

www.cibereduca.com



V Congreso Internacional Virtual de Educación
7-27 de Febrero de 2005

DEFINICIÓN DE LAS CÓNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO Y SU PRESENTACIÓN COMO SECCIONES DE UN CONO.

Silvia G. Maffey García
smaffey@podernet.com.mx

Justificación.

La enseñanza de las curvas cónicas: parábola, elipse e hipérbola, se inicia en muchos libros de texto con una presentación gráfica de éstas como secciones de un cono y el enunciado de la definición de las mismas como lugar geométrico.

Ante este manejo de los textos, un gran número de profesores siguen la misma tónica en sus clases con lo que los estudiantes se convierten en meros receptores de tales definiciones, que por lo mismo no logran relacionarlas posteriormente con el trabajo que regularmente se realiza de localización de vértices, focos, cálculo de medidas de lados rectos, etc. a partir de la ecuación de la cónica y viceversa.

Esto último queda reducido a un mero manejo de fórmulas, desprovisto de relación con las definiciones de las curvas con que se trabaja y por ello no favorece que los estudiantes puedan transferir el conocimiento a la resolución de problemas de aplicación.

Este trabajo presenta una propuesta didáctica para la construcción de las definiciones de las curvas cónicas como lugares geométricos, empleando para ello su trazado con compás y escuadra, lo que permite asimilar con claridad las características de los puntos que las forman, con lo que los mismos estudiantes podrán contruir la definición de la curva como lugar geométrico.

Además, mediante una actividad manual se pretende que la visualización de la curva como sección de un cono sea clara y natural.

Sustento teórico.

Partiendo de las afirmaciones: “Aprender matemáticas significa construir matemáticas” Ruiz (2000) y “Un individuo aprende en la medida que construye o resignifica un concepto incorporándolo a su estructura cognitiva” Brousseau, en Ferrari (2001), se han diseñado secuencias didácticas para el estudio de las definiciones de parábola y elipse con un enfoque tal que los estudiantes serán quienes logren construir tales definiciones a partir de las actividades planteadas en las mismas.

El diseño de las secuencias didácticas, objeto de este trabajo parte de que “el docente debe proponerle al alumno una situación que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir de un significado propio y plausible de serle útil y de que reconozca su utilidad en la resolución de otro problema. La situación planteada debe tener por objeto que el alumno interactúe con el saber, es decir, que actúe, formule, poruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que les sean útiles”. Lezama (1999) en Ferrari (2001)

A la vez, toma en consideración que “la situación que se le proponga al alumno debe ser tal que le permita adquirir los conocimientos que pretendemos enseñar, siendo deseable que éstos aparezcan como una propuesta personal a la pregunta formulada y que sea capaz de hacerlos funcionar o modificarlos respondiendo a las exigencias del medio y no a las del profesor. Se debe partir de conocimientos matemáticos que el alumno ya maneje con soltura, pero apartándose de ellos lo suficiente como para que no le permitan dar una respuesta inmediata a la secuencia propuesta. A su

vez, la secuencia debe ser lo suficientemente cercana a los conceptos puestos en juego, como para que pueda realizar acciones sobre los objetos de conocimiento propuestos y donde llegue un momento en el que se evidencie la ineficacia de los mismos para resolver el problema planteado”. Ferrari (2001).

Descripción de las secuencias.

Cada una de las secuencias didácticas planteadas consta de tres etapas:

La primera etapa pretende que el estudiante identifique la curva bajo estudio en distintos contextos, sea capaz de trazarla por un procedimiento geométrico y a partir de esto, logre definirla como lugar geométrico.

La segunda etapa busca que el estudiante visualice a la curva bajo estudio como la sección de un cono.

La tercera etapa busca que el estudiante relacione la curva estudiada con una sección de un cuerpo que sería el sólido de revolución generado por la misma.

Las dos primeras etapas contienen las fases de acción, formulación y validación.

En su misma presentación se plantea la forma de operar con ellas.

Secuencias didácticas diseñadas.

A continuación se presentan las secuencias didácticas de que consta el presente trabajo, una para la parábola y otra para la elipse.

Referencias bibliográficas consultadas.

Calderón, F. (1966). *Curso de Dibujo Técnico Industrial. Tomo I*. Ed. Porrúa. México.

Ruiz, L. (2000). *Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza – aprendizaje*. Acta latinoamericana de matemática educativa. 14, pp. 122 – 130.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. Departamento de matemática educativa, CIEA -*IPN.México

Secuencia didáctica No. 1.

Tema: La Parábola.

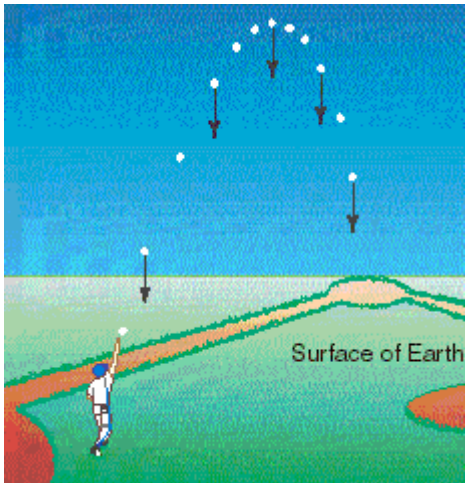
Primera etapa.

Objetivo: que el estudiante identifique parábolas en distintos contextos, sea capaz de trazar una parábola por un procedimiento geométrico y a partir de esto, logre definirla como lugar geométrico.

Fase: acción

Operación en el aula: será de tipo grupal, se proyectarán las imágenes y las preguntas serán respondidas en forma conjunta.

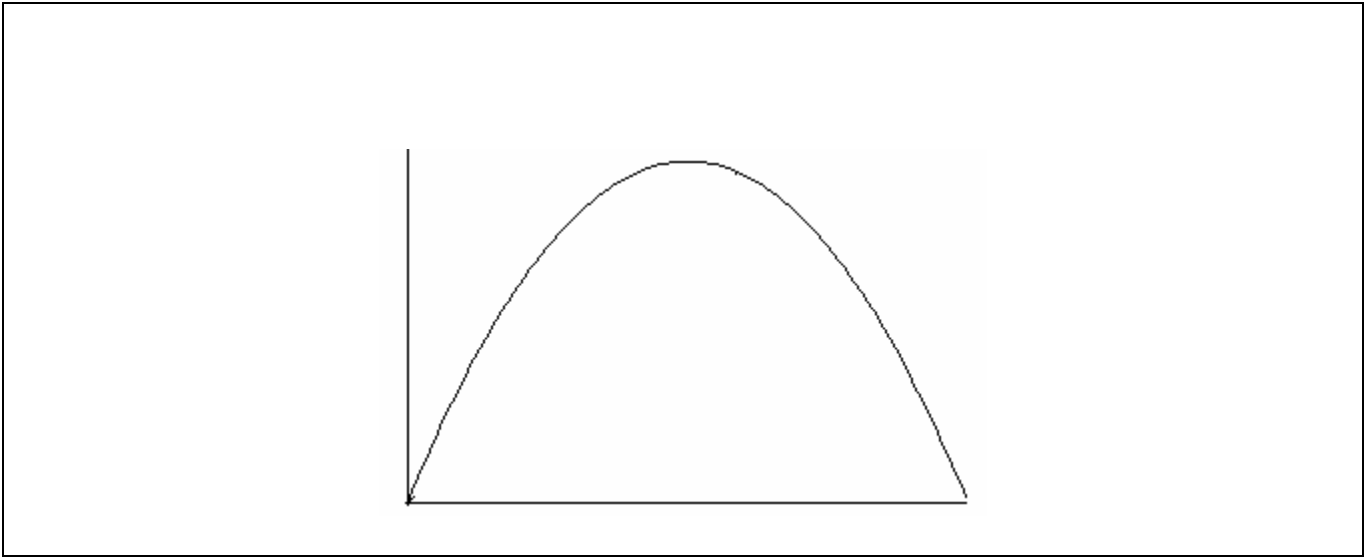
Observa detenidamente las siguientes imágenes:



Responde:

¿Qué tienen en común las tres imágenes presentadas?

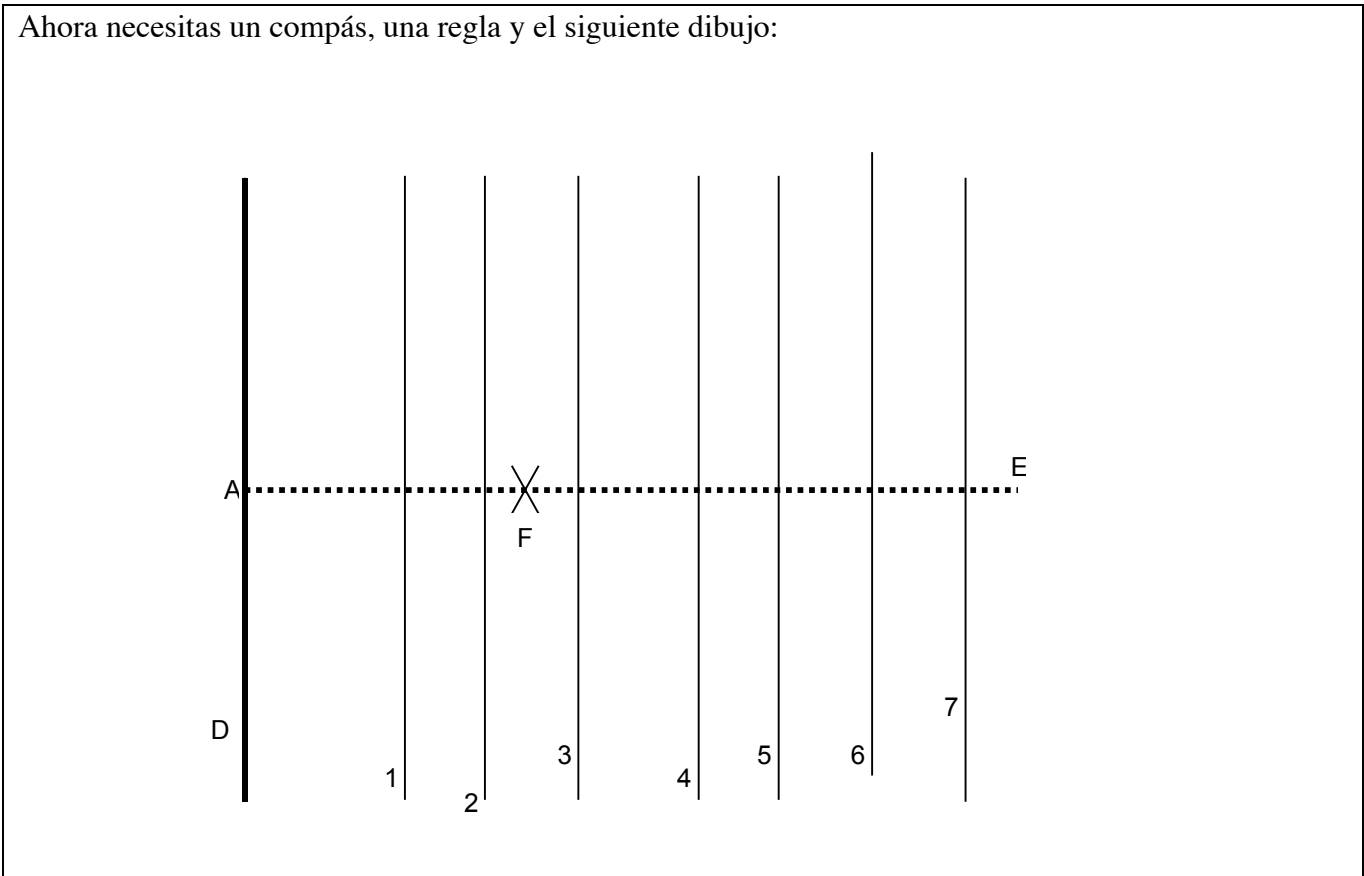
¿Hay alguna similitud entre ellas y el siguiente trazo?



Fase: formulación.

Operación en el aula: por equipos de trabajo de entre tres y cinco estudiantes.

Ahora necesitas un compás, una regla y el siguiente dibujo:



Realiza lo siguiente:

1. Con ayuda de tu compás determina sobre la recta E, el punto medio entre del segmento de la recta AE comprendido entre el punto F y la recta D.
2. Usando tu compás, toma la medida entre la recta 1 y la recta D sobre la recta AE. Haciendo centro en el punto F, marca esa distancia en la recta 1, tanto por arriba de la recta horizontal como por debajo de ella.
3. Repite el paso anterior con cada una de las rectas numeradas restantes.
4. Ahora tienes 15 puntos trazados por ti, el uno en el paso 1 y 14 en los siguientes, únelos por medio de una curva suave.

Ahora, responde:

¿tu trazo tiene similitud alguna con las imágenes observadas anteriormente?

Fase: validación

Operación en el aula: por equipos y grupal. Cada equipo de trabajo responderá a las preguntas planteadas y posteriormente se discutirán las respuestas de cada uno de estos con todo el grupo.

La curva que trazaste en la fase anterior y que observaste en las imágenes presentadas al inicio recibe el nombre de parábola.

Responde:

¿Qué tienen en común los 15 puntos que trazaste?

Selecciona uno de los puntos trazados, ¿cómo es su distancia a la recta D, en relación a su distancia al punto F?

¿Ocurre lo mismo con los demás puntos?

¿Esa característica será la misma para todos los puntos de la curva que trazaste?

Completa el siguiente enunciado, considerando que la recta D recibe el nombre de directriz y el punto F, de foco:

U n a p a r á b o l a e s l a c u r v a c u y o s
puntos _____

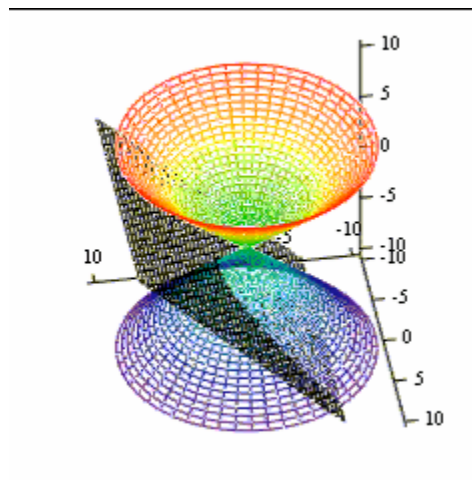
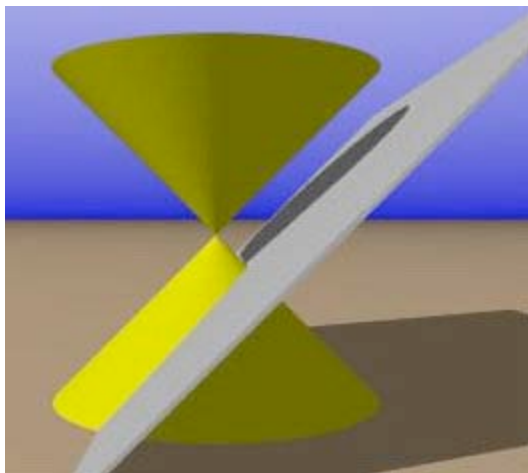
Segunda etapa.

Objetivo: que el estudiante visualice a la curva parábola como la sección de un cono.

Operación en el aula: las tres fases serán trabajadas por los alumnos en forma individual y al concluir la etapa se discutirán grupalmente las respuestas.

Fase: acción

Observa las siguientes imágenes:



En ambas imágenes podrás notar que aparecen conos dobles en los que una parte de ellos es cortada por un objeto externo.

¿Qué forma tendrá la sección plana del corte?

Elabora un cono con papel grueso, no necesita ser doble como los de las imágenes anteriores y hazle un corte similar a los observados aquí.

¿La forma de la sección “plana” de la porción cortada es como te la imaginaste?

Como el cono que elaboraste es hueco, solo se tiene el contorno de la sección de corte y es una curva, ¿logras identificarla?

Fase: formulación

Tomando en cuenta que la curva que se aprecia en el corte es el resultado de la acción que realizaste, ¿podrías enunciar una definición de dicha curva, que solo haga mención de esto?

¿Cuál es esa definición?

Fase: validación

¿La curva observada depende del cono que hiciste?, ¿sería la misma si tu cono tuviera otras medidas?

¿Podría decirse que la definición que diste es general?

Tercera etapa.

Objetivo: que el estudiante relacione la parábola con una sección de cuerpos que serían sólidos de revolución generados por la misma, es decir, paraboloides.

Operación en el aula: esta es la etapa final, por ello no se hace distinción de fases y deberá trabajarse en forma grupal, las imágenes deberán ser proyectadas a todo el grupo, incluso, las preguntas podrían ser formuladas por el profesor de manera verbal.

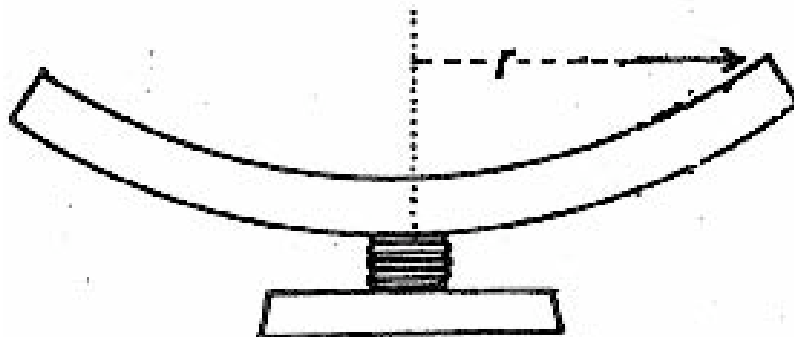
Observa las siguientes imágenes:



¿Qué figura observarías si cortaras estos objetos en forma transversal desde su vértice?

¿Sería algo
forma del
objeto?:

similar a la
siguiente



En caso de que tu respuesta sea afirmativa, ¿tienen estas formas alguna relación con las vistas en las actividades precedentes?

Secuencia didáctica No. 2.

Tema: La Elipse.

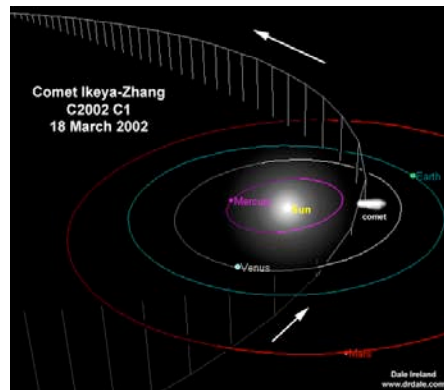
Primera etapa.

Objetivo: que el estudiante identifique elipses en distintos contextos, sea capaz de trazar una elipse por un procedimiento geométrico y a partir de esto, logre definirla como lugar geométrico.

Fase: acción

Operación en el aula: será de tipo grupal, se proyectarán las imágenes y las preguntas serán respondidas en forma conjunta.

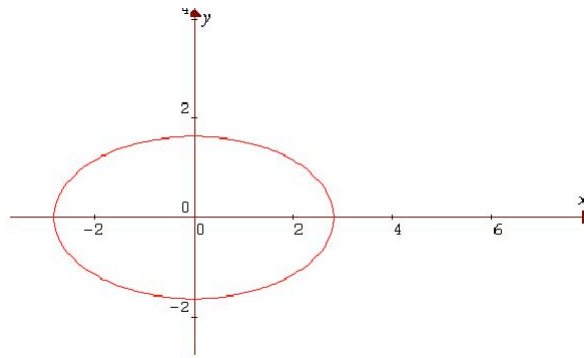
Observa detenidamente las siguientes imágenes:



Responde:

¿Tienen alguna forma en común las tres imágenes presentadas?

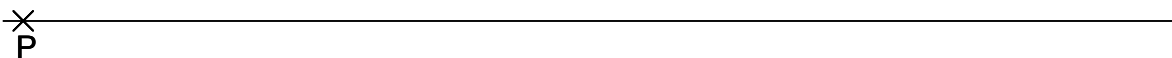
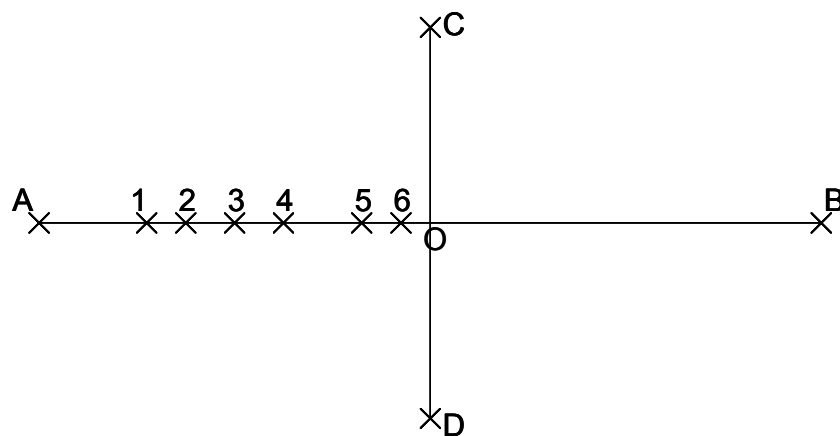
¿Hay alguna similitud entre ellas y el siguiente trazo?



Fase: formulación.

Operación en el aula: por equipos de trabajo de entre tres y cinco estudiantes.

Ahora necesitas un compás y el siguiente dibujo:



Toma tu compás y realiza lo siguiente:

1. Toma la distancia AO con tu compás.
2. Apoya la punta de tu compás en el punto C y marca dos arcos sobre la recta AB, uno a la derecha de O y otro a la izquierda.
3. Repite la operación desde el punto D, las marcas deberán cruzarse con las anteriores.
4. Señala los puntos encontrados como F y F'.
5. Toma con el compás la distancia entre el punto A y el punto 1.
6. Apoyándote en el punto F traza un arco por arriba de la recta AB y otro por debajo.
7. Repite el paso anterior, usando a F' como centro para tus trazos.
8. En la recta que se encuentra debajo del dibujo en que estás trabajando, marca desde el punto P un arco sobre ella con la misma abertura del compás que empleaste en el paso anterior. Señala este punto como I.
9. Toma con el compás la distancia entre el punto B y el punto 1.
10. Apoya la punta de tu compás en el punto F traza arcos por arriba y por debajo de la recta AB, deberán cruzarse con dos de los arcos que trazaste en el paso 7.
11. Apoya la punta de tu compás en el punto F' traza arcos por arriba y por debajo de la recta AB, deberán cruzarse con dos de los arcos que trazaste en el paso 6.
12. En la recta que se encuentra debajo del dibujo en que estás trabajando, marca desde el punto I un arco sobre ella con la misma abertura del compás que empleaste en el paso anterior. Señala este punto como I'.
13. Tienes cuatro puntos señalados por el cruce de los arcos trazados, señalalos como a1, b1, c1, d1.
14. Repite desde el paso 5 hasta el 12 para el punto 2. Los puntos que loicalizarás en los pasos 8 y 12 ahora serán designados II y II', respectivamente. La notación indicada en el paso 13 cambiará ahora a a2, b2, c2 y d2.
15. Continúa repitiendo los pasos del 5 al 14 con los restantes puntos (3, 4, 5, 6), cambiando la designación de los puntos encontrados en cada caso, según convenga.
16. Une con cuidado los puntos A, C, B, D, a1, a2, a3, a4, ...d4, d5, d6 en el orden que se presenten en el dibujo superior.

Ahora, responde:

¿tu trazo tiene similitud alguna con las imágenes observadas anteriormente?

Fase: validación

Operación en el aula: por equipos y grupal. Cada equipo de trabajo responderá a las preguntas planteadas y posteriormente se discutirán las respuestas de cada uno de estos con todo el grupo.

La curva que trazaste en la fase anterior y que observaste en las imágenes presentadas al inicio recibe el nombre de elipse.

Responde:

¿Qué tienen en común los puntos $a_1, a_2, \dots, d_5, d_6$ que trazaste?

A partir del punto P localizaste algunos puntos sobre la recta en la que se encuentra, ¿cómo es la distancia encontrada al agregar la del punto I al punto I', en relación a la correspondiente con II y II'?

¿Y, en relación con la distancia III y III'?

¿Qué sucede con las distancias anteriores en relación a la de IV y IV'?

Teniendo en cuenta que para la localización del punto I en la recta empleaste la misma distancia que entre uno de los puntos a_1, b_1, c_1 o d_1 y alguno de los puntos F o F' y para el punto I' empleaste la distancia entre el mismo punto y el otro F o F', ¿podríamos decir que la distancia de P a I' es la suma de las distancias de uno de los puntos de la curva a F y a F'?

¿Esa característica será la misma para todos los puntos de la curva que trazaste?

Completa el siguiente enunciado, considerando que los puntos F y F' reciben el nombre de focos y la curva obtenida es una elipse:

U n a e l i p s e e s u n a c u r v a c u y o s p u n t o s

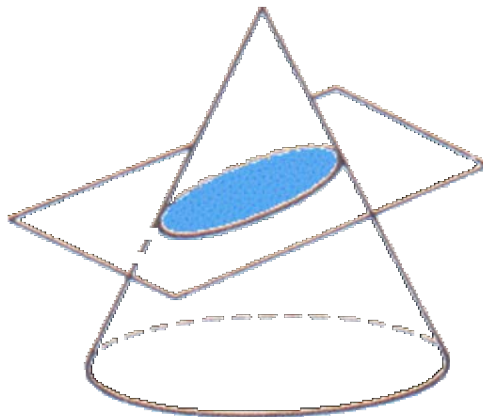
Segunda etapa.

Objetivo: que el estudiante visualice a la elipse como la sección de un cono.

Operación en el aula: las tres fases serán trabajadas por los alumnos en forma individual y al concluir la etapa se discutirán grupalmente las respuestas.

Fase: acción

Observa la siguiente imagen:



En esta imagen podrás notar que aparece un cono en el que una parte de él es cortada por un objeto externo.

¿Qué forma tendrá la sección plana del corte?

Elabora un cono con papel grueso y hazle un corte similar al observado aquí.

¿La forma de la sección “plana” de la porción cortada es como te la imaginaste?

Como el cono que elaboraste es hueco, solo se tiene el contorno de la sección de corte y es una curva, ¿logras identificarla?

Fase: formulación

Tomando en cuenta que la curva que se aprecia en el corte es el resultado de la acción que realizaste, ¿podrías enunciar una definición de dicha curva, que solo haga mención de esto?

¿Cuál es esa definición?

Fase: validación

¿La curva observada depende del cono que hiciste?, ¿sería la misma si tu cono tuviera otras medidas?

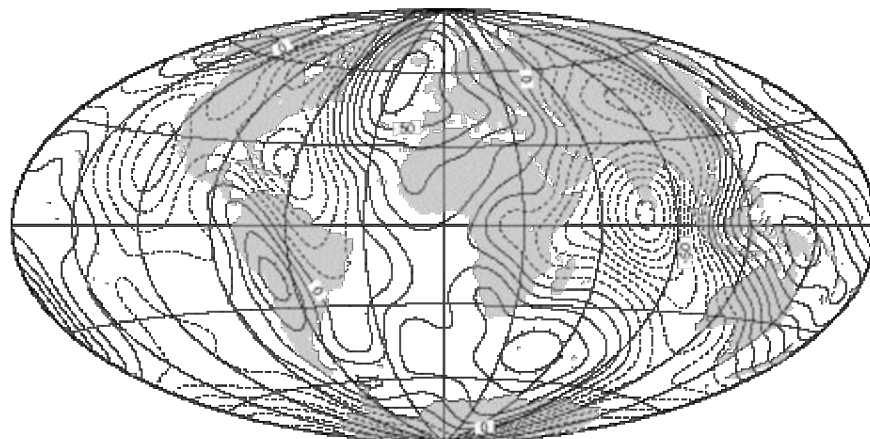
¿Podría decirse que la definición que diste es general?

Tercera etapa.

Objetivo: que el estudiante relacione la elipse con una sección de un cuerpo que sería un sólido de revolución generados por la misma, es decir, elipsoide; en este caso particular, la Tierra.

Operación en el aula: esta es la etapa final, por ello no se hace distinción de fases y deberá trabajarse en forma grupal, las imágenes deberán ser proyectadas a todo el grupo, incluso, las preguntas podrían ser formuladas por el profesor de manera verbal.

Observa la siguiente imagen:



¿Qué figura observarías si cortaras este objeto en forma transversal desde uno de sus vértices?

¿Sería algo similar a la forma que obtuviste con el cono que elaboraste y cortaste?

©CiberEduca.com 2005

La reproducción total o parcial de este documento está prohibida sin el consentimiento expreso de/los autor/autores.

CiberEduca.com tiene el derecho de publicar en CD-ROM y en la WEB de CiberEduca el contenido de esta ponencia.

® CiberEduca.com es una marca registrada.
©™ CiberEduca.com es un nombre comercial registrado