

## Wavelets y sus Aplicaciones

Liliana R. Castro, Silvia M. Castro  
Depto. de Matemática - Depto. de Computación  
Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253 - (8000) - Bahía Blanca - ARGENTINA  
e-mail: lcastro,uscastro@criba.edu.ar

### Abstract

Se presenta una introducción a la teoría de wavelets. Además, se da una revisión histórica de cómo fueron introducidas las wavelets para la representación de funciones. Se efectúa una comparación entre la transformada wavelet y la transformada de Fourier. Por último, se presentan también algunas de los múltiples aplicaciones de esta nueva herramienta de análisis armónico.

## 1 Introducción

Las wavelets (también llamadas ondelettes u onditas) son funciones que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos y son utilizadas para la representación de datos o de otras funciones. Las wavelets son muy adecuadas para aproximación de datos con variaciones o con discontinuidades abruptas. La idea fundamental detrás de las wavelets es analizar funciones de acuerdo a escalas. En el análisis por wavelets la escala que se utiliza para analizar los datos juega un papel especial. Los algoritmos que utilizan wavelets procesan los datos a diferentes escalas o resoluciones. Si se observa una señal o función utilizando una “ventana” ancha, no se observan los pequeños detalles; en cambio, si la “ventana” utilizada es angosta, entonces se los puede observar. En análisis por wavelets, esas ventanas se ajustan automáticamente al cambiar de resolución. Esto hace que las wavelets sean una herramienta útil e interesante.

El procedimiento general del análisis utilizando wavelets es adoptar una función “prototipo”, llamada generalmente *wavelet madre*. El análisis temporal se realiza entonces utilizando dilataciones y traslaciones de dicha función. La señal original se podrá entonces representar como combinación lineal de la función original y de sus trasladadas y dilatadas. Esto se denomina una *expansión en wavelets*.

La elección de la wavelet madre (y de este modo de la *base* o del *marco* de wavelets) no es única y depende del tipo de funciones o de datos a analizar. Una elección adecuada o la eliminación de coeficientes por debajo de un umbral prefijado, hace que las wavelets sean una herramienta excelente, entre otras, para la compresión de datos.

## 2 Breve reseña histórica

En la historia de la matemática, el análisis utilizando wavelets tiene diferentes orígenes. Gran parte de su desarrollo se llevó a cabo alrededor de 1930 pero, en ese momento, los diferentes esfuerzos no parecían formar parte de una misma teoría. Sólo en la actualidad sabemos ciertamente que todo ese trabajo previo delineaba ya la teoría de wavelets.

Cada uno de los orígenes del análisis por wavelets corresponde a un punto de vista específico y a una técnica en particular que solamente ahora es posible ver desde una perspectiva científica común.

Podemos decir que el origen de esta nueva teoría se remonta a Joseph Fourier con su análisis en el dominio frecuencia, conocido como Análisis de Fourier. Como es bien conocido, él asegura que cualquier función  $f(x)$  periódica de período  $T$  puede escribirse como superposición de funciones  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  :

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_k \cos 2\pi\omega_k x + b_k \sin 2\pi\omega_k x), \quad \omega_k = \frac{k}{T}$$

Es decir se puede expresar como la suma de una *serie de Fourier* cuyos coeficientes están dados por:

$$a_k = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \cos 2\pi\omega_k x \, dx \quad b_k = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \sin 2\pi\omega_k x \, dx$$

siendo  $t_0$  un punto cualquiera (generalmente se elige igual a cero).

Las afirmaciones de Fourier jugaron un rol esencial en la evolución de las ideas que los matemáticos tenían sobre funciones e integrales. El pasaje de una representación de funciones por medio de polinomios a otra de la forma expuesta por Fourier abrió, sin él saberlo, un nuevo universo en la teoría de funciones. La teoría de Fourier fue después probada y llevada a su marco justo gracias a contribuciones de matemáticos como, por ejemplo, Henri Lebesgue.

El estudio de los problemas de convergencia de las series de Fourier, del significado de las funciones y de los sistemas ortogonales, llevó a los matemáticos en forma gradual desde la noción de *análisis en el dominio tiempo-frecuencia* al de *análisis en el dominio tiempo-escala*. Este desarrollo contribuyó a la posterior definición de wavelets.

Podríamos decir que la primera mención de wavelets se remonta a Haar que se preguntó a sí mismo si no sería posible que existiera otro sistema ortonormal de funciones  $h_0(x), h_1(x), \dots, h_n(x)$  definidas en el intervalo  $[0, 1]$  de manera tal que para cualquier función  $f(x)$ , continua en  $[0, 1]$ , la serie:  $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle$  convergiera uniformemente a  $f(x)$  en dicho intervalo, siendo  $\langle f, h_n \rangle$  el producto escalar entre las funciones  $h_n$  y  $f(x)$ . Este problema no tiene una solución única. Haar descubrió, en 1909, la solución más simple y, al mismo tiempo, abrió uno de los caminos que conducirían a las wavelets.

Las críticas a las funciones de Haar son las siguientes: Los "átomos"  $h_n(x)$  utilizados en la construcción de una función continua  $f(x)$  son funciones discontinuas y por lo tanto hay una falta de coherencia. Además, si se desea aproximar una función que sea  $C^1$ , la utilización de funciones escalón es totalmente inapropiada. Estos problemas y la idea de aproximar el gráfico de una función por medio de poligonales, llevaron a Faber y Schauder a reemplazar las funciones de Haar por sus primitivas. Esta línea de investigación comenzó en 1910 y continuó hasta 1920, dando lugar a las bases de Schauder.

Hacia los años 1930, diversos grupos investigaron acerca de la representación de funciones utilizando bases de funciones variantes en escala. El físico Paul Lévy utilizó este tipo de bases para el estudio del movimiento browniano, que es una señal random. Encontró que, para este tipo de señales, las bases de Schauder eran superiores a las de Fourier para estudiar propiedades de regularidad de las mismas. Estos trabajos y sus extensiones posteriores, mostraron que los sistemas trigonométricos no proveen un acceso tan directo y simple para estudiar las regularidades locales de una señal que, al ser analizadas con otros sistemas, aparecen claramente.

Otra dificultad que se presentaba en problemas de física era tratar de localizar la energía de una función. Sabemos que la energía total de una función está dada por la suma de los cuadrados de los coeficientes de Fourier si la función se puede desarrollar en una base de Fourier. Ahora bien, a veces es importante saber si dicha energía está concentrada en algunos puntos o distribuida a lo largo del eje real. Para saberlo, es necesario manipular las series de Fourier de manera especial,

descubierta por Littlewood y Paley, también en la década de 1930. Hasta este momento las wavelets no habían aparecido. El camino que unió los trabajos de Littlewood-Paley con el análisis por wavelets fue realizado por el grupo de Zygmund en la Universidad de Chicago. Aparece entonces la wavelet madre y la función de Littlewood-Paley-Stein que permite variar arbitrariamente las escalas utilizadas en el análisis. Durante los primeros años de la década de 1980, los trabajos de Littlewood-Paley sirvieron de base para los algoritmos de Marr y de Mallat para procesamiento de imágenes.

En 1927, Philip Franklin, profesor del MIT, creó una base ortonormal a partir de una base de Schauder utilizando el método de Gram-Schmidt. El problema de estas bases es que no pueden ser derivadas a partir de traslaciones y dilataciones de una única función, lo que causó que los sistemas de Franklin fueran abandonados momentáneamente. Otros trabajos que se pueden interpretar ahora desde el punto de vista de wavelets son los de Lusin, que se refieren al análisis y síntesis de funciones en espacios de Hardy.

Entre 1960 y 1980, Guido Weiss y Ronald Coifman se abocaron al estudio de los *átomos* y de la *descomposición atómica*. Los átomos se puede interpretar como los elementos más simples de un espacio de funciones. El objetivo de esta teoría es hallar, para los espacios funcionales usuales, los átomos y las reglas que permiten reconstruir todos los elementos de ese espacio funcional utilizando esos átomos. Una de las aproximaciones a la descomposición en átomos está dada por la resolución de la identidad de Calderón. Grossman y Morlet “redescubrieron” esta identidad en 1980, 20 años después del trabajo de Calderón, y denominaron a la función definida por éste con el nombre de *wavelet analizadora*.

Después de 1980, más precisamente en 1985, las wavelets tuvieron un impacto adicional gracias al trabajo de Stephane Mallat con su paper en procesamiento de imágenes. En esa contribución presentó claramente las relaciones existentes entre filtros, algoritmo piramidal y bases ortonormales de wavelets, junto con aplicaciones a procesamiento de imágenes. Inspirado en parte por este trabajo, Yves Meyer construyó la primera base no trivial de wavelets que es, a diferencia de las de Haar, diferenciable aunque su soporte no es compacto. Unos años más tarde, Ingrid Daubechies se basó en el trabajo de Mallat para construir un conjunto de wavelets madre de soporte compacto que generan bases ortonormales de funciones. La construcción que presenta I. Daubechies es tal vez la más elegante y se ha convertido, en la actualidad, en uno de los pilares de las aplicaciones de las wavelets.

### 3 Transformada de Fourier y Transformada wavelet

#### 3.1 Transformada de Fourier

Por la forma en que está definida, la transformada de Fourier (TF) permite analizar una señal periódica (observemos que podemos considerar que una función tiene período infinito) en el dominio tiempo dado su contenido en frecuencia. Esto se debe a que los coeficientes de Fourier de la función transformada representan la contribución de cada función seno y coseno según cada frecuencia. Bajo ciertas condiciones, es posible, después de haber realizado el estudio en el dominio frecuencia, retornar al dominio tiempo aplicando para ello la antitransformada de Fourier. La TF y su antitransformada tienen propiedades de simetría que resultan muy útiles para trabajar.

El mayor inconveniente que presenta esa transformada es que, para conocer el valor de la señal transformada en una determinada frecuencia, es necesario conocer la evolución de la señal en todo instante de tiempo. Es decir, la TF permite localización en frecuencia pero no en tiempo.

### 3.2 Transformada discreta de Fourier

Como su nombre lo indica, la transformada discreta de Fourier (TDF) permite hallar la TF de una función a partir de un número infinito de puntos que representan a la señal. Es decir, se aplica cuando no se conoce una expresión analítica de la señal sino que se tiene solamente información de la misma en un conjunto de puntos. La TDF y su antitransformada conservan las características de simetría que poseen en el caso anterior, lo que facilita sumamente los cálculos.

Los inconvenientes de la TDF son los mismos que en el caso de la TF. Cuando las muestras de la función están uniformemente espaciadas, la TDF puede hallarse mediante un algoritmo que disminuye notablemente la cantidad de operaciones aritméticas involucradas y que recibe el nombre de *transformada rápida de Fourier* (FFT).

### 3.3 Transformada corta de Fourier

Para solucionar en parte los inconvenientes que se presentan en los casos anteriores, es posible definir la transformada corta de Fourier (TCF). Básicamente, lo que se hace con la TCF es dividir en partes a la función que se desea analizar y estudiar el contenido frecuencial de cada sección. Para ello se utiliza lo que se denomina una *función ventana*. Esta función ventana debería ser ancha si las variaciones de la señal son lentas (bajas frecuencias) o angosta si la función tiene variaciones rápidas (altas frecuencias). Por otra parte, la función ventana va generalmente acompañada de una función de peso que permite dar menor énfasis a los puntos cercanos a los extremos de la función ventana.

De esta manera, la TCF permite una suerte de localización en tiempo y en frecuencia. Por otra parte, para conocer la TCF no es necesario conocer la función para cualquier valor futuro de la variable independiente.

El inconveniente que presenta la TCF es que, una vez fijada la función ventana, es la misma para toda la función y no se adapta a los cambios de frecuencia que sufre la misma. Este inconveniente hace que, en ocasiones, no se pueda inferir acerca del comportamiento de la función en base a su contenido de frecuencias.

### 3.4 Transformada wavelet discreta

A diferencia del caso de la TF, vamos a presentar en primer lugar la transformada wavelet discreta diádica (TWD) y a partir de ella la transformada wavelet continua o simplemente transformada wavelet (TW). Para ello, llamemos  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  a la wavelet madre que origina, mediante traslaciones y dilataciones, una base ortonormal. Es decir, el conjunto de funciones que forman la base está definido de la siguiente manera:

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - n) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

A la descomposición originada por este tipo de wavelets se lo denomina *descomposición en octavas*. Observemos que el entero  $m$  en la escala indica el ancho de la wavelet y el índice  $n$  da la localización en tiempo. En este caso, la wavelet madre está dilatada o re-escalada en escalas que son potencias de 2 y trasladadas en traslaciones enteras. Observemos que una de las ventajas de este tipo de bases es que, conociendo el comportamiento de la wavelet madre, es posible conocer el comportamiento de toda la base. Es importante señalar que no se puede tomar cualquier función como wavelet madre. Por el contrario, dicha función debe verificar lo que se denomina *condición de admisibilidad*:  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ . Esto también se expresa diciendo que  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Así se restringe a las  $\psi(x)$  a funciones de decrecimiento rápido. Por otra parte la wavelet madre debe oscilar. Esta

característica, conjuntamente con su decrecimiento rápido, da su nombre a la wavelet (ondita). La condición de admisibilidad permite definir la antitransformada wavelet.

A partir de la wavelet madre es posible definir, para una función de  $L^2(\mathbb{R})$ , la transformada wavelet discreta (TWD) de la siguiente manera:

$$\tilde{f}(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_{m,n}(x) f(x) dx = \langle \psi_{m,n}, f \rangle$$

siendo  $\langle \cdot \rangle$  el producto interno definido en  $L^2(\mathbb{R})$ .

En el caso en que los parámetros discretos  $m$  y  $n$  se reemplacen por números reales cualesquiera  $a$  ( $a \neq 0$ ) y  $b$  respectivamente, obtenemos la denominada *transformada wavelet continua* (TW). En este caso no se obtiene, en general, una base ortonormal sino un *marco generalizado*.

### 3.4.1 Análisis por multirresoluciones

No podemos dejar de mencionar esta metodología (Mallat, 1986) para realizar la descomposición (análisis) y reconstrucción (síntesis) de una señal en base de wavelets, tomando como base la base de wavelets diádica. Este método está definido recursivamente y podemos describirlo, desprovisto de todo formalismo matemático, de la siguiente manera.

Supongamos tener una señal  $f(t)$ , a la que discretizamos a intervalos diádicos regulares. A esa discretización de la señal original la llamamos  $f_{2^0}$ , siendo el subíndice de  $f$  el que indica la resolución. Se filtra la señal a través de un filtro pasabajos  $\tilde{G}$  y de un filtro pasabanda  $\tilde{H}$  obteniéndose un promediado de la misma, que llamamos  $f_{2^{-1}}$  y un detalle, al que llamamos  $d_{2^{-1}}$  respectivamente. La  $f_{2^{-1}}$  sería entonces una versión "borrosa" de la  $f_{2^0}$ . Se repite este proceso obteniendo finalmente una sucesión  $f_{2^0}, f_{2^{-1}}, f_{2^{-2}}, \dots$  de versiones cada vez más borrosas de la señal original y una sucesión de detalles  $d_{2^{-1}}, d_{2^{-2}}, d_{2^{-3}}, \dots$  que son extraídos en cada escala sucesiva. Estos detalles son los coeficientes de la señal original expresada, en la escala  $2^{-j}$ , como superposición de wavelets diádicas  $\psi_{j,n}$  definidas en el párrafo anterior. La wavelet madre  $\psi(x)$  es muy especial ya que se obtiene recursivamente a partir de los coeficientes asociados con el proceso de obtener la versión borrosa de la señal.

Al cabo de  $N$  iteraciones, la señal original se puede obtener como superposición de la última versión borrosa  $f_{2^{-N}}$  y de los detalles, es decir:  $f_{2^0} = f_{2^{-N}} + d_{2^{-1}} + d_{2^{-2}} + \dots + d_{2^{-N}}$ .

Debemos notar que la reconstrucción de la señal a partir de la sucesión  $f_{2^{-N}}, d_{2^{-N}}, \dots, d_{2^{-1}}$  se efectúa con un proceso similar de filtrado a través de filtros  $H$  y  $G$ . Estos filtros están relacionados con los anteriores por medio de las fórmulas  $\tilde{h}(n) = (-1)^n h(1-n)$ ,  $\tilde{g}(n) = (-1)^n g(1-n)$ , siendo  $g(n)$  y  $h(n)$  los coeficientes de  $H$  y  $G$ .

Nuevamente, como en el caso de la FFT, un algoritmo que facilita la descomposición de manera de reducir la cantidad de operaciones involucradas se denomina *transformada wavelet rápida* (FWT).

Para terminar, señalemos que este algoritmo recursivo está basado en lo que se denomina un *algoritmo piramidal* y que al par de filtros asociados a la descomposición se los denomina *par de filtros espejo en cuadratura* por la manera en que se relacionan entre sí.

## 3.5 Paquetes de wavelets

Se denominan así a combinaciones lineales particulares de wavelets. Estas combinaciones lineales conservan muchas de las propiedades de las wavelets como ortogonalidad, suavidad y localización. Los coeficientes de la combinación lineal se obtienen por medio de un algoritmo recursivo.

## 4 Analogías y diferencias entre la FFT y la TWD

### 4.1 Analogías

Ambas transformadas son operaciones lineales que pueden pensarse como rotaciones de un espacio de funciones a un dominio diferente. En este nuevo dominio, la FFT tiene como base de funciones a los senos y cosenos; la TWD tiene como base de funciones una base de wavelets. Ambas transformadas tienen otra similitud: ambas bases de funciones tienen localización en frecuencia.

### 4.2 Diferencias

La diferencia más interesante entre ambas transformadas es que el tamaño de la ventana en la TWD varía según la escala, mientras que en la FFT la ventana es fija. Esto permite una mejor localización en tiempo-frecuencia. Podemos observar las diferencias de resolución en tiempo-frecuencia de ambas transformadas observando el cubrimiento del espacio tiempo-frecuencia por medio de las funciones de ambas bases en la Figura 1.

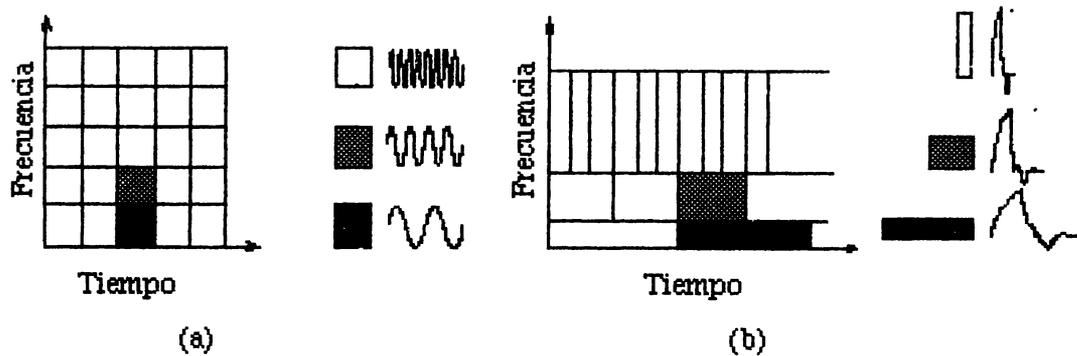


Figure 1: Cubrimiento del espacio tiempo-frecuencia. (a) Base de Fourier (b) Base de wavelets de Daubechies

Otra diferencia es que, en el caso de la FFT la base de funciones es siempre la misma mientras que en la TWD es posible elegir diferentes madres wavelet que originarán diferentes bases de funciones. Esto permite elegir una base adecuada según el problema que se desee estudiar. De este modo, el análisis de señales utilizando bases de wavelets provee acceso inmediato a información de la señal que permanece oculto a otro tipo de análisis.

## 5 Aplicaciones

Hemos visto que las wavelets son una herramienta matemática para descomponer funciones jerárquicamente. Es por esto que las áreas de aplicación de la transformada wavelet son tan diversas y, si bien la mayoría de la teoría de wavelets ya ha sido desarrollada, aún resta mucho para hacer desde el punto de vista de sus aplicaciones. Aunque la lista no pretende ser exhaustiva, a continuación se detallan algunas aplicaciones con el objeto de que se vea el amplio rango de posibilidades que ofrece dicha transformada.

### 5.1 Wavelets y Compresión

La meta de la compresión es partir de un conjunto de datos es expresarlo usando algún conjunto de datos menor con ninguna o con la menor cantidad de pérdida de información posible. Podemos definir entonces la compresión como la representación de una función utilizando menos coeficientes de la base de funciones que los dados originalmente. O sea que dada una  $f(x)$ ,

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \psi_i(x)$$

se requiere encontrar una función  $f^*(x)$ , que aproxime a  $f(x)$ ,

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^{k'} c'_i \psi_i(x)$$

de modo tal que  $k' < k$  y  $\|f(x) - f^*(x)\| < \epsilon$ , siendo  $\epsilon$  una tolerancia especificada por el usuario. Es claro que la transformada wavelet puede aplicarse a una función n-dimensional. Esto puede aplicarse para la compresión de ondas de sonido.

Si se trata de una función bidimensional, ésta puede representar una determinada imagen. En este caso, la representación en base de wavelets corresponde a una descomposición de la imagen en un conjunto de bandas de frecuencia independientes y tres orientaciones espaciales. Cada imagen de detalle  $d_{2j}$  da el contraste de la imagen en un dado rango de frecuencias y a lo largo de una orientación particular.

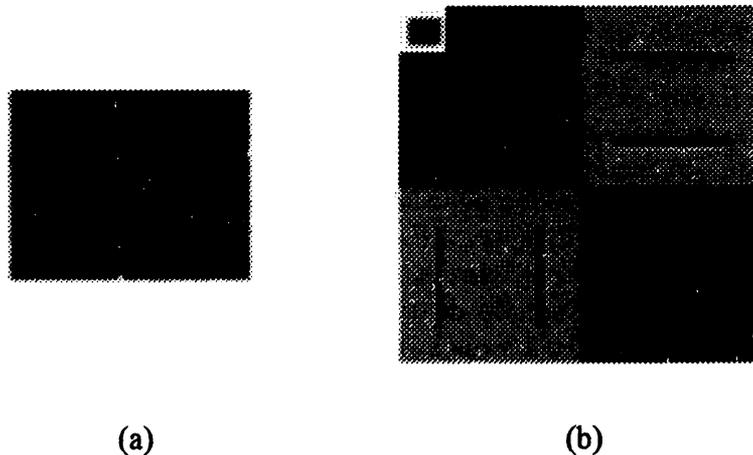


Figure 2: (a) Imagen original (b) Representación wavelet en tres niveles de resolución

Para reconstruir la imagen original, podemos permitir que ocurran errores en tanto no se destruya la información relevante para un observador humano. En este caso, se ha probado experimentalmente que la distorsión visible en una imagen reconstruida no depende sólo del error medio cuadrático total sino también de la distribución de este error entre los diferentes detalles  $d_{2j}$ . Se mostró que el sistema visual humano tiene sensibilidad máxima cuando el contraste es horizontal o vertical; sin embargo, cuando el contraste está ubicado a  $45^\circ$ , la sensibilidad es mínima. Por ello, es posible adaptar el error de codificación de cada imagen de detalle a la sensibilidad del ojo humano. Cuanto más sensitivo es el sistema visual humano, menos error de codificación debemos introducir

en la imagen de detalle  $d_{2j}$ . Es decir que en la reconstrucción se puede lograr una aproximación suficientemente buena de la imagen original usando sólo los detalles significativos. Se logran entonces niveles altos de compresión.

En tres dimensiones, la transformada wavelet permite la representación de un sólido. En este caso el volumen de un objeto es representado con una función de tres variables. Del mismo modo que para una imagen, pueden utilizarse sólo los coeficientes que permitan una reconstrucción adecuada del volumen. Además, utilizando la propiedad local de las wavelets, se podría aproximar una porción especificada del sólido. Cabe señalar que el procesamiento de volúmenes requiere almacenar gran cantidad de datos y, por ello, una técnica que permite la compresión de los mismos es de suma importancia.

## 5.2 Wavelets y representación de curvas y superficies

La transformada wavelet brinda una representación flexible de curvas multirresolución. Permite llevar a cabo, convenientemente, una gran variedad de operaciones tales como suavizar una curva y editar la forma general de la misma preservando sus detalles. Hay diversas aplicaciones de curvas multirresolución. Entre ellas podemos citar la animación, donde las curvas se utilizan para controlar los parámetros de interpolación; el diseño de fonts, donde las mismas se usan para representar los trazos de los caracteres y el CAD donde las curvas se utilizan, por ejemplo, para especificar superficies.

La transformada wavelet de los datos que representan una curva o una superficie son los coeficientes de una expansión en bases ortogonales de wavelets. Luego, cualquier objeto en  $R^2$  o en  $R^3$  se puede expresar como la superposición de funciones ortogonales, permitiendo de esta manera la representación implícita del objeto mediante una expresión en multirresoluciones. En el caso de las curvas y de las superficies, estos datos se corresponderían con los puntos de control de las mismas. Es de hacer notar que en la representación en multirresoluciones sólo es necesario guardar los puntos de control, sin requerimientos adicionales de almacenamiento. Además, los algoritmos son sencillos y rápidos.

Las curvas multirresolución se pueden editar de dos maneras diferentes. Supongamos tener una curva  $c_n$  y todas sus representaciones en resoluciones más bajas  $c_0, \dots, c_{n-1}$  y los detalles  $d_0, \dots, d_{n-1}$  respectivamente. Si modificamos la curva a una resolución menor  $c_j$  y luego le adicionamos los detalles  $d_j, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$ , hemos modificado la forma general de la curva. En cambio, si modificamos el conjunto de los detalles  $d_j, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$  pero no las versiones a menor resolución de la curva  $c_0, \dots, c_j$ , entonces cambian determinadas características de la curva, pero dejamos intacta su forma original. La extensión de la edición de curvas a la de superficies es directa.

En muchos casos, resulta adecuado asociar otras propiedades con las curvas y/o superficies, tales como grosor, color o textura. Estos parámetros pueden considerarse como dimensiones extras asociadas a los puntos de control.

Si se utilizan sólo los detalles significativos, podemos lograr una buena aproximación de un determinado objeto usando un número relativamente pequeño de coeficientes sin modificar la forma original. Vemos entonces que la expresión multirresolución, junto con la propiedad local de las wavelets, es adecuada para usar a éstas como método de descripción de un objeto.

Los splines polinomiales han tenido un impacto significativo en el desarrollo temprano de la teoría de la transformada wavelet. Las características que los hacen particularmente atractivos en este contexto son varias. Entre ellas podemos citar la forma analítica simple que poseen las funciones de las bases de splines polinomiales. Por otro lado, las funciones de la base estándar son las B-Splines que tienen soporte compacto y pueden generarse por convoluciones repetidas de un pulso rectangular. Además presentan buenas condiciones de suavidad, es decir que es posible lograr cualquier grado de regularidad simplemente aumentando el orden de los splines. Estas

características hacen que puedan considerarse una base adecuada para la construcción de curvas y superficies multirresolución.

### 5.3 Wavelets y Visión

El procedimiento de recuperar superficies tridimensionales de objetos desconocidos es una tarea importante en visión por computadora. En varias aplicaciones tales como inspección visual, navegación autónoma y control de robots, entre otras, es de gran importancia contar con un procedimiento robusto que pueda recuperar la forma de un determinado objeto a partir de su imagen en 2D. A principio de los 80 se intensificó el trabajo sobre visión artificial para robots. Fue entonces que David Marr, experto en el sistema visual humano, comenzó a trabajar en el Laboratorio de Inteligencia Artificial del MIT, para ayudar a resolver dicho problema.

Marr consideraba que debía orientarse la investigación sobre los aspectos mecánicos o involuntarios de la visión, ya que éste es el mecanismo que permite percibir el mundo tridimensional a partir de estímulos de la retina.

De acuerdo a ello, Marr postuló que el procesamiento de una imagen efectuado por el sistema visual humano tiene una compleja estructura jerárquica que involucra varias etapas de procesamiento. En cada nivel de procesamiento, el sistema de la retina provee una representación visual que escala progresivamente de manera geométrica. Él teorizó que los cambios de intensidad ocurren a diferentes escalas de una imagen por lo que, para detectarlos, se requieren operadores de distinto tamaño. También sostuvo que cambios bruscos de intensidad producen un pico en la primera derivada de la imagen. Estas dos hipótesis sugieren que, para detectar eficientemente cambios de intensidad, los filtros de visión deben poseer dos características relevantes. La primera es que el mismo debe ser un operador diferencial. La otra es que debe ser capaz de sintonizarse para trabajar a cualquier escala deseada, de modo tal que haya filtros que detecten bordes borrosos de la imagen y otros que detecten detalles finos de la misma. El operador dado por Marr se conoce como la wavelet de Marr.

## 6 Conclusiones

Se dio una reseña histórica del desarrollo de la teoría de wavelets, señalando los diferentes orígenes de la misma, su relación con el Análisis de Fourier y sus aplicaciones. Debido a que el concepto de wavelets puede verse como una síntesis de ideas que se originaron simultáneamente en distintas ciencias, las mismas resultan atractivas a científicos e ingenieros con distintas formaciones. Por otro lado son una herramienta matemática simple con una gran variedad de aplicaciones en áreas tan diversas como procesamiento y compresión de señales multidimensionales, análisis numérico, computación gráfica, visión artificial y muchas otras aplicaciones más. Por ende, tanto el origen interdisciplinario de las mismas como su amplia aplicabilidad contribuyen en gran medida al interés explosivo que ellas despertaron como una nueva herramienta del análisis armónico.

## Bibliografía

- [1] Agamennoni, O., Castro, L., Paolini, E., Cousseau, J. y Castro, S., *Pattern Recognition in Ultrasonic Sensing*, aceptado para su presentación en el VI RPIC a realizarse en Bahía Blanca en noviembre de 1995.
- [2] Berman, D., Bartell, J., y Salesin, D., *Multiresolution Painting and Compositing*, Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Julio 24-29 1994, pp. 85-90.

- [3] Castro, L., Agamennoni, O., Paolini, E., Cousseau, J. y Castro, S., *Multiresolution Analysis and Ultrasonic Sensing*, ICIAM95, Hamburgo, 3 al 7 de julio de 1995.
- [4] Chui, C., *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York, 1992.
- [5] Chui, C., *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1992.
- [6] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1992.
- [7] Finkelstein, A., y Salesin, D., *Multiresolution Curves*, Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Julio 24-29 1994, pp. 261-268.
- [8] Kaiser, G., *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhauser, Boston, 1994.
- [9] Mallat, S., *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*, IEEE Transaction on PAMI, Vol. 11, No. 7, pp. 674-693, 1989.
- [10] Meyer, Y., *Wavelets. Algorithms and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1993.
- [11] Muraki, S., *Approximation and Rendering of Volume Data Using Wavelet Transform*, Proceedings on Visualization '92, IEEE Computer Press, 1992, pp. 21-28.
- [12] Stollnitz, E., DeRose, T. y Salesin, D., *Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 1*, IEEE Computer Graphics and Applications, Mayo 1995, pp. 76-84.
- [13] Stollnitz, E., DeRose, T. y Salesin, D., *Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 2*, IEEE Computer Graphics and Applications, Julio 1995, pp. 75-85.
- [14] Wornell, G., *Wavelet-Based Representations for the  $1/f$  Family of Fractal Processes*, Proceedings of the IEEE, Vol. 81, no. 10, Octubre 1993, pp. 1428-1465.