Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Física

Tesis de Doctorado

Cotas topológicas, supersimetría y supergravedad extendida

Lic. José Daniel Edelstein

Octubre 1996

Lugar de Trabajo:

Departamento de Física

Director: Dr. Fidel Schaposnik

A Mariela y Juan

Indice

Agradecimientos

La presente Tesis fue enteramente realizada en el Departamento de Física de la Universidad Nacional de La Plata. Querría agradecer a sus integrantes, docentes y no-docentes, por todo aquello que pueda haber facilitado mi trabajo en este ámbito. En particular, me gustaría resaltar la importancia que ha tenido la Educación Pública en que esta Tesis haya podido llegar a ser concebida.

El apoyo económico para la realización de esta Tesis ha sido brindado parcialmente por el CONICET.

Agradezco al Dr. Fidel Schaposnik por la gentileza de haber aceptado la dirección de este trabajo y por las sugerencias que ayudaron a que el mismo pudiera concretarse. A mis compañeros de grupo deseo expresarles mi más cálido agradecimiento.

Debo hacer una mención aparte para Carlos Núñez, quien colaboró en la obtención de la mayor parte de los resultados de esta Tesis, hecho que afortunadamente supo complementar con su amistad.

Querría agradecer, asimismo, a los integrantes del Departament dÉstructura i Constituents de la Matéria de la Universitat de Barcelona, en donde esta Tesis fue escrita, por su cálida hospitalidad y, fundamentalmente, por lo mucho que pude aprender a partir de las numerosas discusiones y actividades que tuvieron lugar durante mi estadía.

Agradezco a Juan Martin Maldacena, Tomás Ortín, Fernando Quevedo, Antoine van Proeyen, Kellog Stelle y Frederic Zamora, por enriquecedoras discusiones.

Cierto soporte moral ha sido indispensable en las distintas etapas del trabajo, a fin de que éste pudiera ser finalizado. Así, pues, tengo una gran deuda de gratitud con Ernesto Altshuler, Javier Briático, Adriana Condó, Ingrid de Jong, Santiago de Rosa, Rubén Dubrovsky, Marcelo Kuperman,

Santiago Levin, Silvia Monteoliva, Fernando Reboredo y Juan José Vicente. La misma que tengo con Abel Arribére, cuya amistad y ejemplo, con inmenso dolor, he perdido para siempre.

Por último, rompiendo con algunos milenios de tradición judía, deseo resaltar y agradecer el inestimable apoyo recibido por parte de mis suegros, Alicia y Elías, desde mis primeros tiempos en La Plata.

Un agradecimiento que haga justicia con lo que le debo a mis padres, Norma y Franklin, y a mi hermana, Lorena, llevaría cuando menos una longitud equivalente a la de esta Tesis. Como por otra parte, al decir de Borges, el mismo no reflejaría las razones que lo motivan, sino que se sumaría a ellas, me limitaré a afirmar que sin su amor y respaldo esta Tesis no existiría.

Capítulo 1

Introducción

Desde sus inicios, uno de los problemas fundamentales de la Teoría Cuántica de Campos ha sido el del estudio de soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de los sistemas físicos, para luego desarrollar métodos de cuantificación en los que estas soluciones juegan un papel central. Tras los trabajos pioneros de Skyrme [1] sobre soluciones localizadas en una región finita de ciertas teorías de campos, que representarían a partículas como el protón, se produjo un gran avance en este terreno en el transcurso de los años '70.

Nielsen y Olesen [2], en 1973, en trabajos relacionados con la teoría de cuerdas y los modelos duales, encontraron en una teoría de campos - el modelo abeliano de Higgs - soluciones del tipo vórtice que también aparecen en la teoría fenomenológica de Ginzburg-Landau [3] de la superconductividad tipo II. Poco después, 't Hooft [4] y Polyakov [5] hallaron, en la extensión no-abeliana del modelo anterior - el modelo de Georgi-Glashow - soluciones extendidas con propiedades de monopolo magnético. Finalmente, Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin [6], estudiando la versión euclídea de una teoría de Yang-Mills pura, encontraron soluciones localizadas en el espacio-tiempo (instantones). Desde hace dos décadas, este tipo de soluciones, así como el papel que juegan en la cuantificación de modelos de interacciones fundamentales, han sido objeto de numerosas investigaciones.

A pesar de su carácter clásico, las características de las soluciones de energía finita, llamadas solitones, se asemejan notablemente a las de las partículas elementales, siendo que las teorías de campos que pretenden describir a estas últimas son naturalmente teorías cuánticas. Tomando a los solitones como objetos básicos, a mediados de los años '70, se comenzó a investigar su cuantificación, así como la de los instantones.

Solitones e instantones comparten dos particularidades de gran interés:

(i) *Son de naturaleza no-perturbativa:*
No pueden ser obtenidos partiendo de soluciones de la parte lineal de las ecuaciones de movimiento y tratando las contribuciones no-lineales de manera perturbativa. Resulta entonces natural el que sus efectos cuánticos también lo sean. Es por ello que el interés de la física de partículas por estas soluciones aumentó cuando en los años '70, principalmente en el contexto de las interacciones fuertes, se consideraron problemas que no admiten una descripción perturbativa.

(ii) *Están caracterizados por un índice topológico:*
Este índice está relacionado con su comportamiento asintótico. Para los solitones, este índice es una cantidad conservada que, en la teoría cuántica, corresponde a un número cuántico que caracteriza al estado de solitón, distinto de aquellos asociados a simetrías del Lagrangiano. Para el caso de los instantones, el índice topológico conduce a la existencia de una familia de estados de vacío caracterizados por el ángulo de "vacío θ", con importantes consecuencias experimentales.

El número topológico de un solitón está vinculado a la variedad definida por las configuraciones que minimizan la energía potencial. Por ser soluciones estáticas, los solitones pueden obtenerse aplicando un principio variacional al Hamiltoniano del modelo. En los modelos que admiten solitones topológicos, la energía tiene una sucesión de mínimos que corresponden a los distintos valores que puede tomar el índice topológico.

Un hecho remarcable, originalmente señalado por Bogomol'nyi [7], es que los mínimos de la energía en cada sector topológico, resultan proporcionales al valor que toma en dicho sector el número topológico. Más aún, las configuraciones de campos clásicos correspondientes a estos mínimos, son solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden denominadas ecuaciones de Bogomol'nyi (consistentes con las ecuaciones de Euler-Lagrange de segundo orden).

La existencia de esta cota de naturaleza topológica para la energía (conocida como cota de Bogomol'nyi), y del conjunto de ecuaciones de primer orden que acompañan su saturación, requiere ciertas condiciones sobre las constantes de acoplamiento y la energía potencial del modelo considerado [7, 8], lo que tiene importantes consecuencias físicas[1]. Notablemente, como veremos a lo largo de esta Tesis, estas restricciones en el espacio de parámetros coinciden con las condiciones necesarias para construir la extensión supersimétrica del modelo.

Las condiciones que deben imponerse a las constantes de acoplamiento del modelo abeliano de Higgs a fin de que admita la existencia de una cota de Bogomol'nyi coinciden, como señalaron originalmente de Vega y Schaposnik [9], con aquellas que resultan de introducir dicho modelo en el sector bosónico de una teoría supersimétrica [10, 11]. La existencia de esta relación entre las constantes de acoplamiento en el modelo abeliano de Higgs supersimétrico fue estudiada posteriormente por Di Vecchia y Ferrara [12]. El primer paso importante en la comprensión de esta conexión entre dos hechos que a primera vista aparecen sin relación alguna, fue dado poco tiempo después por Witten y Olive [13]. Estudiando la extensión $N = 2$ supersimétrica del modelo de Georgi-Glashow, encontraron que el álgebra de supercargas tiene una carga central que viene dada en términos de una integral de superficie. En presencia de una configuración del tipo monopolo, dicha extensión central resulta proporcional a la carga topológica. Por lo tanto, dado que los autovalores de la carga central deben ser siempre menores o iguales que la masa [14], la cota de Bogomol'nyi de este modelo podría interpretarse como resultante del álgebra de supersimetría extendida.

A comienzos de los '90, el tema recuperó interés a partir de nuevos trabajos sobre soluciones de teorías de gauge en distinto número de dimensiones espacio-temporales. La existencia de ecuaciones de Bogomol'nyi en el modelo de Chern-Simons-Higgs encontradas simultáneamente por Hong, Kim y Pac [15] y Jackiw y Weinberg [16], requiere de una relación particular entre las constantes de acoplamiento y de un potencial de Higgs de sexto orden cuyo origen puede ser atribuído a una supersimetría subyacente al modelo, como demostraron Lee, Lee y Weinberg [17] poco tiempo después. Posteriormente, Hlousek y Spector [18] probaron que, bajo ciertas hipótesis, una teoría de campos que admite la existencia de soluciones con topología no-trivial puede

[1] En la versión relativista de la teoría de Ginzburg-Landau, la relación crítica resultante entre la carga eléctrica y la constante de acoplamiento del parámetro de orden, corresponde precisamente al valor que separa los regímenes de superconductividad tipo I y tipo II.

ser sumergida en el sector bosónico de una teoría $N = 2$ supersimétrica, de tal suerte que la extensión central del álgebra de supersimetría resulta proporcional a la carga topológica. Así, la presencia de una cota de Bogomol'nyi en estas teorías resultaría una consecuencia inmediata del álgebra de supersimetría extendida.

Una consecuencia de gran importancia que resulta de lo anterior es que, originado en el álgebra de supercargas, el espectro de masas forzado por la supersimetría sería exacto a nivel cuántico. En particular, en el modelo de Georgi-Glashow, el valor exacto de la masa de un estado de n_e cuantos de carga eléctrica y n_m cuantos de carga magnética que satura la cota de Bogomol'nyi, viene dado por la siguiente expresión:

$$M(n_e, n_m) = v\sqrt{n_e^2 e^2 + n_m^2 \frac{16\pi^2}{e^2}}\ , \tag{1.1}$$

Esta relación muestra una simetría frente al intercambio $n_e \leftrightarrow n_m$, acompañado del reemplazo $e \leftrightarrow 4\pi/e$. Este resultado llevó a Montonen y Olive [19] a conjeturar la existencia de una <u>dualidad</u> exacta en este modelo, correspondiente a las simetrías de la fórmula anterior. Debemos notar que esta simetría relaciona el régimen no-perturbativo de la teoría de Georgi-Glashow con el desarrollo perturbativo de una teoría en la que los monopolos serían las partículas elementales mientras que las partículas cargadas resultarían ser solitones.

En los últimos dos años, la generalización de la conjetura de Montonen y Olive en el marco de las teorías supersimétricas ha derivado en la obtención de resultados exactos de naturaleza no-perturbativa en ciertas teorías cuánticas de campos a partir de los trabajos de Seiberg y Witten [20], y en una verdadera revolución en el contexto de la unificación de las teorías de supercuerdas originada, en gran medida, en los trabajos de Hull y Townsend [21] y Witten [22]. La posible existencia de una relación genérica entre las cotas de Bogomol'nyi y la supersimetría extendida jugaría un rol fundamental en este esquema al permitir calcular un espectro de masas exacto en el que resulte posible contrastar la conjetura de dualidad.

En este marco se inscribe la presente Tesis. En ella, mostramos el origen de la relación que vincula a la existencia de una cota de Bogomol'nyi en teorías de campos con ruptura espontánea de simetría, y la presencia de una estructura supersimétrica $N = 2$ subyacente al modelo considerado.

Además, extendemos los resultados al caso de una supersimetría local de manera de incluir un acoplamiento a la gravedad. Así, nuestros resultados tienen también interés en una gran variedad de problemas cosmológicos como el de la "censura cósmica" [23], el problema de la constante cosmológica [24], la clasificación de agujeros negros y p-branas negras [23, 25, 26], el cálculo microscópico de la entropía de los agujeros negros extremales [27, 28, 29], etc.

Parte de los resultados originales que discutimos en esta Tesis, se encuentran resumidos en los trabajos:

Supersymmetry and Bogomol'nyi equations for the Abelian Higgs model
Physics Letters B329 (1994) 39

Supergravity and a Bogomol'nyi bound in three dimensions
Nuclear Physics B458 (1996) 165

Bogomol'nyi Bounds and Killing Spinors in $d = 3$ *Supergravity*
Physics Letters B375 (1996) 163

realizados en colaboración junto a Carlos Núñez y Fidel Schaposnik.

Para comenzar, centrándonos en el modelo abeliano de Higgs en $2+1$ dimensiones, demostramos que la relación crítica entre las constantes de acoplamiento, necesaria para la existencia de una cota de Bogomol'nyi, es una condición que resulta de la inmersión del modelo en una teoría $N = 2$ supersimétrica. Obtenemos la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi a partir de la estructura del álgebra de supersimetría extendida, cuya extensión central resulta proporcional a la carga topológica del sistema, y estudiamos las supersimetrías remanentes exhibidas por las soluciones de estas ecuaciones. A pesar de que los trabajos de Hlousek y Spector excluyen, en principio, a las teorías de campos en dos dimensiones, presentamos un modelo bidimensional con soluciones instantónicas que verifican la realización de un esquema análogo y explicamos el por qué de este resultado.

También extendemos estos resultados al dominio de las teorías gravitacionales, estudiando modelos acoplados a la supergravedad extendida $N = 2$. En estos sistemas, la construcción de supercargas no-rotas presenta dificultades relacionadas con la necesidad de considerar configuraciones masivas (que han de saturar la cota de Bogomol'nyi), las que producen una geometría asintóticamente cónica. Para este tipo de geometrías, Witten [24] conjeturó recientemente la inexistencia de espinores supercovariantemente constantes en el infinito. Estos espinores resultan, como explicaremos más adelante, necesarios para la construcción de supercargas no-rotas.

Mostramos, en el modelo abeliano de Higgs, que la aparición de una fase de Bohm-Aharonov debida a la presencia de los vórtices, permite resolver las dificultades planteadas por la singularidad cónica y encontrar espinores supercovariantemente constantes en el infinito. Como condición necesaria para que este resultado tenga lugar, los vórtices deben saturar la cota de Bogomol'nyi del modelo. Por lo tanto, esperaríamos comprobar la existencia de una supersimetría remanente sobre dichas configuraciones, repitiendo el esquema deducido para los sistemas sin gravedad. Dado que los estados cuánticos pertenecientes a un mismo supermultiplete deben tener la misma masa, esto llevaría a un conflicto con la fenomenología de las partículas elementales: ninguna partícula bosónica con la masa del electrón, por ejemplo, ha sido detectada. Sin embargo, los modos cero fermiónicos que permiten construir el supermultiplete dentro del cuál transforma el vórtice, resultan no-normalizables por lo que no deben tenerse en cuenta para la construcción del espacio de Hilbert físico. En consecuencia, la configuración resultante no preserva ninguna de las supersimetrías del lagrangiano. A las ecuaciones de Bogomol'nyi de la materia se suma una nueva ecuación de primer orden, a la que interpretamos como la ecuación de Bogomol'nyi del campo gravitacional, cuya integrabilidad está dada por las ecuaciones de Einstein.

Nuestros resultados se generalizan a un conjunto de modelos tan amplio como el de las teorías previamente consideradas en ausencia de gravitación. Además de estudiar en detalle el caso del modelo abeliano de Higgs acoplado a supergravedad $N = 2$, estudiamos otro sistema de interés físico - el modelo CP^n -, en el que el campo de gauge que define a la corriente topológica es meramente auxiliar. Por último, analizamos las consecuencias que nuestros resultados tienen con respecto al llamado problema de la constante cosmológica en el contexto de las teorías de supergravedad, discutido recientemente por Witten [24].

El plan de la Tesis es el siguiente. En el capítulo 2 discutimos algunas nociones generales acerca de las soluciones regulares de energía finita que tienen lugar en teorías clásicas de campos, su naturaleza topológica según el grupo de homotopía que resulta del vacío de Higgs de la teoría, la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi. Ilustramos estos conceptos con algunos ejemplos. En particular, estudiamos el modelo abeliano de Higgs, en el que mostramos la aparición y el origen de la relación crítica entre las constantes de acoplamiento. En el capítulo 3 introducimos elementos generales de supersimetría como el álgebra de supersimetría extendida, los supermultipletes, el superespacio y el mecanismo de construcción de acciones supersimétricas. Construimos, asimismo, las supercargas conservadas asociadas a la supersimetría global, y discutimos la dimensionalidad de las distintas representaciones del álgebra.

En el capítulo 4, demostramos que la existencia de la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi en el modelo abeliano de Higgs puede ser entendida como la consecuencia natural de la posibilidad de extender al modelo de manera tal que adquiera una invarianza supersimétrica $N = 2$. Mostramos que la supersimetría requiere que las constantes de acoplamiento satisfagan una relación crítica, y que las configuraciones que saturan la cota de Bogomol'nyi rompen la mitad de las supersimetrías del lagrangiano. Discutimos el marco general de estos resultados y su extensión a otros modelos. Consideramos, por último, un sistema bidimensional en el que deducimos la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi correspondientes a configuraciones instantónicas, a partir de una estructura supersimétrica subyacente. Mostramos, para finalizar, cómo debe modificarse el esquema presentado para incluir en forma genérica a ciertos sistemas instantónicos.

El capítulo 5 es dedicado a la introducción de algunos conceptos básicos de las teorías de supergravedad: aspectos geométricos y construcción de un lagrangiano genérico que incluya campos de materia y presente esta simetría. Discutimos en detalle la forma de los generadores del álgebra de supergravedad extendida, partiendo alternativamente de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la teoría. Subrayamos la necesidad de disponer de espinores supercovariantemente constantes en el infinito a fin de poder construir supercargas no-rotas.

En el capítulo 6, tras construir el modelo abeliano de Higgs acoplado a la supergravedad $N = 2$ en $(2 + 1)$-dimensiones usando los procedimientos de cálculo tensorial local y reducción dimensional, mostramos cómo se pueden aplicar los esquemas del capítulo 4. La existencia de una cota de Bogomol'nyi en el modelo resulta así una consecuencia directa de su inmersión en el sector bosónico de la teoría de supergravedad extendida. A las ecuaciones de Bogomol'nyi de los campos de materia se añade una ecuación para el campo gravitatorio, cuya condición de integrabilidad corresponde a las ecuaciones de

Einstein del sistema. Mostramos la existencia de espinores supercovariantemente constantes en el infinito en presencia de los vórtices de Nielsen-Olesen, y extendemos estos resultados a un amplio conjunto de sistemas. Señalamos las implicaciones de nuestros resultados sobre el problema de la constante cosmológica en teorías de supergravedad. El capítulo 7 contiene las conclusiones de esta Tesis. En un apéndice, por último, explicamos las convenciones adoptadas para realizar los cálculos presentados.

Capítulo 2

Solitones e Instantones en Teoría Clásica de Campos

En el presente capítulo discutimos algunas nociones generales acerca de las soluciones regulares de energía finita y de acción finita en teorías clásicas de campos. En la sección 2.1 describimos los elementos matemáticos necesarios para la caracterización de estas soluciones de acuerdo a su naturaleza topológica. Introducimos la noción de vacío de Higgs y de grupos de homotopía. En la sección 2.2 ilustramos estos tópicos desarrollando algunos ejemplos que resultan de particular relevancia: el monopolo de 't Hooft - Polyakov, el vórtice de Nielsen - Olesen y el instantón. En la sección 2.3 explicamos qué se entiende por cota y ecuaciones de Bogomol'nyi, ilustrando su aparición en los sistemas arriba mencionados. Finalmente, introducimos en la sección 2.4 el modelo abeliano de Higgs. Encontramos la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi para este modelo, mostrando que vienen acompañadas de una relación crítica entre las constantes de acoplamiento del sistema.

2.1 Soluciones de Naturaleza Topológica en Teorías de Gauge

A partir de las ideas de Skyrme [1] y en el marco de la integral funcional, se pudo mostrar que las soluciones de las ecuaciones de movimiento clásicas constituyen un buen punto de partida para cálculos perturbativos y no-perturbativos [30].

En la formulación habitual de la teoría de campos, los campos de materia (sus excitaciones) son tratados como objetos puntuales. Aún en el contexto clásico esto acarrea dificultades análogas a las creadas por la divergencia que aparece al calcular la autoenergía de una carga puntual. En la teoría cuántica, lejos de desaparecer, este tipo de divergencias se hacen más graves. Si bien los métodos de renormalización permiten controlarlas, resulta de interés estudiar soluciones extendidas que representen configuraciones regulares estables y de energía finita, que, en particular, podrían evitarlas y dar cuenta de propiedades básicas como, por ejemplo, el confinamiento.

Las ecuaciones de movimiento de las teorías de campos utilizadas en modelos de interacciones fundamentales son, en general, no-lineales y por ello admiten soluciones conocidas como *solitones* (soluciones extendidas en el espacio, de energía finita en espacio-tiempo minkowskiano) e *instantones* (soluciones extendidas en el espacio-tiempo euclídeo, de acción finita). En particular, las teorías de gauge, que dan una descripción unificada de todas las interacciones conocidas en la Naturaleza, exhiben soluciones de este tipo, de gran interés en diversos campos de la física. Vórtices, monopolos e instantones tienen importantes aplicaciones en la física de partículas, la cosmología, la astrofísica y la materia condensada.

Las soluciones tipo solitón pueden ser de naturaleza topológica o no-topológica, según estén asociadas o no a alguna propiedad global del espacio-tiempo y de la simetría de gauge de la teoría considerada. Para comprender las propiedades básicas de estas soluciones, consideremos una teoría de campos invariante frente a transformaciones pertenecientes a un dado grupo de gauge compacto G. Los campos deben transformar de acuerdo a alguna representación del grupo en cuestión. Así, un campo ϕ en la representación adjunta de G, es transformado según:

$$\phi \to \phi^g = g^{-1} \phi \, g \quad , \quad g \in G \, . \tag{2.1}$$

Si se trata de una simetría local, resulta necesario introducir una conexión de modo que la diferenciación de los campos esté bien definida. Podemos asociar a dicha conexión un elemento del álgebra de Lie de G:

$$\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a T^a \, , \tag{2.2}$$

donde $T^a, a = 1 \dots dimG$ son los generadores del álgebra. De este modo, podemos definir la derivada covariante como:

$$D_\mu = \partial_\mu - ie[\mathbf{A}_\mu,] \, . \tag{2.3}$$

de tal manera que, bajo transformaciones de gauge,

$$\mathbf{A}_\mu \to \mathbf{A}_\mu^g = g^{-1}\mathbf{A}_\mu g + \frac{i}{e}(\partial_\mu g^{-1})g \ , \tag{2.4}$$

la derivada (2.3) resulta covariante:

$$D_\mu[A] \to g^{-1}D_\mu[A]g \ . \tag{2.5}$$

El conmutador de dos componentes de la derivada covariante da como resultado una componente del tensor (antisimétrico) de curvatura correspondiente a la conexión $\mathbf{A}_\mu$:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie\mathbf{F}_{\mu\nu} \ , \tag{2.6}$$

que toma sus valores en el álgebra de Lie del grupo G. $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ es el tensor de campo de la teoría. Sus propiedades de transformación frente a un cambio de gauge son:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \to \mathbf{F}_{\mu\nu}^g = g^{-1}\mathbf{F}_{\mu\nu}g \ . \tag{2.7}$$

Sólo en el caso abeliano el tensor de campo es invariante de gauge.

El Lagrangiano de una teoría de gauge,

$$L = L(\phi, \mathbf{A}_\mu) \ , \tag{2.8}$$

es un escalar bajo el grupo de transformaciones de Poincaré y cambia, a lo sumo, en una divergencia frente a transformaciones de gauge. Una configuración de esta teoría tendrá, en general, energía finita si las contribuciones de los distintos campos de la teoría son despreciables $O(1/r^2)$ en todo el espacio,

$$D_\mu\phi \simeq 0 \quad , \quad V(\phi) \simeq 0 \ , \tag{2.9}$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \simeq 0 \ , \tag{2.10}$$

excepto en un número finito de regiones compactas $U_1, \ldots, U_n$. En estas regiones se hallarán, eventualmente, las soluciones extendidas de naturaleza topológica. Consideraremos, por simplicidad, el caso de una única región compacta U con borde $\Sigma \equiv \partial U$, describiendo así una solución concentrada en una dada región del espacio. Resultan también de interés configuraciones clásicas con invarianza traslacional en alguna dirección determinada, en cuyo caso el requisito que debe imponerse es el de densidad lineal de energía finita. O, en forma más general, configuraciones de mayor dimensionalidad con densidad (hiper)superficial de energía finita. En estos casos, la discusión realizada a continuación debe pensarse constreñida al subespacio ortogonal a las direcciones de invarianza.

El potencial de Higgs $V(\phi)$ debe ser invariante de gauge. De esta manera, si ϕ_o está en el mínimo del potencial, su transformado frente a un elemento de G, ϕ_o^g, ha de estarlo también. Luego, si definimos en el espacio de campos a la variedad del vacío de Higgs $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M} = \{\phi / V(\phi) = 0\} \ , \tag{2.11}$$

es inmediato notar que el grupo G actúa sobre $\mathcal{M}$ de modo que cada $g \in G$ toma un punto de $\mathcal{M}$ y lo proyecta en otro punto de la misma variedad. Si asumimos que toda la degeneración del vacío se debe a la simetría de gauge, y no a alguna simetría accidental del potencial $V(\phi)$, entonces $\mathcal{M}$ resulta constituido por una única órbita del grupo G [31]. Es decir, G actúa transitivamente sobre $\mathcal{M}$:

$$\forall(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{M}, \ \exists g \in G \ / \ \ \phi_1 = \phi_2^g \ . \tag{2.12}$$

El caso de interés para el estudio de configuraciones extendidas de origen topológico es el de aquellas teorías en las que $\mathcal{M}$ es no-trivial, vale decir, consiste de más de un punto. Equivalentemente, ϕ es, en ese caso, un campo de Higgs (tiene valor de expectación no-nulo).

Consideremos un elemento $\phi \in \mathcal{M}$. Llamaremos pequeño grupo H al subgrupo de G que deja invariante a ϕ:

$$H = \{h \in G / \phi^h = \phi\} \tag{2.13}$$

(si G es transitivo en $\mathcal{M}$, H no depende del elemento particular ϕ). Notemos que H es el grupo de gauge que caracteriza a la simetría del vacío de Higgs de la teoría. Es inmediato, entonces, que la variedad $\mathcal{M}$ resulta ser el espacio coset G/H:

$$\mathcal{M} = G/H \ . \tag{2.14}$$

Una vez que se determina H para un dado modelo, la variedad que describe el vacío de Higgs queda especificada. En la región del espacio externa a la región compacta U, la derivada covariante del campo de Higgs debe anularse por lo que, a partir de la ecuación (2.6), vemos que

$$[\mathbf{F}_{\mu\nu}, \phi] = 0 \ . \tag{2.15}$$

Dado que los generadores de H son aquellos que aniquilan a ϕ, esta ecuación indica que las únicas componentes del tensor electromagnético a las que es permeable el vacío de Higgs, son aquellas correspondientes al grupo de simetría residual H.

Al crecer el parámetro temporal t, el campo de Higgs $\phi(\mathbf{x}, t)$ define una homotopía sobre la superficie Σ, es decir, una aplicación que varía continuamente con el tiempo (asumimos implícitamente que la variación es continua como consecuencia de las ecuaciones de campo clásicas). Resulta, pues, natural el concepto de clase de homotopía como el conjunto de todos las aplicaciones $\phi : \Sigma \to \mathcal{M}$ tales que cualquier par de ellos ϕ_1, ϕ_2 pueden ser vistos como las aplicaciones inicial y final de una homotopía. De este modo, podemos clasificar las configuraciones del campo de Higgs de acuerdo a la clase de homotopía que le corresponde. Esta clasificación es invariante de gauge y no depende de la elección particular de Σ (siempre que envuelva a la región U una sola vez y con una orientación determinada). Por construcción, es evidente que también es independiente del tiempo. Por lo tanto, la clase de homotopía relacionada con la configuración es una *cantidad cuantificada que aparece a nivel clásico*, de origen puramente topológico.

Es posible definir una operación entre clases de homotopía (si se deja fijo un cierto punto base de $\mathcal{M}$) de manera que el conjunto de clases más la operación constituyan un grupo. Este grupo es conocido como el grupo de homotopía $\Pi_n(\mathcal{M})$, donde la n indica que consideraremos Σ isomorfa a una n-esfera S^n. La operación de grupo asociada a $\Pi_n(G/H)$ corresponderá, precisamente, a la ley de combinación de estos números cuánticos de origen topológico.

2.2 Algunos Ejemplos

Para ilustrar los argumentos precedentes, consideraremos en forma concisa algunos casos de interés como el monopolo y el vórtice. Además, incluiremos un ejemplo de instantones en cuatro dimensiones euclídeas que puede ser pensado, dentro del esquema de la sección anterior, como el solitón de una teoría de gauge en un espacio-tiempo de 5 dimensiones.

Monopolo de 't Hooft - Polyakov

En 1974, 't Hooft [4] y Polyakov [5] encontraron, en forma independiente, que el modelo de Georgi-Glashow exhibe soluciones clásicas, regulares y extendidas, con una carga magnética asociada. Se trata de una solución estática al modelo descrito por el lagrangiano

$$L_{GG} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a - \lambda(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \ , \tag{2.16}$$

con simetría de gauge $G = SO(3)$. Una configuración de vacío de esta teoría, rompe la simetría del lagrangiano a un grupo residual $H = U(1)$, al cual estará asociado el electromagnetismo. El borde Σ de la región compacta del espacio U en la que se concentrará la solución, es isomorfo a la esfera S^2. Por lo tanto, el grupo de homotopía de interés en este problema resulta

$$\Pi_2(SO(3)/U(1)) = Z \ , \tag{2.17}$$

donde Z es el grupo de los enteros frente a la adición. De modo que las soluciones de la teoría podrán clasificarse de acuerdo a un número entero n que es proporcional a la carga magnética del monopolo. La ecuación (2.15) nos dice que fuera de la región U sobrevive únicamente el campo electromagnético residual, mientras que las excitaciones restantes del campo de gauge decaen debido a la masa adquirida a través del mecanismo de ruptura espontánea de simetría.

La carga magnética puede ser explícitamente escrita como una cantidad de naturaleza topológica a través de la expresión

$$g = -\frac{1}{2e}\oint_\Sigma \epsilon_{ijk}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c ds_i = \frac{4\pi n}{e} \ , \tag{2.18}$$

donde n es el entero que indica el número de veces que el campo $\vec{\phi}$ enrolla al grupo interno sobre la superficie Σ. La integral anterior resulta ser el índice de Poincaré-Hopf de la aplicación definida por el campo de Higgs.

Vórtice de Nielsen - Olesen

Consideremos un modelo análogo al anterior, con un grupo interno de simetría abeliano: $G = U(1)$, cuya dinámica está dada a partir del siguiente lagrangiano:

$$L_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi) \ , \tag{2.19}$$

en el que el potencial de Higgs

$$V(\phi) = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 \tag{2.20}$$

es invariante frente a las transformaciones de gauge $U(1)$, mientras que sus configuraciones de vacío rompen totalmente dicha simetría. Al tratarse de una teoría abeliana, hemos eliminado la notación (iso)vectorial del campo de gauge y del tensor de campo.

En 1973, Nielsen y Olesen [2] encontraron que este modelo, conocido como el modelo abeliano de Higgs, admite soluciones estáticas e independientes de una de las coordenadas, representando líneas de flujo magnético[1]. Siguiendo el argumento que sigue a la ecuación (2.10), debemos considerar en este caso una región compacta U en el plano ortogonal a la dirección de invarianza traslacional. De este modo, su borde Σ resulta isomorfo a una circunferencia S^1. El cálculo del grupo de homotopía correspondiente,

$$\Pi_1(U(1)) = Z \ , \tag{2.21}$$

nos indica que las soluciones de la teoría son clasificadas por un número entero - proporcional al flujo magnético - de naturaleza topológica, que se combina aditivamente. Como consecuencia de la ecuación (2.15), el campo electromagnético estará concentrado en la región U.

El flujo magnético resulta entonces, clásicamente cuantificado, como veremos explícitamente en la Sección 2.4,

$$\Phi = \int_U \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{2\pi n}{e} \ , \tag{2.22}$$

[1]Nos referiremos al campo de gauge como electromagnético aunque rigurosamente no corresponda, ya que el mecanismo de ruptura espontánea de simetría convierte a los fotones en excitaciones masivas.

donde n es el entero que indica el número de veces que $U(1)$ es enrollado en S^1 por el campo de Higgs.

Instantón

Consideremos, finalmente, el caso de soluciones localizadas que minimizan la acción de Yang-Mills euclídea para un grupo de gauge $SU(2)$. El borde de una región compacta del espacio-tiempo es isomorfo a la esfera tridimensional S^3 al igual que el grupo de Lie $SU(2)$. Dado que existen aplicaciones no-triviales de S^3 en S^3,

$$\Pi_3(SU(2)) = Z \ , \tag{2.23}$$

las soluciones instantónicas pueden, en principio, estar presentes en teorías de gauge puras, sin necesidad de introducir un mecanismo de ruptura espontánea de simetría. De hecho, Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin [6] encontraron en 1975 soluciones instantónicas en una teoría de Yang-Mills pura. La carga topológica del instantón resulta ser un entero n,

$$n = \frac{g^2}{16\pi^2}\int_U d^4x\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^a_{\mu\nu}F^a_{\lambda\rho} = \frac{g^2}{16\pi^2}\oint_\Sigma d^3x\,\Omega_{CS} \ , \tag{2.24}$$

conocido como el índice de Pontryagin, relacionado con la integral en el borde de la forma de Chern-Simons Ω_{CS},

$$\Omega_{CS} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\left(A^a_\mu\partial_\nu A^a_\lambda + \frac{g}{3}\epsilon_{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\lambda\right) \ . \tag{2.25}$$

La solución se encuentra concentrada en la región U.

Es necesario aclarar, finalmente, que la sola presencia de un grupo de homotopía no-trivial no garantiza la existencia de solitones en un determinado modelo. En rigor, la condición de energía finita (o de acción finita en el caso de los instantones) debe ser considerada con sumo cuidado [32, 33].

2.3 Cotas y Ecuaciones de Bogomol'nyi

Las soluciones extendidas de naturaleza topológica en teoría clásica de campos presentan una serie de características comunes que las dotan de un mayor interés. Su carga topológica puede ser vista como la integral espacial de la componente temporal de una corriente cuya divergencia se anula sin necesidad de imponer las ecuaciones de movimiento. La estabilidad de las configuraciones de mínima carga topológica está garantizada por su carácter topológico.

Estudiando la estabilidad de configuraciones de número topológico mayor, Bogomol'nyi encontró en 1976 [7] que ésta puede ser probada sólo cuando las constantes de acoplamiento de la teoría cumplen con ciertas condiciones particulares dependientes del modelo. Más aún, la masa de estas soluciones puede hallarse en forma analítica bajo las mismas condiciones, presentando las siguientes peculiaridades:

(i) La masa resulta proporcional a la carga topológica de la configuración. Dado que estas configuraciones son estables, una solución genérica de la teoría, perteneciente al mismo sector topológico, tendrá una masa superior o igual a la suya. Es decir, la masa de una solución cualquiera de la teoría clásica, sujeta a las restricciones arriba mencionadas sobre las constantes de acoplamiento, presenta una cota inferior usualmente llamada, *cota de Bogomol'nyi.* Cada sector topológico tendrá un valor para esta masa mínima, proporcional a su número topológico.

(ii) Las configuraciones de masa mínima, en cada sector topológico, son solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden consistentes con las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este conjunto de *ecuaciones de Bogomol'nyi* resulta, en principio, de integrabilidad más sencilla, aunque, en general, no se encuentra solución analítica para ellas. No obstante, para determinar el espectro de masas mínimas de los distintos sectores topológicos, no es necesario conocer la solución explícita. Es suficiente el saber que tal solución existe.

Este par de elementos, cota y ecuaciones de Bogomol'nyi, han sido desde entonces encontrados en innumerables modelos, aún en el contexto de las teorías gravitatorias. A fin de mostrar de un modo más simple la manera en la que los mismos aparecen, discutiremos brevemente los casos del monopolo de 't Hooft-Polyakov y del instantón BPST. Dejaremos para la próxima sección, el análisis detallado del modelo abeliano de Higgs.

Monopolos

La masa de una configuración estática correspondiente al lagrangiano (2.16), resulta de la componente T_{00} del tensor energía-impulso :

$$M = \int_U d^3x \left[\frac{1}{4}F^a_{ij}F^a_{ij} + \frac{1}{2}D_i\phi^a D_i\phi^a + \lambda(\phi^a\phi^a - v^2)^2\right] , \tag{2.26}$$

donde hemos impuesto la condición $A_0^a = 0$ que nos restringe a configuraciones eléctricamente neutras. La ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} M &= \int_U d^3x \left[\frac{1}{4} \left(F_{ij}^a \mp \epsilon_{ijk} D_k \phi^a \right)^2 + \lambda(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \right] \\ &\pm \frac{1}{2} \oint_\Sigma \epsilon_{ijk} F_{ij}^a \phi^a ds_k \ . \end{aligned} \tag{2.27}$$

La integral de superficie es proporcional a la carga magnética del monopolo

$$\frac{1}{2} \oint_\Sigma \epsilon_{ijk} F_{ij}^a \phi^a ds_k = \frac{4\pi M_W}{e^2} n \ . \tag{2.28}$$

Aquí, $M_W = ev$ es la masa de los bosones de gauge $W^{\pm}$.

Si $\lambda \geq 0$, resulta inmediato comprobar que la masa de las configuraciones satisface una cota de Bogomol'nyi:

$$M \geq \frac{4\pi M_W}{e^2} |n| \ . \tag{2.29}$$

Más aún, la cota es saturada siempre y cuando se satisfaga la condición de Prasad-Sommerfield[2] [8]

$$\lambda \to 0 \ , \tag{2.30}$$

y las configuraciones de campo sean solución de un conjunto de ecuaciones de primer orden:

$$F_{ij}^a = \pm \epsilon_{ijk} D_k \phi^a \ . \tag{2.31}$$

Llamaremos monopolos BPS a estas soluciones de mínima energía. El doble signo está relacionado con el carácter solitónico o antisolitónico de las respectivas soluciones y explica, por otra parte, la aparición del valor absoluto en la desigualdad (2.29). Es importante observar que la masa de un monopolo BPS de carga topológica N es igual a la suma de N monopolos de carga unidad. Los monopolos BPS no interactúan entre sí.

Por último, si consideramos la posibilidad de tener objetos eléctricamente cargados (diones de carga Q), encontraremos que la masa de tales configuraciones obedece la cota Bogomol'nyi:

$$M \geq M(n_e, n_m) \ , \tag{2.32}$$

[2]Con esto queremos decir que la constante de acoplamiento se anula, pero preservando la estructura del mecanismo de ruptura espontánea de simetría.

donde $M(n_e, n_m)$ no es otra cosa que la cantidad presentada en la ecuación (1.1). Como mencionamos anteriormente, la expresión anterior evidencia una simetría de dualidad fuerte/débil frente al intercambio de partículas elementales y solitones.

Instantones

El instantón de Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin es una solución localizada en el espacio-tiempo (euclídeo) y de acción finita de la teoría de gauge $SU(2)$ descrita por una acción de Yang-Mills

$$S_{YM} = \frac{1}{2}\int d^4x Tr F_{\mu\nu}^2 \ . \tag{2.33}$$

Es posible reescribir la acción, de manera sencilla, como:

$$S_{YM} = \frac{1}{4}\int d^4x Tr\left(F_{\mu\nu} \mp \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right)^2 \mp \frac{2\pi^2}{g^2}n \ , \tag{2.34}$$

donde n resulta el índice de Pontryagin del campo de gauge (ver ec.(2.24)). Entonces, es inmediato ver que la acción presenta una cota inferior

$$S_{YM} \geq \frac{2\pi^2}{g^2}|n| \ , \tag{2.35}$$

que es saturada si y sólo si el campo de gauge es solución de las ecuaciones de autodualidad

$$F_{\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \ . \tag{2.36}$$

Nuevamente, el doble signo hace referencia a la posibilidad de tener instantones de carga topológica negativa o positiva respectivamente.

El esquema presentado en estos dos ejemplos, se repite en una infinidad de modelos de teoría clásica de campos. Está de acuerdo con el perfil de energías de estos modelos: las soluciones pertenecientes a distintos sectores topológicos presentan valles, separados entre sí por barreras de energía infinita, con la consiguiente conservación de la carga topológica.

2.4 El Modelo Abeliano de Higgs

Consideraremos, en esta sección, la aparición de la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi en el modelo abeliano de Higgs. Este modelo, originalmente introducido por Higgs [34] para explicar el mecanismo de ruptura espontánea de simetría, servirá de laboratorio para nuestras investigaciones a lo largo de esta Tesis por lo que realizaremos un análisis más detallado que el presentado anteriormente para monopolos e instantones. Escribamos, nuevamente, el lagrangiano del modelo abeliano de Higgs:

$$L_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 , \tag{2.37}$$

cuyas ecuaciones de movimiento resultan:

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\delta V(\phi)}{\delta\phi^*} \tag{2.38}$$

y

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = eJ_\nu , \tag{2.39}$$

donde J_ν es la corriente de materia

$$J_\nu = \frac{i}{2}(\phi^*(D_\nu\phi) - (D_\nu\phi)^*\phi) . \tag{2.40}$$

Con el objeto de obtener soluciones de naturaleza topológica, consideraremos configuraciones estáticas e independientes de una de las coordenadas espaciales a la que identificamos como x^3. Bajo estas condiciones, la ecuación (2.9) restringe el espacio de soluciones al de aquellas eléctricamente neutras $A_0 = 0$, y con un potencial vector perpendicular a la dirección de inavarianza, $A_3 = 0$ [32]. Para este subespacio de soluciones el espacio en el infinito es isomorfo a una circunferencia S^1. Se tiene, entonces, el resultado (2.21):

$$\Pi_1(U(1)) = Z , \tag{2.41}$$

de modo que cada solución puede clasificarse con un número entero según el comportamiento asintótico de los campos que la constituyen.

La energía por unidad de longitud para este tipo de configuraciones resulta:

$$\mathcal{E} = \int_U d^2x \left[\frac{1}{4}F_{ij}^2 + \frac{1}{2}|D_i\phi|^2 + \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2\right] . \tag{2.42}$$

Es conveniente describir al plano transversal del vórtice usando coordenadas espaciales complejas

$$z = x + iy \quad , \quad \bar{z} = x - iy \tag{2.43}$$

de modo que las componentes no nulas de la métrica resultan, simplemente:

$$\eta_{z\bar{z}} = \eta_{\bar{z}z} = -\frac{1}{2} \; . \tag{2.44}$$

En este nuevo sistema de coordenadas, la energía puede ser escrita como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_U idzd\bar{z}\left[\frac{1}{2}\mathcal{F}^2 + D_z\phi D_{\bar{z}}\phi^* + D_{\bar{z}}\phi D_z\phi^* + \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2\right] \; , \tag{2.45}$$

donde hemos definido el campo magnético (escalar) según

$$\mathcal{F} = \epsilon^{z\bar{z}} F_{z\bar{z}} \; , \tag{2.46}$$

siendo $\epsilon^{z\bar{z}} = -2i$ el tensor de Levi-Civita covariante, escrito en la métrica conforme. Es posible acomodar los términos en la ecuación anterior llevándola a alguna de las siguientes - significativas - expresiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}\int_U idzd\bar{z}\left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{F} - \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2)\right)^2 + \left(\lambda - \frac{e^2}{8}\right)(|\phi|^2 - v^2)^2\right. \\ &+ \left. 2D_z\phi D_{\bar{z}}\phi^*\right] + \frac{1}{2}\oint_\Sigma (\vec{J} - ev^2\vec{A})\cdot d\vec{l} \, , \end{aligned} \tag{2.47}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}\int_U idzd\bar{z}\left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{F} + \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2)\right)^2 + \left(\lambda - \frac{e^2}{8}\right)(|\phi|^2 - v^2)^2\right. \\ &+ \left. 2D_{\bar{z}}\phi D_z\phi^*\right] - \frac{1}{2}\oint_\Sigma (\vec{J} - ev^2\vec{A})\cdot d\vec{l} \, . \end{aligned} \tag{2.48}$$

En una configuración de densidad lineal de energía finita, la corriente del Higgs debe anularse asintóticamente más rápido que $|z|^{-1}$, de modo que su contribución a la integral de contorno, en las ecuaciones anteriores, es nula,

$$\oint_\Sigma \vec{J}\cdot d\vec{l} = 0 \; . \tag{2.49}$$

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación (2.10), el potencial vector resulta ser un gradiente, a orden $1/r$, en el contorno de la región en la que está concentrado el campo magnético,

$$\vec{A} \simeq -\frac{1}{e}\vec{\nabla}\chi \; , \tag{2.50}$$

mientras que las ecuaciones (2.9) sobre el campo de Higgs, le dictan un comportamiento asintótico, al mismo orden, en términos de la función escalar χ, según:

$$\phi \simeq e^{i\chi} v \ . \tag{2.51}$$

En este lenguaje, una solución en el n-simo sector topológico estará identificada, simplemente, por la condición

$$\chi(2\pi) - \chi(0) = 2\pi n \ . \tag{2.52}$$

De este modo, el flujo magnético de una configuración clásica de energía finita resulta cuantificado

$$\Phi = \oint_\Sigma \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\frac{2\pi n}{e} \ , \tag{2.53}$$

por razones puramente topológicas, como lo son los comportamientos a grandes distancias de los campos.

Volviendo a las ecuaciones (2.47) y (2.48), es inmediato observar que, si $\lambda \geq e^2/8$ (correspondiente a la superconductividad tipo II descrita por el modelo de Ginzburg-Landau [3]), los primeros tres términos del lado derecho son definidos positivos. Por lo tanto, para esta región en el espacio de parámetros, la densidad lineal de energía presenta una cota inferior que, después de (2.49) y (2.53), resulta proporcional a la carga topológica de la configuración

$$\mathcal{E} \geq \frac{M_A^2}{4\alpha} |n| \ , \tag{2.54}$$

donde $M_A^2 = e^2 v^2$ es la masa del campo de gauge y $\alpha = e^2/4\pi$ es la constante de estructura fina. Los dos signos posibles del valor absoluto identifican el origen de esta desigualdad a partir de (2.47) o (2.48) respectivamente. Esta cota de Bogomol'nyi es saturada si y sólo si la constante de acoplamiento y la carga eléctrica del campo de Higgs se identifican según

$$\lambda = \frac{e^2}{8} \ , \tag{2.55}$$

y los campos de la teoría obedecen el siguiente conjunto de ecuaciones de Bogomol'nyi:

$$\mathcal{F} = \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \quad y \quad D_z\phi = 0 \ , \tag{2.56}$$

o, alternativamente,

$$\mathcal{F} = -\frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \quad y \quad D_{\bar{z}}\phi = 0 \ , \tag{2.57}$$

según el signo de n. La solución exacta de este sistema, que representa un vórtice de carga topológica n centrado en el origen de coordenadas, fue hallada [9] y verifica las ecuaciones de movimiento de la teoría. Asimismo, las componentes espaciales del tensor de energía-impulso T_{ij} se anulan para esta solución [9].

La energía de una configuración de n vórtices de carga topológica unidad, solución de las ecuaciones de Bogomol'nyi,

$$\mathcal{E} = \frac{M_A^2}{4\alpha} n \ , \tag{2.58}$$

resulta igual a n veces la energía de un vórtice con dicha carga. Es decir, los vórtices que saturan la cota Bogomol'nyi no interactúan entre sí. Las soluciones de los sistemas (2.56) o (2.57) resultan ser los modos cero del modelo abeliano de Higgs [7].

La condición (2.55) representa una severa restricción en el espacio de parámetros de la teoría. Esta condición coincide con el valor crítico que, en la teoría de Ginzbug-Landau [3], diferencia a la superconductividad tipo II, de aquella en la que el efecto Meisner tiene lugar (tipo I). Más interesante aún, es el hecho de que tal relación entre las constantes de acoplamiento sea necesaria a fin de hacer el modelo abeliano de Higgs supersimétrico [10], como fue señalado en la Ref.[9].

En los últimos 10 años han sido consideradas una gran variedad de teorías que exhiben vórtices que saturan una cota de Bogomol'nyi (ver, por ejemplo, [35]-[39]). En todos los casos, el esquema presentado en esta sección se ha repetido: deben satisfacerse ciertas condiciones sobre las constantes de acoplamiento y el potencial de Higgs de la teoría a fin de saturar la cota. Las configuraciones resultantes resuelven un sistema de ecuaciones de primer orden y son tales que los vórtices que constituyen un dado multi-vórtice no interactúan entre sí. En algunos de los casos, fue estudiada la existencia de una relación entre las condiciones necesarias para alcanzar la cota, y la posibilidad de incorporar - bajo las mismas condiciones - a la teoría particular en el sector bosónico de un modelo supersimétrico [17, 40]. En este sentido, demostraremos en el capítulo 4 que la condición (2.55) y la existencia de la cota de Bogomol'nyi (2.54), son una consecuencia directa de la inmersión del modelo abeliano de Higgs en una teoría $N = 2$ supersimétrica. Mostraremos en este contexto, asimismo, el origen de las ecuaciones de Bogomol'nyi (2.56) y (2.57) que son satisfechas por las configuraciones que saturan la cota. Consideraremos, en el próximo capítulo, algunas nociones de supersimetría necesarias para llevar adelante esta tarea.

Capítulo 3

Supersimetría en Teoría de Campos

A fin de estudiar la relación existente entre los aspectos topológicos discutidos precedentemente y la supersimetría extendida, introduciremos en este capítulo algunos elementos generales de supersimetría. En la sección 3.1 describimos el álgebra de supersimetría N-extendida en un espacio-tiempo tetradimensional, mientras que en la 3.2 discutimos los multipletes que transforman según las representaciones irreducibles de dicha álgebra. Realizamos esto último, también, para el caso de una teoría supersimétrica en un espacio-tiempo tridimensional. En la sección 3.3 presentamos la formulación de estas teorías en términos de supercampos evaluados en el superespacio. Explicamos el mecanismo de construcción de una acción supersimétrica mediante términos tipo-D y tipo-F. Por último, en la sección 3.4, construimos las supercargas conservadas asociadas a la supersimetría global, y discutimos la dimensionalidad de las distintas representaciones del álgebra. Finalmente, mostramos el interés de esta construcción en relación a la exactitud del espectro de masas de las configuraciones que saturan una cota de Bogomol'nyi.

3.1 Introducción

No hay evidencias experimentales firmes, de que la supersimetría sea una simetría de la naturaleza. Sin embargo, el número de razones teóricas por las que parece necesario recurrir a ella, ha ido aumentando progresivamente en los últimos 20 años. Desde la escala de energía del modelo standard electrodébil hasta la escala de Planck de la gravedad cuántica, los intentos de unificación de las interacciones fundamentales se encuentran repetidamente con el atractivo interrogante acerca de la posible existencia de una (super)simetría que relacione los sectores bosónico y fermiónico. Su existencia permitiría entender, en el contexto de las teorías de gran unificación, de qué manera las interacciones electrodébil y fuerte han tenido su origen en una única interacción presente a altas temperaturas ($T \sim 10^{15} GeV$) que se presume tuvieron lugar en períodos tempranos del Universo.

Se especula que, de existir una teoría que unifique todas las interacciones tanto a nivel clásico como cuántico, ésta podría ser supersimétrica (las candidatas más prometedoras son, en este sentido, las teorías de supercuerdas). La diferencia principal entre las dos interacciones de largo alcance, la gravedad y el electromagnetismo, generalmente pensada como un impedimento para la unificación de las mismas, radica en el carácter exclusivamente atractivo de la primera. Precisamente en este hecho reposa la razón principal para buscar la eventual teoría unificadora en el contexto de algún modelo supersimétrico: una fuerza atractiva es mediada por un campo de espín par, mientras que el electromagnetismo tiene por partícula mediadora al fotón, excitación de un campo de espín 1. Sólo la supersimetría es capaz de considerar multipletes que contengan juntos a estos mediadores. Más aún, dichos multipletes deberán contener campos de materia (fermiónicos). En Teoría Cuántica de Campos, la única manera conocida en el presente de unificar todas las interacciones (incluída la gravitatoria), se basa en la supersimetría. En efecto, la supergravedad (supersimetría local) unifica de manera natural a la gravitación con las restantes interacciones.

¿Qué es, entonces, la supersimetría? En forma amplia se podría decir que es una simetría que "mezcla" fermiones (básicamente materia) y bosones (básicamente mediadores de las interacciones) en un mismo multiplete. Consecuencia inmediata de este hecho es que sus generadores deben ser de naturaleza fermiónica. Por otra parte, al relacionar campos de distinto valor de espín, la supersimetría resulta ser una simetría interna que se combina de manera no-trivial con el grupo de Poincaré. En 1967, Coleman y Mandula [41] probaron, bajo hipótesis muy generales, que cualquier grupo de Lie que contenga al grupo de Poincaré P y a un grupo de simetría interna G, resulta ser el producto directo $P \times G$. Es decir, no es posible combinar de manera no-trivial las simetrías internas de una teoría con las del espacio-tiempo, dentro de un grupo de Lie. Los generadores de las simetrias internas conmutan con el momento y el momento angular, de modo que los multipletes irreducibles de estos grupos de simetría no pueden contener partículas de distinta masa o de diferente espín.

La estructura del grupo de Lie, al menos en el entorno de la identidad, está determinada enteramente por el álgebra de Lie. Por lo tanto, se debe generalizar ésta a fin de poder construir el álgebra de los generadores de supersimetría que admita representaciones que mezclen campos de distinto espín. Gol'fand y Likhtman [42] resolvieron el problema introduciendo el álgebra de Lie graduada en la que los generadores se dividen en pares $\mathcal{P}$ e impares $\mathcal{I}$, según satisfagan relaciones de conmutación o anticonmutación de acuerdo al esquema siguiente:

$$[\mathcal{P},\mathcal{P}]=\mathcal{P} \quad , \quad [\mathcal{P},\mathcal{I}]=\mathcal{I} \quad \text{y} \quad \{\mathcal{I},\mathcal{I}\}=\mathcal{P} \; . \tag{3.1}$$

Los generadores del grupo de Poincaré P_A y J_{AB} son operadores pares que satisfacen la siguiente álgebra de Lie:

$$[P_A, P_B] = 0 \quad , \quad [P_A, J_{BC}] = \eta_{AB} P_C - \eta_{AC} P_B$$

$$\text{y} \quad [J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{AD} J_{BC} + \eta_{BC} J_{AD} - \eta_{AC} J_{BD} - \eta_{BD} J_{AC} \; ; \tag{3.2}$$

mientras que los generadores de la supersimetría Q_α resultan impares, dada su naturaleza fermiónica, de modo que satisfacen relaciones de anticonmutación

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \mathcal{P}_{\alpha\beta} \; . \tag{3.3}$$

El álgebra de Lie graduada se completa con los conmutadores entre operadores pares e impares como, por ejemplo,

$$[Q_\alpha, J_{AB}] = (c_{AB})_\alpha{}^\beta Q_\beta \; . \tag{3.4}$$

los toma como 4-spinors

Utilizando las identidades de Jacobi generalizadas, se puede comprobar que las matrices c_{AB} forman una representación del álgebra de Lorentz. En otras palabras, Q_α transforma en una representación (fermiónica) del grupo de Lorentz. Más aún, los operadores de simetría fermiónicos sólo pueden tener un valor de espín igual a 1/2 [43]. Eligiendo la representación irreducible $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$, las matrices c_{AB} resultan ser proporcionales a las matrices de espín Σ_{AB}

$$c_{AB} = \frac{1}{2}\Sigma_{AB} = \frac{1}{4}(\Gamma_A\Gamma_B - \Gamma_B\Gamma_A) \; , \tag{3.5}$$

construidas a partir de las matrices de Dirac Γ_A, de donde resulta claro que el subíndice de Q_α describe su carácter espinorial.

Es posible elegir en este punto, sin perder generalidad, Q_α como un espinor de Majorana

Notación 4-spinor

$$Q_\alpha = C_{\alpha\beta}\bar{Q}^\beta \ , \tag{3.6}$$

donde $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$ es la matriz de conjugación de carga. Haciendo uso nuevamente de las identidades de Jacobi generalizadas, es posible derivar el resto del álgebra de supersimetría. Así, resulta inmediato comprobar que el generador de supersimetría conmuta con P_A

$$[Q_\alpha, P_A] = 0 \ , \tag{3.7}$$

y admite una simetría interna generada por un operador par de rotaciones quirales R,

$$[Q_\alpha, R] = i(\Gamma_5)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \ . \tag{3.8}$$

Finalmente, el álgebra de supersimetría más general posible, compatible con el teorema de Coleman-Mandula, resulta:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\Gamma^A C)_{\alpha\beta} P_A \ . \tag{3.9}$$

Es decir, la aplicación sucesiva de dos transformaciones de supersimetría produce una traslación.

Resulta de sumo interés considerar el caso de una teoría invariante frente a N transformaciones independientes de supersimetría. Se habla, en este caso, de una teoría con supersimetría N-extendida. Llamando a los generadores $Q^I_\alpha, I = 1, \ldots, N$ se comprueba de inmediato que las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.7) se modifican trivialmente (el supraíndice I es ciego frente a las transformaciones del grupo de Poincaré). El álgebra de supersimetría se extiende para incorporar nuevos términos U^{IJ} y V^{IJ},

$$\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} = 2(\Gamma^A C)_{\alpha\beta}\delta^{IJ} P_A + C_{\alpha\beta}U^{IJ} + (\Gamma_5 C)_{\alpha\beta}V^{IJ} \ , \tag{3.10}$$

antisimétricos en los índices (I, J), denominados cargas centrales. Como consecuencia de las identidades de Jacobi generalizadas, ellas conmutan con todos los generadores del álgebra y entre sí. Por último, el grupo interno de simetría que admite una teoría con N supersimetrías puede ser obtenido mediante el uso, una vez más, de las identidades de Jacobi, y resulta $U(N)$ en ausencia de cargas centrales y, en general, $USp(2q_1) \times \ldots \times USp(2q_k) \times U(N-2q)$ con $k \leq N/2$ y $q = \sum_{i=1}^k q_i = [N/2]$, cuando las cargas centrales están presentes en el álgebra [14].

3.2 Multipletes Supersimétricos

Para escribir explícitamente modelos invariantes supersimétricos, el paso siguiente consiste en encontrar representaciones irreducibles en términos de un conjunto de campos cuánticos que conformen un (super)multiplete. Un multiplete supersimétrico (o supermultiplete) está constituido por un conjunto de campos que pueden ser transformados entre sí mediante operaciones de supersimetría. Las leyes de transformación estarán dictadas por el álgebra de supersimetría presentada anteriormente.

Debido a que los generadores de supersimetría conmutan con el momento (3.7), los estados cuánticos pertenecientes a un supermultiplete deben tener la misma masa. He aquí una de las primeras dificultades fenomenológicas de esta formulación: ninguna partícula bosónica con la masa del electrón, por ejemplo, ha sido detectada. Esta objeción puede ser respondida invocando el mecanismo de ruptura espontánea de supersimetría, que permitiría tener una teoría con dinámica supersimétrica, pero con un estado de vacío no-supersimétrico. A través de este mecanismo, los compañeros de multiplete de las partículas observadas podrían haber adquirido masas enormes haciéndose inobservables desde el punto de vista experimental. Algunas de estas partículas se consideran como posibles constituyentes de la denominada materia oscura que podría proveer la mayor parte de la masa del universo. La supersimetría se encuentra espontáneamente rota si y sólo si el estado de menor energía (el vacío) tiene energía no nula [44]. Este hecho tiene relevancia en el contexto de la cosmología, como veremos más adelante.

La representación más práctica de los multipletes supersimétricos está dada en términos de campos. Con ellos construiremos, de manera sencilla, teorías de campos que presenten esta invarianza. Consideremos, entonces, la construcción de aquellos multipletes que serán de interés en la construcción de acciones con invarianza supersimétrica $N = 1$ en 3 y 4 dimensiones espacio-temporales. Comenzaremos por el caso tetradimensional, en el que resulta más simple realizar los cálculos en una formulación biespinorial del álgebra de supersimetría (ver Apéndice), en la que se toma partido explícito de la representación espinorial del grupo de Lorentz en que se acomodan las supercargas.

Multiplete Quiral ($N = 1$,$d = 4$)

Consideremos un campo escalar complejo ϕ como base de nuestra representación. El multiplete quiral se construye sobre la base de una condición de quiralidad sobre dicho campo

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \phi] = 0 \ . \tag{3.11}$$

La acción de Q_α sobre ϕ nos lleva al campo fermiónico del multiplete

$$[Q_\alpha, \phi] = -i\Xi_\alpha \ , \tag{3.12}$$

donde Ξ_α es un espinor de Weyl. Si actuamos sobre estos campos con Q_α y $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, utilizando el álgebra y las identidades de Jacobi, es fácil comprobar que

$$\{Q_\alpha, \Xi_\beta\} = i\epsilon_{\alpha\beta}F \quad y \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \Xi_\beta\} = (\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\phi \ , \tag{3.13}$$

con F un campo escalar complejo. Finalmente, la acción de los generadores del álgebra sobre F no da lugar a nuevos campos.

El multiplete quiral resulta, entonces, representado por el conjunto de campos

$$\Phi : (\phi, \Xi, F) \ . \tag{3.14}$$

La transformación de supersimetría de parámetro espinorial (anticonmutante) ϵ, generada por las cargas Q y $\bar{Q}$,

$$\delta\Phi = i[\epsilon Q + \bar{Q}\bar{\epsilon}, \Phi] \ , \tag{3.15}$$

resulta, en términos de los campos componentes:

$$\delta\phi = \epsilon\Xi \quad , \quad \delta\Xi = i\partial_\mu\phi\sigma^\mu\bar{\epsilon} + F\epsilon \quad y \quad \delta F = i\partial_\mu\Xi\sigma^\mu\bar{\epsilon} \ . \tag{3.16}$$

Si pedimos que ϕ sea real, es inmediato comprobar que resulta simplemente una constante.

Multiplete Vectorial ($N = 1, d = 4$)

Si eliminamos la restricción de quiralidad definida nos encontraremos con un conjunto de campos más grande al que llamaremos multiplete vectorial V. Está constituido por un campo escalar S, tres campos pseudoescalares C, P y D, un campo vectorial A_μ - en principio, todos complejos -, y sus compañeros fermiónicos representados por dos espinores de Dirac ρ y Λ:

$$V : (C, \rho, S, P, A_\mu, \Lambda, D) \ . \tag{3.17}$$

Contrariamente a lo que ocurre con el campo quiral, es posible imponer una condición de realidad

$$V = V^{\dagger} \ , \tag{3.18}$$

de modo que los campos bosónicos resulten reales y los espinores Majorana. Si pensamos al campo A_μ como un campo de gauge, debemos definir consistentemente las transformaciones de gauge de sus compañeros de multiplete. Si intentamos construir ahora una acción invariante frente a transformaciones de supersimetría y de gauge, nos encontraremos con una acción no-polinómica [44]. Existe, sin embargo, la posibilidad de realizar un fijado de gauge de modo que este problema desaparezca. El gauge de Wess-Zumino

$$C = \rho = S = P = 0 \ , \tag{3.19}$$

permite construir acciones polinómicas en los campos. Es un gauge no-supersimétrico. Es decir, para permanecer en él tras una transformación de supersimetría, debe agregarse una transformación de gauge (cuyo parámetro depende del campo A_μ). Esta transformación es tal, que corrige todas las derivadas agregándoles la conexión que las convierte en derivadas covariantes de gauge. De este modo, las transformaciones del multiplete quiral se modifican:

$$\delta\phi = \epsilon\Xi \quad , \quad \delta\Xi = iD_\mu\phi\sigma^\mu\bar{\epsilon} + F\epsilon \quad y \quad \delta F = iD_\mu\Xi\sigma^\mu\bar{\epsilon} \ , \tag{3.20}$$

mientras que las leyes de transformación de los campos componentes del multiplete vectorial resultan, explícitamente,

$$\delta A_\mu = \frac{i}{2}\left(\epsilon\sigma^\mu\bar{\Lambda} + \bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\Lambda\right) \quad , \quad \delta\Lambda = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\epsilon + \frac{i}{2}D\epsilon$$

$$\text{y} \quad \delta D = \frac{1}{2}\left(\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\Lambda} - \bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Lambda\right) \ . \tag{3.21}$$

Multiplete Escalar ($N = 1, d = 3$)

En 3 dimensiones, el generador de supersimetría resulta ser un espinor de Majorana de dos componentes reales (ver Apéndice). Consecuentemente, la condición de realidad puede ser implementada sobre el multiplete que tiene por componente fundamental a un campo escalar complejo (lo llamaremos escalar por no existir la condición de quiralidad en el caso tridimensional). Asi es que tenemos dos posibles representaciones, el multiplete escalar complejo:

$$\Phi : (\phi, \psi, F) \; . \tag{3.22}$$

con leyes de transformación dadas por[1]

$$\delta\phi = -\bar{\epsilon}\psi \quad , \quad \delta\psi = i\gamma^{\mu}\epsilon D_{\mu}\phi + F\epsilon \quad y \quad \delta F = -i\bar{\epsilon}\, \not{D}\psi \; , \tag{3.23}$$

y el multiplete escalar real

$$S : (N, \chi, D) \; , \tag{3.24}$$

que transforma según:

$$\delta N = -\bar{\epsilon}\chi \quad , \quad \delta\chi = i\gamma^{\mu}\epsilon\partial_{\mu}N + D\epsilon \quad y \quad \delta D = -i\bar{\epsilon}\, \not{\partial}\chi \; . \tag{3.25}$$

Multiplete Vectorial ($N = 1, d = 3$)

El multiplete vectorial real Γ resulta - en el gauge de Wess-Zumino - simplemente dado por el campo de gauge A_{μ} y un espinor de Majorana ρ,

$$\Gamma : (A_{\mu}, \rho) \; . \tag{3.26}$$

Sus leyes de transformación están dadas por:

$$\delta A_{\mu} = -i\bar{\epsilon}\gamma_{\mu}\rho \quad y \quad \delta\rho = -\frac{i}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\epsilon \; . \tag{3.27}$$

3.3 Superespacio, Supercampos y Acciones Supersimétricas

Una formulación particularmente útil, elegante y compacta para la construcción de teorías supersimétricas y el cálculo de correcciones cuánticas en las mismas, es la que resulta de la definición del superespacio. Introduciremos,

[1] Las derivadas covariantes están presentes debido a que estamos considerando la existencia de una invarianza de gauge respecto de la cuál imponemos el gauge de Wess-Zumino.

pues, el superespacio como una variedad que puede ser descrita localmente por las coordenadas espacio-temporales x^μ, más un conjunto de coordenadas anticonmutantes θ_α y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ que se acomodan, en el caso tetradimensional, en espinores de Weyl. Sobre esta variedad, las transformaciones de supersimetría se traducen en traslaciones

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow (x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \ . \tag{3.28}$$

Esta traslación en el superespacio es generada por el operador diferencial $\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}$,

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \quad y \quad \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\partial_\mu \ , \tag{3.29}$$

donde Q_α y $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ generan, por otra parte, al álgebra de supersimetría (3.9) escrita en la formulación biespinorial. Notamos, a partir de (3.29), que las dimensiones de masa de Q y $\bar{Q}$ son $m^{1/2}$, mientras que las coordenadas grassmanianas θ y $\bar{\theta}$ tienen dimensionalidad $m^{-1/2}$. Es posible construir un nuevo conjunto de operadores diferenciales $\mathcal{D}_\alpha$ y $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$,

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \quad y \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \ , \tag{3.30}$$

que anticonmutan con los generadores Q y $\bar{Q}$:

$$\{\mathcal{D}_\alpha, Q_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \ , \tag{3.31}$$

de modo que operan en forma covariante (supersimétrica) sobre funciones definidas en el superespacio. Los supercampos son, precisamente, estas funciones $\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta})$ que tienen como dominio alguna región del superespacio. Dado el carácter anticonmutante de θ y $\bar{\theta}$, la expansión en series de Taylor de un supercampo en estas coordenadas se corta a un dado orden,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \ . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Las leyes de transformación para estos supercampos resultan definidas según

$$\delta_\epsilon\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) = i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) \ , \tag{3.33}$$

y el desarrollo en series de Taylor de ambos miembros de la ecuación anterior proporciona las leyes de transformación de los campos componentes. El parámetro de la transformación ϵ tiene dimensiones $m^{-1/2}$. Los supercampos forman representaciones lineales del álgebra de supersimetría: tanto la combinación lineal de supercampos, como su producto, dan lugar a nuevos supercampos. Estas representaciones, no obstante, son en general reducibles. Podemos constreñir el supercampo a representaciones irreducibles, imponiéndole vínculos covariantes como $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{F} = 0$ o $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger$. Llamaremos supercampo quiral $\mathbf{\Phi}$ a aquél que satisface la primera de estas condiciones, mientras que denominaremos supercampo vectorial $\mathcal{V}$ al que verifica la condición de realidad. Ellos conforman representaciones irreducibles que se corresponden exactamente con aquellas que, con el mismo nombre, hemos introducido en las ecuaciones (3.14) y (3.17) de la Sección anterior. Para construir explícitamente un supercampo, dado el elemento base de la representación, que no es más que $\mathcal{F}(x,0,0)$, debemos realizar una traslación en el superespacio:

$$\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) = \exp\left[\theta Q + \bar{\theta}\bar{Q}\right]\mathcal{F}(x,0,0) \; . \tag{3.34}$$

Así, el supercampo quiral resulta dado, en términos de sus campos componentes, por la siguiente expresión:

$$\mathbf{\Phi}(y,\theta) = \phi(y) + \theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \; , \tag{3.35}$$

en la que $y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$, evidenciando la condición de quiralidad impuesta sobre el supercampo. Las leyes de transformación para ϕ, ψ y F derivadas a través de (3.33), son exactamente las presentadas anteriormente en la ecuación (3.16). El producto de supercampos quirales da lugar a nuevos supercampos quirales. En cambio, el producto de un campo quiral con uno antiquiral, arroja como resultado un supercampo de naturaleza vectorial.

El supercampo vectorial, por su parte, puede ser escrito de manera compacta en el gauge de Wess-Zumino como

$$\mathcal{V} = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\rho}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \; . \tag{3.36}$$

De este modo, podemos ver al supercampo vectorial como la generalización supersimétrica del campo de gauge. Asimismo, podemos construir un supercampo quiral invariante de gauge W_α correspondiente al tensor electromagnético, mediante la condición (covariante):

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_\alpha\mathcal{V} \; , \tag{3.37}$$

con una descomposición en campos componentes dada por

$$W_\alpha = -i\rho_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y) + \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\rho}^{\dot{\alpha}}(y) \ . \tag{3.38}$$

Análogamente, el supercampo antiquiral $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$,

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}\mathcal{D}\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\mathcal{V} \ , \tag{3.39}$$

tiene un desarrollo similar en campos componentes, dependientes de la variable $y^\dagger = x - i\theta\sigma\bar{\theta}$ a raíz de su pertenencia a un supermultiplete antiquiral.

Debido a que las coordenadas grassmannianas del superespacio tienen dimensiones negativas de masa, los campos F y D deben ser los de mayor dimensionalidad en sus respectivos multipletes. Consecuencia directa de este hecho, resulta el que sus transformaciones de supersimetría no puedan ser otra cosa que *derivadas totales* de campos de menor dimensionalidad[2]. De este modo, un lagrangiano invariante supersimétrico puede ser construido considerando la componente F de algún supercampo quiral o, alternativamente, como la componente D de un supercampo vectorial. En términos del superespacio, recordando que las únicas integrales sobre las variables de Grassmann que arrojan un resultado no-trivial son:

$$\int d^2\theta\theta\theta = \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta} = 1 \ , \tag{3.40}$$

la componente F de un supercampo quiral $\mathbf{\Phi}$ puede ser convenientemente escrita como

$$F = \int d^2\theta \ \mathbf{\Phi} \ , \tag{3.41}$$

mientras que la componente D de un supercampo vectorial $\mathcal{V}$ resulta, simplemente,

$$D = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \ \mathcal{V} \ . \tag{3.42}$$

De este modo, la acción supersimétrica más general posible, puede escribirse esquemáticamente como

$$S = \int d^4x(d^2\theta \ \mathbf{\Phi} + h.c.) + \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \ \mathcal{V} \ , \tag{3.43}$$

[2]De este hecho también se deduce que F y D deban ser campos auxiliares, es decir, sin término cinético en el lagrangiano.

donde $\mathbf{\Phi}$ es algún supercampo quiral y $\mathcal{V}$ algún supercampo vectorial, construidos mediante el uso del cálculo tensorial supersimétrico [45] a partir de los supercampos fundamentales de la teoría.

Consideremos dos ejemplos sencillos que resultarán de gran utilidad para el capítulo próximo. Podemos construir un supercampo quiral multiplicando factores quirales W_α. Asi, el producto $\epsilon^{\alpha\beta}W_\alpha W_\beta$ es, por construcción, un supercampo quiral invariante Lorentz. La integral espacio-temporal de su componente F resultará, entonces, una acción con invarianza supersimétrica. Explícitamente,

$$\frac{1}{4}\int d^4x d^2\theta \epsilon^{\alpha\beta} W_\alpha W_\beta + h.c. = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\rho\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\rho} + \frac{1}{2}D^2\right] , \tag{3.44}$$

es la versión supersimétrica del término de Maxwell, en la que vemos aparecer el término cinético del fotino y queda en evidencia el carácter auxiliar del campo D.

Si hacemos, en cambio, el producto de un supercampo quiral $\mathbf{\Phi}$ con otro antiquiral $\mathbf{\Phi}^\dagger$, resulta un supercampo vectorial. El producto de éste con otros campos vectoriales, seguirá siendo de naturaleza vectorial. De este modo, la componente D del campo vectorial $\mathbf{\Phi}^\dagger e^{\mathcal{V}}\mathbf{\Phi}$, tendrá que ser una acción supersimétrica. El cálculo explícito muestra que tal cantidad,

$$\begin{aligned} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathbf{\Phi}^\dagger e^{\mathcal{V}} \mathbf{\Phi} &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi} + \frac{1}{2}|F|^2 \right. \\ &+ \left. \frac{ie}{2}(\bar{\psi}\bar{\rho}\phi - \rho\psi\phi^*) + \frac{e}{2}D|\phi|^2\right] , \end{aligned} \tag{3.45}$$

no es más que la extensión supersimétrica del término cinético de un campo escalar complejo. Contiene el término cinético del Higgsino cargado, junto con otros términos auxiliares y de interacción.

Cuando el grupo de simetría interna es abeliano, como es el caso en la presente discusión, es posible sumar a la acción un término lineal en el supercampo vectorial,

$$\int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \xi \mathcal{V} = \xi \int d^4x \, D , \tag{3.46}$$

conocido como el término de Fayet-Iliopoulos, relacionado con la ruptura espontánea de supersimetría y la generación de potenciales de ruptura de simetría interna.

En el caso tridimensional, la discusión varía ligeramente. Los espinores tienen tan solo dos componentes, de modo que el superespacio está descrito localmente por coordenadas (x^μ, θ^α), donde θ^α es un espinor de Majorana (real). Los operadores que representan a la supercarga y a la derivada covariante son análogos a los definidos en (3.29) y (3.30)

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu \quad y \quad \mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu \ . \tag{3.47}$$

Las principales diferencias con el caso tetradimensional, son las siguientes:
(i) Es posible imponer la condición de realidad al supercampo escalar, dando lugar a

$$S(x,\theta) = N(x) + \theta^\alpha \chi_\alpha(x) - \frac{1}{2}\theta^\alpha \theta_\alpha D(x) \ , \tag{3.48}$$

que contiene un campo escalar real N, un fermión de Majorana χ, y un segundo campo escalar real que, al estar en la potencia máxima del desarrollo del supercampo en las coordenadas anticonmutantes, resulta ser un campo auxiliar.
(ii) El supercampo vectorial lleva un índice espinorial Γ_α, y en el gauge de Wess-Zumino se escribe como:

$$\Gamma_\alpha(x,\theta) = iA_\mu(x)(\gamma^\mu \theta)_\alpha - \theta^\gamma \theta_\gamma \rho_\alpha(x) \ , \tag{3.49}$$

donde el fotón A_μ, es acompañado por el fotino ρ, que resulta un espinor de Majorana.

3.4 La Supercarga de Noether

La posibilidad de construir acciones explícitamente invariantes frente a transformaciones de supersimetría implica la existencia de teorías cuánticas de campos en las cuales los generadores Q_α y $\bar{Q}^{\dot\alpha}$ pueden ser representados en términos de corrientes espinoriales $\mathcal{J}^\mu_\alpha$ y $\bar{\mathcal{J}}^{\mu\dot\alpha}$,

$$Q_\alpha = \int d^3x \ \mathcal{J}^0_\alpha \quad y \quad \bar{Q}^{\dot\alpha} = \int d^3x \ \bar{\mathcal{J}}^{0\dot\alpha} \ , \tag{3.50}$$

conservadas

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu_\alpha = 0 \quad y \quad \partial_\mu \bar{\mathcal{J}}^{\mu\dot\alpha} = 0 \ , \tag{3.51}$$

presentes en estas teorías como consecuencia del teorema de Noether. Las corrientes $\mathcal{J}^{\mu}_{\alpha}$ y $\bar{\mathcal{J}}^{\mu\dot{\alpha}}$ son, entonces, expresiones locales en los operadores de campo. El álgebra (3.9) es satisfecha a partir de las relaciones canónicas de anticonmutación y el espacio de Fock resultante se ajusta a alguna representación del álgebra de supersimetría. Volviendo a la notación espinorial de 4-componentes, el método de Noether prescribe la siguiente expresión para la corriente conservada,

$$\mathcal{J}^{\mu} = \sum_{\{\Phi\}} \frac{\delta L}{\delta \nabla_{\mu}\Phi}\delta\Phi + \sum_{\{\Psi\}} \frac{\delta L}{\delta \nabla_{\mu}\Psi}\delta\Psi - \theta^{\mu} \ , \tag{3.52}$$

donde $\{\Phi\}$ y $\{\Psi\}$ representan los conjuntos completos de campos bosónicos y fermiónicos del modelo considerado. El término θ^{μ} aparece de la libertad del lagrangiano, aún siendo invariante supersimétrico, de cambiar en una divergencia,

$$\delta\mathcal{L} = \nabla_{\mu}\theta^{\mu} \ . \tag{3.53}$$

La carga de supersimetría resultará, simplemente, la integral espacial de la componente temporal de la corriente (3.52). Demostraremos, antes de seguir adelante, que existe una expresión más simple para dicha carga.

Proposición: En una teoría supersimétrica con términos cinéticos canónicos para los fermiones y con paréntesis de Poisson fundamentales dados por $\{\Pi_{\Phi}(\vec{x},t), \Phi(\vec{y},t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$ y $\{\bar{\Pi}^{\alpha}_{\Psi}(\vec{x},t), \Psi_{\beta}(\vec{y},t)\} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$, la carga supersimétrica puede escribirse como

$$\mathcal{Q} = 2\sum_{\Psi} \bar{\Pi}_{\Psi}\delta\Psi \ . \tag{3.54}$$

Demostración: Para demostrar la proposición, debemos probar que $\mathcal{Q}$, definida según (3.54), genera correctamente las transformaciones de supersimetría sobre los campos bosónicos (sobre los campos fermiónicos, la prueba es trivial). Consideremos, pues,

$$\{\mathcal{Q}, \Phi\} = 2\sum_{\Psi}\{\bar{\Pi}_{\Psi}\delta\Psi, \Phi\} = 2\sum_{\Psi}\bar{\Pi}_{\Psi}\{\delta\Psi, \Phi\} \ , \tag{3.55}$$

dado que los términos cinéticos fermiónicos tienen la forma canónica. Ahora, utilizando las identidades de Jacobi graduadas,

$$\{\delta\Psi, \Phi\} = \{\{Q,\Psi\},\Phi\} = -\{\{\Phi, Q\},\Psi\} - \{\{\Phi,\Psi\}, Q\} = \{\delta\Phi, \Psi\} \ . \tag{3.56}$$

Pero, resulta inmediato que

$$2\sum_{\Psi} \bar{\Pi}_{\Psi}\{\delta\Phi, \Psi\} = \delta\Phi \ , \tag{3.57}$$

por lo que $\mathcal{Q}$ es el generador de las transformaciones de supersimetría Q.

Terminaremos la presente sección con una corta discusión acerca de la dimensionalidad de las representaciones del álgebra de supersimetría, que resultará de relevancia más adelante.

Partículas masivas sin carga central: En el sistema de referencia en el que la partícula está en reposo, el álgebra de supersimetría (3.10), reescrita en la formulación biespinorial, toma la forma siguiente en ausencia de cargas centrales:

$$\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\} = 2M\delta_{\alpha\dot\beta}\delta^{IJ} \quad y \quad \{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} = \{\bar{Q}^I_{\dot\alpha}, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\} = 0 \ . \tag{3.58}$$

Un simple reescaleo $a^I_\alpha = (2M)^{-1/2}Q^I_\alpha$ y $(a^I_\alpha)^\dagger = (2M)^{-1/2}\bar{Q}^I_{\dot\alpha}$, nos muestra que dicha álgebra es isomorfa al álgebra de $2N$ operadores de creación y destrucción fermiónicos. Las representaciones de ésta son bien conocidas. Se construyen a partir de un vacío de Clifford Ω, $a^I_\alpha\Omega = 0$, por sucesivas aplicaciones de los operadores de creación $(a^I_\alpha)^\dagger$,

$$\Psi^{(n)}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{I_1\ldots I_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^{I_1}_{\alpha_1})^\dagger \ldots (a^{I_n}_{\alpha_n})^\dagger\Omega \ . \tag{3.59}$$

$\Psi^{(n)}$ resulta antisimétrico frente al intercambio de pares de índices (α_i, I_i) y (α_j, I_j). Cada par de índices toma $2N$ diferentes valores por lo que, dado el carácter anticonmutante de los $(a^{I_i}_{\alpha_i})^\dagger$, n debe ser menor o igual que $2N$. Para cada valor de n, tendremos $\begin{pmatrix} 2N \\ n \end{pmatrix}$ estados diferentes. Entonces, la dimensionalidad de la representación de estados de una partícula masiva en ausencia de cargas centrales, resulta:

$$d_{M,Z=0} = \sum_{n=0}^{2N} \begin{pmatrix} 2N \\ n \end{pmatrix} = 2^{2N} \ . \tag{3.60}$$

Si el vacío Ω es no-degenerado, estaremos en presencia del multiplete irreducible masivo fundamental.

Partículas no-masivas sin carga central: En un sistema de referencia tipo-luz, el tetravector P^μ toma la forma $(E, 0, 0, -E)$. El álgebra de supersimetría (3.10), adquire la siguiente expresión:

$$\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\} = 2\begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{IJ} \quad y \quad \{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} = \{\bar{Q}^I_{\dot\alpha}, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\} = 0 \; . \tag{3.61}$$

De este modo, efectuando nuevamente un reescaleo $a^I = (4M)^{-1/2}Q^I_1$ y $(a^I)^\dagger = (4M)^{-1/2}\bar{Q}^I_{\dot 1}$, vemos que el álgebra (3.61) consiste de N operadores de creación y destrucción fermiónicos. Los operadores $(a^I)^\dagger$ y a^I suben y bajan en 1/2 la helicidad de un cierto estado. Consecuentemente, a^I aniquila al estado de menor helicidad. Un cálculo similar al del caso anterior, permite deducir la dimensionalidad de la representación de estados de una partícula no-masiva sin cargas centrales. Resulta:

$$d_{M=0,Z=0} = \sum_{n=0}^{N}\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = 2^N \; , \tag{3.62}$$

la raíz cuadrada de la dimensionalidad de la representación masiva.

Partículas masivas con carga central: El álgebra correspondiente a la supersimetría extendida con carga central, en la formulación biespinorial, resulta ser, a partir de la ecuación (3.10):

$$\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\} = 2M\delta_{\alpha\dot\beta}\delta^{IJ} \; , \tag{3.63}$$

$$\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ} \quad y \quad \{\bar{Q}^I_{\dot\alpha}, \bar{Q}^J_{\dot\beta}\} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar{Z}^{IJ} \; , \tag{3.64}$$

con $Z^{IJ} = -Z^{JI}$, mientras que $\bar{Z}$ es la matriz hermítica conjugada de Z. Supongamos que N es par (el caso impar se resuelve de manera análoga). Entonces, podemos descomponer los índices I como $I = (a, m)$, donde $a = 1, 2$ y $m = 1, \ldots, \frac{1}{2}N$. Ahora, siempre es posible rotar Z^{IJ}, a través de una transformación unitaria $\tilde{Z}^{IJ} = U^I_K U^J_L Z^{KL}$ de modo que resulte $Z^{(a,m)(b,n)} = \epsilon^{ab}\delta^{mn}Z_n$ [46]. La misma rotación, actuando sobre las supercargas, da lugar a operadores $\tilde{Q}^I_\alpha = U^I_J Q^J_\alpha$ y su correspondiente $\tilde{\bar{Q}}^I_{\dot\alpha}$, de modo que el álgebra (3.63-3.64) puede ser reescrita como:

$$\{\tilde{Q}^{(a,m)}_\alpha, \tilde{\bar{Q}}^{(b,n)}_{\dot\beta}\} = 2M\delta_{\alpha\dot\beta}\delta^{ab}\delta^{mn} \; , \tag{3.65}$$

$$\{\tilde{Q}_{\alpha}^{(a,m)}, \tilde{Q}_{\beta}^{(b,n)}\} = \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ab}\delta^{mn}Z_n \quad y \quad \{\bar{\tilde{Q}}_{\dot{\alpha}}^{(a,m)}, \bar{\tilde{Q}}_{\dot{\beta}}^{(b,n)}\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{ab}\delta^{mn}Z_n \ . \tag{3.66}$$

Una vez más, combinamos y reescaleamos las supercargas en términos de operadores $a^m_{\alpha\,\pm} = 2^{-1/2}(\tilde{Q}_{\alpha}^{(1,m)} \pm \epsilon_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\tilde{Q}}^{\dot{\beta}(2,m)})$ y sus conjugados $(a^m_{\alpha\,\pm})^{\dagger}$, a fin de simplificar el álgebra, de tal modo que los únicos paréntesis no-nulos resultan:

$$\{a^m_{\alpha\,\pm}, (a^n_{\beta\pm})^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\dot{\beta}}\delta^{mn}(2M \pm Z_n) \ . \tag{3.67}$$

De estas relaciones vemos que $Z_n \leq 2M$ para todo n. Más aún, si existen un conjunto de $Z_i = 2M$, con $i = 1, \ldots, r$, los correspondientes operadores $a^m_{\alpha\,-}$ se anulan, dejando un álgebra de Clifford de $2(N - r)$ operadores de creación y destrucción. En este caso, la dimensionalidad de la representación de estados de una partícula masiva con cargas centrales, resulta:

$$d_{M,Z} = \sum_{n=0}^{N-r} \binom{N-r}{n} = 2^{N-r} \ . \tag{3.68}$$

A los supermultipletes correspondientes a campos sin masa o a campos masivos con algunas cargas centrales maximales, se los llama supermultipletes "cortos" dada su menor dimensionalidad. Análogamente, se conoce como supermultipletes "largos" a aquellos correspondientes a supercampos masivos sin carga central o sin cargas centrales maximales. La distinta dimensionalidad de las representaciones del álgebra de supersimetría tiene consecuencias físicas de gran relevancia. A pesar de que la teoría perturbativa no da cuenta, en principio, del espectro exacto de masas, es de esperar que la misma sea capaz de responder cuestiones cualitativas como el número de estados de partícula del sistema y en qué representaciones del álgebra transforman. Por lo tanto, si la supersimetría es una simetría exacta de estas teorías, la saturación clásica de la cota de Bogomol'nyi, que constriñe a los solitones a transformar dentro de un supermultiplete "corto", debe garantizar necesariamente la saturación exacta de dicha cota.

En el capítulo siguiente estudiaremos la conexión existente entre la supersimetría y las ecuaciones de Bogomol'nyi en un modelo abeliano.

Capítulo 4

Supersimetría y Ecuaciones de Bogomol'nyi en el Modelo Abeliano de Higgs

En el presente capítulo demostraremos que la existencia de una cota y un conjunto de ecuaciones de Bogomol'nyi, en el modelo abeliano de Higgs, puede ser entendida como la consecuencia natural de una supersimetría $N = 2$ admitida por la extensión supersimétrica del Lagrangiano del modelo. Presentamos así los primeros resultados originales de esta Tesis, contenidos en parte en la Ref.[40]. Estudiaremos configuraciones estáticas del modelo abeliano de Higgs independientes de una de las coordenadas espaciales. Trabajaremos, equivalentemente, en un espacio-tiempo de $2+1$ dimensiones eliminando del problema dicha coordenada de invarianza.

En la sección 4.1 construimos el lagrangiano del modelo abeliano de Higgs $N = 2$ supersimétrico, partiendo de un lagrangiano $N = 1$, de modo tal que resulte evidente la necesidad de imponer la relación crítica entre las constantes de acoplamiento para extender la supersimetría. En la sección 4.2 deducimos la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi a partir del álgebra de supersimetría extendida, mostrando que las configuraciones que saturan dicha cota rompen la mitad de las supersimetrías del lagrangiano. El marco general de estos resultados, y su extensión a otros modelos, es discutida en la sección 4.3. En la sección 4.4, consideramos un sistema bidimensional en el que deducimos la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi correspondientes a configuraciones instantónicas, a partir de una estructura supersimétrica subyacente. Mostramos, para finalizar, cómo debe modificarse el esquema presentado para incluir en forma genérica a los instantones de sistemas que pueden ser entendidos como la reducción dimensional de modelos que admiten la existencia de solitones topológicos.

4.1 Modelo Abeliano de Higgs $N = 2$ Supersimétrico

A fin de construir un lagrangiano supersimétrico que contenga al del modelo abeliano de Higgs (2.37) en su sector bosónico, debemos acomodar los campos fundamentales de la teoría dentro de sus respectivos multipletes. Para ello trabajaremos en la representación de supercampos explicada en el capítulo anterior. El campo de Higgs ϕ es acompañado por el Higgsino ψ y un campo auxiliar F dentro de un campo escalar complejo

$$\Phi(x,\theta) = \phi(x) + \bar{\theta}\psi(x) - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x) \ , \tag{4.1}$$

mientras que el fotón A_μ y el fotino ρ deben ser acomodados en un multiplete vectorial

$$\Gamma_\alpha(x,\theta) = iA_\mu(x)(\gamma^\mu\theta)_\alpha - \bar{\theta}\theta\rho_\alpha(x) \ . \tag{4.2}$$

Con el objeto de supersimetrizar el potencial de Higgs, consideraremos la presencia de un supercampo escalar real

$$S(x,\theta) = N(x) + \bar{\theta}\chi(x) - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta D(x) \ , \tag{4.3}$$

con el cual introduciremos un término de Fayet-Iliopoulos que implemente la ruptura de simetría. Resulta de utilidad introducir el supercampo espinorial 'electromagnético'

$$W_\alpha = \frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_\alpha\Gamma \ , \tag{4.4}$$

ya que es invariante de gauge como puede verse de inmediato a partir de su expresión explícita:

$$W_\alpha(x,\theta) = \rho_\alpha(x) + iH_\mu(x)(\gamma^\mu\theta)_\alpha - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(\partial\!\!\!/\rho)_\alpha(x) \ , \tag{4.5}$$

en la que hemos introducido la definición del dual del tensor electromagnético

$$H_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \ . \tag{4.6}$$

Las convenciones elegidas para las matrices γ están detalladas en el Apéndice.

Con todos estos elementos podemos construir el lagrangiano del modelo abeliano de Higgs con supersimetría $N = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N=1} &= \int d^2\theta \left[\frac{1}{2}\bar{W}W - \frac{1}{4}(\bar{\mathcal{D}} + ie\bar{\Gamma})\Phi^*(\mathcal{D} - ie\Gamma)\Phi - \frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}S\mathcal{D}S \right. \\ &+ \sqrt{2\lambda}S\Phi^*\Phi + \xi S\} \ , \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde ξ es el coeficiente real del término de Fayet-Iliopoulos. El lagrangiano (4.7) puede ser escrito en términos de los campos componentes, después de realizar la integración explícita sobre las coordenadas Grassmann del superespacio, resultando:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N=1} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu N)(\partial^\mu N) + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \frac{1}{2}D^2 \\ &+ \sqrt{2\lambda}D|\phi|^2 + \xi D + \frac{1}{2}|F|^2 + \sqrt{2\lambda}N(F^*\phi + F\phi^*) \\ &+ \frac{i}{2}\bar{\rho}\ \partial\!\!\!/\rho + \frac{i}{2}\bar{\chi}\ \partial\!\!\!/\chi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\ D\!\!\!\!/\psi - (2\lambda)^{1/2}N\bar{\psi}\psi \\ &+ \frac{ie}{2}(\bar{\psi}\rho\phi - \bar{\rho}\psi\phi^*) - (2\lambda)^{1/2}(\bar{\psi}\chi\phi + \bar{\chi}\psi\phi^*)\} \ . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Los campos D y F no tienen dinámica, por lo que podemos hallar su valor en términos de los otros campos de la teoría,

$$D = \sqrt{2\lambda}|\phi|^2 + \xi \quad y \quad F = -2\sqrt{2\lambda}N\phi \ , \tag{4.9}$$

de modo que, si redefinimos el parámetro de Fayet-Iliopoulos en términos de un número real positivo v^2:

$$\xi = -\sqrt{2\lambda}v^2 \ , \tag{4.10}$$

el lagrangiano toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N=1} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu N)(\partial^\mu N) + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - 4\lambda N^2|\phi|^2 \\ &- \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 + \frac{i}{2}\bar{\rho}\ \partial\!\!\!/\rho + \frac{i}{2}\bar{\chi}\ \partial\!\!\!/\chi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\ D\!\!\!\!/\psi \\ &- \sqrt{2\lambda}N\bar{\psi}\psi + \frac{ie}{2}(\bar{\psi}\rho\phi - \bar{\rho}\psi\phi^*) - \sqrt{2\lambda}(\bar{\psi}\chi\phi + \bar{\chi}\psi\phi^*)\} \ . \end{aligned} \tag{4.11}$$

$\mathcal{L}_{N=1}$ en (4.11) es invariante frente al siguiente conjunto de transformaciones infinitesimales de supersimetría:

$$\delta\rho = -iH_\mu\gamma^\mu\epsilon \quad , \quad \delta A_\mu = -i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\rho \ , \tag{4.12}$$

$$\delta N = \bar{\epsilon}\chi \quad , \quad \delta\chi = -\sqrt{2\lambda}(|\phi|^2 - v^2)\epsilon - i\gamma^\mu\epsilon\partial_\mu N \ , \tag{4.13}$$

$$\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi \ \text{ y } \ \delta\psi = -i\gamma^\mu\epsilon D_\mu\phi - \sqrt{8\lambda}N\phi\epsilon \ , \tag{4.14}$$

donde ϵ es un parámetro (espinor de Majorana) anticonmutante.

Impongamos al lagrangiano anterior una supersimetría adicional a fin de construir el modelo abeliano de Higgs $N = 2$ supersimétrico. El supercampo S proveerá, a través del campo χ, el segundo 'gaugino'que acompañe al fotino en la constitución de un multiplete irreducible $N = 2$ (la condición de supersimetría extendida exige la presencia exclusiva de fermiones de Dirac en el lagrangiano, una vez que los campos auxiliares han sido eliminados[1]). Podemos combinar los espinores χ y ρ en un fermión de Dirac Σ,

$$\Sigma \equiv \chi - i\rho \ . \tag{4.15}$$

El lagrangiano del modelo se escribe, entonces, como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{N=1} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu N)(\partial^\mu N) + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - 4\lambda N^2|\phi|^2 \\
&- \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 + \frac{i}{2}\bar{\Sigma}\ \partial\!\!\!/\Sigma + \frac{i}{2}\bar{\psi}\ D\!\!\!\!/\psi - \sqrt{2\lambda}N\bar{\psi}\psi \\
&- \frac{e + \sqrt{8\lambda}}{4}(\bar{\psi}\Sigma\phi + h.c.) + \frac{e - \sqrt{8\lambda}}{4}(\bar{\psi}\Sigma^c\phi + h.c.) \ ,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde Σ^c es el conjugado de carga del espinor Σ y es obtenido, en la representación de Majorana, por simple conjugación compleja. Las leyes de transformación (4.12) y (4.13), por su parte, toman el siguiente aspecto:

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2}\left(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\Sigma + h.c.\right) \quad , \quad \delta N = \frac{1}{2}\left(\bar{\epsilon}\Sigma + h.c.\right) \tag{4.17}$$

[1]Los conjuntos de campos auxiliares en las representaciones de supersimetría $N = 1$ y $N = 2$ son muy diferentes y no pueden ser traducidos entre sí. Por esta razón, a fin de evidenciar la presencia de una supersimetría mayor en el lagrangiano, deben ser eliminados primero los campos auxiliares [44].

$$y \quad \delta\Sigma = -\left(H_\mu \gamma^\mu + \sqrt{2\lambda}(|\phi|^2 - v^2) + i\,\partial\!\!\!/ N\right)\epsilon \,. \tag{4.18}$$

La supersimetría del lagrangiano (4.16) será $N = 2$ extendida si las transformaciones (4.14), (4.17) y (4.18) continúan siendo simetrías cuando el parámetro ϵ es un espinor de Dirac. Esto es equivalente a pedir la invarianza supersimétrica para un ϵ que sea un espinor de Majorana, seguida de una rotación de fase fermiónica $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ y $\Sigma \to e^{i\alpha}\Sigma$. Entonces, la supersimetría extendida $N = 2$ puede ser obtenida requiriendo la conservación del número fermiónico - asociada a la invarianza frente a rotaciones de fase fermiónicas - en el lagrangiano supersimétrico (4.16). De este modo, probamos que la invarianza supersimétrica $N = 2$ tiene lugar en el modelo abeliano de Higgs en $2 + 1$ dimensiones, si y solo si

$$\lambda = \frac{e^2}{8} \,. \tag{4.19}$$

De hecho, bajo una rotación de fase, el término $\psi\Sigma^c\phi$ y su complejo conjugado adquieren una fase, $e^{2i\alpha}$ y $e^{-2i\alpha}$ respectivamente, violando la conservación de la carga fermiónica. La condición (4.19) asegura la anulación de estos términos a nivel del lagrangiano. Este resultado es natural: la ampliación de la simetría de la teoría exige ciertas condiciones sobre las constantes de acoplamiento, a fin de poder acomodar distintos multipletes $N = 1$ dentro de un único multiplete $N = 2$.

Para concluir, escribamos el lagrangiano del modelo abeliano de Higgs $N = 2$ supersimétrico:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N=2} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu N)(\partial^\mu N) + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \frac{e^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2 \\ &- \frac{e^2}{2}N^2|\phi|^2 + \frac{i}{2}\bar{\Sigma}\,\partial\!\!\!/\Sigma + \frac{i}{2}\bar{\psi}\,D\!\!\!\!/\,\psi - \frac{e}{2}N\bar{\psi}\psi - \frac{e}{2}(\bar{\psi}\Sigma\phi + h.c.) \end{aligned} \tag{4.20}$$

invariante frente a las transformaciones (4.14), (4.17) y (4.18), llevadas a cabo con un parámetro espinorial complejo ϵ.

4.2 Superálgebra $N = 2$ y Ecuaciones de Bogomol'nyi

En esta Sección demostraremos que la existencia de una cota de Bogomol'nyi en el modelo abeliano de Higgs es una consecuencia natural de la extensión que admite, dentro del sector bosónico de una teoría $N = 2$ supersimétrica.

Comenzaremos calculando la carga central del álgebra de supersimetría extendida en términos de los campos de la teoría. A tal fin, construimos la supercarga generadora de las transformaciones de supersimetría $N = 2$ (4.14), (4.17) y (4.18), usando el teorema de Noether. Según demostramos en la sección 3.4, la supercarga $N = 2$ puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^2x \left[\left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu}\gamma_\lambda + i \not{\partial} N - \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \right) \gamma^0 \Sigma \right. \\ &+ \left. \left(i(\not{D}\phi)^* - \frac{e}{2} N \phi^* \right) \gamma^0 \psi \right] . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Como nos interesa la conexión entre el álgebra de supercargas y las ecuaciones de Bogomol'nyi en el modelo abeliano de Higgs, consideraremos configuraciones bosónicas del sistema descrito por el lagrangiano (4.20) en las que el campo N es idénticamente nulo,

$$N = 0 , \tag{4.22}$$

e impondremos, al término de los cálculos algebraicos, la condición de que los campos fermiónicos se anulen. Así, dada una funcional $\mathcal{F}$ que depende de campos bosónicos y fermiónicos, llamaremos $\mathcal{F}|$ a dicha cantidad evaluada en un background puramente bosónico,

$$\mathcal{F}| \equiv \mathcal{F}|_{\{\Psi\}=0} . \tag{4.23}$$

Sobre configuraciones puramente bosónicas, las únicas transformaciones de supersimetría no-triviales resultan ser aquellas correspondientes a los campos fermiónicos. Por último, dado que las ecuaciones de Bogomol'nyi corresponden a configuraciones estáticas y eléctricamente neutras, $A_0 = 0$, imponemos estas condiciones en el sistema (dado que las transformaciones bosónicas son triviales sobre la configuración de interés, podemos imponer estas condiciones directamente sobre la supercarga). Podemos calcular, ahora, el álgebra descrita por la supercarga $N = 2$ (4.21) y su conjugada $\bar{Q}$,

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \int d^2x \left[\bar{\Sigma}\gamma^0 \left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu}\gamma_\lambda - i \not{\partial} N - \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \right) \right. \\ &+ \left. \overline{\psi}\gamma^0 \left(-i \not{D}\phi - \frac{e}{2} N \phi \right) \right] , \end{aligned} \tag{4.24}$$

y resulta:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} = (\gamma_0)_\alpha{}^\beta \mathcal{E} + \delta_\alpha{}^\beta Z \ , \tag{4.25}$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía de la configuración, escrita previamente en (2.42), mientras que la carga central Z está dada por:

$$Z = -\int d^2x \left[\frac{e}{2}\epsilon^{ij}F_{ij}(|\phi|^2 - v^2) + i\epsilon^{ij}(D_i\phi)(D_j\phi)^*\right] \ , \tag{4.26}$$

con $i, j = 1, 2$. La expresión de la carga central puede ser llevada a una integral de superficie. De hecho, el integrando en (4.26) es la divergencia de una funcional $\vec{\omega}$ que depende de los campos y sus derivadas espaciales,

$$\omega^i = \epsilon^{ij}\left(\frac{ev^2}{2}A_j + i\phi^* D_j\phi\right) \ . \tag{4.27}$$

Aplicando el teorema de Stokes, podemos escribir la carga central como una integral de contorno:

$$Z = \int \partial_i\omega^i d^2x = \frac{1}{2}\oint \epsilon^{ij}\omega_i dx_j \ . \tag{4.28}$$

Esto muestra que la carga central es puramente topológica. De hecho, las condiciones de energía finita garantizan que $D_i\phi \to 0$ suficientemente rápido en el infinito, por lo que

$$Z = \frac{ev^2}{2}\oint A_i dx^i = -\pi v^2 n = -\frac{M_A^2}{4\alpha}n \ , \tag{4.29}$$

donde n ($n \in Z$) caracteriza la clase de homotopía a la que pertenece la configuración, según vimos en el primer capítulo. Asi, la carga central del álgebra de supersimetría extendida resulta proporcional a la carga topológica del sistema.

La existencia de una identidad entre la carga central $N = 2$ y la carga topológica de un sistema, fue señalada originalmente en el modelo $SO(3)$ de Georgi y Glashow por Olive y Witten [13] y, más recientemente, en el modelo abeliano de Chern-Simons-Higgs por Lee, Lee y Weinberg [17]. Hlousek y Spector [18]-[47], analizaron esta relación en un contexto más general, probando que los modelos con una sola supersimetría que admiten la definición de una corriente topológica, poseen en realidad una segunda supersimetría de modo tal que la carga central del superálgebra coincide con la carga topológica de la configuración bosónica. Recordemos, sin embargo, que a fin de obtener un modelo con supersimetría extendida fue necesario imponer la condición (4.19), la misma que debe ser impuesta en el modelo abeliano de Higgs para hallar una cota de Bogomol'nyi. Asi, esta condición resulta inevitable tanto para alcanzar la supersimetría $N = 2$ como para obtener las ecuaciones de Bogomol'nyi. Un resultado análogo tiene lugar en la teoría de Chern-Simons-Higgs abeliana, en la que las condiciones necesarias para obtener las ecuaciones de Bogomol'nyi para vórtices autoduales [15, 16], son idénticas a las necesarias para la extensión supersimétrica [17]. En este último ejemplo, a la condición sobre las constantes de acoplamiento se agrega, interesantemente, una restricción sobre el perfil del potencial de Higgs, el que debe ser de sexto orden [17].

A la luz de lo discutido precedentemente, podemos enunciar nuestro resultado que extiende los de Hlousek y Spector a los modelos con ruptura espontánea de simetría, del siguiente modo:

Para teorías de gauge con ruptura espontánea de simetría que admiten la definición de una carga topológica y pueden ser sumergidas en el sector bosónico de una teoría supersimétrica, la extensión a una supersimetría $N = 2$ - que impone ciertas condiciones sobre las constantes de acoplamiento y el potencial de ruptura -, tiene una carga central directamente proporcional a la carga topológica [40].

Asi, el análisis de las Refs.[18]-[47] se mantiene en los casos en que la ruptura de simetría fuerza condiciones adicionales para la extensión supersimétrica, asi como para la obtención de ecuaciones de Bogomol'nyi.

Probemos, ahora, que el álgebra de supersimetría extendida impone la cota de Bogomol'nyi. Si multiplicamos la ecuación (4.25) por el proyector $\mathcal{P}_\pm \equiv (1 \pm \gamma^0)/2$ y tomamos la traza, obtenemos:

$$\{Q_{(\pm)\alpha}, \bar{Q}^\alpha_{(\pm)}\} = \mathcal{E} \mp \frac{M_A^2}{4\alpha} n \ , \tag{4.30}$$

donde $Q_{(\pm)\alpha}$ es la proyección de la supercarga por el operador $\mathcal{P}_\pm$. Tomando el valor de expectación de (4.30) en un estado arbitrario, obtenemos la cota Bogomol'nyi sobre la energía de las configuraciones,

$$\mathcal{E} \geq \pm \frac{M_A^2}{4\alpha} n \ , \tag{4.31}$$

que coincide exactamente con la hallada anteriormente (2.54) por un camino totalmente distinto.

Por construcción, resulta evidente que las configuraciones que saturan la cota de Bogomol'nyi, son aquellas sobre las que se anulan las supercargas espinoriales proyectadas $Q_{(+)\alpha}$ o $Q_{(-)\alpha}$, según el signo que aparezca en (4.31). Equivalentemente, las transformaciones generadas por estas supercargas sobre todos los campos de la teoría, deben anularse en el background establecido por tales configuraciones. A partir de las leyes de transformación supersimétricas (4.14), (4.17) y (4.18), resulta inmediato que la condición anterior se verifica toda vez que la configuración de campos bosónicos satisfaga el siguiente conjunto de ecuaciones de primer orden:

$$\mathcal{F} = \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \quad y \quad D_z\phi = 0 \ , \tag{4.32}$$

o, alternativamente,

$$\mathcal{F} = -\frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \quad y \quad D_{\bar{z}}\phi = 0 \ , \tag{4.33}$$

según se opere con $Q_{(+)\alpha}$ o $Q_{(-)\alpha}$. Reconocemos inmediatamente en (4.32) y (4.33) a las ecuaciones de Bogomol'nyi (2.56) y (2.57) del modelo abeliano de Higgs presentadas en el Capítulo 2. Sus soluciones resuelven, naturalmente, el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange estáticas.

Dada una configuración del sistema que sea solución de las ecuaciones de Bogomol'nyi (2.56), resulta ahora evidente que las transformaciones de supersimetría generadas por $Q_{(+)}$ la dejan invariante. En cambio, si hacemos actuar al generador restante $Q_{(-)}$ sobre la solución de estas ecuaciones, obtenemos como resultado una configuración que ni siquiera pertenece al sector bosónico de la teoría, ya que:

$$\delta_{(-)}\Sigma = e(|\phi|^2 - v^2)\epsilon_- \neq 0 \quad , \quad \delta_{(-)}\psi = D_{\bar{z}}\phi\epsilon_- \neq 0 \ . \tag{4.34}$$

Tal como habíamos señalado anteriormente, la mitad de las supersimetrías se rompen sobre la configuración de vórtice que satura la cota de Bogomol'nyi. Más aún, la cantidad (4.34) no es más que el modo cero fermiónico de Nambu-Goldstone, correspondiente a la supersimetría rota, en el background solitónico. Este modo cero es normalizable debido al característico decaimiento exponencial del campo de Higgs lejos del "núcleo" del vórtice. El espectro solitónico se obtiene cuantificando el modo cero fermiónico. Aparece, asi, un par de operadores $b^\dagger$ y b correspondientes al modo cero, que obedecen el álgebra:

$$\{b^\dagger, b\} = 1 \quad , \quad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0 \ , \tag{4.35}$$

creando y destruyendo un modo cero fermiónico que, por supuesto, aporta un grado de libertad espinorial pero no contribuye a la energía de la configuración. De esta manera se puede construir el supermultiplete dentro del cual transforma el vórtice que satura la cota de Bogomol'nyi. Se trata de un supermultiplete "corto", de modo que el valor obtenido previamente para su masa resulta, en principio, exacto a nivel cuántico.

4.3 Elementos Generales de la Construcción

Podemos describir el esquema seguido en la Sección anterior en términos más generales de modo que resulte evidente su aplicabilidad en otros modelos. Nos restringiremos, por simplicidad, al caso de sistemas tridimensionales. La extensión de nuestro esquema a modelos de mayor dimensionalidad (en particular, a sistemas realistas en $3+1$-dimensiones), es inmediata.

Sea, entonces, una teoría de campos en $2+1$ que admite soluciones clásicas con topología no-trivial en el sentido descrito en el capítulo 2. Siempre es posible sumergir el lagrangiano de esta teoría en el sector bosónico de algún modelo supersimétrico. Para ello, introducimos un supercampo para cada campo presente en el lagrangiano de interacción $\mathcal{L}_{int}$ que queremos supersimetrizar. Mediante la aplicación de derivadas supercovariantes apropiadas, siempre es posible obtener un supercampo en el cual el campo original aparezca como la componente más baja en el desarrollo en potencias de θ ($\theta = 0$), al que denominamos supercampo asociado al campo en cuestión [48]. Reemplazando cada campo en $\mathcal{L}_{int}$ por su supercampo asociado, se obtiene una expresión $\mathcal{L}^S_{int}$, evaluada en el superespacio, que tiene a $\mathcal{L}_{int}$ como componente más baja.

Podemos introducir un supercampo adicional Ξ con un término cuadrático acompañado de un acoplamiento $\Xi\sqrt{\mathcal{L}^S_{int}}$ (la raíz cuadrada no es fuente de problemas ya que una serie de Taylor en variables de Grassmann siempre termina). Por otra parte, como estamos pensando en un uso de la supersimetría como una herramienta para responder cuestiones clásicas en el sistema puramente bosónico, no nos preocupamos por cuestiones como la renormalizabilidad de la teoría supersimétrica. Resulta inmediato ver que la eliminación del campo auxiliar que se encuentra en la componente más alta de Ξ, dará lugar al lagrangiano de interacción deseado, más otros términos que se anulan sobre configuraciones de la teoría bosónica de interés. Del mismo modo, la funcional que da la energía de la teoría extendida se reduce a la de la teoría original cuando es evaluada sobre estas configuraciones.

La teoría considerada, por hipótesis, admite la definición de una corriente topológica conservada J_μ. Al hacer la teoría supersimétrica, esta corriente formará parte de la expansión de un supercampo espinorial de corriente $\mathcal{J}_\alpha$,

$$\mathcal{J} = \eta + i(\gamma^\mu\theta)J_\mu - \bar{\theta}\theta \not{\partial}\eta \ , \tag{4.36}$$

de modo que la ley de conservación $\partial_\mu J^\mu = 0$ puede ser escrita de modo supercovariante como $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{J} = 0$. Del mismo modo en que la corriente topológica puede ser escrita en términos de un potencial, $J_\mu = \epsilon_{\mu\sigma\lambda}\partial^\sigma A^\lambda$, la supercorriente puede ser representada en términos de un supercampo espinorial $\mathcal{H}_\alpha$ según:

$$\mathcal{J}_\alpha = \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}_\alpha\mathcal{H} \ . \tag{4.37}$$

Las expresiones anteriores presentan una invarianza, $\mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_\alpha + \mathcal{D}_\alpha\Omega$, que nos permite realizar un fijado de gauge mediante la condición $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{H} = 0$. Si definimos ahora un nuevo supercampo Σ^μ,

$$\Sigma^\mu \equiv \mathcal{D}^\alpha(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\mathcal{H}^\beta \ , \tag{4.38}$$

veremos que J_μ aparece en él como la comonente más alta. Más aún, es inmediato probar que Σ_μ describe un multiplete de corrientes conservadas,

$$\Sigma^\mu = V^\mu + \theta^\alpha S^\mu_\alpha - \bar{\theta}\theta J^\mu \quad , \quad \partial_\mu\Sigma^\mu = 0 \ . \tag{4.39}$$

Es imprescindible, a continuación, indagar la naturaleza de la corriente espinorial conservada S^μ_α que aparece en la construcción anterior. De acuerdo al teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius [43], esta corriente es trivial (sobre los estados físicos), o bien es la supercorriente de la teoría $N = 1$ o, por último, se trata de una nueva supercorriente que corresponde a una supersimetría adicional de la teoría. Ahora bien, la ecuación (4.39) nos indica que la transformada de esta supercorriente, generada por la supersimetría original del modelo,

$$\{Q_\alpha, S^\mu_\alpha\} = J_\mu, \tag{4.40}$$

resulta ser la corriente topológica. De este modo, sólo la tercera posibilidad puede ser correcta: *la teoría admite una segunda supersimetría.* Más aún, la integral espacial de la componente temporal de la ecuación (4.40) da lugar a la identidad entre la carga central del álgebra supersimétrica extendida y la carga topológica (apropiadamente normalizada) de la configuración clásica considerada[2]. La extensión $N = 2$ supersimétrica de la teoría que admite configuraciones clásicas con topología no-trivial, tiene a la carga topológica por carga central. De este modo, la existencia de una cota de Bogomol'nyi resulta inmediata.

Este argumento puede ser extendido a dimensiones mayores [18] de manera sencilla. En cambio, no es válido, en principio, para sistemas de menor dimensionalidad. En teorías bidimensionales, por ejemplo, pueden aparecer cargas centrales aún en el caso de supersimetría simple, y no resultan necesariamente iguales a la carga topológica. Tal es el caso del modelo de seno-Gordon [12, 13], cuyas soluciones topológicas son denominadas 'kinks', que admite una supersimetría simple en la que aparece una carga central igual a la carga topológica de la configuración módulo 2, en lugar de la carga topológica a secas. En la Ref.[18] se argumenta que este hecho se debe, fundamentalmente, a que el potencial de la corriente topológica resulta un campo escalar en dos dimensiones, ya que los supercampos asociados no resultan suficientemente constreñidos. En la sección siguiente consideraremos un modelo bidimensional en el que impondremos la construcción descrita en las primeras dos secciones para hallar una cota de Bogomol'nyi de la acción, saturada por soluciones instantónicas. Discutiremos, posteriormente, como se compatibiliza este resultado con las objeciones planteadas en este parágrafo.

4.4 Caso bidimensional: el instantón

Demostraremos en esta Sección, en forma explícita, el funcionamiento del esquema discutido precedentemente, en un modelo en dos dimensiones euclídeas en el que las soluciones topológicas resultan ser instantones. La conexión entre la supersimetría y las ecuaciones de Bogomol'nyi (tambien conocidas como ecuaciones de autodualidad) en modelos bidimensionales, resultan de

[2]La interpretación de la corriente V_μ es simple; resulta de la invarianza frente a transformaciones del grupo $O(2)$ que toda teoría supersimétrica $N = 2$ posee en $2 + 1$. Este grupo actúa en el espacio de supercargas tratándolas como miembros de un doblete.

particular interés en el contexto de las teorías gravitatorias: un modelo que describa a la gravedad acoplada a la materia en $d = 2$ puede ser construido a partir de teorías topológicas en las que las ecuaciones de autodualidad juegan un papel central [49]. En este contexto, tal como ocurre en el estudio de soluciones de agujero negro tetradimensionales [23], la supersimetría puede aportar un marco natural para analizar propiedades clásicas y cuánticas del sistema.

El modelo que estudiaremos a continuación, introducido originalmente en la Ref.[12], resulta descrito por (el sector bosónico de) el siguiente lagrangiano $N = 1$ supersimétrico:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{N=1} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu P)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu M)^2 - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\vec{\Phi})^2 + \frac{1}{2}e^2P^2\vec{\Phi}^2 \\
&+ \frac{i}{2}\rho\ \not{\partial}\rho + \frac{i}{2}\vec{\psi}\cdot \not{\mathcal{D}}\vec{\psi} + \frac{i}{2}\chi\ \not{\partial}\chi - \frac{ie}{2}\vec{\psi}\wedge\vec{\psi}P + ie\vec{\psi}\wedge\gamma_5\rho\vec{\Phi} \qquad (4.41) \\
&- i\sqrt{2\lambda}M\vec{\psi}\cdot\gamma_5\vec{\psi} - i2\sqrt{2\lambda}\vec{\Phi}\cdot\vec{\psi}\gamma_5\chi - 4\lambda M^2\vec{\Phi}^2 - \lambda(\vec{\Phi}^2 - {\Phi_0}^2)^2\ ,
\end{aligned}$$

en el que $\vec{\Phi}$ es un doblete (real) de campos de Higgs en la representación adjunta de $SO(2)$, $\vec{\psi}$ es un doblete de fermiones de Majorana, ρ y χ son fermiones de Majorana y M (P) es un escalar (pseudoescalar) real. Se entiende que $\vec{\psi}\cdot\vec{\Phi}$ significa $\psi^a\Phi^a$, mientras que $\vec{\psi}\wedge\vec{\Phi}$ no es más que el pseudoescalar $\epsilon^{ab}\psi^a\Phi^b$. Por una argumentación análoga a la establecida en la sección 4.1, la condición (4.19) resulta necesaria para la imposición de una segunda supersimetría en el sistema. Asi, podemos acomodar nuevamente a los fermiones de Majorana χ y ρ dentro de un espinor de Dirac $\Sigma = \rho + i\gamma_5\chi$ y, tras imponer la condición (4.19), verificar que el conjunto siguiente de transformaciones $N = 2$ deja invariante a la acción:

$$\begin{aligned}
\delta_1\psi^a &= \left[\delta^{ab}(\not{\mathcal{D}} + eP\gamma_5) - eM\epsilon^{ab}\right]\Phi^b\ \ ,\ \ \delta_1\Phi^a = i\psi^a\ \ ,\ \ \delta_2\Phi^a = -i\epsilon^{ab}\gamma_5\psi^b, \\
\delta_2\psi^a &= \gamma_5\left[\epsilon^{ab}(\not{\mathcal{D}} + eP\gamma_5) - eM\delta^{ab}\right]\Phi^b\ \ ,\ \ \delta_a M = i^{2a+1}\epsilon_{ab}\gamma_5\Sigma^b, \\
\delta_a\Sigma^a &= (-1)^{a+1}\gamma_5\ \not{\partial}P - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\ \ ,\ \ \delta_a A_\mu = -i\gamma_5\gamma_\mu\Sigma^a, \\
\delta_a\Sigma^b &= \epsilon^{ab}\gamma_5\ \not{\partial}M + \frac{e}{2}(\vec{\Phi}^2 - {\Phi_0}^2)\ \ ,\ \ \delta_a P = -i\gamma_5\Sigma^a, \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

donde hemos separado explícitamente las transformaciones frente a cada una de las supersimetrías, $\delta\phi = \delta_1\phi\eta^1 + \delta_2\phi\eta^2$. Resulta inmediato verificar que la anulación de las transformaciones de supersimetría generadas por $Q_{(+)\alpha}$ y $Q_{(-)\alpha}$, en un background puramente bosónico, da lugar al sistema:

$$(\delta_1 \pm \delta_2)\vec{\psi} = 0 \quad \text{y} \quad (\delta_1 \pm \delta_2)\vec{\Sigma} = 0 \ , \tag{4.43}$$

que no es otra cosa que el conjunto de las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo descrito por el sector bosónico del lagrangiano (4.42):

$$P = \mp M \quad , \quad \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \pm e(\vec{\Phi}^2 - {\Phi_0}^2) \quad \text{y} \quad \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^{ab}\mathcal{D}_\nu \Phi^b = \pm \mathcal{D}_\mu \Phi^a \ . \tag{4.44}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones saturan una cota de la acción instantónica.

La obtención de las ecuaciones de Bogomol'nyi y de la cota correspondiente para la acción euclídea por un método análogo al presentado anteriormente, no es más que una huella de origen del modelo discutido: proviene de la reducción dimensional del modelo abeliano de Higgs. El lagrangiano (4.42) puede ser obtenido por reducción dimensional, partiendo del lagrangiano (4.8), incluyendo la identificación $A_0 \equiv P$. De este modo, podemos imaginar el proceso inverso mediante el cual agregamos a la teoría bidimensional una coordenada extra temporal, asi como todos los campos adicionales que sean necesarios para converger a un sistema estático en $2+1$ dimensiones. Entonces, el número instantónico de la teoría en dos dimensiones I_2 se convierte en una carga topológica conservada para los solitones (vórtices) de la teoría $2+1$ dimensional T_{2+1},

$$I_2 = T_{2+1} \ . \tag{4.45}$$

Por otra parte, es evidente que, identificando a cada configuración instantónica de la teoría bidimensional con una solución estática solitónica de la teoría tridimensional en la que los eventuales campos adicionales se anulan, la acción euclídea de la primera S_2 resultará idéntica a la energía del vórtice correspondiente E_{2+1},

$$S_2 = E_{2+1} \ . \tag{4.46}$$

Entonces, la cota de Bogomol'nyi de la acción euclídea del sistema bidimensional resulta como corolario de la existencia de una cota análoga en el modelo de dimensión mayor,

$$E_{2+1} \geq |T_{2+1}| \Longrightarrow S_2 \geq |I_2| \ , \tag{4.47}$$

que a su vez proviene, según hemos demostrado, de la presencia de una supersimetría extendida subyacente al modelo.

Este esquema puede ser repetido para cualquier número de dimensiones superior a 2 [48], y permite extender todas las conclusiones de las secciones anteriores al caso instantónico. Debemos notar, sin embargo, que la argumentación precedente no puede ser utilizada cuando la teoría euclídea posee términos que contienen expresiones específicas de su dimensionalidad como, por ejemplo, tensores de Levi-Civita.

Capítulo 5

Nociones de Supergravedad

5.1 Introducción

La supergravedad es la teoría de gauge que resulta de imponer la supersimetría como una invarianza local. Un hecho notable, al que debe su nombre, es que una simetría de gauge de este tipo entre fermiones y bosones sólo puede ser implementada en una teoría de campos si el espacio-tiempo es curvo y, por lo tanto, la gravedad está presente. Esto puede ser entendido de un modo simple recordando que, de acuerdo con el álgebra de supercargas, dos transformaciones de supersimetría sucesivas dan lugar a una traslación. Consecuentemente, si imponemos la invarianza supersimétrica como una simetría local, la teoría correspondiente resultará invariante ante traslaciones locales o, lo que es lo mismo, transformaciones generales de coordenadas. La teoría de gauge de la supersimetría contiene así a la gravedad y es, por lo tanto, conocida como supergravedad [50, 51].

Las teorías de supergravedad dan una descripción unificada, a nivel cuántico, de la gravitación y las restantes interacciones. Esta unificación se extiende hasta el principio general sobre el cuál se construyen estas interacciones: la invarianza de gauge. Si damos rango de invarianza local a N supersimetrías admitidas por un modelo, resulta una teoría de supergravedad N-extendida. El primer modelo estudiado con supergravedad extendida $N = 2$ por Ferrara y van Nieuwenhuizen en 1977 [52], unifica el electromagnetismo con la gravedad adicionando un gravitino complejo al fotón y al gravitón. En este mismo modelo se comprobó explícitamente la cancelación entre los diagramas divergentes de la teoría de Maxwell-Einstein pura, y aquellos nuevos diagramas que contienen gravitinos en las líneas internas.

El estudio de algunos aspectos formales de las teorías de supergravedad extendida, puede brindar respuestas, inclusive, a problemas abiertos en el contexto de las teorías gravitatorias. Un ejemplo notable lo constituye la demostración de la positividad de la energía en la teoría de la relatividad general llevada a cabo por Deser y Teitelboim [53], a partir de la observación hecha por Teitelboim [54] según la cuál el Hamiltoniano cuántico de la supergravedad puede escribirse como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\hbar} tr \mathcal{Q}^2 \ , \tag{5.1}$$

donde $\mathcal{Q}$ es la supercarga. De este modo, el límite $\hbar \to 0$ de la expresión anterior resulta en el teorema de la positividad de la energía en la relatividad general [55]. Inspirado por estos argumentos, Witten [56] dio una prueba elegante y rigurosa del mismo. Posteriormente, Horowitz y Strominger [57], Deser [58] y Teitelboim [59] mostraron que estos resultados derivan del uso de la supergravedad como una herramienta de cálculo poderosa para investigar la estructura de las teorías clásicas de la gravitación.

Más recientemente, la supergravedad ha sido utilizada para estudiar problemas de interés en el ámbito de la cosmología como el de la constante cosmológica [24] y el cálculo microscópico de la entropía de Bekenstein-Hawking [60, 61] en ciertos agujeros negros que son solución, a bajas energías, de la teoría de supercuerdas [27, 28, 29]. Contagiados de este espíritu, también los resultados de esta Tesis grafican la enorme utilidad que puede tener el estudio de teorías supergravitatorias para la comprensión de fenómenos que se presentan en teorías gravitatorias no-supersimétricas.

El campo de gauge correspondiente a la supersimetría local ha de ser fermiónico y tener, asimismo, un índice Lorentz vectorial: lo denotaremos como Ψ_M. Una transformación infinitesimal de supergravedad sobre dicho campo toma la forma

$$\delta\Psi_M = \frac{2}{\kappa}\mathcal{D}_M\epsilon \ , \tag{5.2}$$

con $\mathcal{D}_M\epsilon$ la derivada supercovariante del parámetro espinorial. Ψ_M es un campo de Majorana de espín 3/2 llamado gravitino ya que pertenece al mismo multiplete que el tensor simétrico de dos índices g_{MN} que describe al campo del gravitón (de espín 2). El conteo de grados de libertad "off-shell" (sin haber eliminado a los campos auxiliares a través de sus ecuaciones de movimiento algebraicas), indica que deben existir campos auxiliares en el supermultiplete que compensen la diferencia entre los grados de libertad bosónicos y fermiónicos. Existen diversos conjuntos de campos auxiliares que cumplen con tal condición. Trabajaremos en la formulación mínima, en la que no aparecen espinores auxiliares, y los grados de libertad bosónicos son provistos por un campo escalar M, un campo pseudoescalar N y un pseudovector b_M.

5.2 Elementos Geométricos

No existen representaciones del grupo de transformaciones generales de coordenadas que se comporten como espinores frente al subgrupo de Lorentz [62]. Por este motivo, dado que las teorías de supergravedad incluyen campos fermiónicos como el gravitino, los campos de materia y los compañeros supersimétricos de los bosones mediadores, una formulación que permita resolver este punto es necesaria. Para ello, definimos en cada punto x del espacio-tiempo, un conjunto de coordenadas $\xi_x^A(x)$, localmente inerciales en dicho punto. Podemos, entonces, escribir la métrica en un sistema de coordenadas genérico (no-inercial) como:

$$g_{MN}(x) = V_M^A(x) V_N^B(x) \eta_{AB} \ , \tag{5.3}$$

donde hemos introducido la cantidad $V_M^A(x)$ que resulta

$$V_M^A(x) = \frac{\partial \xi_x^A(x)}{\partial x^M} \ . \tag{5.4}$$

Denotamos los índices espacio-temporales "curvos" con letras mayúsculas de la segunda mitad del alfabeto $M, N, R, \ldots$, mientras que utilizamos la primera mitad $A, B, C, \ldots$ para caracterizar a los índices "planos", referidos al sistema de coordenadas localmente inercial $\xi_x^A(x)$ en cada punto x del espacio-tiempo. Fijadas las coordenadas localmente inerciales $\xi_x^A(x)$ en cada punto, las derivadas parciales $V_M^A(x)$ cambian frente a una transformación general de coordenadas no-inerciales: $x^M \to x'^M$, de acuerdo a la regla:

$$V_M^A \longrightarrow V'^A_M = \frac{\partial x^N}{\partial x'^M} V_N^A \ . \tag{5.5}$$

Es decir, las cantidades $V_M^A(x)$ definen un conjunto de 4 campos vectoriales covariantes al que se lo suele llamar tétrada o "vierbein". Dado un campo vectorial contravariante $A^M(x)$, podemos utilizar la tétrada para referir sus componentes en el punto x al sistema de coordenadas localmente inercial $\xi_x^A(x)$:

$$A^A(x) = V_M^A(x) A^M(x) \ . \tag{5.6}$$

Notemos que las cantidades $A^A(x)$ son campos escalares. Podemos hacer lo mismo con campos vectoriales covariantes y, en general, con campos tensoriales según:

$$A_A(x) = V_A^M(x) A_M(x) \quad , \quad B^A{}_B(x) = V_N^A(x) V_B^M(x) B^N{}_M(x) \quad \ldots \tag{5.7}$$

donde $V_B^N(x)$,

$$V_B^N(x) = \eta_{AB} g^{MN}(x) V_M^A(x) \ , \tag{5.8}$$

es, simplemente, la inversa de la tétrada:

$$V_B^M(x) V_N^B(x) = \delta_N^M \qquad \text{y} \qquad V_M^A(x) V_B^M(x) = \delta^A{}_B \ . \tag{5.9}$$

Una vez que hemos definido un sistema de coordenadas localmente inerciales en cada punto del espacio-tiempo, los campos espinoriales pueden ser introducidos en el formalismo sin que sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz entren en conflicto con la invarianza frente a transformaciones generales de coordenadas. Dado que la física no puede depender del sistema de referencia inercial elegido en cada punto, las ecuaciones de movimiento y la acción deben ser invariantes con respecto a redefiniciones de estos sistemas de coordenadas localmente inerciales en cada punto del espacio-tiempo. En otras palabras, la acción debe ser invariante frente a transformaciones de Lorentz locales $\Lambda^A{}_B(x)$ que actúan sobre los campos de la teoría de acuerdo a sus índices localmente inerciales:

$$A^A(x) \longrightarrow \Lambda^A{}_B(x) A^B(x) \quad , \quad B^A{}_B(x) \longrightarrow \Lambda^A{}_C(x) \Lambda_B{}^D(x) B^C{}_D(x) \quad \ldots \tag{5.10}$$

donde, claro está,

$$\eta_{AB} \Lambda^A{}_C(x) \Lambda^B{}_D(x) = \eta_{CD} \ . \tag{5.11}$$

En general, un campo $\Phi_n(x)$ transformará de acuerdo a la regla:

$$\Phi_n(x) \longrightarrow \Phi'_n(x) = \sum_m \left[D(\Lambda(x)) \right]_{nm} \Phi_m(x) \ , \tag{5.12}$$

donde $D(\Lambda(x))$ es una representación del grupo de Lorentz infinitesimal para cada punto del espacio-tiempo. De este modo, cada campo de la teoría resulta definido por sus propiedades de transformación tanto frente a las transformaciones generales de coordenadas, como frente al grupo de Lorentz local que resulta de cambiar la elección del sistema de coordenadas localmente inercial. Así, el campo de Dirac, por ejemplo, se comporta como un escalar frente a transformaciones generales de coordenadas y un espinor de Lorentz, mientras que la tétrada V_M^A es un vector coordenado, así como un vector de Lorentz. La acción, claro está, debe ser un escalar coordenado y Lorentziano.

Para poder escribir, en esta formulación, una densidad Lagrangiana apropiada, debemos definir la diferenciación covariante sobre los campos. Si definimos la derivación en el sistema de coordenadas localmente inercial a través de la expresión

$$\partial_A \equiv V_A^M \frac{\partial}{\partial x^M} , \tag{5.13}$$

las propiedades de transformación frente al grupo de Lorentz local no son apropiadas, aunque desde el punto de vista de las transformaciones generales de coordenadas (5.13) represente un conjunto de campos escalares. En efecto,

$$\partial_A \Phi_n(x) \longrightarrow \Lambda_A{}^B(x) \sum_m \left[D(\Lambda(x)) \partial_B + V_B^M \frac{\partial D(\Lambda(x))}{\partial x^M} \right]_{nm} \Phi_m(x) . \tag{5.14}$$

de modo que, a fin de construir un operador diferencial $\mathcal{D}_A$ que resulte un escalar coordenado y un vector frente a transformaciones de Lorentz,

$$\mathcal{D}_A \Phi_n(x) \longrightarrow \Lambda_A{}^B(x) \sum_m \left[D(\Lambda(x)) \right]_{nm} \mathcal{D}_B \Phi_m(x) , \tag{5.15}$$

debemos introducir una conexión matricial $\tilde{\Omega}_A(x)$, cuya transformación de Lorentz local contenga un término inhomogéneo que cancele al segundo término del miembro derecho de la ecuación (5.14):

$$\tilde{\Omega}_A(x) \longrightarrow D(\Lambda(x)) \tilde{\Omega}_A(x) D^{-1}(\Lambda(x)) - V_A^M(x) \frac{\partial D(\Lambda(x))}{\partial x^M} D^{-1}(\Lambda(x)) . \tag{5.16}$$

Para conocer la estructura de la matriz $\tilde{\Omega}_A(x)$, podemos considerar transformaciones de Lorentz infinitesimales, en cuyo caso la matriz $D(\Lambda(x))$ toma la forma:

$$D(\Lambda(x)) = 1 + \frac{1}{2} \omega_{AB}(x) \Sigma^{AB} , \tag{5.17}$$

donde $\omega_{AB}(x) = -\omega_{BA}(x)$ es el parámetro de la transformación y Σ^{AB} son un conjunto de matrices constantes que satisfacen el álgebra de Lorentz (3.2). Finalmente, utilizando las propiedades de transformación de la tétrada en tanto vector de Lorentz, podemos deducir la siguiente expresión para la conexión $\tilde{\Omega}_A(x)$:

$$\tilde{\Omega}_A(x) = \frac{1}{2}\Sigma^{BC} V_B^N(x) V_A^M(x) \nabla_M V_{CN}(x) , \tag{5.18}$$

donde

$$\nabla_M V_{CN} \equiv \frac{\partial V_{CN}}{\partial x^M} - \Gamma^L_{MN} V_{CL} \tag{5.19}$$

es la derivada covariante (frente a transformaciones generales de coordenadas). Γ^L_{MN} son los símbolos de Christoffel correspondientes a la métrica del espacio-tiempo según:

$$\Gamma^L_{MN} = \frac{1}{2} g^{LP} \left[\frac{\partial g_{PN}}{\partial x^M} + \frac{\partial g_{PM}}{\partial x^N} - \frac{\partial g_{MN}}{\partial x^P} \right] . \tag{5.20}$$

Finalmente, hemos encontrado una expresión para la derivada covariante frente al grupo de Lorentz local

$$\mathcal{D}_A = V_A^M \mathcal{D}_M = V_A^M \left(\frac{\partial}{\partial x^M} + \frac{1}{4}\tilde{\Omega}_{MAB}(x)\Sigma^{AB} \right) , \tag{5.21}$$

introduciendo un campo de gauge $\tilde{\Omega}_{MAB}$ asociado a dicha simetría,

$$\tilde{\Omega}_{MAB}(x) = V_A^N(x) \nabla_M V_{BN}(x) - V_B^N(x) \nabla_M V_{AN}(x) , \tag{5.22}$$

que recibe el nombre de conexión espinorial. Haciendo uso de las ecuaciones (5.3) y (5.19), podemos escribir dicha conexión puramente en términos del campo de tétrada según:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{MAB}(V) &= \frac{1}{2} V_A^N \left(\partial_M V_{BN} - \partial_N V_{BM} \right) - \frac{1}{2} V_B^N \left(\partial_M V_{AN} - \partial_N V_{AM} \right) \\ &- \frac{1}{2} V_A^R V_B^S V_M^C \left(\partial_R V_{CS} - \partial_S V_{CR} \right) . \end{aligned} \tag{5.23}$$

En ausencia de torsión, el conmutador de estas derivadas covariantes está relacionado con la curvatura de las rotaciones espinoriales [63]

$$[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] = \frac{1}{4} R_{MN}{}^{AB} \Sigma_{AB} , \tag{5.24}$$

que, a su vez, verifica la siguiente identidad con el tensor de Riemann del espacio-tiempo:

$$R_{MNRS} = R_{MN}{}^{AB} V_{AR} V_{BS} \ . \tag{5.25}$$

Si contraemos índices en el miembro derecho de la ecuación anterior, llegamos a una expresión para el escalar de curvatura $\mathcal{R}$ en términos del campo de tétrada y de la conexión espinorial:

$$\mathcal{R}(V, \tilde{\Omega}) = R_{MN}{}^{AB}(\tilde{\Omega}(V)) V_B^N V_A^M \ . \tag{5.26}$$

En esta formulación, consideraremos a la tétrada como el campo que describe la geometría del espacio-tiempo (es decir, la gravitación).

5.3 Supergravedad Pura

Consideraremos brevemente en esta sección, la construcción de la teoría de supergravedad pura en un espacio-tiempo tetradimensional. Dado que el gravitino es el campo de gauge de la supersimetría local, sabemos que su ley de transformación debe estar dada por la ecuación (5.2), en la que la derivada $\mathcal{D}_M$ puede ser escrita en términos de la conexión espinorial,

$$\delta \Psi_M = \frac{2}{\kappa} \left(\partial_M + \frac{1}{4} \tilde{\Omega}_{MAB} \Sigma^{AB} \right) \epsilon \ . \tag{5.27}$$

Además, dado que el parámetro anticonmutante ϵ es un espinor de Majorana, el generador de las transformaciones de Lorentz que aparece en la ecuación anterior puede ser escrito en términos de los elementos del álgebra de Clifford como:

$$\Sigma^{AB} = \frac{1}{2}(\Gamma^A \Gamma^B - \Gamma^B \Gamma^A) \ . \tag{5.28}$$

Un lagrangiano que resulte invariante frente a la transformación (5.27), puede ser obtenido de manera sencilla covariantizando el término de Rarita-Schwinger utilizado para describir la dinámica de campos de espín 3/2 como el gravitino:

$$\mathcal{L}_\Psi = -\frac{1}{2} \epsilon^{MNRS} \bar{\Psi}_M \Gamma_5 \Gamma_N \mathcal{D}_R \Psi_S \ . \tag{5.29}$$

Las matrices $\Gamma^M(x)$ se obtienen a partir de los generadores del álgebra de Clifford por medio de la tétrada:

$$\Gamma^M(x) = V_A^M(x) \Gamma^A \ . \tag{5.30}$$

El lagrangiano (5.29) es invariante frente a las transformaciones (5.27) sólo si el campo gravitacional satisface las ecuaciones de Einstein sin fuentes. Esto se debe a la necesidad de introducir el término cinético de la tétrada,

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2\kappa^2} V \mathcal{R}(V, \tilde{\Omega}) \ , \tag{5.31}$$

que corresponde al lagrangiano de Einstein (V es el determinante de la tétrada). Dado que la tétrada es el campo bosónico del multiplete de Einstein cuyos estados no-masivos poseen la máxima helicidad posible, su ley de transformación supersimétrica sólo puede tomar la siguiente forma en términos del campo de gravitino:

$$\delta V_M^A = \kappa \bar{\epsilon} \Gamma^A \Psi_M \ . \tag{5.32}$$

El lagrangiano total $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Psi + \mathcal{L}_V$ resulta invariante supersimétrico frente al conjunto de transformaciones locales (5.27) y (5.32). Es evidente que, la conexión espinorial puramente bosónica dada en (5.22) no resulta supercovariante. En presencia de supersimetría la deducción que nos llevó a su obtención debe ser modificada ligeramente a fin de tener en cuenta dicha invarianza. Aparece, entonces, una contribución fermiónica en la conexión espinorial, que adquiere la siguiente expresión:

$$\Omega_{MAB}(V, \Psi) = \tilde{\Omega}_{MAB}(V) + \frac{\kappa^2}{4} \left(\bar{\Psi}_M \Gamma_A \Psi_B + \bar{\Psi}_A \Gamma_M \Psi_B - \bar{\Psi}_M \Gamma_B \Psi_A \right) \ . \tag{5.33}$$

La (super)conexión espinorial $\Omega_{MAB}(V, \Psi)$ es una cantidad supercovariante. La contribución fermiónica adicionada en (5.33), proporciona torsión al espacio-tiempo. Esto resulta evidente del cálculo del conmutador de dos derivadas supercovariantes escritas en términos de la superconexión espinorial Ω_{MAB}:

$$[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] = \frac{1}{4} R_{MN}{}^{AB} \Sigma_{AB} + \frac{1}{2} R_{MN}^{A} \mathcal{D}_A \ , \tag{5.34}$$

en el que aparece un término de torsión $R_{MN}^{A}(V, \Psi)$,

$$R_{MN}^{A}(V, \Psi) = \frac{\kappa^2}{2} V_M^B V_N^C \bar{\Psi}_B \Gamma^A \Psi_c \ . \tag{5.35}$$

La inclusión del término de torsión en la conexión espinorial sólo modifica al lagrangiano de supergravedad pura y sus correspondientes transformaciones a través de la corrección que introduce en la superderivada covariante.

Hemos construido, de esta manera, la teoría de supergravedad pura, pero en su versión "on-shell" (sin campos auxiliares, de modo que el álgebra de supersimetría cierra únicamente sobre las ecuaciones de movimiento). A fin de poder construir, en la próxima sección, acciones invariantes frente a supersimetría local que contengan a otros multipletes, introducimos los campos auxiliares de la formulación mínima: M, N y b_M. Al tratarse de campos auxiliares, sus leyes de transformación supersimétricas deben ser tales que se anulen sobre las ecuaciones de movimiento. Esto restringe considerablemente los posibles términos que pueden aparecer a las siguientes expresiones:

$$\delta M = a(\bar{\epsilon}\Gamma_M R^M) \quad , \quad \delta N = b(i\bar{\epsilon}\Gamma_5\Gamma_M R^M)$$

$$\text{y} \quad \delta b_M = c(i\bar{\epsilon}\Gamma_5 R_M) + d(i\bar{\epsilon}\Gamma_5\Gamma_M\Gamma_N R^N) \ , \tag{5.36}$$

donde a, b, c y d son parámetros reales que deben ser determinados mediante el requisito de que estas transformaciones cierren un álgebra. R^M es el tensor de campo del gravitino,

$$R^M = i\epsilon^{MNRS}\Gamma_5\Gamma_N\mathcal{D}_R(\Omega(V,\Psi))\Psi_S \ , \tag{5.37}$$

y se anula sobre las ecuaciones de movimiento. Los valores que toman los distintos parámetros resultan:

$$a = b = -\frac{1}{3}c = d = -\frac{1}{2} \ . \tag{5.38}$$

El hecho de que el álgebra aún no cierre "off-shell" se debe a que no hemos considerado la posibilidad de que las leyes de transformación de los campos contengan términos que dependan de los campos auxiliares y se anulen sobre las ecuaciones de movimiento. Teniendo en cuenta este tipo de términos, es posible llegar a un álgebra cerrada de las leyes de transformación de los campos que integran el multiplete de Einstein, sin hacer uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la supergravedad pura [64]. El resultado está dado por el siguiente conjunto de transformaciones:

$$\delta V_M^A = \kappa\bar{\epsilon}\Gamma^A\Psi_M,$$

$$\delta\Psi_M = \frac{2}{\kappa}\mathcal{D}_M(\Omega(V,\Psi))\epsilon + i\Gamma_5\left(b_M - \frac{1}{3}\Gamma_M \not{b}\right)\epsilon - \frac{1}{3}\Gamma_M(M + i\Gamma_5 N)\epsilon,$$

$$\delta M = -\frac{1}{2}V^{-1}\bar{\epsilon}\Gamma_M R^M - \frac{\kappa}{2}i\bar{\epsilon}\Gamma_5\Psi_M b^M - \kappa\bar{\epsilon}\Gamma^M\Psi_M M + \frac{\kappa}{2}\bar{\epsilon}(M + i\Gamma_5 N)\Gamma^M\Psi_M,$$

$$\delta N = -\frac{i}{2}V^{-1}\bar{\epsilon}\Gamma_5\Gamma_M R^M + \frac{\kappa}{2}\bar{\epsilon}\Psi_M b^M - \kappa\bar{\epsilon}\Gamma^M\Psi_M N - \frac{\kappa}{2}i\bar{\epsilon}\Gamma_5(M + i\Gamma_5 N)\Gamma^M\Psi_M,$$

$$\begin{aligned}
\delta b_M &= \frac{3i}{2}V^{-1}\bar{\epsilon}\Gamma_5\left(g_{MN} - \frac{1}{3}\Gamma_M\Gamma_N\right)R^N + \kappa\bar{\epsilon}\Gamma^N b_N\Psi_M - \frac{\kappa}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^N\Psi_N b_M \\
&- \frac{\kappa}{2}i\bar{\Psi}_M\Gamma_5(M + i\Gamma_5 N)\epsilon - \frac{i\kappa}{4}\epsilon_M^{\ BCD} b_B\bar{\epsilon}\Gamma_5\Gamma_C\Psi_D\ . \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

El álgebra descrita por estas transformaciones resulta ser una generalización del álgebra de supersimetría global dada en la ecuación (3.9), explícitamente,

$$\begin{aligned}
[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] &= \delta_{general\ coord.}(2\bar{\epsilon}_2\Gamma_M\epsilon_1) + \delta_{Lorentz\ local}(2\bar{\epsilon}_2\Gamma^M\epsilon_1\Omega_{MAB} \\
&- \frac{2\kappa}{3}\bar{\epsilon}_2\left(\Sigma_{AB}(M + i\Gamma_5 N) + \epsilon_{ABMN}b^M\Gamma^N\right)\epsilon_1) \\
&+ \delta_{supersimetria}(-\kappa\bar{\epsilon}_2\Gamma^M\epsilon_1\Psi_M)\ . \qquad (5.40)
\end{aligned}$$

El resultado de aplicar dos transformaciones locales de supersimetría sucesivas, no sólo se traduce en una transformación general de coordenadas de parámetro $2\bar{\epsilon}_2\Gamma_M\epsilon_1$, sino que produce además transformaciones locales de Lorentz y de supersimetría con parámetros dependientes de los campos.

Finalmente, el lagrangiano de supergravedad pura off-shell, invariante frente a las transformaciones (5.39), resulta:

$$\mathcal{L}_{SG} = -\frac{1}{2\kappa^2}V\mathcal{R} + \frac{i}{2}\bar{\Psi}_M R^M - \frac{1}{3}V(M^2 + N^2 - b_M b^M)\ . \qquad (5.41)$$

Es inmediato constatar que la eliminación de los campos auxiliares por medio de sus ecuaciones de movimiento algebraicas, conducen al Lagrangiano y sus transformaciones a la forma dada en las ecuaciones (5.27), (5.29), (5.31) y (5.32), es decir, a la formulación 'on-shell'de la supergravedad pura.

5.4 Materia Acoplada a la Supergravedad

La construcción explícita de lagrangianos invariantes frente a una transformación de supersimetría local, que describan un sistema de materia acoplada a supergravedad, puede ser realizada a través de diversos métodos. Mencionaremos dos de ellos que son los más difundidos: el cálculo tensorial local y el cálculo tensorial superconforme. El cálculo tensorial local [65, 66] parte del conocimiento de las representaciones irreducibles del álgebra de supergravedad off-shell (5.40) y de las leyes de transformación de los campos componentes de los respectivos supermultipletes. Consiste, básicamente, en la construcción de nuevos supermultipletes a partir de aquellos que contienen a los campos fundamentales de la teoría. Requiere, entonces, una formulación off-shell de la supergravedad, como la que desarrollamos en la sección anterior.

El cálculo tensorial local puede ser realizado, al igual que en el caso global discutido en el capítulo 3, en términos de supercampos. De este modo, los supermultipletes tienen la misma constitución en términos de campos componentes que en el caso de supersimetría global. No obstante, resulta inmediato verificar que la dependencia del parámetro infinitesimal en las coordenadas espacio-temporales modifica sustancialmente las leyes de transformación. Las derivadas deben ser reemplazadas por derivadas supercovariantes para que el álgebra cierre a orden κ^0. El cálculo explícito de las leyes de transformación que conducen a un álgebra de supergravedad cerrada e igual a la de la ecuación (5.40), a todo orden de la constante gravitacional, puede ser realizado mediante el procedimiento sugerido en la Ref.[64].

Veamos, explícitamente, las leyes de transformación resultantes de la imposición del álgebra de supergravedad $N = 1$ (5.40) sobre los campos componentes que transforman dentro de distintas representaciones irreducibles. Las transformaciones de supersimetría local para los miembros del supermultiplete quiral $\Phi : (\phi, \Xi_-, F)$, están dadas por las siguientes expresiones:

$$\delta\phi = \bar{\epsilon}_-\Xi_- \quad , \quad \delta\Xi_- = \Gamma^M \hat{D}_M\phi\epsilon_+ + F\epsilon_- \ , \tag{5.42}$$

$$\delta F = \bar{\epsilon}_+\Gamma^M \hat{D}_M\Xi_- - \frac{\kappa}{3}\bar{\Xi}_- \left(U\epsilon_- + ib_M\Gamma^M\epsilon_+\right) \ , \tag{5.43}$$

donde hemos debido introducir las derivadas supercovariantes corregidas por términos proporcionales a la constante gravitacional $\hat{D}_M\phi$ y $\hat{D}_M\Xi_-$, de acuerdo a lo señalado anteriormente, según:

$$\hat{D}_M\phi = \partial_M\phi - \frac{\kappa}{2}\bar{\Psi}_{M-}\Xi_- \ , \tag{5.44}$$

$$\hat{D}_M\Xi_- = \left(\mathcal{D}_M - \frac{i\kappa}{2}b_M\right)\Xi_- - \frac{\kappa}{2}\left(\Gamma^N\hat{D}_N\phi\Psi_{M-} + F\Psi_{M+}\right) \ . \tag{5.45}$$

En la ecuación (5.43), hemos escrito los campos auxiliares reales del multiplete de Einstein M y N, en términos de un campo escalar complejo $U = M + iN$. Los subíndices "$-$" y "$+$" denotan respectivamente las componentes izquierda y derecha de los fermiones, que explicitamos al estar trabajando en el formalismo de espinores de cuatro componentes (ver Apéndice). Es interesante resaltar que, debido a la aparición de la constante gravitacional en el álgebra, los campos del multiplete de Einstein (en particular, los auxiliares), se cuelan en las leyes de transformación de los campos de materia, como resulta evidente en las ecuaciones anteriores. Por esta razón es que el cálculo tensorial local debe ser realizado en la formulación "off-shell" de la supergravedad.

El otro supermultiplete que resulta de sumo interés en la construcción de modelos de materia acoplada a supergravedad es el supermultiplete vectorial (3.17). En el gauge de Wess-Zumino, está compuesto por el campo de gauge A_M, el gaugino Λ y un campo auxiliar D. Sus variaciones frente a una transformación local de supersimetría pueden ser obtenidas de un modo análogo al caso anterior y resultan:

$$\delta A_M = -\frac{1}{2}\left(\bar{\epsilon}_-\Gamma_M\Lambda_+ + \bar{\epsilon}_+\Gamma_M\Lambda_-\right) , \tag{5.46}$$

$$\delta\Lambda = \frac{1}{2}\Sigma^{MN}\hat{F}_{MN}\epsilon + \frac{i}{2}D\epsilon , \tag{5.47}$$

$$\delta D = \frac{1}{2}\left(\bar{\epsilon}_-\Gamma^M\hat{D}_M\Lambda_+ - \bar{\epsilon}_+\Gamma^M\hat{D}_M\Lambda_-\right) , \tag{5.48}$$

donde el tensor de campo corregido resulta

$$\hat{F}_{MN} = F_{MN} - \frac{\kappa}{2}\left(\bar{\Psi}_M\Gamma_N\Lambda - \bar{\Psi}_N\Gamma_M\Lambda\right) , \tag{5.49}$$

en tanto que la derivada supercovariante corregida actúa sobre Λ de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\hat{D}_M\Lambda = \left(\mathcal{D}_M + \frac{i\kappa}{2}\Gamma_5 b_M\right)\Lambda + \frac{\kappa}{4}\left(\Sigma^{NP}\hat{F}_{NP} - 2i\Gamma_5 D\right)\Psi_M . \tag{5.50}$$

Nuevamente podemos verificar que los cambios respecto de las leyes de transformación globales están dados en términos de la supercovariantización de los operadores diferenciales, junto a la aparición de correcciones proporcionales a la constante gravitacional - que contienen a los campos del multiplete de Einstein - debidas a la estructura más compleja que adopta el álgebra.

La aparición de b_M en los operadores diferenciales supercovariantes refleja el hecho de que estos supermultipletes son también representaciones del álgebra de gravedad superconforme. Esto permite utilizar el método de la equivalencia de gauge [67] dentro del cálculo tensorial superconforme como herramienta para la construcción de lagrangianos de sistemas supergravitatorios. Este consiste en la aplicación sistemática de los siguientes pasos:
(i) definir una simetría extra, su álgebra y sus transformaciones (en nuestro caso, la simetría conforme),
(ii) elegir campos compensadores dentro de alguna representación de la simetría extendida,
(iii) construir una acción invariante con la simetría extendida,
(iv) elegir un fijado de gauge en los campos compensadores que elimine las simetrías no deseadas,
(v) reescribir la acción y las transformaciones usando los valores de los campos compensadores del paso anterior.
Las ventajas del cálculo tensorial superconforme sobre la aproximación del cálculo tensorial local son varias: al tener una simetría mayor en el lagrangiano de partida las expresiones son más simples, no es necesario especificar desde el comienzo el set de campos auxiliares a utilizar y, principalmente, permite evitar laboriosos reescaleos de los campos necesarios para llevar la acción a una forma canónica, como veremos en el capítulo 6.

La última etapa del cálculo tensorial consiste en hallar una densidad lagrangiana invariante. En el caso rígido encontramos que las leyes de transformación de las componentes F y D de los supermultipletes quiral y vectorial están dados por derivadas totales. De allí concluimos que la densidad lagrangiana más general posible puede escribirse, simplemente, como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_D \ . \tag{5.51}$$

En una teoría de supergravedad las componentes F y D que resultan del cálculo tensorial local no transforman como derivadas totales como puede verse a partir de las ecuaciones (5.43), (5.45), (5.48) y (5.50). Utilizando el método de Noether a cada orden de la constante gravitacional, es posible encontrar que la siguiente expresión corresponde a una densidad lagrangiana 'tipo F', invariante frente a transformaciones locales de supersimetría:

$$V^{-1}\mathcal{L}_F = F + \frac{1}{2}U\phi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{M+}\Gamma^M\Xi_- + \frac{1}{4}\bar{\Psi}_{M+}\Sigma^{MN}\Psi_{N+}\phi + h.c. \;, \tag{5.52}$$

mientras que la fórmula correspondiente a una densidad lagrangiana supergravitatoria 'tipo D', resulta:

$$\begin{aligned} V^{-1}\mathcal{L}_D &= D - \frac{i\kappa}{2}\bar{\Psi}_M\Gamma^M\Gamma_5\Lambda + \frac{2\kappa}{3}A_M\left(b^M + \frac{3\kappa}{8}\frac{\epsilon^{MNRS}}{V}\bar{\Psi}_N\Gamma_R\Psi_S\right) \\ &- \frac{\kappa}{3}(HU^* + UH^*) - \frac{\kappa}{3}\bar{\rho}\left(i\Gamma_5\Gamma^M R_M + \frac{3\kappa}{8}\frac{\epsilon^{MNRS}}{V}\Psi_R\bar{\Psi}_N\Gamma_S\Psi_M\right) \\ &+ \frac{2\kappa^2}{3}C\left[\frac{1}{2\kappa^2}\mathcal{R} - \frac{i}{2}V^{-1}\bar{\Psi}_M R^M + \frac{1}{3}(|U|^2 - b_M b^M)\right] \;, \end{aligned} \tag{5.53}$$

donde hemos redefinido a los campos reales S y P en términos de un campo escalar complejo $H = S + iP$. Estas expresiones, junto con las reglas de composición de multipletes (que resultan idénticas al caso global), completan la construcción del cálculo tensorial local.

Terminaremos esta sección escribiendo la acción más general posible para un sistema de materia acoplada a la supergravedad con invarianza de gauge frente a transformaciones de un grupo de Lie G. Esta acción nos servirá de punto de partida para los cálculos que realizaremos en el próximo capítulo. Se puede probar, bajo hipótesis muy generales, que puede ser escrita en términos de 3 funcionales de los supercampos independientes entre sí [68]:
(i) un supermultiplete vectorial arbitrario $\Delta(\Phi, \bar{\Phi}e^{2q\mathcal{V}})$ construido a partir de los supercampos quirales de materia Φ y $\bar{\Phi}$, y del supercampo vectorial $\mathcal{V}$ de modo que resulte invariante de gauge,
(ii) un superpotencial quiral $g(\Phi)$ invariante frente a G que, en el caso global, debe ser un polinomio de a lo sumo tercer orden en Φ para preservar la condición de renormalizabilidad de la teoría y, finalmente,
(iii) una funcional quiral $f_{ab}(\Phi)$ que transforma como el producto simétrico de la representación adjunta de G.

La expresión de esta acción en el superespacio, separando en forma explícita las contribuciones 'tipo D'y 'tipo F', resulta:

$$S = \int d^4x d^4\theta E \left[\frac{1}{2}\Delta(\Phi, \bar{\Phi}e^{2q\mathcal{V}}) + Re\left[\frac{2}{R}\left(g(\Phi) + f_{ab}(\Phi)\bar{W}^a W^b\right)\right]\right] \;, \tag{5.54}$$

donde E denota al determinante de la supertétrada en el superespacio [69], mientras que R es el supercampo quiral de la curvatura escalar que debe ser introducido en el término 'tipo F'de la acción, toda vez que el sistema resulta inmerso en un espacio-tiempo curvo [70]. Si el grupo de gauge es abeliano, es posible introducir el equivalente local del término de Fayet-Iliopoulos, como veremos en el siguiente capítulo.

5.5 La Carga de la Supergravedad

Finalizaremos este capítulo discutiendo algunos aspectos relacionados con la construcción de las cargas conservadas de la supergravedad y del álgebra que ellas generan. En una teoría supergravitatoria, al igual que en la relatividad general, dado que el espacio-tiempo es curvo, no se tiene un grupo global de isometrías que permitan definir cargas conservadas como en el caso de un espacio-tiempo plano. No obstante, si el espacio-tiempo tiene un comportamiento asintótico adecuado, se podrán definir cargas conservadas asociadas a los generadores del grupo de transformaciones en la región asintótica. Así, dichos generadores deben resultar escritos en términos de integrales de superficie. La energía, por ejemplo, podrá ser identificada como la carga asociada a las traslaciones temporales realizadas en el infinito, de acuerdo a lo mostrado originalmente por Teitelboim [54].

Consideremos un espacio-tiempo con métrica g_{MN} que tiende asintóticamente a una solución de las ecuaciones de Einstein de vacío según:

$$g_{MN} = \bar{g}_{MN} + h_{MN} , \tag{5.55}$$

con $h_{MN} \to 0$ en el infinito, donde

$$\bar{G}_{MN} = \bar{R}_{MN} - \frac{1}{2}\bar{g}_{MN}\bar{R} = 0 . \tag{5.56}$$

Las cantidades con una barra están calculadas puramente en términos de la métrica asintótica $\bar{g}_{MN}$. La descomposición (5.55) es covariante y no implica de modo alguno que h_{MN} represente pequeñas correcciones. El tensor de Einstein G_{MN} puede ser escrito como

$$G_{MN} = \bar{G}_{MN} + G^{lin}_{MN} - t_{MN} , \tag{5.57}$$

donde G^{lin}_{MN} es lineal en h_{MN} mientras que t_{MN}, al que definiremos como el tensor de energía-momento del campo gravitacional, contiene términos de segundo orden y superiores en h_{MN}. El tensor energía-momento total Θ_{MN} resulta:

$$\Theta_{MN} \equiv T_{MN} + t_{MN} = G^{lin}_{MN} \ , \tag{5.58}$$

y satisface, a partir de la identidad de Bianchi, la ecuación

$$\bar{\nabla}_M \Theta^{MN} = 0 \ , \tag{5.59}$$

donde $\bar{\nabla}_M$ es la derivada covariante respecto de la métrica $\bar{g}_{MN}$. La conservación covariante (5.59) no es suficiente para construir cargas conservadas. Sin embargo, si introducimos los vectores de Killing, k^a_M, $a = 1...N_k$, de la métrica asintótica $\bar{g}_{MN}$,

$$\bar{\nabla}_M k^a_N + \bar{\nabla}_N k^a_M = 0 \ , \tag{5.60}$$

es inmediato ver que podemos definir una densidad vectorial conservada J^a_M,

$$J^a_M \equiv \sqrt{-\bar{g}}\Theta_{MN} k^{Na} \ , \tag{5.61}$$

de la que resultan un conjunto de N_k cargas conservadas K^a,

$$K^a = \int_\Sigma \Theta^{MN} k^a_M d\Sigma_N \ . \tag{5.62}$$

Si el cuadrivector k^a_M es tipo tiempo, entonces K^a da la energía relativa a la métrica de energía nula, $g_{MN} = \bar{g}_{MN}$. Escritas a partir de un conjunto de corrientes conservadas, las cargas K^a pueden ser expresadas mediante el teorema de Gauss como integrales de superficie. Usando la descomposición de Θ_{MN} dada en (5.58), y el comportamiento asintótico $T_{MN} \to 0$, podemos encontrar la forma explícita [71]:

$$K^a = \frac{1}{4} \oint_{\partial\Sigma} \delta^{STU}_{MNR} \Gamma^{NA}{}_{B} k^{Ra} \bar{V}^M_A \bar{V}^B_U d\Sigma_{ST} \ , \tag{5.63}$$

en términos de la conexión $\Gamma^{NA}{}_{B}$ correspondiente a la métrica h_{MN}. Estas cargas conservadas, en definitiva, han podido ser construidas a partir del hecho de haber considerado un conjunto de geometrías que tienden asintóticamente a una única configuración $\bar{g}_{MN}$, de la que identificamos sus vectores de Killing k_M^a. Es decir, las dificultades de la covarianza general han sido evitadas mediante la especificación de las condiciones de contorno sobre el conjunto de soluciones físicamente admisibles.

Las cargas conservadas resultantes de la invarianza frente a transformaciones locales de supersimetría pueden ser obtenidas de manera similar. En analogía con los vectores de Killing que dejan a la métrica $\bar{g}_{MN}$ invariante, supondremos que existen espinores de Killing η_I que generan transformaciones locales de supersimetría que dejan invariante al valor asintótico nulo del gravitino,

$$\tilde{\nabla}_M \eta_I = 0 \ , \tag{5.64}$$

donde $\tilde{\nabla}_M$ es el operador diferencial supercovariante (5.39) evaluado en la métrica asintótica $\bar{g}_{MN}$ [72]. Resultará conveniente escribir al espinor de Killing η_I como una combinación lineal $\eta_I = c_m \eta_I^m$ de elementos impares de un álgebra de Grassmann $c_m / c_m c_n = -c_n c_m$, de modo que los η_I^m formen un conjunto linealmente independiente de campos espinoriales anticonmutantes que verifican (5.64).

Para completar la construcción de las supercargas sólo nos resta, en analogía con lo realizado con el conjunto de invarianzas de la métrica del espacio-tiempo, considerar la ecuación de movimiento del campo de gauge de la supersimetría, es decir, el gravitino. Dada una teoría de supergravedad descrita por la acción (5.54), a pesar de que no hemos explicitado aún las tres funcionales arbitrarias de las que depende, el gravitino debe satisfacer una ecuación de movimiento de Rarita-Schwinger, que podemos separar en las partes lineal y no-lineal según:

$$\epsilon^{MNRS} \Gamma_5 \bar{\Gamma}_N \tilde{\nabla}_R \Psi_S = \Theta^M \ , \tag{5.65}$$

donde,

$$\bar{\Gamma}_N = \bar{V}_N^A \Gamma_A \ , \tag{5.66}$$

de modo que Θ^M, compuesta por términos no-lineales y fuentes, satisface:

$$\tilde{\nabla}_M \Theta^M = 0 \ . \tag{5.67}$$

Por lo tanto, haciendo uso de los espinores de Killing conmutantes η_I^m, cuya existencia hemos supuesto, podemos definir un conjunto de cantidades J_I^{mM},

$$J_I^{mM} \equiv \bar{V} \bar{\eta}_I^m \Theta^M \ , \tag{5.68}$$

que pueden escribirse como derivadas totales:

$$J_I^{mM} = \partial_R \left(\bar{V} \bar{\eta}_I^m \epsilon^{MNRS} \Gamma_5 \bar{\Gamma}_N \Psi_S \right) \ . \tag{5.69}$$

Usando el lema de Schwartz, tenemos finalmente:

$$\partial_M J_I^{mM} = 0 \ . \tag{5.70}$$

Las cargas de supergravedad resultarán, simplemente, de evaluar la integral de las corrientes de supersimetría J_I^{mM} sobre una hipersuperficie Σ tipo espacio:

$$Q_I^m = \int_\Sigma \bar{\eta}_I^m \epsilon^{MNRS} \Gamma_5 \bar{\Gamma}_N \tilde{\nabla}_R \Psi_S d\Sigma_M \ . \tag{5.71}$$

De (5.69), usando el teorema de Stokes, podemos escribir las supercargas Q_I^m en la forma:

$$Q_I^m = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} \bar{\eta}_I^m \epsilon^{MNRS} \Gamma_5 \Gamma_N \Psi_S d\Sigma_{MR} \ , \tag{5.72}$$

donde $\partial\Sigma$ es el borde de Σ. Tanto la integral de superficie (5.72) como la obtenida para los generadores K^a en (5.63), no cambian si la métrica $\bar{g}_{MN}$ es reemplazada por g_{MN} (realizándose las contracciones con ésta última). Del mismo modo, podemos relajar las condiciones (5.60) y (5.64) sobre k_M^a y η_I^m, imponiéndoles sólo que tiendan asintóticamente a vectores y espinores de Killing respectivamente. Hablaremos, pues, de vectores y espinores de Killing asintóticos para referirnos a estas cantidades que resultan necesarias para la definición de las cargas conservadas. Debemos notar que el hecho de que todos los generadores puedan definirse por integrales de superficie es muy conveniente en vistas de que el espacio-tiempo puede tener una topología no-trivial.

Resulta interesante plantearse, en este punto, las siguientes preguntas acerca de la naturaleza de las supercargas encontradas: (i) ¿son las transformaciones generadas por (5.72) verdaderamente locales?, (ii) ¿cuál es el álgebra que satisfacen los generadores Q_I^m? Mostraremos a continuación que las transformaciones generadas por Q_I^m son locales y que, a pesar de ello, estos generadores satisfacen un álgebra de supersimetría global. Para ello, resulta conveniente trabajar en la formulación Hamiltoniana de la supergravedad. En esta formulación, las invarianzas de gauge se traducen en la existencia de un conjunto de vínculos de primera clase [73]. Consideremos los vínculos correspondientes a la supersimetría local (resultados análogos pueden ser obtenidos para las simetrías restantes [74]). A partir de la forma del término de Rarita-Schwinger, se ve que la componente temporal del gravitino $\bar{\Psi}_0$, entra en el Hamiltoniano como un multiplicador de Lagrange arbitrario. Por lo tanto, el factor que lo acompaña en el Hamiltoniano $\mathcal{H}_0$, en el que los vínculos aún no han sido implementados,

$$\mathcal{H}_0 = \int_\Sigma d^3x \bar{\Psi}_0 \mathcal{G} + \dots \ , \tag{5.73}$$

resultará ser un vínculo de primera clase - equivalente a la 'ley de Gauss'- de la supergravedad,

$$\mathcal{G} \approx 0 \ . \tag{5.74}$$

La forma explícita de $\mathcal{G}$, resulta una generalización simple de la obtenida para la supergravedad pura [75]:

$$\mathcal{G} = \Gamma^A \Psi_I \Pi^I_A - \frac{1}{2}[\Gamma^I, \Gamma^J] \hat{\nabla}_I \Psi_J \ , \tag{5.75}$$

donde $I, J = 1, 2, 3$ son índices espaciales y Π^I_A son las variables canónicamente conjugadas de las componentes espaciales de la tétrada V^A_I.

El Hamiltoniano $\mathcal{H}_0$ corresponderá a un generador de evolución temporal apropiado sólo si sus derivadas funcionales están bien definidas. Esto significa que la variación de $\mathcal{H}_0$ debe poder escribirse como una integral de volumen lineal en las variaciones de los campos,

$$\delta\mathcal{H}_0 = \int d^3x \left(\sum_{\{\Phi\}} a_\Phi(x) \delta\Phi(x) + \sum_{\{\Pi\}} b_\Pi(x) \delta\Pi(x) \right) \ . \tag{5.76}$$

La derivada funcional de $\mathcal{H}_0$ con respecto a un cierto campo, resultará dada por el coeficiente que acompaña a la variación de dicho campo en el desarrollo anterior:

$$\frac{\delta\mathcal{H}_0}{\delta\Phi(x)} = a_\Phi(x) \quad \text{y} \quad \frac{\delta\mathcal{H}_0}{\delta\Pi(x)} = b_\Pi(x) \ . \tag{5.77}$$

Las variaciones permitidas a los campos deben circunscribirse al espacio de fases que contiene a las soluciones de interés físico [74] de modo que, por ejemplo, den lugar a una supercarga espinorial $\mathcal{Q}$ finita y bien definida. La 'ley de Gauss'(5.75) de un sistema con vínculos de primera clase, genera las transformaciones de gauge que, en nuestro caso, son las de supersimetría local. No obstante, el generador $\mathcal{G}$ está constreñido a anularse en la superficie definida por los vínculos. Por otra parte, esperamos encontrar leyes de conservación no-triviales asociadas a las transformaciones de supersimetría global (pensadas como un caso particular). Estas aparecen, como mostraremos a continuación, de correcciones a los generadores debidas a integrales de superficie, como la que obtuvimos en (5.72).

Si estudiamos la variación del Hamiltoniano $\mathcal{H}_0$, considerando que el multiplicador $\bar{\Psi}_0$ se aproxima asintóticamente a un valor finito y constante[1] $\bar{\Psi}_0(\infty)$, resulta inmediato que, tras una integración por partes:

$$\delta\mathcal{H}_0 = -\bar{\Psi}_0(\infty)\delta\mathcal{Q} + (\text{integral de volumen}) + \dots \;, \tag{5.78}$$

donde

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Sigma} d\Sigma_I[\Gamma^I,\Gamma^J]\Psi_J \;, \tag{5.79}$$

es una expresión análoga a la obtenida en la discusión precedente (5.72). Por lo tanto, si queremos tener un Hamiltoniano consistente (5.76), que genere la dinámica del sistema cuando las transformaciones de supersimetría no-nulas en el infinito están permitidas, tendremos que corregir $\mathcal{H}_0$ de modo que el término de superficie en (5.78) desaparezca:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \bar{\Psi}_0(\infty)\mathcal{Q} \;. \tag{5.80}$$

Esto puede entenderse en los siguientes términos: se ha impuesto al multiplicador de Lagrange $\bar{\Psi}_0$ un comportamiento asintótico distinto al del generador $\mathcal{G}$ (que se anula asintóticamente). Una transformación de supersimetría generada con un parámetro tal, es impropia [76], es decir, cambia el estado físico del sistema. No es posible eliminar la posibilidad de hacer este tipo de transformaciones por un fijado de gauge. Es por ello que obtenemos un generador $\mathcal{Q}$ que no se anula débilmente, al que denominaremos la supercarga total del sistema. Notemos que $\mathcal{Q}$ se modifica frente a una transformación de supersimetría de acuerdo al *álgebra de supersimetría global.* Esto puede verificarse introduciendo en (5.79) la ley de transformación del gravitino (camino que seguiremos en el próximo capítulo) o, mejor aún, expresando la parte asintótica del conmutador de dos transformaciones como una función de las partes

[1] Consideramos este comportamiento asintótico para $\bar{\Psi}_0$ ya que queremos estudiar las transformaciones de supersimetría global para obtener su generador no-nulo, la supercarga total.

asintóticas de las transformaciones originales [77]. Si la teoría de supergravedad de partida es una teoría N-extendida, el álgebra de supersimetría global que generarán las Q^I será, también, N-extendida [54].

Aún cuando los valores numéricos de la integral de superficie transformen correctamente, no es posible usar a Q aún como un generador: los términos de superficie no tienen derivadas funcionales bien definidas y, por lo tanto, sus paréntesis de Poisson con los distintos campos de la teoría no existen. Las integrales de superficie generarían, ingenuamente, una transformación que coincide con la identidad en todo su dominio excepto en el borde. Lo que está ocurriendo es que aún no hemos impuesto las condiciones de gauge [53]. Una vez que fijamos dichas condiciones (por ejemplo, mediante la condición natural $\Gamma^I \Psi_I = 0$), los vínculos pasan a ser de segunda clase y pueden ser tratados como cantidades que se anulan idénticamente, siempre que reemplacemos los paréntesis de Poisson originales por los paréntesis de Dirac correspondientes a las condiciones de gauge elegidas [73].

Los paréntesis de Dirac son de naturaleza no-local, y es debido a este hecho que los valores asintóticos de los multiplicadores de Lagrange determinarán, en forma precisa, el valor de los mismos en todo el espacio. Entonces, tiene verdadero sentido hablar de una *transformación local*, generada por Q mediante la aplicación de paréntesis de Dirac, dada *en términos del valor asintótico del parámetro* $\bar{\Psi}_0(\infty)$. Una vez que se realiza el fijado de gauge, sólo pueden ser realizadas transformaciones impropias que preserven la condición de gauge. Así, el valor asintótico del parámetro define en forma precisa a la transformación en cada punto del espacio [76]. El hecho de que un término de superficie genere una transformación local definida sobre todo el espacio, en apariencia paradójico, se explica por la no-localidad de los paréntesis de Dirac que hace necesario conocer el valor de los campos sobre todo el espacio para poder evaluarlos.

Resumiendo, las integrales de superficie satisfacen el álgebra global de supersimetría correspondiente, a pesar de que generan transformaciones de supergravedad. La razón está en que, luego de que se realiza el fijado de gauge, el parámetro de la transformación está determinado en todos los puntos del espacio por su valor en el infinito, donde el espacio-tiempo es plano [54].

Capítulo 6

Supergravedad Extendida y Ecuaciones de Bogomol'nyi

A fin de estudiar la relación entre la supersimetría local extendida y la existencia de una cota de Bogomol'nyi, consideraremos inicialmente el acoplamiento del modelo abeliano de Higgs a la supergravedad $N = 2$ en un espacio-tiempo tridimensional. La manera más simple de construir la acción de dicho sistema se basa en el uso del cálculo tensorial (local) explicado en el capítulo anterior. Partimos de la densidad lagrangiana del modelo abeliano de Higgs acoplado a la supergravedad $N = 1$ en $d = 4$, para luego aplicar el procedimiento usual de reducción dimensional. Mostramos que la existencia de una cota de Bogomol'nyi en el modelo es una consecuencia natural de su inmersión en el sector bosónico de la teoría de supergravedad extendida. A las ecuaciones de Bogomol'nyi de los campo de materia se añade una ecuación de primer orden para el campo gravitatorio cuya condición de integrabilidad corresponde a las ecuaciones de Einstein del sistema.

Mostramos la existencia de espinores supercovariantemente constantes en el sistema, en presencia de aquellas configuraciones que saturan la cota de Bogomol'nyi. Discutimos las implicaciones que estos resultados tienen sobre el problema de la constante cosmológica en teorías supergravitatorias tridimensionales. Además de presentar estos cálculos, generalizamos los resultados a un conjunto amplio de sistemas tridimensionales cuya característica básica reside en la existencia de soluciones extendidas de naturaleza topológica. Parte de los resultados originales presentados en este capítulo se encuentran publicados en las Refs.[78, 79].

6.1 Modelo Abeliano de Higgs acoplado a la Supergravedad $N = 1$ en $d = 4$

La construcción explícita de una acción que describa al modelo abeliano de Higgs embebido en una teoría de supergravedad $N = 1$, es más sencilla si se parte de la formulación en el superespacio. Al igual que en el contexto de supersimetría global, la obtención de un potencial de ruptura espontánea de simetría en el sector bosónico de la teoría, puede ser implementado mediante la introducción de un término de Fayet-Iliopoulos. Sin embargo, la expresión de dicho término en presencia de supersimetría local difiere considerablemente de la que vimos en el capítulo 3 para una teoría con supersimetría rígida. Puede ser obtenida de un modo directo a través del cálculo tensorial superconforme presentado en el capítulo anterior [80].

La presencia de un término de Fayet-Iliopoulos en la acción de supergravedad, fuerza al superpotencial $g(\Phi)$ a ser invariante frente a la simetría R discutida con anterioridad y, como veremos más adelante, brinda una contribución adicional a la carga de todos los fermiones presentes en la teoría. Consideramos una teoría con superpotencial nulo y con dinámica de Maxwell para el campo electromagnético. Esto corresponde al caso:

$$g(\Phi) = 0 \quad \text{y} \quad f(\Phi) = 1 \ . \tag{6.1}$$

La introducción del término de Fayet-Iliopoulos en la acción (5.54), junto con las condiciones anteriores, resulta en la siguiente acción de supergravedad $N = 1$:

$$S = \int d^4x d^4\theta E \left[\frac{1}{2}\Delta(\Phi, \bar{\Phi}e^{2q\mathcal{V}}) \exp(-\xi\kappa^2\mathcal{V}) + Re\left(\frac{2}{R}\bar{W}W\right)\right] \ , \tag{6.2}$$

donde Φ es el supercampo quiral de materia, $\mathcal{V}$ es el supercampo de gauge vectorial y W es el supercampo espinorial que contiene al tensor electromagnético. La funcional $\Delta(\Phi, \bar{\Phi}e^{2q\mathcal{V}})$ es invariante de gauge y su expresión explícita será precisada más adelante. El parámetro de Fayet-Iliopoulos ξ es real y q es la carga eléctrica.

La acción (6.2) puede ser escrita en términos de los campos componentes tras realizar el cálculo tensorial en términos de supercampos. Resulta:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Bos} + \mathcal{L}_{Fer} \tag{6.3}$$

donde

$$
\begin{aligned}
V^{-1}\mathcal{L}_{Bos} &= \frac{1}{6}\Upsilon\mathcal{R} - \frac{1}{4}g^{MR}g^{NS}F_{MN}F_{RS} - \frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}(D_M\phi)(D^M\phi)^* \\
&+ \frac{\kappa}{3}b^M\left(i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}D_M\phi - i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}(D_M\phi)^* - \xi\kappa^2\Upsilon A_M\right) \\
&+ \frac{\xi\kappa^2}{2}A^M\left(i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}D_M\phi - i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}(D_M\phi)^* - \frac{\xi\kappa^2}{2}\Upsilon A_M\right) \\
&+ \frac{\kappa}{3}\left(U^*\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}F + U\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}F^*\right) + \frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}|F|^2 \\
&+ \frac{\kappa^2}{9}\Upsilon(|U|^2 - b_M b^M) + qD\phi\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi} - \frac{\xi\kappa^2}{2}\Upsilon D + \frac{1}{2}D^2 \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
V^{-1}\mathcal{L}_{Fer} &= \frac{\kappa^2}{12}\Upsilon\frac{\epsilon^{MNRS}}{V}\bar{\Psi}_M\Gamma_5\Gamma_N\left(\mathcal{D}_R + i\frac{3\xi\kappa^2}{4}A_R\Gamma_5\right)\Psi_S \\
&- \frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}\bar{\Xi}_-\left(\not{\mathcal{D}} + i\frac{\kappa}{6}\not{b} - i\left(q + \frac{\xi\kappa^2}{2}\right)\not{A}\right)\Xi_+ - \frac{1}{4}\bar{\Lambda}\hat{\not{\mathcal{D}}}\Lambda \\
&+ \frac{\partial^3\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi^2}\bar{\Xi}_-\not{D}\phi\Xi_+ + \frac{1}{2}\frac{\partial^4\Upsilon}{\partial\phi^{*2}\partial\phi^2}\bar{\Xi}_-\Xi_-\bar{\Xi}_+\Xi_+ - \frac{\partial^3\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi^2}\bar{\Xi}_-\Xi_-F^* \\
&- \frac{i\kappa^2}{3}b^M\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}\bar{\Psi}_{M-}\Xi_- + \frac{i}{8}\xi\kappa^3\Upsilon\overline{\Psi}\cdot\Gamma\Gamma_5\Lambda - \frac{\kappa}{3}U^*\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^2}\bar{\Xi}_-\Xi_- \\
&+ \kappa\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}\Psi_{M-}(\not{D}\phi)^*\Gamma_M\Xi_- - \frac{4\kappa}{3}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}\bar{\Xi}_-\Sigma^{MN}\mathcal{D}_M\Psi_{N-} \\
&- \frac{\kappa^2}{8}\frac{\epsilon^{MNRS}}{V}\bar{\Psi}_M\Gamma_N\Psi_R\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}D_S\phi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}\bar{\Xi}_+\Gamma_S\Xi_-\right) \\
&+ \frac{\kappa^3}{6}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}\bar{\Xi}_-\left(\Psi_{M-}\overline{\Psi}\cdot\Gamma\Psi^M + \Sigma^{MN}\left(\frac{1}{2}\Psi^R{}_-\overline{\Psi}_N\Gamma_R\Psi_M\right.\right. \\
&+ \left.\left.\Psi_{N-}\bar{\Psi}_M\Gamma\cdot\Psi\right)\right) + \frac{i}{2}q\kappa\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}\phi\overline{\Psi}_-\cdot\Gamma\Lambda_+ - 2iq\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}\phi\bar{\Lambda}_+\Xi_+ \\
&- \frac{\kappa^2}{2}\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}\Psi_{M-}\Xi_-\overline{\Psi}^M{}_+\Xi_+ - \frac{\xi\kappa^2}{2}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}\bar{\Xi}_+\Lambda_+ \\
&+ \frac{\kappa}{8}\overline{\Psi}_T\Sigma^{MN}\Gamma^T\Lambda F_{MN} + h.c. \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

En las ecuaciones anteriores, V es el determinante del vierbein,

$$V(x) \equiv E(x, \theta, \bar{\theta})|_{\theta=\bar{\theta}=0} , \tag{6.6}$$

$\mathcal{R}$ es el escalar de Ricci y Υ es una funcional del campo de Higgs definida según:

$$\Upsilon(\phi, \phi^*) \equiv \Delta(\Phi, \overline{\Phi} e^{2qV})|_{\theta=\bar{\theta}=0} . \tag{6.7}$$

La derivada que actúa sobre el fotino, $\hat{D}_M$, ha sido definida en la ecuación (5.50). Un escaleo de Weyl del campo de la tétrada y de los campos fermiónicos, asi como una elección particular de la (hasta ahora arbitraria) funcional Υ, serán necesarios de modo que el lagrangiano (6.3) tome su forma canónica.

Antes de proceder en esa dirección, podemos comprobar que (6.3) es invariante frente al conjunto de transformaciones de supersimetría local (5.39), (5.42), (5.43), (5.46)-(5.48) encontrado en el capítulo 5, tras una ligera modificación en las leyes de transformación (5.42) y (5.43), proporcional a la carga eléctrica:

$$\hat{D}_M \phi \longrightarrow (\hat{D}_M - iqA_M)\phi \quad , \quad \hat{D}_M \Xi_- \longrightarrow (\hat{D}_M - iqA_M)\Xi_- , \tag{6.8}$$

y, por último,

$$\delta F \longrightarrow \delta F + iq\phi\bar{\epsilon}\Lambda . \tag{6.9}$$

Este cambio en las propiedades de transformación de los campos componentes del multiplete quiral proviene de haber fijado el gauge de Wess-Zumino que, como explicamos con anterioridad, no es covariante frente a transformaciones de supersimetría.

Podemos eliminar los campos auxiliares U, D, F y b_M con el objeto de encontrar la expresión explícita de la teoría on-shell. Así, el lagrangiano fermiónico (6.5) resulta:

$$\begin{aligned} V^{-1}\mathcal{L}_{Fer} &= \frac{\kappa^2}{6}\Upsilon \frac{\epsilon^{MNRS}}{V}\bar{\Psi}_M \Gamma_5 \Gamma_N \left(\mathcal{D}_R + i\frac{3\xi\kappa^2}{4}A_R\Gamma_5\right)\Psi_S \\ &- \frac{1}{2}\bar{\Lambda}\left(\not{\mathcal{D}} - i\frac{3\xi\kappa^2}{4}\not{A}\Gamma_5\right)\Lambda - \frac{4\kappa}{3}\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}\bar{\Xi}_-\Sigma^{MN}\mathcal{D}_M\Psi_{N-} + h.c.\right) \\ &- \frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}\bar{\Xi}\left(\not{\mathcal{D}} - i\left(q + \frac{3\xi\kappa^2}{4}\right)\not{A}\right)\Xi + V^{-1}\mathcal{L}^{int}_{Fer} , \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde $\mathcal{L}^{int}_{Fer}$ se refiere a los términos de interacción que involucran campos fermiónicos, cuya forma explícita no resulta de interés en la presente discusión. Es importante destacar la aparición de una contribución adicional $3\xi\kappa^2/4$ a la carga de todos los fermiones de la teoría, cuyo origen debe atribuirse a la inclusión del término de Fayet-Iliopoulos en la acción de partida [81].

En un background puramente bosónico, las únicas transformaciones de supersimetría que sobreviven corresponden a los campos fermiónicos:

$$\delta\Lambda_+| = \frac{1}{2}\Sigma^{MN}F_{MN}\epsilon_+ - \frac{i}{2}\left(\frac{\xi\kappa^2}{2}\Upsilon - q\phi\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}\right)\epsilon_+ \quad , \quad \delta\Xi_-| = \frac{1}{2}\Gamma^M D_M\phi\epsilon_+$$

$$\delta\Psi_{M-}| = \frac{2}{\kappa}\left(\mathcal{D}_M + \frac{3i}{4\Upsilon}\left[i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}(D_M\phi) - i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}(D_M\phi)^* - \xi\kappa^2\Upsilon A_M\right]\right)\epsilon_-$$
$$-\frac{i}{4\kappa\Upsilon}\Gamma_M\left[i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}(\not{D}\phi) - i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}(\not{D}\phi)^* - \xi\kappa^2\Upsilon\not{A}\right]\epsilon_- \,. \qquad (6.11)$$

Por su parte, el sector bosónico del lagrangiano de la teoría resulta:

$$\begin{aligned} V^{-1}\mathcal{L}| &= \frac{1}{6}\Upsilon\mathcal{R} - \frac{\partial^2\Upsilon}{\partial\phi^*\partial\phi}(D_M\phi)(D^M\phi)^* - \frac{1}{4}g^{MR}g^{NS}F_{MN}F_{RS} \\ &+ \frac{1}{4\Upsilon}\left(i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi}D_M\phi - i\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}(D_M\phi)^* - \xi\kappa^2\Upsilon A_M\right)^2 \\ &- \frac{1}{2}\left(q\phi\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi} - \frac{1}{2}\xi\kappa^2\Upsilon\right)^2 \,. \end{aligned} \qquad (6.12)$$

A fin de llevar (6.12) a su forma canónica, hacemos un escaleo de Weyl en la tétrada

$$V_M^A \to V_M^A\left(-\frac{3}{\kappa^2\Upsilon}\right)^{1/2} \equiv V_M^A e^{-\frac{1}{6}\mathcal{J}(\phi,\phi^*)} \,, \qquad (6.13)$$

$$g^{MN} \to g^{MN}\left(-\frac{\kappa^2\Upsilon}{3}\right) \quad , \quad V \to \frac{9}{\kappa^4\Upsilon^2}V \,, \qquad (6.14)$$

en términos de la funcional $\mathcal{J}(\phi,\phi^*)$,

$$\mathcal{J}(\phi,\phi^*) \equiv 3\log\left(-\frac{\kappa^2\Upsilon}{3}\right) \,. \qquad (6.15)$$

Resta elegir una funcional $\mathcal{J}(\phi,\phi^*)$ que logre que el lagrangiano bosónico coincida con el del modelo abeliano de Higgs. Es inmediato comprobar que

$$\mathcal{J}(\phi,\phi^*) = -\frac{\kappa^2}{2}\phi\phi^* \ , \tag{6.16}$$

nos lleva a un término cinético para el campo de Higgs con la forma canónica que requiere el modelo. Si redefinimos, además, el parámetro de Fayet-Iliopoulos como

$$\xi = -qv^2/3 \ , \tag{6.17}$$

el sector bosónico de la teoría corresponde al modelo abeliano de Higgs mínimamente acoplado a la gravedad:

$$\begin{aligned} V^{-1}L| &= -\frac{1}{2\kappa^2}\mathcal{R} - \frac{1}{4}g^{MR}g^{NS}F_{MN}F_{RS} + \frac{1}{2}(D_M\phi)(D^M\phi)^* \\ &- \frac{q^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2 \ . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Notemos que la constante de acoplamiento del potencial de Higgs está relacionada a la carga eléctrica por la condición (4.19) que obtuvimos en el capítulo 4 como un requisito necesario para realizar la extensión de la supersimetría global del modelo a $N = 2$ y, al mismo tiempo, para encontrar una cota de Bogomol'nyi de la energía por unidad de longitud en el modelo abeliano de Higgs. En este capítulo, sin embargo, dicha condición emerge en un lagrangiano que tiene una única supersimetría. La razón es simple: las configuraciones de vórtice presentan invarianza traslacional en una de las direcciones espaciales. Por lo tanto, la aplicación del álgebra de supersimetría para probar la existencia de una cota de Bogomol'nyi debe ser realizada a continuación de una reducción dimensional del lagrangiano del sistema (6.18) en la coordenada correspondiente a la invarianza. Como veremos en la próxima sección, el procedimiento de reducción dimensional duplica las supersimetrías del modelo, de modo que la condición (4.19) resulta asociada, en definitiva, a la presencia de una invarianza supersimétrica extendida $N = 2$.

Debemos estudiar aún las transformaciones de Weyl sobre el sector fermiónico de la teoría correspondientes a las realizadas sobre la tétrada (6.13). Tras estas transformaciones, aparece un término cinético canónico para el gravitino (dado por la acción de Rarita-Schwinger) y los demás campos fermiónicos. Veremos que el potencial de Higgs y la corriente de Higgs toman, tras el escaleo, su forma usual en las expresiones (6.11) que dan las leyes de transformación de los campos fermiónicos frente a la supersimetría local. Bajo el escaleo de Weyl, los campos fermiónicos transforman según:

$$\Psi_M \to \left(-\frac{3}{\kappa^2\Upsilon}\right)^{1/4} \Psi_M \quad , \quad \Lambda \to \left(-\frac{3}{\kappa^2\Upsilon}\right)^{-3/4} \Lambda \, , \tag{6.19}$$

$$\text{y} \quad \Xi \to \left(-\frac{3}{\kappa^2\Upsilon}\right)^{-1/4} \Xi \, , \tag{6.20}$$

mientras que el parámetro ϵ debe modificarse según la relación:

$$\epsilon \to \left(-\frac{3}{\kappa^2\Upsilon}\right)^{1/4} \epsilon \, . \tag{6.21}$$

De este modo, los términos cinéticos correspondientes a estos campos adquieren su forma canónica, excepto por un término mixto (presente ya en la segunda línea de la ec.(6.10)). A través de una simple redefinición

$$\Psi_{M-} \to \Psi_{M-} - \frac{1}{\kappa\Upsilon}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^*}\Gamma_M \Xi_+ \, , \tag{6.22}$$

el lagrangiano cinético fermiónico resulta finalmente diagonalizado:

$$\begin{aligned} V^{-1}L_{Fer} &= -\frac{1}{2}\frac{\epsilon^{MNRS}}{V}\bar{\Psi}_M\Gamma_5\Gamma_N\left(\mathcal{D}_R + i\frac{qv^2\kappa^2}{4}A_R\Gamma_5\right)\Psi_S \\ &- \frac{1}{2}\bar{\Xi}\left(\not{\mathcal{D}} - i\left(q + \frac{qv^2\kappa^2}{4}\right)\not{A}\right)\Xi \\ &- \frac{1}{2}\bar{\Lambda}\left(\not{\mathcal{D}} - i\frac{qv^2\kappa^2}{4}\not{A}\Gamma_5\right)\Lambda + V^{-1}\tilde{\mathcal{L}}^{int}_{Fer} \, , \end{aligned} \tag{6.23}$$

y las transformaciones de supersimetría de los campos fermiónicos toman la siguiente forma:

$$\delta\Lambda_+| = \frac{1}{2}\Sigma^{MN}F_{MN}\epsilon_+ + \frac{iq}{4}(|\phi|^2 - v^2)\epsilon_+ \quad , \quad \delta\Xi_-| = \frac{1}{2}\Gamma^M D_M\phi\epsilon_+$$

$$\delta\Psi_{M-}| = \frac{2}{\kappa}\left(\mathcal{D}_M + \frac{i\kappa^2}{4}(J_M + qv^2A_M)\right)\epsilon_- \, , \tag{6.24}$$

donde

$$J_M = \frac{i}{2}\left(\phi(D_M\phi)^* - \phi^*(D_M\phi)\right) \tag{6.25}$$

es la corriente del campo de Higgs. La expresión (6.23) pone de manifiesto la aparición de una carga extra por parte de todos los fermiones del sistema. Esto jugará un papel importante en los argumentos que desarrollaremos en las siguientes secciones.

6.2 Reducción Dimensional y Supergravedad Extendida

Derivaremos ahora el Lagrangiano correspondiente al modelo abeliano de Higgs tridimensional acoplado a la supergravedad $N = 2$, a través de la reducción dimensional de (6.18).

Comenzamos por separar en la tétrada las componentes que corresponden a la dimensión que va a ser eliminada a través del proceso de reducción dimensional,

$$V_M^A = \begin{pmatrix} e_\mu^a & a_\mu \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} , \qquad (6.26)$$

donde usamos $\mu, a = 0, 1, 2$ para denotar los índices curvos y planos (respectivamente) que corresponderán al espacio-tiempo tridimensional resultante e imponemos a todos los campos la independencia respecto de la coordenada que ha de eliminarse, a la que identificamos con (x_3). En la ecuación (6.26), e_μ^a es la tríada de la variedad tridimensional resultante, a_μ un campo vectorial frente al grupo de Lorentz en dicha variedad y φ un campo escalar real. Hemos elegido el gauge $V_3^a = 0$, que puede ser fijado mediante una transformación local de Lorentz apropiada [82]. En efecto, una variación infinitesimal de V_M^A bajo transformaciones locales de supersimetría y de Lorentz y una transformación general de coordenadas, toma la forma:

$$\delta V_M^A = \kappa \bar{\epsilon} \Gamma^A \Psi_M + \omega^A{}_B V_M^B + \partial_M \xi^R V_R^A + \xi^R \partial_R V_M^A , \qquad (6.27)$$

donde $\bar{\epsilon}$, $\omega^A{}_B$ y ξ^R son los correspondientes parámetros locales. De este modo, podemos ver que la libertad asociada a la invarianza frente a transformaciones generales de coordenadas en cuatro dimensiones puede ser aprovechada para imponer

$$a_\mu = 0 \quad \text{y} \quad \varphi = 1 , \qquad (6.28)$$

preservando la invarianza frente a las transformaciones del grupo de Poincaré local en el espacio-tiempo reducido tridimensional. Estas condiciones desconectan algunos aspectos de la física resultante en el sistema tridimensional, de aquella que tiene lugar en el modelo de partida, a diferencia de lo que ocurre con la reducción dimensional à la Kaluza - Klein [82, 83, 84] y el procedimiento presentado en la Ref.[85], que preserva la dinámica del modelo de dimensionalidad mayor.

Con las condiciones anteriores, el tensor métrico en $d = 4$ resulta:

$$g^{MN} = V_A^M V_B^N \eta^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{6.29}$$

donde $\eta^{AB} = diag(+ - - -)$. La conexión espinorial sobre una configuración puramente bosónica, por su parte, toma la forma de la correspondiente al espacio-tiempo reducido,

$$\Omega_{cab}| = \omega_{cab}| = -\frac{1}{2}(e_c^m e_a^n - e_a^m e_c^n)\partial_n e_{mb} + \frac{1}{2} e_a^m e_b^n \partial_n e_{mc} - (a \leftrightarrow b) , \tag{6.30}$$

mientras que todas las demás componentes se anulan. Entonces, el escalar de Ricci en cuatro dimensiones $\mathcal{R}$ se reduce, simplemente, al de la variedad tridimensional que denotaremos como R.

Tras la reducción dimensional, el lagrangiano (6.18) resulta:

$$\begin{aligned} e^{-1}L| &= -\frac{1}{2\kappa^2}R - \frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S - \frac{q^2}{2}S^2|\phi|^2 - \frac{q^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2 , \end{aligned} \tag{6.31}$$

donde hemos identificado:

$$A_M \equiv (A_\mu, S) .$$

El lagrangiano (6.31) describe la dinámica del sector bosónico del modelo abeliano de Higgs tridimensional acoplado a supergravedad $N = 2$. Está dado, simplemente, por el acoplamiento mínimo del sector bosónico del modelo abeliano de Higgs $N = 2$ supersimétrico (4.20) al campo gravitacional.

Estudiaremos ahora la reducción dimensional de las leyes de transformación supersimétricas dadas en (6.24). Especificamos la representación para el álgebra de Clifford tetradimensional,

$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes \tau_3 \quad , \quad \Gamma^3 = 1 \otimes i\tau_2 \quad , \quad \Gamma^5 = 1 \otimes \tau_1$$

$$\Sigma^{ab} = \sigma^{ab} \otimes 1 \quad , \quad \Sigma^{a3} = -\Sigma^{3a} = \gamma^a \otimes \tau_1 \ , \tag{6.32}$$

en términos de las matrices de Dirac 2×2 en tres dimensiones γ^a y del generador de espín del grupo de Lorentz tridimensional $\sigma^{ab} = 1/2[\gamma^a, \gamma^b]$. τ_k, en tanto, son las matrices de Pauli. En esta representación, los espinores de Majorana tetradimensionales toman la forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ i\Psi_2 \ , \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

donde Ψ_1 y Ψ_2 son espinores reales de 2-componentes, que pueden ser considerados como campos de Majorana tridimensionales. Con estos espinores de Majorana, podemos construir un fermión de Dirac en tres dimensiones como:

$$\psi = \Psi_1 + i\Psi_2 \ .$$

Finalmente, en el procedimiento de reducción dimensional, debemos tener en cuenta las correcciones a las leyes de transformación de todos los campos, en correspondencia con las realizadas anteriormente, a fin de mantenernos en el gauge elegido para la tétrada. Así, las transformaciones supersimétricas de los campos fermiónicos resultan:

$$\begin{gathered} \delta\lambda| = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\epsilon + \frac{i}{4}(|\phi|^2 - v^2)\epsilon + \gamma^\mu \partial_\mu S \epsilon \ , \\ \delta\chi| = \frac{1}{2}\left(\not{D}\phi + iqS\phi\right)\epsilon \quad , \quad \delta\psi_3| = -i\frac{q\kappa}{2} S(|\phi|^2 - v^2)\epsilon \ , \\ \delta\psi_\mu| = \frac{2}{\kappa}\left(\mathcal{D}_\mu + i\frac{\kappa^2}{4}(J_\mu + qv^2 A_\mu)\right)\epsilon \equiv \frac{2}{\kappa}\hat{\nabla}_\mu \epsilon \ . \end{gathered} \tag{6.34}$$

Hemos incluído la transformación correspondiente a ψ_3, un campo fermiónico remanente del modelo tetradimensional de partida. Nuestro interés se centrará, sin embargo, en aquellas configuraciones bosónicas en las que el campo escalar S se anula idénticamente. Sobre estas soluciones, la ley de transformación para el campo ψ_3 resultará trivial. Debido a que ϵ es un espinor de Dirac, las expresiones (6.34) son las leyes de transformación fermiónicas frente a supersimetría local extendida $N = 2$. Como mencionamos anteriormente, el procedimiento de reducción dimensional ha duplicado las supersimetrías del modelo de partida. Hemos introducido en (6.34) la definición de la derivada supercovariante $\hat{\nabla}_\mu$ según:

$$\hat{\nabla}_\mu \epsilon = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\sigma^{ab} + i\frac{\kappa^2}{4}(J_\mu + qv^2 A_\mu) \right) \epsilon \ . \tag{6.35}$$

Resta llevar a cabo la reducción dimensional del lagrangiano fermiónico (6.23), que nos dará la contraparte fermiónica del lagrangiano bosónico $N = 2$ (6.31). A fin de obtener un término cinético correctamente diagonalizado, debemos realizar la siguiente transformación,

$$\psi_\mu \to \psi_\mu + i\gamma_\mu \psi_3 \ , \tag{6.36}$$

tras la cuál, el lagrangiano fermiónico resultante es:

$$\begin{aligned} L_{Fer} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\mu\sigma}\bar{\psi}_\rho \hat{\nabla}_\mu \psi_\sigma - \frac{e}{2}\bar{\chi}\left(\not{\mathcal{D}} - iq\left(1 + \frac{v^2\kappa^2}{4}\right) \not{A} \right)\chi \\ &- \frac{e}{2}\bar{\lambda}\left(\not{\mathcal{D}} - iq\frac{v^2\kappa^2}{4}\not{A} \right)\lambda - \frac{e}{2}\bar{\psi}_3\left(\not{\mathcal{D}} - iq\frac{v^2\kappa^2}{4}\not{A} \right)\psi_3 + \hat{L}^{int}_{Fer} \ . \end{aligned} \tag{6.37}$$

Hemos incluído en el último término, $\hat{L}^{int}_{Fer}$, todas las interacciones restantes que involucran a campos fermiónicos. Notamos que la reducción dimensional preserva la carga extra adquirida por los campos fermiónicos en el sistema tetradimensional.

6.3 Supercarga y Geometría del modelo tridimensional

En esta sección, construiremos las cargas de supersimetría local que generan las transformaciones que dejan invariante al lagrangiano (6.31) y (6.38) del modelo abeliano de Higgs acoplado a supergravedad $N = 2$ en $2 + 1$ dimensiones. Previamente, discutiremos algunos aspectos relacionados con la geometría del espacio-tiempo emergente en teorías gravitatorias tridimensionales.

En $2 + 1$ dimensiones, la curvatura del espacio-tiempo puede ser enteramente descrita en términos del tensor de Ricci [62],

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})R \ . \tag{6.38}$$

Como consecuencia de este hecho, las ecuaciones de movimiento ligan de manera directa al tensor de Riemann con el tensor de Einstein,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \epsilon_{\lambda\mu\alpha}\epsilon_{\nu\kappa\beta}G^{\alpha\beta} \ , \tag{6.39}$$

de modo que, tanto en ausencia de materia como en el exterior de una distribución de fuentes, el espacio-tiempo es plano. En este sentido, la relatividad general en $2+1$ dimensiones es dinámicamente trivial: un conjunto de masas puntuales no interactúa gravitacionalmente entre sí. De este modo, la energía total identificada con el generador de traslaciones temporales definido asintóticamente, reviste un carácter puramente topológico para un sistema de n masas puntuales [86]. Aún cuando la masa se encuentre repartida según alguna distribución extendida, en la medida en que asintóticamente $T_{\mu\nu} \to 0$, la curvatura del espacio-tiempo se irá haciendo plana, de acuerdo con la ecuación (6.39). Debemos señalar, no obstante, que aunque la curvatura resulte asintóticamente plana, la métrica no describe un espacio-tiempo plano. Para ilustrar este punto, escribiremos la métrica de un espacio-tiempo estático en términos de un conjunto de coordenadas que describen localmente a una superficie Π, ortogonal en todos lados al campo vectorial de Killing tipo-tiempo $\frac{\partial}{\partial t}$, asociado a dicha estaticidad:

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \ , \tag{6.40}$$

donde g_{ij} es una función que depende solamente de las variables espaciales que describen a la superficie Π.

Toda métrica bidimensional es conformemente equivalente a una métrica de Kähler, por lo que podemos escribir el intervalo en la forma:

$$ds^2 = dt^2 - \Omega^2 dz d\bar{z} \ , \tag{6.41}$$

donde Ω es una función de las coordenadas conformes $z, \bar{z}$ sobre la superficie Π, $\Omega(z,\bar{z})$. Para cualquier configuración de energía finita, las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T^{mat}_{\mu\nu} \ , \tag{6.42}$$

restringen el comportamiento asintótico de Ω a la forma

$$\Omega(z,\bar{z}) \to (z\bar{z})^{-\frac{\kappa^2 M}{2}} \ , \tag{6.43}$$

en la que M es la masa total de la fuente de materia,

$$M = \frac{1}{2\pi} \int dz d\bar{z} \Omega^2 T_{tt}^{mat} \ . \tag{6.44}$$

De este modo, la métrica (6.41) se acerca asintóticamente a la métrica de un cono plano con un ángulo de déficit δ proporcional a la masa M de la fuente de materia $\delta = 2\pi\kappa^2 M$ [87]. Si la masa de las configuración M es mayor que la masa de Planck, $M_p = \kappa^{-2}$, la métrica resulta singular. Para el caso especial en que $M = M_p$, el cono se degenera y el espacio es asintóticamente cilíndrico (nosotros consideraremos $M < M_p$). La masa M es debida exclusivamente a la materia. La razón de este hecho particular al caso tridimensional, está en que la densidad de Euler completa $\sqrt{-g}G_{00}$ resulta una divergencia para la métrica estática (6.41) [86]. En $3+1$ dimensiones, en cambio, esto es cierto sólo para la parte linealizada G_{MN}^{lin} alrededor de la solución asintótica (5.58) y (5.59), de modo que la energía total allí resulta la suma de la contribución de la materia y de los términos no-lineales de origen gravitacionales.

El hecho de que cualquier configuración masiva produzca una geometría asintóticamente cónica en $d = 3$, crea un serio problema en nuestro intento de obtener una cota de Bogomol'nyi a partir de la existencia de una supersimetría extendida subyacente al modelo. En el capítulo anterior mostramos que los generadores de supersimetría local deben construirse a partir de espinores que asintóticamente resulten supercovariantemente constantes. Una transformación generada por operadores construidos a partir de espinores que no satisfagan esta condición modificará el comportamiento asintótico de los campos, de manera que no sean soluciones admisibles en la teoría. En otras palabras, en ausencia de espinores de Killing asintóticos, cualquier configuración de la teoría rompe la supersimetría existente a nivel del lagrangiano. Como mostraremos de inmediato, en una geometría asintóticamente cónica no existen, en principio, espinores supercovariantemente constantes, tal como recientemente observara Witten [24].

El argumento de Witten puede ser presentado de la manera siguiente: consideremos un espinor de Killing asintótico η, y evaluemos el resultado de realizar un transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada Γ, de radio suficientemente grande, que rodee al origen. En ese caso, η adquiere una fase dada por la circulación de la conexión espinorial dual ω_μ^a,

$$\eta(x)|_{2\pi} = \mathcal{P} \exp\left(-\frac{i}{2} \oint_\Gamma \omega_\mu^a \gamma^a dx^\mu\right) \eta(x)|_0 \ . \tag{6.45}$$

$\mathcal{P}$ denota que el desarrollo de la exponencial debe respetar el orden en el que el camino Γ es recorrido. Hemos introducido en (6.45) la cantidad ω^a_μ que está dada en términos de la conexión espinorial por la siguiente expresión:

$$\omega^a_\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{\mu bc} \ . \tag{6.46}$$

Para la métrica del espacio-tiempo (6.41), podemos elegir una configuración, para el campo de tríada e^a_μ, dada por:

$$e^0_t = e^-_{\bar{z}} = 1 \quad , \quad e^+_z = \Omega^2 \tag{6.47}$$

-mientras todas las demás componentes resultan nulas -, toda vez que escribamos la métrica plana (del plano tangente) en coordenadas conformes,

$$\eta_{00} = -2\eta_{+-} = -2\eta_{-+} = 1 \ . \tag{6.48}$$

La única componente no-nula de la conexión espinorial resulta:

$$\omega^0_{\bar{z}} = -\partial_{\bar{z}} \log \Omega \ , \tag{6.49}$$

de modo que la ecuación (6.45) puede ser escrita como:

$$\eta(x)|_{2\pi} = \mathcal{P}\exp\left(\frac{i}{2}\oint_\Gamma \partial_{\bar{z}} \log \Omega d\bar{z}\gamma^0\right)\eta(x)|_0 \ . \tag{6.50}$$

Siendo la región de integración una curva de radio grande, podemos insertar (6.43) en la integral anterior, arribando a la expresión:

$$\eta_\pm(x)|_{2\pi} = \exp\left(\pm\frac{i}{2}\delta\right)\eta_\pm(x)|_0 \ , \tag{6.51}$$

según el espinor resulte 'quiraló 'anti-quiral'frente a la matriz γ^0,

$$\gamma^0\eta(x)_\pm = \pm\eta(x)_\pm \ . \tag{6.52}$$

El ángulo de déficit δ en espacios asintóticamente cónicos es menor que 2π, de manera que el transporte paralelo da lugar a una holonomía no-trivial que resulta en la imposibilidad de tener un espinor η bien definido.

Las consecuencias físicas (recordemos que estamos discutiendo el caso 2+1 dimensional) de este hecho, señaladas por Witten [24], son sumamente interesantes. Las teorías supergravitatorias llevan, en general, a una dicotomía: la supersimetría no está rota y, consecuentemente, los bosones y los fermiones están degenerados, o bien la supersimetría está rota y la constante cosmológica de la teoría resulta distinta de cero. Ninguna de estas alternativas aparece como satisfactoria. Ambas nos llevan a resultados en contradicción con la experiencia. El punto notable, es que en un espacio-tiempo $2+1$ dimensional, como consecuencia de (6.51), la supersimetría sólo se preserva en una configuración no masiva, es decir, en el vacío. De este modo, aún cuando la supersimetría se aplica al vacío - asegurando la anulación de la constante cosmológica -, no ocurre lo mismo para los estados excitados, por lo que no debemos esperar que haya una degeneración entre bosones y fermiones [24]. Claro está que este mecanismo es especial de $2+1$ dimensiones. Sin embargo, recientemente, ha dado lugar a posibles extensiones a modelos en 4 dimensiones [88], debido a la existencia de una dualidad entre teorías en $d=3$ con supersimetría rota por una singularidad cónica, y teorías en $d=4$ en el régimen de acoplamiento fuerte [89].

La existencia de una cota topológica en el modelo abeliano de Higgs acoplado a la gravedad [90] - con ecuaciones de autodualidad que resultan, simplemente, la covariantización de las obtenidas originalmente por Bogomol'nyi [7] -, junto con la construcción realizada en el capítulo 4 en ausencia de gravedad, permiten intuir la existencia de algún mecanismo que resuelva la dificultad presentada por (6.51). Como veremos más adelante, en el modelo abeliano de Higgs, dicho mecanismo está relacionado con el efecto Bohm-Aharonov.

6.4 El Algebra de Supergravedad y la Forma de Nester generalizada

En esta sección procederemos en forma "ingenua" a la construcción del álgebra de supercargas correspondiente a la supergravedad extendida del modelo. Es decir, supondremos que el sistema admite espinores de Killing asintóticos a pesar de los argumentos contrarios discutidos en la sección anterior (más adelante, esta hipótesis resultará justificada convenientemente). Mostraremos que el álgebra de supersimetría puede ser escrita en términos de la circulación, a lo largo de una trayectoria cerrada en el infinito, de una 1-forma.

Comenzaremos escribiendo las ecuaciones de movimiento del lagrangiano (6.31) y (6.38) para los campos bosónicos, en un background en el que todos los fermiones se anulan idénticamente. Resultan:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = -qJ^\nu \ , \tag{6.53}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}D_\mu(\sqrt{-g}D^\mu\phi) = \frac{q^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)\phi - q^2S^2\phi \ , \tag{6.54}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu S) = q^2|\phi|^2 S \ . \tag{6.55}$$

La contribución de los campos de materia a las ecuaciones de Einstein (6.42), viene dada por la expresión del tensor de energía-impulso $T^{mat}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} T^{mat}_{\mu\nu} &= -g^{\lambda\tau}F_{\mu\tau}F_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D_\nu\phi)^* - \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D_\nu\phi) - \partial_\mu S\partial_\nu S \\ &+ g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}(D_\rho\phi)(D^\rho\phi)^* - \frac{1}{2}\partial_\rho S\partial^\rho S - \frac{q^2}{2}S^2|\phi|^2\right. \\ &+ \left.\frac{q^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2\right] . \end{aligned} \tag{6.56}$$

Teniendo en cuenta que nos concentraremos en el modelo abeliano de Higgs acoplado a la gravedad, imponemos la condición

$$S = 0 \tag{6.57}$$

sobre las configuraciones clásicas del modelo. Más aún, dado que las ecuaciones de Bogomol'nyi hacen referencia a soluciones estáticas con $A_0 = 0$, también imponemos estas condiciones sobre dichas configuraciones (notar que de este modo $T^{mat}_{0i} = 0$). La masa (6.44) de una configuración sujeta a las condiciones anteriores, resulta:

$$M = \frac{1}{2\pi}\int dzd\bar{z}\Omega^2\left[\frac{1}{2}\mathcal{F}^2 + D_z\phi D_{\bar{z}}\phi^* + D_{\bar{z}}\phi D_z\phi^* + \frac{q^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2\right] . \tag{6.58}$$

Para construir las supercargas del modelo, seguiremos el método de Noether discutido en 3.4. La corriente conservada $\mathcal{J}^\mu[\epsilon]$ correspondiente a la supersimetría local extendida del lagrangiano (6.31) y (6.38), está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{\mu}[\epsilon] &= -\bar{\lambda}\gamma^{\mu}\left(\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}+\frac{iq}{4}(|\phi|^{2}-v^{2})\right)\epsilon-\frac{1}{2}\bar{\chi}\gamma^{\mu}(\not{D}\phi)\epsilon \\ &- \frac{2}{\kappa}\frac{\epsilon^{\rho\mu\sigma}}{e}\bar{\psi}_{\rho}\hat{\nabla}_{\sigma}\epsilon+h.c.+\dots \end{aligned} \qquad (6.59)$$

donde los puntos suspensivos representan a una gran cantidad de términos que contienen tres campos fermiónicos, y que no son relevantes para nuestra construcción ya que, después de calcular el álgebra de supersimetría $N=2$, la evaluaremos en el background puramente bosónico en el que estos términos no tendrán contribución alguna.

Las supercargas $\mathcal{Q}[\epsilon]$ asociadas a la corriente (6.59), pueden ser obtenidas mediante una integral de dicha corriente sobre una superficie tipo-espacio Σ,

$$\mathcal{Q}[\epsilon]=\int_{\Sigma}\mathcal{J}^{\mu}[\epsilon]d\Sigma_{\mu}\equiv\mathcal{Q}_{1}[\epsilon]+i\mathcal{Q}_{2}[\epsilon]\;, \qquad (6.60)$$

cuyo elemento de área hemos denotado por $d\Sigma_{\mu}$. En esta expresión, $\mathcal{Q}_{I}$, $I=1,2$, son las supercargas Majorana, generadoras de las transformaciones de supersimetría $N=2$. Ahora bien, podemos imponer la ecuación de movimiento del gravitino,

$$\frac{2}{\kappa}\frac{\epsilon^{\mu\sigma\rho}}{e}\overline{\hat{\nabla}_{\sigma}\psi_{\rho}}=\bar{\lambda}\gamma^{\mu}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}+\frac{iq}{4}(|\phi|^{2}-v^{2})\right)+\frac{1}{2}\bar{\chi}\gamma^{\mu}(\not{D}\phi)\;, \qquad (6.61)$$

de modo que, tras una integración por partes, podemos escribir a la supercarga como la circulación del gravitino alrededor del contorno orientado $\partial\Sigma$,

$$\mathcal{Q}[\epsilon]=-\frac{2}{\kappa}\oint_{\partial\Sigma}\bar{\epsilon}\psi_{\mu}dx^{\mu}. \qquad (6.62)$$

Debemos remarcar en este punto, que la expresión anterior coincide con los resultados obtenidos por Teitelboim [54] para supergravedad pura en un espacio-tiempo tetradimensional y con los que hubiéramos obtenido a partir de la argumentación seguida en el capítulo anterior (5.65)-(5.72), luego de practicar la reducción dimensional correspondiente. La carga (6.62) genera las transformaciones frente a las cuáles el lagrangiano (6.31) y (6.38) es invariante. No obstante, como discutimos anteriormente, de no resultar ϵ un espinor de Killing asintótico, la supersimetría del lagrangiano estará rota sobre las soluciones.

Como explicamos al final del capítulo 5, si ϵ resulta un espinor de Killing asintótico, el álgebra satisfecha por las supercargas Majorana $\mathcal{Q}_I$ (6.60), no es otra cosa que un álgebra de supersimetría rígida $N = 2$. Allí utilizamos la formulación hamiltoniana de la teoría para realizar la demostración de este hecho y entender cómo una transformación local de supersimetría puede estar dada enteramente en términos de un valor asintótico constante del parámetro ϵ, una vez que todos los gauge han sido fijados. A continuación veremos otra manera de obtener este resultado, en la que se explicitan convenientemente algunas cantidades de interés para nuestro procedimiento. Como se explica en la Ref.[54], no es posible realizar el cálculo del álgebra de supercargas evaluando (ingenuamente) los corchetes de Poisson a partir de la expresión (6.62), ya que los términos de superficie no tienen bien definidas sus derivadas funcionales y, por lo tanto, los corchetes de Poisson con los diferentes campos de la teoría no resultan bien definidos. Podemos, no obstante, asumir que hemos impuesto las condiciones de gauge que promueven a $\mathcal{Q}[\epsilon]$ a ser el generador de transformaciones de supersimetría local, toda vez que reemplacemos los paréntesis de Poisson graduados por paréntesis de Dirac graduados. Entonces, podemos evaluar el álgebra de supersimetría sobre una configuración puramente bosónica, simplemente haciendo actuar en el integrando de (6.62) la transformación de supersimetría generada por $\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon]$,

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| \equiv \delta_\epsilon \mathcal{Q}[\epsilon]| = -\frac{2}{\kappa} \oint_{\partial\Sigma} \bar{\epsilon}\delta_\epsilon \psi_\mu | dx^\mu \ . \tag{6.63}$$

Introduciendo la ley de transformación del gravitino (6.34) en la expresión anterior, resulta:

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| = \frac{4}{\kappa^2} \oint_{\partial\Sigma} \bar{\epsilon}\hat{\nabla}_\mu \epsilon dx^\mu \ . \tag{6.64}$$

El álgebra de supercargas evaluada sobre una configuración puramente bosónica, resulta ser la integral sobre el contorno unidimensional de una 1-forma ω, construída a partir del parámetro fermiónico:

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| = \frac{4}{\kappa^2} \oint_{\partial\Sigma} \omega \ , \tag{6.65}$$

$$\omega = \bar{\epsilon}\hat{\nabla}_\mu \epsilon dx^\mu \ , \tag{6.66}$$

a la que denominaremos forma de Nester generalizada en un espacio-tiempo tridimensional. La forma de Nester [71, 91] fue introducida como una versión covariante de la cantidad tetradimensional utilizada por Witten [56] para demostrar la positividad de la energía en la Relatividad General. Su relación con el álgebra de supersimetría en la teoría de supergravedad pura fue observada inicialmente por Horowitz y Strominger [57], Deser [58] y Teitelboim [59]. En teorías que describen materia acoplada a la supergravedad, una generalización de la forma de Nester ha permitido realizar demostraciones à la Witten de la existencia de cotas inferiores en la masa ADM [92] de sistemas en $3+1$ y $4+1$ dimensiones [93]-[96]. En un trabajo reciente, K. Becker, M. Becker y Strominger [97] introdujeron una cantidad análoga para un sistema tridimensional que, a la luz de nuestra construcción basada en el álgebra supersimétrica, puede ser entendida como la extensión de la forma de Nester generalizada a sistemas en $2+1$ dimensiones (6.66).

6.5 Cotas y Ecuaciones de Bogomol'nyi del sistema

Hemos conseguido escribir el álgebra de supercargas $N = 2$ en términos de la circulación de la forma de Nester generalizada. Las cargas, a su vez, fueron construidas a partir de un parámetro ϵ cuya condición de espinor covariantemente constante en el infinito aún debe ser probada. Mostraremos a continuación, en nuestro modelo tridimensional, que la integral de línea de la forma de Nester generalizada ω definida anteriormente es definida positiva. Obtendremos, a partir de este resultado, la cota de Bogomol'nyi del sistema y su conexión con la supergravedad extendida $N = 2$.

Primeramente, podemos usar el teorema de Stokes para escribir la integral de ω como una integral de superficie sobre Σ:

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \epsilon^{\mu\nu\beta}\nabla_\beta(\bar{\epsilon}\hat{\nabla}_\mu\epsilon)d\Sigma_\nu \ , \qquad (6.67)$$

cuyo integrando puede expandirse según:

$$\epsilon^{\mu\nu\beta}\nabla_\beta(\bar{\epsilon}\hat{\nabla}_\mu\epsilon) = \epsilon^{\mu\nu\beta}\overline{\hat{\nabla}_\beta\epsilon}\hat{\nabla}_\mu\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\beta}\bar{\epsilon}[\hat{\nabla}_\beta, \hat{\nabla}_\mu]\epsilon \ . \qquad (6.68)$$

Usando la definición de la derivada supercovariante (6.35), encontramos que el conmutador del segundo término puede escribirse como:

$$[\hat{\nabla}_\mu, \hat{\nabla}_\nu] = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{ab}\Sigma_{ab} + \frac{iqv^2\kappa^2}{2} F_{\mu\nu} + \frac{i\kappa^2}{2}(\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu), \tag{6.69}$$

Ahora, introduciendo este resultado en (6.68) y teniendo en cuenta las ecuaciones de Einstein (6.42), podemos escribir el integrando (6.67) en términos de las leyes de transformación frente a la supersimetría extendida para los campos fermiónicos λ y χ, según la siguiente expresión:

$$\epsilon^{\mu\nu\beta}\nabla_\beta(\bar{\epsilon}\hat{\nabla}_\mu\epsilon) = \epsilon^{\mu\nu\rho}\overline{\hat{\nabla}_\mu\epsilon}\hat{\nabla}_\rho\epsilon + \frac{\kappa^2}{2}\left[\overline{\delta_\epsilon\lambda}\gamma^\nu\delta_\epsilon\lambda + \overline{\delta_\epsilon\chi}\gamma^\nu\delta_\epsilon\chi\right] . \tag{6.70}$$

Elegiremos, ahora, una superficie de integración Σ tipo-espacio, de modo que el diferencial de superficie puede escribirse como $d\Sigma_\mu = (d\Sigma_t, \vec{0})$. Entonces, solamente necesitamos calcular la componente temporal de la ecuación (6.70) la cuál, tras algunas operaciones en el álgebra de Clifford, se lee:

$$\begin{aligned}\epsilon^{t\nu\beta}\nabla_\beta(\bar{\epsilon}\hat{\nabla}_\mu\epsilon) &= \left(\gamma^i\hat{\nabla}_i\epsilon\right)^\dagger\left(\gamma^j\hat{\nabla}_j\epsilon\right) - g^{ij}\left(\hat{\nabla}_i\epsilon\right)^\dagger\left(\hat{\nabla}_j\epsilon\right) \\ &+ \frac{\kappa^2}{2}\left[\delta_\epsilon\lambda^\dagger\delta_\epsilon\lambda + \delta_\epsilon\chi^\dagger\delta_\epsilon\chi\right] .\end{aligned} \tag{6.71}$$

Es posible ver, en este punto, que la imposición de la siguiente condición,

$$\gamma^i\hat{\nabla}_i\epsilon = 0 , \tag{6.72}$$

generalización de la llamada condición de Witten [56], conduce a que el miembro derecho de la ecuación (6.71) sea definido positivo

$$\epsilon^{t\nu\beta}\nabla_\beta(\bar{\epsilon}\hat{\nabla}_\mu\epsilon) \geq 0 . \tag{6.73}$$

Entonces, recordando la relación (6.67) entre el álgebra de supercargas y la circulación de ω, llegamos a la siguiente cota:

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| \geq 0 , \tag{6.74}$$

que es saturada si y sólo si las configuraciones de campos bosónicos son tales que preservan el background puramente bosónico:

$$\delta_\epsilon\lambda = 0 , \tag{6.75}$$

$$\delta_\epsilon \chi = 0 \tag{6.76}$$

y, por último,

$$\hat{\nabla}_i \epsilon = 0 \; . \tag{6.77}$$

La condición (6.77) refleja nuestra elección de la superficie de integración Σ. Es inmediato ver que una elección genérica implicaría, en lugar de (6.77),

$$\hat{\nabla}_\mu \epsilon = 0 \; . \tag{6.78}$$

El hecho de que nos hayamos visto forzados a utilizar la condición de Witten generalizada (6.72), proviene de la necesidad de imponer las condiciones de gauge y los vínculos sobre los campos a fin de que, como vimos en la última sección del capítulo anterior, la supercarga $\mathcal{Q}[\epsilon]$ pueda actuar como el generador de las transformaciones de supersimetría local. Debemos eliminar los grados de libertad longitudinales (que pueden tener norma negativa), forzando la elección del gauge transverso:

$$\gamma^i \psi_i = 0 \; . \tag{6.79}$$

Los parámetros ϵ de las transformaciones de supersimetría local deben ser tales que mantengan las condiciones de gauge introducidas. La condición (6.79) es preservada, justamente, si se satisface la condición de Witten generalizada (6.72). Las transformaciones definidas con los paréntesis de Dirac preservan automáticamente esta condición.

La forma explícita de las ecuaciones (6.75)-(6.78) que hemos obtenido para el caso en el que la cota (6.74) se encuentra saturada, resulta:

$$\delta_\epsilon \lambda = \frac{1}{2}\left[F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \frac{iq}{2}(|\phi|^2 - v^2)\right]\epsilon = 0 \; , \tag{6.80}$$

$$\delta_\epsilon \chi = \frac{1}{2}(\not{D}\phi)\epsilon = 0 \; , \tag{6.81}$$

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = \left(\mathcal{D}_\mu + i\frac{\kappa^2}{4}(J_\mu + qv^2 A_\mu)\right)\epsilon = 0 \; . \tag{6.82}$$

Si no imponemos, en este punto, alguna restricción sobre el parámetro de la transformación, es inmediato observar que las ecuaciones (6.80) y (6.81) sólo admiten una solución trivial. De hecho, escribiendo

$$\epsilon \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_+ \\ \epsilon_- \end{pmatrix} \; , \tag{6.83}$$

podemos comprobar que las condiciones

$$\delta_{\epsilon_+}\lambda = \delta_{\epsilon_+}\chi = 0 \ , \tag{6.84}$$

implican $\delta_{\epsilon_-}\lambda \neq 0$, $\delta_{\epsilon_-}\chi \neq 0$ para soluciones no-triviales. Entonces, dado que nos interesa encontrar ecuaciones de Bogomol'nyi para configuraciones topológicamente no-triviales, tiene sentido que asignemos al parámetro ϵ una cierta 'quiralidad'[1]. Impondremos, por ejemplo, que ϵ tenga sólo una componente compleja independiente ϵ_+,

$$\epsilon \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_+ \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{6.85}$$

solución de la condición de Witten generalizada (6.72) que, bajo la condición anterior, toma la forma:

$$\hat{\nabla}_z \epsilon_+ = 0 \ . \tag{6.86}$$

Para esta elección del parámetro, resulta inmediato comprobar que

$$\delta_{\epsilon_+}\lambda = \left(\mathcal{F} - \frac{q}{2}(|\phi|^2 - v^2)\right)\epsilon_+ = 0 \ , \tag{6.87}$$

$$\delta_{\epsilon_+}\chi = \frac{1}{2}(D_z\phi)\epsilon_+ = 0 \ , \tag{6.88}$$

son las mismas ecuaciones de Bogomol'nyi para los campos de materia del caso rígido (2.56) y (4.32) escritas en forma covariante. De haber realizado la otra elección posible en la 'quiralidad'del parámetro de supersimetría, habríamos obtenido el otro conjunto de ecuaciones de autodualidad (2.57) y (4.33). Más aún, podemos afirmar, a esta altura, que (6.87) y (6.88) son las ecuaciones de Bogomol'nyi de la materia para el modelo abeliano de Higgs acoplado a la gravedad, comparándolas con las obtenidas originalmente, en un contexto no-supersimétrico, por Comtet y Gibbons en el mismo modelo [90]. Lo que aún no resulta del todo claro en esta etapa de nuestra construcción, es

[1] La elección que realizamos aquí corresponde, en realidad, a aquella que da lugar a la combinación de supercargas que se anula sobre las configuraciones que tienen un valor de la carga central igual a la masa. Esto resulta claro tras verificar que el álgebra de los generadores resulta un álgebra de supersimetría global en términos de los parámetros en el infinito, por lo que sus representaciones también se corresponden con aquellas del caso rígido [14].

cómo están relacionadas las ecuaciones anteriores con la existencia de una cota de naturaleza topológica en el modelo. Para aclarar este punto, debemos apelar al cálculo del álgebra de supercargas (6.64), que podemos escribir, explicitando la forma de la superderivada covariante, como:

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| = \frac{4}{\kappa^2} \oint_{\partial\Sigma} \bar{\epsilon} \mathcal{D}_\mu \epsilon dx^\mu + i \oint_{\partial\Sigma} \bar{\epsilon}\epsilon (J_\mu + qv^2 A_\mu) dx^\mu \ . \tag{6.89}$$

La integral está realizada sobre el contorno $\partial\Sigma$ de la superficie tipo-espacio Σ, que asumiremos de radio R grande pero finito para evitar divergencias infrarrojas. Podemos hacer uso, entonces, del comportamiento asintótico de los distintos campos que aparecen en (6.89). La conexión espinorial (6.49) que contribuye a la derivada covariante en el primer término del lado derecho de la ecuación anterior, se comporta según:

$$\omega_{\bar{z}}^0 \to \frac{\kappa^2 M}{2\bar{z}} \ . \tag{6.90}$$

Respecto del campo electromagnético y de la corriente del campo de Higgs, a fin de que la masa de la configuración (6.58) resulte finita, las siguientes condiciones asintóticas deben verificarse:

$$A_z \to -\frac{in}{qz} \quad , \quad A_{\bar{z}} \to \frac{in}{q\bar{z}} \quad , \quad J_z \to O\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right) \quad , \quad J_{\bar{z}} \to O\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right) \ , \tag{6.91}$$

donde n es el número topológico que caracteriza la cantidad de cuantos de flujo magnético de la solución. Finalmente, el comportamiento asintótico del parámetro ϵ, será escrito en la forma:

$$\epsilon \to \Theta(z\bar{z})\epsilon_\infty \ , \tag{6.92}$$

donde $\Theta(z\bar{z})$ puede ser determinada a partir de la condición (6.72). Usando los comportamientos asintóticos anteriores, evaluamos la integral de línea (6.89), que resulta:

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| = (M\bar{\epsilon}_\infty \gamma^0 \epsilon_\infty - v^2 n \bar{\epsilon}_\infty \epsilon_\infty)\Theta(z\bar{z})^2. \tag{6.93}$$

La relación de este resultado con el álgebra global de supersimetría extendida (4.25) no es un accidente: como discutimos anteriormente, las transformaciones de supersimetría en el infinito espacial deben satisfacer un álgebra supersimétrica rígida. Debemos demostrar que los parámetros ϵ son supercovariantemente constantes en el infinito para poder garantizar que la supersimetría es válida sobre las soluciones del sistema. De acuerdo con lo explicado anteriormente, consideraremos un parámetro espinorial "quiral" ϵ_+, de modo que, tras determinar la forma explícita de la función $\Theta(z\bar{z})$ a partir de (6.86),

$$\Theta(z\bar{z}) = (z\bar{z})^{-\frac{nv^2\kappa^2}{4}} , \tag{6.94}$$

la expresión del álgebra de supercargas (6.93) se reduzca a:

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| = (M - v^2 n)\epsilon^\dagger_{+\infty}\epsilon_{+\infty}\Theta(R)^2 . \tag{6.95}$$

De este modo, dejamos al descubierto el hecho de que la cota obtenida anteriormente (6.74), no es otra cosa que la cota de Bogomol'nyi del sistema considerado,

$$M \geq v^2 n , \tag{6.96}$$

y, por lo tanto, las ecuaciones (6.87) y (6.88) son, en efecto, las ecuaciones de Bogomol'nyi para los campos de materia del modelo. Las soluciones de las mismas corresponden, claro está, a vórtices de Nielsen-Olesen acoplados al campo gravitacional. De haber elegido la condición de 'anti-quiralidad'ϵ_-, resulta evidente que hubiéramos arribado a las ecuaciones de Bogomol'nyi correpondientes a soluciones de anti-vórtice. La masa de nuestra configuración de campos, definida en (6.58), resulta, entonces, acotada por el número de cuantos de flujo magnético de la solución.

Las ecuaciones de Bogomol'nyi de los campos de materia, se ven suplementadas por una ecuación adicional que resulta de (6.82),

$$\delta_{\epsilon_+}\psi_\mu = \left(\mathcal{D}_\mu + i\frac{\kappa^2}{4}(J_\mu + qv^2 A_\mu)\right)\epsilon_+ = 0 , \tag{6.97}$$

y debe ser satisfecha por el parámetro ϵ_+ a fin de que la cota pueda ser alcanzada. La resolución de esta ecuación hace que el espinor ϵ_+ sea supercovariantemente constante. De modo que, siendo más claros, ϵ_+ debe ser asintóticamente un espinor de Killing para que hayan supersimetrías norotas, e idénticamente un espinor tal si además es solución de la ecuación de Bogomol'nyi del campo gravitacional (6.97). La razón por la que hemos dado este nombre a la ecuación anterior resulta evidente de su aparición como condición para que la cota de Bogomol'nyi sea saturada. Claro que esta denominación perdería todo sentido si la ecuación (6.97) no tuviera soluciones. Analizaremos a continuación, pues, este punto.

6.6 Espinores de Killing

En esta sección mostraremos que en presencia de vórtices que satisfagan las ecuaciones de Bogomol'nyi de la materia existen espinores de Killing, evadiéndose así, por razones topológicas, la restricción señalada por Witten. Es decir, la ecuación de Bogomol'nyi gravitacional tiene, en ese caso, solución. La resolución de las ecuaciones de Einstein del modelo como consecuencia de dicha ecuación de Bogomol'nyi, condición necesaria para la consistencia integral de toda la discusión, será convenientemente explicada. Finalmente, daremos consistencia completa a todo el procedimiento mostrando, desde un punto de vista geométrico, la existencia de espinores de Killing asintóticos. Dicha existencia aparecerá a partir de una cancelación de holonomías que tiene un interesante significado físico. Comentaremos acerca de las consecuencias de este resultado sobre la discusión relacionada con la existencia de la constante cosmológica y la degeneración de bosones y fermiones, introducida anteriormente.

Consideremos, entonces, la ecuación de Bogomol'nyi del campo gravitacional (6.97). Existirán soluciones para esta ecuación siempre que se satisfaga la condición de integrabilidad

$$\left[\hat{\nabla}_\mu, \hat{\nabla}_\nu\right] \epsilon_+ = 0 \ . \tag{6.98}$$

El conmutador de las derivadas supercovariantes resulta, en general, igual a la curvatura de la conexión que permite definir dicha diferenciación. En nuestro caso, es inmediato ver a partir de la ecuación (6.35), que se satisface:

$$\left[\hat{\nabla}_\mu, \hat{\nabla}_\nu\right] = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{\ \ a} \gamma_a + i\frac{\kappa^2}{4}\left(J_{\mu\nu} + qv^2 F_{\mu\nu}\right) \ , \tag{6.99}$$

donde

$$J_{\mu\nu} = \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu \ . \tag{6.100}$$

Podemos evaluar ahora la condición de integrabilidad (6.98) sobre una configuración de campos estática y un espinor ϵ_+ que satisfaga la condición de Witten generalizada (6.86), resultando:

$$\left[\frac{1}{2} R_{z\bar{z}} + i\frac{\kappa^2}{4}\left(J_{z\bar{z}} + qv^2 F_{z\bar{z}}\right)\right] \epsilon_+ = 0 \ , \tag{6.101}$$

mientras que la componente $t - t$ de las ecuaciones de Einstein (6.42) sobre la misma configuración, se reduce a:

$$\frac{4}{\kappa^2}\partial_{\bar{z}}\partial_z \log\Omega = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F} - \frac{q}{2}(|\phi|^2 - v^2)\right)^2 + 2D_z\phi D_{\bar{z}}\phi^* - i(J_{z\bar{z}} + qv^2F_{z\bar{z}}) \; . \tag{6.102}$$

Dado que la componente del tensor de curvatura que aparece en la ecuación (6.101), no es otra cosa que

$$R_{z\bar{z}} = 2\partial_{\bar{z}}\partial_z \log\Omega \; , \tag{6.103}$$

resulta inmediato comprobar que la condición de integrabilidad se satisface si y sólo si las ecuaciones de Einstein, restringidas por las ecuaciones de Bogomol'nyi de la materia (6.87) y (6.88), son a su vez satisfechas. La existencia de soluciones de vórtice para el modelo abeliano de Higgs (no-supersimétrico) acoplado a la gravedad [90], garantizarían, de este modo, la existencia de espinores de Killing sobre dichas configuraciones. Este notable resultado, obtenido inicialmente en la Ref.[97], constituye un contraejemplo a la presunta inexistencia de espinores de Killing en espacios tridimensionales esgrimida por Witten [24]. La misma conclusión fue alcanzada de una manera alternativa, siguiendo estrictamente la argumentación presentada en esta Tesis, poco tiempo después [78]. Veremos, más adelante, cómo puede generalizarse este resultado para su aplicación sobre otros sistemas tridimensionales [79].

En la sección 6.3 habíamos visto que toda configuración masiva conduce a un espacio-tiempo cónico, cuyo ángulo de déficit da lugar a una holonomía no-trivial por la que no pueden existir espinores de Killing asintóticos bien definidos. En el modelo abeliano de Higgs acoplado a supergravedad $N = 2$, este obstáculo de naturaleza geométrica puede ser eludido, esencialmente, debido a la introducción de un término de Fayet-Iliopoulos que resulta, como discutimos oportunamente, en un gravitino cargado [79]. Asimismo, el parámetro de la transformación $N = 2$ evidencia la aparición de una carga eléctrica y, de este modo, la derivada supercovariante recibe una contribución proporcional al potencial vector[2], como resulta evidente de la ecuación (6.35). El

[2]La derivada supercovariante recibe, también, una corrección debida a la corriente del campo de Higgs. A los efectos de analizar la posible existencia de espinores de Killing asintóticos, no obstante, dicha contribución no tiene relevancia ya que la condición de energía finita le exige su anulación asintótica (ver ecuación (6.104)).

transporte paralelo de un espinor η alrededor de una curva cerrada Γ de radio grande, que rodea a las fuentes de materia, se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\eta(x)|_{2\pi} &= \mathcal{P}\exp\left(-\frac{i}{2}\oint_\Gamma \omega_\mu^a\gamma_a dx^\mu + i\frac{\kappa^2}{4}\oint_\Gamma (J_\mu + qv^2A_\mu)dx^\mu\right)\eta(x)|_0 \\
&= \mathcal{P}\exp\left(-\frac{i}{2}\oint_\Gamma \omega_\mu^a\gamma_a dx^\mu + i\frac{qv^2\kappa^2}{4}\oint_\Gamma A_\mu dx^\mu\right)\eta(x)|_0 \,. \qquad (6.104)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como consecuencia de que el gravitino haya adquirido una carga, una fase de Bohm-Aharonov aparece adicionada a la fase geométrica proveniente de la conexión espinorial.

Ahora, si asumimos una configuración estática y un parámetro con 'quiralidad'definida, la ecuación (6.104) puede escribirse:

$$\eta(x)_\pm|_{2\pi} = \exp\left[\pm i\pi\kappa^2\left(M \mp v^2 n\right)\right]\eta(x)_\pm|_0 \,, \qquad (6.105)$$

de modo que, toda vez que la cota de Bogomol'nyi (6.96) se encuentre saturada, las holonomías se cancelarán exactamente dando lugar a la existencia de espinores de Killing asintóticos bien definidos. Por otra parte, si consideramos un parámetro 'quiral'η_+, una configuración que sature la cota de Bogomol'nyi romperá la supersimetría generada por η_-, como puede verse a partir de que, en ese caso, las fases en (6.105) no se cancelen. Por consiguiente, nos encontramos nuevamente con el hecho de que los vórtices que saturan la cota de Bogomol'nyi rompen la mitad de las supersimetrías. Es decir que, en principio, resultaría posible construir una supercarga no-rota sobre configuraciones que saturen la cota de Bogomol'nyi, en cuyo caso las conclusiones de Witten referidas al problema de la constante cosmológica dejarían de ser válidas.

Para investigar este punto, construyamos explícitamente, el supermultiplete en el que transforma el vórtice que satura la cota de Bogomol'nyi a partir de los modos cero fermiónicos presentes en el background solitónico. Al igual que en el caso rígido, los modos cero de Nambu-Goldstone están dados por las transformaciones generadas por la carga de la supersimetría rota, digamos, ϵ_-:

$$\delta_{\epsilon_-}\lambda = q(|\phi|^2 - v^2)\epsilon_- \neq 0 \,, \qquad (6.106)$$

$$\delta_{\epsilon_-}\chi = \frac{1}{2}(D_{\bar z}\phi)\epsilon_- \neq 0 \,, \qquad (6.107)$$

$$\delta_{\epsilon_-}\psi_\mu = \left(\mathcal{D}_\mu + i\frac{\kappa^2}{4}(J_\mu + qv^2 A_\mu)\right)\epsilon_- \neq 0 \ . \tag{6.108}$$

Sin embargo, a diferencia del sistema con invarianza supersimétrica global, la ley de transformación del gravitino aporta una contribución divergente a la norma de dichos modos. De hecho:

$$\int d^2z(\delta_{\epsilon_-}\psi_\mu)^\dagger(\delta_{\epsilon_-}\psi_\mu)\Omega^{-1} \sim \int \frac{d^2z}{|z|^2} \ , \tag{6.109}$$

debido al comportamiento asintótico de la conexión espinorial, el que no hace más que poner nuevamente de manifiesto la estructura asintóticamente cónica del espacio-tiempo tridimensional [97].

Debido a la no-normalizabilidad de los modos cero fermiónicos producida por la contribución de largo alcance del gravitino, los mismos no entran en la construcción del espacio de Hilbert físico. Asi, el supermultiplete correspondiente a las configuraciones de vórtice que saturan la cota de Bogomol'nyi no puede ser construido dentro del espacio de soluciones admisibles de la teoría. El argumento de Witten, en consecuencia, según el cual la ausencia de una constante cosmológica no implica degeneración entre bosones y fermiones, tiene validez en este modelo, aún cuando existan espinores de Killing asintóticos en el background de ciertas configuraciones de vórtice.

6.7 Construcción General y un ejemplo: CP^n

Terminaremos este capítulo presentando brevemente un conjunto de argumentos que muestran la generalidad de los resultados obtenidos en las secciones anteriores para el modelo abeliano de Higgs acoplado a supergravedad $N = 2$. Hemos probado en el capítulo anterior, que los generadores de supersimetría local pueden escribirse en términos del valor asintótico del parámetro de la transformación y, por consiguiente, obedecen un álgebra de supersimetría rígida. En el capítulo 4, por otra parte, demostramos la conexión entre la existencia de una cota de Bogomol'nyi en un dado modelo bosónico, y el álgebra de supercargas $N = 2$ correspondiente a la extensión supersimétrica de dicho modelo. La carga topológica de la teoría bosónica coincide con la extensión central del álgebra de supersimetría $N = 2$, de modo que la cota de Bogomol'nyi resulta una consecuencia algebraica natural. La mitad de las supersimetrías resultan rotas sobre las soluciones de las ecuaciones de Bogomol'nyi. Por lo tanto, el único elemento que resta demostrar para que un esquema general, análogo al presentado en la sección 4.3, tenga lugar, es el que concierne a la posibilidad de definir transformaciones de supersimetría no-rotas sobre las cuáles edificar la demostración. En otras palabras, debemos realizar una prueba general de la existencia de espinores covariantemente constantes en el infinito, ya que estas son las cantidades que permiten hablar de tales cargas. Discutiremos el caso tridimensional que es el que, en principio, podría presentar dificultades debido a la existencia de singularidades cónicas.

Mostramos, anteriormente, que en un espacio-tiempo tridimensional cualquier configuración masiva genera una simetría asintóticamente cónica. Esto induce, en general, la aparición de una fase de naturaleza geométrica (6.51), proporcional al ángulo de déficit, que impide la existencia de espinores de Killing asintóticos bien definidos. Vimos, no obstante, en las secciones anteriores, que estos espinores existen sobre configuraciones de vórtice del modelo abeliano de Higgs, gracias a la aparición de una fase de Bohm-Aharonov que cancela la holonomía no-trivial debida a la geometría cónica del espacio-tiempo. Más aún, también en 3 dimensiones, una nueva clase de teorías de supergravedad (p,q)-extendidas de Chern-Simons-Poincaré han sido construídas recientemente, y la existencia de espinores de Killing en la teoría $(2,0)$ ha sido probada [98]. Nuevamente, la aparición de una fase adicional, debida en este caso a un campo vectorial de automorfismo que está presente en el modelo, es la responsable de dicha existencia, cancelando al ángulo de déficit. Así, podemos esperar que este mecanismo no sea una peculiaridad de estos modelos, sino una propiedad general de, al menos, un conjunto de modelos tridimensionales de materia acoplada al campo gravitatorio.

Para explorar esta última posibilidad, consideremos una teoría de campos en $2+1$ dimensiones, de materia acoplada mínimamente a un campo de gauge y al campo gravitacional, en la que pueda ser definida una carga topológica. Podemos construir, en general, la corriente topológicamente conservada J_μ a partir de un potencial A^λ, según:

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu A^\lambda \ . \tag{6.110}$$

La carga topológica correspondiente, toma la forma:

$$T = \int_\Sigma J^\mu d\Sigma_\mu = \oint_{\partial\Sigma} A_\mu dx^\mu \ , \tag{6.111}$$

donde las integrales son realizadas sobre una superficie tipo-espacio Σ y su contorno $\partial\Sigma$.

Dado que estamos considerando el acoplamiento de este sistema a supergravedad $N = 2$, el potencial de gauge pertenecerá a un multiplete vectorial, de modo que la derivada supercovariante estará definida, tras eliminar los campos auxiliares del multiplete de Einstein [64], como:

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu(\omega, \mathcal{A}) \equiv \mathcal{D}_\mu(\omega) + i\frac{\kappa^2}{4}\mathcal{A}_\mu \tag{6.112}$$

con $\mathcal{A}_\mu = \sum \mathcal{A}^i_\mu$, donde $\mathcal{A}^i_\mu$ son las componentes de espín-1 de cada multiplete vectorial que haya sido acoplado al supermultiplete gravitacional. Si consideramos la aplicación de esta derivada supercovariante sobre ψ_μ, podemos concluir que, en cierto sentido, el gravitino adquirió una *carga*[3]. Esta carga generará una fase que eventualmente podría cancelar la holonomía y permitir la existencia de espinores de Killing asintóticos. Es interesante resaltar que el campo A_μ no tiene por qué ser un campo dinámico: basta con su presencia en la derivada supercovariante. Veremos, posteriormente, que éste es el caso del modelo CP^n, en el que A_μ es, simplemente, un campo auxiliar.

Vimos anteriomente que la supercarga compleja asociada a las transformaciones de supersimetría $N = 2$ de un cierto lagrangiano, está dada por una integral de superficie, por lo que el álgebra de supercargas puede escribirse como la circulación de la forma de Nester generalizada correspondiente al modelo considerado,

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| = \frac{4}{\kappa^2}\oint_{\partial\Sigma} \bar{\epsilon}\hat{\mathcal{D}}_\mu(\omega, \mathcal{A})\epsilon dx^\mu \ . \tag{6.113}$$

Si elegimos un parámetro 'quiral', y condiciones apropiadas de comportamiento asintótico para los campos de la teoría, la expresión anterior, para configuraciones estáticas, toma la forma:

$$\{\bar{\mathcal{Q}}[\epsilon], \mathcal{Q}[\epsilon]\}| = (M - \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A}_\mu dx^\mu)\epsilon^\dagger_+(\infty)\epsilon_+(\infty) \ , \tag{6.114}$$

donde M es la masa de la distribución de materia. En la ecuación (6.113) podemos aplicar el teorema de Stokes, como lo hemos hecho para el modelo

[3]Por ejemplo, en el modelo de la Ref.[98], corresponde a la denominada carga de automorfismo, que aparece en la supergravedad de Poincaré $(2,0)$.

abeliano de Higgs. Una argumentación análoga a la allí expuesta [79] nos lleva a que, tras la imposición de la condición de Witten generalizada sobre el espinor,

$$\gamma^i \hat{\mathcal{D}}_i(\omega, \mathcal{A})\epsilon_+ = 0 \ , \tag{6.115}$$

el álgebra de cargas resulta definida positiva,

$$M \geq \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A}_\mu dx^\mu \ , \tag{6.116}$$

y la igualdad es verificada por configuraciones de campo que satisfacen

$$\delta_{\epsilon_+}\Psi = 0 \ , \tag{6.117}$$

para todos los campos fermiónicos del modelo, y que admiten la existencia de un espinor supercovariantemente constante,

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu(\omega, \mathcal{A})\epsilon_+ = 0 \ . \tag{6.118}$$

Las ecuaciones de primer orden en las derivadas parciales (6.117), no son otra cosa que las ecuaciones de Bogomol'nyi de materia del sistema considerado. Si existen soluciones con topología no-trivial para este conjunto de ecuaciones, aún en el modelo no-supersimétrico, resulta inmediato que la condición de integrabilidad de la ecuación de Bogomol'nyi gravitacional (6.118), es exactamente igual a la componente $t-t$ de las ecuaciones de Einstein sobre el espacio definido por las configuraciones que resuelven (6.117) [79].

Como discutimos anteriormente, la posible existencia de alguna supersimetría no-rota se debe buscar en la exitencia de los espinores de Killing asintóticos. En $2+1$ dimensiones, el hecho de que cualquier configuración de materia genere un espacio-tiempo asintóticamente cónico previene, en general, dicha existencia. Sin embargo, observemos que en la construcción general que estamos llevando a cabo, la derivada supercovariante (6.112) recibe una contribución adicional de cada uno de los campos de espín-1 que se acoplan, a través de un supermultiplete vectorial, a la supergravedad. Para examinar las consecuencias que esta contribución adicional tiene sobre la posible existencia de espinores covariantemente constantes en el infinito, consideraremos el transporte paralelo de un espinor 'quiral'ϵ_+ a lo largo de una curva cerrada Γ que rodea a las fuentes de materia,

$$\epsilon_+(x)|_{2\pi} = \exp\left[i\pi\kappa^2\left(M - \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A}_\mu dx^\mu\right)\right]\epsilon_+(x)|_0 \ . \tag{6.119}$$

Resulta, y ya no es un hecho sorprendente, que la condición de cancelación de holonomías en la ecuación anterior es la misma que la de saturación de la cota de Bogomol'nyi. Por lo tanto, si asumimos que existen soluciones a las ecuaciones de Bogomol'nyi de materia con topología no-trivial, resulta inmediato que los siguientes hechos tienen lugar simultáneamente:

(i) Existe un espinor de Killing asintótico 'quiral'que permite definir una carga supersimétrica conservada. Es decir, la supersimetría de la configuración resulta la mitad de la que originalmente aparecía en el Lagrangiano. Recordemos, en este sentido, que para configuraciones con topología no-trivial,

$$\delta_{\epsilon_+}\Psi = 0 \Longrightarrow \delta_{\epsilon_-}\Psi \neq 0 \ . \qquad (6.120)$$

(ii) El álgebra que satisface la supercarga mencionada en (i) es un álgebra de supersimetría rígida, a pesar de que genere transformaciones de supergravedad. Por lo tanto, su extensión central estará dada por la carga topológica de la configuración (convenientemente normalizada),

$$T \equiv \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A}_\mu dx^\mu \ . \qquad (6.121)$$

Esto no implica, de modo alguno, la identificación de $\mathcal{A}_\mu$ con el potencial de la corriente topológica A_μ. De hecho, ambos pueden diferir en términos cuya circulación sea nula[4].

(iii) Debido a la solución de la ecuación de integrabilidad, que resulta una inmediata consecuencia de la saturación de las ecuaciones de Bogomol'nyi de materia, podemos afirmar que hay espinores covariantemente constantes en el espacio-tiempo en el que viven estas soluciones.

Notemos, finalmente, que la posibilidad de definir supercargas globales conservadas para estados solitónicos que saturan la cota de Bogomol'nyi, no implica, en principio, una degeneración entre bosones y fermiones. Es más, la construcción de los modos cero fermiónicos de Nambu-Goldstone a partir del generador de la supersimetría rota, evidencia de inmediato la presencia de una

[4]Por ejemplo, en el modelo abeliano de Higgs acoplado a supergravedad $N = 2$, vimos que $\mathcal{A}_\mu$ tiene una contribución proporcional a la corriente del campo de Higgs, cuya circulación es nula debido a las condiciones asintóticas requeridas por cualquier configuración de campos de energía finita.

contribución no-normalizable proveniente del gravitino, de manera análoga a lo presentado en el modelo abeliano de Higgs. La supersimetría remanente no puede ser realizada en el espacio de campos admisibles de la teoría. El resultado de Witten referido al problema de la constante cosmológica en teorías de supergravedad tridimensionales, de este modo, es válido aún cuando el sistema admita espinores de Killing asintóticos debido a la adquisición de una fase de Bohm-Aharonov en un background solitónico.

Ilustraremos en forma breve, para terminar, las ideas descritas anteriormente, analizando su implementación en el modelo CP^n acoplado a la gravedad. Para ello debemos comenzar escribiendo la acción de supergravedad $N = 2$, en un espacio-tiempo $2+1$ dimensional, que contiene a dicho modelo en su sector bosónico. Esto puede ser realizado mediante la reducción dimensional del modelo CP^n acoplado a supergravedad simple en cuatro dimensiones [99]. Escribiremos sólamente la contribución bosónica a la acción $N = 2$, que resulta:

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4\kappa^2} eR + \frac{e}{2}(D_\mu \mathbf{z})^*(D^\mu \mathbf{z}) \right) , \tag{6.122}$$

donde $\mathbf{z} = (z^1 \ldots z^n)$ son n campos escalares complejos, e es el determinante de la tríada, R es el escalar de curvatura y $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, con A_μ un campo auxiliar. Se impone, finalmente, la siguiente condición sobre los campos escalares:

$$|\mathbf{z}|^2 = \sum_a |z^a|^2 = 1 , \tag{6.123}$$

junto con las correspondientes relaciones para sus compañeros fermiónicos de supermultiplete. El conjunto de transformaciones de supersimetría local para los campos fermiónicos, que acompañan a aquellos que aparecen en la acción (6.122), resulta:

$$\delta\psi_\mu| \equiv \frac{2}{\kappa}\hat{\mathcal{D}}_\mu(\omega, A)|\epsilon = \frac{2}{\kappa}\left(\mathcal{D}_\mu(\omega)| + \frac{\kappa^2}{4}\mathbf{z} \overleftrightarrow{D}_\mu \mathbf{z}^* \right) \epsilon , \tag{6.124}$$

y

$$\delta\chi| = \frac{1}{2} \not{\partial}\mathbf{z}\epsilon , \tag{6.125}$$

donde χ es el compañero supersimétrico de $\mathbf{z}$ y ϵ es un espinor de Dirac (complejo), que refleja la existencia de una supersimetría extendida. La ecuación

(6.124) pone en evidencia la extensión de la derivada supercovariante toda vez que un multiplete vectorial se acopla al multiplete de Einstein, tal como discutimos anteriormente, con

$$\mathcal{A}_\mu \equiv -i\mathbf{z} \overleftrightarrow{D}_\mu \mathbf{z}^* \ . \tag{6.126}$$

Resulta muy simple calcular en este modelo la supercarga $\mathcal{Q}[\epsilon]$ a partir de la supercorriente conservada

$$\mathcal{J}^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\bar{\Psi}_\rho \hat{\mathcal{D}}_\nu(\omega, A)\epsilon - \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\chi}^a\gamma^\mu \ \partial\!\!\!/\phi^a\epsilon \ , \tag{6.127}$$

y mostrar que puede ser escrita, usando las ecuaciones de movimiento, como la integral de superficie dada en (6.62). Podemos calcular el álgebra generada por esta supercarga realizando la correspondiente circulación de la forma de Nester generalizada, y seguir uno a uno los pasos presentados en la construcción general, para obtener, sobre configuraciones estáticas, la cota de Bogomol'nyi $M \geq |T|$ con T dada por:

$$T = -i \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{z} \overleftrightarrow{D}_\mu \mathbf{z}^* dx^\mu \ . \tag{6.128}$$

Notemos que en el presente modelo, $\mathcal{A}_\mu$ coincide exactamente con el potencial vector de la corriente topológica. Siguiendo las prescripciones discutidas en esta sección, podemos encontrar las ecuaciones de autodualidad para los campos escalares, eligiendo un parámetro espinorial con 'quiralidad'definida ϵ_+, e imponiendo:

$$\delta_{\epsilon_+}\chi| = 0 \Longrightarrow D_i\mathbf{z} = i\epsilon_{ij}D_j\mathbf{z} \ , \tag{6.129}$$

así como la ecuación de Bogomol'nyi para el campo gravitacional:

$$\delta_{\epsilon_+}\psi_\mu| = 0 \Longrightarrow \left(\mathcal{D}_\mu(\omega)| + \frac{\kappa^2}{4}\mathbf{z} \overleftrightarrow{D}_\mu \mathbf{z}^*\right)\epsilon_+ = 0 \ , \tag{6.130}$$

cuya condición de integrabilidad,

$$\left[\mathcal{D}_\mu(\omega)| + \frac{\kappa^2}{4}\mathbf{z} \overleftrightarrow{D}_\mu \mathbf{z}^*, \mathcal{D}_\nu(\omega)| + \frac{\kappa^2}{4}\mathbf{z} \overleftrightarrow{D}_\nu \mathbf{z}^*\right]\epsilon_+ = 0 \tag{6.131}$$

reproduce a las ecuaciones de Einstein sobre configuraciones que son solución de (6.129). Si hubiéramos elegido un parámetro espinorial de 'quiralidad'ϵ_-, encontraríamos configuraciones antisolitónicas. Finalmente, resulta evidente que la condición de cancelación de holonomías está dada por la saturación de la cota de Bogomol'nyi. Consecuentemente, podremos definir espinores de Killing asintóticos sobre los estados solitónicos que saturen dicha cota.

Capítulo 7

Conclusiones

Hemos estudiado en esta Tesis la relación entre la existencia de cotas de carácter topológico para la masa de diversos sistemas físicos (cotas de Bogomol'nyi) y la posibilidad de extender estos modelos de manera tal que tengan una supersimetría extendida $N = 2$. Hemos utilizado como laboratorio al modelo abeliano de Higgs, generalización relativista del modelo de Ginzburg-Landau, de gran interés en la descripción de diversos fenómenos físicos. Nuestros resultados se aplican a un amplio conjunto de modelos que satisfacen condiciones muy generales.

Hemos visto que la masa de las soluciones de energía finita del modelo abeliano de Higgs en $2 + 1$ dimensiones está acotada por la carga topológica de la configuración, siempre que las constantes de acoplamiento de la teoría verifiquen la relación especial

$$\lambda = \frac{e^2}{8} . \tag{7.1}$$

Cuando dicha cota de Bogomol'nyi es saturada, la configuración es solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (ecuaciones de Bogomol'nyi). Hemos mostrado que la incorporación de este modelo dentro del sector bosónico de una teoría supersimétrica $N = 2$, impone exactamente las mismas restricciones sobre las constantes de acoplamiento. Más aún, el álgebra de supercargas de la teoría $N = 2$ adquiere una extensión central, proporcional a la carga topológica del sistema. De este modo, la existencia de una cota de Bogomol'nyi queda garantizada a partir de las propiedades del álgebra de supersimetría extendida.

El álgebra de supersimetría extendida admite dos tipos de multipletes masivos de distinta dimensionalidad, según se verifique o no la identidad entre la masa y la extensión central. Consecuentemente, dado que el número de estados es una cantidad discreta que no debería resultar afectada por correcciones cuánticas, se conjetura que la cota de Bogomol'nyi es exacta a nivel cuántico. Este resultado se encuentra en la base de una serie de trabajos que han despertado gran interés en los últimos dos años. Se trata de trabajos en los que se plantea la resolución exacta de teorías de campos tetradimensionales [20, 100], conjeturas de dualidad 'fuerte-débilén teorías de campos y teorías de cuerdas [20], el conteo de estados microscópicos de la teoría de cuerdas que dan lugar a la entropía de Bekenstein-Hawking en los agujeros negros [27, 28, 29], conjeturas relacionadas con la existencia de teorías que unifican a las distintas clases de supercuerdas (teoría M y teoría F) [101, 102], la clasificación de p-branas como soluciones de bajas energías de las teorías anteriores [25, 26], etc. En todos ellos, el "origen supersimétrico" de las cotas de Bogomol'nyi resulta una herramienta básica.

Vimos que las ecuaciones de Bogomol'nyi imponen la condición de que la configuración del sistema preserve la mitad de las supersimetrías del lagrangiano. En sistemas con mayor número de supersimetrías, esta condición puede modificarse conduciendo a la preservación de un cuarto o un octavo de las supersimetrías del Lagrangiano [103]. La extensión de nuestros resultados a modelos con simetría de gauge no-abeliana, de interés en el contexto de las llamadas teorías de gran unificación, ha sido considerada en la Ref.[104]. Hemos considerado, por último, un sistema bidimensional con instantones, mostrando que el esquema anterior puede extenderse al estudio de teorías euclídeas con este tipo de soluciones.

Los trabajos descriptos más arriba corresponden a una supersimetría global. Pudimos también extender nuestro tratamiento al caso de teorías que acoplan a un sistema de materia con el campo gravitacional. Para estos sistemas vimos que existe una ecuación de primer orden adicional, a la que identificamos como la ecuación de Bogomol'nyi del campo gravitacional. Para teorías en un espacio-tiempo de dimensión $d \geq 4$, dicha ecuación conduce a severas restricciones sobre la métrica del espacio-tiempo. En una teoría tridimensional, en cambio, mostramos que el espacio-tiempo resulta asintóticamente cónico para cualquier configuración masiva, como resulta prescrito por las ecuaciones de Einstein.

A efectos de estudiar estos resultados en el modelo abeliano de Higgs, comenzamos por acoplarlo a la supergravedad tridimensional $N = 2$. Para ello, utilizamos el cálculo tensorial supersimétrico (local) a fin de construir la densidad Lagrangiana $N = 1$ en $d = 4$, aplicando luego el procedimiento estándar de reducción dimensional. Dado que el esquema explicado anteriormente está basado en el álgebra de supersimetría extendida, a fin de utilizarlo en el caso local, debimos estudiar el problema de la existencia de espinores supercovariantemente constantes en el infinito. La geometría que produce una configuración masiva en un espacio-tiempo $2 + 1$ dimensional es asintóticamente cónica, lo que implica la existencia de una holonomía no-trivial en el transporte paralelo de dichos espinores alrededor de una curva de radio grande que rodee a las fuentes de materia. Dicha holonomía resulta proporcional al ángulo de déficit del cono, de modo tal que los espinores necesarios para la construcción de las supercargas no-rotas no pueden ser definidos consistentemente en estos espacios.

Demostramos que, dado que los espinores resultan cargados eléctricamente debido al término de Fayet-Iliopoulos, en presencia de los vórtices del modelo abeliano de Higgs adquieren una fase de Bohm-Aharonov. Cuando la configuración de vórtice en cuestión satura la cota de Bogomol'nyi, la fase de Bohm-Aharonov cancela exactamente a la fase geométrica dando lugar a la existencia de una supersimetría no-rota. Así, al igual que en los sistemas no-gravitacionales, la mitad de las supersimetrías del lagrangiano de partida resultan preservadas por la configuración que satura la cota de Bogomol'nyi. Las supercargas no-rotas pueden ser escritas como integrales de superficie,

$$\mathcal{Q}[\epsilon] = 2M_{pl}^{1/2} \oint \bar{\epsilon}\psi_\mu dx^\mu \ , \tag{7.2}$$

y verifican un álgebra de supersimetría global donde la carga central toma el valor de la carga topológica del sistema, repitiendo el esquema anterior.

A partir de esta construcción, se obtiene una ecuación adicional de primer orden. La interpretamos como la ecuación de Bogomol'nyi del campo gravitacional. Su solución está dada por los espinores de Killing del sistema. En los sistemas tridimensionales, esta condición no introduce restricciones adicionales sobre la geometría del espacio-tiempo, cosa que sí ocurre para dimensiones superiores [105]. La condición de integrabilidad de la ecuación de Bogomol'nyi gravitacional, junto con las ecuaciones de Bogomol'nyi para los campos de materia, reproducen a las ecuaciones de Einstein del sistema.

Hemos mostrado que los resultados descriptos anteriormente no son una mera consecuencia de haber utilizado como laboratorio al modelo abeliano de Higgs, sino que son válidos para modelos más generales. En particular, todo sistema tridimensional que admita la definición de una corriente topológica

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu A^\lambda \ , \tag{7.3}$$

y soluciones extendidas de energía finita, se encuadra en el esquema discutido. Este esquema se extiende naturalmente a modelos que admitan soluciones topológicas en un espacio-tiempo de mayor dimensionalidad, donde están ausentes los problemas originados por la estructura asintóticamente cónica característica de los sistemas bidimensionales. El conjunto de modelos es tan amplio como en el caso de las teorías no-gravitacionales previamente consideradas. Hemos visto también que el campo A^λ, potencial vector de la corriente topológica, puede corresponder a un campo auxiliar (sin dinámica) y no a uno de los campos básicos del modelo. Hemos ilustrado esto estudiando el modelo CP^n acoplado a la supergravedad tridimensional $N = 2$.

Los resultados obtenidos en estos sistemas de materia acoplada a la supergravedad $N = 2$ en $2+1$-dimensiones, están relacionados con el denominado 'problema de la constante cosmológica'. Este problema, de gran interés físico, plantea la imposibilidad de descartar *a priori* la existencia de un término constante en la acción de un sistema acoplado a la gravedad. Los resultados experimentales son compatibles con un valor nulo para este término, pero no existen argumentos teóricos concluyentes que permitan comprender este hecho. La supergravedad brinda un marco interesante para estudiar este problema. De hecho, las teorías de supergravedad sin ruptura espontánea de supersimetría, imponen la nulidad de la constante cosmológica. No obstante, el precio a pagar parece excesivo, ya que dichas teorías predicen, por otro lado, un espectro degenerado de bosones y fermiones, hecho que no se observa en la naturaleza.

En el caso particular de las teorías de supergravedad tridimensionales, Witten observó recientemente que la estructura asintóticamente cónica del espacio-tiempo produce una ruptura de toda supersimetría para cualquier estado masivo. De este modo, resulta posible conciliar la predicción de una constante cosmológica nula y, al mismo tiempo, la obtención de un espectro sin degeneraciones no-físicas.

En el conjunto de teorías que estudiamos en esta Tesis hemos probado que existen espinores de Killing asintóticos para configuraciones masivas en teorías de supergravedad extendida en $2+1$ toda vez que dichas configuraciones saturen una cota de Bogomol'nyi. Este resultado se opone a la conjetura de Witten referida a la inexistencia de espinores de Killing asintóticos en $2+1$ dimensiones. Sin embargo, la supersimetría remanente que está asociada a estos espinores, no puede ser realizada físicamente. Esto es debido a que los modos cero fermiónicos, que permiten construir el supermultiplete dentro del cuál transforma la configuración solitónica frente a supersimetría, resultan no-normalizables en estos sistemas, por lo que no deben tenerse en cuenta para la construcción del espacio de Hilbert físico. De este modo, probamos que la inexistencia de un espectro degenerado de bosones y fermiones en una teoría de supergravedad tridimensional, puede ser extendida aún a aquellos sistemas que admitan espinores de Killing asintóticos.

La conexión existente entre las cotas de Bogomol'nyi y la supergravedad extendida tiene importantes consecuencias a nivel cosmológico. Cabe destacar, en este sentido, que la expresión que adopta dicha cota para soluciones de agujero negro (de Reissner-Nordström), coincide con la condición necesaria para la ausencia de singularidades desnudas. Esto ha motivado recientemente que la coincidencia general entre las cotas de Bogomol'nyi y las condiciones de "censura cósmica"haya sido conjeturada [23]. El carácter exacto de esta cota, por otra parte, impide que la evaporación del agujero negro producida por la emisión de partículas elementales neutras continúe tras alcanzar la condición extremal [23]. El interés por las soluciones que saturan cotas de Bogomol'nyi en sistemas gravitacionales ha ido en aumento en estos últimos años, fundamentalmente a raíz de su estrecha vinculación con las conjeturas de dualidad y el cálculo de la entropía de agujeros negros.

Nuestros trabajos se han centrado en modelos en $2+1$ dimensiones. Con más estructura que los modelos bidimensionales que se utilizan habitualmente, proveen muchas de las claves para atacar problemas más realistas en dimensiones mayores. Esperamos así que las técnicas y resultados que hemos obtenido en la presente Tesis puedan extenderse, en particular, a sistemas en un espacio-tiempo de $3+1$ dimensiones. A este problema apuntarán nuestros trabajos futuros.

Apéndice A

Convenciones y Notación

A lo largo de la Tesis hemos trabajado alternativamente en 3 y 4 dimensiones espacio-temporales. Dado que la naturaleza de los espinores difiere en ambos casos y, por lo tanto, también lo hacen, el superespacio y sus supercampos, las matrices de Dirac y otras cantidades, dividiremos este Apéndice en dos partes.

Espacio-tiempo tetradimensional

La métrica minkowskiana plana utilizada es $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(+ - - -)$. En el transcurso de la presente Tesis hemos utilizado, según la convenienvia, las formulaciones biespinorial o de espinores de Dirac. En la primera de ellas, consideramos espinores de Weyl que denotamos como $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ y ψ_α según transformen bajo la representación $(0, \frac{1}{2})$ o la conjugada $(\frac{1}{2}, 0)$ del grupo de Lorentz. En esta notación biespinorial, los índices son subidos y bajados por los tensores antisimétricos $\epsilon^{\alpha\beta}$ y $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ $(\epsilon^{12} = \epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1)$,

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \quad , \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \quad , \quad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad \mathrm{y} \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \; . \tag{A.1}$$

La conexión con la representación usual en términos de espinores de Dirac se obtiene, de manera sencilla, considerando las matrices Γ^A, generadoras del álgebra de Clifford, en la representación de Weyl,

$$\Gamma^A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^A \\ \bar{\sigma}^A & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

donde $\sigma^A = (1, \vec{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^A = (1, -\vec{\sigma})$. Estas matrices llevan índices de distintas representaciones del grupo de Lorentz:

$$\sigma^A_{\alpha\dot{\alpha}} \quad y \quad \bar{\sigma}^{A\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^A_{\beta\dot{\beta}}. \tag{A.3}$$

Las matrices de espín construidas a partir de las matrices de Dirac Σ^{AB} toman, en esta representación, una forma sencilla que permite relacionarlas con los generadores del grupo de Lorentz en las representaciones biespinoriales σ^{AB},

$$\Sigma^{AB} = \frac{1}{2}(\Gamma^A\Gamma^B - \Gamma^B\Gamma^A) = \begin{pmatrix} \sigma^{AB} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{AB} \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

donde

$$\sigma^{AB}{}_\alpha{}^\beta = 1/2(\sigma^A_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{B\dot{\alpha}\beta} - \sigma^B_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{A\dot{\alpha}\beta}) \quad \text{y} \quad \bar{\sigma}^{AB\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 1/2(\bar{\sigma}^{A\dot{\alpha}\alpha}\sigma^B_{\alpha\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{B\dot{\alpha}\alpha}\sigma^A_{\alpha\dot{\beta}}). \tag{A.5}$$

A partir de la definición de las matrices σ, se verifican las siguientes propiedades:

$$(\sigma^A\bar{\sigma}^B + \sigma^B\bar{\sigma}^A)_\alpha^{\ \beta} = 2\eta^{AB}\delta_\alpha^{\ \beta} \ , \tag{A.6}$$

$$(\bar{\sigma}^A\sigma^B + \bar{\sigma}^B\sigma^A)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 2\eta^{AB}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \ . \tag{A.7}$$

Un espinor de Dirac contiene a 2 espinores de Weyl:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

mientras que uno de Majorana se escribe, simplemente,

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

La contracción de índices espinoriales se ha realizado siguiendo la convención:

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = \chi\psi \quad \text{y} \quad \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} \ , \tag{A.10}$$

en la que los espinores anticonmutan, y la definición de $\bar{\psi}\bar{\chi}$ ha sido elegida de modo que:

$$\bar{\psi}\bar{\chi} = (\psi\chi)^\dagger \ . \tag{A.11}$$

Las coordenadas grassmannianas del superespacio fueron elegidas de acuerdo a las convenciones anteriores, a través de un par de espinores de Weyl de quiralidad opuesta θ^α y $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$.

Espacio-tiempo tridimensional

En el caso tridimensional, la métrica minkowskiana plana es $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+--)$ y el grupo de Lorentz $SL(2, R)$. La representación fundamental actúa sobre espinores de dos componentes reales (Majorana) $\psi^\alpha = (\psi^+, \psi^-)$. Todos los espinores son cantidades anticonmutantes (Grassmann). Los índices espinoriales son subidos y bajados por la cantidad antisimétrica $C_{\alpha\beta}$ ($C_{-+} = C^{+-} = i$),

$$\psi^\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta \quad \text{y} \quad \psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha} \ . \tag{A.12}$$

Usamos $C_{\alpha\beta}$ en lugar de la cantidad real $\epsilon_{\alpha\beta}$ para simplificar las reglas de hermiticidad. En particular, de este modo la cantidad $\bar{\psi}\psi \equiv \psi^\alpha\psi_\alpha$ es hermítica. Notar, sin embargo, que mientras ψ^α es real, ψ_α es imaginario puro. Un espinor de Dirac puede ser escrito a partir de dos espinores de Majorana. Las matrices γ^a están dadas en la representación $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = \sigma^1$, $\gamma^2 = \sigma^2$ (recordar que en el producto de matrices, debe utilizarse la cantidad $C_{\alpha\beta}$ para contraer índices).

El superespacio está descripto por tres coordenadas espaciales x^μ y dos coordenadas espinoriales anticonmutantes θ^α. Para estas últimas, la integración adopta reglas muy simples, siendo equivalente a la diferenciación:

$$\int d\theta_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \equiv \partial_\alpha \quad , \quad \int d\theta_a \theta^b = \delta_a \ b \ . \tag{A.13}$$

Así, la integral doble

$$\int d^2\theta\bar{\theta}\theta = -2 \ , \tag{A.14}$$

provee una representación de la función delta de Dirac en las coordenadas anticonmutantes:

$$\delta^2(\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \ . \tag{A.15}$$

Una descripción detallada de las representaciones del álgebra de supersimetría y de la geometría del superespacio en teorías tridimensionales, puede hallarse en la Ref.[106]

Bibliografía

[1] T.H.R. Skyrme, Proc. R. Soc. **A247** (1958) 260; Proc. R. Soc. **A262** (1961) 233; Nucl. Phys. **31** (1962) 556.

[2] H.B. Nielsen y P. Olesen, Nucl. Phys. **B61** (1973) 45.

[3] V.L. Ginzburg y L.D. Landau, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **20** (1950) 1064.

[4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79** (1974) 276.

[5] A.M. Polyakov, JETP Lett. **20** (1974) 194; Soviet Physics JETP **41** (1976) 988.

[6] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz y Yu S. Tyupkin, Phys. Lett. **B59** (1975) 85.

[7] E.B. Bogomol'nyi, Sov. Jour. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.

[8] M.K. Prasad y C.M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760.

[9] H. de Vega y F.A. Schaposnik, Phys. Rev. **D14** (1976) 1100.

[10] P. Fayet, Il Nuovo Cimento **A31** (1976) 626.

[11] A. Salam y J. Strathdee, Nucl. Phys. **B97** (1975) 293.

[12] P. Di Vecchia y S. Ferrara, Nucl. Phys. **B130** (1977) 93.

[13] E. Witten y D. Olive, Phys. Lett. **B78** (1978) 97.

[14] S. Ferrara, C.A. Savoy y B. Zumino, Phys. Lett. **B100** (1981) 393.

[15] J. Hong, Y. Kim y P.Y. Pac, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2230.

[16] R. Jackiw y E.J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2234.

[17] C. Lee, K. Lee y E.J. Weinberg, Phys. Lett. **B243** (1990) 105.

[18] Z. Hlousek y D. Spector, Nucl. Phys. **B370** (1992) 143.

[19] C. Montonen y D. Olive, Phys. Lett. **B72** (1977) 117.

[20] N. Seiberg y E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19; Erratum ibid **B430** (1994) 485; Nucl. Phys. **B431** (1994) 484.

[21] C.M. Hull y P.K. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109.

[22] E. Witten, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85.

[23] R. Kallosh, A. Linde, T. Ortín, A. Peet y A. van Proeyen, Phys. Rev. **D 46** (1992) 5278.

[24] E. Witten, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 1247.

[25] C.G. Callan, J.A. Harvey y A. Strominger, Nucl. Phys. **B359** (1991) 611; Nucl. Phys. **B367** (1991) 60.

[26] M.J. Duff, R.R. Khuri y J.X. Lu, Phys. Rep. **259** (1995) 213.

[27] A. Strominger y C. Vafa, Phys. Lett. **B379** (1996) 99.

[28] J.M. Maldacena y A. Strominger, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 428.

[29] C.V. Johnson, R.R. Khuri y R.C. Myers, Phys. Lett. **B378** (1996) 78.

[30] R. Rajaraman, *An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North Holland, 1982.

[31] S. Coleman, *New Phenomena in Subnuclear Physics (Proc. 1975 Int. School of Physics 'Ettore Majorana')*, ed. A. Zichichi, New York: Plenum (1975) 297.

[32] B. Julia y A. Zee, Phys. Rev. **D11** (1975) 2227.

[33] J.D. Edelstein y F.A. Schaposnik, Nucl. Phys. **B425** (1994) 137.

[34] P.W. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964) 132; Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.

[35] L.F. Cugliandolo, G. Lozano y F.A. Schaposnik, Phys. Rev. **D40** (1989) 3440.

[36] L.F. Cugliandolo, G. Lozano, M.V. Manías y F.A. Schaposnik, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 479.

[37] J.D. Edelstein, G. Lozano y F.A. Schaposnik, Mod. Phys. Lett. **A8** (1993) 3665.

[38] B.J. Schroers, Phys. Lett. **B356** (1995) 291.

[39] K. Kimm, K. Lee y T. Lee, Phys. Rev. **D53** (1996) 4436.

[40] J.D. Edelstein, C. Núñez y F.A. Schaposnik, Phys. Lett. **B329** (1994) 39.

[41] S. Coleman y J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[42] Yu.A. Gol'fand y E.S. Likhtman, JETP Lett. **13** (1971) 323.

[43] R. Hagg, J. Lopuszanski y M.F. Sohnius, Nucl. Phys. **B88** (1975) 61.

[44] M.F. Sohnius, Phys. Rep. **128** (1985) 39.

[45] J. Wess y B. Zumino, Nucl. Phys. **B78** (1974) 1.

[46] B. Zumino, J. Math. Phys. **3** (1962) 1055.

[47] Z. Hlousek and D. Spector, Nucl. Phys. **B397** (1993) 173; Phys. Lett. **B283** (1992) 75; Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 3403.

[48] Z. Hlousek and D. Spector, Nucl. Phys. **B442** (1995) 413.

[49] L. Cugliandolo, F.A. Schaposnik y H. Vucetich, Nucl. Phys. **B377** (1992) 191.

[50] S. Ferrara, D.Z. Freedman y P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. **D13** (1976) 3214.

[51] S. Deser y B. Zumino, Phys. Lett. **B62** (1976) 335.

[52] S. Ferrara y P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1669.

[53] S. Deser y C. Teitelboim, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 249.

[54] C. Teitelboim, Phys. Lett. **B69** (1977) 240.

[55] M.T. Grisaru, Phys. Lett. **B73** (1978) 207.

[56] E. Witten, Comm. Math. Phys. **80** (1981) 381.

[57] G.T. Horowitz y A. Strominger, Phys. Rev. **D27** (1983) 2793.

[58] S. Deser, Phys. Rev. **D27** (1983) 2805.

[59] C. Teitelboim, Phys. Rev. **D29** (1984) 2763.

[60] J. Bekenstein, Lett. Nuovo Cimento **4** (1972) 737; Phys. Rev. **D7** (1973) 2333; Phys. Rev. **D9** (1974) 3292.

[61] S.W. Hawking, Nature **248** (1974) 30; Comm. Math. Phys. **43** (1975) 199.

[62] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons Inc., 1972.

[63] B. de Wit, Introduction to Supergravity in *Supersymmetry and Supergravity '84*, Eds. B. de Wit, P. Fayet y P. van Nieuwenhuizen, World Scientific (1984) 49.

[64] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, 2nd. Edition, World Scientific, 1990.

[65] S. Ferrara y P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. **B76** (1978) 404; Phys. Lett. **B78** (1978) 573.

[66] K.S. Stelle y P. West, Phys. Lett. **B77** (1978) 376; Nucl. Phys. **B145** (1978) 175.

[67] A. van Proeyen, en *Supersymmetry and Supergravity 1983*, ed. B. Milewski, World Scientific (1983) 93.

[68] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello y A. van Proeyen, Phys. Lett. **B116** (1982) 231.

[69] J. Wess y J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd. Edition, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1992.

[70] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello y A. van Proeyen, Nucl. Phys. **B212** (1983) 413.

[71] J.M. Nester, Phys. Lett. **A83** (1981) 241.

[72] C.M. Hull, Commun. Math. Phys. **90** (1983) 545.

[73] P.A.M. Dirac, Can. J. Math. **2** (1950) 129.

[74] T. Regge y C. Teitelboim, Phys. Lett. **B53** (1974) 101; Ann. Phys. (N.Y.) **88** (1974) 286.

[75] S. Deser, J. Kay and K.S. Stelle, Phys. Rev. **D16** (1977) 2448.

[76] R. Benguria, P. Cordero y C. Teitelboim, Nucl. Phys. **B122** (1977) 61.

[77] C. Teitelboim, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1106.

[78] J.D. Edelstein, C. Núñez y F.A. Schaposnik, Nucl. Phys. **B 458** (1996) 165.

[79] J.D. Edelstein, C. Núñez y F.A. Schaposnik, Phys. Lett. **B375** (1996) 163.

[80] S. Ferrara, L. Girardello, T. Kugo and A. van Proeyen, Nucl.Phys.**B223** (1983)191.

[81] R. Barbieri, S. Ferrara, D.V. Nanopoulos y K.S. Stelle, Phys. Lett. **B113** (1982) 219.

[82] E. Cremmer y B. Julia, Nuc. Phys. **B159** (1979) 141.

[83] J. Scherk y J.H. Schwartz, Phys. Lett. **82B** (1979) 60.

[84] Th. Kaluza, Sitzungsber, Preuss - Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. **K1** (1921) 966.

O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895.

[85] J.D. Edelstein, J.J. Giambiagi, C. Núñez y F.A. Schaposnik, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 1037.

[86] S. Deser, R. Jackiw y G. 't Hooft, Ann. Phys. **152** (1984) 220.

[87] See for example R. Jackiw, *Five Lectures on Planar Gravity*, in Cocoyoc 1990, Proceedings, Relativity and Gravitation: Classical and quantum, p.74, Mexico (1991).

[88] H. Nishino, Phys. Lett. **B370** (1996) 65.

[89] E. Witten, Mod. Phys. Lett. **A 10** (1995) 2153.

[90] A. Comtet y G.W. Gibbons, Nucl. Phys. **B299** (1988) 719.

[91] W. Israel y J.M. Nester, Phys. Lett. **A85** (1981) 259.

[92] R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner, Phys. Rev. **117** (1960) 1595; **118** (1960) 1100; **122** (1961) 997.

[93] G.W. Gibbons, C.M. Hull y N.P. Warner, Nucl. Phys. **B218**(1983)173.

[94] D.Z. Freedman y G.W. Gibbons, Nucl. Phys. **B233** (1984) 24.

[95] G.W. Gibbons, D. Kastor, L.A.J. London, P.K. Townsend y J. Traschen, Nucl. Phys. **B416** (1994) 850.

[96] M. Cvetič, S. Griffies y S.-J. Rey, Nucl. Phys. **B381** (1992) 301.

[97] K. Becker, M. Becker y A. Strominger, Phys. Rev. **D51** (1995) 6603.

[98] P.S. Howe, J.M. Izquierdo, G. Papadopoulos y P.K. Townsend, "New Supergravities with Central Charges and Killing Spinors in $2+1$ dimensions", hep-th/9505032.

[99] See for example E. Cremmer y J. Scherk, Phys.Lett.**B74**(1978)341.

[100] L. Alvarez-Gaumé, J. Distler, C. Kounnas y M. Marino, *Softly broken* $N=2$ *QCD*, hep-th/9604004.

[101] J.H. Schwartz, Phys. Lett. **B367** (1996) 97.

[102] C. Vafa, Nucl. Phys. **B469** (1996) 403.

[103] R.R. Khuri y T. Ortín, Nucl. Phys. **B467** (1996) 355.

[104] J.D. Edelstein y C. Núñez, *Supersymmetric Electroweak Cosmic Strings*, hep-th/9605066.

[105] K.P. Tod, Phys. Lett. **B121** (1983) 241; Class. Quantum grav. **12** (1995) 1801.

[106] S.J. Gates Jr., M.T. Grisaru, M. Roček and W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, Frontiers in Physics Vol.58, The Benjamin/Cummings Publishing Co., 1983.