Φ' es

$$\langle \tilde{A}^+\tilde{x}, \phi \rangle = \langle \tilde{x}, A\phi \rangle$$

Vemos así que si A es simétrico

$$\langle \tilde{A}^+\tilde{x}, \phi \rangle = \langle \tilde{A}\tilde{x}, \phi \rangle \quad \text{en } D(\tilde{A}^+)$$

Observese que como $D(A) \subset D(A^+) \implies D(A^+) \subset D(\tilde{A})$
 Si A es autoadjunto sobre Φ entonces \tilde{A} es autoadjunto sobre Φ' y

$$A^t = A^* \quad \text{en } \Phi^*$$

Definición 28.

Sea $A^*: \Phi^* \rightarrow \Phi^*$ y $F_{e_r} \in \Phi^*$. Decimos que F_{e_r} es una funcional propia correspondiente al valor propio λ_r del operador A^* si

$$A^* F_{e_r} = \lambda_r F_{e_r} \implies F(\tilde{A} e_r) = F(\lambda_r e_r)$$

por lo que en Φ' es

$$\tilde{A} e_r = \bar{\lambda}_r e_r$$

con lo que los valores propios de \tilde{A} son los conjugados de los valores propios de A^* .

Teorema 6. (Guelfand) [18].

Sea (Φ, H, Φ^*) un espacio de Hilbert equipado. Si el operador lineal y simétrico A operando sobre el espacio Φ admite un prolongamiento al espacio H que es un operador autoadjunto, entonces A^* admite sobre el espacio Φ^* un sistema completo de funcionales propias $\{F_{e_r}\}$ con valores propios reales (o \tilde{A} admite sobre Φ' un sistema completo de "distribuciones" propias $\{e_r\}$ con valores propios reales).

El sistema de funcionales $\{F_{e_r}\}$ ("distribuciones" $\{e_r\}$) es completo en el sentido que cualquier $F_\phi \in \Phi^*$ con $\phi \in \Phi$ se puede escribir como

$$F_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_{e_r}(\phi)} F_{e_r} d\sigma(r)$$

que en Φ' es

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e_r, \phi \rangle e_r d\sigma(r)$$

Además si $\bar{x} \in H \Rightarrow \exists \phi_N \in \Phi$ tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N = \bar{x}$ en el sentido del producto escalar. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es continuo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle e_r, \phi_N \rangle = \langle e_r, \bar{x} \rangle$$

podemos escribir

$$F_{\bar{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_{e_r}(\bar{x})} F_{e_r} d\sigma(r)$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e_r, \bar{x} \rangle e_r d\sigma(r)$$

Una medida $\sigma(r)$ habitualmente encontrada en los problemas físicos es

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} H(r-r_N) & r < r_0 \\ r & r > r_0 \end{cases}$$

con lo que

$$d\sigma(r) = \begin{cases} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \delta(r-r_N) dr & r < r_0 \\ dr & r > r_0 \end{cases}$$

y por lo tanto obtenemos el resultado conocido en mecánica cuántica

$$F_{\bar{x}} = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{r_0} \overline{x_r} F_{e_r} \delta(r-r_N) dr + \int_{r_0}^{\infty} \overline{x_r} F_{e_r} dr$$

$$F_{\Sigma} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \bar{X}_{r_N} F_{e_{r_N}} + \int_{r_0}^{\infty} \bar{X}_r F_{e_r} dr$$

0

$$\Sigma = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} X_{r_N} e_{r_N} + \int_{r_0}^{\infty} X_r e_r dr$$

Definición 29

El espacio $W_{x^2/2, 1}$ está dado por

$$\mu(\varepsilon) = \varepsilon \quad M(x) = \frac{x^2}{2}$$

El espacio $W^{y^2/2, 1}$ está dado por

$$\omega(\eta) = \eta \quad \Omega(y) = \frac{y^2}{2}$$

De la definición 23 vemos que $M(x)$ y $\Omega(y)$ son duales en el sentido de Young y por el teorema 5 sabemos que

$$\widetilde{W}_{x^2/2, 1} = W^{y^2/2, 1}$$

$$\widetilde{W}^{y^2/2, 1} = W_{x^2/2, 1}$$

En esta tesis trabajaremos en el espacio $W_{x^2/2, 1}$ y su espacio transformado de Fourier extendido $W^{y^2/2, 1}$.

En $W_{x^2/2, 1}$ son consideradas distribuciones las funciones que en el infinito crecen como $e^{\frac{a}{2}x^2}$ con $a < 1$.

El motivo de trabajar en $W_{x^2/2, 1}$ es que $W_{x^2/2, 1}$ es un caso particular de espacio $W_{\mu, \nu}$ que satisface la condición (P) (definición 9) y que la completación por el producto escalar

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int \bar{\psi}(x) \phi(x) dx$$

de $K(M_p)$ es L^2 . Tenemos así definidos dos espacios de Hilbert Equipados $(K(M_p), L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con lo que automáticamente $(W_{x^{2/2} \perp \perp}; L^2; W_{x^{2/2} \perp \perp})$ es un espacio de Hilbert Equipado en el cual los operadores autoadjuntos satisfacen el teorema 6. Por ello a los observables físicos le corresponderán valores propios reales como sucede en la teoría de campos habitual hecha en S^* .

Obsérvese que por ser $W_{x^{2/2} \perp \perp} \subset S \Rightarrow S^* \subset W_{x^{2/2} \perp \perp}$ y por lo tanto

$$(S, L^2, S^*) \subset (W_{x^{2/2} \perp \perp}; L^2; W_{x^{2/2} \perp \perp}^*)$$

Con esta observación finalizamos este capítulo dedicado al estudio de las propiedades matemáticas de la teoría física que vamos a analizar.

APENDICE B

FUNCIONES DELTA

1 DEFINICION DE $\delta(x-ia)$

Definimos (a complejo; k real)

$$2\pi\delta(u-ia) = \mathcal{F}\{e^{-ax}\} \quad (\text{B.1.1})$$

donde $\mathcal{F}\{e^{-ax}\}$ significa transformada de Fourier de e^{-ax} .
Teniendo en cuenta que en $\mathcal{W}_{x^2/2, 1}$

$$e^{-ax} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-a)^N}{N!} x^N$$

es entonces

$$\mathcal{F}\{e^{-ax}\} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-ia)^N}{N!} 2\pi\delta^N(u) = 2\pi \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-ia)^N}{N!} \delta^N(u)$$

Por lo tanto, de acuerdo con (B.1.1) es

$$\delta(u-ia) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-ia)^N}{N!} \delta^N(u) \quad (\text{B.1.2})$$

2 DEFINICION DE $\delta(az-b)$

La funcional analítica δ_{az-b} extensión al plano complejo de δ_{ax-b} es

$$\begin{aligned} \delta_{az-b}(\phi) &= \frac{1}{|a|} \phi\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi|a|} \oint \frac{1}{z-\frac{b}{a}} \phi(z) dz = \\ &= \oint \delta(az-b) \phi(z) dz \quad (\text{B.2.1}) \end{aligned}$$

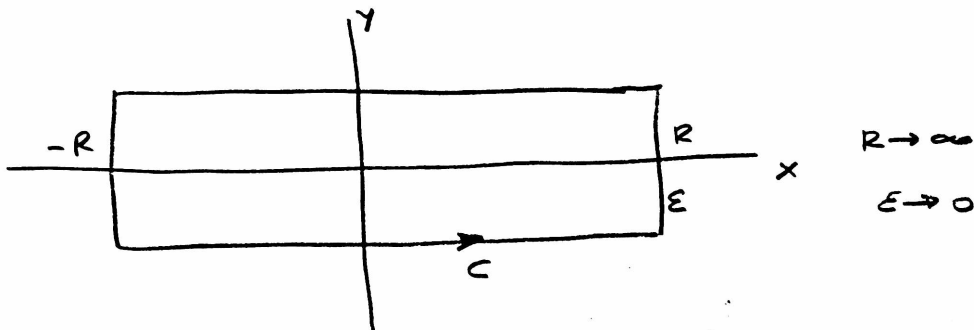
donde C es una curva cerrada en el plano complejo que rodea al punto b/a . De acuerdo con esta definición

$$\begin{aligned} \delta(az-b) &= \frac{1}{2\pi i |a|} \frac{1}{z - \frac{b}{a}} = \frac{1}{|a|} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - b/a} \right) = \\ &= \frac{1}{|a|} \delta\left(z - \frac{b}{a}\right) \quad (\text{B.2.2}) \end{aligned}$$

Para comprobar que la extensión analítica es correcta, debemos mostrar que para a y b reales

$$\oint_C \delta(az-b) \phi(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax-b) \phi(x) dx$$

donde C es el contorno



Ahora

$$\oint_C \delta(az-b) \phi(z) dz = \frac{1}{2\pi i |a|} \oint_C \frac{\phi(z)}{z - \frac{b}{a}} dz =$$

$$\frac{1}{|a|} \phi\left(\frac{x}{a}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax-b) \phi(x) dx$$

3 DEMOSTRACION QUE LA $\delta(x+ia)$ NO ESTA LOCALIZADA EN $\mathbb{W}_{x^2/2}$

Se podría pensar que $\delta(x+ia) = 0$ para a real. Esto no es así porque la distribución $\delta(z)$ está localizada sólo en los ejes real e imaginario. Por localizada entendemos

$$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0 \quad \delta(iy) = 0 \quad y \neq 0$$

Para poder entender esto consideremos en el plano complejo $k = k_R + i k_I$

$$\hat{\phi}(k) = \hat{\phi}(k_R + i k_I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{i(k_R + i k_I)x} dx$$

Ahora

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k'_R + i k'_I) e^{i(k'_R + i k'_I)x} dk'_R$$

(APENDICE A DEF. 23)

Luego

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(k_R + i k_I) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k'_R + i k'_I) e^{i(k'_R + i k'_I)x} dk'_R \right] e^{i(k_R + i k_I)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k'_R + i k'_I) dk'_R \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[(k'_R + i k'_I) - (k_R + i k_I)]x} dx = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(u'_R + i u'_I) 2\pi \delta[(u'_R + i u'_I) - (u_R + i u_I)] du'_R$$

con lo que

$$\hat{\phi}(u_R + i u_I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(u'_R + i u'_I) \delta[u'_R - u_R + i(u'_I - u_I)] du'_R$$

Eligiendo $u'_I = 0$ obtenemos

$$\hat{\phi}(u_R + i u_I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(u'_R) \delta[u'_R - (u_R + i u_I)] du'_R$$

Eligiendo $u_R = 0$ obtenemos

$$\hat{\phi}(i u_I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(u'_R) \delta(u'_R - i u_I) du'_R$$

Vemos así que $\delta[u'_R - (u_R + i u_I)] \neq 0$ a pesar de ser u'_R una variable real. Lo mismo sucede con $\delta(u'_R - i u_I)$.

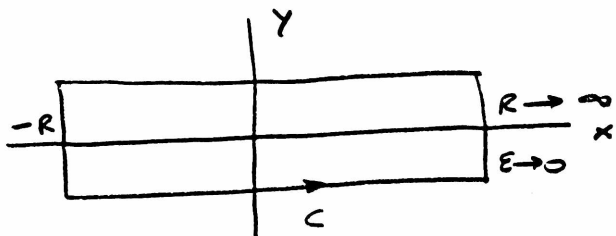
4 DEFINICION DE PV $\frac{1}{z-a}$

$$PV \frac{1}{z-a} = \begin{cases} \frac{1}{z-a} & \text{Im } a \neq 0 \\ -\frac{\text{sgn Im } z}{2(z-a)} & \text{Im } z \neq 0 \text{ Im } a = 0 \end{cases} \quad (B.4.1)$$

En el caso $\text{Im } a \neq 0$ la extensión es la habitual y no hay nada que demostrar. Para el caso $\text{Im } a = 0$ debemos demostrar que

$$\oint_C \frac{pV}{z-a} \phi(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{pV}{x-a} \phi(x) dx$$

donde C es el contorno



$$\oint_C \frac{pV}{z-a} \phi(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{z(x-a+i\epsilon)} \phi(x+i\epsilon) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{z(x-a-i\epsilon)} \phi(x-i\epsilon) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi(x)}{2} \left[\frac{1}{x-a+i\epsilon} + \frac{1}{x-a-i\epsilon} \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi(x)}{2} \left[\frac{pV}{x-a} - i\pi \delta(x-a) + \frac{pV}{x-a} + i\pi \delta(x-a) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{pV}{x-a} \phi(x) dx$$

Donde usamos

$$\frac{1}{x-a-i\epsilon} = \frac{PV}{x-a} + i\pi \delta(x-a) \quad (B.4.2)$$

Obsérvese que la extensión al plano complejo de la distribución

$$\frac{1}{x-a-i\epsilon} \text{ es } \frac{PV}{z-a} + i\pi \delta(z-a)$$

APENDICE C

FUNCION HIPERGEOMETRICA F_1 [13]

La funcion hipergeometrica $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ se define como [19]

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad (C.1)$$

Una representación integral para F_1 es

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx)^{-\beta} (1-ty)^{-\beta'} dt \quad (C.2)$$

Utilizando (C.2) podemos escribir

$$\int_0^{u_2} x^{\alpha-1} (u_2-x)^{\gamma-\alpha-1} (z_1-x)^{-\beta} (z_2-x)^{-\beta'} dx = \quad (C.3)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma)} (u_2)^{\gamma-1} z_1^{-\beta} z_2^{-\beta'} F_1\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{u_2}{z_1}, \frac{u_2}{z_2}\right) \quad z_1, z_2 \neq 0$$

$$\int_{u_2}^{\infty} x^{\beta+\beta'-\gamma} (x-u_2)^{\gamma-\alpha-1} (x-z_1)^{-\beta} (x-z_2)^{-\beta'} dx = \quad (C.4)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma)} (u_2)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{z_1}{u_2}, \frac{z_2}{u_2}\right) \quad z_1, z_2 \neq 0$$

Daremos ahora una deducción para una nueva expresión de F_1 que no se encuentra en la literatura. Partiendo de

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tz_1)^{-\beta} (1-tz_2)^{-\beta'} dt \quad (C.5)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tz)^{-\beta} dt \quad (C.6)$$

Ahora para $\beta' \neq -N$ $n=0,1,2,\dots$ podemos escribir

$$(1-t)^{-\beta'} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta'+N)}{\Gamma(N+1)\Gamma(\beta')} t^N$$

Luego

$$(1-z_2t)^{-\beta'} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta'+N)}{\Gamma(N+1)\Gamma(\beta')} z_2^N t^N \quad (C.7)$$

Usando (C.7), (C.5) puede ser escrita

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{N=0}^{\infty} (z_2)^N \frac{\Gamma(\beta'+N)}{\Gamma(N+1)\Gamma(\beta')} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{\alpha-1+N} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tz_1)^{-\beta} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} (z_2)^n \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta')} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)} \times$$

$$\times F(\alpha+n, \beta, \gamma+n; z_1) \quad (C.8)$$

Haciendo $\beta=1$ y teniendo en cuenta que

$$F(1+\alpha-\gamma, \alpha+n, \alpha+n, z_1^{-1}) = (1-z_1^{-1})^{\gamma-\alpha-1}$$

(C.8) puede ser escrita finalmente en la forma

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_2)^n \Gamma(\beta+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta')} \times \right.$$

$$\times \frac{\pi}{\Gamma(\beta) \sin \pi(\alpha+n)} (-z_1)^{-\alpha-n} (1-z_1^{-1})^{\gamma-\alpha-1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_2)^n \Gamma(\beta+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta')} \frac{\sin \pi(\gamma+n-1)}{\sin \pi(\alpha+n-1)} (-z_1)^{-\beta} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{\beta-\gamma-n} (1-t)^{\gamma-\alpha-2} (1-tz_1^{-1})^{-\beta} dt \quad (C.9)$$

$$\alpha \text{ no entero, } \beta=1, |\arg(-z_2)| < \pi$$

Obsérvese que por (C.5) y (C.6)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z_1) = F_1(\alpha, \beta, \beta, \gamma, z_1, z_2)$$

Y de (C.10), (C.3) y (C.4)

$$\int_0^{u^2} x^{\alpha-1} (u^2-x)^{\gamma-\alpha-1} (z_1-x)^{-\beta} dx =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} (u^2)^{\gamma-1} z_1^{-\beta} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{u^2}{z_1}\right) \quad (C.12)$$

$$\int_{u^2}^{\infty} x^{\beta-\delta} (x-u^2)^{\delta-\alpha-1} (x-z_1)^{-\beta} dx =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta-\alpha)}{\Gamma(\delta)} (u^2)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \delta; \frac{z_1}{u^2}\right) \quad C.12$$

Para pasar de (C.8) a (C.9) hemos usado ref [13]

$$F(\alpha+N, \beta, \delta+N; z_2) = \frac{\Gamma(\delta+N)\Gamma(\beta-\alpha-N)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta-\alpha)} (-z_1)^{-\alpha-N} \times$$

$$\times F(\alpha+N, 1+\alpha-\delta, 1+\alpha+N-\beta, z_1^{-1}) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\delta+N)\Gamma(\alpha+N-\beta)}{\Gamma(\alpha+N)\Gamma(\delta+N-\beta)} (-z_1)^{-\beta} \times$$

$$\times F(\beta, 1+\beta-\delta-N, 1+\beta-\alpha-N, z_2^{-1}) \quad |\arg(-z_1)| < \pi$$

APENDICE D

CONVOLUCIONES

$$1. \delta^e(u^2 + m_1^2) * \delta^e(u^2 + m_2^2)$$

De acuerdo con el apendice (B.2.1) es

$$\delta^e(u^2 + m_1^2) = \frac{1}{4\pi i \omega_1} \left[\frac{1}{u_0 - \omega_1} + \frac{1}{u_0 + \omega_1} \right] \quad \omega_1 = \sqrt{u^2 + m_1^2} \quad (D.1.1)$$

Por lo tanto en el sistema de reposo $(p_0, 0, 0, 0)$

$$\langle \delta^e(p^2 + m_1^2) * \delta^e(p^2 + m_2^2), \phi(p) \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} \oint_C \int \frac{dp_0 d^4u}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{u_0 - \omega_1} + \frac{1}{u_0 + \omega_2} \right] \left[\frac{1}{p_0 - \omega_1} + \frac{1}{p_0 + \omega_2} \right] \phi(p_0 + u_0) \quad (D.1.2)$$

(D.1.2) puede ser llevada a la forma (integrando sobre los ángulos y teniendo en cuenta que $\phi(0) = 0$)

$$\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{\phi(z)}{4z^3} \left[z^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2 \right] \int \frac{u^{\nu-2} du}{\omega_1 \omega_2} \times$$

$$\times \left[\frac{(z^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4z^2} - \omega_1^2 \right]^{-\frac{\nu}{2}} \quad (D.1.3)$$

Podemos calcular la integral en la variable k

$$\int \frac{u^{v-2} du}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{(z^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4z^2} - \omega_2^2 \right]^{-2} = \frac{1}{2} \int_{m_1}^{\infty} x^{-1/2} (x - m_1^2)^{v-3/2} dx \quad (*)$$

$$(*) \left[x - (m_1^2 - m_2^2) \right]^{-1/2} \left[x - \frac{(z^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4z^2} \right]^{-2} dx$$

(D.1.4)

(D.1.4) es calcula con la ayuda de apéndice (C.4)

$$(D.1.4) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{5-v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right) (m_1^2)^{\frac{v-5}{2}} \quad (*)$$

$$(*) F_2\left(\frac{5-v}{2}, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{z_1 + m_1^2}{m_1^2}, \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}\right)$$

(D.1.5)

donde

$$z_1 = \frac{(z^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \quad (D.1.6)$$

Utilizamos ahora apéndice (C.9) para expresar F_2 . Así obtenemos

$$\begin{aligned} & F_2\left(\frac{5-v}{2}, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{z_1 + m_1^2}{m_1^2}, \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}\right) = \\ & = 4i\pi \frac{(m_1^2)^{\frac{5-v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5-v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)} \frac{z^2}{z^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2} z_1^{\frac{v-3}{2}} \quad (D.1.7) \end{aligned}$$

Reemplazando ahora (D.1.7) en (D.1.5) y ésta en (D.1.3) obtenemos

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{S}^c(\rho^2 + u_1^2) * \mathcal{S}^c(\rho^2 + u_2^2), \phi(\rho) \rangle = \\ & = - \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint_C \frac{\phi(z)}{z} \left[\frac{(z^2 + u_1 z + u_2 z^2)^2}{4z^2} - u_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dz \quad (D.1.8) \end{aligned}$$

Los puntos de ramificación del integrando son

$$z = \pm (u_1 \pm u_2)$$

Supongamos que $u_2 \geq u_1$. Los cortes son entonces

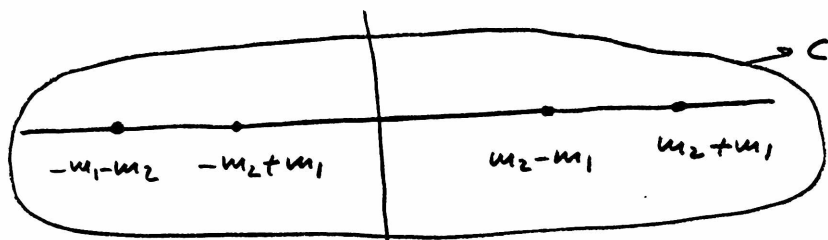


FIG D. 1.1

Utilizando la asignación habitual para las fases y deformando en forma continua la curva C obtenemos las curvas sobre las cuales debemos integrar

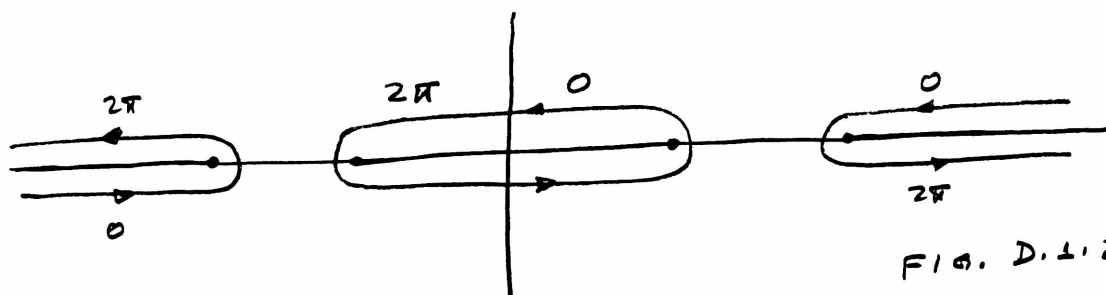


FIG. D. 1.2

Así (D.1.8) puede ser escrita finalmente como

$$\langle \delta^e(p^2 + m_1^2) * \delta^e(p^2 + m_2^2), \phi(p) \rangle = \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{v-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H[x^2 - (m_2 + m_1)^2] \right.$$

$$\left. + H[(m_2 - m_1)^2 - x^2] \right\} \frac{\phi(x)}{|x|} \left[\frac{(x^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4x^2} - m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} dx$$

(D.1.10)

(D.1.10) nos dice que en el sistema de reposo

$$\delta(p^2 + m_1^2) * \delta(p^2 + m_2^2) = \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{v-1}{2})|p_0|} \left[\frac{(p_0^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4p_0^2} - m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}}$$

$$p_0^2 \leq (m_2 - m_1)^2$$

$$p_0^2 \geq (m_1 + m_2)^2$$

(D.1.11)

o pasando al sistema (p_0, \vec{p})

$$\delta(p^2 + m_1^2) * \delta(p^2 + m_2^2) = \frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{v-1}{2})|p_0|} \left[\frac{(p^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{-4p^2} - m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}}$$

$$-p^2 \leq (m_2 - m_1)^2$$

$$-p^2 \geq (m_1 + m_2)^2$$

(D.1.12)

Obviamente la convolución es nula para $(m_2 - m_1)^2 < -\rho^2 < (m_1 + m_2)^2$

$$2_ \delta^e(\rho^2 + m_1^2) * \delta^e(\rho^2 - m_2^2)$$

Por definición $\delta^e(\rho^2 - m_2^2)$ es la extensión de $\delta(\rho^2 - m_2^2)$. Por lo tanto

$$\delta^e(\rho^2 - m_2^2) = \frac{1}{4\pi i \omega_2} \left[\frac{1}{\rho_0 - \omega_2} + \frac{1}{\rho_0 + \omega_2} \right] H(\bar{u}^2 - m_2^2)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\bar{u}^2 - m_2^2} \quad (D.2.2)$$

Así

$$\langle \delta^e(\rho^2 + m_1^2) * \delta^e(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} \oint_C \left(\frac{d\rho_0 d^4 k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{k_0 - \omega_2} + \frac{1}{k_0 + \omega_2} \right] \right) \times$$

$$\left[\frac{1}{\rho_0 - \omega_2} + \frac{1}{\rho_0 + \omega_2} \right] \phi(\rho_0 + k_0) H(\bar{u}^2 - m_2^2) \quad (D.2.2)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el apartado 1 llevamos (D.2.2) a la forma

$$(D.2.2) = -\frac{\pi^{\frac{v-1}{2}}}{\Gamma(\frac{v-1}{2})} \frac{1}{16\pi^2} \oint dz \frac{\phi(z)}{z^3} \left[z^2 (m_1^2 + m_2^2)^2 \right] \otimes$$

$$\otimes \int_{m_2^2}^{\infty} x^{\frac{v-3}{2}} (x - m_2^2)^{-1/2} (x + m_1^2)^{-1/2} \left\{ x - \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \right] \right\}^{-1} d^{v-1} u$$

$$(D.2.3)$$

Nuevamente con apéndice (C.4) es

$$\int_{m_2^2}^{\infty} x^{\frac{v-3}{2}} (x - m_2^2)^{-1/2} (x + m_1^2)^{-1/2} \left\{ x - \left[\frac{(z^2 + m_1^2 + m_2^2)^2}{4z^2} - m_1^2 \right] \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{5-\nu}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{6-\nu}{2})} (u_1^2)^{\frac{\nu-5}{2}} F_2 \left(\frac{5-\nu}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{6-\nu}{2}, \frac{z_1}{u_2^2}, -\frac{u_1^2}{u_2^2} \right) \quad (D.2.4)$$

donde

$$z_1 = \frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2}{4z^2} - u_1^2 \quad (D.2.5)$$

Usando ahora apéndice (C.9)

$$F_2 \left(\frac{5-\nu}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{6-\nu}{2}, \frac{z_1}{u_2^2}, -\frac{u_1^2}{u_2^2} \right) = \frac{i\pi \Gamma(\frac{6-\nu}{2})}{\Gamma(\frac{5-\nu}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2 - 4z^2 u_1^2}{z^4 - (u_1^2 + u_2^2)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2 - 4z^2 u_1^2}{4z^2 u_2^2} \right]^{\frac{\nu-5}{2}} \quad (D.2.6)$$

Reemplazando (D.2.6) en (D.2.4) y esta en (D.2.3) obtenemos

$$\langle \delta^e(p^2 + u_1^2) \times \delta^e(p^2 - u_2^2), \phi(p) \rangle = -\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint dz \frac{\phi(z)}{z} \times$$

$$\times \left[\frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2}{4z^2} - u_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.2.7)$$

Los puntos de ramificación del integrando en (D.2.7) están dados por

$$Z = \pm (u_1 \pm i u_2) \quad (D.2.8)$$

Los dos cortes elegidos son

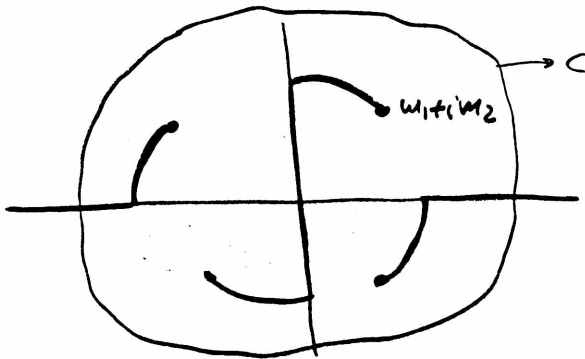


FIG D.2.1

Las curvas que unen los puntos de ramificación a los ejes son arcos de circunferencia de radio

$$|z| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (D.2.9)$$

La curva C puede deformarse en forma continua a

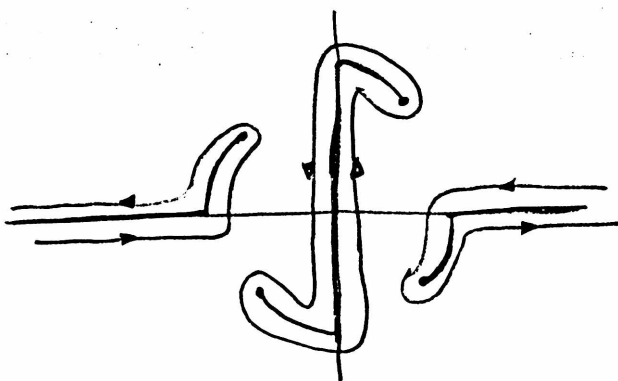


FIG. D.2.2

y usando el teorema de los residuos la integración a lo largo de las curvas de la figura D.2.2 se lleva a la forma equivalente

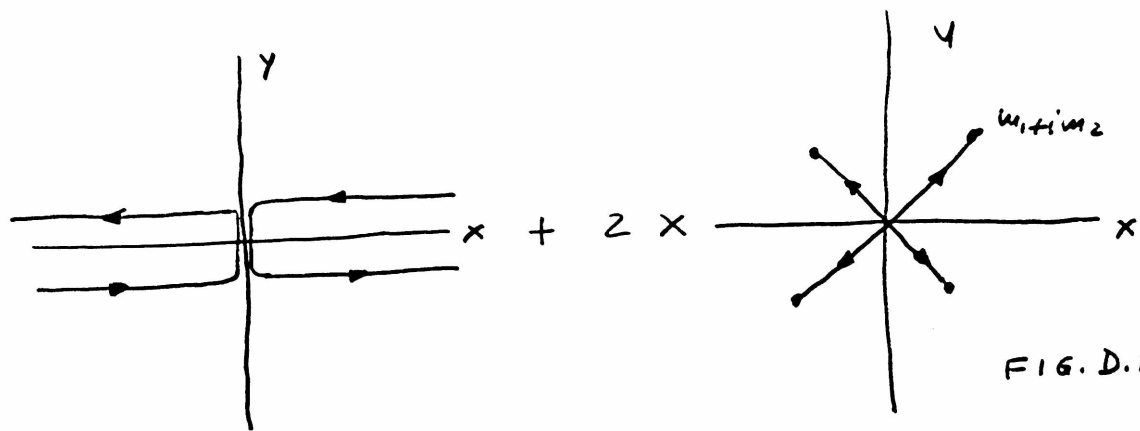


FIG. D.2.3

Así (D.2.7) es ahora

$$\langle \delta^e(\rho^2 + w_1^2) \delta^e(\rho^2 - w_2^2), \phi(\rho) \rangle = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{|x|} \left[\frac{(x^2 + w_1^2 + w_2^2)^2}{4x^2} - w_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dx$$

$$- \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + (w_1^2 - x^2)}{|x|} \frac{\phi\left[\frac{x}{w_1}(w_1 + i w_2)\right]}{|x|} \left\{ \frac{\left[\frac{x^2}{w_1^2} (w_1 + i w_2)^2 + w_1^2 + w_2^2 \right]^2}{4 \frac{x^2}{w_1^2} (w_1 + i w_2)^2} - w_1^2 \right\}^{\frac{\nu-3}{2}} dx$$

$$- \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + (w_1^2 - x^2)}{|x|} \frac{\phi\left[\frac{x}{w_1}(w_1 - i w_2)\right]}{|x|} \left\{ \frac{\left[\frac{x^2}{w_1^2} (w_1 - i w_2)^2 + w_1^2 + w_2^2 \right]^2}{4 \frac{x^2}{w_1^2} (w_1 - i w_2)^2} - w_1^2 \right\}^{\frac{\nu-3}{2}} dx$$

(D.2.10)

Pasando al sistema $(\rho_0, \vec{\rho})$, (D.2.10) nos dice que

$$\delta(\rho^2 - m_1^2) \delta(\rho^2 - m_2^2) = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})(-\rho^2)^{3/2}} \left[\frac{(\rho^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}{-4\rho^2} - m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}}$$

(D.2.11)

$$3_ \delta^e(\rho^2 - m_1^2) \delta^e(\rho^2 - m_2^2)$$

De acuerdo con (D.2.1) es

$$\langle \delta^e(\rho^2 - m_1^2) \delta^e(\rho^2 - m_2^2), \phi(\rho) \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} \oint_C \int \frac{d\rho_0 d^4 u}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{\rho_0 - \omega_1} + \frac{1}{\rho_0 + \omega_1} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\rho_0 - \omega_1} + \frac{1}{\rho_0 + \omega_1} \right] \phi(\rho_0 + \omega_0) H(\bar{\rho}^2 - m_2^2) \quad (D.3.1)$$

donde hemos supuesto $m_2 \geq m_1$

Al igual que en los apartados 1 y 2 podemos reescribir (D.3.1) en la forma

$$(D.3.1) = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \frac{1}{4\pi i} \oint \frac{\phi(z)}{z^3} [z^4 - (m_2^2 - m_1^2)z^2] \int_{m_1^2}^{\infty} x^{\frac{\nu-3}{2}} (x - m_1^2)^{-1/2} (x - m_2^2)^{-1/2} \otimes$$

$$\otimes \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 - x \right]^{-1} \quad (D.3.2)$$

Nuevamente con el uso de apéndice (C.4) y apéndice (C.9) obtenemos

$$\langle \delta^e(p^2, m_1^2) \delta^e(p^2, m_2^2), \phi(p) \rangle =$$

$$-\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{4\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint_C \frac{\phi(z)}{z} \left[\frac{(z^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4z^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dz \quad (D.3.3)$$

Debemos estudiar ahora las singularidades del integrando en (D.3.3). Los puntos de ramificación están dados por

$$z = \pm i(m_2 \pm m_1)$$

Podemos ahora definir los cortes. Los elegidos son

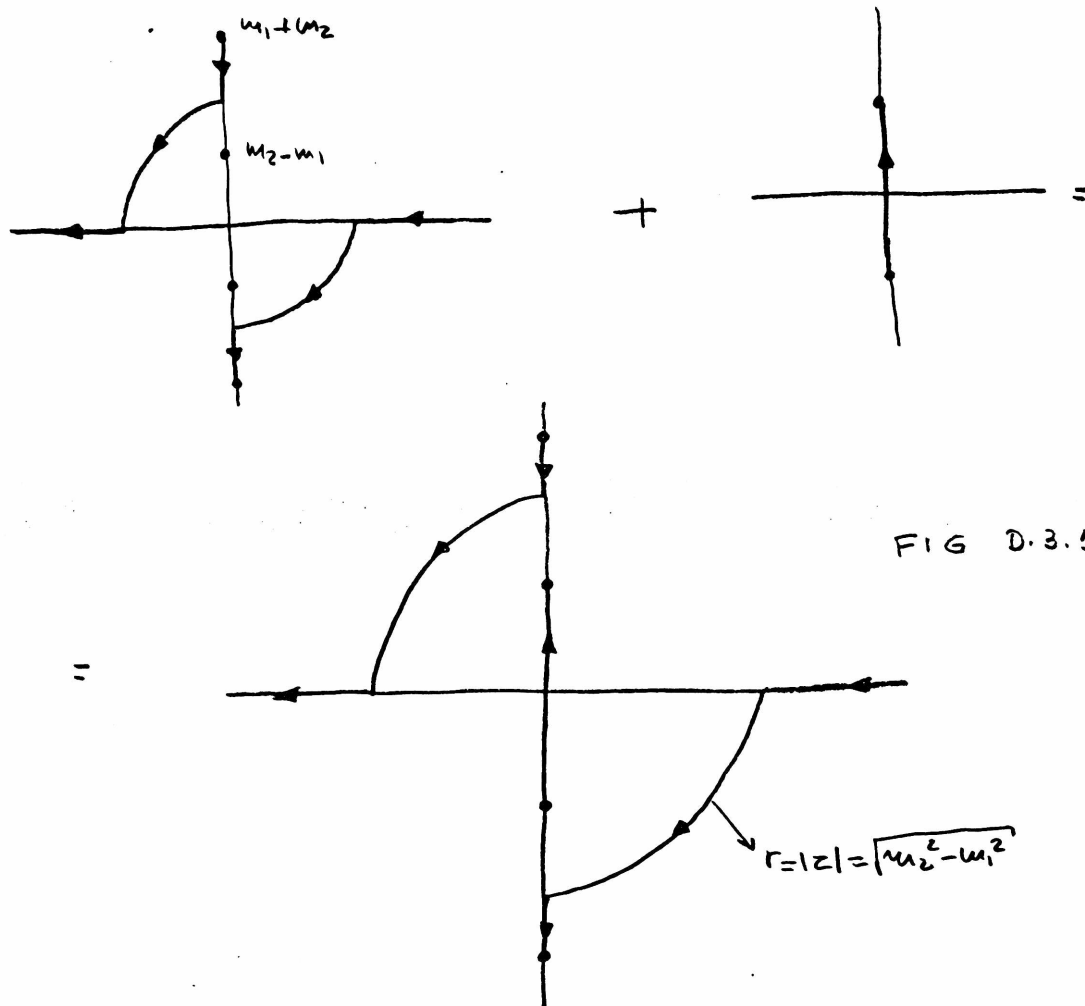


FIG D.3.4

Ahora rodeamos con la curva C los puntos singulares

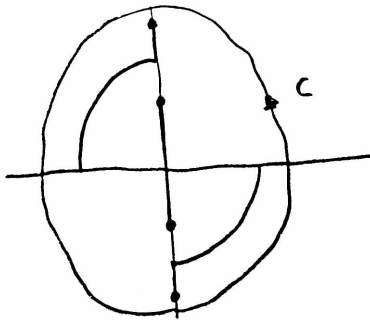


FIG D.3.2

y luego de deformarla en forma continua obtenemos

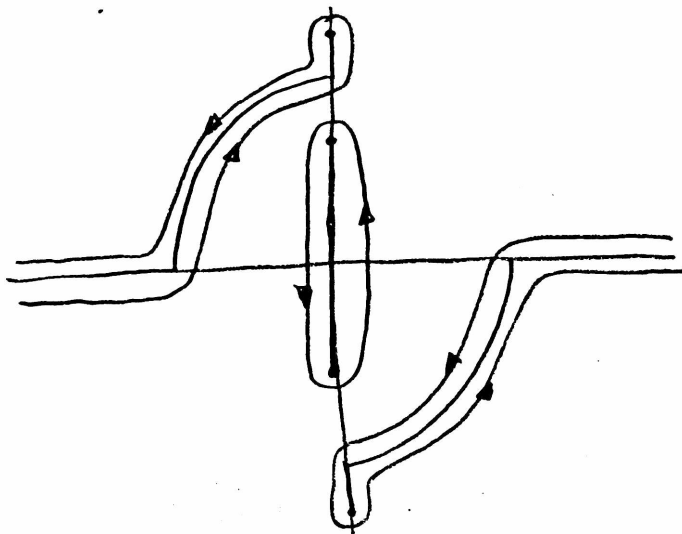
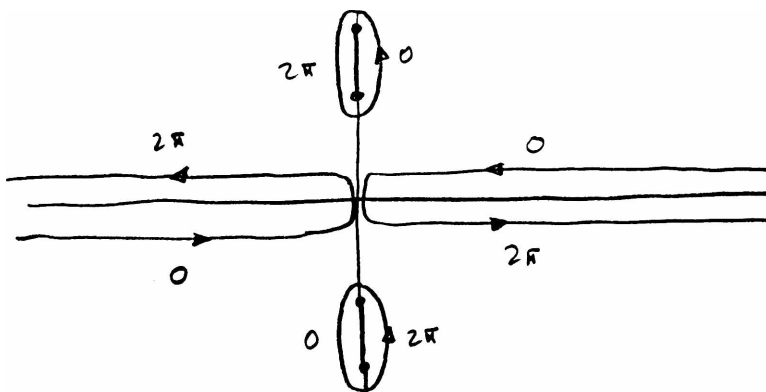


FIG D.3.3

Integrar a lo largo de los caminos de la figura (D.3.3) es equivalente a integrar en los caminos



(D.3.3) es finalmente

$$\langle \delta^e(p \pm m_1 z) * \delta^e(p \pm m_2 z), \phi(p) \rangle = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{|x|} \left[\frac{(x^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4x^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dx$$

$$- \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H[y^2(m_2 - m_1)^2] - H[y^2(m_1 + m_2)^2] \right\} \frac{\phi(iy)}{|y|} dy$$

$$\otimes \left[\frac{(-y^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{-4y^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dy \quad (D.3.4)$$

Así en el sistema (p_0, \vec{p})

$$\delta(p \pm m_1 z) * \delta(p \pm m_2 z) = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2}) (-p^2)^{1/2}} \left[\frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{-4p^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.3.5)$$

$$4_- -i p v e / p^2 + m_1^2 * -i p v e / p^2 + m_2^2$$

Para calcular la convolución del valor principal consigo mismo debemos tener en cuenta la definición dada en apéndice (B.4.1). Puesto que es

$$- \frac{i p v e}{p^2 + m^2} = \frac{i}{2\omega} \left[\frac{p v e}{p_0 - \omega_1} - \frac{p v e}{p_0 + \omega_1} \right] \quad (D.4.1)$$

podemos escribir

$$\langle -\frac{i p v e}{p^2 + m_1^2} * -\frac{i p v e}{p^2 + m_2^2}, \phi(p) \rangle = -\frac{1}{4} \oint_C \frac{d p_0 d^4 k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{p v}{\omega_0 - \omega_1} - \frac{p v}{\omega_0 + \omega_1} \right] * \\ * \left[\frac{p v}{p_0 - \omega_2} - \frac{p v}{p_0 + \omega_2} \right] \phi(p_0 + \omega_0) \quad (D.4.2)$$

Integramos primeramente sobre p_0 . Por definición el contorno C debe rodear a los puntos ω_2 y $-\omega_2$. Lo elegimos tal como se muestra en la figura D.4.1.

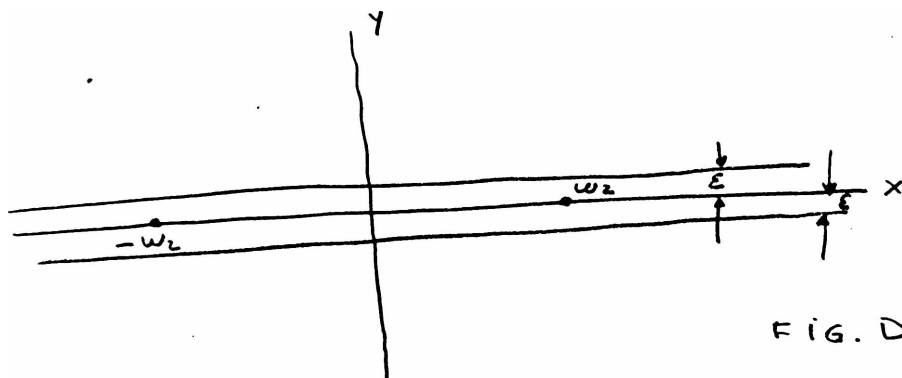


FIG. D.4.1

Así (D.4.2) es ahora

$$(D.4.2) = -\frac{1}{8} \int \frac{d^4 k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{p v e}{\omega_0 - \omega_1} - \frac{p v e}{\omega_0 + \omega_1} \right] \left[-\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\phi(p_0 + \omega_0 + i\epsilon)}{p_0 + i\epsilon - \omega_2} d p_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(p_0 + \omega_0 - i\epsilon)}{p_0 - i\epsilon - \omega_2} d p_0 \right. \\ \left. + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\phi(p_0 + \omega_0 + i\epsilon)}{p_0 + i\epsilon + \omega_2} d p_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(p_0 + \omega_0 - i\epsilon)}{p_0 - i\epsilon + \omega_2} d p_0 \right]$$

Tomando el límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ es

$$(D.4.2) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 u_k d p_0}{w_1 w_2} \left[\frac{p v e}{k_0 - w_1} - \frac{p v e}{k_0 + w_1} \right] \left[\frac{p v}{p_0 - w_2} - \frac{p v}{p_0 + w_2} \right] \phi(p_0 + k_0) \quad (D.4.3)$$

Repitiendo los mismos pasos para la integral de contorno en k_0 obtenemos

$$(D.4.3) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 u_k d p_0}{w_1 w_2} \left[\frac{p v}{k_0 - w_1} - \frac{p v}{k_0 + w_1} \right] \left[\frac{p v}{p_0 - w_2} - \frac{p v}{p_0 + w_2} \right] \phi(p_0 + k_0) =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 u_k d p_0}{w_1 w_2} \left[\frac{p v}{k_0 - w_1} - \frac{p v}{k_0 + w_1} \right] \left[\frac{p v}{p_0 - k_0 - w_2} - \frac{p v}{p_0 - k_0 + w_2} \right] \phi(p_0)$$

Por lo tanto

$$-\frac{i p v e}{p^2 + w_1^2} * -\frac{i p v e}{p^2 + w_2^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{d^2 u_k}{w_1 w_2} \left[\frac{p v}{k_0 - w_1} - \frac{p v}{k_0 + w_1} \right] \left[\frac{p v}{p_0 - k_0 - w_2} - \frac{p v}{p_0 - k_0 + w_2} \right] \quad (D.4.4)$$

Usamos ahora la propiedad de la transformada de Hilbert, \mathcal{H} (ref[13])

$$\mathcal{H} \mathcal{H} f = -f \quad (\text{D.4.5})$$

o

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{PV}{x-y} \frac{PV}{x-z} dx = -\frac{i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z}{y-z} \quad x, y \text{ reales } \operatorname{Im} z \neq 0 \quad (\text{D.4.6})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{PV}{x-y} \frac{PV}{x-z} dx = \pi^2 \delta(x-z) \quad x, y, z \text{ reales} \quad (\text{D.4.7})$$

De acuerdo con (D.4.7)

$$\begin{aligned} -\frac{iPVe}{p^2+m_1^2} * -\frac{iPVe}{p^2+m_2^2} &= \frac{\pi^2}{4} \int \frac{d^4 u}{u_1 u_2} \left[\delta(p_0 + u_1 + u_2) - \delta(p_0 - u_1 - u_2) \right. \\ &\quad \left. - \delta(p_0 + u_1 - u_2) + \delta(p_0 - u_1 + u_2) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.4.8})$$

De igualar a cero los argumentos de las deltas multiplicados entre sí obtenemos

$$u^2 = \frac{1}{4p_0^2} \left[(p_0^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \right] \quad (\text{D.4.9})$$

Como $u^2 \geq 0$ debe ser

$$(p_0^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 \geq 4m_1^2 m_2^2$$

Sea $\rho_0^2 \geq w_1^2 + w_2^2$. Entonces

$$\rho_0^2 - w_1^2 - w_2^2 \geq 2w_1w_2$$

o

$$\rho_0^2 \geq (w_1 + w_2)^2 \quad (D.4.10)$$

Si $\rho_0^2 \leq w_1^2 + w_2^2$, entonces

$$-(\rho_0^2 - w_1^2 - w_2^2) \geq 2w_1w_2$$

o sea

$$\rho_0^2 \leq (w_1 - w_2)^2 \quad (D.4.11)$$

Para los valores de ρ_0^2 dados por (D.4.10) y (D.4.11) la convolución es distinta de cero.

Para $(w_1 - w_2)^2 < \rho_0^2 < (w_1 + w_2)^2$

es nula. Supongamos ahora que $w_1 \geq w_2$. Entonces la primera y tercera deltas tienen aporte distinto de cero a la integral si $\rho_0 < 0$ y las dos restantes para $\rho_0 > 0$. Para la primer delta tenemos (D.4.10) y para la tercera (D.4.11). Vemos entonces que sólo aporta una delta por vez a la integral, así que es suficiente con evaluar un solo caso.

Sea por ejemplo $\rho_0 < 0$, $\rho_0^2 \leq (w_1 - w_2)^2$. Entonces

$$-i \frac{\rho_0 e}{\rho_0^2 + w_1^2} * -i \frac{\rho_0 e}{\rho_0^2 + w_2^2} = -\frac{\pi^2}{4} \int \frac{d^{v-1}k}{w_1 w_2} \delta(\rho_0 + w_1 - w_2) \quad (D.4.12)$$

por ser

$$\rho_0 + w_1 - w_2 = 0$$

es entonces

$$u^2 = \frac{1}{4\rho_0^2} (\rho_0^2 + u_1^2 - u_2^2) - u_1^2$$

Como

$$\frac{d(\rho_0 + u_1 - u_2)}{du^2} = \frac{\rho_0}{2u_1u_2}$$

es

$$\delta(\rho_0 + u_1 - u_2) = \delta \left[u^2 - \frac{(\rho_0^2 + u_1^2 - u_2^2)^2 - 4\rho_0^2 u_1^2}{4\rho_0^2} \right] \frac{2u_1u_2}{|\rho_0|} \quad (\text{D.4.13})$$

Por medio de la igualdad (D.4.13) y luego de integrar sobre los ángulos es

$$-\frac{i^{\nu} \rho_0^{\nu} e}{\rho^2 + u_1^2} * \frac{-i^{\nu} \rho_0^{\nu} e}{\rho^2 + u_2^2} = -\pi^2 \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int \frac{x^{\frac{\nu-3}{2}}}{2|\rho_0|} \delta \left[x - \frac{(\rho_0^2 + u_1^2 - u_2^2)^2 - 4\rho_0^2 u_1^2}{4\rho_0^2} \right] dx$$

$$= -\pi^2 \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})|\rho_0|} \left[\frac{(\rho_0^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4\rho_0^2} - u_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}}$$

$$(\text{D.4.14})$$

Para $\rho_0 < 0$, $\rho_0 \geq (u_1 + u_2)^2$ es repitiendo los mismos pasos

$$-\frac{i^{\nu} \rho_0^{\nu} e}{\rho^2 + u_1^2} * \frac{-i^{\nu} \rho_0^{\nu} e}{\rho^2 + u_2^2} = \frac{\pi^2}{4} \int \frac{d^{\nu-1} u}{u_1 u_2} \delta(\rho_0 + u_1 + u_2) =$$

$$= \pi^2 \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2}) |p_0|} \left[\frac{(p_0^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4p_0^2} - u_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.4.15)$$

Para $p_0 > 0$ se obtiene los mismos resultados. Por estar sobre el eje real es

$$-\frac{i p v e}{p^2 + u_1^2} \star -\frac{i p v e}{p^2 + u_2^2} = -i \frac{p v}{p^2 + u_1^2} \star -i \frac{p v}{p^2 + u_2^2}$$

De acuerdo a (D.4.14), (D.4.15) y pasando al sistema (p_0, \vec{p}) es

$$-\frac{i p v}{p^2 + u_1^2} \star -\frac{i p v}{p^2 + u_2^2} = \begin{cases} \pi^2 f(p^2) & -p^2 \geq (u_1 + u_2)^2 \\ -\pi^2 f(p^2) & -p^2 \leq (u_2 - u_1)^2 \\ 0 & (u_2 - u_1)^2 < -p^2 < (u_1 + u_2)^2 \end{cases} \quad (D.4.16)$$

donde

$$f(p^2) = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2}) (-p^2)^{1/2}} \left[\frac{(p^2 + u_2^2 - u_1^2)^2}{-4p^2} - u_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.4.17)$$

Teniendo en cuenta (D.1.12) es finalmente

$$-\frac{i p v}{p^2 + u_1^2} \star -\frac{i p v}{p^2 + u_2^2} = \begin{cases} \pi^2 \delta(p^2 + u_1^2) \star \delta(p^2 + u_2^2) & -p^2 \geq (u_1 + u_2)^2 \\ -\pi^2 \delta(p^2 + u_1^2) \star \delta(p^2 + u_2^2) & -p^2 \leq (u_2 + u_1)^2 \end{cases} \quad (D.4.18)$$

$$5_ - i p v e / p^2 + \omega_1^2 \neq -i p v e / p^2 - \omega_2^2$$

Para realizar el cálculo debemos notar que

$$\begin{aligned}
 - \frac{i p v e}{p^2 - \omega_2^2} &= \frac{i}{2 \omega_2} \left[\frac{p v e}{p_0 - \omega_2} - \frac{p v e}{p_0 + \omega_2} \right] H(\bar{p}^2 - \omega_2^2) \\
 &+ \frac{1}{2 \omega_2} \left[\frac{1}{p_0 - i \omega_2} - \frac{1}{p_0 + i \omega_2} \right] H(\omega_2^2 - \bar{p}^2)
 \end{aligned}
 \tag{D.5.1}$$

donde

$$\omega_2 = \begin{cases} \sqrt{\bar{u}^2 - \omega_2^2} & \bar{u}^2 \geq \omega_2^2 \\ \sqrt{\omega_2^2 - \bar{u}^2} & \omega_2^2 \geq \bar{u}^2 \end{cases}$$

Así teniendo en cuenta (D.4.1) y (D.5.1) es

$$\begin{aligned}
 \left\langle -\frac{i p v e}{p^2 + \omega_1^2} \neq -\frac{i p v e}{p^2 - \omega_2^2}, \phi(p) \right\rangle &= -\frac{1}{4} \oint \frac{d p_0 d^4 k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{p v e}{k_0 - \omega_1} - \frac{p v e}{k_0 + \omega_1} \right] \times \\
 \times \left[\frac{p v e}{p_0 - \omega_2} - \frac{p v e}{p_0 + \omega_2} \right] \phi(p_0 + k_0) &H(\bar{u}^2 - \omega_2^2) + \frac{i}{4} \oint \frac{d p_0 d^4 k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{p v e}{k_0 - \omega_1} - \frac{p v e}{k_0 + \omega_1} \right] \times \\
 \times \left[\frac{1}{p_0 - i \omega_2} - \frac{1}{p_0 + i \omega_2} \right] \phi(p_0 + k_0) &H(\omega_2^2 - \bar{u}^2)
 \end{aligned}
 \tag{D.5.2}$$

Analizemos el primer término de (D.5.2) ($\bar{u}^2 \gg \omega_2^2$). Repitiendo el cálculo llevado a cabo en el apartado 4 es

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \int \left(\frac{d\rho_0 d^4k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{pV^e}{\kappa_0 - \omega_1} - \frac{pV^e}{\kappa_0 + \omega_1} \right] \left[\frac{pV^e}{\rho_0 - \omega_2} - \frac{pV^e}{\rho_0 + \omega_2} \right] \right) \times \\
 & \times \phi(\rho_0 + \kappa_0) H(\bar{u}^2 - \omega_2^2) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho_0 d^4k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{pV}{\kappa_0 - \omega_1} - \frac{pV}{\kappa_0 + \omega_1} \right] \times \\
 & \times \left[\frac{pV}{\rho_0 - \omega_2} - \frac{pV}{\rho_0 + \omega_2} \right] \phi(\rho_0) H(\bar{u}^2 - \omega_2^2) \quad (D.5.3)
 \end{aligned}$$

Mediante (D.4.7) es entonces

$$\begin{aligned}
 (D.5.3) = \frac{\pi^2}{4} \int \frac{d\rho_0 d^4k}{\omega_1 \omega_2} \left[\delta(\rho_0 + \omega_1 + \omega_2) + \delta(\rho_0 - \omega_1 - \omega_2) \right. \\
 \left. - \delta(\rho_0 + \omega_1 - \omega_2) - \delta(\rho_0 - \omega_1 + \omega_2) \right] H(\bar{u}^2 - \omega_2^2) \quad (D.5.4)
 \end{aligned}$$

De los argumentos de las deltas se deduce que

$$\kappa^2 = \frac{1}{\rho_0^2} \left[(\rho_0^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2 \right]$$

En este caso $\kappa^2 \gg \omega_2^2$ se verifica para todo valor de ρ_0 , por lo que la convolución es distinta de cero para todo ρ_0 . Al igual que en el apartado 4 cada delta aporta sólo una vez, así que el resultado de (D.5.3) es

$$(D.5.3) = \begin{cases} \pi^2 f(p^2) & -p^2 \geq m_1^2 + m_2^2 \\ -\pi^2 f(p^2) & -p^2 \leq m_1^2 + m_2^2 \end{cases} \quad (D.5.5)$$

con

$$f(p^2) = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})(-p^2)^{1/2}} \left[\frac{(p^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}{-4p^2} - m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.5.6)$$

o teniendo en cuenta (D.2.11)

$$(D.5.3) = \begin{cases} \pi^2 \delta(p^2 + m_1^2) \times \delta(p^2 - m_2^2) & -p^2 \geq m_1^2 + m_2^2 \\ -\pi^2 \delta(p^2 + m_1^2) \times \delta(p^2 - m_2^2) & -p^2 < m_1^2 + m_2^2 \end{cases} \quad (D.5.7)$$

Para el segundo término de (D.5.2) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{i}{4} \oint \left(\frac{d\rho_0 d\nu_1}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{p\nu e}{\nu_0 - \omega_1} - \frac{p\nu e}{\nu_0 + \omega_1} \right] \left[\frac{1}{\rho_0 - i\omega_2} - \frac{1}{\rho_0 + i\omega_2} \right] \right) \times \\ & \times \phi(\rho_0 + \nu_0) H(\omega_2^2 - \bar{\nu}^2) = \frac{i}{4} \oint_C \left(\frac{d\rho_0 d\nu_1}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{p\nu}{\nu_0 - \omega_1} - \frac{p\nu}{\nu_0 + \omega_1} \right] \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{\rho_0 - i\omega_2} - \frac{1}{\rho_0 + i\omega_2} \right] \phi(\rho_0 + \nu_0) H(\omega_2^2 - \bar{\nu}^2) \end{aligned} \quad (D.5.8)$$

(D.5.8) puede ser reescrita en la forma

$$(D.5.8) = \frac{i}{4} \oint \left[\frac{dz d^{\nu} u}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{pV}{\omega_0 - \omega_1} - \frac{pV}{\omega_0 + \omega_1} \right] \left[\frac{1}{\omega_0 - z - i\omega_2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\omega_0 - z + i\omega_2} \right] \phi(z) H(\omega_2^2 - \bar{u}^2) \right] \quad (D.5.9)$$

Con la ayuda de (D.4.6) podemos transformar (D.5.9) en

$$(D.5.8) = \frac{i}{4} \int \frac{dz d^{\nu} u}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(z + i\omega_2 - \omega_1)}{z + i\omega_2 - \omega_1} - \frac{i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(z - i\omega_2 - \omega_1)}{z - i\omega_2 - \omega_1} \right. \\ \left. - \frac{i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(z + i\omega_2 + \omega_1)}{z + i\omega_2 + \omega_1} + \frac{i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(z - i\omega_2 + \omega_1)}{z - i\omega_2 + \omega_1} \right] \phi(z) H(\omega_2^2 - \bar{u}^2) \quad (D.5.10)$$

Tambien por (D.4.6) podemos escribir

$$(D.5.8) = -\frac{i}{4} \oint \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz d^{\nu} u dx}{\omega_1 \omega_2} \frac{pV}{x} \left[\frac{1}{z + i\omega_2 - \omega_1} - \frac{1}{z - i\omega_2 - \omega_1} \right. \\ \left. - \frac{1}{z + i\omega_2 + \omega_1} + \frac{1}{z - i\omega_2 + \omega_1} \right] \phi(z+x) H(\omega_2^2 - \bar{u}^2) \quad (D.5.11)$$

Integrando sobre los Angulos y reagrupando es

$$(D.5.8) = -\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int dz \frac{pV}{x} \frac{\phi(z+x)}{z} \int_0^{\omega_2^2} x^{\frac{\nu-3}{2}} \left[\frac{(z^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)^2}{4z^2} - \omega_1^2 - x \right]^{-1} dx \quad (D.5.12)$$

Utilizando la fórmula (ref.[13])

$$F\left(\frac{\nu-1}{2}, 1, \frac{\nu+1}{2}, \frac{u_2^2}{z_1}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} F_1\left(\frac{\nu-1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \frac{u_2^2}{z_1}, 1\right) \quad (D.5.13)$$

y empleando apéndice (C.11) y apéndice (C.9) es

$$\int_0^{u_2^2} x^{\frac{\nu-3}{2}} \left[\frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2}{4z^2} - u_1^2 - x \right]^{-1} dx = i\pi \left[\frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2}{4z^2} - u_1^2 - x \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.5.14)$$

Reemplazando (D.5.14) en (D.5.12) es

$$(D.5.8) = \frac{i\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \oint_{-\infty}^{+\infty} dz dx \phi(z) \frac{PV}{x} \frac{1}{z-x} \otimes \left\{ \frac{[(z-x)^2 + u_1^2 + u_2^2]^2}{4(z-x)^2} - u_1^2 \right\}^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.5.15)$$

La integral en x puede ser calculada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{PV}{x} \frac{1}{z-x} \left\{ \frac{[(z-x)^2 + u_1^2 + u_2^2]^2}{4(z-x)^2} - u_1^2 \right\}^{\frac{\nu-3}{2}} =$$

$$= i\pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \left[\frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2}{4z^2} - u_1 z \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (\text{D.5.16})$$

Reemplazando (D.5.16) en (D.5.15) obtenemos entonces

$$(\text{D.5.8}) = \frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \oint \frac{\phi(z)}{z} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \left[\frac{(z^2 + u_1^2 + u_2^2)^2}{4z^2} - u_1 z \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dz \quad (\text{D.5.17})$$

Eligiendo para el corchete en (D.5.16) el mismo corte que en el apartado 2

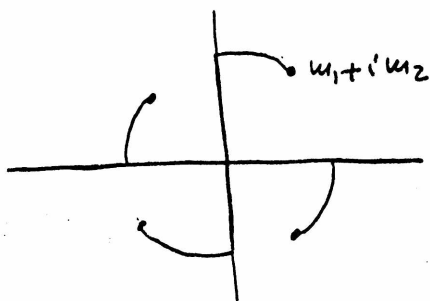


FIG. D.5.1

el corte total es

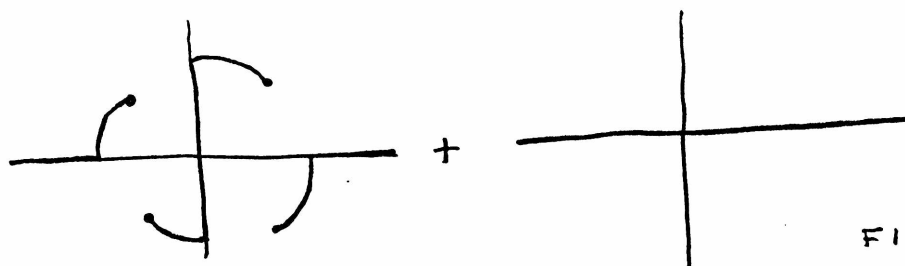


FIG. D.5.2

Al rodear con la curva C los puntos de ramificación y deformar la curva C en forma continua obtenemos que realizar la integral de contorno es equivalente a realizar la siguiente integración

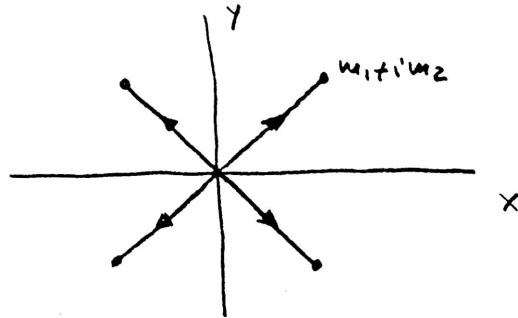


FIG D.5.4

Así el segundo término (D.5.8) es

$$(D.5.8) = \frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega_1^2 - x^2) \frac{\phi\left[\frac{x}{\omega_1}(\omega_1 + i\omega_2)\right]}{x} dx \quad \otimes$$

$$\otimes \left\{ \frac{\left[\frac{x^2}{\omega_1^2} (\omega_1 + i\omega_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \right]^2 - \omega_1^2}{4 \frac{x^2}{\omega_1^2} (\omega_1 + i\omega_2)^2} - \omega_1^2 \right\}^{\frac{\nu-3}{2}} dx +$$

$$+ \frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega_1^2 - x^2) \frac{\phi\left[-\frac{x}{\omega_1}(\omega_1 + i\omega_2)\right]}{x} dx \quad \otimes$$

$$\otimes \left\{ \frac{\left[\frac{x^2}{\omega_1^2} (\omega_1 - i\omega_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \right]^2 - \omega_1^2}{4 \frac{x^2}{\omega_1^2} (\omega_1 - i\omega_2)^2} - \omega_1^2 \right\}^{\frac{\nu-3}{2}} dx$$

(D.5.18)

(D.5.17) no tiene aporte en el eje real, por lo que, teniendo en cuenta (D.5.7), podemos escribir sobre el eje real

$$\begin{aligned}
& -\frac{iPVe}{p^2+m_1^2} * \frac{-iPVe}{p^2-m_2^2} = -\frac{iPV}{p^2+m_1^2} * \frac{-iPV}{p^2-m_2^2} = \\
& = \begin{cases} \pi^2 \delta(p^2+m_1^2) * \delta(p^2-m_2^2) & -p^2 \geq m_1^2+m_2^2 \\ -\pi^2 \delta(p^2+m_1^2) * \delta(p^2-m_2^2) & -p^2 < m_1^2+m_2^2 \end{cases} \quad (D.5.19)
\end{aligned}$$

$$\delta_- \frac{-iPVe}{p^2-m_1^2} * \frac{-iPVe}{p^2-m_2^2}$$

Por (D.5.1) es (consideramos $m_1 \geq m_2$)

$$\langle \frac{-iPVe}{p^2-m_1^2} * \frac{-iPVe}{p^2-m_2^2}, \phi(p) \rangle = -\frac{i}{4} \oint_C \frac{d\rho_0 d^4k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{pve}{\kappa_0 - \omega_1} - \frac{pve}{\kappa_0 + \omega_1} \right] *$$

$$\left[\frac{pve}{\rho_0 - \omega_2} - \frac{pve}{\rho_0 + \omega_2} \right] \phi(\rho_0 + \kappa_0) H(\bar{u}^2 - m_1^2) +$$

$$+ \frac{i}{4} \oint_C \frac{d\rho_0 d^4k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{\kappa_0 - i\omega_1} - \frac{1}{\kappa_0 + i\omega_1} \right] \left[\frac{pve}{\rho_0 - \omega_2} - \frac{pve}{\rho_0 + \omega_2} \right] *$$

$$* \phi(\rho_0 + \kappa_0) H(m_1^2 - \bar{u}^2) H(\bar{u}^2 - m_2^2) +$$

$$+ \frac{i}{4} \oint_C \frac{d\rho_0 d^4k}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{\kappa_0 - i\omega_1} - \frac{1}{\kappa_0 + i\omega_1} \right] \left[\frac{1}{\rho_0 - i\omega_2} - \frac{1}{\rho_0 + i\omega_2} \right] *$$

$$* \phi(\rho_0 + \kappa_0) H(m_2^2 - \bar{u}^2) \quad (D.6.1)$$

Consideremos el primer término en (D.6.1) ($\bar{u}^2 > m_1^2$). Siguiendo los mismos pasos que en el apartado 4 es

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \oint_C \int \frac{d\rho_0 d^4 u}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{p v e}{\kappa_0 - \omega_1} - \frac{p v e}{\kappa_0 + \omega_1} \right] \left[\frac{p v e}{\rho_0 - \omega_2} - \frac{p v e}{\rho_0 + \omega_2} \right] \times \\
& \times \phi(\rho_0 + \kappa_0) H(\bar{u}^2 - m_1^2) = -\frac{\pi^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\rho_0 d^4 u}{\omega_1 \omega_2} \left[\delta(\rho_0 + \omega_1 - \omega_2) + \right. \\
& \left. + \delta(\rho_0 - \omega_1 + \omega_2) - \delta(\rho_0 + \omega_1 + \omega_2) - \delta(\rho_0 - \omega_1 - \omega_2) \right] H(\bar{u}^2 - m_1^2) \\
& \hspace{15em} (D.6.2)
\end{aligned}$$

De los argumentos de las edltas se deduce que

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{4\rho_0^2} \left[(\rho_0^2 + m_1^2 + m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \right]$$

Para todo valor de ρ_0 es $\bar{u}^2 \geq m_1^2$. Con cálculos análogos a los del apartado 5 obtenemos (en el sistema (ρ_0, \vec{p}))

$$(D.6.2) = \begin{cases} \pi^2 f(\rho^2) & -\rho^2 \geq |m_1^2 - m_2^2| \\ -\pi^2 f(\rho^2) & -\rho^2 \leq |m_1^2 - m_2^2| \end{cases} \quad (D.6.3)$$

$$f(\rho^2) = \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})(-\rho^2)^{1/2}} \left[\frac{(\rho^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{-4\rho^2} + m_1^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \quad (D.6.4)$$

Teniendo en cuenta (D.3.5) es entonces

$$(D.6.2) = \begin{cases} \pi^2 \delta(\rho^2 - u_1^2) * \delta(\rho^2 - u_2^2) & -\rho^2 \geq |u_1^2 - u_2^2| \\ -\pi^2 \delta(\rho^2 - u_1^2) * \delta(\rho^2 - u_2^2) & -\rho^2 < |u_1^2 - u_2^2| \end{cases} \quad (D.6.5)$$

Sea ahora el segundo término ($u_2^2 \leq \bar{u}^2 \leq u_1^2$). Realizando cálculos análogos a los del apartado 5 obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{i}{4} \oint \int \frac{d\rho_0 d\nu_0}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{\nu_0 - i\omega_1} - \frac{1}{\nu_0 + i\omega_1} \right] \left[\frac{\rho\nu e}{\rho_0 - \omega_2} - \frac{\rho\nu e}{\rho_0 + \omega_2} \right] \phi(\rho_0 + \nu_0) \otimes \\ & \otimes H(u_1^2 - \bar{u}^2) H(\bar{u}^2 - u_2^2) = -\frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint \int_{-\infty}^{+\infty} dz dx \frac{\rho\nu}{x} \frac{\phi(z+x)}{z} \otimes \\ & \otimes \int_{u_1^2}^{u_2^2} y^{\frac{\nu-3}{2}} \left[\frac{(z^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4z^2} + u_2^2 - y \right]^{-1} dy \quad (D.6.6) \end{aligned}$$

Utilizando (D.5.13), apéndice (C.9) y apéndice (C.11) obtenemos

$$\int_{u_1^2}^{u_2^2} y^{\frac{\nu-3}{2}} \left[\frac{(z^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4z^2} + u_2^2 - y \right]^{-1} dy = 0$$

Por lo tanto el aporte de (D.6.6) es nulo.
Para el tercer término tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \oint \int \frac{d\rho_0 d\nu_0}{\omega_1 \omega_2} \left[\frac{1}{\nu_0 - i\omega_1} - \frac{1}{\nu_0 + i\omega_1} \right] \left[\frac{1}{\rho_0 - i\omega_2} - \frac{1}{\rho_0 + i\omega_2} \right] * \\ & * \phi(\rho_0 + \nu_0) H(u_2^2 - \bar{u}^2) = \end{aligned}$$

$$= \frac{i\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint \frac{\phi(z)}{z} dz \int_0^{u_2^2} x^{\frac{\nu-3}{2}} \left[\frac{(z^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4z^2} + u_2^2 - x \right]^{-1} dx \quad (D.6.7)$$

Nuevamente por (D.5.13), apéndice (C.9) y apéndice (C.11)

$$\begin{aligned} \int_0^{u_2^2} x^{\frac{\nu-3}{2}} \left[\frac{(z^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4z^2} + u_2^2 - x \right]^{-1} dx &= \\ &= -i\pi \left[\frac{(z^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4z^2} + u_2^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} \end{aligned}$$

Tenemos así

$$(D.6.7) = -\frac{\pi^{\frac{\nu+3}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \oint \frac{\phi(z)}{z} \left[\frac{(z^2 + u_1^2 - u_2^2)^2}{4z^2} + u_2^2 \right]^{\frac{\nu-3}{2}} dz \quad (D.6.8)$$

Los puntos de ramificación del integrando son

$$z = \pm i(u_2 \pm u_1)$$

Luego elegimos los cortes y las curvas como en la figura D.6.1

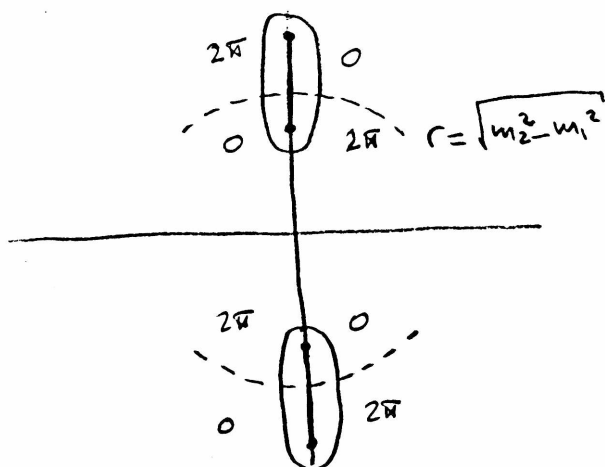


FIG. D.6.1

(D.6.8) es entonces

$$(D.6.8) = \frac{2\pi^{\frac{v+3}{2}}}{\Gamma(\frac{v-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H[y^2(m_2-m_1)^2] - H[y^2(m_2^2-m_1^2)] \right\} \frac{\phi(iy)}{|y|} dy \quad \otimes$$

$$\otimes \left[\frac{(-y^2+m_2^2-m_1^2)^2}{-4y^2} + m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} dy - \frac{2\pi^{\frac{v+3}{2}}}{\Gamma(\frac{v-1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ H[y^2(m_2^2-m_1^2)] - H[y^2(m_2+m_1)^2] \right\} dy \quad \otimes$$

$$\otimes \frac{\phi(iy)}{|y|} \left[\frac{(-y^2+m_2^2-m_1^2)^2}{-4y^2} + m_1^2 \right]^{\frac{v-3}{2}} dy \quad (D.6.9)$$

De (D.6.9) vemos que el tercer término no tiene aporte a la parte real. Por lo tanto por (D.6.5), en el eje real es

$$-i \frac{p v \epsilon}{p^2 - m_1^2} \otimes -i \frac{p v \epsilon}{p^2 - m_2^2} = -i \frac{p v}{p^2 - m_1^2} \otimes \frac{-i p v}{p^2 - m_2^2} =$$

$$= \begin{cases} \pi^2 \delta(p^2 - m_1^2) \otimes \delta(p^2 - m_2^2) & -p^2 \geq |m_1 - m_2|^2 \\ -\pi^2 \delta(p^2 - m_1^2) \otimes \delta(p^2 - m_2^2) & -p^2 < |m_1 - m_2|^2 \end{cases}$$

(D.6.10)

$$7_ - \text{Im} [i \Delta_F(p^2, m_1) \otimes \Delta_F(p^2, m_2)]$$

Teniendo en cuenta que

$$\Delta_F(p^2, m_1) = - \frac{i}{p^2 + m_1^2 - i\epsilon} = - \frac{i p v}{p^2 + m_1^2} + \pi \delta(p^2 + m_1^2) \quad (D.7.1)$$

es

$$\text{Im} [i \Delta_F(p^2, m_1) \otimes \Delta_F(p^2, m_2)] =$$

$$= -\frac{iPV}{p^2+m_1^2} * -\frac{iPV}{p^2+m_2^2} + \pi^2 \delta(p^2+m_1^2) * \delta(p^2+m_2^2)$$

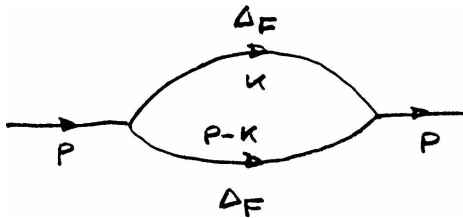
Por (D.4.18) es entonces

$$\begin{aligned} \text{Im} [i\Delta_F(p^2, m_1) * \Delta_F(p^2, m_2)] &= \\ &= \begin{cases} 2\pi^2 \delta(p^2+m_1^2) * \delta(p^2+m_2^2) & -p^2 \geq (m_1+m_2)^2 \\ 0 & -p^2 < (m_1+m_2)^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.7.2})$$

Haciendo $m_1 = m_2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Im} [i\Delta_F(p^2) * \Delta_F(p^2)] &= \\ &= \begin{cases} 2\pi^2 \delta(p^2+m^2) * \delta(p^2+m^2) & -p^2 \geq 4m^2 \\ 0 & -p^2 < 4m^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.7.3})$$

que no es otra cosa que la parte imaginaria de la autoenergía correspondiente a la parte bradionica del lagrangiano (V.2.13)



$$8_ \text{Im} [i\Delta_F(p^2, m_1) * \Delta_{FT}(p^2, m_2)]$$

Como

$$\Delta_{FT}(p^2, m_2) = -\frac{i}{p^2 - m_2^2 - i\epsilon} = -\frac{iPV}{p^2 - m_2^2} + \pi \delta(p^2 - m_2^2) \quad (D.8.1)$$

es

$$\begin{aligned} \text{Im} [i\Delta_F(p^2, m_1) * \Delta_{FT}(p^2, m_2)] &= \\ &= -\frac{iPV}{p^2 + m_1^2} * \frac{-iPV}{p^2 - m_2^2} + \pi^2 \delta(p^2 + m_1^2) * \delta(p^2 - m_2^2) \end{aligned} \quad (D.8.2)$$

Utilizando (D.5.19) obtenemos

$$\text{Im} [i\Delta_F(p^2, m_1) * \Delta_{FT}(p^2, m_2)] = \begin{cases} 2\pi^2 \delta(p^2 + m_1^2) * \delta(p^2 - m_2^2) & -p^2 \geq m_1^2 + m_2^2 \\ 0 & -p^2 < m_1^2 + m_2^2 \end{cases} \quad (D.8.3)$$

Haciendo $m_1 = m_2$ es

$$\text{Im} [i\Delta_F(p^2) * \Delta_{FT}(p^2)] = \begin{cases} 2\pi^2 \delta(p^2 + m^2) * \delta(p^2 - m^2) & -p^2 \geq 2m^2 \\ 0 & -p^2 < 2m^2 \end{cases} \quad (D.8.4)$$

$$9_ - \text{Im} [i \Delta_{FT}(p^2, m_1) * \Delta_{FT}(p^2, m_2)]$$

Por (D.8.1) es

$$\begin{aligned} \text{Im} [i \Delta_{FT}(p^2, m_1) * \Delta_{FT}(p^2, m_2)] &= \\ &= -\frac{iPV}{p^2 - m_1^2} * \frac{-iPV}{p^2 - m_2^2} + \pi^2 \delta(p^2 - m_1^2) * \delta(p^2 - m_2^2) \quad (\text{D.9.1}) \end{aligned}$$

Como consecuencia de (D.6.10) es entonces

$$\begin{aligned} \text{Im} [i \Delta_{FT}(p^2, m_1) * \Delta_{FT}(p^2, m_2)] &= \\ &= \begin{cases} 2\pi^2 \delta(p^2 - m_1^2) * \delta(p^2 - m_2^2) & -p^2 \geq |m_1 - m_2|^2 \\ 0 & -p^2 < |m_1 - m_2|^2 \end{cases} \quad (\text{D.9.2}) \end{aligned}$$

Cuando $m_1 = m_2$

$$\text{Im} [\Delta_{FT}(p^2) * \Delta_{FT}(p^2)] = 2\pi^2 \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{D.9.3})$$

$$10_ - \text{Im} [i \Delta_F(p^2, m_1) * \delta(p^2 - m_2^2)] - \text{Im} [i \Delta_{FT}(p^2, m_1) * \delta(p^2 - m_2^2)] -$$

El cálculo de estas partes imaginarias es inmediato notando que la convolución del valor principal con la delta es real y que el valor principal está multiplicado por -i. Así tenemos por (D.7.1)

$$\text{Im} [i \Delta_F(p^2, m_1) * \delta(p^2 - m_2^2)] = \pi \delta(p^2 - m_1^2) * \delta(p^2 - m_2^2) \quad (\text{D.10.1})$$

o cuando $m_1 = m_2$

$$\mathcal{I}_M [i\Delta_F(p^2) * \delta(p^2 - m^2)] = \pi \delta(p^2 + m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{D.10.2})$$

y por (D.8.1)

$$\mathcal{I}_M [i\Delta_{F_T}(p^2, m_1) * \delta(p^2 - m_2^2)] = \pi \delta(p^2 - m_1^2) * \delta(p^2 - m_2^2) \quad (\text{D.10.3})$$

que cuando $m_1 = m_2$ es

$$\mathcal{I}_M [i\Delta_{F_T}(p^2) * \delta(p^2 - m^2)] = \pi \delta(p^2 - m^2) * \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{D.10.4})$$

APENDICE E

MATRICES γ Y OPERADORES DIFERENCIALES

1. MATRICES γ

La representación que utilizamos está definida como

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad i=1,2,3 \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \quad (\text{E.1.1})$$

Se define

$$\tilde{\gamma}^i = \gamma^i \quad \tilde{\gamma}^0 = -\gamma^0 \quad (\text{E.1.2})$$

y se verifica

$$\gamma^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{E.1.3})$$

Definimos además

$$\gamma'^{\mu} = \gamma^\mu c \quad \tilde{\gamma}'^{\mu} = -c \tilde{\gamma}^\mu \quad c = \gamma^2 \gamma^5 \quad (\text{E.1.4})$$

Estas matrices también satisfacen

$$\gamma'^{\mu} \tilde{\gamma}'^{\nu} + \tilde{\gamma}'^{\nu} \gamma'^{\mu} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{E.1.5})$$

2_OPERADORES DIFERENCIALES

Definimos

$$\partial_{\dot{\alpha}} = \gamma^{\mu}_{\dot{\alpha}} \partial_{\mu} \quad (\text{E.2.1})$$

$$\partial_{\dot{\alpha}}^{\alpha} = \tilde{\gamma}^{\mu}_{\dot{\alpha}}{}^{\alpha} \partial_{\mu} \quad (\text{E.2.2})$$

Estos operadores satisfacen

$$\partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \square \quad (\text{E.2.3})$$

$$\partial_{\dot{\alpha}}^{\alpha} \partial_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \square \quad (\text{E.2.4})$$

$$\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_4} = \varepsilon^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \square^2 \quad (\text{E.2.5})$$

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \partial_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_1} \partial_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_2} \partial_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_3} \partial_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_4} = \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \square^2 \quad (\text{E.2.6})$$

$$\square = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_4^2 + \partial_5^2 - \partial_0^2$$

En el espacio de impulsos (E.2.3) y (E.2.4) son

$$\eta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \tilde{\eta}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} (\eta_0^2 - \vec{\eta}^2) \quad (\text{E.2.7})$$

$$\tilde{\eta}_{\dot{\alpha}}^{\alpha} \eta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} (\eta_0^2 - \vec{\eta}^2) \quad (\text{E.2.8})$$

y (E.2.5) y (E.2.6)

$$\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \eta_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_1} \eta_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_2} \eta_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_3} \eta_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_4} = \varepsilon^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} (\eta_0^2 - \vec{\eta}^2)^2 \quad (\text{E.2.9})$$

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4} \eta_{\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}_1} \eta_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_2} \eta_{\dot{\alpha}_3}^{\dot{\alpha}_3} \eta_{\dot{\alpha}_4}^{\dot{\alpha}_4} = \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} (\eta_0^2 - \vec{\eta}^2)^2 \quad (\text{E.2.10})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] L.D.Landau y E.M.Lifshitz: Teoría de la elasticidad. Reverté (1969).
- [2] R.Courant and D.Hilbert: Methods of mathematical physics. Interscience Publishers (1962).
- [3] Surya Prakas: Proc. Indian Acad. Sc. 240 (1950).
- [4] N.H.Barth and S.M.Christiensen: Phys. Rev. D28, 1876 (1983).
- [5] C.G.Bollini and J.J.Giambiagi: Phys. Rev. D32, Nro. 12, 3316 (1985).
- [6] C.G.Bollini and J.J.Giambiagi: Lagrangian procedures for higher order field equations. Preprint C.B.P.F.-NF-037/86.
- [7] E.Recamí: Rivista del Nuovo Cimento 6 (1986).
- [8] G.Feinberg: Phys. Rev. 159, 1089 (1967).
- [9] M.E.Arons and E.C.G.Sudarshan: Phys. Rev. 173, 1622 (1968).
- [10] T.Jacobson, N.C.Tsamis and R.P.Woodard: Phys. Rev. D38, 1823 (1988).
- [11] R.F.Streater and A.S.Wightman: Pct, spin and statistics and all that. Benjamin (1964).
- [12] E.Cartan: Lecons sur la theorie des spineurs. Herman, Paris (1938). Traducido como: The theory of spinors. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachussets (1966).
- [13] C.G.Bollini and J.J.Giambiagi. Phys. Rev. D39, Nro 9, 1169 (1989).
- [14] C.G.Bollini. Supersimetría. Notas de Centro Atomico Bariloche. S.C. de Bariloche (1985).
- [15] I.S.Sokolnikoff. Análisis Tensorial. Limusa, México (1976).
- [16] C.G.Bollini and J.J.Giambiagi. On tachyon quantization. Preprint C.B.P.F.-NF-038/90
- [17] N.Nakanishi. Sup. Prog. Theor. Phys.51 (1972).
- [18] I.Guelfand, G.Chilov, N.Vilenkin. Les distributions. Vol. 1,2,3,4. Dunod. Paris (1972).
- [19] Bateman Manuscript Project. Higher Transcendental Functions.
- [20] A.Visconti. Théorie Quantique Des Champs. Gauthier-Villars (1965). J.Schwinger. Phys. Rev. D82, Nro. 6, 914 (1952); Phys. Rev. D91, Nro.3, 713 (1953).
- [21] D.Barci. Tesis Doctoral. U.N.L.P. (1991).
- [22] A.Kolmogorov and S.Fomin. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. MIR. Moscu (1975).
- [23] G.Shilov. Mathematical analysis. Pergamon Press.
- [24] D.Jones. Funciones Generalizadas. URMO. Bilbao (1972).

