Construcción de funciones Semi-Contraction

Eduardo L. Fermé y Ricardo O. Rodriguez
Grupo de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial
Departamento de Computación, Universidad de Buenos Aires.
Pabellón I Ciudad Universitaria (1428), Buenos Aires, Argentina.
E_ mail: {ferme,ricardo}@dc.uba.ar

En memoria de Carlos E. Alchourrón

Palabras Clave: Teoría de Cambio, funciones Meet Contraction, Levi-contraction, Semi-Contraction

Resumen

La teoría de cambio de creencias irrumpe en la lógica filosófica y la inteligencia artificial en la última década. El paso inicial fue provisto por Levi [Lev80] y Alchourrón, Gärdenfors y Makinson en [AGM85] (comúnmente llamado el modelo AGM). Posteriormente, Levi propone un modelo de creencias que difiere en importantes aspectos del modelo AGM [Lev91]. En [HO95], Hansson y Olsson muestran una comparación entre ambos modelos, y crean una caracterización axiomática de las funciones Levi-contraction. En dicho artículo muestran que toda contracción AGM es una Levi-contractions y ambas posturas están confrontadas por el polémico postulado de Recovery. A medio camino entre ambas, en [Fer95] Fermé define las funciones semi-contraction, donde si bien no se satisface el postulado de Recovery, se preserva la idea de mínima pérdida. En este artículo proveeremos un método para construir funciones semi-contraction (basado en las construcciones "meet" de AGM y los conjuntos saturables de Levi) y su caracterización axiomática.

1 Introducción

En este artículo presentaremos una caracterización completa de un tipo de contracciones que no satisfacen el postulado de Recovery, pero que pueden relacionarce con las funciones de revisión AGM vía las identidades de Levi y Harper' respectivamente llamadas semi-contractions [Fer95]. El postulado de Recovery garantiza que no perderemos la información esencial de nuestro antiguo conocimiento, al punto que este puede ser recuperado en su totalidad agregando nuevamente la contraída sentencia. Sin embargo, algunos autores no aceptan la idea de mínima pérdida de contenido en la cual está basada recovery y cuestionan la validez del mismo. En este articulo no discutiremos ni los aspectos filosóficos ni pragmáticos que envuelven la aceptación o el rechazo de esta propiedad.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2, haremos una recorrida por los aspectos clásicos de la teoría de cambio y mencionaremos dos familias de funciones de contracción: *Partial Meet AGM* y *Partial Meet Levi*. Las primeras satisfacen la propiedad de recovery, mientras que las últimas no. En la sección 3, introduciremos las funciones semi-contraction presentadas por Fermé en [Fer95]. En la sección 4, mostraremos que las funciones semi-contraction pueden ser construidas a través de conjuntos de fórmulas especiales que llamaremos semi-saturables. En la sección 5, caracterizaremos las semi-contraction en términos de postulados. En la sección 6 veremos que las funciones de contracción que satisfacen nuestro *conjunto básico de postulados* pueden ser creadas vía conjuntos semi-saturables de fórmulas. El resultado de las últimas tres secciones puede ser resumido en el siguiente diagrama conmutativo:

conjuntos semi-saturables

Postulados Básicos semi-contraction

En la sección 7, el mismo es presentado en forma de teoremas. En la sección 8 marcaremos nuestras conclusiones.

2 Preliminares

La teoría de cambio de creencias irrumpe en la lógica filosófica y la inteligencia artificial en la última década. El paso inicial fue provisto por Levi [Lev80] y Alchourrón, Gärdenfors y Makinson in [AGM85] (comúnmente llamado el modelo AGM). Básicamente, en este modelo las creencias de un agente racional son representadas por un conjunto de creencias $\mathbf{K}$, cerrado bajo el operador de consecuencia lógica Cn, donde Cn satisface: $\mathbf{K} \subseteq Cn(\mathbf{K})$ para cada conjunto $\mathbf{K}$ de proposiciones, $Cn(Cn(\mathbf{K})) \subseteq Cn(\mathbf{K})$ y $Cn(\mathbf{K}) \subseteq Cn(\mathbf{H})$ si $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$. Asumimos que Cn incluye la noción de consecuencia lógica clásica, satisface la regla de introducción y disyunción dentro de las premisas, y es compacta.

Una teoría es un conjunto $\mathbf{K}$ de proposiciones cerrado bajo Cn, de modo tal que $Cn(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$.

Sea $\mathbf{L}$ el conjunto de todas el sentencias del lenguaje. Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de todas las teorías.

El espíritu de la contracción en el modelo AGM es retener la mayor porción posible del antiguo conocimiento. Cuando existe mas de un subconjunto maximal del conjunto original de creencias que no implica la sentencia que es contraída, se necesita un mecanismo de selección. La función *partial meet contraction* [AM82, AGM85] de $\mathbf{K}$ por una sentencia x de $\mathbf{L}$ será definida como la intersección de una selección entre los subconjuntos maximales de $\mathbf{K}$ que no implican x, i.e.

$$\mathbf{K}_x^- = \cap\gamma(\mathbf{K} \perp x)$$

dónde $\mathbf{K} \perp x$ es el conjunto de todos los subconjuntos maximales de $\mathbf{K}$ que no implican x; γ es una función de selección que satisface: $\gamma(\mathbf{K} \perp x)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbf{K}$ si y solo si $\mathbf{K} \perp x$ es no vacío, en cuyo caso $\gamma(\mathbf{K} \perp x) = \{\mathbf{K}\}$.

Las funciones partial meet contraction puede ser caracterizadas completamente por un conjunto de postulados:

TEOREMA 2.1 [AGM85] *Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de sentencias. Un operador* $-$ *sobre* $\mathbf{K}$ *es una partial meet contraction si y solo si* $-$ *satisface:*

($\mathbf{K_1^-}$) $\mathbf{K}_x^-$ *es una teoría siempre que* $\mathbf{K}$ *sea una teoría (closure)*

($\mathbf{K_2^-}$) $\mathbf{K}_x^- \subseteq \mathbf{K}$ *(inclusion)*

($\mathbf{K_3^-}$) *Si* $x \notin \mathbf{K}$, *entonces* $\mathbf{K}_x^- = \mathbf{K}$ *(vacuity)*

($\mathbf{K_4^-}$) *Si* $x \notin Cn(\emptyset)$, *entonces* $x \notin \mathbf{K}_x^-$ *(success)*

($\mathbf{K_5^-}$) *Si* $x \leftrightarrow y \in Cn(\emptyset)$ *entonces* $\mathbf{K}_x^- = \mathbf{K}_y^-$ *(extensionality)*

($\mathbf{K_6^-}$) $\mathbf{K} \subseteq Cn(\mathbf{K}_x^- \cup \{x\})$ *siempre que* $\mathbf{K}$ *sea una teoría (recovery).*

La dudosa intuición del último postulado provee una buena razón para intentar encontrar construcciones alternativas que satisfagan los primero cinco postulados AGM pero no *recovery.* En [Lev91], Levi presenta otro tipo de funciones, las cuales son similares a las partial meet contracción. Las mismas están basadas sobre una selección de aquellos subconjuntos de $\mathbf{K}$ que fallan al implicar x.

DEFINICION 2.1 *Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de creencias y* x *una sentencia. Definimos al conjunto saturable* $S(\mathbf{K}, x)$ *de manera que para todo conjunto* $\mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in S(\mathbf{K}, x)$ *si y solo si:*

$$\begin{cases} \mathbf{X} \subseteq \mathbf{K} \\ \mathbf{X} = Cn(\mathbf{X}) \\ Cn(\mathbf{X} \cup \{\neg x\}) \text{ es un subconjunto maximal consistente del lenguaje.} \end{cases}$$

LEMA 2.2 *[HO95]* $\mathbf{K} \perp x \subseteq S(\mathbf{K}, x)$.

La *partial meet Levi-contraction* es definida de la siguiente forma:

DEFINICION 2.2 *[HO95] Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de sentencias, x una sentencia y γ_L una función de selección para K. La* partial meet Levi-contraction *de* $\mathbf{K}$ *generada por γ_L es la operación $\sim_{\gamma_L}$ de manera tal que para toda sentencia x:*

$$(\mathbf{K}_x^{\sim\gamma_L}) = \cap\gamma_L(S(\mathbf{K}, x)).$$

En [HO95] Hansson y Olsson definen el siguiente postulado:

$(\mathbf{K}_\mathbf{F}^-)$ *Si $x \in Cn(\emptyset)$, entonces $\mathbf{K}_x^- = \mathbf{K}$ (failure).*

PROPOSICION 2.3 *[Fer95] Toda función* partial meet contracción *satisface* failure.

Hansson y Olsson obtuvieron una teorema de representación para la clase de funciones partial meet Levi-contraction::

TEOREMA 2.4 *[HO95] Sea* $\mathbf{K}$ *una conjunto de sentencias. Un operador $\sim$ sobre* $\mathbf{K}$ *es una partial meet Levi-contraction si y solo si $\sim$ satisface* closure, inclusion, vacuity, success, extensionality *y* failure.

COROLARIO 2.5 *Toda funcion* partial meet contracción *es una* partial meet Levi-contraction.

3 Semi-Contraction

En [Fer95], Fermé define las funciones semi-contraction a partir de la intersección de funciones de contracción AGM:

DEFINICION 3.1 *[Fer95] Sea* $\mathbf{L}$ *el conjunto de todas el sentencias del lenguaje. Sea* $\mathcal{K}$ *el conjunto de todas las teorías. Una función* $\underline{\mathrm{s}}$: $\mathbf{K}$ x $\mathbf{L}$ *es una* **semi-contraction** *si y solo si existe una función* partial meet contraction $-$ *de manera que para todo* $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$ *y* $x \in \mathbf{L}$*:*

$$\mathbf{K}_x^{\underline{s}} = \mathbf{K}_x^- \cap \mathbf{K}_{\mathbf{w}_x}^-, \textit{ dónde } \mathbf{w}_x = x \rightarrow x_j;\ x_j = \mathbf{Sel}(\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-)$$

Aquí, $\mathrm{Sel}(\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-)$ *selecciona un elemento de* $\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-$*; y esto es equivalente a seleccionar cualquier subconjunto finito de* $\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-$*, dado que si dos sentencias están en* $\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-$*, su conjunción también se encuentra en* $\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-$ *(la demostración es trivial). Si* $\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^- = \emptyset$*, entonces* $\mathbf{Sel}(\mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-)$ *toma el valor* x*.*

La funciones semi-contraction satisfacen las siguientes propiedades:

TEOREMA 3.1 *[Fer95] Toda* función semi-contraction *satisface* closure, inclusion, vacuity, success, extensionality *y* failure.

COROLARIO 3.2 *Toda* función semi-contraction *es una* función partial meet Levi-contraction.

TEOREMA 3.3 *[Fer95] Toda* función semi-contraction *satisface* recovery *si y solo si* $x \rightarrow x_j \in Cn(\emptyset)$*.*

COROLARIO 3.4 *Sea* $\mathbf{K}$ *be una teoría,* $-$ *una* partial meet contracción función *para* $\mathbf{K}$ *y* $\underline{\mathrm{s}}$ *su función semi-contraction asociada Si* $\underline{\mathrm{s}}$ *satisface* recovery *entonces* $\mathbf{K}_x^{\underline{s}} = \mathbf{K}_x^-$.

COROLARIO 3.5 *Toda* partial meet contracción función *es una* semi-contraction función.

4 Propiedades adicionales de las funciones Semi-contraction

El espíritu del postulado *recovery* es la mínima pérdida del antiguo conocimiento. En concordancia con esta idea definiremos el siguiente postulado.

($\mathbf{K}^-_{\mathbf{wr}}$) If $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}^-_x$ entonces $\exists x_j \in \mathbf{K}, x \vee x_j \notin \mathbf{K}^-_x$ y $\mathbf{K} \subseteq Cn(\mathbf{K}^-_x \cup \{x \wedge x_j\})$.
(weak recovery)

TEOREMA 4.1 *Toda función semi-contraction satisface* weak recovery.

COROLARIO 4.2 $\mathbf{K}^{\mathbf{s}}_x$ *definido como en* **Definition 3.1** *satisface* closure, inclusion, vacuity, success, extensionality, failure *y* weak recovery.

5 Como construir funciones Semi-Contraction

A medio camino entre $(K \perp x)$ y $S(K,x)$, definiremos los conjuntos semi-saturables: Formalmente:

DEFINICION 5.1 *Sea* $\mathbf{K}$ *be una conjunto de creençias y* x, x_j *sentencias. Entonces el conjunto de semi-saturables* $SS(\mathbf{K},x,x_j)$ *es el conjunto tal que para todas* $\mathbf{X}, \mathbf{X} \in SS(\mathbf{K},x,x_j)$ *si y solo si:*

$$\begin{cases} \mathbf{X} \subseteq \mathbf{K} \\ \mathbf{X} = Cn(\mathbf{X}) \\ Cn(\mathbf{X} \cup \{\neg x \wedge \neg x_j\} \text{ es un subconjunto maximal consistente} \\ \qquad \text{del lenguaje.} \\ \mathbf{K} \subseteq Cn(\mathbf{X} \cup \{x \wedge x_j\}) \end{cases}$$

En el siguiente lema veremos que $SS(\mathbf{K},x,x_j)$. se encuentra entre $\mathbf{K} \perp (x \vee x_j)$ y $S(\mathbf{K}, x \vee x_j)$.

LEMA 5.1 $\mathbf{K} \perp (x \vee x_j) \subseteq SS(\mathbf{K},x,x_j)$.

LEMA 5.2 $SS(\mathbf{K},x,x_j) \subseteq S(\mathbf{K},x \vee x_j)$.

Del mismo modo que construimos las funciones *partial meet contractions* a través de una función de selección sobre $\mathbf{K}\perp x$, construiremos nuestras funciones semi-contraction por medio de una función de selección sobre el conjunto de semi- saturables $SS(\mathbf{K},x,x_j)$. La idea intuitiva es que una función de selección γ tomará del conjunto $SS(\mathbf{K},\mathbf{x},\mathbf{x_j})$ aquellos semi-saturables que son "más importantes". Formalmente:

DEFINICION 5.2 *Sea* $\mathbf{K}$ *un subconjunto de* $\mathbf{L}$*:* γ *es una función de selección sobre* K *si y solo si* γ *es una función de* $\mathcal{PP}(\mathcal{K})$*, de manera que* $\gamma(\Omega)$ *es un subconjunto no vacío de* Ω*, salvo que* Ω *sea vacío, en cuyo caso* $\gamma(\Omega) = \{K\}$.

Si la función de selección tiene más de un elemento $SS(\mathbf{K},x,x_j)$ como óptimo, entonces debemos tomar lo que ellos tiene en común, i.e. la intersección entre dichos elementos. (En el caso límite, γ seleccionará un solo elemento de $SS(\mathbf{K},x,x_j)$).

TEOREMA 5.3 *Sea* $\sim$ *sobre* $\mathbf{K}$ *definido como* $\mathbf{K}_x^\sim = \cap\gamma(SS(\mathbf{K},x,x_j))$, *entonces* $\sim$ *es una* función semi- contraction, *i.e. existe una* partial meet contracción función $-$ *de manera que* $\mathbf{K}_x^\sim = \mathbf{K}_x^- \cap \mathbf{K}_{x\to x_j}^-, x_j \in \mathbf{K}/\mathbf{K}_x^-$.

6 Caracterización axiomática para conjuntos semi-saturables

TEOREMA 6.1 *Sea* $\sim$ *un operador sobre* $\mathbf{K}$ *que satisface* closure, inclusion, vacuity, success, extensionality, failure *y* weak recovery, *entonces existe una función de selección* γ *sobre* $\mathbf{K}$ *y una sentencia* x_j *de manera que* $\mathbf{K}_x^\sim = \cap\gamma(SS(\mathbf{K},x,x_j))$.

7 Caracterización para las funciones Semi-Contraction

Basados en el Corolario 4.2 y los teoremas 5.3 y 6.1 podemos dar una caracterización para las funciones de la siguiente forma:

TEOREMA 7.1 *Un operador $\sim$ sobre* $\mathbf{K}$ *es una función semi- contraction si y solo si satisface el siguiente conjunto de postulados:*

($\mathbf{K_1^-}$) $\mathbf{K}_x^-$ *es una teoría siempre que* $\mathbf{K}$ *sea una teoría (closure)*

($\mathbf{K_2^-}$) $\mathbf{K}_x^- \subseteq \mathbf{K}$ *(inclusion)*

($\mathbf{K_3^-}$) *Si* $x \notin \mathbf{K}$, *entonces* $\mathbf{K}_x^- = \mathbf{K}$ *(vacuity)*

($\mathbf{K_4^-}$) *Si* $x \notin Cn(\emptyset)$, *entonces* $x \notin \mathbf{K}_x^-$ *(success)*

($\mathbf{K_5^-}$) *Si* $x \leftrightarrow y \in Cn(\emptyset)$ *entonces* $\mathbf{K}_x^- = \mathbf{K}_y^-$ *(extensionality)*

($\mathbf{K_F^-}$) *Si* $x \in Cn(\emptyset)$, *entonces* $\mathbf{K}_x^- = \mathbf{K}$ *(failure).*

($\mathbf{K_{wr}^-}$) *Si* $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}_x^-$ *entonces* $\exists x_j \in \mathbf{K}, x \vee x_j \notin \mathbf{K}_x^-$ *y* $\mathbf{K} \subseteq Cn(\mathbf{K}_x^- \cup \{x \wedge x_j\})$. *(weak recovery)*

TEOREMA 7.2 *Sea $\sim$ un operador sobre* $\mathbf{K}$. $\sim$ *satisface* closure, inclusion, vacuity, success, extensionality, failure *y* weak recovery *si y solo si existe una función de selección γ sobre* $\mathbf{K}$ *y una sentencia x_j de manera que* $\mathbf{K}_x^\sim = \cap\gamma(SS(\mathbf{K}, x, x_j))$.

TEOREMA 7.3 *Sea $\sim$ un operador sobre* $\mathbf{K}$. $\sim$ *es una* función Semi-contraction *si y solo si existe una función de selección γ sobre* $\mathbf{K}$ *y una sentencia x_j de manera que* $\mathbf{K}_x^\sim = \cap\gamma(SS(\mathbf{K}, x, x_j))$.

8 Conclusiones

El presente trabajo contiene dos resultados formales principales: (1) una caracterización axiomática de las funciones semi-contraction en términos de *closure, inclusion, vacuity, success, extensionality, failure* y *weak recovery.* (2) una construction de funciones semi-contraction, similar a la utilizada para construir *partial meet contraction* y que es basada sobre una selección, no sobre los subconjuntos maximales de **K** que fallan al implicar x, sino sobre los conjuntos *semi- saturables*, i.e. un largo conjunto de subconjuntos de **K** que fallan al implicar $x \vee x_j$, dónde x_j es el fórmula que nosotros estamos dispuestos a no recuperar.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a Verónica Becher y Carlos Areces por sus valiosos aportes en la discusión de las ideas iniciales y a David Makinson por sus correciones sobre la primer versión de este artículo.

Referencias

[AGM85] Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[AM82] Carlos Alchourrón and David Makinson. On the logic of theory change: contraction functions and their associated revision functions. *Theoria*, 48:14–37, 1982.

[AM85] Carlos Alchourrón and David Makinson. The logic of theory change: safe contraction. *Studia Logica*, 44:405–422, 1985.

[Fer95] Eduardo Fermé. WR: Contraction Without Recovery. (Segundo Workshop sobre Aspectos Teóricos de la Inteligencia Artificial), 1995.

[Gär88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States.* MIT Press, Cambridge, 1988.

[GM88] Peter Gärdenfors and David Makinson. Revision of knowledge systems using epistemic entrenchment. *Second conference on theoretical aspects of reasoning about knowledge*, 83–95, 1988.

[Han91] Sven Ove Hansson. Belief contraction without recovery. *Studia Logica*, 50:251–260, 1991.

[Han93] Sven Ove Hansson. A textbook of belief dynamics. 1993. (First draft copy).

[Han95] Sven Ove Hansson. Knowledge level analysis of belief revision. *Artifficial Intelligence, In Press*, 1995.

[HO95] Sven Ove Hansson and Erik Olsson Levi Contraction and AGM Contraction. A coparision. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36:103-119.1995.

[Lev80] Isaac Levi. *The Enterprise of Knowledge.* MIT Press, Cambridge, 1980.

[Lev91] Isaac Levi. *The Fixation of Beliefs and its undoing.* Cambridge University Press, 1991.

[Mak87] David Makinson. On the status of the postulate of recovery in the logic of theory change. *The Journal of Philosophical Logic*, 16:383–394, 1987.

[Nay94] Abhaya Nayak. Foundational belief change. *Journal of Philosophical Logic*, 1994.

[Rot91] Hans Rott.. Two Methods of Constructing Contractions and Revisions of Knowledge Systems. *Journal of Philosophical Logic*, , 20:149–173.1991.