

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

Estudio Mecánico Estadístico de Líquidos de  
Fermiones en 1D. Cables Cuánticos

AUGUSTO A. MELGAREJO

1996

Esta Tesis para optar al grado de Doctor en Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, ha sido llevada a cabo en el Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos IFLYSIB (CONICET-UNLP) bajo la dirección del Dr. Fernando Vericat, desempeñándose como Asesor Científico por la Fac. de Ciencias Exactas el Dr. J. Raúl Grigera.

El presente trabajo fue posible gracias al apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, organismo del cual el autor es becario.

## PREFACIO

En la última década, se han producido notables avances en las técnicas de fabricación de materiales conductores y semiconductores en los cuales una, dos y aún las tres dimensiones espaciales, que limitan el movimiento de los portadores, son del orden de tan sólo las centenas de nanómetros o menos. La potencialidad de estas nanoestructuras como eficientes fotodetectores, como láseres o como dispositivos electrónicos dentro de lo que se ha dado en llamar *nanoelectrónica*, ha provocado que muchos investigadores, de la más diversa formación, dediquen mucho tiempo a estudiar las propiedades de estos noveles materiales tanto desde un punto de vista experimental como teórico.

Por otra parte, los sistemas de muchos cuerpos a baja dimensionalidad han constituido siempre un atractivo para los físicos teóricos por cuanto permiten desarrollar y aplicar teorías, muchas de ellas exactas, que en las dimensiones reales se hacen excesivamente complicadas. En general, estos sistemas han sido considerados tan sólo idealizaciones que sirven para aproximarse a una realidad que se desenvuelve en dimensiones mayores o como laboratorios matemáticos pensados para contrastar teorías a ser utilizadas en aquel mundo más realista. Sin embargo, los mencionados avances en la fabricación de nanoestructuras han logrado que hoy día sea prácticamente posible la realización de sistemas de baja dimensionalidad. De esta manera muchas de aquellas teorías, desarrolladas originalmente casi como un juego matemático, encuentran aplicación directa en la descripción de sistemas reales.

Tal es el caso del modelo de Tomonaga-Luttinger, que describe un líquido de fermiones constreñidos a moverse en una línea. Este Hamiltoniano, cuya solución exacta, debida a Mattis y Lieb, fue publicada en 1965, ha tenido repercusión académica fundamentalmente por dos razones. Por un lado, la solución constituye una de las primeras aplicaciones exitosas de la técnica conocida como bosonización. En segundo lugar, el modelo es considerado como el paradigma de los llamados líquidos de Luttinger, esto es, sistemas desordenados de fermiones muy correlacionados que carecen de superficie de Fermi. Hoy en día, a la luz de las nanoestructuras cuasi-unidimensionales denominadas *cables cuánticos*, el Hamiltoniano de Tomonaga-Luttinger se revaloriza en cuanto a su capacidad para describir sistemas reales de gran interés en relación a sus potenciales aplicaciones.

La presente Tesis pretende contribuir, desde una perspectiva teórica, a

una mejor comprensión de los cables cuánticos, considerándolos como un líquido estrictamente unidimensional de fermiones. Con ese fin los describimos desde el punto de vista de la solución exacta del modelo de Tomonaga-Luttinger y también mediante una aproximación para las funciones de correlación al contacto basada en la suma de los diagramas tipo escalera. Dentro de ese contexto, concentramos nuestro esfuerzo principalmente en dos aspectos: i) la contradicción existente entre la utilización del modelo de Tomonaga-Luttinger para describir adecuadamente a estos sistemas y la presencia de superficie de Fermi según se observa experimentalmente en los cables cuánticos y ii) la forma del potencial interfermiones efectivo que debe considerarse en una descripción estrictamente unidimensional de sistemas que, en realidad, son *cuasi* unidimensionales.

El trabajo está ordenado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 introducimos los problemas centrales a ser discutidos en esta Tesis, esto es, la cuestión de la existencia de la superficie de Fermi y la forma del potencial interpartículas en una descripción 1D de sistemas de fermiones pertenecientes a estructuras cuasi-unidimensionales. En el Capítulo 2, hacemos un repaso de algunos aspectos experimentales de estas estructuras cuasi-unidimensionales en las que estamos interesados, particularmente los cables cuánticos, empezando por su fabricación y continuando con el tipo de experiencias que, normalmente, se realizan con ellos. Los Capítulos 3 y 4, son el corazón de la Tesis. En 3 presentamos nuestra solución al problema de la inexistencia de superficie de Fermi en el modelo de Tomonaga-Luttinger. Con ese fin consideramos un término correctivo en el Hamiltoniano original de Luttinger y lo resolvemos exactamente siguiendo la técnica de bosonización. En 4 proponemos un potencial de pares interfermiones efectivo que, a nuestro criterio, es adecuado para ser utilizado en una descripción estrictamente unidimensional de los cables cuánticos. En particular utilizamos este potencial en el cálculo de las funciones de correlación al contacto, en la aproximación escalera, para un sistema de electrones y agujeros en 1D. En el Capítulo 5, consideramos cómo los resultados teóricos nos permiten describir algunos de los experimentos que comentamos en el Capítulo 2. Finalmente, el Capítulo 6 está dedicado a remarcar los puntos relevantes del trabajo y presentar las conclusiones. Con el objetivo de agilizar la lectura de la Tesis, los detalles matemáticos están desarrollados, en una serie de apéndices en el Capítulo 7.

*La Plata, 16 de Diciembre de 1996.*

*Augusto A. Melgarejo*

## Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cables cuánticos</b>	<b>6</b>
2.1	Fabricación . . . . .	6
2.1.1	Cables Implantados . . . . .	6
2.1.2	Cables por decapado en seco y sobrecrecimiento . . . . .	8
2.2	Técnicas experimentales . . . . .	9
2.2.1	Fotoluminiscencia . . . . .	10
2.2.2	Dispersión inelástica de luz. . . . .	12
<b>3</b>	<b>Cables cuánticos desde el punto de vista del modelo de Luttinger</b>	<b>15</b>
3.1	Modelo de Luttinger . . . . .	16
3.2	Dispersión de plasmones . . . . .	19
3.3	Distribución de momentos . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Cables cuánticos como un líquido de electrones y agujeros</b>	<b>24</b>
4.1	Potencial de interacción efectivo . . . . .	25
4.2	Funciones de correlación . . . . .	29
4.3	Comportamiento al contacto de las funciones de correlación . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Experimentos, modelos teóricos y aproximaciones</b>	<b>38</b>
5.1	Función de correlación al contacto y fotoluminiscencia . . . . .	40
5.2	Espectro de excitación de plasmones y dispersión inelástica de luz . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>7</b>	<b>Apéndices</b>	<b>47</b>
7.1	Diagonalización del Hamiltoniano . . . . .	47
7.2	Cálculo de la distribución de momentos . . . . .	48
7.3	Líquido de Luttinger de dos componentes . . . . .	52
7.4	Relación entre $g_{ij}(0)$ y $S_{ij}(q \rightarrow \infty)$ . . . . .	56

## 1 Introducción

Nuestro objetivo es estudiar desde una perspectiva mecánico estadística, y a la luz de resultados experimentales obtenidos por diversos investigadores en años recientes, algunos aspectos de las nanoestructuras semiconductoras conocidas como *cables cuánticos*.

En el enfoque mecánico estadístico que proponemos, utilizaremos el punto de vista de Sommerfeld y Pauli[1]-[3], tradicionalmente usado para modelar a un metal como un líquido de electrones. Por lo tanto describiremos a los semiconductores como un líquido constituido por fermiones los cuales se mueven en un fondo neutralizante que representa a la red, que es así tenida en cuenta sólo en forma implícita. De acuerdo a lo que convenga, para describir las distintas propiedades de los sistemas a estudiar, consideraremos una sólo especie de fermiones (los electrones) o bien un sistema constituido por dos tipos de fermiones con carga opuesta (electrones y agujeros).

Según comentaremos con más detalle en el próximo Capítulo (ver también, por ejemplo, Refs. [4],[5]), mediante diversas técnicas experimentales se ha logrado modificar adecuadamente la estructura de bandas de distintos cristales semiconductores. El resultado es que el movimiento de los portadores es restringido en una, dos o las tres de las direcciones posibles. En el primer caso, los portadores pueden moverse prácticamente sin restricciones en dos de las direcciones, mientras que en la tercera dirección están obligados a hacerlo en espesores de confinamiento que llegan a ser del orden de tan sólo unos pocos nanometros. Por lo tanto la estructura puede describirse, en principio, como un sistema cuasi-bidimensional de fermiones, conocido en la literatura como "quantum wells"[6]. Si en la estructuras cuasi-bidimensionales anteriores se restringe todavía el movimiento superficial en una de las direcciones a una ancho  $\delta$ , tenemos las estructuras cuasi-unidimensionales que nos interesarán aquí: los cables cuánticos ("quantum wires")[7],[8]. Valores típicos de  $\delta$  van desde unas decenas hasta varios cientos de nanometros. Finalmente la restricción en las tres direcciones da lugar a los llamados "quantum dots" (puntos cuánticos). Se trata de pequeños compartimientos cada uno de los cuales contiene a unos pocos electrones que pueden ocupar niveles discretos de energía[9] y tales que en racimos parecen ser adecuados para funcionar como láseres[10]. Debemos notar que en este último caso el tipo de teorías necesarias para estudiarlos son sustancialmente distintas a las teorías de muchos cuerpos que pueden usarse para describir teóricamente a los sistemas

cuasi -bi o uni- dimensionales[11].

Dentro de este contexto, nuestro modelo de cable cuántico será, según sean las propiedades a describir, o bien un sistema unicomponente de fermiones cargados (electrones) o bien una mezcla binaria con partículas de signo opuesto (electrones y agujeros) que pueden moverse en una faja prácticamente bidimensional (espesor casi nulo), infinita en la dirección longitudinal y de un ancho  $\delta$  en la dirección transversal (ancho del cable). Sin embargo, aunque en principio podemos pensar de los cables cuánticos como un faja bidimensional relativamente estrecha, en realidad descamos describirlos desde un punto de vista *estrictamente unidimensional*. Esto es razonable y necesario. Razonable por cuanto la idea de una banda de ancho  $\delta$  comparativamente pequeño frente a su longitud, nos dice de una dirección netamente preferencial para el movimiento de los portadores. Y es necesario pues el tratamiento teórico de un sistema de fermiones moviéndose en una faja bidimensional, aún en el límite termodinámico, es muchísimo más complicado que el de un sistema de fermiones moviéndose en una línea.

Una vez establecida la razonabilidad y necesidad de describir a los cables cuánticos como un sistema unidimensional de fermiones dentro de la pintura de Sommerfeld-Pauli, debemos por una lado precisar aún más el modelo esto es, establecer el Hamiltoniano del sistema, y por el otro lado el formalismo a utilizar.

Nuestro trabajo se basará en buena medida en el Hamiltoniano de Luttinger [12]. Este Hamiltoniano surge naturalmente en la solución aproximada de otro Hamiltoniano previamente propuesto, también con el fin de describir un gas de electrones en 1D, por Tomonaga[13] en los 50. La característica saliente del Hamiltoniano de Luttinger, que permite su solución exacta, es la forma lineal usada para la energía cinética, como en un Hamiltoniano relativista sin masa. Eventualmente consideraremos, en forma complementaria, un Hamiltoniano donde la energía cinética es cuadrática.

La posibilidad de utilizar el modelo de Tomonaga-Luttinger para describir a los cables cuánticos queda implícita en relación a un destacable trabajo experimental realizado en los Laboratorios Bell de la AT&T[14]. Allí se muestra que la relación de dispersión obtenida por Mattis y Lieb[15], a partir del Hamiltoniano de Luttinger, se comporta cualitativamente como la energía de plasmones obtenida experimentalmente mediante dispersión inelástica de luz en cables cuánticos semiconductores. En realidad, los autores señalan el acuerdo entre sus datos experimentales y la relación de dispersión calculada

en la aproximación conocida como "random phase approximation (RPA)". Pero ocurre que ambas, la RPA y la solución de Mattis y Lieb, dan relaciones de dispersión con un comportamiento semejante[16].

Cabe señalar que la utilidad de la RPA para describir cables cuánticos se restringe a esto pues es sabido que si bien se trata de una aproximación esencialmente correcta en la región de las longitudes de ondas largas, no lo es en absoluto para longitudes de onda pequeñas. El Hamiltoniano de Luttinger, en cambio, al dar lugar a una solución cerrada (no perturbativa), pareciera ser ideal para una descripción más integral de los semiconductores cuasi-unidimensionales.

Como mencionamos, la solución exacta del Hamiltoniano de Luttinger se debe a Mattis y Lieb[15] quienes utilizaron la técnica, ya considerada por Tomonaga en su trabajo de 1950, conocida como *bosonización*[17]. La solución de Mattis y Lieb muestra explícitamente la propiedad que caracteriza al Hamiltoniano de Luttinger: la desaparición de la superficie de Fermi para prácticamente cualquier potencial de interacción entre los electrones. A tal punto se asocia el modelo de Luttinger con esta propiedad que hoy en día se denominan en general *líquidos de Luttinger* a aquellos sistemas de electrones que, descritos desde el punto de vista de Sommerfeld-Pauli, carecen, a diferencia de los llamados líquidos de Landau-Fermi, de superficie de Fermi. El problema de la desaparición de la superficie de Fermi en sistemas de dimensiones arbitrarias ha sido estudiado por Bares y Wen[18] y más recientemente por Kopietz[19].

La ausencia de superficie de Fermi en el modelo de Luttinger disminuye la potencialidad en cuanto a su capacidad para realizar una descripción completamente satisfactoria de los cables cuánticos. En efecto, otros resultados experimentales del mismo grupo de la Bell demuestran que, en realidad, los cables cuánticos semiconductores presentan una discontinuidad en la distribución de momentos de los electrones, es decir tienen superficie de Fermi[20]. Una de las propuestas de esta Tesis es que esta deficiencia del Hamiltoniano de Luttinger puede ser evitada, dentro del formalismo exacto de Mattis y Lieb, si consideramos un término adicional que tiene en cuenta que, debido a su interacción con las impurezas que existen en los cables cuánticos reales, los plasmones, principales responsables de la desaparición de la superficie de Fermi, se amortiguan dando lugar a la conservación de ésta. Solamente si el potencial de interacción posee, para momentos de transferencia nulos, una singularidad que se comporta como potencias in-

versas del momento, las impurezas no alcanzan a atenuar a los plasmones y la desaparición de la superficie de Fermi persistirá.

Sumados a los experimentos mencionados, en los últimos años diversos autores han comunicado experiencias de fotoluminiscencia realizadas en cables cuánticos. Una descripción de los mismos, siempre desde la perspectiva del modelo de Sommerfeld y Pauli, exige modelar a los cables como sistemas de dos especies de fermiones: electrones y agujeros. En ese caso, tal cual demostramos en este trabajo (ver Apéndice 7.3), es posible aplicar el formalismo exacto de Luttinger-Mattis-Lieb solamente si la relación existente entre la densidad y la masa efectiva es la misma para electrones y agujeros. Esto implica, si tenemos presente la diferencia que existe entre las masas efectivas de ambas especies, que el caso interesante en que hay electroneutralidad (igual densidad de los dos tipos de portadores) no es soluble dentro de ese formalismo. Por lo tanto, para explicar los experimentos de fotoluminiscencia desde el punto de vista de un líquido de electrones y agujeros, debemos recurrir a otro formalismo. Aquí usaremos con ese fin uno cuyo elemento central son las funciones de correlación entre pares de partículas. En particular, las calcularemos, para distancias cortas, siguiendo una técnica aproximada desarrollada por Yasuhara[21]-[23] para el gas de electrones en 3D. La misma se basa en considerar en la expresión diagramática de las funciones de correlación solamente los diagramas tipo escalera.

Tanto el formalismo de Luttinger-Mattis-Lieb como el de Yasuhara pueden desarrollarse exigiendo tan sólo que los potenciales de interacción cumplan condiciones de simetría y comportamientos asintóticos bastante generales. Sin embargo, si deseamos comparar los resultados teóricos con datos experimentales, estos potenciales deben establecerse con más detalle. Al respecto no debemos olvidar que lo que pretendemos hacer es describir un sistema cuasi-unidimensional mediante teorías aplicables a sistemas estrictamente unidimensionales. Por lo tanto los potenciales interpartículas a considerar son en realidad potenciales efectivos que tienen en cuenta esta situación. Con esta observación presente, en esta Tesis proponemos un potencial que, a diferencia de otros considerados en la literatura, contempla, además, que las experiencias reales de dispersión inelástica de luz y de fotoluminiscencia, no se realizan sobre un único cable aislado sino que, por la forma en que veremos se fabrican, éstas se realizan necesariamente sobre un conjunto de cables que lógicamente interactúan entre sí dando lugar a efectos adicionales entre sus portadores.

## 2 Cables cuánticos

En materia condensada, usualmente se desarrollan modelos teóricos para describir a los sistemas reales de interés. En ese caso es conveniente, aún cuando uno esté concentrado en técnicas puramente teóricas, no perder la perspectiva del objeto real subyacente. Particularmente, en nuestro caso, este objeto son los llamados cables cuánticos. Con esta idea, dedicaremos el presente Capítulo a mencionar muy brevemente los métodos usados para fabricarlos y algunas de las técnicas experimentales más frecuentemente aplicadas para estudiar estos sistemas, cuya potencialidad como dispositivos electrónicos está siendo, dicho sea de paso, también muy intensamente considerada[24].

### 2.1 Fabricación

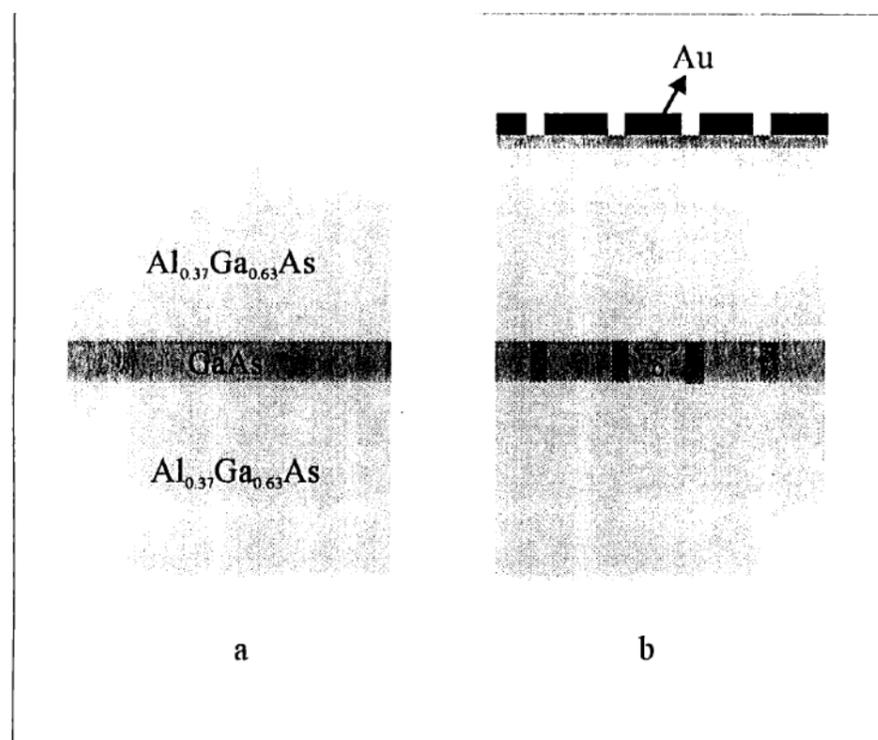
Los cables cuánticos se fabrican a partir de los llamados "quantum wells" mediante litografía electrónica seguida de técnicas de implantación o bien de decapado[25]. De esta manera se logra que los portadores, que en los "quantum wells" están restringidos a moverse prácticamente en sólo dos dimensiones, encuentren barreras que los limitan en otra dirección más. Distinguiremos, entonces, entre los cables fabricados mediante implantación iónica de aquéllos obtenidos utilizando procedimientos de decapado.

#### 2.1.1 Cables Implantados

Se parte de una heteroestructura formada de tres capas semiconductoras apiladas como se muestra en la Fig. 1a. Para fijar ideas[25] consideremos la estructura constituida por una capa de  $GaAs$  relativamente delgada ( $3.1\text{ nm}$ ) y dos capas de  $23\text{ nm}$  de espesor de  $Al_{0.37}Ga_{0.63}As$  que cubren a aquélla por arriba y por abajo. Dado que el  $Al$  produce un "gap" suficientemente grande, los portadores quedan confinados a moverse en la delgada capa de  $GaAs$  y se tiene así un pozo cuántico("quantum well").

Para lograr los cables cuánticos (Fig. 1b) se cubre la capa superior de  $Al_{0.37}Ga_{0.63}As$  con una segunda capa de  $GaAs$  ( $22\text{ nm}$  de espesor) sobre la cual se depositará una fina capa de oro. Esta máscara de oro se "raya" mediante litografía electrónica de manera tal que, donde el oro ha sido eliminado,

quedan líneas muy finas. Estas "rayas" son las que definirán luego los bordes del cable mientras que el espaciado entre dos de ellas determinará el ancho  $\delta$  del cable. En estas condiciones se implantan iones de *Ga* en la capa delgada de *GaAs*. La máscara de oro cumple la función de escudo para que el *Ga* penetre sólo a través las regiones rayada. Seguidamente, previo remover la máscara de oro, se realiza un recocido de la estructura, con el objetivo de que el *Ga* implantado se difunda modificando los niveles de energía hacia niveles más altos y generando, de este modo, las barreras de potencial laterales, las cuales harán que los electrones se muevan dentro de un espacio cuasi-unidimensional de ancho aproximadamente  $\delta$ .



**Fig. 1.** Esquema representativo de cables cuánticos fabricados mediante implantación iónica

### 2.1.2 Cables por decapado en seco y sobrecrecimiento

En este caso también partimos de una heteroestructura de capas semiconductoras apiladas. Para ejemplificar tomemos una estructura particular[25]: dos capas de  $InP$  (60 nm de espesor) que cubre por arriba y por abajo una delgada capa de  $In_{0.53}Ga_{0.47}As$  (5 nm). Nuevamente se enmascara la estructura, marcándola luego, al igual que antes, mediante litografía electrónica.

El paso siguiente es producir el decapado, esto es, un comido de la estructura, el cual se producirá sólo en las zonas en dónde la máscara fue removida anteriormente por medio de la litografía electrónica (Fig. 2). Este decapado es el que producirá la barreras de confinamiento de electrones.

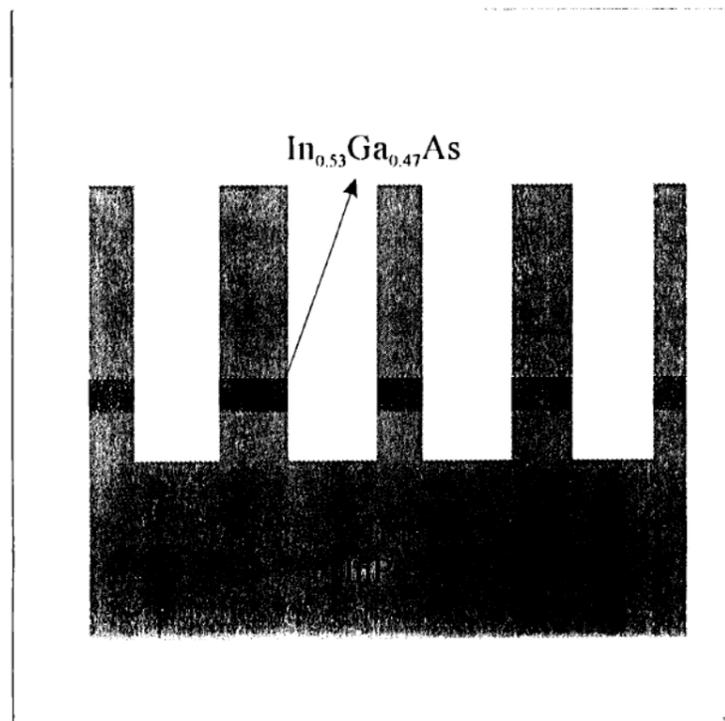


Fig. 2. Esquema representativo de cables cuanticos fabricados mediante decapado

Dentro de la técnica de decapado las dos versiones más utilizadas son las conocidas como RIE y RIBE, respectivamente. La técnica RIBE (decapado por haz de iones reactivos) consiste esencialmente en una cámara llena de un plasma reactivo el cual, al disociarse, produce iones y radicales. La muestra es colocada dentro de la cámara y es conectada a un generador alterno de 13.6 *Mhz* de frecuencia, de manera que ésta resulta bombardeada por los iones, produciéndose así el decapado. Al mismo tiempo el plasma es renovado dentro de la cámara, haciendo que, el material retirado de las capas no vuelva a depositarse sobre la muestra. En la otra versión el decapado se realiza simplemente por iones reactivos.

Debemos señalar que esta técnica, al igual que la basada en la implantación iónica, produce no un sólo cable sino un conjunto de cables de distintos espesores dispuestos paralelos uno con otros.

## 2.2 Técnicas experimentales

En esta sección mencionaremos brevemente los principios en que se basan dos tipos de experimentos que han dado buena parte de la información disponible acerca del comportamiento físico de los cables cuánticos. Se trata de experimentos de fotoluminiscencia y de dispersión inelástica resonante de luz.

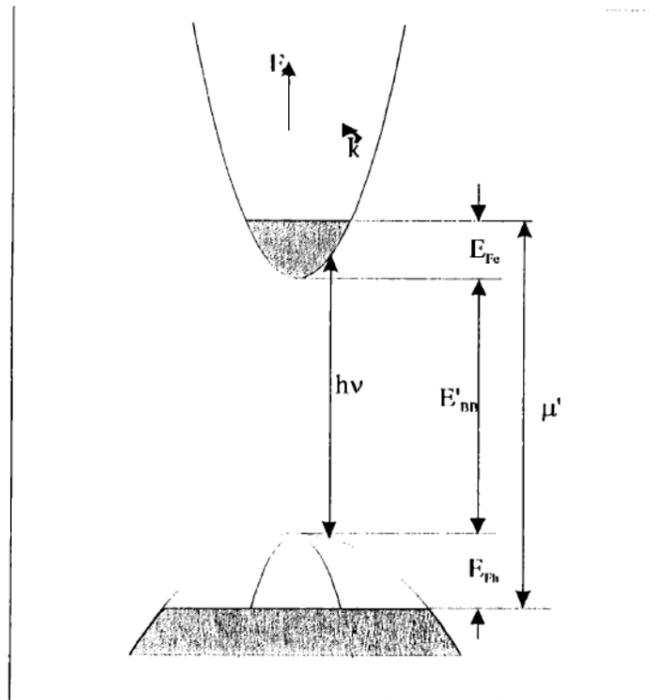
La dispersión inelástica de luz constituye un método poderoso para investigar las excitaciones de partícula independiente y excitaciones colectivas (plasmones) del gas de electrones, en particular en los cables cuánticos[14], puesto que permite medir la dispersión de momentos y energías[26],[27].

Las experiencias de fotoluminiscencia, por su parte, se relacionan con la recombinación de electrones y agujeros[28]-[30] y en consecuencia brindan información sobre la velocidad de esa recombinación[31],[32] y también sobre la superficie de Fermi[20] en los cables.

Debemos mencionar que existen otras técnicas experimentales, que han sido aplicadas al estudio de nanoestructuras semiconductoras, pero que no serán mencionadas explícitamente en esta Tesis (ver, por ejemplo, referencias [33]-[39]).

### 2.2.1 Fotoluminiscencia

Para entender el origen de la luminiscencia a partir de un líquido de electrones y agujeros, puede ser útil referirse a la Fig 3.



**Fig. 3.** Origen de la luminiscencia en un líquido electron-agujero

La transición (indicada  $h\nu$ ) representa la recombinación de un electrón con un agujero, cada uno en su propio mar de Fermi. Generalmente la transición es indirecta, pero por simplicidad se ha representado un transición directa. Las energías características del sistema están indicadas en la figura:  $\mu'$  que representa el potencial químico,  $E_{Fe}$  y  $E_{Fh}$  que denotan las correspondientes energías de Fermi para los electrones y agujeros y  $E'_{nn}$  que representa la mínima energía de transición posible.

La Fig. 4 muestra esquemáticamente un espectro de luminiscencia característico. En él se aprecia la forma en que se obtienen  $\mu'$  y  $E'_{nn}$ .

La relación entre la energía de corte  $\mu'$  y la energía recombinación  $E'_{BB}$  está dada por  $E'_{BB} = \mu' - E_F$ , donde  $E_F$  es igual a la suma de energías de Fermi de electrones y agujeros (ver Fig 2)

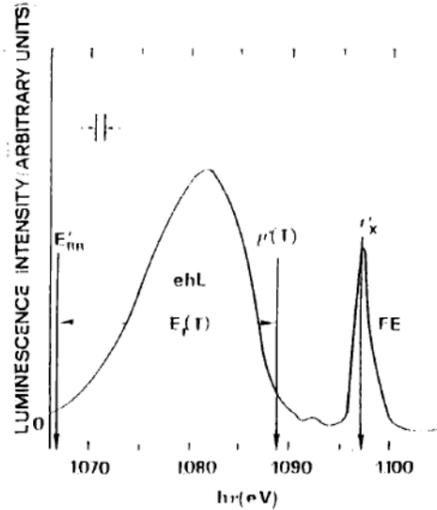
$$E_F = E_{F_e} + E_{F_h}. \quad (1)$$

La intensidad de fotoluminiscencia  $I(h\nu)$  como función de la energía del fotón puede escribirse

$$I(h\nu) = I_0 \int_0^{h\bar{\nu}} d\epsilon D_c(\epsilon) D_h(h\bar{\nu} - \epsilon) f(\epsilon, E_{F_e}) f(h\bar{\nu} - \epsilon, E_{F_h}), \quad (2)$$

donde  $h\bar{\nu} = h\nu - E'_{BB}$  es la energía del fotón relativa al fondo de la banda en el líquido,  $D_{c,h}(\epsilon)$  es la densidad de estados y  $f(\epsilon, E_{F_{e,h}})$  es la distribución de Fermi para electrones y agujeros, respectivamente.

En las medidas que se utilizaron para establecer la existencia de superficie de Fermi en cables cuánticos[20], aparece un pico de intensidad de emisión intrínseca en el borde de Fermi decreciendo lentamente para bajas energías. Este pico pronunciado es interpretado como una singularidad que denuncia la existencia de superficie de Fermi. Esto puede leerse en la ecuación (2), ya que un salto en la distribución  $f(\epsilon, E_F)$  provocará una disminución en la intensidad. Para más detalles puede consultarse la referencia[30].



**Fig.4** Espectro característico de luminiscencia

Por otra parte, la intensidad  $I(h\nu)$  integrada a todas las energías de los fotones es inversamente proporcional al tiempo medio de recombinación entre electrones y agujeros y es por lo tanto, según veremos, proporcional a la función de correlación al contacto electrón-agujero[29]. En esta Tesis consideraremos especialmente experimentos que dan la intensidad de fotoluminiscencia en cables cuánticos en función de su ancho  $\delta$ [31],[32]. Parte de nuestro trabajo consistirá en calcular las funciones de correlación electrón-agujero al contacto en los cables cuánticos, digamos  $g_{eh}(0)$ , que podrán así ser contrastadas con valores reales (ver Fig.8).

### 2.2.2 Dispersión inelástica de luz.

En la teoría de Rayleigh, la dispersión de luz por un sólido presenta dos contribuciones: un proceso de *colisión elástica* entre el fotón y el cristal y una dispersión Raman correspondiente a las *colisiones inelásticas*[26],[27]. En este último caso, el fotón pierde uno o más cuantos vibracionales de energía (líneas de Stokes).

Por intermedio de la dispersión Raman ordinaria, se obtiene información acerca de las excitaciones de baja energía. Tal información, está contenida particularmente en los cambios de frecuencia, vector de onda y polarización del fotón dispersado.

Información cercanamente relacionada con la obtenida por dispersión resonante Raman (SRR) puede ser obtenida mediante otras técnicas experimentales, en particular absorción, emisión y procesos combinados de estos últimos, conocidos en la literatura como fluorescencia cuando están aplicados a moléculas y líquidos y luminiscencia cuando se lo aplica a sólidos.

**a) Definiciones fundamentales.** El sistema que modela al experimento consiste en dos partes, un campo de radiación con un Hamiltoniano radiativo  $H_R$  y un sistema material con un Hamiltoniano  $H_M$ . Radiación y materia interactúan entre sí mediante un Hamiltoniano de interacción  $H_{MR}$ . El Hamiltoniano de radiación está cuantizado. Estos cuantos son fotones de vector de onda  $\mathbf{k}$ , polarización  $\lambda$  y vector polarización  $\epsilon_\lambda$ . Suponemos que el sistema material posee un espectro de energía  $\{E_n\}$ . El estado base  $E_0$  se toma como cero, el resto del espectro energético  $E_n$ , puede ser descrito con algún grado

de aproximación como una superposición de excitaciones elementales como, excitaciones de partícula independiente, ondas de espin, plasmones, etc.

El proceso Raman, involucra un cambio de estado del sistema material entre un estado inicial, un estado final y una energía de intercambio con el campo de radiación incidente (dispersión inelástica). El campo de radiación puede en general entregar energía al sistema material (líneas de Stokes) o, recibir energía del sistema material (líneas anti-Stokes). Este último proceso puede ocurrir sólo si el sistema material está originalmente en un estado excitado. Sin embargo aquí nos restringiremos a suponer que el sistema material se encuentra a bajas temperaturas, esto es, en su estado base.

El estado inicial, es aquél en el que el sistema material se encuentra en su estado base más un fotón ( $\mathbf{k}_1\lambda_1$ ) de frecuencia  $\omega_1$ , el cual es dispersado a un estado final ( $\mathbf{k}_2\lambda_2$ ) y frecuencia  $\omega_2$  dejando al sistema material en un estado excitado  $E_f$ . La conservación de energía nos indica que

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + E_f. \quad (3)$$

La sección eficaz diferencial  $d\sigma$  para la dispersión Raman de un fotón que se dispersa desde un estado inicial ( $\mathbf{k}_1, \lambda_1$ ) a otro de frecuencia comprendida entre  $\omega_2$  y  $(\omega_2 + d\omega_2)$ , polarización  $\lambda_2$  y tal que  $\mathbf{k}_2$  se encuentra dentro de un pequeño ángulo sólido  $d\Omega$  alrededor de la dirección  $\theta$  está dada por

$$d\sigma(\mathbf{k}_1, \lambda_1; \omega_2, \theta, \lambda_2) = \frac{2\pi}{\hbar c} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_f |K_{2f,10}|^2 \delta(\hbar\omega_2 - E_f - \hbar\omega_1) \quad (4)$$

donde la suma sobre  $\mathbf{k}_2$  está restringida a un pequeño volumen en el espacio  $k$ , y  $K$  es la matriz elemental de  $H_{MR}$  que conecta los estados inicial y final.

**b) Matriz elemental:** Puesto que en el scattering Raman aparecen dos fotones (uno absorbido y otro emitido), la electrodinámica cuántica nos dice que se trata de un proceso de segundo orden en  $H_{MR}$ . Los dos elementos de matriz que contribuyen a la sección eficaz pueden escribirse

$$K_{2f,10} = \sum_i \left\{ \frac{\langle \omega_2 f | H_{MR} | 0i \rangle \langle 0i | H_{MR} | \omega_1 0 \rangle}{\hbar\omega_1 - E_i} + \frac{\langle \omega_2 f | H_{MR} | \omega_2 \omega_1 i \rangle \langle \omega_2 \omega_1 i | H_{MR} | \omega_1 0 \rangle}{-\hbar\omega_2 - E_i} \right\} \quad (5)$$

donde  $0$ ,  $i$  y  $f$  denotan el estado base, un estado intermedio y el estado final del sistema material. El estado  $|\omega_s, l\rangle$  representa la presencia de un fotón de frecuencia  $\omega_s$ , de aquí que  $|0l\rangle$  significa que el fotón ha sido destruido.

En la ecuación (5) se observa que el primer término diverge linealmente cuando  $\hbar\omega_1 \rightarrow E_i$  (denominador resonante), esto es, en los entornos de los autovalores de energía. Esto nos conduce a la siguiente conclusión: para estudiar el espectro de excitación del sistema (relación de dispersión), se determinan los valores de  $k$  (vector de onda) y de  $E$  (energía) en los que se encuentran los picos de la sección eficaz. De tal forma que si se vuelcan estos valores en una gráfica  $(k, E)$ , obtendremos una representación de la relación de dispersión. Para un estudio más detallado de la dispersión Raman puede consultarse la referencia[26].

En su aplicación de la dispersión inelástica de luz a los cables cuánticos, el mencionado grupo de la Bell[14], obtuvo la intensidad de luz dispersada en función del corrimiento de energía Raman para diversos valores de los vectores de onda a lo largo del cable. Considerando los picos de estas curvas graficaron, de acuerdo a lo señalado recién, la energía en función del vector de onda para los plasmones, es decir su espectro de excitación. En el Capítulo siguiente calcularemos el espectro de excitación de plasmones para un líquido de electrones descrito por el modelo de Luttinger modificado de manera de lograr que la superficie de Fermi no desaparezca. Podremos entonces comparar los resultados teóricos con estos resultados experimentales (ver Fig. 9).

### 3 Cables cuánticos desde el punto de vista del modelo de Luttinger

Una vez que tenemos una idea del sistema real que nos motiva y la forma de sacar información experimental de él, nos introducimos de lleno en los modelos teóricos con los que intentaremos describirlo.

El modelo básico con que trabajaremos a lo largo de toda la Tesis es, como ya señalamos, el modelo de sólido de Sommerfeld-Pauli[1],[2], esto es un sistema de fermiones cargados que representan a los portadores los cuales se mueven en un fondo neutralizante que representa a la red iónica cristalina. En particular, en este Capítulo, nos interesará considerar solamente a los electrones. Más aún, supondremos que éstos tienen su movimiento limitado a una línea. Es decir, sin entrar en análisis sobre su aplicabilidad a los sistemas reales que nos interesan, consideraremos un líquido de electrones estrictamente en 1D.

Según ya comentamos, el paradigma de los líquidos de fermiones cargados en 1D es el líquido de Luttinger[12] y es el modelo que hemos elegido, en principio, para nuestro estudio. El líquido de Luttinger sabemos que se caracteriza por carecer de superficie de Fermi, siendo uno de los principales problemas que nos planteamos aquí el establecer qué modificación razonable puede hacerse al modelo para que la superficie de Fermi persista, como aparentemente ocurre[20] en los cables cuánticos reales.

En este Capítulo, primeramente realizamos una breve reseña del modelo tal cual fue propuesto por Luttinger. En segundo lugar presentamos la modificación que introducimos al modelo original de Luttinger y mostramos la solución exacta del Hamiltoniano resultante siguiendo la técnica de bosonización. En particular calculamos el espectro de plasmones. Finalmente estudiamos cómo el término correctivo agregado al Hamiltoniano, modifica la distribución de momentos en el estado fundamental y analizamos las condiciones que el potencial efectivo entre electrones debe verificar para que la superficie de Fermi se conserve.

### 3.1 Modelo de Luttinger

En el modelo original de Luttinger se considera electrones sin espín moviéndose en un espacio unidimensional[12] que, para fijar ideas, elegiremos como el eje real  $x$ . En principio, supondremos que los electrones están restringidos a moverse en un segmento de longitud  $L$ , pero luego tomaremos el límite termodinámico. La energía cinética que Luttinger propone para los electrones es lineal en el momento, como si se tratara partículas relativistas sin masa. Por lo tanto el Hamiltoniano del sistema sin interacción tal cual fue propuesto por Luttinger se escribe

$$H_C = v_0 \hbar \int_0^L \psi^\dagger(x) \sigma_3 p \psi(x) dx, \quad (6)$$

donde  $\sigma_3$  es la matriz de Pauli,  $v_0$  es la velocidad de las partículas,  $p$  es el operador momento:  $p = (-i\hbar)\partial/\partial x$  y  $\psi$  es un espinor de dos componentes:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Por lo tanto  $H_C$  queda

$$H_C = v_0 \hbar \int_0^L (\psi_1^\dagger p \psi_1 - \psi_2^\dagger p \psi_2) dx. \quad (8)$$

Con el objetivo de aplicar el modelo a problemas de materia condensada, usualmente se toma  $v_0$  igual a la velocidad de Fermi de los electrones:  $v_0 = v_F = \pi \hbar n_e / m_e$ , con  $n_e$  la densidad electrónica, una manera ésta de incorporar al Hamiltoniano la masa  $m_e$  de los electrones.

Podemos reescribir el Hamiltoniano en segunda cuantización utilizando una base de ondas planas

$$\psi_j(x) = \frac{1}{L} \sum_k a_{jk} e^{ikx}, \quad (9)$$

con  $k = (2\pi/L)n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty$ . Entonces,

$$H_C = \sum_k \hbar v_0 (a_{1k}^\dagger a_{1k} - a_{2k}^\dagger a_{2k}) k, \quad (10)$$

donde los operadores creación y destrucción,  $a_{ik}^\dagger$  y  $a_{ik}$  ( $i = 1, 2$ ), verifican la siguiente regla de anticonmutación

$$a_{jk_1}^\dagger a_{ik_2} + a_{ik_2} a_{jk_1}^\dagger = \delta_{ij} \delta_{k_1 k_2}. \quad (11)$$

El Hamiltoniano (10) tiene algunos aspectos no del todo deseables. El más notable de ellos es que la energía cinética es lineal en  $k$ . Como consecuencia el sistema por él descrito carece de estado fundamental. Luttinger evita este inconveniente llenando los estados de energía negativos. Esto es, supone que para  $j = 1$  los estados con  $k < 0$  y para  $j = 2$  los estados con  $k > 0$  están llenos. Esto último es equivalente a introducir operadores de *partículas* y *agujeros*  $b_k$  y  $c_k$ , respectivamente, definidos en términos de los operadores  $a_{ik}$  mediante

$$\begin{aligned} a_{1k} &= \begin{cases} b_k, & k > 0 \\ c_k^\dagger, & k < 0 \end{cases} ; \\ a_{2k} &= \begin{cases} b_k, & k < 0 \\ c_k^\dagger, & k > 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (12)$$

La ecuación (10), escrita ahora en términos de los nuevos operadores, adopta la forma

$$H_C = \sum_k |k| (b_k^\dagger b_k + c_k^\dagger c_k) + W, \quad (13)$$

donde

$$W = \sum_{k < 0} k - \sum_{k > 0} k \quad (14)$$

es la energía infinita del mar lleno, la cual puede ser ignorada, puesto que se trata sólo de una energía de referencia.

En estas condiciones, Luttinger, elige una forma particular para el Hamiltoniano de interacción  $H_I$ , de manera que el modelo pueda ser resuelto exactamente:

$$H_I = \frac{2\lambda}{L} \sum_q v(q) \rho_1(q) \rho_2(-q). \quad (15)$$

Se trata de una interacción no muy realista por cuanto considera arbitrariamente sólo términos cruzados.

Pero más grave, al intentar resolver el Hamiltoniano por él propuesto comete un serio error que lo lleva, como fue notado por Mattis y Lieb[15], a una expresión equivocada para la distribución de momentos y con ella a la conclusión de que el sistema poseía superficie de Fermi. El error de Luttinger fue suponer que, aún después de llenar los estados negativos de energía (es decir, después de introducir la transformación (12)), seguía verificándose la relación de conmutación  $[\rho_i(q), \rho_j(q)] = 0$  para los operadores densidad. Este error fue salvado por Mattis y Lieb[15] quienes establecieron las relaciones de conmutación correctas:

$$[\rho_1(-p), \rho_1(p')] = [\rho_2(p), \rho_2(-p')] = \frac{pL}{2\pi} \delta_{p,p'} \quad p' > 0 \quad (16)$$

y

$$[\rho_1(p), \rho_2(p')] = 0. \quad (17)$$

De (16) se desprende que, si se definen los operadores  $A_p^\dagger = (2\pi/pL)^{1/2} \rho_1(p)$ ,  $A_p = (2\pi/pL)^{1/2} \rho_1(-p)$ ,  $B_{-p}^\dagger = (2\pi/pL)^{1/2} \rho_2(-p)$  y  $B_{-p} = (2\pi/pL)^{1/2} \rho_2(p)$ , éstos verifican relaciones de conmutación de bosones, esto es,

$$[A, B] = [A^\dagger, B] = 0 \quad (18)$$

$$[A_p, A_{p'}^\dagger] = [B_{-p}, B_{-p'}^\dagger] = \delta_{p,p'} \quad (19)$$

El campo  $B$  es la continuación del campo  $A$ , para los valores de negativos de  $p$ . Mediante la utilización de estos operadores (bosonización), Mattis y Lieb resolvieron, ahora correctamente, en forma exacta el modelo introducido por Luttinger al cual todavía generalizaron en el sentido de no restringir la interacción a los términos cruzados, sino que consideraron la interacción completa[15]

$$H_I = \frac{\lambda}{L} \sum_p v(p) (\rho_1(p) + \rho_2(p)) (\rho_1(-p) + \rho_2(-p)). \quad (20)$$

La solución Mattis y Lieb[15] al modelo de Luttinger, cuando se utiliza con un potencial de pares efectivo adecuado, describe cualitativamente bien

el espectro de excitación, tanto de partícula independiente como de plasmones obtenido mediante dispersión inelástica de luz en cables cuánticos [14] (ver las curvas de la Fig. 9 con  $M = 0$ ).

### 3.2 Dispersión de plasmones

Si bien el modelo reproduce, para potenciales efectivos razonables, el comportamiento cualitativo del espectro de excitación de cables cuánticos, su distribución de momentos tiene la indeseable propiedad, desde el punto de vista de la descripción de los cables, de no poseer singularidad en  $k = k_F$ . Esto es, el modelo de Luttinger no posee una superficie de Fermi. Sin embargo, según ya comentamos, existen medidas de fotoluminiscencia en cables cuánticos[20] que demuestran que estos tienen una superficie de Fermi bien definida.

El problema que uno se plantea es la posibilidad de conciliar la utilización del modelo de Luttinger para describir a los cables cuánticos reales con la existencia en éstos de una superficie de Fermi bien definida. Podemos intentar una respuesta a este problema dentro del formalismo de Luttinger-Mattis-Lieb si tenemos en cuenta algunas ideas de Hu y Das Sarma[40][41] expuestas en relación a un formalismo perturbativo esencialmente diferente al que nos interesa aquí. Estos autores propusieron, basados en resultados numéricos dentro de la *aproximación de apantallamiento dinámico* (aproximación GW), que el mecanismo responsable de la existencia de la superficie de Fermi, es el amortiguamiento de los plasmones debido a su dispersión por impurezas en el sistema y que si esta dispersión desapareciera (es decir si los cables estuvieran *limpios* de impurezas) entonces la presencia de plasmones que no se atenúan provocaría que la distribución de momentos se suavizara y con ello la desaparición de la superficie de Fermi.

En lo que resta del Capítulo veremos cómo estas ideas se expresan dentro del formalismo exacto que venimos considerando[42].

Con este fin reconocemos, en primer lugar, que los operadores  $A_k$  y  $B_k$  definidos anteriormente, describen el comportamiento colectivo del sistema (plasmones). Consecuentemente adicionamos al Hamiltoniano original de Luttinger un término  $H_S$  de la forma

$$H_S = \frac{1}{L} \sum_{k,k'>0} M_{k,k'} (A_k^\dagger A_{k'} + B_{-k}^\dagger B_{-k'}). \quad (21)$$

Esta ecuación representa la dispersión de un plasmón por medio de un potencial dispersor  $M_{k,k'}$  de manera que el plasmón se dispersa de un estado  $k$  a otro  $k'$ . En los últimos años, Kane y Fisher[43]-[45] han realizado esfuerzos para describir la presencia de impurezas en los cables cuánticos, utilizando una representación diferente para los operadores de campo[46]-[51]. Sin embargo, es importante remarcar dos diferencias fundamentales. En primer lugar, el hecho de que en nuestro trabajo nos concentramos en la dispersión entre plasmones e impurezas, no entre electrones e impurezas como lo hicieron Kane y Fisher. En segundo lugar, nuestra descripción tiene en cuenta la presencia de muchas impurezas, con una dada distribución a lo largo del alambre, y no solamente una, como el Hamiltoniano de Kane y Fischer y diversos otros Hamiltonianos disponibles[52] consideran. Si realizamos la razonable suposición adicional de que la separación entre impurezas es como máximo del orden de la longitud de onda del plasmón, el potencial dispersor utilizado en (21) puede escribirse como  $M_{k,k'} = M\delta_{k,k'}$ .

El Hamiltoniano a diagonalizar ahora es

$$H = H_C + H_I + H_S \quad (22)$$

con  $H_C$  y  $H_I$  dados por (13) y (20). El Hamiltoniano (22) se diagonaliza vía una transformación unitaria  $e^{iS}$ , donde el operador  $S$  se define de la siguiente forma:

$$S = \frac{\pi i}{2L} \sum_k \frac{\varphi(k)}{k} \rho_1(k) \rho_2(-k). \quad (23)$$

La función  $\varphi(k)$  queda determinada en la diagonalización del Hamiltoniano [15]. En el Apéndice 7.1 mostramos que

$$\varphi(k) = -\frac{1}{4} \ln \left[ 1 + \frac{2\lambda v(k)}{\pi v_1(k)} \right], \quad (24)$$

con

$$v_1(k) = \hbar v_F + \frac{M}{|k|} \quad (25)$$

En particular, mediante las ecuaciones (24) y (25) obtenemos, para el espectro de excitación de los plasmones, la expresión

$$\epsilon(k) = |k| v_1(k) \left( 1 + \frac{2\lambda v(k)}{\pi v_1(k)} \right)^{1/2} \quad (26)$$

Por supuesto para  $M = 0$  esta ecuación (26) conduce a la encontrada por Mattis y Lieb[15]. La característica más importante de la Ec. (26) es que para  $M < 0$  puede tomar valores imaginarios consistentes con una atenuación de los plasmones, mientras que en la relación obtenida por aquellos autores, la energía de un plasmón es siempre real. Debemos mencionar, por otra parte, que si graficamos esta relación de dispersión para potenciales electrón-electrón efectivos que sean adecuados, las curvas son cualitativamente similares a las encontradas por Iiu y Dassarma[41] quienes, como señalamos, las calcularon numéricamente a partir una teoría perturbativa aproximada. Más adelante, (ver Fig 9) comparamos la relación de dispersión (26) (para el potencial efectivo que definiremos en el próximo Capítulo) con la obtenida experimentalmente por el grupo de la Bell[14].

### 3.3 Distribución de momentos

Con el fin de estudiar la existencia de la superficie de Fermi, nos concentrarnos ahora en la distribución de momentos de los electrones. Específicamente, deseamos conocer, cómo ésta es afectada por la presencia del término  $H_S$  que hemos adicionado al Hamiltoniano original de Luttinger.

Deseamos calcular, entonces, el número medio de electrones con momento  $k$ , esto es  $\langle n_k \rangle$  el valor esperado del operador número  $n_k = b_k^\dagger b_k$  evaluado en el estado fundamental. Teniendo en cuenta que  $\langle n_k \rangle$  es una función par nos restringimos a los valores positivos de  $k$  y escribimos

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^L ds dt I(s, t) e^{ik(s-t)} \quad (27)$$

con

$$I(s, t) = \langle \Psi | \psi_1^\dagger(s) \psi_1(t) | \Psi \rangle = \langle \Psi_0 | e^{iS} \psi_1^\dagger(s) e^{-iS} e^{iS} \psi_1(t) e^{-iS} | \Psi_0 \rangle. \quad (28)$$

El operador  $S$  es el definido en la Ec.(23) y  $\Psi_0$  es el estado base del sistema sin interacción. Como tal elegimos aquél en el cual el sistema está

lleno de partículas  $b$  con momentos entre  $-k_F$  y  $k_F$  y no tiene ningún agujero (partículas  $c$ ).

En el Apéndice 7.2, después de algunos cálculos bastante laboriosos, obtenemos

$$\langle n_k \rangle = \frac{2\pi}{L} \sum_{k' < k_F} \phi_0(k - k') \quad (29)$$

donde

$$\phi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} e^{-Q(x)}. \quad (30)$$

En esta última ecuación  $Q(x)$  está dada por

$$Q(x) = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \frac{1 - \cos kx}{k} |u(k)|^2 \quad (31)$$

con

$$|u(k)|^2 = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \left\{ \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\pi v_1(k)}{\lambda v(k)} \right)^{-2} \right]^{-1/2} - 1 \right\}. \quad (32)$$

En la vecindad de  $k = k_F$ , tenemos que la distribución de momentos puede escribirse como

$$\langle n_k \rangle = c_1 - c_2 |k - k_F|^{2\alpha} \sigma(k - k_F) \quad (33)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes positivas;  $\sigma(k)$  es la función escalón que vale  $-1$  para  $k < 0$  y  $1$  para  $k > 0$ , mientras que  $\alpha$  es

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} |u(0)|^2 \quad (34)$$

La ecuación (32) generaliza los resultados de Mattis y Lieb[15] en dos formas. En primer lugar, tiene en cuenta el término  $H_S$  que hemos agregado al Hamiltoniano original. En segundo lugar, corresponde a la interacción completa dada por la ecuación (20). Mattis y Lieb, en cambio, solamente consideraron, en el cálculo de la distribución de momentos, la interacción parcial de la forma  $\rho_1\rho_2$  propuesta por Luttinger.

Observamos que si  $2\alpha \neq 0$ , la superficie de Fermi desaparece debido a que no existe discontinuidad en la distribución de momentos. Por otra parte si  $2\alpha = 0$ , la distribución de momentos muestra una discontinuidad, lo que significa que el sistema posee una superficie de Fermi bien definida.

De esta observación y de las expresiones (34) y (32) concluimos que, en una descripción estrictamente unidimensional de un cable cuántico (con amortiguamiento de los plasmones debido a la presencia de impurezas), si la superficie de Fermi debe estar bien definida tal como los experimentos lo sugieren [20] y aceptando que el modelo de Luttinger realiza una buena descripción del sistema, el potencial de interacción electrón-electrón efectivo no puede diverger más rápido que  $k^{-1}$ .

## 4 Cables cuánticos como un líquido de electrones y agujeros

Tal como lo expresamos en la introducción, con el objetivo de describir los experimentos de fotoluminiscencia, modelaremos a los cables cuánticos, como un líquido de electrones y agujeros. En un semiconductor sometido a iluminación intensa se puede formar, a temperatura suficientemente baja, un gas denso de excitones (pares electrón-agujero). Puesto que en la aniquilación de estos pares debe mediar un fonón para la conservación del momento, es que su vida media es bastante alta como para que se termalicen. A temperaturas más bajas aún (por debajo de cierto valor crítico, esto es unos pocos grados Kelvin), se produce una transición de fase desde el gas dieléctrico de excitones a un líquido metálico de dos componentes: electrones y agujeros delocalizados[28] [53].

En el contexto en que nos estamos moviendo lo más directo parecería ser el extender el modelo de Luttinger al caso de un líquido de dos especies de fermiones con carga opuesta. Sin embargo, este modelo sólo puede ser resuelto exactamente si se cumple que las velocidades de Fermi de cada especie ( $v_F^i$ ,  $i = e, h$ ) son iguales, conduciéndonos a la siguiente relación entre las masas efectivas y las densidades  $n_e/m_e = n_h/m_h$ . Esto es así porque la parte del Hamiltoniano correspondiente a la energía cinética de cada especie depende explícitamente de  $v_F^i$  (ver Apéndice 7.3). Esto implica que, para el caso de interés en el que existe electroneutralidad, no se puede obtener una solución exacta. De todas formas pensamos que, aún para el caso restringido  $v_F^e = v_F^h = v_F$ , puede ser útil, en relación a algún otro problema, el disponer de la solución exacta del Hamiltoniano de Luttinger generalizado a un sistema binario de fermiones con cargas de signo opuesto y en consecuencia en el Apéndice 7.3 la encontramos (notar que este sistema además de un sistema electrón-agujero puede representar, por ejemplo, a una hipotética mezcla electrón-positrón).

Para explicar los experimentos de fotoluminiscencia deberemos remitirnos, en consecuencia, a otro formalismo. Específicamente usaremos uno aproximado basado en las funciones de correlación. El modelo básico que consider-

amos es siempre del tipo Sommerfeld-Pauli y consiste, como dijimos, en un líquido unidimensional de electrones y agujeros interactuantes. Pero ahora la energía cinética de las partículas será proporcional a  $k^2$ .

Para resolver el modelo proponemos un potencial de interacción efectivo, el cual tiene en cuenta diversos aspectos referidos a la fabricación así como a las condiciones en las que se realizan las medidas experimentales.

En la próxima sección realizamos una discusión del potencial efectivo, para luego, en la segunda sección, utilizarlo en el cálculo de la función de correlación de pares del sistema, particularmente al contacto[54].

#### 4.1 Potencial de interacción efectivo

En el análisis realizado hasta ahora hemos exigido que los potenciales de interacción entre los portadores cumplan tan sólo condiciones de simetría y asintóticas bastante generales. En particular, en la sección anterior demostramos que si ha de existir superficie de Fermi dentro del formalismo de Luttinger-Mattis-Lieb (con el término correctivo  $H_S$  incluido), el potencial efectivo de pares no debe diverger asintóticamente, para longitudes de ondas largas, más rápido que la inversa del número de onda. Pero para poder llegar a comparar nuestra teoría con los experimentos deberemos dar con todo detalle la forma de las interacciones.

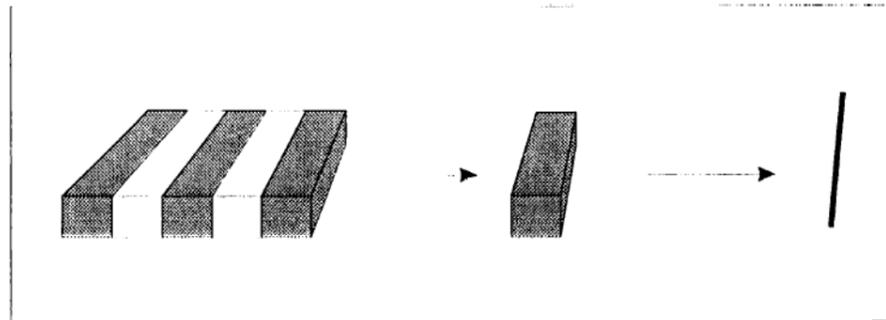


Fig. 5

No debemos perder de vista que los experimentos que intentaremos reproducir se realizan sobre una heteroestructura complicada que contiene una serie de cables cuánticos paralelos generalmente no equidistantes. En una primera simplificación (Fig. 5) nos circunscribimos a uno sólo de esos cables

y lo modelamos dentro del espíritu de Sommerfeld-Pauli como un sistema de electrones y agujeros (o bien solamente electrones) los cuales están restringidos a moverse en una faja cuasi-unidimensional de espesor muy pequeño y de ancho  $\delta$ . Pero todavía deseamos describir ese sistema cuasi-unidimensional mediante teorías estrictamente unidimensionales. Esto significa que, como esquematizamos en la Fig. 5, finalmente deberemos modelar a nuestro sistema como un conjunto de fermiones cargados moviéndose en una línea que, según dijimos, para fijar ideas elegiremos como el eje  $x$ .

En principio, tratándose de fermiones puntuales cargados, el potencial de interacción directa en el espacio real entre dos de ellos de especies  $i$  y  $j$ , respectivamente, y separados una distancia  $r$ , es el potencial coulombiano:  $v_{ij}(r) = Z_i Z_j e^2 / \kappa r$ , donde  $\kappa$  es la constante dieléctrica del medio,  $Z_i$  indica la electrovalencia del fermión de especie  $i$  y  $e$  es la carga de un electrón (en el caso de un líquido de electrones y agujeros el índice de especie tomará los valores  $i = e, h$  y será  $Z_e = 1$ ;  $Z_h = -1$ ).

Si quisiéramos utilizar este potencial directamente en la representación unidimensional (con  $r = |x|$ ), y puesto que trabajamos esencialmente en el espacio de momentos, tendríamos como un primer problema el hecho que  $|x|^{-1}$  carece de transformada de Fourier en 1D. Algunos autores han considerado un potencial íntimamente relacionado que se obtiene apantallando, en el espacio de los momentos, la interacción para momentos menores que cierto valor  $1/d$ , donde  $d$  es una distancia característica, normalmente el ancho del cable  $\delta$ . El potencial en cuestión es  $v_{ij}(q) = (2Z_i Z_j e^2 / \kappa) K_0(q\delta)$  ( $K_0(x)$  = función de Bessel modificada de segunda especie y orden cero) cuya transformada de Fourier da, en el espacio real,  $v_{ij}(|x|) = Z_i Z_j e^2 / \kappa \sqrt{x^2 + \delta^2}$ . Sin embargo este potencial tiene el inconveniente de no ser infinitamente repulsivo a distancias cortas ( $|x| \rightarrow 0$ ) para partículas del mismo tipo, como es de esperar de interacciones entre cargas.

Un potencial interfermiones en un cable aislado más elaborado fue propuesto por Das Sarma y Lai[55]. Para encontrarlo, ellos suponen que la función de onda del electrón en el cable tiene la siguiente forma

$$\psi(x, y, z) = \frac{e^{iqx}}{\sqrt{L}} \phi_n(y) \xi_i(z) \quad (35)$$

donde  $\xi_i$  y  $\phi_n$  son funciones que indican la cuantización en las direcciones  $z$  e  $y$ , mientras que  $q$  es el vector de onda en la dirección  $x$ . Eligen, entonces, para  $\xi$  la función de onda variacional de Stern-Howard[56] y para  $\phi$  una función

de onda confinante en una caja, de manera que el estado base queda descrito por

$$\psi_{00q}(x, y, z) = \frac{e^{iqx}}{\sqrt{L}} \left[ \sqrt{\frac{2}{\delta}} \sin\left(\frac{\pi y}{\delta}\right) \right] \left[ \sqrt{\frac{b^3}{2}} z e^{-bz/2} \right] \quad (36)$$

con  $\delta$  el ancho del cable y  $b$  un parámetro variacional. Se trata, como podemos apreciar, de una función de onda que localiza a los electrones en una faja de espesor aproximadamente  $b$  y ancho  $\delta$  de manera que éstos se comportan como ondas planas a lo largo del eje  $x$ .

Utilizando la función (36), Das Sarma y Lai finalmente obtienen el elemento de matriz del potencial coulombiano para la interacción de los fermiones cargados en la faja cuasi-unidimensional:

$$v_{(n_1 n_2 n_3 n_4)(ijlm)}(q) = 2e^2 \int_0^\delta dy \int_0^\delta dy' \phi_{n_1}(y) \phi_{n_2}(y) \phi_{n_3}(y') \phi_{n_4}(y') \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' \times \\ \times \xi_i(z) \xi_j(z) \xi_l(z') \xi_m(z') K_0(qR) \quad (37)$$

con  $R = \sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2}$ . El cálculo del elemento de matriz en el estado fundamental muestra una divergencia logarítmica para  $q\delta \ll 1$ . Observemos que el potencial apantallado mencionado anteriormente, esto es  $v_{ij}(q) = (2Z_i Z_j e^2 / \kappa) K_0(q\delta)$ , también se comporta asintóticamente como  $2e^2 |\ln(q\delta/2)|$ . Esta última forma es bastante usada en la literatura para describir el comportamiento de cables cuánticos a longitudes de onda largas

Estos potenciales de pares están deducidos pensando en que el sistema es un un sólo cable. Sin embargo esto no es tan así puesto que, como hemos ya señalado, el proceso de fabricación produce muestras a ser utilizadas en los experimentos en las cuales no se tiene un único cable aislado sino que, en general, se trata de varios de ellos dispuestos paralelamente. Esto hace que, como lo reconocen Iiu y Das Sarma[41], existan cargas móviles en los cables vecinos que tienden a apantallar adicionalmente a las interacciones entre electrones pertenecientes a un mismo cable. Este apantallamiento puede reducir el rango de la interacción, dando como resultado un potencial efectivo el cual es no singular sino finito para  $q \rightarrow 0$ .

Con el objetivo de encontrar un potencial efectivo que contemple, dentro de lo posible, la mayoría de los aspectos señalados, partimos de un sistema bidimensional consistente en un conjunto de cables dispuesto paralelamente uno al lado de otro. Consecuentemente podemos suponer aproximadamente una distribución de carga en la dirección  $y$  en la forma

$$\rho(y) = \frac{B}{(\delta + \Delta/2)} \cos\left(\frac{\pi}{(\delta + \Delta/2)}y\right) \quad (38)$$

Es decir, por un problema de definición del borde del cable, suponemos que la densidad de carga se anula no para  $y = \delta$ , sino en  $y = (\delta + \Delta/2)/2$ , donde  $\Delta$  es la separación entre cables. Utilizando esta distribución de carga, y dentro del espíritu de la Fig.5, proponemos que el potencial efectivo entre electrones pertenecientes a un mismo cable en una representación *estrictamente unidimensional* es un potencial calculado a partir de una simetría bidimensional, donde la distribución de carga en la dirección  $y$  promedia la interacción entre los electrones pertenecientes a un mismo cable, por lo que concluimos que

$$v_{ij}(|x|) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_i Z_j e^2 \rho(y)}{\kappa \sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{2Z_i Z_j e^2 B}{\kappa(\delta + \Delta/2)} K_0\left[\frac{\pi |x|}{(\delta + \Delta/2)}\right]. \quad (39)$$

Obsevemos que el potencial (39) a diferencia de los deducidos anteriormente, es infinitamente repulsivo para distancias cortas ( $|x| \rightarrow 0$ ), propiedad que es deseable que tenga toda interacción coulombiana, ya que el apantallamiento no elimina el infinito en la repulsión, sino que disminuye el rango de la interacción. La transformada de Fourier de este potencial es

$$v_{ij}(q) = \frac{2Z_i Z_j e^2 B}{\kappa \sqrt{\left[\frac{(\delta + \Delta/2)}{\pi}q\right]^2 + 1}} \quad (40)$$

El análisis realizado nos conduce así a la forma funcional del potencial. Por otro lado de la comparación con resultados experimentales de dispersión inelástica de luz[14], pudimos encontrar que  $B = 2$  y  $\Delta \sim 10.5\delta$ . Esto último acuerda razonablemente con los datos de fabricación[25], de donde se deduce que la separación promedio entre cables es  $\Delta \sim 11.90\delta$ . En base a estas consideraciones aproximamos  $(\delta + \Delta/2)/\pi \simeq 2\delta$ , de manera que el potencial efectivo que proponemos es, en el espacio de momentos,

$$v_{ij}(q) = \frac{4Z_i Z_j e^2}{\kappa \sqrt{(2q\delta)^2 + 1}} \quad (41)$$

Notamos que, de acuerdo con lo sugerido por Hu y Das Sarma[41], este potencial se mantiene finito aún para longitudes de onda infinitamente largas.

## 4.2 Funciones de correlación

En esta sección entramos de lleno a la descripción de los cables cuánticos como un líquido de electrones y agujeros moviéndose a lo largo del eje  $x$ . Según señalamos seguiremos con este fin un formalismo basado en las funciones de correlación. En particular nos interesará el comportamiento a corto alcance de estas funciones el cual, según ya mencionamos, se puede relacionar con el tiempo medio de recombinación entre electrones y agujeros a través de experimentos de fotoluminiscencia. Como potencial de pares usaremos el potencial efectivo recién definido. En realidad necesitaremos usar tan sólo su forma asintótica para longitudes de onda cortas ( $q \rightarrow \infty$ ).

**Hamiltoniano** Consideremos, entonces, el cálculo la función de correlación al contacto de un sistema compuesto por  $N$  especies de fermiones a temperatura  $T = 0$ , interactuando entre sí vía el potencial (41) y restringidos a moverse en una línea. Indicaremos con  $n_i = \langle N_i \rangle / L$  a la densidad de partículas de especie  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), donde  $\langle N_i \rangle$  es el valor medio del operador número de partículas de esa especie. Por ahora consideraremos, en general, un sistema de  $N$  especies de fermiones, pero más tarde nos restringiremos al caso binario de electrones y agujeros en el cual el índice de especies tomará sólo los valores  $i = e, h$ , como ya dijimos.

El Hamiltoniano del sistema escrito en segunda cuantificación es

$$H = H_C + H_I$$

$$= \sum_q \sum_{i=1}^N \epsilon_q^i a_q^{i\dagger} a_q^i + \frac{1}{2L} \sum_q \sum_{ij} v_{ij}(q) (\rho^i(q) \rho^j(-q) - N_i \delta_{ij}) \quad (42)$$

donde  $v_{ij}(q)$  es el potencial efectivo de interacción entre una partícula de especie  $i$  con otra de la especie  $j$ ,  $\epsilon_q^i$  es la energía cinética para partículas de

especie  $i$  con impulso  $q$ . Denotando con  $m_i$  la masa de las partículas tipo  $i$ , tenemos

$$\epsilon_q^i = \frac{\hbar^2 q^2}{2m_i}. \quad (43)$$

En la ecuación (42),  $N_i = \rho^i(q=0)$  indica el operador número de partícula y  $\rho^i(q)$  es el operador densidad, para la especie  $i$ . Este último tiene la conocida forma

$$\rho^i(q) = \sum_k a_{k+q}^{i\dagger} a_k^i \quad (44)$$

con  $a_k^{i\dagger}$  y  $a_k^i$  operadores creación y destrucción de partículas  $i$ , respectivamente.

**Funciones de correlación y factores de estructura parciales** Nuestro interés aquí se centra en las funciones de correlación de pares en el espacio real y los factores de estructura parciales en el espacio de los momentos. Diversos autores han basado el estudio del gas electrones o sistemas electrón-agujero, en las funciones de correlación (por lo general en 3D)[57]-[69].

Indicaremos la función de correlación entre una partícula de la especie  $i$  a una distancia  $r = |x| = |x_1 - x_2|$  de otra partícula del tipo  $j$  con  $g_{ij}(r)$ . Esta función representa la densidad de probabilidad de encontrar una partícula de especie  $i$  separada una distancia  $r = |x|$  de otra partícula de especie  $j$ . La función  $g_{ij}(r)$  se relaciona con el factor de estructura parcial

$$S_{ij}(q) \equiv \frac{\langle \rho^i(q) \rho^j(-q) \rangle}{L (n_i n_j)^{1/2}} \quad (45)$$

vía la siguiente transformada de Fourier

$$g_{ij}(r) = 1 + \frac{1}{(n_i n_j)^{1/2}} \int \frac{dq}{2\pi} e^{iqr} [S_{ij}(q) - \delta_{ij}]. \quad (46)$$

Por otra parte, mediante un simple proceso de carga puede demostrarse que los factores de estructura parciales se relacionan, a su vez, con la diferencia de energía  $\Delta E$  entre el estado sin interacción (cuando la carga es nula) y el estado interactuante (cuando la carga tiene su valor final  $e$ ) a través de la relación

$$\Delta E \equiv E(e) - E(0) = \int_0^{e^2} \frac{dc^2}{c^2} \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_q v_{ij}(q) (n_i n_j)^{1/2} [S_{ij}(q) - \delta_{ij}]. \quad (47)$$

Por lo tanto el factor de estructura parcial se puede expresar como la derivada funcional de esta diferencia de energía, respecto al potencial de interacción:

$$S_{ij}(q) - \delta_{ij} = \frac{2}{(n_i n_j)^{1/2}} \frac{\delta \Delta E}{\delta v_{ij}(q)}. \quad (48)$$

### 4.3 Comportamiento al contacto de las funciones de correlación

El estudio del comportamiento a corto alcance [21]-[22],[62],[63],[67]-[69] ( y también a largo alcance[59],[67],[69]) de las funciones de correlación ha recibido especial atención por parte de los investigadores. Esto es debido a que en esos límites la física de los fenómenos involucrados es, en general, más transparente que en la región intermedia donde la suma de efectos igualmente importantes de diverso origen hacen que su comprensión sea normalmente más difícil.

Consideraremos un sistema paramagnético donde las diversas especies poseen spin  $1/2$ , por lo que tenemos al contacto

$$g_{ij}(r=0) = \begin{cases} \frac{1}{2} g_{ii}^{11}(r=0), & i=j \\ g_{ij}^{11}(r=0), & i \neq j \end{cases} \quad (49)$$

De aquí que para calcular  $g_{ij}(r=0)$ , sólo necesitamos calcular la función de correlación para partículas con espines antiparalelos.

**Fórmula de Goldstone y aproximación de Yasuhara** Nuestro programa consiste en calcular primeramente los factores estructura parciales usando la Ec.(48) para luego obtener las funciones de correlación de pares correspondientes. Para determinar la diferencia de energía, utilizamos la fórmula de Goldstone[70]

$$\Delta E = \langle \phi_0 | H_I \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{E_0 - H_0} H_I \right)^n | \phi_0 \rangle_{\text{conectado}} \quad (50)$$

donde  $H_0$  y  $H_I$  son los Hamiltonianos sin perturbar (energía cinética) y de interacción, respectivamente;  $|\phi_0\rangle$  y  $E_0$  son el estado base y la energía correspondiente al estado base del sistema sin interacción. El término conectado significa que sólo serán incluidos aquellos diagramas conectados al final por la interacción. En la Fig. 6 se muestra un diagrama de Goldstone típico.

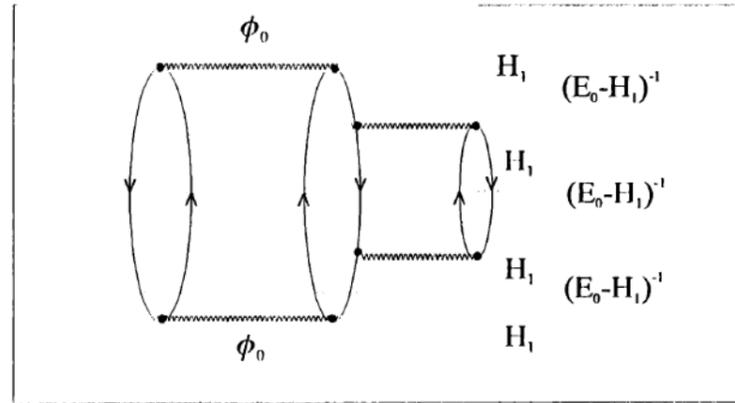


Fig. 6. Diagrama de Goldstone

En particular, en su estudio de las correlaciones al contacto para un líquido de electrones en 3D, Yasuhara[21]-[23] considera solamente los diagramas tipo escalera. Aquí adaptaremos esta idea al caso de un sistema multicomponente en 1D. La aplicación al caso multicomponente en 3D puede verse en Refs. [69] y [71]. Los diagramas que consideraremos en la ecuación de Goldstone son aquellos esquematizados en la Fig. 7.

Los diagramas de la Fig. 7 representan el proceso virtual en que dos fermiones, uno de especie  $i$  y el otro de especie  $j$ , son excitados vía el potencial de pares  $v_{ij}(q)$  desde su esfera de Fermi no perturbada dejando dos agujeros y luego de repetir sucesivamente la interacción mutua, son finalmente dispersados a sus posiciones iniciales dentro de la esfera de Fermi.

La aproximación escalera corresponde a interacciones directas entre las dos partículas involucradas, mientras que la interacción de éstas con el resto

de las partículas es ignorada. Sin embargo el resto de los cuerpos revelan su presencia por intermedio del principio de exclusión.

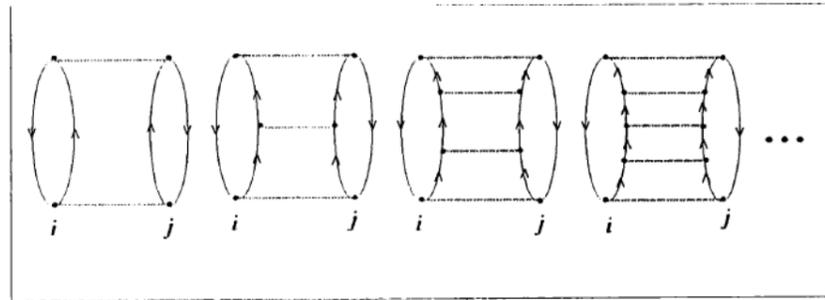


Fig. 7. Diagramas tipo escalera

Es de esperar por lo tanto, y los hechos así lo demuestran, que la aproximación escalera sea buena para describir las correlaciones al contacto. En efecto, cualquier potencial efectivo razonable (en particular el dado por Ec.(39)) es tal que para  $|x| \rightarrow 0$ ,  $v_{ij}(|x|) \rightarrow \pm\infty$ , según las especies  $i, j$  tengan carga de signo igual o contrario. Consecuentemente la interacción directa entre las dos partículas consideradas es infinitamente fuerte al contacto como para "sentir" la presencia de otras más alejadas. La contribución de los diagramas escalera (entre partículas de spin antiparalelo) al corrimiento de energía del estado fundamental es

$$\Delta E_0^{11} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_q \sum_{k_1 k_2} \sum_{ij} v_{ij}(q) \frac{f_i(k_1) [1 - f_i(k_1 + q)] f_j(k_2) [1 - f_j(k_2 - q)]}{c_{k_1}^i - c_{k_1+q}^i + c_{k_2}^j - c_{k_2-q}^j} I_{ij}(k_1, k_2; q) \quad (51)$$

donde

$$I_{ij}(k_1, k_2; q) =$$

$$v_{ij}(q) + \sum_k v_{ij}(q-k) \frac{[1-f_i(k_1+k)][1-f_j(k_2-k)]}{\epsilon_{k_1}^i - \epsilon_{k_1+k}^i + \epsilon_{k_2}^j - \epsilon_{k_2-k}^j} I_{ij}(k_1, k_2; k) \quad (52)$$

En estas ecuaciones,  $f_i(k) = 1 - \Theta(k - k_F^i)$  es la distribución de momentos de Fermi a  $T = 0$ , ( $\Theta(x)$  = función de Heaviside) y  $k_F^i = \pi n_i/2$  es el momento de Fermi (en 1D) para partículas de la especie  $i$ .

Introduciendo (9) en (5) obtenemos, después de tomar el límite a longitudes de onda cortas ( $q \rightarrow \infty$ ),

$$S_{ij}^{11}(q) - \delta_{ij} = -\frac{4v_{ij}(q)}{(n_i n_j)^{1/2} \epsilon_q^{ij}} \sum_{k_1 k_2} f_i(k_1) f_j(k_2) \times \left[ 1 + \sum_k \frac{[1-f_i(k_1+k)][1-f_j(k_2-k)]}{\epsilon_{k_1}^i - \epsilon_{k_1+k}^i + \epsilon_{k_2}^j - \epsilon_{k_2-k}^j} I(k_1, k_2; k) \right]^2 \quad (53)$$

donde  $\epsilon_q^{ij} = \hbar^2 k^2 / 2\mu_{ij}$  con  $\mu_{ij} \equiv m_i m_j / (m_i + m_j)$  la masa reducida.

De las ecuaciones previas se demuestra que (los detalles pueden verse en el Apéndice 7.4)

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_{ij}^{11}(r) = -\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_q^{ij}}{(n_i n_j)^{1/2} v_{ij}(q)} [S_{ij}^{11}(q) - \delta_{ij}]. \quad (54)$$

la cual es la versión para sistemas multicomponentes de la relación de Kimball-Niklasson[72],[73]. En estas condiciones de las Ecs. (53) y (54) se obtiene

$$g_{ij}^{11}(r=0) = \frac{4}{(n_i n_j)^{1/2}} \sum_{k_1 k_2} f_i(k_1) f_j(k_2) \times \left[ 1 + \sum_k \frac{[1-f_i(k_1+k)][1-f_j(k_2-k)]}{\epsilon_{k_1}^i - \epsilon_{k_1+k}^i + \epsilon_{k_2}^j - \epsilon_{k_2-k}^j} I_{ij}(k_1, k_2; k) \right]^2. \quad (55)$$

Como estamos interesados en obtener la correlación al contacto, aproximamos la ecuación (55) despreciando  $k_1$  y  $k_2$  frente a  $k$ . Así, llamando  $I_{ij}(q) \equiv I_{ij}(0, 0; q)$ , obtenemos

$$g_{ij}^{11}(r=0) = \left[ 1 - \frac{\mu_{ij}}{\hbar^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{I_{ij}(k)}{k^2} \Theta(|k| - k_F^i) \Theta(|k| - k_F^j) \right]^2 \quad (56)$$

donde  $I_{ij}(q)$  verifica la siguiente ecuación integral

$$I_{ij}(q) = v_{ij}(q) - \frac{\mu_{ij}}{\hbar^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{ij}(k-q) \frac{I_{ij}(k)}{k^2} \Theta(|k| - k_F^i) \Theta(|k| - k_F^j) dk \quad (57)$$

**Aplicación al potencial efectivo** Hasta aquí el análisis realizado es para un potencial arbitrario. Ahora lo aplicaremos al potencial efectivo que hemos propuesto para describir en 1D a los cables cuánticos. En realidad utilizaremos la forma asintótica de la ecuación (41), debido a que las integrales resultantes involucran solamente momentos  $q$  tales que  $|q| > k_F^i$ . Es decir consideramos la forma asintótica

$$v_{ij}(q) \simeq \frac{2e^2 Z_i Z_j}{\kappa |\delta q|}. \quad (58)$$

A continuación introducimos (58) en (57) y reemplazamos el producto de funciones de Heaviside  $\Theta(|q| - k_F^i) \Theta(|q| - k_F^j)$  por  $\Theta(|q| - k_F^{ij})$  donde  $k_F^{ij} = \sqrt{(k_F^i)^2 + (k_F^j)^2}$  ( $i \neq j$ ) [67]. Redimensionalizamos entonces el momento  $q$  dividiéndolo por  $k_F^{ij}$  y las magnitudes  $I_{ij}(q)$  y  $v_{ij}(q)$  dividiéndolas por  $v_{ij}(k_F^{ij})$ , de manera que las ecuaciones (56) y (57) dan

$$g_{ij}^{11}(r=0) = \left[ 1 - \frac{\lambda_{ij}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{ij}(q)}{q^2} \Theta(|q| - 1) dq \right]^2 \quad (59)$$

y

$$I_{ij}(q) = \frac{1}{|q|} - \frac{\lambda_{ij}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k-q|} \frac{I_{ij}(k)}{k^2} \Theta(|k| - 1) dk, \quad (60)$$

con

$$\lambda_{ij} = \frac{4e^2}{\kappa \delta \hbar^2 \pi} \frac{\mu_{ij} Z_i Z_j}{k_F^{ij}}. \quad (61)$$

Suponiendo que  $I_{ij}(q)$  es una función par de  $q$ , la ecuación (60) se puede escribir

$$I_{ij}(q) = \frac{1}{|q|} - \frac{\lambda_{ij}}{2} \int_1^{\infty} \frac{I_{ij}(k)}{k^2} \frac{|k-q| + |k+q|}{|k^2 - q^2|} dk. \quad (62)$$

Si además aproximamos el núcleo según

$$\frac{|q-k| + |k+q|}{|k^2 - q^2|} = \begin{cases} \frac{2}{|k|}, & |k| > |q| \\ \frac{2}{|q|}, & |k| < |q| \end{cases}, \quad (63)$$

entonces la ecuación integral resultante puede resolverse exactamente por iteraciones sucesivas[74], obteniéndose

$$I_{ij}(q) = \frac{1}{q} F_1(\lambda_{ij}) F_2(q; \lambda_{ij}) \quad (64)$$

donde

$$F_1(\lambda_{ij}) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ij}}{(2n)!!(2n-1)!!} \right]^{-1} = \frac{1}{\cosh \sqrt{\lambda_{ij}}} \quad (65)$$

y

$$F_2(q; \lambda_{ij}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!!(2n+1)!!} \frac{\lambda_{ij}^n}{q^{2n}}. \quad (66)$$

Substituyendo (64) en (59), obtenemos finalmente para la función de correlación al contacto entre especies  $i$  y  $j$

$$g_{ij}^{||}(r=0) = \frac{1}{(\cosh \sqrt{\lambda_{ij}})^2}. \quad (67)$$

Luego, teniendo presente (49), tenemos

$$g_{ii}(r=0) = \frac{1}{2 (\cosh \sqrt{\lambda_{ii}})^2} \quad (68)$$

y

$$g_{ij}(r=0) = \frac{1}{(\cosh \sqrt{\lambda_{ij}})^2}; \quad i \neq j. \quad (69)$$

Es interesante comparar estos resultados con los correspondientes a una descripción clásica de un sistema de cargas puntuales a cierta temperatura  $T$ . Clásicamente al contacto se verifica

$$g_{ij}(r \rightarrow 0) \sim \exp \left[ -\frac{v_{ij}(r \rightarrow 0)}{k_B T} \right] \quad (70)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Vemos que para potenciales como los que nos interesan (por ejemplo Ec.(39) o el potencial coulombiano puro  $\sim 1/r$ ),  $g_{ij}(r=0) = 0$ , para cargas de igual signo y  $g_{ij}(r=0) \rightarrow \infty$  para cargas de signo opuesto. En cambio, las Ecs.(68) y (69) dan valores finitos y distintos de cero en ambos casos. El hecho de que  $g_{ii}(r=0) \neq 0$  se debe a que, cuánticamente, una carga puntual puede vencer la barrera infinita debida a otra carga de igual signo por efecto túnel. Por su parte, la inestabilidad existente entre cargas clásicas puntuales de distinto signo desaparece por efectos que son también puramente cuánticos: la estabilidad está garantizada (para fermiones) por un principio de incerteza (efecto cinético) que previene a las cargas del colapso[75].

## 5 Experimentos, modelos teóricos y aproximaciones

En el Capítulo 2 mencionamos experimentos de fotoluminiscencia y de dispersión inelástica de luz realizados sobre cables cuánticos. En los Capítulos 3 y 4 hemos considerado la descripción de los cables cuánticos siguiendo dos formalismos distintos y obtuvimos expresiones para el espectro de excitación de plasmones y para las funciones de correlación al contacto. En este Capítulo comparamos nuestros resultados teóricos, aplicados al potencial efectivo dado por (41), con los datos obtenidos experimentalmente.

En este punto es conveniente señalar que en una descripción teórica como la que hacemos en este trabajo existen dos ingredientes: el modelo, es decir el Hamiltoniano, y la aproximación utilizada para calcular las magnitudes de interés que son verificables experimentalmente. En nuestro caso, el modelo incluye el punto de vista de Sommerfeld-Pauli de considerar a un sólido como un líquido de electrones (o de electrones y agujeros) en un fondo neutralizante, el considerar que las partículas están obligadas a moverse en una línea (de acuerdo con el esquema de la Fig.5), la forma de la energía cinética y de la interacción, en particular el potencial de interacción de pares. En cuanto a las aproximaciones, en el caso del Hamiltoniano de Luttinger no hacemos ninguna por cuanto la solución es exacta. En el caso del líquido de electrones y agujeros las aproximaciones son las señaladas en el cálculo de las funciones de correlación al contacto: utilización de los diagramas escalera y otras aproximaciones secundarias relacionadas con el hecho de que nos interesa el límite de longitudes de onda cortas.

En este contexto, al comparar resultados teóricos directamente con resultados experimentales generalmente no queda claro, cuando hay desacuerdo, cuál de los aspectos, el modelo o la aproximación, es el que falla. Más todavía, aún en el caso de lograr una buena reproducción de los datos experimentales puede quedar la duda de si esto no es debido a desajustes, de uno y otro de esos aspectos, que se compensan. Actualmente, y debido al enorme crecimiento en las facilidades computacionales, se intenta eliminar esta incertidumbre tratando de verificar en forma independiente la bondad de las

aproximaciones. Con ese fin se busca simular mediante las computadoras, a partir de principios lo más básicos posible, exactamente el mismo modelo al cual se aplica la aproximación en cuestión. Se puede pensar de estas simulaciones como "experimentos" para el modelo considerado. Las simulaciones con computadoras pueden servir también para verificar los modelos si se comparan los "experimentos de simulación" con los "experimentos reales". Desgraciadamente, en el caso de los cables cuánticos simulaciones de este tipo están aún lejanas a pesar de los avances mencionados en la capacidad de cómputo.

Sin embargo, podemos tener todavía una idea de la bondad de las aproximaciones que usamos en forma algo indirecta. Para eso tenemos presente que existen disponibles resultados exactos correspondientes a una simulación estocástica de la ecuación de Schrödinger para el líquido de electrones en 3D degenerado[76] realizada usando el método de Monte Carlo para la función de Green (GFMC)[77]. En este caso el potencial interfermiones es simplemente el coulombiano ( $\sim 1/r$ ). Comparación de los valores para la energía de correlación así obtenida concuerdan bien con los correspondientes obtenidos mediante la teoría para las funciones de correlación conocida como hipercadena cuántica (Fermi hypernetted-chain (FHNC))[64]-[66]. Por lo tanto esta última teoría es considerada, en general, muy buena, siendo su principal defecto (si tal) el hecho de que su instrumentación (necesariamente numérica) exige de mucho tiempo y memoria de computadora. Pero a su vez los valores al contacto de las funciones de correlación calculados con la FHNC comparan muy bien con aquéllos calculados con la aproximación de Yasuhara tanto para el simple gas de electrones de una sólo componente[78] como para un sistema bianario de fermiones degenerados con cargas de signo opuesto[68]. Podemos mencionar de paso, que varias de las teorías más difundidas para describir al gas de electrones en 3D, como la misma RPA u otras más elaboradas basadas en esquemas autoconsistentes, como los seguidos por Hubbard[79] dan funciones de correlación al contacto no físicas por cuanto son negativas (ver por ejemplo[57]). En base a las consideraciones hechas podemos especular que la aproximación que usamos para describir los experimentos de luminiscencia es razonable, siendo el modelo el aspecto a verificar. En el caso de los experimentos de dispersión de luz también lo que verificamos es esencialmente el modelo por cuanto, una vez establecido como tal el Hamiltoniano de Luttinger, su solución es exacta.

Pero aún dentro de lo que entendemos como modelo, podemos distinguir

aspectos esencialmente correctos, que tienen que ver con la forma general del Hamiltoniano (por ejemplo su simetría lineal indicativa de una dirección preferencial para los momentos), de otros aspectos que están más estrechamente relacionados con la forma detallada de las interacciones entre las partículas dentro del mismo cable, y de éstas con los bordes de los cables y con los portadores en otros cables y que de alguna manera hemos intentado englobarlos dentro del potencial efectivo de interacción. De acuerdo con esto podemos pensar que lo que verificamos al comparar los resultados teóricos con los datos experimentales es justamente ese potencial efectivo.

Con estas observaciones in mente, en la primera sección de este Capítulo utilizamos el resultado (67) para reproducir medidas de fotoluminiscencia[32], mientras que en la segunda sección comparamos nuestra relación de dispersión de plasmones(26) con experimentos de dispersión inelástica de luz[14].

## 5.1 Función de correlación al contacto y fotoluminiscencia

Puesto que la función de correlación al contacto  $g_{eh}(r=0)$  es una medida de la probabilidad de que un electrón y un agujero se encuentren, y la intensidad de fotoluminiscencia es inversamente proporcional al tiempo  $\tau$  de recombinación entre electrones y agujeros, entonces la intensidad de fotoluminiscencia puede ser estudiada en términos de la correlación al contacto mediante la siguiente relación[29].

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} g_{eh}(0) \quad (71)$$

donde  $\tau_0$  es la velocidad de decaimiento radiativo para el par electrón-agujero cuando no hay interacciones (gas ideal). Esta ecuación nos da una forma directa de contrastar las funciones de correlación al contacto dadas por la Ec.(69) o, si nos convencemos de lo insinuado en el punto anterior, de analizar la bondad del potencial efectivo (41), por lo menos para números de onda grandes.

En la Fig.8 presentamos nuestros resultados teóricos para el tiempo de vida medio  $\tau$  de los pares electrón-agujero en función del ancho  $\delta$  para dos cables cuánticos:  $GaAs/AlGaAs$  y  $In_{0.53}Ga_{0.47}As/InP$ . También mostramos los puntos experimentales obtenidos por un grupo de la Universidad de Stuttgart a  $T = 4K$ [32].

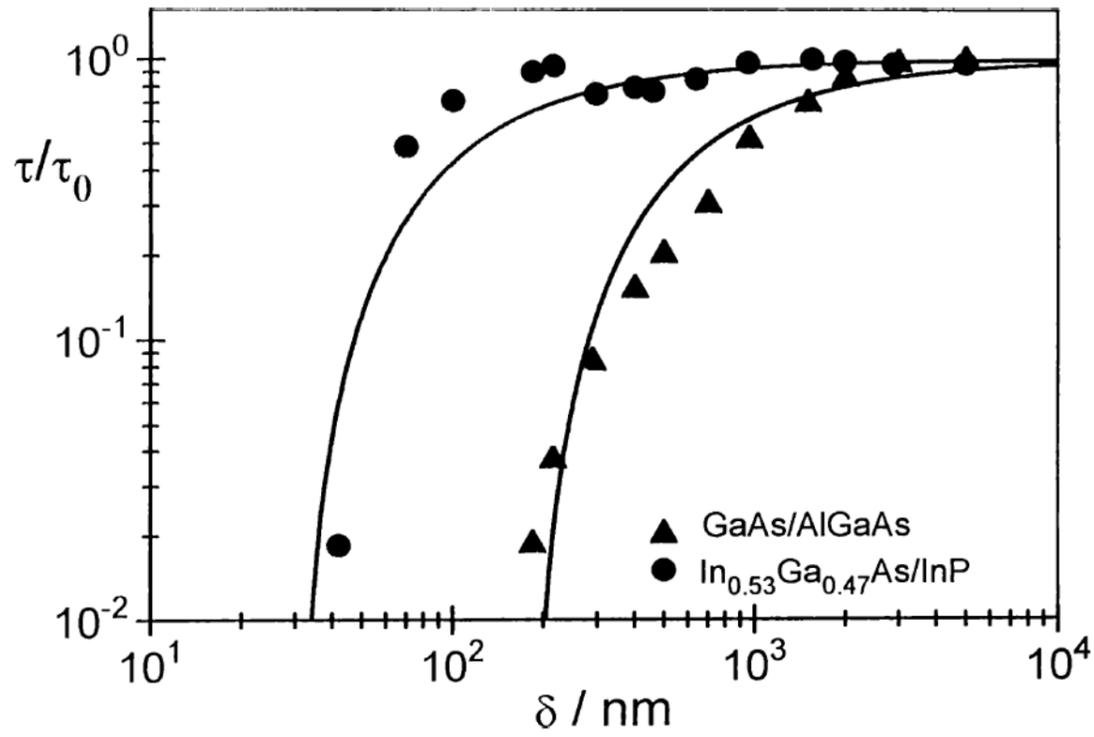
Considerando las masas efectivas de los portadores, la función de correlación al contacto electrón-agujero que representamos es

$$g_{ch}(0) = \frac{1}{(\cos \sqrt{\lambda_{ch}})^2} \quad (72)$$

donde

$$\lambda_{ch} = 0.78 \times 10^{15} \frac{r_{ch}^*}{\kappa n_e^2 \delta}. \quad (73)$$

Las unidades de  $\delta$  y  $n_e$  son [ $\mu\text{m}$ ] y [ $\text{cm}^{-1}$ ] respectivamente. El parámetro adimensional  $r_{ch}^*$  está definido como  $r_{ch}^* \equiv \mu_{ch}^*/m_e$ .



**Fig. 8** Tiempo medio relativo de recombinación entre electrones y agujeros calculados con la Ec.(72). Los triángulos y los círculos representan los resultados obtenidos de experimentos de fotoluminiscencia en GaAs/AlGaAs e  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}/\text{InP}$ , respectivamente (Ref.[32]).

Las masas efectivas que utilizamos son  $m_e^* = 0.067m_e$ ;  $m_h^* = 0.45m_e$  para el  $GaAs/AlGaAs$ [80] y  $m_e^* = 0.041m_e$ ;  $m_h^* = 0.5m_e$  para el  $In_{0.53}Ga_{0.47}As/InP$  [81]. La densidad electrónica unidimensional fue obtenida ajustando un punto experimental. Utilizamos  $n_e = 4.45 \times 10^5 [cm^{-1}]$  y  $n_e = 5.34 \times 10^5 [cm^{-1}]$  para el  $GaAs/AlGaAs$  y  $In_{0.53}Ga_{0.47}As/InP$ , respectivamente. Estos son valores razonables para estos sistemas. Las constantes dieléctricas utilizadas son 10.9 para  $GaAs$ [82] y 12 para  $In_{0.53}Ga_{0.47}As$ .

Si, como pensamos, lo que estamos contrastando es el modelo teórico, o más concretamente, el potencial efectivo propuesto, la comparación parece sugerir que la forma dada por la Ec. (41) es esencialmente correcta para describir el corto alcance.

Debemos mencionar que recientemente se ha publicado una explicación diferente para la dependencia de la fotoluminiscencia con el ancho del cable. La misma se sustenta en un modelo simple basado en la distribución espacial de los electrones y agujeros[83]

## 5.2 Espectro de excitación de plasmones y dispersión inelástica de luz

Los experimentos de fotoluminiscencia nos permitieron realizar una primera contrastación de nuestro modelo de cable cuántico como un sistema estrictamente unidimensional de electrones y agujeros. En particular, y de acuerdo con nuestras especulaciones en la introducción de este Capítulo, lo que estaríamos verificando es el potencial efectivo definido por la Ec.(41) en la región de las longitudes de onda cortas. La bondad del potencial efectivo en el otro extremo, es decir a longitudes de onda largas puede ser evaluada si comparamos nuestra fórmula (26) con los datos, que venimos mencionando[14], de dispersión inelástica resonante de luz sobre cables cuánticos.

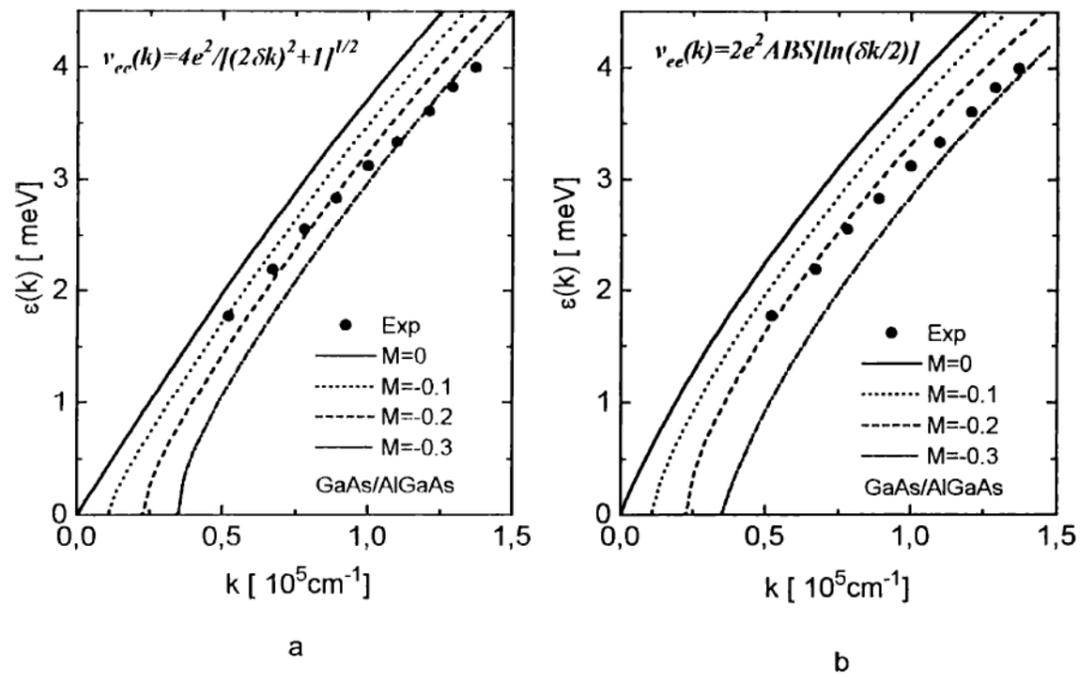
En la Fig.9 mostramos el espectro de excitación calculado usando la expresión (26) para distintos valores del parámetro  $M$  y también los valores obtenidos a  $T = 1.7K$  mediante dispersión de luz sobre cables de  $GaAs/AlGaAs$  fabricados mediante bombardeo iónico a baja energía[14]. La ecuación (26) puede escribirse:

$$\epsilon(k) = |k| \left(1 + \frac{M}{\alpha k}\right) \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta v_{ee}^*(k)}{\left(1 + \frac{M}{\alpha k}\right)}} \quad (74)$$

donde

$$\alpha = \hbar v_F = \frac{2 E_F}{\pi n_e}, \quad (75)$$

$$\beta = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{E_F}{n_e a_0}\right) \left(\frac{\hbar^2}{2m_e}\right) \quad (76)$$



**Fig. 9.** Espectro de excitación calculado con la Ec.(74) para diversos valores del parámetro  $M$ . a) Usando el potencial efectivo propuesto en esta Tesis. b) Usando un potencial efectivo logarítmico. Los puntos representan los datos experimentales leídos de la Ref.[14].

y  $v_{ee}^*(k) = v_{ee}(k)/2e$  con  $v_{ee}(k)$  el potencial efectivo electrón-electrón. En la Fig. 9a usamos para  $v_{ee}(k)$  el potencial efectivo (41):  $v_{ee}(k) = 4e^2 / \sqrt{(2\delta k)^2 + 1}$ , mientras que en la Fig. 9b utilizamos  $v_{ee}(k) = 2e^2 |\ln(\delta k/2)|$  un potencial que, como ya comentamos, ha sido bastante utilizado en la literatura para describir el comportamiento a longitudes de onda largas de los cables cuánticos.

En las expresiones (74)-(76), los parámetros utilizados son los mismos considerados en la Ref.([14]), esto es,  $E_F = m_e v_F^2/2 = 5.8$  [meV],  $n_e = 8.6 \times 10^5$  [cm<sup>-1</sup>],  $\delta = 0.33 \times 10^{-5}$  [cm] y  $a_0 = 0.529 \times 10^{-8}$  [cm] (radio de Bohr). Por lo tanto,  $\alpha = 0.43 \times 10^{-5}$  [meV cm] y  $\beta = 7.87 \times 10^{-10}$  [(meV)<sup>2</sup> cm<sup>2</sup>], de manera que si ponemos  $k$  en unidades de  $10^5$  cm<sup>-1</sup> obtenemos  $\epsilon(k)$  en unidades de meV.

Las figuras sugieren que el potencial efectivo que hemos propuesto es también adecuado en la región de longitudes de onda largas.

## 6 Conclusiones

En esta Tesis hemos considerado la descripción, desde un punto de vista mecánico estadístico, de sistemas multicomponentes de fermiones interactuantes en 1D. El estudio estuvo motivado por la disponibilidad de sistemas reales a baja dimensionalidad, los llamados cables cuánticos, que permiten verdaderas realizaciones de aquéllos sistemas en apariencia puramente teóricos. En particular, tuvimos en cuenta la existencia de mediciones de fotoluminiscencia y de dispersión inelástica resonante de luz sobre esas nanoestructuras semiconductoras.

El modelo elegido para esa descripción se basó en el punto de vista de Sommerfeld-Pauli de manera que consideramos un líquido de electrones o de electrones y agujeros, según la propiedad a estudiar, restringidos a moverse en una línea e interactuando vía potenciales efectivos adecuados.

Para describir el espectro de excitación de los cables utilizamos el modelo de Luttinger de líquido de electrones en 1D. Sin embargo el modelo original no es completamente satisfactorio para nuestros fines de reproducir el comportamiento de los cables cuánticos por cuanto carece de superficie de Fermi contrariamente a lo observado experimentalmente. Nuestra contribución en este sentido fue el introducir en el formalismo de Luttinger la idea de que la desaparición de la superficie de Fermi en los líquidos de Luttinger es debida a la emisión de plasmones y que la presencia de impurezas en los cables reales produce el amortiguamiento de éstos causando la restitución de la superficie de Fermi. Con este fin agregamos al Hamiltoniano original de Luttinger un término adicional (Ec.21) que contempla la dispersión de los plasmones por las impurezas. Resolvimos exactamente el Hamiltoniano resultante, siguiendo la técnica de bosonización utilizada por Mattis y Lieb con el Hamiltoniano original de Luttinger. Pudimos así encontrar la energía de excitación de los plasmones (Ec.26) y la distribución de momentos (Ecs.29-32 y Apéndice 7.2) para el caso en que la parte de la interacción del Hamiltoniano tiene la forma más general (Ec.20). El amortiguamiento de los plasmones se manifiesta en la energía dada por la Ec.(26), la cual puede hacerse imaginaria para longitudes de onda suficientemente largas y valores negativos de  $M$ . En cuanto a la distribución de momentos, un estudio en el entorno de  $k = k_F$

(Ec. 33), nos permitió concluir que si el modelo de Luttinger (con el término  $H_S$  incluido) tiene que conservar la superficie de Fermi (como se requiere para hacer una buena descripción de los cables), entonces la divergencia del potencial interpartícula en el espacio de Fourier, debe ser más lenta que  $k^{-1}$ . En otros términos hemos encontrado una cota superior para la divergencia del potencial interpartícula para longitudes de onda largas.

Con el fin de analizar los resultados de fotoluminiscencia tuvimos en cuenta que la misma puede interpretarse en términos de la recombinación entre electrones y agujeros. Consecuentemente consideramos como modelo a un sistema binario de fermiones con cargas de signo opuesto en 1D. Sin embargo la solución exacta del Hamiltoniano de Luttinger extendido a este caso la pudimos encontrar solamente para el caso en que las velocidades de Fermi de ambas especies son iguales (Apéndice 7.3) lo cual nos impidió tratar, dentro de este formalismo exacto, el caso interesante en que hay electroneutralidad. Consecuentemente tuvimos que utilizar otro formalismo. En particular, usamos uno basado en las funciones de correlación de pares, concentrándonos en su comportamiento a corto alcance. En el formalismo en cuestión, las funciones de correlación al contacto se calculan reteniendo, en su expresión diagramática, solamente los diagramas escalera e ignorando los demás. Con este objetivo generalizamos a un sistema multicomponente de fermiones (Ec.42) y la adaptamos al caso uni-dimensional, la técnica de Yasuhara (Sección 4.3 y Apéndice 7.4). Resolvimos la ecuación integral involucrada (Ec. 62) y pudimos obtener una expresión analítica simple para las funciones de correlación al contacto (Ecs. 68-69) para un potencial efectivo adecuado que introdujimos.

El potencial efectivo propuesto (Ec.41) tuvo en cuenta especialmente que se trata de describir mediante teorías estrictamente unidimensionales sistemas que en realidad son, a lo sumo, cuasi-unidimensionales y que los experimentos en general no se realizan sobre un único cable sino sobre una serie de ellos que, de alguna manera, influyen sobre el potencial efectivo entre los portadores de un dado cable.

Finalmente comparamos con datos experimentales nuestros resultados teóricos para el espectro de excitación de plasmones y el tiempo de vida medio de los pares electrón-agujero lo cual es, especulamos, una forma de verificar la bondad del potencial efectivo en los extremos de longitudes de onda largas y cortas, respectivamente.

## 7 Apéndices

### 7.1 Diagonalización del Hamiltoniano

El Hamiltoniano que queremos diagonalizar es

$$H = H_0 + H_I + H_S \quad (77)$$

donde  $H_0$ ,  $H_I$  y  $H_S$  están definidas en el texto por las ecuaciones (13), (20) y (21), respectivamente. Los operadores densidad  $\rho_i(q)$  verifican las relaciones de conmutación (16). Eligiendo el potencial de dispersión de plasmones en la forma  $M_{k,k'} = M\delta_{k,k'}$ , el Hamiltoniano  $H_S$  toma la forma

$$H_S = \frac{2\pi}{L} \sum_{k>0} \frac{M}{k} [\rho_1(k)\rho_1(-k) + \rho_2(-k)\rho_2(k)] \quad (78)$$

Siguiendo el trabajo de Mattis y Lieb[15], definimos el operador

$$T = \frac{2\pi}{L} v_F \hbar \sum_{k>0} [\rho_1(k)\rho_2(-k) + \rho_2(-k)\rho_2(k)] \quad (79)$$

de manera que el Hamiltoniano  $H$  se puede escribir

$$H = H_1 + H_2 \quad (80)$$

con  $H_1 = H_0 - T$  y  $H_2 = T + H_I + H_S$ .

La solución sigue considerando el operador dado por (23) donde  $\varphi(k)$  es una función real par a ser determinada imponiendo la condición de que la transformación unitaria  $e^{iS}$  diagonalice  $H_2$ . Observemos, en primer lugar, que esta transformación deja invariante  $H_1$ , esto es

$$e^{iS} H_1 e^{-iS} = H_1 = H_0 - T \quad (81)$$

En segundo lugar podemos apreciar, utilizando las relaciones de conmutación (16), que los operadores densidad se transforman de la siguiente manera:

$$e^{iS} \rho_1(\pm k) e^{-iS} = \rho_1(\pm k) \cosh \varphi(k) + \rho_2(\pm k) \sinh \varphi(k) \quad (82)$$

$$e^{iS} \rho_2(\pm k) e^{-iS} = \rho_2(\pm k) \cosh \varphi(k) + \rho_1(\pm k) \sinh \varphi(k) \quad (83)$$

Por otra parte, para diagonalizar el Hamiltoniano  $H_2$ , elegimos  $\varphi(k)$  de manera tal que el operador

$$\widetilde{H}_2 = e^{iS} H_2 e^{-iS} \quad (84)$$

no posea términos cruzados de la forma  $\rho_1(k)\rho_2(-k)$ . Esto nos lleva a la relación

$$\tanh 2\varphi(k) = -\frac{\lambda v(k)}{\pi(v_1(k) + \lambda v(k)/\pi)}. \quad (85)$$

Con esta elección de  $\varphi(k)$ , el Hamiltoniano transformado se escribe

$$\widetilde{H}_2 = \frac{2\pi}{L} \sum_{k>0} v_1(k) \left[ 1 + \frac{2\lambda}{\pi v_1(k)} \right]^{1/2} [\rho_1(k)\rho_1(-k) + \rho_2(-k)\rho_2(-k)] + W_1 \quad (86)$$

donde

$$W_1 = \sum_{k>0} k v_1(k) \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda v(k)}{\pi v_1(k)} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (87)$$

es el corrimiento de energía que se produce cuando se "enciende" la interacción estando el sistema en su estado base.

El espectro del sistema queda entonces descrito en términos de comportamientos colectivos de electrones (plasmones) cuya energía de excitación está dada por la Ec. (26) del texto.

## 7.2 Cálculo de la distribución de momentos

Con el objetivo de calcular la cantidad  $e^{iS} \psi_1(t) e^{-iS}$  (ver Ec. (28) del texto) introducimos el operador auxiliar[15]

$$f_\sigma(t) = e^{i\sigma S} \psi_1(t) e^{-i\sigma S}. \quad (88)$$

Observe que  $\sigma = 1$ , nos da el operador deseado. Después de algunos cálculos se demuestra que

$$f_\sigma(t) = W_\sigma(t)R_\sigma(t)\psi_1(t), \quad (89)$$

donde

$$W_\sigma(t) = \exp \left\{ \frac{2\pi}{L} \sum_{p>0} [\rho_1(-p)e^{ipt} - \rho_1(p)e^{-ipt}] \frac{(\cosh(\sigma\varphi(p)) - 1)}{p} \right\} \quad (90)$$

y

$$R_\sigma(t) = \exp \left\{ \frac{2\pi}{L} \sum_{p>0} [\rho_2(-p)e^{ipt} - \rho_2(p)e^{-ipt}] \frac{\sinh \sigma\varphi(p)}{p} \right\}. \quad (91)$$

Seguidamente utilizando la conocida identidad para operadores

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \exp(-1/2[A, B]) \quad (92)$$

y tomando  $\sigma = 1$ , la ecuación (28) toma al forma

$$I(s, t) = I_1(s, t)I_2(s, t) \quad (93)$$

con

$$I_1(s, t) = \langle \Psi_1 | \psi_1^\dagger(s)W^{-1}(s)W(t)\psi_1(t) | \Psi_1 \rangle$$

$$I_2(s, t) = \langle \Psi_2 | R^{-1}(s)R(t) | \Psi_2 \rangle \quad (94)$$

En (94), hemos supuesto que el estado fundamental puede expresarse como producto de estados de los campos "1" y "2", esto es,  $\Psi_0 = \Psi_1 \times \Psi_2$ . Aquí  $\Psi_1$  es un estado que está lleno de partículas  $b$ , desde  $-\infty$  hasta  $k_F$ , sin la presencia de partículas  $c$ . Similarmente  $\Psi_2$  es un estado lleno desde  $-k_F$  hasta  $\infty$ , también sin partículas  $c$ .

Operando con las ecuaciones definidas en (90) y (91) en conjunto con (94), se demuestra que

$$I(s, t) = Z_0(s, t)Z_1(s, t)Z_2(s, t)Z_3(s, t) \quad (95)$$

donde

$$\begin{aligned}
Z_0(s, t) &= \exp \left\{ \frac{-4\pi}{L} \sum_{k>0} \frac{[\cosh \varphi(k) - 1]}{k} (1 - e^{ik(s-t)}) \right\} \\
Z_1(s, t) &= \exp \left\{ \frac{2\pi}{L} \sum_{k>0} \frac{[\cosh \varphi(k) - 1]^2}{k} (e^{ik(s-t)} - 1) \right\} \\
Z_2(s, t) &= \exp \left\{ \frac{2\pi}{L} \sum_{k>0} \frac{(\sinh \varphi(k))^2}{k} (e^{ik(t-s)} - 1) \right\} \\
Z_3(s, t) &= \frac{1}{L} \sum_{k \leq k_F} e^{ik(t-s)} \tag{96}
\end{aligned}$$

Por lo tanto en la Ec. (27) del texto

$$\langle n_k \rangle = \frac{2\pi}{L} \sum_{k' \leq k_F} \phi(k - k') \tag{97}$$

tenemos, tomando el límite termodinámico, que

$$\phi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} e^{-Q(r)} dr \tag{98}$$

con  $Q(r)$  definida mediante la relación

$$\exp[-Q(r)] = Z_0(r)Z_1(r)Z_2(r). \tag{99}$$

Reemplazando las ecuaciones (96) en (99) obtenemos

$$Q(r) = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \frac{(1 - \cos kr)}{k} |u(k)|^2 \tag{100}$$

con

$$|u(k)|^2 = \frac{2\pi^2}{\lambda} (2 \cosh \varphi(k) - 2). \tag{101}$$

Si ahora tenemos en cuenta la expresión (85) para  $\varphi(k)$ , determinada en la diagonalización del Hamiltoniano (77), encontramos

$$|u(k)|^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left\{ \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\pi v_1(k)}{\lambda v(k)} \right)^{-2} \right]^{-1/2} - 1 \right\} \quad (102)$$

Nuestro objetivo es estudiar  $\langle n_k \rangle$  en un entorno de  $k = k_F$  para observar la existencia o no de superficie de Fermi, esto es, si la distribución de momentos, tiene una derivada infinita en  $k = k_F$ . Teniendo esto en mente hacemos

$$\begin{aligned} \langle n_k \rangle &= \frac{2\pi}{L} \sum_{k' \leq k_F} \phi(k - k') = \int_{k-k_F}^{\infty} d\eta \phi(\eta) \\ &= \int_0^{\infty} d\eta \phi(\eta) + \int_{k-k_F}^0 d\eta \phi(\eta) \end{aligned} \quad (103)$$

El primer término de (103) es constante y no contribuye a la derivada y sólo nos concentraremos en el segundo. Para realizar el estudio de  $\langle n_k \rangle$  en  $k \simeq k_F$ , solamente necesitamos el comportamiento de  $\phi(\eta)$  para valores pequeños de  $\eta$ , es decir, de  $Q(\xi)$  para  $\xi \rightarrow \infty$ . Como  $Q(\xi)$  es par consideramos sólo  $\xi > 0$ . Escribimos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\xi)}{\partial \xi} &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \sin k\xi |u(k)|^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left[ |u(0)|^2 \frac{1}{\xi} + \mathcal{O}(1/\xi^2) \right], \end{aligned} \quad (104)$$

de donde se deduce que

$$Q(\xi) \simeq \frac{\lambda^2}{2\pi^2} [|u(0)| \ln \xi + C] \quad (105)$$

siendo  $C$  una constante que puede, en principio, ser calculada si conocemos el potencial de pares. Definiendo el parámetro  $\alpha = \lambda^2 |u(0)|^2 / 4\pi^2$ , donde  $u(0) = \lim_{k \rightarrow 0} u(k)$  y  $a$  una constante con dimensiones de longitud, tenemos

$$Q(\xi) \simeq \alpha \ln(\xi/a) \quad (106)$$

Volviendo a la ecuación (98) tenemos

$$\phi(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \eta \xi}{(\xi/a)^{2\alpha}} d\xi = \frac{\Gamma(1-2\alpha) \sin \pi \alpha}{\pi} \frac{a^{2\alpha}}{|\eta|^{1-2\alpha}} \quad (107)$$

lo que nos conduce a

$$\langle n_k \rangle \sim \frac{\Gamma(1-2\alpha) \sin \pi \alpha}{2\pi \alpha} a^{2\alpha} |(k - k_F)|^{2\alpha} \sigma(k - k_F) \quad (108)$$

con

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (109)$$

### 7.3 Líquido de Luttinger de dos componentes

El modelo que nos interesa aquí es un líquido del tipo de Luttinger constituido de dos componentes o especies 1 y 2, de manera que el Hamiltoniano del sistema sin interacción tiene la forma

$$H_C = \sum_k \sum_{i=1,2} v_F^i k (a_{1k}^{i\dagger} a_{1k}^i - a_{2k}^{i\dagger} a_{2k}^i) \quad (110)$$

donde los supraíndices indican especies. Como hicimos para el caso de una sola componente, llenamos el mar negativo de cada especie. Esto es, introducimos la transformación de operadores

$$\begin{aligned} a_{1k}^i &= \begin{cases} b_k^i, & k \geq 0 \\ c_k^{i\dagger}, & k < 0 \end{cases} \\ a_{2k}^i &= \begin{cases} b_k^i, & k < 0 \\ c_k^{i\dagger}, & k \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (111)$$

lo cual nos conduce a que el Hamiltoniano (110) se pueda escribir

$$H_C = \sum_k \sum_{i=1,2} v_F^i |k| (b_k^{i\dagger} b_k^i + c_k^{i\dagger} c_k^i) + \sum_{i=1,2} W_i \quad (112)$$

con  $v_F^i$  la velocidad de Fermi para la especie  $i$  y

$$W_1 = W_2 = \sum_{k < 0} k - \sum_{k > 0} k$$

Las reglas de conmutación para los operadores  $b$  y  $c$  son las siguientes

$$\begin{aligned} b_k^{\dagger} b_{k'}^j + b_{k'}^j b_k^{\dagger} &= \delta_{ij} \delta_{k,k'} \\ c_k^{\dagger} c_{k'}^j + c_{k'}^j c_k^{\dagger} &= \delta_{ij} \delta_{k,k'} \end{aligned} \quad (113)$$

Tal como ocurre para el caso de una sola componente, la introducción de la transformación (111) hace que los operadores densidad  $\rho_{1,2}^i(k)$  conmuten de la siguiente forma

$$\begin{aligned} [\rho_1^i(-k), \rho_1^j(k')] &= [\rho_2^i(k), \rho_2^j(-k')] = \delta_{k,k'} \delta_{ij} \frac{kL}{2\pi} \\ [\rho_1^i(k), \rho_2^j(k')] &= 0 \end{aligned} \quad (114)$$

De acuerdo con estas reglas de conmutación, tenemos que

$$\begin{aligned} [H_C, \rho_1^i(\pm k)] &= \pm k v_F^i \rho_1^i(\pm k) \\ [H_C, \rho_2^i(\pm k)] &= \mp k v_F^i \rho_2^i(\pm k) \end{aligned} \quad (115)$$

Al igual que para el caso unicomponente, definimos ahora el operador

$$T = \frac{2\pi}{L} \sum_{k>0} \sum_{i=1,2} v_F^i [\rho_1^i(k) \rho_1^i(-k) + \rho_2^i(-k) \rho_2^i(k)] \quad (116)$$

el cual conmuta con los operadores densidad en la siguiente forma

$$\begin{aligned} [T, \rho_1^i(\pm k)] &= \pm k v_F^i \rho_1^i(\pm k) \\ [T, \rho_2^i(\pm k)] &= \mp k v_F^i \rho_2^i(\pm k). \end{aligned} \quad (117)$$

Consideramos un Hamiltoniano de interacción de la forma general

$$H_I = \frac{\lambda}{L} \sum_k \sum_{i,j} v_{ij}(k) [\rho_1^i(k) + \rho_2^i(k)] [\rho_1^j(-k) + \rho_2^j(-k)]. \quad (118)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano completo del sistema es  $H = H_1 + H_2$ , donde  $H_1 = H_C - T$  y  $H_2 = T + H_I$ . Por simplicidad, aquí no incluiremos el término

$H_S$  que describe la dispersión de los plasmones por impurezas (Ec.(21)), pero debemos señalar que es posible resolver exactamente el Hamiltoniano completo con ese término adicional aunque, por supuesto, la solución es un poco más complicada.

Como usualmente se realiza cuando se tienen varias componentes, introducimos operadores que describen las fluctuaciones en las densidades de carga y de partículas, esto es  $\rho^c$  y  $\rho^p$ , definidos en términos de los operadores de especies mediante

$$\begin{aligned}\rho_\alpha^c(k) &= \rho_\alpha^1(k) - \rho_\alpha^2(k) & \alpha &= 1, 2 \\ \rho_\alpha^p(k) &= \rho_\alpha^1(k) + \rho_\alpha^2(k) & \alpha &= 1, 2.\end{aligned}\quad (119)$$

Utilizando las ecuaciones (114) se demuestra las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}[\rho_1^c(-k), \rho_1^c(k')] &= [\rho_2^c(k), \rho_2^c(-k')] = \delta_{k,k'} \frac{kL}{\pi} \\ [\rho_1^p(-k), \rho_1^p(k')] &= [\rho_2^p(k), \rho_2^p(-k')] = \delta_{k,k'} \frac{kL}{\pi} \\ [\rho_1^p(k), \rho_1^p(k')] &= [\rho_2^p(k), \rho_2^p(k')] = 0 \\ [\rho_1^c(k), \rho_1^c(k')] &= [\rho_2^c(k), \rho_2^c(k')] = 0.\end{aligned}\quad (120)$$

De las relaciones anteriores vemos que  $e^{iS}H_1e^{-iS} = H_1$ , es decir  $H_1$  es invariante frente a la transformación unitaria  $e^{iS}$ , con

$$S = \frac{2\pi i}{L} \sum_{j=c,p} \sum_k \frac{\varphi^j(k)}{k} \rho_1^j(k) \rho_2^j(-k). \quad (121)$$

Si embargo en el resto del cálculo para que el Hamiltoniano pueda ser diagonalizado completamente, deberemos restringirnos al caso particular  $v_F^1 = v_F^2 = v_0$ , esto es las mismas velocidades de Fermi para ambas especies. En función de los operadores  $\rho^c$  y  $\rho^p$ , el Hamiltoniano  $H_2$ , se escribe

$$H_2 = \frac{\pi v_0}{L} \sum_{k>0} [\rho_1^p(k) \rho_1^p(-k) + \rho_2^p(-k) \rho_2^p(k)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi v_0}{L} \sum_{k>0} [\rho_1^c(k) \rho_1^c(-k) + \rho_2^c(-k) \rho_2^c(k)] + \\
& + \frac{\lambda}{L} \sum_{k>0} v(k) [\rho_1^c(k) + \rho_2^c(k)] [\rho_1^c(-k) + \rho_2^c(-k)], \quad (122)
\end{aligned}$$

en donde hemos tenido en cuenta que  $v_{11}(k) = v_{22}(k) = -v_{12}(k)$ . De la ecuación (122) se observa que el espectro de fluctuación de densidad de partículas coincide con el del espectro del sistema sin interacción, de manera que sólo resta por diagonalizar la parte correspondiente a las fluctuaciones de carga (plasmones). Con este objetivo, tomamos de (121) el caso particular  $\varphi^p(k) = 0$ , además de llamar  $\varphi^c(k) \equiv \varphi(k)$ . Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, las fluctuaciones de carga se transforman de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
e^{iS} \rho_1^c(k) e^{-iS} &= \rho_1^c(k) \cosh \varphi(k) + \rho_2^c(k) \sinh \varphi(k) \\
e^{iS} \rho_2^c(k) e^{-iS} &= \rho_2^c(k) \cosh \varphi(k) + \rho_1^c(k) \sinh \varphi(k), \quad (123)
\end{aligned}$$

mientras las fluctuaciones de densidad de partículas permanecerán invariantes. De esta forma eligiendo  $\varphi(k) = (-1/4) \ln [1 + 4\lambda v(k)/\pi v_0]$ , el Hamiltoniano de carga toma la forma diagonal

$$\begin{aligned}
H_2^c &= \frac{\pi v_0}{L} \sum_{k>0} \left[ 1 + \frac{4\lambda v(k)}{\pi v_0} \right]^{1/2} [\rho_1^c(k) \rho_1^c(-k) + \rho_2^c(-k) \rho_2^c(k)] + \\
& + \sum_{k>0} k v_0 \left\{ \left[ 1 + \frac{4\lambda v(k)}{\pi v_0} \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (124)
\end{aligned}$$

El último término es el corrimiento de energía en el proceso de carga del estado base del sistema. Definiendo ahora los operadores  $A_k^{c\dagger} = (\pi/kL)^{1/2} \rho_1^c(k)$ ,  $A_k^c = (\pi/kL)^{1/2} \rho_1^c(-k)$ ,  $A_k^{p\dagger} = (\pi/kL)^{1/2} \rho_1^p(k)$ ,  $A_k^p = (\pi/kL)^{1/2} \rho_1^p(-k)$ ,  $B_{-k}^{c\dagger} = (\pi/kL)^{1/2} \rho_2^c(-k)$ ,  $B_{-k}^c = (\pi/kL)^{1/2} \rho_2^c(k)$ ,  $B_{-k}^{p\dagger} = (\pi/kL)^{1/2} \rho_2^p(-k)$ ,  $B_{-k}^p = (\pi/kL)^{1/2} \rho_2^p(k)$ , los cuales obedecen reglas de conmutación para bosones, el Hamiltoniano completamente diagonalizado se escribe como  $H = H^p + H^c$ , donde

$$H^p = \sum_{k>0} kv_0 [A_k^{p\dagger} A_k^p + B_{-k}^{p\dagger} B_{-k}^p] \quad (125)$$

$$H^c = \sum_{k>0} kv_0 \left[ 1 + \frac{4\lambda v(k)}{\pi v_0} \right]^{1/2} [A_k^{c\dagger} A_k^c + B_{-k}^{c\dagger} B_{-k}^c] + \sum_{k>0} kv_0 \left\{ \left[ 1 + \frac{4\lambda v(k)}{\pi v_0} \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (126)$$

De las ecuaciones (125) y (126), podemos concluir, en primer lugar, que la relación de dispersión correspondiente a las fluctuaciones de densidad de partículas coinciden con las de un gas de Luttinger ideal. En segundo lugar, la relación de dispersión para las fluctuaciones de densidad de carga, coincide funcionalmente con la de plasmones de un sistema de Luttinger de una sola componente. Del procedimiento que seguimos también concluimos que el Hamiltoniano puede ser diagonalizado exactamente sólo bajo la hipótesis que  $v_F^1 = v_F^2 = v_0$ .

Otra característica de este sistema es que si estudiamos la distribución de momentos de una de las especies en presencia de la otra, ésta sigue sin presentar la discontinuidad necesaria para definir una superficie de Fermi.

#### 7.4 Relación entre $g_{ij}(0)$ y $S_{ij}(q \rightarrow \infty)$

De la relación entre los factores de estructura parciales y las funciones de correlación (Ec. 46 del texto) tenemos que las funciones de correlación al contacto pueden escribirse como

$$g_{ij}(0) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n_i n_j}} \sum_q [S_{ij}(q) - \delta_{ij}]. \quad (127)$$

Por otra parte de las ecuaciones (53 y 52) deducimos que

$$\sum_q (S_{ij}(q) - \delta_{ij}) = \frac{2}{\sqrt{n_i n_j}} \sum_{k_1, k_2} \sum_q \frac{f_i(k_1) [1 - f_i(k_1 + q)] f_j(k_2) [1 - f_j(k_2 - q)]}{\epsilon_{k_1}^i + \epsilon_{k_2}^j - (\epsilon_{k_1+q}^i + \epsilon_{k_2-q}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; q) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{n_i n_j}} \sum_k \sum_{k_1, k_2} \sum_q \frac{f_i(k_1) [1 - f_i(k_1 + k)] f_j(k_2) [1 - f_j(k_2 - q)]}{c_{k_1}^i + c_{k_2}^j - (c_{k_1+k}^i + c_{k_2-k}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k) \\
& \quad \times \frac{[1 - f_i(k_1 + k + q)] [1 - f_j(k_2 - k - q)]}{c_{k_1}^i + c_{k_2}^j - (c_{k_1+k+q}^i + c_{k_2-k-q}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k + q). \quad (128)
\end{aligned}$$

Cambiando  $q \rightarrow k$  en la suma del primer término de (128) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_q (S_{ij}(q) - \delta_{ij}) = \\
& \quad \frac{1}{\sqrt{n_i n_j}} \sum_{k_1, k_2} \sum_k \frac{f_i(k_1) [1 - f_i(k_1 + k)] f_j(k_2) [1 - f_j(k_2 - k)]}{c_{k_1}^i + c_{k_2}^j - (c_{k_1+k}^i + c_{k_2-k}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k) \\
& \quad \times \left\{ 2 + \sum_q \frac{[1 - f_i(k_1 + k + q)] [1 - f_j(k_2 - k - q)]}{c_{k_1}^i + c_{k_2}^j - (c_{k_1+k+q}^i + c_{k_2-k-q}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k + q) \right\}. \quad (129)
\end{aligned}$$

Asimismo, si realizamos el cambio de variables  $k' = k + q$  en la expresión entre llaves de la ecuación (129), podemos concluir que la ecuación (129) tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{n_i n_j}} \sum_{k_1, k_2} f_i(k_1) f_j(k_2) \times \\
& \quad \left\{ 2 \sum_k \frac{[1 - f_i(k_1 + k)] [1 - f_j(k_2 - k)]}{c_{k_1}^i + c_{k_2}^j - (c_{k_1+k}^i + c_{k_2-k}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k) \right. \\
& \quad \left. + \left( \sum_k \frac{[1 - f_i(k_1 + k)] [1 - f_j(k_2 - k)]}{c_{k_1}^i + c_{k_2}^j - (c_{k_2+k}^i + c_{k_2-k}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k) \right)^2 \right\} \quad (130)
\end{aligned}$$

Entonces, de (130) concluimos que

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{\sqrt{n_i n_j}} \sum_q (S_{ij}(q) - \delta_{ij}) = \frac{1}{n_i n_j} \sum_{k_1, k_2} f_i(k_1) f_j(k_2) \\
& \times \left\{ 2 \sum_k \frac{[1 - f_i(k_1 + k)][1 - f_j(k_2 - k)]}{\epsilon_{k_1}^i + \epsilon_{k_2}^j - (\epsilon_{k_2+k}^i + \epsilon_{k_2-k}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k) + \right. \\
& \left. \left( \sum_k \frac{[1 - f_i(k_1 + k)][1 - f_j(k_2 - k)]}{\epsilon_{k_1}^i + \epsilon_{k_2}^j - (\epsilon_{k_2+k}^i + \epsilon_{k_2-k}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k) \right)^2 \right\} + \\
& + \frac{4}{n_i n_j} \sum_{k_1, k_2} f_i(k_1) f_j(k_2), \tag{131}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación

$$\frac{4}{n_i n_j} \sum_{k_1, k_2} f_i(k_1) f_j(k_2) = 1 \tag{132}$$

Completando cuadrados y tomando el límite de longitudes de onda cortas ( $q \rightarrow \infty$ ), se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned}
& \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{n_i n_j}} \sum_q (S_{ij}(q) - \delta_{ij}) \right] = \frac{4}{n_i n_j} \sum_{k_1, k_2} f_i(k_1) f_j(k_2) \\
& \times \left\{ 1 + \sum_k \frac{[1 - f_i(k_1 + k)][1 - f_j(k_2 - k)]}{\epsilon_{k_1}^i + \epsilon_{k_2}^j - (\epsilon_{k_2+k}^i + \epsilon_{k_2-k}^j)} I_{ij}(k_1, k_2; k) \right\}^2 \tag{133}
\end{aligned}$$

Relacionando (133) con las Ecs. (127) y (53) obtenemos, finalmente

$$\lim_{q \rightarrow \infty} S_{ij}(q) - 1 = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\epsilon_q^{ij}}{(n_i n_j)^{1/2} v_{ij}(q)} g(r). \tag{134}$$

Esta expresión es la que utilizamos en el texto para relacionar la correlación al contacto con el comportamiento asintótico del factor de estructura parcial, obtenido a partir de la ecuación de Goldstone vía la derivada funcional indicada en la Ec.(48).

## Referencias

- [1] A. Sommerfeld, *Naturwissenschaften* **15**, 825 (1927).
- [2] W. Pauli, *Z. Phys.* **41**, 81 (1927).
- [3] L. Hoddeson, G. Baym and M. Eckert, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 287 (1987).
- [4] M.A. Reed and W.P. Kirk (editores), *Nanostructures: Physics and Fabrication*, (Academic, Boston, 1989).
- [5] P. Butcher, N. March and M.P. Tosi (editores), *Physics of Low-dimensional Semiconductor Structures*, (Plenum Publishing Corp., 1993).
- [6] R. Dingle, in *Proceedings of the 13th Conference on the Physics of Semiconductors, Rome 1976*, (Edt. G.F. Fumi, Tipografia Marves, Roma, 1976).
- [7] H. Sakai, *Jpn. J. Appl. Phys.* **19**, L735 (1980).
- [8] P.M. Petroff, A.C. Gossard, R.A. Logan and W. Wiegmann, *Appl. Phys. Lett.* **41**, 635 (1982).
- [9] U. Merket, J. Huser and M. Wagner, *Phys. Rev. B* **43**, 7320 (1991).
- [10] B. Goss Levi, *Physics Today* Vol. **49**, Num. 5, 22 (1996).
- [11] N.F. Johnson and M.C. Payne, *Phys. Rev. B* **45**, 3819 (1992).
- [12] J. M. Luttinger, *J. Math. Phys.* **4**, 1154 (1963).
- [13] S. Tomonaga, *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)* **5**, 544 (1950).
- [14] A. R. Goñi, A. Pinczuk, J. S. Weiner, J. M. Calleja, B. S. B. S. Dennis, L. N. Pfeiffer and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3298 (1991).
- [15] D. C. Mattis and E. H. Lieb, *J. Math. Phys.* **6**, 304 (1965).
- [16] Q.P. Li, S. Das Sarma and R. Joynt, *Phys. Rev. B* **45**, 13713 (1992).

- [17] D. C. Mattis, *The Many-Body Problem* (World Scientific, Singapore, 1993).
- [18] P.A. Bares and X.G. Wen, *Phys. Rev. B* **48**, 8636 (1993)
- [19] P. Kopietz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** L571 (1995).
- [20] J. M. Calleja, A. R. Goñi, B. S. Denis, J. S. Weiner, A. Pinczuk, S. Schmitt-Rink, L. N. Pfeiffer and K. W. West, *Solid State Commun.*, **79**, 911 (1991).
- [21] H. Yasuhara, *Solid State Commun.* **11**, 1481 (1972).
- [22] H. Yasuhara, *J. Phys. Soc. Jpn.* **36**, 361 (1974).
- [23] H. Yasuhara, *Physica* **78**, 420 (1974).
- [24] R.F.W. Pease, Edt. *Nanoelectronics*, Proceedings of the IEEE, **79**, No 8 (1991).
- [25] H. Schweizer, G. Lehr, F. Prins, G. Mayer, E. Krüger, E. Fröhlich, M. H. Pilkuhn. *Superlattices and Microstructures*, **12**, 419 (1992).
- [26] R. M. Martin and L. M. Falicov, in *Light Scattering in Solids I*, editado por M. Cardona (Springer-Verlag, 1983), Vol. 8, p. 79.
- [27] A. Pinczuk and G. Abstreiter, in *Ligth Scattering in Solids V*, editado por M. Cardona y G. Güntherodt (Springer, Berlín, 1989), Vol. 66. p. 153
- [28] N.H. March and M.P. Tosi, *Coulomb Liquids*, (Academic Press, Londres, 1984).
- [29] T. M. Rice, *Solid. State Physics*, **32**, 1 (1977).
- [30] J. C. Hensel, T. G. Phillips and G. A. Thomas *Solid State Physics* Vol 32, editado por H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull (Academic Press, New York 1977).
- [31] B.E. Maile, A. Forchel and R. Germann, *Appl. Phys. Lett.* **54**, 1552 (1989).

- [32] M.H. Pilkuhn, A. Forchel, R. Germann, H. Leier, B. E. Maile, G. Mayer, A. Menschig and H. Schweizer, Proc. 1990 Internat. Micro Process. Conf., Japan. J. Appl. Phys., Ser 4, 281 (1990).
- [33] W. Hansen, M. Horst, J.P. Kotthaus, U. Merkt, C. Sikorski and K. Ploog, Phys. Rev. Lett. **58**, 2586 (1987).
- [34] J.P. Kotthaus, in *Interfaces, Quantum Wells and Superlattices*, editado por C.R. Leavens y R. Taylor (Plenum, New York, 1988).
- [35] T. Demel, D. Heitmann, P. Grambow and K. Ploog, Phys. Rev. B **38**, 12732 (1988).
- [36] C. Sikorski and U. Merkt, Phys. Rev. Lett. **62**, 2164 (1989).
- [37] J. Alsmeyer, E. Batke and J.P. Kotthaus, Phys. Rev. B **41**, 1699 (1990).
- [38] T. Egeler, G. Abstreiter, G. Weimann, T. Demel, D. Heitmann, P. Grambow and W. Schlapp, Phys. Rev. Lett. **65**, 1804 (1990).
- [39] T. Demel, D. Heitmann, P. Grambow and K. Ploog, Phys. Rev. Lett. **66**, 2657 (1991).
- [40] B. Yu-Kuang Hu and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett., **68**, 1750 (1992).
- [41] B. Yu-Kuang Hu and S. Das Sarma, Phys. Rev. B, **48**, 5469 (1993).
- [42] A.A. Melgarejo and F. Vericat, *On the Singularity of the Electron-Electron Pair Potential in Quantum Wires*, Phys.Lett. A, 1996 (en prensa).
- [43] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **68** 1220 (1992); Phys. Rev. B, **46** 7268; 15233 (1992).
- [44] A. H. Castro Neto and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B, **53** 9713 (1996).
- [45] Reinhold Egger and H. Gabert, Phys. Rev. Lett. **77** 538 (1996).
- [46] A. Luther and L. J. Peschel, Phys. Rev. B **9**, 2911 (1974).
- [47] A. Luther and L. J. Peschel, Phys. Rev. Lett. **32**, 992 (1974).

- [48] D. C. Mattis, Phys. Rev. Lett. **32**, 714 (1974).
- [49] D. C. Mattis, J. Math. Phys. **15**, 609 (1974).
- [50] F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).
- [51] F. M. D. Haldane, Phys. Rev. Lett. **47**, 1840 (1981).
- [52] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, (Plenum Press, New York, 1981).
- [53] N.H. March and M. Parrinello, *Collective Effects in Solids and Liquids*, (Adam Hilger Ltd., Bristol, 1982)
- [54] A.A. Melgarejo and F. Vericat, *Contact Correlations in One-Dimensional Systems of Interacting Fermions* (enviado a J. Phys.: condensed matter, 1996).
- [55] S. Das Sarma and W. Lai, Phys. Rev. B **32**, 1401 (1985).
- [56] T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
- [57] K.S. Singwi and M.P. Tosi, Solid State Physics, **36**, 177 (1981).
- [58] K.S. Singwi, M.P. Tosi, R.H. Land and A. Sjölander, Phys. Rev. **176**, 589 (1968)
- [59] M.P. Tosi and N.H. March, Nuovo Cimento B **15**, 308 (1973).
- [60] A. Sjölander and M.J. Stott, Phys. Rev. B **5** 2109 (1972).
- [61] P. Vashista, P. Bhattacharyya and K.S. Singwi, Phys. Rev. B **10**, 5108 (1974).
- [62] A.K. Bedell and G.E. Brown, Phys. Rev. B **17**, 4512 (1978).
- [63] A.K. Rajagopal, J.C. Kimball and M. Banerjee, Phys. Rev. B **18** 2339 (1978).
- [64] S. Fantoni and S. Rosati, Nuovo Cimento Lett. **10**, 545 (1974); Nuovo Cimento A **25**, 593 (1975).
- [65] L.J. Lantto, Phys. Rev. B **22**, 1380 (1980).

- 6] L.J. Lantto, Phys. Rev. B **36**, 5160 (1987).
- 7] F. Vericat, G. Pastore and M.P. Tosi, Nuovo Cimento D **8**, 59 (1986).
- 8] F. Vericat and A. Melgarejo, Phys. Chem. Liq. **27**, 235 (1994).
- 9] F. Vericat and A. Melgarejo, Phys. Rev. E **50**, 830 (1994).
- 0] A. L. Fetter and Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Mc-Graw Hill, New York, 1971).
- 1] A.A. Melgarejo, *Correlaciones de Corto Alcance en Plasmas Multicomponentes Degenerados*, Trabajo de Diploma, Dpartamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, U.N. de La Plata, 1992).
- 2] J. C. Kimball, Phys. Rev. A **7**, 1648 (1973).
- 3] G. Niklasson, Phys. Rev. B **10**, 3052 (1974).
- 4] M.L. Krasnov, A.I. Kiseliyov y G.I. Makarenko, *Ecuaciones Integrales*, (Editorial Mir, Moscú, 1970).
- 5] E.H. Lieb, Rev. Mod. Phys. **48**, 553 (1976).
- 6] D.M. Ceperley and B.J. Alder, Phys. Rev. Lett. **45**, 566 (1980).
- 7] D.M. Ceperley and M.h. Kalos, en *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, editado por K. Binder (Springer Verlag, New York, 1979).
- 8] S. Ichimaru, Rev. Mod. Phys. **54**, 1017 (1982).
- 9] J. Hubbard, Phys. Lett. A **25**, 709 (1967).
- 0] S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, (JohonWiley and Sons, New York, 2nd edition, 1981).
- 1] M. Razeghui and J. P. Duchemin, in *Two-Dimensional Systems, Heterostructures and Superlattices*, (Edts. G. Bauer, F. Kuchar and H. Heinrich, Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- 2] R. Ugajin, T. Suzuki, K. Nomoto and I. Hase, J. Appl. Phys. **76**, 1041 (1994).

- [83] F. Kieseling, W. Braun, P. Ils, M. Michel, A. Forchel, I. Gyuro, M. Klenk and E. Zielinski, *Phys. Rev. B* **51**, 13809 (1995).

## Agradecimientos

Normalmente este lugar está dedicado a la enumeración de las personas que nos acompañaron, o en otras palabras, contribuyeron en alguna medida a la culminación de la Tesis. Sin embargo, es mi intención realizar algo más que una mera enumeración de nombres asociados a personas. Pretendo que aquéllos que alcanzaron a llegar hasta este alejado lugar de la Tesis, ya sea saltando todo lo demás, o bien, tomándose el trabajo de leer algo de lo que intento comunicar en ella, y encuentren sus nombres en la lista, sientan verdaderamente lo agradecido que me encuentro, no sé bien, si con el azar o el destino; ya me siento más orgulloso que afortunado, de haber podido compartir con ellos, estos maravillosos e irresponsables años de estudiante de postgrado.

Las primeras personas a las que deseo agradecer muy profundamente son, a Alexsa y Agustina, mi esposa e hija. Ellas me recordaron en todo momento, la importancia de la humanidad en mi trabajo, realizándome como hombre. La segunda persona a quien quisiera agradecer es a Fernando Vericat, mi director y amigo, con el cual pude compartir invalores discusiones, que por lo general han trascendido el ámbito de la Física. Sin este ambiente de trabajo que pudimos construir, seguramente, no sólo no hubiera podido terminar esta Tesis, si no que, tampoco podría haber siquiera comenzado ninguna otra.

A Diego Vallejo, compañero de algunas utopías y largas planificaciones de clases, algunas de las cuales, pudimos hacer realidad. A Ernesto Caffarena, Marcos Meyer, Sergio Granieri y Osvaldo Trabochi con quienes compartí no solo este período, sino toda mi carrera universitaria. A Rubén y Lola, con quienes hemos edificado una hermosa relación, que podría afirmar sin temor a equivocarme, es casi familiar. A Judith Desimoni, ya que sin el invaluable tiempo que le dedicó a discutir conmigo sobre la fabricación y otros aspectos experimentales de los cables cuánticos, nunca hubiera podido llegar a clarificar mis ideas sobre ellos. A los temporalmente exiliados, Susana Kalko y Eduardo Howard, con quienes quisiera compartir estos momentos, en los que uno tiene una sensación de arribo a algún lugar profundamente anhelado.

Quiero mencionar muy especialmente a la entrañable academia "*Vino y Ciencia*", glorioso grupo de personas, que por gracia divina, es no institucional, el cual influyó, para bien o para mal, muy profundamente en mi

formación académica. A todos sus integrantes, Gustavo Tito, Osvaldo Cappaninni, Roberto Mercader, Gerardo Goya, Guillermo Ranea, Pipi, Diego Petrucci, Gabriel Fabricius, "Tucu" Tula Molina, al siempre presente Parva Rivero y a otros tantos invitados ocasionales que enriquecieron mi visión sobre la ciencia misma y sobre sus consecuencias en las vidas de las personas.

No quiero terminar sin nombrar también al resto del personal de IFLYSIB, en especial, Rosa y Cristina, que en los duros momentos, en que la existencia de mi propia familia tambaleaba, supieron fortalecerme con su comprensión y compañía. Y por supuesto a los recientes compañeros de boliche, Luis y Manuel, quienes en estos últimos días, soportaron estoicamente mi nervioso deambular.

La culminación de una Tesis, necesariamente es una consecuencia de la convergencia de muchos factores, académicos y humanos (parafraseando a V. Kuz), es por esto que resalto la importancia que han tenido cada una de las personas que aquí nombro. A todos ellos, nuevamente, muchas gracias.