

Modelos no Determinísticos con Control Local de la Dimensión Fractal

Claudio Delrieux, Andrea Silveti¹ y Silvia Castro

Grupo de Investigación en Computación Gráfica²
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Alem 1253 - (8000) - Bahía Blanca - ARGENTINA
e-mail: usdelrie@criba.edu.ar

Palabras Clave: Computación Gráfica - Fractales - Simulación de Fenómenos Naturales

Resumen

Se presenta una técnica de control local de la dimensión fractal para ser utilizada en combinación con el algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio. La técnica propuesta es intuitiva y sencilla de implementar. Se basa en estimaciones locales de la dimensión fractal del fenómeno a simular. Estos valores se propagan como parámetro adicional en una implementación estándar del algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio.

Esta técnica permite la representación de fenómenos naturales (terrenos montañosos, costas, nubes) con una flexibilidad de uso que los métodos tradicionales no poseen. Su versatilidad proviene del control local de la dimensión fractal. El aspecto del objeto modelado no depende solamente de la semilla del generador de números aleatorios, sino que es posible gobernar localmente su geometría. Esto permite representar localmente las cualidades geométricas del fenómeno simulado.

¹Becaria de Iniciación del CONICET

²Parcialmente financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNS

1 Introducción

Una de las razones más importantes de la gran difusión de las técnicas de modelado con objetos fractales reside en su capacidad para producir una representación económica en tiempo y espacio de modelos o fenómenos naturales. El inconveniente clave de la geometría tradicional que se utiliza en la computación gráfica para representar objetos naturales es su falta de *simetría a escala*. Una costa podría describirse mediante segmentos, y si se tomara un número grande de ellos, se vería bastante real. Sin embargo, cuando nos acerquemos lo suficiente, esta costa revelaría su aspecto geométrico subyacente. Es por este motivo que los *objetos fractales* [1, 5] están teniendo un uso creciente en la computación gráfica, especialmente aquellos basados en el modelo del ruido Browniano fraccional (fBm) [6].

Existen principalmente dos tipos de fractales: los determinísticos y los no determinísticos. Los primeros resultan generalmente de iterar sistemas de ecuaciones, y no incluyen al azar en su cálculo. Es decir, cada vez que se grafican, su aspecto es el mismo. Los segundos, en cambio, utilizan explícitamente números aleatorios en determinadas etapas del cálculo. Por lo tanto, el resultado final es imprevisible. En la representación de fenómenos naturales, como por ejemplo relieves montañosos, costas, nubes, etc., suelen usarse los fractales no determinísticos. El cálculo de los mismos depende solamente de un parámetro denominado *dimensión fractal*, que intenta reflejar el aspecto global del resultado. Los demás aspectos quedan librados a lo que el generador de números aleatorios entregue en cada paso.

De esa forma, si bien se cumple el objetivo de encontrar modelos verosímiles de los fenómenos naturales, el resultado es muy limitado en su versatilidad y aplicabilidad. La limitación más importante proviene de que la dimensión fractal —el parámetro que representa la geometría del objeto modelado— permanece constante. Esto no permite la elasticidad de diseño requerida para la representación de casos particulares en áreas específicas como pueden ocurrir en modelos topográficos o geológicos.

En este trabajo se presenta la definición e implementación de una técnica para el modelado de fractales no determinísticos que permite el control local de la dimensión fractal. La técnica se basa en una adaptación del algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio [4]. Este resultado abre la posibilidad de un uso más versátil de estos objetos en aplicaciones concretas. Por ejemplo, combinando los métodos de superficies paramétricas [2] con la idea propuesta, es posible la codificación rápida y económica de datos topográficos, cuyo aspecto local escapa a las posibilidades de representación por medio de una dimensión fractal constante.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la próxima sección se presenta el fundamento de los modelos matemáticos subyacentes a los fractales no determinísticos. En la sección 3 se exponen los algoritmos de *rendering* de fractales no determinísticos, en particular el algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio, dado que es el de mayor eficiencia. En la siguiente sección se presenta la técnica de control local de la dimensión fractal, junto con los detalles necesarios para su implementación dentro del algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio. En la sección 5 se presentan aplicaciones de la técnica en la simulación de relieves, representación de terrenos, y mapeo de texturas y normales. En la sección 6, por último, se compara la técnica con otros modelos propuestos, y se discuten las conclusiones y el trabajo futuro.

2 Fractales estocásticos

La geometría fractal describe objetos matemáticos cuyas propiedades resultan adecuadas, entre otras cosas, como modelos para representar fielmente a ciertos fenómenos u objetos naturales. Una de sus características interesantes en ese sentido es que satisfacen la propiedad de *autosimilitud*, o sea, se ven estadísticamente similares (esto es “parecidos a primera vista”) a sí mismos a diferentes escalas. Un *zoom* a un objeto fractal no causará una pérdida de naturalidad de su aspecto, sino que, por el contrario, incorporará nuevos detalles no visibles a menor escala.

La autosimilitud puede concebirse como una simetría a escala. Si el objeto es un fractal no determinístico, esta similitud se da en términos estadísticos, es decir, las propiedades geométricas del objeto tienen distribuciones semejantes a diferentes escalas. En algunos casos particulares pueden existir modelos matemáticos para determinados fenómenos naturales cuya fractalidad es un fenómeno emergente. Nuestro interés, sin embargo, no es realizar una simulación exhaustiva de dichos fenómenos, sino en producir herramientas computacionales que los imiten adecuadamente en un tiempo razonable.

Un modelo matemático de gran utilidad para un gran conjunto de series de tiempo es el *movimiento Browniano fraccional* (fBm) [6]. El fBm denota una familia de procesos estocásticos gaussianos. Dado un parámetro de variancia $0 < H \leq 1$ y un conjunto r de valores aleatorios en un espacio uniforme de muestras, el movimiento Browniano fraccional $B_H(x, r)$ queda definido por la integral estocástica

$$B_H(x, r) = \frac{1}{\Gamma(H + 0.5)} \int_{-\infty}^x [(x - s)^{H-0.5} - (-s)^{H-0.5}] dB(s, r) + \int_0^x [(x - s)^{H-0.5}] dB(s, r). \quad (1)$$

Esta definición tiene varias propiedades. Cuando $H = 0.5$ se obtiene el movimiento Browniano estándar (llamado *ruido marrón*). Un análisis espectral de $B_H(x, r)$ muestra un rango continuo de frecuencias de todas las magnitudes. La contribución de cada frecuencia al espectro total es inversamente proporcional a la frecuencia, es decir, $B_H(x, r)$ pertenece a la clase de los “ruidos $\frac{1}{f}$ ” (ver figura 1). En particular, la distribución espectral obedece una ley

$$P(f) \sim \frac{1}{f^{2H+1}}. \quad (2)$$

Los incrementos en el fBm son estacionarios y autosimilares estadísticamente. Esto significa que $B_H(x + \Delta x, r) - B_H(x, r)$ y $B_H(x + \alpha \Delta x, r) - \alpha^{-H} B_H(x, r)$ tienen las mismas funciones de distribución. Estas características de $B_H(x, r)$ permiten concluir intuitivamente que se pueden observar muestras de esta función a cualquier escala de la variable independiente, obteniéndose idénticos parámetros estadísticos bajo una adecuada escala en la variable dependiente. Es decir, fBm es un objeto fractal no determinístico con dimensión $D = 2 - H$. Un valor de H cercano a 1 determina una dimensión fractal “baja” y, por ende, un alto exponente en la ecuación 2. Geométricamente, el objeto se aparta apenas de ser una línea recta. A medida que H disminuye, aumenta la dimensión fractal y las altas frecuencias empiezan a ser significativas en el espectro de la función. Geométricamente, el objeto se vuelve “rugoso”. En el límite, cuando $H = 0$, la dimensión fractal es 2 y la función es densa, tornándose geoméricamente indistinguible de un plano. Un análisis similar puede realizarse para un fBm bidimensional $B_H(x, y, r)$ definido por una integral estocástica bivariada. En este caso $D = 3 - H$.

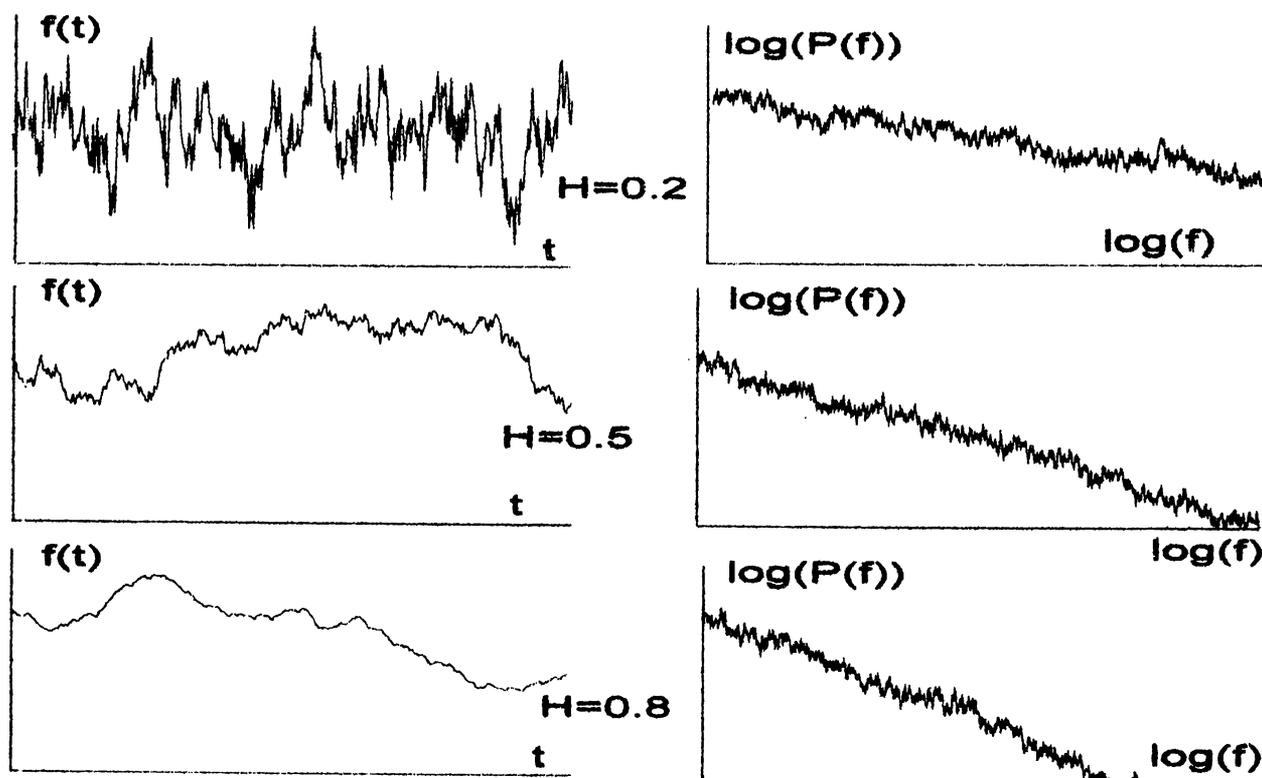


Figura 1: fBm para distintos H y sus espectros asociados.

Habiendo encontrado una caracterización matemática adecuada para los fenómenos a simular, debemos ahora buscar la manera adecuada de evaluar el fBm. Los algoritmos a implementar deben ser de gran eficiencia, dado que para una imagen de calidad deben realizarse cientos de miles de muestras.

3 Computación del fBm

La ecuación 2 sugiere directamente un método para calcular un hipotético "paisaje" de dimensión fractal dada. El método consiste en utilizar la transformada rápida de Fourier (FFT) inversa, es decir, dada una dimensión fractal, se evalúa su densidad espectral $P(f)$ para una cantidad arbitraria de valores, y luego se obtienen los resultados gráficos mediante la antitransformación.

Este método es directo pero presenta problemas. Dada la cantidad de muestras a realizar, es imperativo un algoritmo de complejidad lineal, mientras que la FFT es semicuadrático. Al mismo tiempo, un nivel de detalle adaptativo puede ser de gran importancia práctica. Por ejemplo, si se desea hacer un *zoom*, deberá recalcularse la antitransformada con más definición (con componentes espectrales de mayor frecuencia) pero deberá hacerse para *todo* el terreno. Una forma de evitar este recálculo sería evaluar desde el comienzo la antitransformada con todos los componentes. Esto implica que la imagen tendrá detalles que no podrán apreciarse desde una vista general, sino que serán observables sólo en el momento del *zoom* y en el lugar donde ocurra el acercamiento. Esto significa que existe una cantidad enorme de cálculo innecesario. Al mismo tiempo, si nuestra "cámara" realizara un desplazamiento, no sería conveniente extender los cálculos a las nuevas posiciones, dado que en un eventual desplazamiento que vaya más allá del espacio

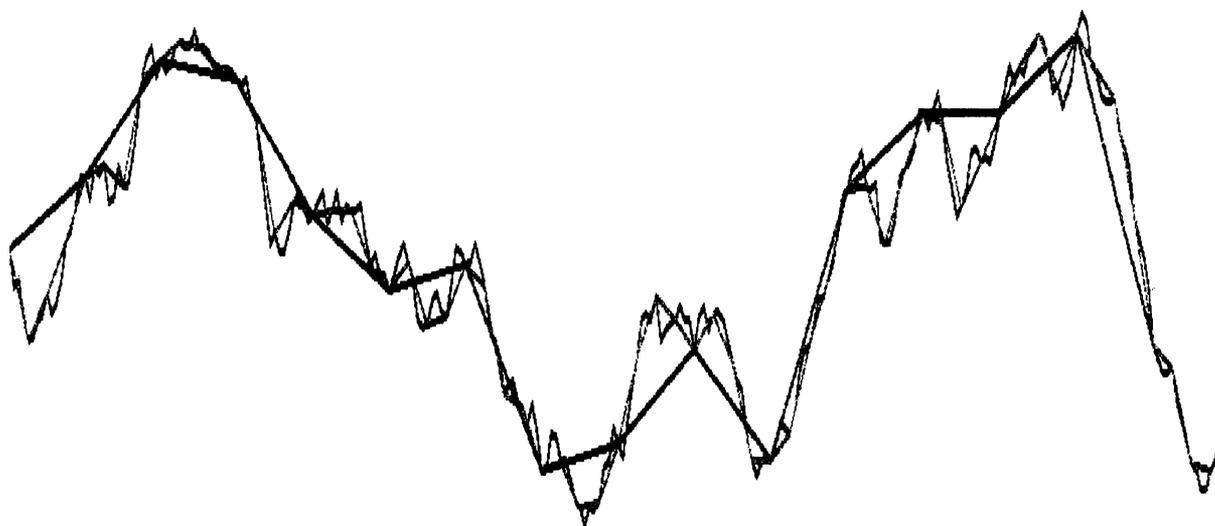


Figura 2: Una curva de $H = 0.8$ obtenida con 17, 65 y 257 muestras.

La extensión del algoritmo del punto medio a dos dimensiones puede aplicarse para generar una distribución bidimensional fractal de alturas. En este caso el punto medio tiene en cuenta las alturas de sus cuatro vecinos. Es decir, cada punto medio está en el centro de una cara, cuyos vértices son tenidos en cuenta para calcular su altura esperada. Esta altura es desplazada aleatoriamente en función de la escala. Con los puntos medios en el centro de cada cara es posible ahora calcular la altura en los puntos medios de cada arista. Estos dos pasos permiten pasar de una retícula de 1×1 y cuatro puntos a una retícula de 2×2 caras y nueve puntos. A cada cara de la retícula generada se le aplica recursivamente el mismo algoritmo.

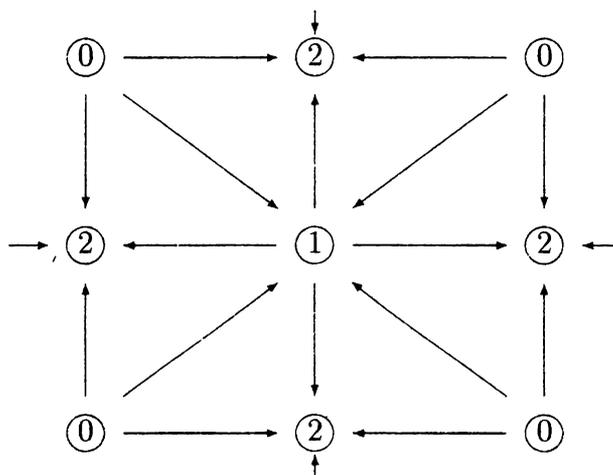


Figura 3: Subdivisión recursiva de un dominio bidimensional.

calculado, comenzará a repetir los detalles que fueron vistos anteriormente. Esto se debe a que la FFT inversa es periódica en el tiempo.

Estas desventajas de la síntesis de fractales en el dominio frecuencia llevaron a encontrar métodos de síntesis en el dominio tiempo. Las técnicas más comunes para efectuar dichos cálculos son

- **Cortes Independientes [8]:** Es el primer método históricamente implementado para reproducir terrenos. Consiste en generar números aleatorios de importancia decreciente, los cuales son sumados a un arreglo en una cantidad de direcciones que sigue la proporción $\Delta V = \alpha(\Delta t)^H$. La fase de dichos cortes (la dirección de comienzo) es determinada aleatoriamente.
- **Cortes Secuenciales:** Es una variación del anterior que tiene la ventaja de poder ser calculado en secuencia, sin requerir calcular todo el arreglo. Por ello es aplicable a la generación de números aleatorios que sigan una distribución fraccional. Consiste en tener un acumulador al que en cada tirada se le agrega una cantidad aleatoria. Esta cantidad tiene componentes proporcionales a períodos irracionales, cuyas amplitudes son inversamente proporcionales a los períodos. Una metáfora para entenderlo mejor es suponer que tenemos varios dados, algunos con números pequeños, otros medianos y otros grandes. En cada tirada se arrojan ciertos dados. La probabilidad de que un dado sea arrojado es inversamente proporcional a los números que figuran en él.
- **Desplazamiento Aleatorio del Punto Medio [4]:** Este método es computacionalmente más eficiente que los anteriores, y algorítmicamente es más sencillo de entender. Se toma como comienzo y como final dos puntos dados $V(0)$ y $V(1)$ (ver figura 2). Se calcula el V promedio en el punto medio, y a ese valor se le agrega un ΔV proporcional al Δt según la ecuación ya vista. Luego, cada mitad es tratada recursivamente de forma similar.

El método adoptado en nuestro trabajo es el tercero. Las razones para ello son que la implementación se presta para los objetivos de nuestro trabajo, y que, además, tiene la ventaja adicional de que no se requiere el cálculo completo de la simulación, sino que, aumentando un nivel de recursión, aumenta la cantidad de detalles al doble. Este método se basa en la esperanza condicional de $B_H(x, r)$. Si $0 \leq x \leq 1$, y partiendo de $B_H(0, r) = 0$ y $B_H(1, r) = 1$, entonces $E[B_H(x, r)|B_H(1, r)] = \frac{1}{2}(x^{2H} + 1 - |x - 1|^{2H})$. Esto es consecuencia de la autosimilitud del fBm. $B_H(x + \Delta x, r)$ y $B_H(x + \alpha\Delta x, r)$ tienen las mismas funciones de distribución conjunta (escaladas por un factor α^{-H}). Comenzando con $B_H(0, r) = 0$ y $B_H(1, r) = 1$, la esperanza en el punto medio es de un valor $E[B_H(\frac{1}{2}, r)|B_H(1, r)] = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^{2H} + 1 - |\frac{1}{2}|^{2H}) = \frac{1}{2}$. Este valor es desplazado por un factor aleatorio escalar, proporcional a la variancia esperada para $B_H(x, r)$ en dicho entorno, que es igual a 2^{-H} .

Esto se implementa sumando al valor esperado el producto entre una función aleatoria normalizada de media cero y variancia 1 y la variancia esperada. Ahora los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ pueden ser recursivamente subdivididos, y sus puntos medios respectivos son desplazados con una variancia 4^{-H} , y así sucesivamente. Esto permite efectuar en forma directa una implementación recursiva. La cantidad de llamadas es proporcional a la cantidad de muestras, y en cada paso se requiere la generación de un número pseudoaleatorio y unas pocas operaciones aritméticas. Nótese que H es un parámetro global en este algoritmo recursivo.

4 Control Local

Los resultados obtenidos con el algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio son de gran realismo pero limitados en flexibilidad. Es posible la simulación de fenómenos naturales, terrenos, erosión, etc. pero con una gran limitación: el aspecto del objeto simulado, gobernado por el parámetro global H , es constante en toda su extensión. Esto no es natural, dado que normalmente los objetos que se desea simular presentan variaciones locales en su rugosidad. Un terreno, por ejemplo, es más rugoso en las zonas montañosas que en las zonas planas.

Estas consideraciones llevaron a la idea de poder controlar localmente la dimensión fractal del objeto simulado. Del mismo modo en que los puntos de control en una superficie *spline* gobiernan localmente la forma de la misma, estimaciones locales de la dimensión fractal determinan la rugosidad en las distintas partes del objeto simulado. Estas estimaciones son interpoladas linealmente para obtener una transición suave entre distintas rugosidades locales.

La técnica propuesta, entonces, utiliza las estimaciones de la dimensión fractal como parámetro H local. Se comienza con una retícula de $N \times M$ puntos de control, de una manera similar al grafo de control de una superficie *spline* [2]. Cada punto de control representa una estimación local de la dimensión fractal. Cuatro puntos adyacentes de la retícula determinan un dominio rectangular. Dentro de cada dominio rectangular se aplica el algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio, donde H no es un parámetro global sino que es promediado a partir de los valores de H en los pasos anteriores. El desplazamiento aleatorio, entonces, es proporcional a un valor H que es computado con una interpolación lineal obtenida a partir de los valores de H en los puntos de control.

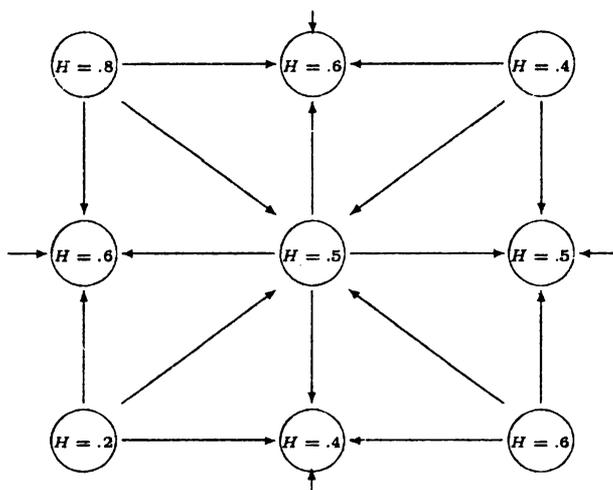


Figura 4: Desplazamiento aleatorio del punto medio con parámetro H local.

Al ser ejecutado de esta manera, el algoritmo produce discontinuidades en la frontera entre dos dominios rectangulares que comparten una arista. Esto se debe a que el desplazamiento en dicha arista depende del espacio de muestras del generador de números pseudoaleatorios utilizado en el cálculo de cada dominio. Entonces, no hay relación entre los números pseudoaleatorios que fueron utilizados en ambos dominios rectangulares en el momento de computar la misma arista.

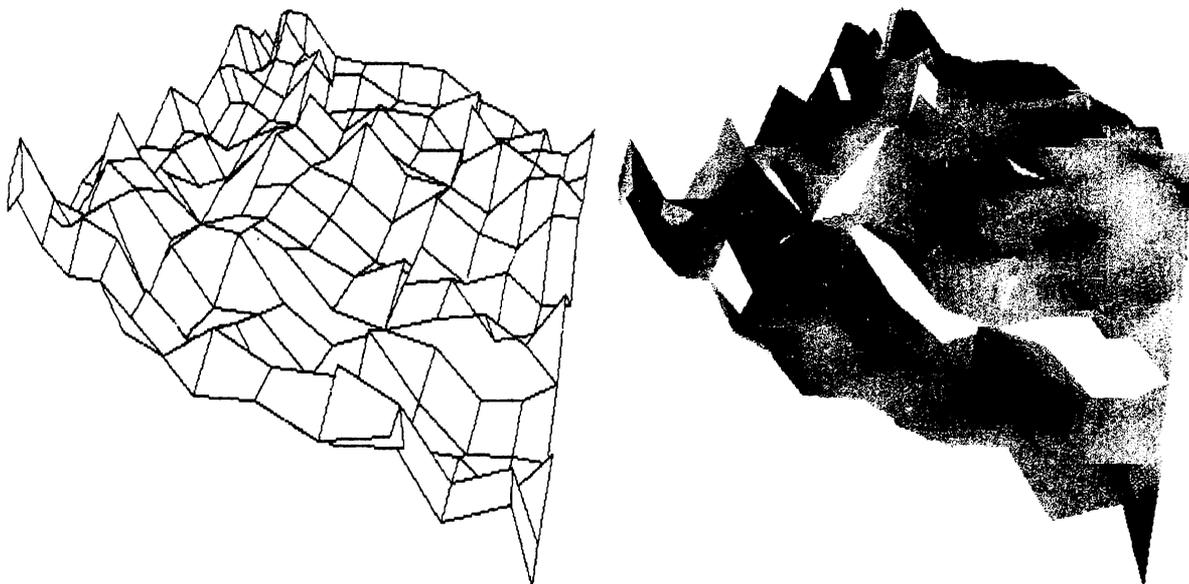


Figura 5: Discontinuidades entre dominios rectangulares.

Una solución ingenua consiste en hacer depender la semilla del generador pseudoaleatorio de la coordenada donde se agregará ruido. Entonces, en dos parches distintos que comparten un mismo punto se generará el mismo número. Al tener la misma variancia, la señal agregada será igual y la continuidad se mantendrá. Sin embargo, los generadores pseudoaleatorios no se comportan bien en este caso pues se los está inicializando para cada punto calculado. La relación entre coordenadas del punto y la semilla usada deja ver rastros en el dibujo que se repiten formando patrones artificiales que son desagradables a la vista.

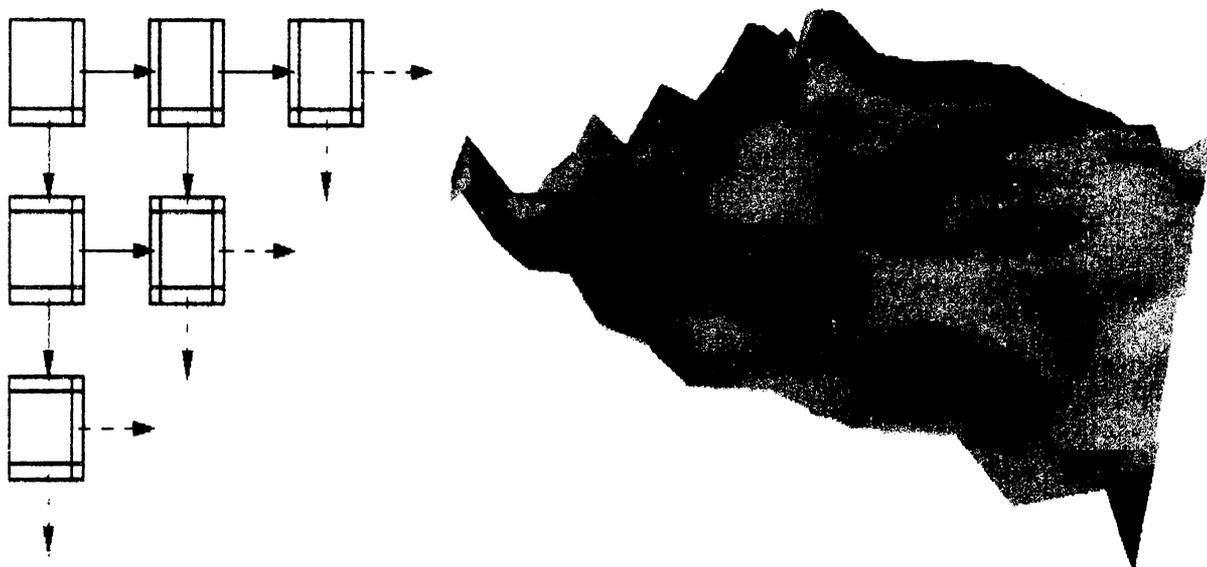


Figura 6: El esquema de almacenamiento de desplazamientos y la superficie sin discontinuidad.

Para solucionar el problema de la continuidad se optó por mantener almacenado el desplazamiento calculado en el borde de los parches. La memoria que insume ésto no es

excesiva. Sea nuestra matriz de control con f filas y c columnas, n el nivel de recursión, y $p = \min\{c, f\}$. Si el sentido de cálculo es el mostrado en la figura 6, deben guardarse p filas de 2^n lugares, cada una separando el dominio i -ésimo del $(i + p)$ -ésimo, más un vector de 2^n lugares que se utiliza en los límites entre dos dominios vecinos. Los desplazamientos calculados en las aristas inferiores de los dominios de una fila son utilizados como condiciones de borde en el cálculo de los dominios de la fila inferior. Lo mismo sucede con los desplazamientos calculados en la frontera derecha de cada dominio, los cuales son utilizados como condiciones de borde para los dominios en la columna siguiente.

5 Aplicaciones

El uso más directo de los resultados producidos es utilizar los desplazamientos aleatorios como mapa de desplazamiento o de normales [3] de una superficie modelada con *splines*. Dado un grafo de control con una base de datos reducida, los splines son funciones paramétricas obtenidas a partir de dichos puntos, y que nos permiten obtener una interpolación suave de los mismos.

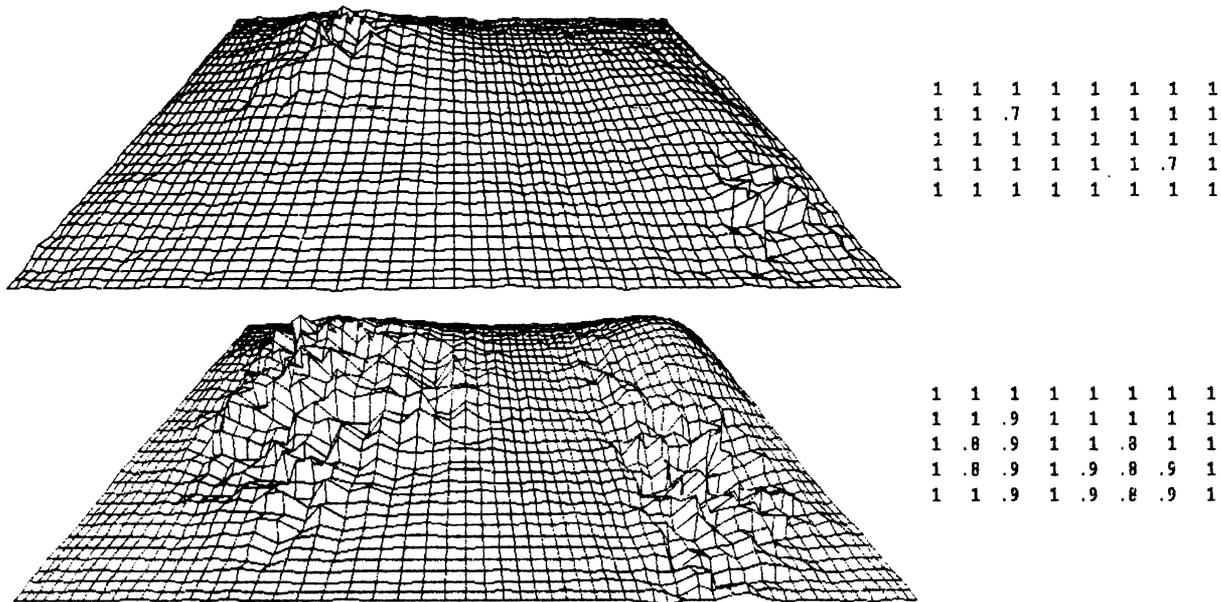


Figura 7: Grafos de control con diferentes H locales.

Estas funciones son adecuadas para modelar objetos hechos por el hombre, como en el diseño aerodinámico de carrocerías, objetos de uso común como jarras, copas, herramientas, etc., pero no son adecuados para calcular objetos naturales tales como una montaña o una costa, por producir precisamente interpolaciones suaves. La utilización de mapas de desplazamiento puede proveer una gran flexibilidad de diseño. Por ejemplo, al tratar de simular superficies topográficas es natural usar splines para definir cómo será el terreno a simple vista, es decir, cualitativamente dónde la superficie será alta o baja, y los fractales para modelar la rugosidad local del terreno. El usuario, al tiempo de medir la altura en cada punto de control del spline que define el terreno, estima o elige una dimensión fractal en ese punto.

Los splines no calculan toda la superficie a la vez, sino que evalúan *parches* de la misma. Por sus propiedades algebraicas, los parches se unen entre sí en forma continua y derivable



Figura 8: Los grafos de la figura 7 como mapas de desplazamiento.

tantas veces como se desee. El ruido fractal debe entonces ir sumándose como mapa de desplazamiento en cada parche a medida que éstos se calculan. Este acercamiento permite simular rugosidades locales en objetos, como las producida por golpes o erosión.

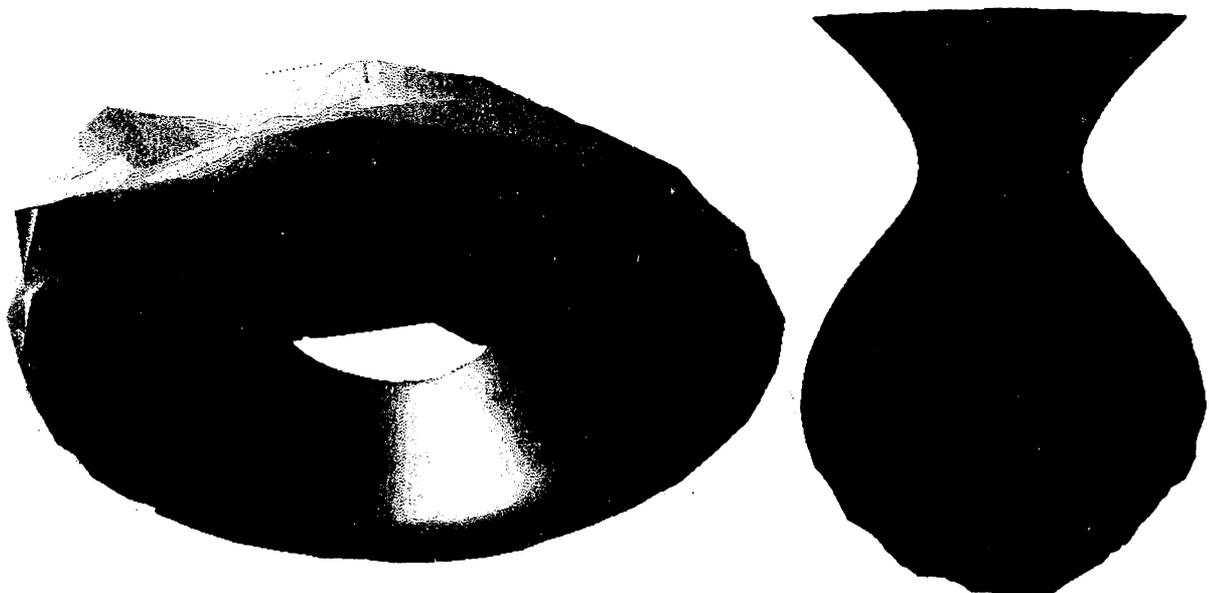


Figura 9: Objetos golpeados o erosionados.

Los resultados son fácilmente obtenidos y modificados editando las dimensiones locales en el grafo de control del spline. Esto permite modificar sustancialmente los resultados que pueden obtenerse a partir de un único grafo de control.

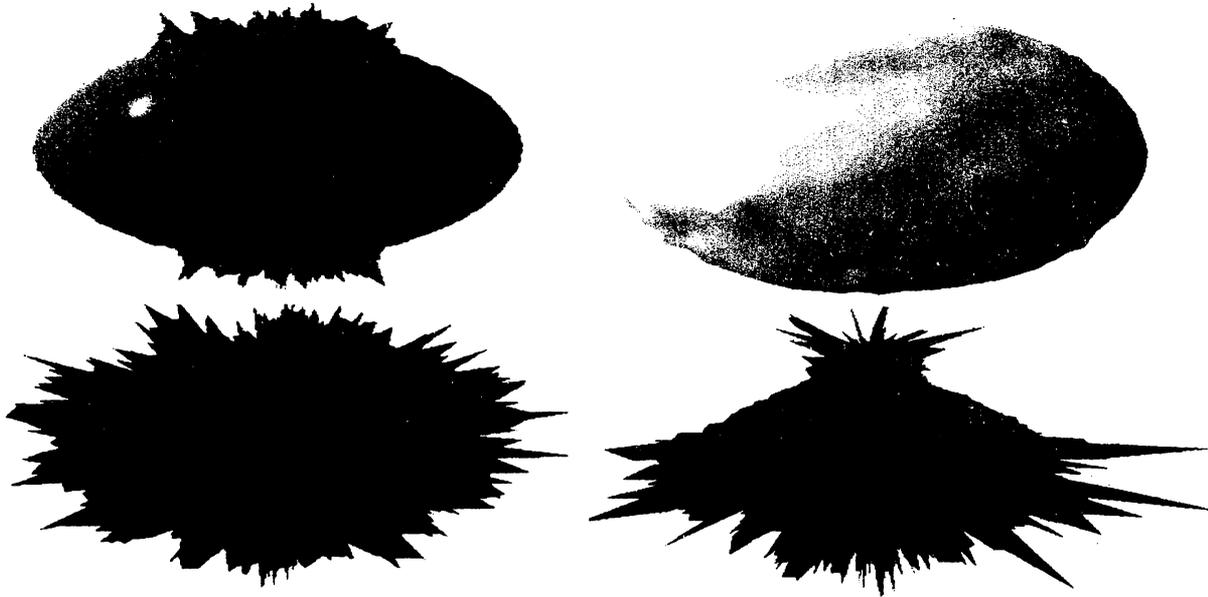


Figura 10: Otras aplicaciones.

6 Conclusiones

Las propiedades estocásticas de los fenómenos naturales son de reconocida importancia en las técnicas de modelado y simulación utilizadas en la computación gráfica. En este trabajo se presentó una técnica que permite el control local de la dimensión fractal en el modelo derivado del fBm. Dicha técnica es de una directa y eficiente implementación. Se mostraron ejemplos del uso del algoritmo en la interpolación estocástica de datos muestreados que permitieron la creación de representaciones de terrenos y otros objetos con gran realismo.

Los resultados aquí presentados constituyen una herramienta versátil en el modelado de objetos estocásticos. La técnica propuesta permite obtener resultados comparables a los presentados por Szeliski y Terzopoulos utilizando equilibrio de Boltzmann [10], y a los presentados por Musgrave et. al. utilizando simulaciones detalladas del proceso de erosión de terrenos [7], pero de una manera mucho más simple y económica. La metodología de modelado presentada constituye una forma natural y compacta de describir los objetos a representar.

El trabajo a desarrollar a partir de estos resultados está orientado a la aplicación de la técnica a condiciones de borde más complejas. Esto puede suceder cuando la caracterización de la dimensión fractal en un determinado punto proviene por ejemplo de una distribución espectral. Otra situación compleja puede darse cuando el modelo estocástico está restringido a pasar por determinados valores en determinados puntos de su dominio. Con respecto a la aplicación de la técnica, es importante considerar su utilización como mapa de texturas para producir efectos similares a los producidos con técnicas de convolución [11] pero con mayor velocidad de cálculo y versatilidad.

Referencias

- [1] Mandelbrot B. B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. W. H. Freeman and Co,

1977.

- [2] R. Bartels, J. Beatty, and B. Barsky. *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [3] J. Foley and A. Van Dam. *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, segunda edición, 1987.
- [4] A. Fournier, D. Fussell, and L. Carpenter. Computer Rendering of Stochastic Models. *Communications of the ACM*, 25(6):371–384, 1982.
- [5] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co., New York, 1983.
- [6] B. Mandelbrot and J. van Ness. Fractional Brownian Motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, 1968.
- [7] F. Kenton Musgrave, Craig Kolb, and Robert Mace. The Synthesis and Rendering of Eroded Fractal Terrains. *ACM Computer Graphics*, 23(3):41–50, 1989.
- [8] H.-O. Peitgen and D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [9] Andrea Silveti, Silvia Castro, Claudio Delrieux, and Susana Anchuvidart. Un Paquete Gráfico Interactivo Tridimensional. In *24 JAIIO*, Buenos Aires, Argentina, 1995. Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa.
- [10] D. Szeliski, R. Terzopoulos. From Splines to Fractals. *ACM Siggraph*, 22(3):51–60, 1989.
- [11] Jarke van Wijk. Spot Noise: Texture Synthesis for Data Visualization. *ACM Computer Graphics*, 23(4):309–318, 1991.