Un Análisis sobre la Lógica Difusa como Herramienta para la Representación de Conocimiento

Pablo R. Fillottrani*
Grupo de Investigación en Inteligencia Artificial
Instituto de Ciencias e Ingeniería de Computación
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad Nacional del Sur
e-mail: ccfillo@criba.edu.ar

Resumen

El estudio y las aplicaciones de la lógica difusa han tenido en los últimos años un gran desarrollo. Sin embargo, se ha generado una polémica acerca de sus propiedades como herramienta para la Representación de Conocimiento. En este trabajo se presenta una clasificación de distintos sistemas de lógica difusa desde el punto de vista de un sistema formal, y en base a ello se estudian sus propiedades metalógicas. Esto permite analizar formalmente aspectos relevantes de distintos sistemas de Lógica Difusa en el campo de la Representación de Conocimiento dentro de la Inteligencia Artificial. Finalmente, se enumeran algunas posibles aplicaciones en este área.

*Becario de Perfeccionamiento del CONICET.

Un Análisis sobre la Lógica Difusa como Herramienta para la Representación de Conocimiento

1 Introducción

El estudio y las aplicaciones de la lógica difusa han tenido en los últimos años un gran desarrollo. En especial, importantes resultados se obtuvieron en su empleo en diversos sistemas en control. Sin embargo, muchas críticas se han presentado tanto desde el punto de vista formal como desde el punto de vista práctico. El objetivo de este trabajo consiste en analizar las propiedades de distintos sistemas de lógica difusa, dentro de su empleo como herramienta para representar conocimiento declarativo en sistemas de Inteligencia Artificial.

En este análisis, necesario para aclarar los conceptos, se hace especial énfasis en el objetivo y los alcances de la lógica difusa, temas que son encontrados generalmente en la la bibliografía estándar sobre el tema. Se tratará en esta monografía de presentar algunos de los problemas que se han planteado en este sentido, sin tratar de particularizar en alguno de ellos ni pretender mencionar a todos. Cabe aclarar también, que se analizará solamente el caso de la lógica difusa sin entrar en considerar la teoría de conjuntos difusos.

2 Fundamentos de la lógica difusa

Es muy difícil dar una caracterización general de la lógica difusa. Cada autor presenta un sistema distinto que, en ciertos casos, no tiene ninguna relación con los sistemas de otros autores. A través de una revisión básica de la bibliografía disponible en el tema, se clasificarán los distintos sistemas de lógica difusa en dos categorías: los más simples, aquellos sistemas cuyos valores de verdad son elementos de un mismo dominio, en la mayoría de los casos números reales; y los más complejos, aquellos sistemas cuyos valores de verdad son subconjuntos difusos de algún dominio. La segunda de estas categorías incluye a la primera asociando a cada elemento el subconjunto formado por su singleton, por lo que la clasificación dada no es excluyente. Pero como a partir de estas diferencias surgen diferencias relevantes en el tratamiento de los valores de verdad, se considera mejor tratarlas por separado. La generalización conducente de la primer categoría a la segunda no es un paso para nada trivial. La existencia de tantas versiones de la lógica difusa, descriptas incluso en un mismo trabajo, es justificada diciendo que como se trata de un área relativamente reciente, no se tiene todavía una base firme.

2.1 Números Reales como Valores de Verdad

Se describirán a continuación los sistemas de lógica difusa [10, 5] cuyos valores de verdad son elementos de un dominio, mencionando las caracteristicas generales y los puntos en los cuáles

	Laura	Cecilia	Silvina
Laura	0	0.58	0.87
Cecilia	0.22	0	0.74
Silvina	0.67	0.55	0

Tabla 1: Ejemplo de un predicado con números reales como valores de verdad.

se diferencian. La sintaxis de todos estos sistemas de lógica difusa coincide con la sintaxis de la lógica de primer orden, y en ciertos casos sólo se considera el subconjunto determinado por el cálculo proposicional. En casi todos los sistemas el dominio en el que se toman los valores de verdad de la lógica es el intervalo real $[0, 1]$. Esto implica un conjunto de valores de verdad es no numerable (es decir con cardinalidad mayor que $\aleph_0$). En el cálculo de predicados, un predicado n-ario p se interpreta como un función de la forma, donde $D^n = \underbrace{D\text{x}D\text{x}\ldots\text{x}D}_{n \text{ veces}}$:

$$p : D^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

donde D es el dominio de interpretación. Esto es, asocia a cada predicado n-ario el subconjunto de D^n en el que se interpreta como verdadero. En los sistemas de lógica difusa en el que el valor de verdad es un número, la vaguedad en la interpretación del predicado p se formaliza a través de un número real entre 0 y 1 que representa el grado de certeza del predicado. Entonces, la interpretación de p es de la forma:

$$p : D^n \longrightarrow [0, 1]$$

es decir, asocia a cada predicado n-ario un subconjunto difuso de D^n.

Ejemplo 2.1 Sea el dominio $D = \{Laura, Cecilia, Silvina\}$ y el predicado $amiga(X, Y)$ con el significado pretendido de que X es amiga de Y. Entonces la tabla 1 define un subconjunto difuso de D^2 que se puede tomar como la interpretación del predicado mencionado. Se entiende que nadie puede ser amigo de sí mismo, por lo tanto la diagonal es 0. Entonces el valor de verdad de $amiga(Cecilia, Silvina)$ es 0.74, queriendo significar que Cecilia considera bastante bien a Silvina como su amiga; en cambio el valor de verdad de $amiga(Silvina, Cecilia)$ es 0.55 por lo que Silvina no ve muy bien a Cecilia como su amiga.

En general se puede decir que la característica distintiva de estas lógicas difusas es su definición a partir de la interpretación de predicados en la teoría de los conjuntos difusos. La caracterización de estos sistemas de lógica difusa varía en la forma en que se interpretan los conectivos lógicos. Es así que para cada grupo de operaciones en conjuntos difusos se asocia una lógica difusa distinta. Surgen entonces las lógica difusas en que la conjunción, la disyunción y la negación son modeladas por la terna de operadores de Zadeh, o por la terna producto, o por la terna de Łukasiewicz. La lógica difusa que usa los operadores de Zadeh es la lógica multivalente $Ł_{\aleph_1}$ de Łukasiewicz.

También existen para cada uno de estos sistemas definiciones alternativas de la implicación, la equivalencia y otros conectivos lógicos a partir de la conjunción, la disyunción y la negación. Tampoco es uniforme la caracterización de las propiedades que deben cumplir estas operaciones, existiendo un consenso en que el álgebra asociada debe ser por lo menos un reticulado pseudocomplementado. Las lógicas difusas definidas en base a los operadores de Zadeh y los operadores producto no satisfacen las leyes del tercero excluído, mientras que la definida en base a los operadores de Łukasiewicz si las satisfacen.

Otra característica común de estos sistemas de lógica difusa es su posible interpretación como lógicas multivaluadas cuyo conjunto de valores de verdad tenga la cardinalidad del contínuo. Bajo esta óptica, algunos autores han sugerido que toda lógica multivaluada es una lógica difusa en el sentido de que ya no existe una diferencia explícita entre los valores de verdad verdadero y falso. Sin duda esta visión de la lógica difusa es exagerada, y por lo tanto es generalmente aplicado el concepto de lógica difusa a aquellas lógicas multivaluadas cuyo conjunto de valores de verdad tenga la cardinalidad del intervalo real $[0, 1]$.

Finalmente se mencionará una forma trivial de incluir estos sistemas de lógicas difusas dentro del cálculo de predicados. Si bien parece que la definición de cada uno de ellos es más general que la definición del cálculo de predicados, formalmente con esta extensión no se agrega poder expresivo. La inmersión es posible realizarla mediante el mismo proceso utilizado para incluir las lógicas modales o multivaluadas en el cálculo de predicados. Para ser breve en su exposición se mostrará con un ejemplo:

Ejemplo 2.2 Consideremos el predicado $amiga(X, Y)$ del ejemplo 2.1. Se puede establecer un nuevo predicado $grado\_amistad(X, Y, G)$ cuya aridad es uno más que la aridad del predicadado original y cuyo significado pretendido es X es amiga de Y en un grado G. De esta forma la interpretación clásica de este predicado será el subconjunto clásico de DxDx$[0, 1]$ que continene a cada para de amigas con su grado de amistad, incluso aquellos pares cuyo valor es 0.

Es claro que teniendo el cálculo de predicados el poder expresivo de las funciones recursivas parciales, se pueden describir nuevos predicados que modelen cada una de las operaciones mencionas en estos sistemas de lógica difusa, a partir del argumento adicional. Se tendrá entonces una forma de incluir la lógica difusa dentro de la lógica clásica.

2.2 Subconjuntos Difusos como Valores de Verdad

La interpretación clásica de un predicado

$$p : D^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

también puede considerarse como que el predicado p asigna a cada elemento de D^n un singleton (subconjunto de cardinalidad uno) en el conjunto de los valores de verdad dado por $\{0, 1\}$.

$$p : D^n \longrightarrow \{X \in \mathcal{P}(\{0, 1\}) : | X | = 1\}$$

	$Verdadero$	$Falso$
Laura	0.74	0.33
Cecilia	0.58	0.20
Silvina	0.40	0.40

Tabla 2: Ejemplo de predicado con subconjuntos difusos de {Verdadero, Falso} como valores de verdad.

En el caso de una lógica multivaluada, simplemente variará el conjunto de valores de verdad. Por ejemplo para una lógica trivaluada la interpretación de p se considera:

$$p : D^n \longrightarrow \{X \in \mathcal{P}(\{0, \frac{1}{2}, 1\}) : \mid X \mid = 1\}$$

Siguiendo esta línea de razonamiento, se puede formalizar [4] la imprecisión en un predicado definiendo como valor de verdad para cada predicado en lugar de un singleton (subconjunto "crisp" del conjunto de valores de verdad), un subconjunto difuso del conjunto de valores de verdad. Por lo tanto, será posible tener grados verdadero y de falso (o de verdadero, falso e indefinido) en cada predicado. La interpretación del predicado p en estos sitemas de lógica difusa es por lo tanto:

$$p : D^n \longrightarrow \{X \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{V})\}$$

donde $\mathbf{V}$ es un conjunto de valores de verdad.

Ejemplo 2.3 Sea $D = \{Laura, Cecilia, Silvina\}$ y el predicado $alta(X)$. Consideremos una lógica difusa construída a partir del cálculo de predicados clásico, cuyos valores de verdad sean subconjuntos difusos de $\{Verdadero, Falso\}$. Una interpretación posible para el predicado puede ser la determinada por la tabla 2. Esto es, el valor de verdad de $alta(Laura)$ es un subconjunto difuso para el que $Verdadero$ pertenece con un grado de 0.74 y $Falso$ pertenece con un grado de 0.33.

Esta definición de lógica difusa depende de una lógica subyacente que aporta el conjunto de valores de verdad y el orden que existe entre los mismos. Un problema que se presenta es que el conjunto de valores de verdad de este tipo de lógicas difusas es extramadamente abundante. En el caso general de una lógica subyacente L con un conjunto de valores de verdad $\mathbf{V}$, la lógica difusa construída a partir de L tendrá un conjunto de valores de verdad cuya cardinalidad será $\mid [0,1] \mid^{\mid \mathbf{V} \mid}$. No son valores de verdad fáciles de entender. Es más, en ciertos casos pueden llegar a resultar casos extraños.

Ejemplo 2.4 Consideremos el predicado del ejemplo 2.3, con la definición proporcionada por la tabla 3. Esta interpretación es posible dentro de una lógica difusa que tiene como valores de verdad subconjuntos difusos de {Verdadero, Falso}. Sin embargo, ninguno de los valores de verdad asignados a cada literal básico tiene sentido como representación de conocimiento impreciso.

	Verdadero	*Falso*
Laura	1	1
Cecilia	0	0
Silvina	0.5	0.50

Tabla 3: Posible interpretación de un predicado dentro de este esquema de lógica difusa.

En la caracterización original de Bellman y Zadeh [2] donde se presentan este tipo de lógicas, el autor prefiere a la lógica $L_{\aleph_1}$ de Łukasiewicz como lógica subyacente; por lo tanto los valores de verdad son subconjuntos difusos del intervalo real $[0, 1]$. Considerando el problema antes mencionado, Bellman y Zadeh [2] se restringen a un subconjunto contable de subconjuntos difusos de $[0, 1]$. Otra de las características particulares de su propuesta es que cada uno de estos subconjuntos está etiquetado con una cadena generada por una gramática libre de contexto con atributos, que determina la función de pertenencia del subconjunto difuso en base a etiquetas más simples.

Ejemplo 2.5 La siguiente gramática libre de contexto genera las etiquetas de los valores de verdad y calcula las relaciones de pertenencia a partir de funciones de pertenencia básica asignadas a **true** y **false**, $\mu_{\mathbf{true}}$ y $\mu_{\mathbf{false}}$ respectivamente.

$$
\begin{array}{ll}
S \leftarrow A & \mu_S := \mu_A \\
S \leftarrow \mathbf{not}A & \mu_S := 1 - \mu_A \\
A \leftarrow \mathbf{very}A_1 & \mu_A := (\mu_{A_1})^2 \\
A \leftarrow (S) & \mu_A := \mu_S \\
A \leftarrow \mathbf{true} & \mu_A := \mu_{\mathbf{true}} \\
A \leftarrow \mathbf{false} & \mu_A := \mu_{\mathbf{false}}
\end{array}
$$

Bellman y Zadeh también definen en [2], a partir de esta lógica, una manera de interpretar frases del lenguaje natural de la forma "Laura no es muy amiga de Cecilia", a través del valor de verdad de $amiga(Laura, Cecilia)$ que debe ser "no muy verdadero".

La semántica asociada a cada regla de la gramática establece la forma de calcular una función de pertenencia en cada caso. Bellman y Zadeh [2] llaman a este tipo de lógica difusa "local" dado que esta forma de especificar la función de pertenencia puede ser cambiada en distintas aplicaciones según el contexto local de cada predicado.

Los problemas de la cardinalidad del conjunto de valores de verdad y sus interpretaciones extravagantes tiene otras posibles soluciones. Algunos autores consideran que, dado que la concepción original es que el valor de verdad sea un número, en el caso de la lógica difusa no se consideren todos los subconjuntos difusos de los valores de verdad, sino solamente los números difusos del conjunto de valores de verdad. Esto es, solamente aquellos subconjuntos difusos que sean convexos y normales. Esta es una restricción razonable que aparece en todos los ejemplos presentados, incluso en el trabajo de Bellman y Zadeh que no la considera en su definición.

3 Representación de Conocimiento Difuso

Después de haber descripto en forma general los distintos sistemas que forman la lógica difusa, se analizarán a continuación los objetivos que motivaron su definición y su relación con los objetivos generales de la lógica clásica.

El objetivo fundamental de la lógica difusa es la formalización de sentencias y argumentos vagos o imprecisos. El razonamiento humano es impreciso en general, por lo tanto un formalismo lógico que pretenda comportarse como el razonamiento humano debe tener necesariamente herramientas para manejar información imprecisa. Los sistemas clásicos de la lógica en el cual toda fórmula es o bien verdadera o falsa parecen inapropiados para este objetivo. Para solucionar este problema existen dos alternativas: precisar los argumentos informales antes de escribirlos en la lógica clásica; o describir algún otro sistema formal en el que este tipo de argumentos se aplique directamente. Por supuesto, la lógica difusa surge ante la aplicación de esta última alternativa.

Considerando que una de las principales ventajas de la lógica clásica es construir sistemas formales precisos, la primera pregunta que se debe formular al realizar esta elección es si es en realidad correcto pretender introducir vaguedad dentro de la lógica. Es generalmente aceptado [9] que para que un formalismo matemático sea considerado como lógica es necesario que tenga una interpretación en la cual se pretenda materializar reglas de razonamiento válidas. Es por lo tanto, la intención lo que determina a cuáles sistemas se le puede llamar "lógica". Una vez caracterizado al sistema como lógica, se presenta un problema quizás más importante: la evaluación del sistema formal para analizar si cumple con los objetivos que se describieron en esta intención.

Sin lugar a dudas bajo esta apreciación, los sistemas de lógica difusa descriptos pueden considerarse como lógicas. El razonamiento impreciso es una parte importante del razonamiento humano, y un sistema formal que los modele cumple con el requerimiento de pretender materializar patrones de argumentos válidos. Corresponde entonces analizar si las lógicas difusas cumplen con su objetivo de representar patrones de razonamiento impreciso.

La imprecisión presente en el razonamiento humano se debe a varios factores. Se puede tratar de razonamiento sobre objetos desconocidos o poco conocidos, sobre relaciones no concretas entre objetos, ambigüedades sintácticas o semánticas, cambio de significado de los objetos o de sus relaciones en distintas situaciones, ausencia de conocimiento, interacción imprecisa entre las relaciones, etc.. Sin duda no se puede pretender que los sistemas de lógicas difusas definidos incluyen todos estos patrones de razonamiento impreciso. Dubois y Prade [4] reconocen que en los sistemas de lógica difusa descriptos en la sección 2.1

> "the fuzziness of a symbol lies in the lack of of well-defined boundaries of the set of objects to which this symbol applies. "
>
> (La imprecisión de un símbolo radica en la falta de límites bien definidos en el conjunto de objetos a los que se aplica este símbolo)

Es por lo tanto un único y bien determinado aspecto del razonamiento impreciso el que se pretende formalizar con estos sistemas, y no todo el espectro de los argumentos imprecisos.

Kaufmann [10] caracteriza dos tipos de imprecisión: imprecisión conceptual e imprecisión morfológica. La imprecisión conceptual se aplica a los objetos del dominio, y representa un desconocimiento de alguna o algunas características de los mismos. La imprecisión morfológica es precisamente la descripta anteriormente por Dubois y Prade que trata sobre grados de pertenencia de los objetos a las relaciones, que forman la sintaxis del lenguaje. Kaufman también reconoce que las lógicas que describe solo pretenden formalizar la imprecisión morfológica. La graduación de la relación de pertenencia de un objeto a un conjunto, que es precisamente lo que hacen estos sistemas, solo representa un plano de vaguedad en un argumento.

El hecho de determinar, por ejemplo, que el valor de verdad de "$alto(Pedro)$" es verdadero en un grado de 0.765, es bastante arbitrario. Esta cuestión, y la posibilidad de operar sobre los valores de verdad, es la que motivó que Bellman y Zadeh [2] presentara una definición más general de lógica difusa, descripta en la sección 2.2. Estas lógicas difusas introducen un concepto de imprecisión distinto a los anteriormente vistos. Esta imprecisión se fundamenta en considerar a los mismos valores de verdad como imprecisos, introduciendo un nivel más de "fuzzificación". Este nivel meta-lógico de imprecisión implica que los conceptos de "verdadero", "falso", "0.765" y cada uno de los valores de verdad de las lógicas subyacentes son también conceptos difusos. No se refiere ni a los objetos del dominio de la lógica, ni a sus relaciones, sino a las propiedades que la lógica subyacente establece sobre estas relaciones.

El segundo nivel de fuzzificación que se establece en los valores de verdad permite a Bellman y Zadeh [2] definir un cálculo sobre los mismos. Define, por ejemplo, los operadores sobre valores de verdad "muy", "levemente", "bastante", "más o menos", etc. y permite caracterizar sentencias de la forma "P es muy levemente no verdadero", lo que paracе un poco extravagante. Más aún, cualquiera de estas lógicas difusas descriptas en la sección 2.2 no tienen valores de verdad definidos; y esto implica que las operaciones de conjunción, negación, etc. no son cerradas con respecto a estos conjuntos de valores de verdad, lo que obliga a calcular valores de verdad aproximados que sí pertenezcan. En el camino de describir una lógica que manejara el razonamiento impreciso, se terminó describiendo una lógica imprecisa. El proceso de modificación de la lógica clásica para incluir la representación más directa de información no precisa se cobra en este caso un alto precio: la pérdida de un significado claro para las fórmulas de la lógica.

4 Algunas Propiedades Metalógicas

La semántica de la lógica difusa es también totalmente distinta de la semántica tarskiana de modelos asociada a la lógica clásica. En la lógica clásica, una teoría (conjunto de fórmulas de la lógica) puede tener uno, varios o nigún modelo asociado. Como consecuencia lógica de esa teoría se entienden a todas las fórmulas que son verdaderas en todos los modelos de la teoría. Las fórmulas que son verdaderas en todas las teorías se denominan tautologías. En los sistemas de lógica difusa no es práctico considerar más de un modelo de una teoría a la vez. Por lo tanto no existen los conceptos de tautología ni de consecuencia lógica. La semántica está determinada por un sólo modelo, que es un subconjunto difuso del conjunto de fórmulas de la teoría. Para caracterizar a un modelo se establece inicialmente el valor de verdad para un subconjunto de las fórmulas, y se trata de calcular a partir de estos datos el valor de verdad de las restantes fórmulas en ese modelo. Esta claro que, de presentarse varios modelos de una teoría a la vez, sería muy costoso computacionalmente calcular los intervalos a los cuales pertenecen el valor de verdad de otras fórmulas; en la mayoría de los casos no resultarían valores significativos, e incluso en algunos sería imposible su cálculo.

El concepto de derivación sintáctica tampoco existe en la lógica difusa. No se presentan sistemas con axiomas y reglas de inferencia, y por lo tanto no se puede evaluar a la lógica con los conceptos de completitud y sensatez[1]. La asociación con la regla de Modus Ponens se realiza a través de la equivalencia (teorema de la deducción) existen en el cálculo proposiciones entre esta regla de inferencia y el conectivo $\longrightarrow$.

La amplitud en el rango de los valores de verdad en los sistemas de lógica difusa descriptos en la sección 2.1 pueden dar una falsa idea de independencia entre los mismos. De acuerdo a las operaciones existentes y cómo están definidas, datos que varían en cada lógica difusa en particular, pueden exister relaciones intrínsicas entre los mismos de manera que limite su libre elección.

En el caso extremo, Elkan muestra en [7] que una lógica difusa que cumple con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
&\mu(A \wedge B) = \mathbf{min}\{A, B\} \\
&\mu(A \vee B) = \mathbf{min}\{A, B\} \\
&\mu(\neg A) = 1 - \mu(A) \\
&\mu(A) = \mu(B) \text{ si } A \text{ y } B \text{ son lógicamente equivalente en el cálculo proposicional}
\end{aligned}$$

tiene la propiedad de que para dos fórmulas atómicas cualesquiera del lenguaje, sus valores de verdad o son iguales o son complementarios. Esto es, en este tipo de lógica difusa existen solamente dos valores de verdad, y asignar a una fórmula un valor de verdad distinto hará que la lógica no sea consistente. Elkan denomina a este resultado una paradoja de las lógicas difusas. Sin lugar a dudas se trata de una exageración, ya que las condiciones que impone sobre las lógicas difusas son muy fuertes. En particular, la cuarta condición es la más importante de todas y la que determina que sólo existan dos valores de verdad. Es de importancia resaltar que esta condición no es satisfecha por ninguna de las lógicas difusas generalmente usadas, ya que por lo menos la valuación de $A \vee \neg A$ y $\top$ (ley del tercero excluído) son distintas.

Muchas respuestas [6] a este trabajo han cuestionado matemáticamente este resultado. Sin embargo no se trata más que una reescritura de resultados ampliamente conocidos en

[1] "completeness" y "soundness"

el área de la lógica algebraica. Por ejemplo, en [1, capítulo I, definición 3.1] se muestra que la relación de equivalencia lógica en el cálculo de predicados forma, con ciertas operaciones, un álgebra llamada "*álgebra de Lindenbaum*". A continuación, [1, capítulo I, teorema 3.3] se prueba que este álgebra se puede ver como el conjunto de funciones $f : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, donde n es la cantidad de letras proposicionales de la lógica. Es decir, cualquier lógica basada en el cálculo proposicional y que respete la relación de equivalencia lógica tiene esencialemente dos valores de verdad ($\mathbb{Z}_2$). Esto es ni más ni menos lo que la "paradoja" de Elkan establece. Sin dudas, el término paradoja no es sólo no es adecuado para expresar el resultado, sino que hasta parece tendencioso.

La conclusión que sí se puede sacar de este trabajo es que las lógicas difusas no pueden satisfacer todas las equivalencias lógicas del cálculo proposicional. La pregunta es, si no se satisfacen todas, cuáles deben satisfacerse y cuáles no. En ninguna de la bibliografía consultada se muestra una respuesta a esta pregunta, y lo que es peor, ni siquiera parece haberse analizado. Decidir el alcance de una lógica difusa en particalar es de vital importancia para establecer las relaciones posibles entre las fórmulas del lenguaje. Si estas relaciones no están definidas y claramente expresadas, se corre el riesgo de asignar valores de verdad inconsistentes (distintos) a una misma fórmula.

La única referencia a este problema la presentan Dubois y Prade. En [4] se muestra que una lógica definida como en 2.1 basada en los operadores de Zadeh, es básicamente trivalente en el sentido que si el valor de verdad de dos fórmulas que coincide en los puntos $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ entonces coincide en $[0, 1]$. El significado de este resultado es que, debido a las propiedades de los operadores en esta lógica, solamente es posible definir fórmulas que asignan valores nada más que a estos tres puntos.

Es de esperar que todos estos sistemas de lógica difusa determinen relaciones implícitas entre las fórmulas como los mostrados anteriormente. Creo que este es un tema que merece la pena dedicarle mayor atención.

5 Aplicaciones en la Representación de Conocimiento

Es en el área de las aplicaciones donde la lógica difusa ha tenido su mayor resonancia. Sin embargo, si separamos bien aquellas aplicaciones que usan como parte de su sistema la teoría de conjuntos difusos y aquellas que emplean la lógica difusa propiamente dicha, estas últimas son las menos. En [6] se citan los únicos reportes de grandes sistemas expertos que declaran usar lógica difusa en su construcción. La principal característica de estos sistemas es la poca profundidad de su base de conocimientos [7]. Tratándose las operaciones definidas en la lógica difusa de operaciones tentativas, está claro que estas operaciones no pueden aplicarse en una secuencia grande ya que sus resultados no serán correctos. La propagación del error en cada aplicación impide llegar a resultados significativos.

El cálculo de predicados sirve como base a un conjunto de formalismos que tratan de modelar, de manera procedural o de manera declarativa, distintas formas de conocimiento.

Considerando a la lógica difusa como una extensión de la lógica clásica, es natural reveer la definición de estos formalismos de manera que incluyan a la lógica difusa. De esta forma nacen las definiciones (ver [10]) de Algoritmos Difusos, Lenguajes Difusos, Autómatas Difusos y Gramáticas Difusas. Los Lenguajes y las Gramáticas Difusas son las generalizaciones correspondientes a los Lenguajes Formales y a las Gramáticas Formales en las formas normales de Chomsky. Pero, como menciona Kaufmann en su definición, los nombres de "Lenguaje Formal Difuso" y "Gramática Formal Difusa" suenan contradictorios, por lo que se prefiere eliminar el adjetivo "Formal" a pesar de que en realidad son lenguajes y gramáticas formales. Los Algoritmos difusos son, en realidad, Algoritmos clásicos descriptos en términos de lógica difusa. Dubois y Prade [4] prueban esta equivalencia. No se conocen aplicaciones reales de estos conceptos, por lo que queda la sensación que son puramente ejercicios matemáticos. Ha ocurrido en este caso algo parecido que lo que pasó con el razonamiento probabilístico: una vez descriptos los fundamentos de una lógica con probabilidades, se extendieron todas los formalismos que usan la lógica para que incluyan las probabilidades, pero en realidad sólo pocos han sido útiles para alguna aplicación. Esta línea también incluye a algunos trabajos que propugnan una Programación en Lógica Difusa [5, 3].

Un área donde pienso que es posible aplicar los conceptos de la lógica difusa y que no he encontrado ninguna referencia a que ya se haya hecho, es el área de Cambios de Contexto. Recientemente, se han publicado varios trabajos [8, 11, 12] que tratan de formalizar, usando lógica clásica de primer orden, el cambio de significado de los predicados y los términos cuando se cambia el contexto en donde se los interpreta. Dado que una gran parte de la imprecisión que trata de manejar la lógica clásica se debe a que no está bien especificado el contexto de interpretación de una fórmula, sería interesante analizar la aplicación de la lógica difusa en esta teoría.

6 Conclusiones

La lógica clásica no está diseñada para manipular directamente conceptos y objetos cuyas características no esten bien precisadas. Ante esta problema y a partir de la teoría de conjuntos difusos, se proponen diversos sistemas de lógica difusa que tratan de suplir esta falta. Los sistemas de lógica difusa presentados pierden las principales ventajas por las cuales se utiliza la lógica clásica como herramienta para representar conocimiento. No se puede determinar si esta pérdida es imprescindible para poder cumplir con los objetivos deseados, pero lo que sí está claro es que los sistemas presentados no cumplen totalmente con estos objetivos. Creo que no se ha producido, tal vez por lo reciente del tema, la retroalimentación necesaria para ajustar estos formalismos.

A pesar de estas dificultades, ciertas aplicaciones de la lógica difusa han tenido mucha resonancia. Tal vez la razón sea que las lógicas difusas proveen esencialmente un método para evaluar aspectos cuantitativos que no está presente en la lógica clásica. Sin embargo, esto sólo no alcanza y como se mostró en algunos de los sistemas, se necesitan operaciones adicionales para manejar los valores producidos por estos métodos. Una solución alternativa que considero válida es introducir estos métodos dentro del lenguaje de la lógica clásica, como en el ejemplo 2.2, y no fuera como lo hace la lógica difusa. Esta solución conserva las ventajas de los dos sistemas.

Referencias

[1] BARNES, D. W., AND MACK, J. M. *An algebraic introduction to mathematical logic.* Springer-Verlag, New York, 1975.

[2] BELLMAN, R. E., AND ZADEH, L. A. Local and fuzzy logics. In *Modern Uses of Multiple-Valued Logics*, J. Dunn and G. Epstein, Eds. D.Reidel Publishing Company, 1977, pp. 105–165.

[3] DUBOIS, D., LANG, J., AND PRADE, H. Towards possibilistic logic programming. In *Proceedings of the 8th. International Conference on Logic Programming* (Paris, France, 1991).

[4] DUBOIS, D., AND PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and applications.* Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, 1980.

[5] DUBOIS, D., AND PRADE, H. Possiblilistic logic, preferential models, non-monotonicity and related issues. In *Proceedings of the 12th. International Joint Conference on Artificial Intelligence* (Sydney, NSW, Australia, 1991).

[6] ELKAN, C. Reply to comments on *the paradoxical success of fuzzy logic.*

[7] ELKAN, C. The paradoxical success of fuzzy logic. In *Proceedings of the 11th. National Conference on Artificial Intelligence* (Washington, DC, 1993).

[8] GUHA, R. *Contexts: a formalization and some applications.* PhD thesis, Stanford University, 1991.

[9] HAACK, S. *Philosophy of Logics.* Cambridge University Press, 1978.

[10] KAUFMANN, A. *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, vol. 2. Applications à la linguistique, á la logique, et á la sémantique. Masson et Cie., Paris, France, 1975.

[11] MCCARTHY, J. Notes on formalizing contexts. In *Proceedings of the 13th. International Joint Conference on Artificial Intelligence* (Chambery, France, 1993).

[12] SHOHAM, Y. Varieties of context. In *Artificial Intelligence and Mathematical Theory of Computation*, V. Lifschitz, Ed. Academic Press, San Diego, CA, 1991, pp. 393–407.