

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

Tesis Doctoral
Estructura Nuclear a Temperatura Finita

Martín Schvellinger

1996

Lugar de Trabajo

Departamento de Física

Director de Tesis

Prof. Dr. Osvaldo Civitarese

Jurado de Tesis

Prof. Dr. Luis Epele

Prof. Dr. Horacio Falomir

Prof. Dr. Marcos Saraceno

Prof. Dr. Hugo Sofía

Prof. Dr. Hector Vucetich

Indice

1	Introducción	5
1.1	Caracterización de un sistema mesoscópico	8
1.2	Determinación de temperaturas nucleares	11
2	Modelos nucleares a temperatura cero	13
2.1	Introducción	13
2.2	Modelo vibracional colectivo	14
2.3	Modelo de capas	15
2.3.1	Oscilador fenomenológico	17
2.3.2	Modelo óptico	19
2.3.3	Potencial nuclear efectivo	19
2.4	Modelo SU_3 nuclear	21
2.4.1	Clasificación con respecto a los grupos U_3 y SU_3	22
2.4.2	Clasificación simultánea con respecto a los grupos S_A y SU_3	24
2.4.3	Clasificación simultánea con respecto a los grupos SU_3 y \mathcal{R}_3	24
2.4.4	Interacción cuadrupolo-cuadrupolo	25
2.4.5	Aplicación del modelo SU_3 a núcleos livianos	27
2.5	Apéndice A: Oscilador armónico	28
2.5.1	Propiedades del potencial del oscilador armónico	29
3	Modelos nucleares a temperatura finita	30
3.1	Introducción	30
3.2	Modelos macroscópicos a temperatura finita	30
3.2.1	Modelo de la gota líquida	30
3.3	Modelo de evaporación nuclear	32
3.4	Modelo de distribuciones binomiales de la densidad de estados	34
3.5	Densidad de niveles nuclear	37

4	Consecuencias estadísticas del teorema de Levinson	40
4.1	Introducción	40
4.2	Teorema de Levinson en una dimensión	41
4.3	Causalidad a energía cero	48
4.4	Mecánica estadística de sistemas en interacción	49
4.4.1	Tratamiento exacto del segundo coeficiente virial	50
4.4.2	Formalismo basado en la matriz S	52
4.5	Apéndice C: Propiedades de los corrimientos de fase de dispersión	55
4.5.1	Representaciones integrales de los corrimientos de fase de dispersión	55
5	Aplicaciones estudiadas	57
5.1	Introducción	57
5.2	Estudio del parámetro de densidad de niveles nuclear	57
5.2.1	Aspectos asociados a procesos de evaporación y fisión nucleares	57
5.3	Aplicaciones de las distribuciones binomiales	65
5.4	Estudio del efecto Schottky en núcleos livianos en el modelo SU_3 nuclear	67
5.4.1	El modelo SU_3 y la función de partición	68
5.4.2	Resultados y Discusión	68
5.5	Estudio fenomenológico de calores específicos nucleares	74
5.5.1	Energías de excitación y temperaturas obtenidas de los espectros observados.	75
5.5.2	Tratamiento de la parte continua del espectro de energía	79
5.5.3	El teorema de Levinson y su aplicación al cálculo de calores específicos nucleares.	82
5.6	Estudios sobre el continuo por aplicación del Teorema de Levinson y sus consecuencias estadísticas	84
5.6.1	Teorema de Levinson y la función de partición nuclear	85
5.6.2	Estudio de transiciones de fase	87
5.7	Aplicación del teorema de Levinson a un hamiltoniano realista	87
5.7.1	Aplicación al pozo cuadrado unidimensional	87
5.8	El potencial de Woods-Saxon	91
6	Conclusiones generales	92
6.1	Aspectos fenomenológicos	92
6.2	Aspectos microscópicos	93

Capítulo 1

Introducción

Ciertas similitudes entre diferentes campos de la física han resultado ser provechosas a fin de investigar nuevos fenómenos. Es el caso de las teorías microscópicas tales como el formalismo de Hartree-Fock, o la aproximación autoconsistente de Thomas-Fermi, cuya aplicación se hace extensiva tanto a la física de sólidos como a la física molecular y la física nuclear. Por otra parte, la termodinámica y la mecánica estadística constituyen una forma adecuada de conectar ciertos conceptos de sistemas extendidos o macroscópicos, como por ejemplo, materia nuclear infinita y materia estelar, con sistemas nucleares microscópicos, esto es, con núcleos finitos. Entonces, es razonable desarrollar conceptos termodinámicos como los de temperatura y entropía para el caso de los sistemas nucleares. Estos conceptos permiten describir propiedades de los núcleos finitos en términos de un lenguaje usado habitualmente para sistemas macroscópicos.

Una forma usual de explorar propiedades nucleares consiste en realizar experimentos de colisiones de núcleos sobre núcleos. Del análisis de estos experimentos se obtienen elementos que permiten sustentar las ideas sobre formación de núcleos compuestos, estabilidad del campo medio nuclear, multifragmentación, evaporación en núcleos excitados, “transiciones de fase” líquido-gas entre otros fenómenos. Todos estos efectos están asociados a la pérdida de la estabilidad del campo medio nuclear de sistemas nucleares excitados a energías intermedias, esto es, a temperaturas no mayores que 5 MeV.

El estudio de la estructura nuclear a temperatura finita en los aspectos relacionados con el presente trabajo de tesis, fue motivado por la obtención de datos experimentales de reacciones nucleares generadas a través de colisiones de iones pesados tales como ^{14}N sobre blancos de ^{154}Sm a energías de bombardeo del orden de los 490 MeV ¹⁾, entre otros experimentos ²⁻¹⁶⁾. En esta clase de reacciones se forman núcleos compuestos que alcanzan rápidamente el equilibrio térmico con un tiempo de termalización característico del orden de $10^{-21}s$. Este último es 100 veces menor que el tiempo de emisión de partículas a partir

del núcleo compuesto cuyo valor característico es del orden de 10^{-19} s. En consecuencia una descripción del núcleo compuesto excitado es factible mediante la introducción del concepto de temperatura nuclear. No obstante, debe tenerse presente que la utilización cuantitativa de la temperatura nuclear presenta limitaciones.

En la reacción $^{197}\text{Au} + ^{197}\text{Au}$ ($E/A \approx 600$ MeV), la relación entre la temperatura de los isótopos livianos emitidos en la desexcitación y la energía de excitación del sistema exhibe un comportamiento similar al de una “transición de fase”. En este caso, un régimen de vapor aparece a una energía de excitación de 10 MeV por nucleón, la temperatura nuclear es cercana a los 5 MeV y la densidad nuclear está entre 0.15 y 0.30 densidades nucleares normales ^{17,18} (la mención “entre comillas” usada al introducir el término “transición de fase” será explicada más adelante al hablar de sistemas mesoscópicos).

Por otro lado, se conocen los fenómenos que ocurren a temperaturas nucleares inferiores a los 2 MeV. En ese intervalo térmico se han estudiado efectos de estructura nuclear sobre el parámetro de densidad de niveles nuclear, $a(T)$. Estos efectos incluyen correcciones de capas ^{19–28}, correlaciones de apareamiento de nucleones ^{29,30} y efectos de excitaciones colectivas ³¹. Las correcciones de capas son dependientes de la temperatura nuclear ²⁸, T , y colapsan a $T \approx 2$ MeV. El colapso de las correlaciones de apareamiento entre nucleones se produce a $T \approx 0.5$ MeV ^{29,30}, mientras que a $T \approx 1$ MeV se hacen despreciables los efectos de las excitaciones colectivas ³¹. A temperaturas del orden o mayores que 3.7 MeV, los valores experimentales del $a(T)$ sufren un abrupto cambio cuya justificación puede formularse como: a) un cambio del campo medio nuclear, ó b) un cambio en las interacciones residuales. El comportamiento a) puede ser interpretado en el modelo de evaporación basado en el balance de energía entre el sistema previo a la emisión de fragmentos livianos y el sistema total, incluidos los fragmentos emitidos, luego de la evaporación ^{32–34}.

La interpretación b) proviene de los experimentos realizados por Gomez del Campo et al. ^{15,16}, donde se infiere la posibilidad de que el $a(T)$ cambie de $A/9$ a $A/12$. En la tablas 1.1 y 1.2 se muestran resultados de secciones eficaces de dispersión σ para un núcleo compuesto de $Z = 49$ y $A = 112$ para dos valores de energía de excitación distintos, con z se indica el número de protones de los fragmentos compuestos emitidos.

El decrecimiento del $a(T)$ con el aumento de la temperatura ha sido interpretado como un signo del colapso de las interacciones residuales a temperaturas superiores a los 2 MeV. Si sólo se incluyen los efectos de campo medio se puede explicar la dependencia térmica observada del $a(T)$ para bajas T , donde el efecto de las interacciones residuales juega un rol significativo ^{35,36}.

Para T mayores que 3.7 MeV, una descripción del $a(T)$ por medio de un único campo medio no da cuenta de la tendencia observada de los datos experimentales ^{34,35}.

z	σ_{exp}	$\sigma_{A/9}$	$\sigma_{A/12}$
0	-	395.9	342.3
1	-	174.5	201.2
2	-	81.7	103.1
3	1.20	1.26	4.47
4	0.105	0.27	1.26
5	0.048	0.078	0.52
6	0.07	0.12	0.76
7	0.0125	0.024	0.2
8	0.0125	0.0073	0.076
9	0.00165	0.0024	0.035
10	0.00145	0.0014	0.021
11	0.00125	0.00062	0.012

Tabla 1.1 Sección eficaz de dispersión en términos del número de protones z del fragmento emitido. Los valores experimentales de la sección eficaz se indican como σ_{exp} , los valores calculados usando el $a(T) = A/9 \text{ MeV}^{-1}$ y $a(T) = A/12 \text{ MeV}^{-1}$ se indican como $\sigma_{A/9}$ y $\sigma_{A/12}$, respectivamente. La energía de excitación es $E_x = 101.78 \text{ MeV}$.

A través de la intercalibración de termómetros nucleares se ha determinado experimentalmente una relación entre la temperatura de emisión y la temperatura aparente ^{1,37,38}. Un aspecto significativo en este estudio es el que concierne al comportamiento térmico de la barrera de fisión nuclear, $B_f(T)$. Esta barrera establece un límite sobre la estabilidad de los núcleos excitados. Existe una relación entre el decrecimiento de $B_f(T)$ y los cambios del $a(T)$ ^{39,40}. Con respecto a la relación con modelos macroscópicos, la dependencia de los coeficientes del modelo de la gota líquida (MGL) con la temperatura para la energía libre han sido estudiados en la literatura previa. Esta parametrización reproduce los resultados de teorías microscópicas a T finita. Luego, a partir de la dependencia térmica de los coeficientes del MGL se extrae la dependencia térmica de las barreras de fisión nucleares. En particular estas son dependientes del término de superficie del modelo leptodermo (MLD) ^{1,40,41}. Un efecto similar ocurre con un modelo de gota líquida cuyos constituyentes no son nucleones sino conjuntos de cuatro nucleones con spin e isospin acoplados a cero ⁴². De esta forma puede considerarse, al menos como conjetura, la posibilidad de una competencia de dos clases diferentes de campos medios. Esta idea surge del análisis de los datos experimentales del $a(T)$ a través de los modelos de evaporación de partículas livianas ³⁴, del modelo de distribuciones binomiales de los autovalores de hamiltonianos realistas ⁴³⁻⁴⁵ y de los estudios de los efectos de las interacciones residuales para T mayores que 2 MeV ³⁵.

z	σ_{exp}	$\sigma_{A/9}$	$\sigma_{A/12}$
0	-	291.1	231.6
1	-	109.7	142.7
2	-	48.97	66.73
3	2.75	1.99	6.2
4	0.43	0.477	2.06
5	0.20	0.177	1.11
6	0.235	0.211	1.31
7	0.057	0.056	0.48
8	0.045	0.0178	0.21
9	0.0145	0.00729	0.094
10	0.0145	0.00345	0.0495
11	0.011	0.0183	0.0321

Tabla 1.2 Sección eficaz de dispersión en términos del número de protones z del fragmento emitido. Los valores experimentales de la sección eficaz se indican como σ_{exp} , los valores calculados usando el $a(T) = A/9 \text{ MeV}^{-1}$ y $a(T) = A/12 \text{ MeV}^{-1}$ se indican como $\sigma_{A/9}$ y $\sigma_{A/12}$, respectivamente. La energía de excitación es $E_x = 140.72 \text{ MeV}$.

El estado actual del problema nuclear a temperatura finita, a partir del análisis del parámetro de densidad de niveles y del estudio de otras propiedades nucleares tales como momentos cuadrupolares eléctricos y calores específicos ^{46,47}, nos conduce al objeto del presente trabajo. Este es discutir la validez de las aproximaciones de la termodinámica y de la mecánica estadística en el caso de sistemas autoligados con un número finito de grados de libertad. En el presente estudio tales sistemas son los núcleos atómicos.

El contenido de este trabajo de tesis se orienta en dos direcciones: estudiar el núcleo atómico como un sistema mesoscópico, por un lado, y por otro extraer información sobre la estructura nuclear y el campo medio nuclear a partir de la determinación experimental de temperaturas nucleares. Así se plantea la necesidad de estudiar tanto aspectos microscópicos ^{46,48} como fenomenológicos ^{34,40,47} del problema, incluido el estudio de los efectos del continuo sobre propiedades nucleares a temperatura finita ^{47,48}.

1.1 Caracterización de un sistema mesoscópico

Un sistema mesoscópico es aquel que contiene un número finito de grados de libertad, pequeño como para ser considerado un sistema termodinámico propiamente dicho. Está constituido por decenas o centenares de partículas. Es decir, que se trata de un sistema reducido

en términos de la cantidad de partículas que lo componen, hecho que implica una consideración no trivial con respecto a si es posible aplicar la termodinámica sobre esta clase de objetos. La forma usual de relacionar la mecánica estadística y la termodinámica es en el límite en el cual el número de constituyentes, N , y el volumen, V , del sistema son grandes, mientras que la densidad permanece constante. Esto es, en el límite termodinámico. Ahora el problema consiste en saber efectivamente cuán preciso es decir que un sistema es grande para que tenga validez el límite donde aparece el punto de contacto entre la termodinámica y la mecánica estadística. Es necesario saber qué tan pequeño puede ser N para que sigan valiendo los conceptos termodinámicos de temperatura y entropía ⁴⁹⁾.

El problema que se plantea es saber cuántos nucleones debe contener un núcleo atómico para que, a una dada energía de excitación, E , y suponiendo que se ha alcanzado el equilibrio térmico, la temperatura nuclear sirva como una estimación cuantitativa de la excitación del núcleo. Debe tenerse en mente que la suposición sobre el equilibrio térmico nuclear no es una suposición trivial y que está relacionada con la estabilidad del campo medio nuclear.

En líneas generales, cuando se requiere conocer la temperatura del núcleo excitado, o del fragmento a partir del cual se evaporan fragmentos más livianos, se mide la energía y la distribución angular de los productos de la reacción. Así se obtiene la densidad de estados, que es el número de estados por unidad de energía del núcleo residual, y a partir de esto se obtiene la temperatura de ese núcleo.

La inversa de la temperatura, $\beta = \frac{1}{T}$ y la energía, E , son variables complementarias y satisfacen la relación

$$\Delta E \Delta \beta \geq 1 \quad (1.1)$$

donde E y T se miden en unidades de energía. Lo cual indica que para que T esté bien definida es necesario que estén ocupados un número suficientemente grande de estados con ΔE grande¹. Se define la densidad de estados $\rho(E)$ en la forma siguiente

$$\rho(E) = \frac{\partial N}{\partial E} \approx \frac{\Delta N}{\Delta E} \quad (1.2)$$

y la temperatura nuclear es

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\rho(E)} \frac{\partial \rho(E)}{\partial E} \quad (1.3)$$

A partir de estas expresiones, se observa que se requiere un gran número de estados ocupados a fin de obtener la densidad de estados y la temperatura.

Una forma usual de representar el equilibrio térmico para sistemas nucleares es imaginando que los núcleos excitados se encuentran dentro de una caja de grandes dimensiones contra cuyas paredes efectúan choques elásticos. En este esquema los nucleones fuera del

¹En todos los casos ΔO indica el valor cuadrático medio del observable O .

volumen nuclear actúan como un reservorio de calor que intercambia masa y energía con los núcleos e induce las fluctuaciones ΔE y $\Delta\beta$.

De la mecánica estadística se sabe que

$$(\Delta E)^2 = T^2 \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = T^2 C_V \quad (1.4)$$

donde C_V es el calor específico nuclear. Reemplazando la ecuación (1.4) en la (1.1) se obtiene

$$\frac{\Delta T}{T} \geq \frac{1}{\sqrt{C_V}} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V^{-\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

Entonces la temperatura de un sistema está bien definida si la cantidad de energía necesaria para cambiar la temperatura es grande comparado con T . Debido a que C_V es proporcional al número de partículas del núcleo, A , $\frac{\Delta T}{T}$ es proporcional a $\frac{1}{\sqrt{A}}$. En un sistema macroscópico A es del orden de 10^{23} y $\frac{\Delta T}{T}$ se vuelve despreciable.

Si se supone que un núcleo finito se comporta como un gas de Fermi, a bajas temperaturas vale la relación

$$E = aT^2 \quad (1.6)$$

donde a es el parámetro de densidad de niveles que para un gas de Fermi es

$$a = \frac{A}{15} \text{MeV}^{-1} \quad (1.7)$$

de esta forma la ecuación (1.5) se transforma en

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1.4(\text{MeV})^{\frac{1}{4}}}{(EA)^{\frac{1}{4}}} \quad (1.8)$$

Esta última ecuación impone una importante restricción al uso cuantitativo de la temperatura de un sistema finito pequeño. Para tener una idea en el caso del ^{154}Sm con una energía de excitación de 80 MeV y usando la ecuación (1.8) $\frac{\Delta T}{T} \geq 0.13$, lo cual significa que a $T = 1$ MeV $\Delta T \geq 0.13$ MeV, mientras que para $T = 5$ MeV $\Delta T \geq 0.65$ MeV.

A manera de comparación en la tabla 1.3 se indican para cada energía de bombardeo, E_b , la energía de excitación E , la temperatura del núcleo compuesto excitado, con una incerteza experimental ΔT_{exp} correspondiente a experimentos reportados por Hagel et al. ¹⁾. Con las aproximaciones indicadas en esta sección presentamos valores correspondientes de $\frac{\Delta T}{T}$ y ΔT para el ^{154}Sm , usando la ecuación (1.8). De la tabla 1.3 se observa que resulta aplicable cuantitativamente el concepto de temperatura nuclear a estos experimentos debido a que el valor del cociente $\frac{\Delta T}{T}$ es del orden de 0.1. Las fluctuaciones cuánticas en T superan en más de un factor 2 a las incertezas experimentales, ΔT_{exp} indicadas en la referencia ¹⁾. No obstante, el concepto de temperatura sigue siendo un buen indicador cuantitativo de la excitación nuclear. Los valores del ΔT_{exp} provistos en la referencia ¹⁾ son incertezas en la

$E_b[MeV]$	$E[MeV]$	$T \pm \Delta T_{exp}[MeV]$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\Delta T[MeV]$
19.	167.	2.7 ± 0.1	0.110	0.298
19.	204.	3.0 ± 0.1	0.105	0.315
19.	231.	3.7 ± 0.1	0.102	0.377
35.	244.	3.7 ± 0.2	0.101	0.372
35.	333.	4.8 ± 0.1	0.093	0.446
35.	441.	5.6 ± 0.3	0.087	0.485

Tabla 1.3 Energía de bombardeo por nucleón para el ^{154}Sm . E_b , energía de excitación E , temperatura T y la indeterminación experimental ΔT_{exp} , en MeV, sobre los resultados de la referencia ¹⁾. Los valores de ΔT fueron calculados con la ecuación (1.9).

medida de T suponiendo que T no contiene las fluctuaciones cuánticas que indicamos como ΔT en la tabla 1.3.

La entropía merece una discusión adicional. Usando la primera ley de la termodinámica se obtiene la condición

$$TdS = C_V dT = dU \quad (1.9)$$

Dentro del modelo del gas de Fermi para el núcleo se obtiene

$$\frac{\Delta S}{S} \geq \frac{1.4(MeV)^{\frac{1}{4}}}{(EA)^{\frac{1}{4}}} \quad (1.10)$$

la cual tiene las mismas consecuencias sobre la validez del concepto de entropía en núcleos atómicos que la ecuación (1.8). Estas observaciones sugieren que la termodinámica como tal puede aplicarse en sistemas pequeños, con las reservas que ya se han mencionado. Debido a la finitud del sistema las fluctuaciones cuánticas de ΔT crecen como \sqrt{T} .

1.2 Determinación de temperaturas nucleares

Aunque la definición de la temperatura nuclear de la ecuación (1.3) es simple, la importancia y aplicabilidad del concepto dependen de ciertas condiciones que en la mayoría de los núcleos reales sólo se cumplen aproximadamente. En la práctica, la energía E es la energía de excitación del sistema aislado. La mecánica estadística requiere que el sistema esté en equilibrio y que exista una densidad de estados bien definida, como condiciones necesarias para caracterizar al sistema por medio de la temperatura ^{37,49)}.

El requerimiento fundamental consiste en que el sistema haya alcanzado un equilibrio estadístico completo. Esto significa que cada estado en la densidad de estados $\rho(E)$, puede estar ocupado con igual probabilidad. En la práctica, para sistemas altamente excitados

esta condición es difícil de lograr. A medida que crece la energía de excitación, el tiempo de vida medio del sistema decrece considerablemente. Eso reduce las posibilidades de que todos los estados estén ocupados con igual probabilidad. Entonces, el grado de equilibrio alcanzado es difícil de precisar porque la dinámica que establece la evolución de un sistema nuclear no se conoce completamente.

Las predicciones sobre el equilibrio estadístico de sistemas nucleares específicos se comparan con mediciones experimentales. En particular, distintos métodos de medición de temperaturas, en principio, deberían conducir al mismo resultado. No siempre esto se satisface, entonces, para esos casos se puede afirmar que no se ha alcanzado el equilibrio térmico.

Se ha argumentado la motivación del estudio al que se dedica este trabajo, y se han señalado los aspectos hacia los cuales va dirigido el mismo. Luego de esta Introducción que ocupa el Capítulo 1, en el Capítulo 2 se describen modelos nucleares microscópicos, el oscilador fenomenológico, entre otros aspectos, a temperatura cero. Tal como se indica en los Capítulos 2 y 3, se presentan los aspectos teóricos necesarios para realizar las aplicaciones sobre estudios de “transiciones de fase” y efectos de finitud entre otros fenómenos. El Capítulo 3 se dedica a realizar la extensión a temperatura finita de los modelos y aproximaciones descritas en el Capítulo 2, incluyendo el modelo leptodermo. En el Capítulo 4 se discute detenidamente el teorema de Levinson y su aplicación para el estudio del continuo en la mecánica estadística de sistemas nucleares finitos. El Capítulo 5 contiene las aplicaciones efectuadas en este trabajo sobre el problema central de esta tesis, y en el Capítulo 6 se detallan a las conclusiones generales obtenidas.

Parte del material presentado en esta tesis fue expuesto en los siguientes trabajos:

1) “Thermal dependence of droplet model parameters and the level density parameter of hot nuclei”; O. Civitarese, M. Schvellinger and A. P. Zuker; Proceedings of XV Workshop on Nuclear Physics, 1992. World Scientific ⁴⁰).

2) “Specific heat and shape transitions in light *sd* nuclei”; O. Civitarese and M. Schvellinger, Physical Review C **49** (1994) 1976 ⁴⁶).

3) “The nuclear level density parameter and nuclear structure effects at finite temperature”; O. Civitarese and M. Schvellinger, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **20** (1994) 1933 ³⁴).

4) “A phenomenological study of nuclear specific heats”; O. Civitarese and M. Schvellinger (1995), enviado para su publicación al Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics ⁴⁷).

5) “Continuum effects on thermal properties of finite nuclei” O. Civitarese and M. Schvellinger (1996), a ser enviado para su publicación al Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics ⁴⁸).

Capítulo 2

Modelos nucleares a temperatura cero

2.1 Introducción

El modelo de capas es una aproximación para la descripción de los núcleos atómicos como sistemas de muchos cuerpos. El problema con el que se encuentra este modelo en la implementación numérica, es la imposibilidad de realizar un cálculo explícito debido al gran número de configuraciones presentes (aún para bases reducidas). A fin de salvar este inconveniente, se han desarrollado varios modelos, que pueden ser considerados como aproximaciones del modelo de capas, los cuales reducen el número de estados presentes en el cálculo. Estos modelos efectivos describen la estructura física del núcleo en términos de números cuánticos bien definidos. Es el caso del modelo SU_3 nuclear de Elliot ⁵⁰⁻⁵²).

Simultáneamente con el desarrollo del modelo de capas se han estudiado modelos colectivos, como el modelo vibracional colectivo que se describirá en la sección siguiente. El modelo de capas está basado en el movimiento de partícula independiente (movimiento en un potencial central, orbitales puros, etc.). Los modelos colectivos se basan en un movimiento coherente de muchos nucleones (interacciones residuales, mezcla de orbitales).

Las ideas para desarrollar el modelo SU_3 provienen de la observación de las características colectivas de núcleos como el ^{19}F y ^{24}Mg . Existen varias razones para realizar la clasificación de los estados del modelo de capas de acuerdo con el grupo SU_3 . En primer lugar, el interés físico sobre el hecho de que los estados construidos de esta manera describen propiedades de núcleos livianos ($A < 25$). Una segunda propiedad es que se observan simultáneamente las características colectivas y de partícula independiente para estados de muchos cuerpos. Además, usando como herramienta la teoría de grupos los cálculos se simplifican considera-

blemente.

En la Sección 2 estudiaremos el modelo vibracional colectivo. En la Sección 3 describiremos algunas propiedades del modelo de capas. La Sección 4 está dedicada al modelo SU_3 nuclear.

2.2 Modelo vibracional colectivo

Este modelo está basado en la analogía con la teoría clásica de pequeñas oscilaciones de una gota líquida. La calificación de colectivo se refiere al hecho de que muchas partículas contribuyen coherentemente a los momentos multipolares ⁵⁴⁾ (sean de masa ó electromagnéticos).

Se supone que la forma del núcleo puede tener oscilaciones. La forma de una gota líquida cuya densidad, ρ , es constante se define dando el radio $R(\theta, \phi)$ en función de los ángulos θ y ϕ . $R(\theta, \phi)$ se caracteriza por un conjunto de parámetros $\alpha_{\lambda\mu}$ en el desarrollo

$$R(\theta, \phi) = R_0 + R_0 \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) + O(\alpha^2) \quad (2.1)$$

R_0 es el radio de la gota sin deformación, y $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ es el armónico esférico para los índices λ y μ . En un núcleo la densidad no es constante y si se supone que mantiene su forma radial en las oscilaciones, la ecuación (2.1) es válida sobre cada superficie de densidad constante.

El hamiltoniano que describe oscilaciones pequeñas de la densidad es el siguiente

$$H_c = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} (B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2) \quad (2.2)$$

ya que es una forma cuadrática en $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$ y $\alpha_{\lambda\mu}$, escalar e invariante bajo la transformación de inversión temporal ⁵³⁾.

Las soluciones clásicas son

$$\alpha_{\lambda\mu} = \epsilon_{\lambda\mu} \cos(\omega_\lambda t) \quad (2.3)$$

con $\omega_\lambda = (C_\lambda/B_\lambda)^{\frac{1}{2}}$ y la energía

$$E = \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2} |\epsilon_{\lambda\mu}|^2 \omega_\lambda^2 B_\lambda \quad (2.4)$$

y donde $\epsilon_{\lambda\mu}$ son las amplitudes de oscilación. El problema se cuantifica en la forma usual introduciendo el tensor de momento canónico conjugado¹

$$\pi_{\lambda\mu} = \frac{\partial H_c}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu}} = B_\lambda \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^* \quad (2.5)$$

Imponiendo las relaciones de conmutación

$$[\hat{\alpha}_{\lambda\mu}, \hat{\pi}_{\lambda\mu}] = i\hbar \quad (2.6)$$

¹Donde * indica complejo conjugado.

De esta forma resulta

$$\hat{\pi}_{\lambda\mu} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \quad (2.7)$$

Los operadores bosónicos de creación y aniquilación son

$$\hat{O}_{\lambda\mu}^\dagger = \left(\frac{\omega_\lambda B_\lambda}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\alpha}_{\lambda\mu} - \frac{i}{\omega_\lambda B_\lambda} (-1)^\mu \hat{\pi}_{\lambda-\mu} \right) \quad (2.8)$$

$$\hat{O}_{\lambda\mu} = \left(\frac{\omega_\lambda B_\lambda}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left((-1)^\mu \hat{\alpha}_{\lambda-\mu} + \frac{i}{\omega_\lambda B_\lambda} \hat{\pi}_{\lambda\mu} \right) \quad (2.9)$$

respectivamente, y obedecen las relaciones de conmutación

$$[\hat{O}_{\lambda\mu}, \hat{O}_{\lambda\mu}^\dagger] = 1 \quad (2.10)$$

En términos de los operadores bosónicos el hamiltoniano resulta

$$\hat{H}_c = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \hat{O}_{\lambda\mu}^\dagger \hat{O}_{\lambda\mu} \quad (2.11)$$

De esta forma el problema queda resuelto. Para la función de onda del estado fundamental $|\phi_0(\alpha)\rangle$

$$\hat{O}_{\lambda\mu} |\phi_0(\alpha)\rangle = 0 \quad (2.12)$$

y a partir de la ecuación de movimiento

$$[\hat{H}_c, \hat{O}_{\lambda\mu}^\dagger] = \hbar\omega_\lambda \hat{O}_{\lambda\mu}^\dagger \quad (2.13)$$

para los estados de energía $\hbar\omega_\lambda$. A partir de esto, se deduce que pueden obtenerse bandas vibracionales por aplicación de los operadores de creación sobre el estado fundamental para cada λ .

En la comparación con los resultados experimentales de los espectros nucleares este modelo ha probado ser satisfactorio ⁵³).

2.3 Modelo de capas

La base del modelo de capas consiste en suponer que la interacción de un nucleón con el resto de nucleones del núcleo, se puede aproximar por la interacción de ese nucleón con un potencial promedio, o campo medio, donde dicho nucleón se comporta como una partícula independiente. Como los nucleones se encuentran en una región del orden del radio nuclear se espera que el campo medio sea atractivo en esa región y se anule fuera de ella. Para

fuerzas independientes del spin se espera que el campo medio tenga una forma similar al potencial de Woods-Saxon ⁵⁴⁾

$$V_{WS}(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a_0]} \quad (2.14)$$

Los valores de los parámetros serán definidos en la sección 2.3.3.

Las configuraciones de partida se construyen antisimetrizando el producto de las funciones de onda de cada nucleón, respetando el principio de exclusión de Pauli. Para los estados de más baja energía es válido aproximar el potencial nuclear por un potencial tal como el del oscilador armónico con un término de Coulomb (para protones) y un término spin-órbita. La ventaja de usar este potencial es que las funciones de onda que se obtienen son fáciles de manejar tanto formal como numéricamente. Se ha demostrado que esta aproximación del oscilador armónico es muy satisfactoria ⁵²⁾. Esto se ha probado con cálculos de Hartree-Fock en los cuales se obtienen las funciones de onda de partícula independiente en forma autoconsistente.

El parámetro del oscilador se puede tratar como un parámetro variacional, o determinar exigiendo que las funciones de onda de menor número de nodos tengan el radio cuadrático medio correcto.

Los problemas básicos del modelo de capas son la introducción de una interacción residual apropiada y encontrar las configuraciones de los nucleones fuera de las capas cerradas. Usualmente, para encontrar las autofunciones del problema nuclear en el esquema del modelo de capas se debe realizar una diagonalización de un conjunto finito de estados en una base apropiada. Otra forma es recurrir a propiedades de invarianza del hamiltoniano nuclear frente a cierto grupo G de transformaciones, con lo cual se clasifican los estados de acuerdo a esos grupos. El número de estados así calculados es finito y contiene, en general, las propiedades físicas necesarias para caracterizar el espectro del núcleo estudiado en cada caso. El hamiltoniano que nos interesa tiene la forma general

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}_R \quad (2.15)$$

donde \hat{H}_0 es el hamiltoniano de partícula independiente que contiene el potencial efectivo de un cuerpo (términos: cinético, spin-órbita, centrífugo)

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A \hat{h}_0(i) \quad (2.16)$$

donde A es el número de nucleones contenidos en el núcleo. En el caso de la interacción residual \hat{U}_R suponemos la inclusión de términos de uno y de dos cuerpos

$$\hat{U}_R = \sum_{i=1}^A \hat{V}_i^{(1)} + \sum_{i<j}^A \hat{V}_{ij}^{(2)} \quad (2.17)$$

La técnica para simplificar el problema consiste en aplicar las propiedades de invariancia del hamiltoniano con respecto a un grupo de transformaciones. Como el núcleo está aislado en el espacio, resulta invariante bajo las transformaciones del grupo de rotaciones en tres dimensiones \mathcal{R}^3 . Luego, las autofunciones del hamiltoniano deben pertenecer a una representación irreducible del grupo \mathcal{R}^3 . Los autovalores correspondientes se distinguen mediante un número entero o semientero J que describe la representación irreducible. La degeneración de cada autovalor es $(2J + 1)$. Donde J es el momento angular total. Las autofunciones además, se pueden clasificar de acuerdo con el grupo \mathcal{R}^2 de rotaciones en el plano (x, y) cuyo índice de representación es el número M , que es el número cuántico magnético.

Otro grupo invariante bajo \mathcal{R}^3 es el grupo de transformaciones de inversión espacial o paridad, y sus representaciones irreducibles son caracterizadas por el número cuántico de paridad $\pi = \pm 1$. Si se supone que las interacciones nucleares preservan la paridad, entonces, las autofunciones tienen una paridad definida.

Respecto de la operación de permutación de partículas idénticas se debe considerar que en virtud del principio de exclusión las autofunciones pertenecen a una representación completamente antisimétrica del grupo de permutaciones S_A , donde A es el número de partículas. En definitiva, se deben estudiar exhaustivamente los grupos de invariancia del hamiltoniano para poder reducir el problema y clasificar los autoestados en las representaciones a las cuales estos pertenecen.

Antes de comenzar con la descripción del modelo SU_3 nuclear, es conveniente tener en mente algunos resultados obtenidos a partir de modelos tales como el oscilador fenomenológico y el modelo óptico. Pondremos énfasis en la descripción de los mismos por dos razones, una es la presentación ordenada de los métodos y modelos nucleares teóricos, y la otra es que hemos utilizado particularmente estos modelos y técnicas de cálculo para resolver los problemas que se presentan en el Capítulo 5 de este trabajo.

2.3.1 Oscilador fenomenológico

Es usual utilizar el potencial del oscilador armónico

$$\hat{V}_{OA} = \frac{1}{2}M\omega^2\hat{r}^2 \quad (2.18)$$

donde M es la masa del nucleón, ω es la frecuencia del oscilador y r es la distancia medida desde el origen.

La ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico es la siguiente

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\hat{\nabla}^2 + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{r}^2 \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.19)$$

En el apéndice A se presenta la resolución completa del problema como es usual en mecánica cuántica. En lo que sigue se usarán los resultados de este apéndice.

Las autofunciones del oscilador son

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{\bar{n}l} \left(\frac{r}{b} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.20)$$

donde

$$b = \left(\frac{\hbar}{M\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

es el parámetro del oscilador. Como es usual $Y_{lm}(\theta, \phi)$ es el armónico esférico correspondiente al momento angular orbital l y al número cuántico magnético m . Las $R_{\bar{n}l}(x)$ son las funciones de onda radiales del oscilador en coordenadas esféricas, y se define $x = r/b$,

$$R_{\bar{n}l}(x) = \left(\frac{2 \bar{n}!}{b^3 \Gamma(\bar{n} + l + 3/2)} \right)^{\frac{1}{2}} x^l \mathcal{L}_{\bar{n} - l + \frac{1}{2}}(x^2) e^{-x^2/2} \quad (2.22)$$

$\bar{n} = \frac{n-l}{2}$, y las funciones $\Gamma(\bar{n} + l + 3/2)$ tanto como los polinomios generalizados de Laguerre $\mathcal{L}_{\bar{n} - l + \frac{1}{2}}(x^2)$ se definen en el Apéndice A.

Los autovalores de energía son

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right) \quad (2.23)$$

Normalmente se ajusta la frecuencia del oscilador ω a fin de reproducir el valor cuadrático medio del radio nuclear. La frecuencia del oscilador es

$$\hbar\omega \approx 40 A^{-\frac{1}{3}} \text{ MeV} \quad (2.24)$$

Los niveles del oscilador tienen una degeneración de $(2l + 1)$ para cada l . Además, debe tenerse en cuenta que existe una interacción que corresponde al acoplamiento spin-órbita que produce el desdoblamiento de cada nivel en estados con momento angular total $j = l \pm \frac{1}{2}$, con $j = \frac{1}{2}$ si $l = 0$. La interacción spin-órbita se puede representar como ⁵⁴⁾

$$\hat{\Delta}\epsilon_{ls} \approx -20 (\vec{l} \cdot \vec{s}) A^{-\frac{2}{3}} \text{ MeV} \quad (2.25)$$

La función de onda incluido el spin es

$$\psi_{nljm}(r, \theta, \phi) = i^l \mathcal{R}_{\bar{n}lj} \left(\frac{r}{b} \right) \left(Y_{lm}(\theta, \phi) \chi^{1/2} \right)_{jm} \quad (2.26)$$

donde $\mathcal{R}_{\bar{n}lj}$ es la función de onda radial, solución de la ecuación con $V(r) = M\omega^2 r^2/2 + l(l+1)\hbar^2/2Mr^2$, y $\chi^{1/2}$ es la función de onda de spin.

2.3.2 Modelo óptico

El acoplamiento del nucleón con los grados de libertad internos del núcleo, puede representarse mediante un potencial imaginario. Este potencial se suma al hamiltoniano de partícula independiente.

Del análisis de las secciones eficaces de los experimentos de dispersión se obtienen los valores de los parámetros que se requieren para definir el potencial óptico.

El potencial óptico se escribe como sigue

$$\hat{V}_{op}(r) = \hat{V}(r) + i \hat{W}(r) \quad (2.27)$$

donde i es la unidad imaginaria. El potencial real $\hat{V}(r)$ debe parecerse a la densidad nuclear. Una distribución radial conveniente es el potencial de Woods-Saxon de la ecuación (2.14) que requiere tres parámetros ajustables con los resultados de experimentos de dispersión. En la ecuación (2.14) V_0 describe la profundidad central (en $r = 0$), R_0 es el radio efectivo del núcleo y a_0 representa el espesor de la superficie nuclear.

La forma más simple para la parte imaginaria $\hat{W}(r)$, es suponer que tiene la misma forma que la parte real y parámetros distintos. De esta manera se escribe

$$\hat{W}(r) = \frac{-W_0}{1 + \exp[(r - R_W)/a_W]} \quad (2.28)$$

En el acoplamiento spin-órbita es necesario un término de superficie, ya que en la región de la superficie el gradiente de la densidad $\rho(r)$ define la dirección radial y posibilita introducir un potencial local

$$\hat{V}_{ls}(r) \propto \hat{\nabla} \rho(r) \times \hat{p} \cdot \hat{s} = \hbar^{-1} (\hat{l} \cdot \hat{s}) \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(r)}{\partial r} \quad (2.29)$$

Como el efecto dominante del acoplamiento spin-órbita se encuentra localizado en la superficie nuclear, es suficiente con usar un potencial del tipo

$$\hat{V}_{ls}(r) = V_{ls} r_{ls}^2 (\hat{l} \cdot \hat{s}) \frac{1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (2.30)$$

donde $f(r)$ es la función radial asociada al potencial central, en este caso el potencial de Woods-Saxon.

2.3.3 Potencial nuclear efectivo

El potencial nuclear que utilizaremos en las aplicaciones es el siguiente

$$\hat{V}_n(r) = \hat{V}_{0n}(r) + \hat{V}_{ls}(r) \quad (2.31)$$

Parámetro	Valor Numérico
r_{Vp}	1.24 fm
r_{Vn}	1.24 fm
r_{ls}	1.10 fm
a_{Vp}	0.65 fm
a_{Vn}	0.65 fm
a_{ls}	0.70 fm
V_{0p}	63.01 MeV
V_{0n}	47.56 MeV
V_{ls}	17.20 MeV

Tabla 2.1. Parámetros del potencial óptico.

para neutrones y

$$\hat{V}_p(r) = \hat{V}_{0p}(r) + \hat{V}_c(r) + \hat{V}_{ls}(r) \quad (2.32)$$

para protones. El potencial central es

$$\hat{V}_{0i}(r) = V_i f(r, R_{Vi}, a_{Vi}) \quad (2.33)$$

donde $f(r, R_{Vi}, a_{Vi}) = [1 + \exp((r - R_{Vi})/a_{Vi})]^{-1}$ y el índice i indica neutrones o protones (n, p), según corresponda. El potencial spin-órbita es

$$\hat{V}_{ls}(r) = V_{ls} r_{ls}^2 (\vec{l} \cdot \vec{s}) \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, R_{Vi}, a_{Vi})}{\partial r} \quad (2.34)$$

Para los protones el potencial de Coulomb es

$$\hat{V}_c(r) = \frac{Z e^2}{2 R_c} \left(3 - \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right) \quad (2.35)$$

si $r \leq R_c$ y

$$\hat{V}_c(r) = \frac{Z e^2}{r} \quad (2.36)$$

si $r \geq R_c$.

Del ajuste de datos experimentales resulta que $R_c = R_{Vp}$. La forma del potencial de Woods-Saxon es la de la ecuación (2.14). Para los radios efectivos se tiene la siguiente parametrización

$$R_{Vi} = r_{Vi} A^{\frac{1}{3}} \quad (2.37)$$

y

$$R_{ls} = r_{ls} A^{\frac{1}{3}} \quad (2.38)$$

En la tabla 2.1 se muestran los valores de los parámetros de la referencia ⁶⁹⁾, excepto para el potencial spin-órbita que se ha extraído de la referencia ⁵⁴⁾. Usaremos este potencial

para calcular propiedades térmicas de núcleos por aplicación del teorema de Levinson en el Capítulo 5.

2.4 Modelo SU_3 nuclear

Vamos a comenzar esta sección estableciendo el problema de la clasificación de los estados nucleares con respecto a los grupos U_3 , S_A y \mathcal{R}_3 . Esta clasificación servirá como introducción al subgrupo SU_3 de U_3 , el cual junto con las autofunciones del oscilador armónico constituye la base del modelo SU_3 nuclear de Elliot.

Dentro del modelo de capas, si se estudia una capa parcialmente ocupada del oscilador, es posible construir un gran número W de estados de A partículas cada uno con N cuantos del oscilador. Un problema que aparece es cómo construir a partir del conjunto W los estados que se transforman de acuerdo con las representaciones irreducibles de los grupos S_A , U_3 y \mathcal{R}_3 .

Un grupo continuo de transformaciones unitarias en s dimensiones tiene s^2 generadores. En el caso del grupo U_3 del oscilador armónico esos generadores se escriben en términos de los operadores de creación y destrucción de cuantos del oscilador. En una representación cartesiana estos últimos son

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{\alpha} - i b^2 \hat{p}_\alpha}{b} \right) \quad (2.39)$$

y

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{\alpha} + i b^2 \hat{p}_\alpha}{b} \right) \quad (2.40)$$

respectivamente, donde α representa las coordenadas cartesianas x , y ó z , y b es el parámetro del oscilador definido en la ecuación (2.21). Los cuantos del oscilador cumplen las relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] = [\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = 0 \quad (2.41)$$

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.42)$$

donde α y β pueden ser x , y ó z .

Los nueve generadores del grupo U_3 se pueden escribir a partir de los nueve operadores $\hat{\mathcal{A}}_{\alpha\beta}$ definidos como

$$\hat{\mathcal{A}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta + \hat{a}_\beta \hat{a}_\alpha^\dagger) \quad (2.43)$$

los cuales destruyen un cuanto del oscilador en la dirección β y lo crean en la dirección α 52). Los operadores recién definidos tienen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{\mathcal{A}}_{\alpha\beta}, \hat{\mathcal{A}}_{\gamma\delta}] = \hat{\mathcal{A}}_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \hat{\mathcal{A}}_{\gamma\beta} \delta_{\alpha\delta} \quad (2.44)$$

El hamiltoniano del oscilador armónico en términos de los operadores $\hat{A}_{\alpha\beta}$ se escribe como sigue

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{A}_{xx} + \hat{A}_{yy} + \hat{A}_{zz} \quad (2.45)$$

de donde resulta trivial probar que el hamiltoniano es invariante frente a las transformaciones pertenecientes al grupo U_3

$$[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{A}_{\alpha\beta}] = 0 \quad (2.46)$$

de aquí resulta que si se define la transformación unitaria como

$$\hat{U} = \exp \left(i \sum_{\alpha\beta\pi} C_{\alpha\beta\pi}^{\pi} \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{\pi} \right) \quad (2.47)$$

entonces

$$[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{U}] = 0 \quad (2.48)$$

donde las matrices $\hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{\pi}$ (con $\pi = \pm$) son los generadores del álgebra de Lie del grupo U_3 . En términos de los operadores $\hat{A}_{\alpha\beta}$

$$\hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{\pm} = (\hat{A}_{\alpha\beta} + \hat{A}_{\beta\alpha}) \pm i (\hat{A}_{\alpha\beta} - \hat{A}_{\beta\alpha}) \quad (2.49)$$

Como consecuencia, cada autovalor del hamiltoniano lleva el índice de la representación de U_3 a la que pertenece.

Para el oscilador armónico de A partículas se obtiene el hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A \hat{\mathcal{H}}_0(i) \quad (2.50)$$

que es invariante bajo la acción de los operadores $\hat{B}_{\alpha\beta}$ definidos como

$$\hat{B}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^A \hat{A}_{\alpha\beta}(i) \quad (2.51)$$

mientras que los generadores de las transformaciones unitarias son

$$\hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{\pm} = (\hat{B}_{\alpha\beta} + \hat{B}_{\beta\alpha}) \pm i (\hat{B}_{\alpha\beta} - \hat{B}_{\beta\alpha}) \quad (2.52)$$

Habiendo establecido las propiedades del grupo U_3 , pasamos a estudiar la clasificación de los estados del oscilador armónico de acuerdo con los grupos U_3 y SU_3 .

2.4.1 Clasificación con respecto a los grupos U_3 y SU_3

Una solución general de A osciladores armónicos independientes se puede escribir como

$$|pqr\rangle_{i_1, \dots, i_{p+q+r}} = \hat{a}_x^\dagger(i_1) \hat{a}_x^\dagger(i_2) \cdots \hat{a}_x^\dagger(i_p) \hat{a}_y^\dagger(i_{p+1}) \cdots \hat{a}_y^\dagger(i_{p+q}) \hat{a}_z^\dagger(i_{p+q+1}) \cdots \hat{a}_z^\dagger(i_{p+q+r}) |0\rangle \quad (2.53)$$

donde $|0\rangle$ es el estado de vacío que corresponde a cero cuantos del oscilador. Este estado es el 1s que es no-deformado. Los $\hat{a}_\alpha^\dagger(i)$ son operadores de creación de un cuanto de oscilador en la dirección α , para la i -ésima partícula. La función $|pqr\rangle_{i_1, \dots, i_{p+q+r}}$ posee p , q y r cuantos en las direcciones x , y y z , respectivamente. Los números i_1, \dots, i_{p+q+r} toman valores entre 1 y A , donde A es el número total de partículas.

En particular, si se supone que cada partícula posee sólo un cuanto de oscilador, entonces, el conjunto de números i_1, \dots, i_{p+q+r} toma los valores i_1, \dots, i_A y el estado resultante $|pqr\rangle_{i_1, \dots, i_A}$ tiene una simetría definida con respecto al grupo S_A de permutaciones de A partículas, y también tiene simetría definida con respecto al grupo U_s de transformaciones unitarias entre cuantos de oscilador, donde s es el número de estados de partícula independiente ocupados por las A partículas. En el presente caso s vale 3 y corresponde al grupo U_3 .

Como un ejemplo: sea el caso de los estados de dos partículas donde una de ellas tiene un cuanto en la dirección x y la otra en la dirección y . Se pueden construir dos estados con simetría definida frente a las permutaciones de las dos partículas, estos son

$$\psi^\pm(\vec{r}) = \langle \vec{r} | [\hat{a}_x^\dagger(1) \hat{a}_y^\dagger(2) \pm \hat{a}_x^\dagger(2) \hat{a}_y^\dagger(1)] | 0 \rangle \quad (2.54)$$

donde el supraíndice \pm indica el estado simétrico (+), ó el estado antisimétrico (-), con respecto al intercambio de partículas, 1 y 2. En este caso A es 2, el grupo S_A es el grupo S_2 . El estado simétrico pertenece a la representación [2] de S_2 y pertenece también a la representación (2) del grupo U_3 . El estado antisimétrico pertenece a la representación [1 1] de S_2 y a la representación (1 1) de U_3 .

Como los cuantos del oscilador se pueden crear en una de las tres direcciones (x , y , z), es imposible construir un estado completamente antisimétrico de más de tres cuantos del oscilador. Si se recurre a la representación de los diagramas de Young para el grupo S_A , se establece que para N cuantos del oscilador, cada diagrama de Young debe poseer N cajas distribuidas a lo sumo en tres filas. En forma similar, la representación se puede describir por los números (p_1, p_2, p_3) que miden la longitud de las filas, esto es el número de cajas por fila de los diagramas de Young. Así los estados de partícula independiente que tienen $n = 0, 1, 2, \dots$, etc. cuantos del oscilador, pertenecen a la representación $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, etc. de U_3 , respectivamente.

Las funciones que se transforman de acuerdo con una representación irreducible de U_3 , lo hacen también de acuerdo con una representación irreducible de SU_3 . Por lo tanto, conjuntos descriptos por diagramas de Young que sólo difieren en el número de columnas completas de tres cajas, pertenecen a la misma representación del grupo SU_3 . De esta manera, sólo dos números son necesarios para caracterizar una representación irreducible del grupo SU_3 y estos son $\lambda = p_1 - p_2$ y $\mu = p_2 - p_3$.

2.4.2 Clasificación simultánea con respecto a los grupos S_A y SU_3

El problema de encontrar a cuál representación de SU_3 pertenecen los estados con una simetría definida con respecto a S_A , se resuelve por el procedimiento de cadena de clasificación. Para ilustrar ésto, consideremos el caso de las partículas en la capa $n = 2$ del oscilador. Los estados de partícula independiente, como se vió en la sección anterior, pertenecen a la representación $(2, 0, 0)$ de U_3 . Para los estados de dos partículas bajo las transformaciones del grupo S_2 , se pueden clasificar de acuerdo a las representaciones $[2]$, simétrica y $[1\ 1]$, antisimétrica de S_2 . Del producto directo de estas representaciones se obtienen las representaciones $[4]$, $[3\ 1]$ y $[2\ 2]$, que en términos de las representaciones de U_3 son $(4, 0, 0)$, $(3, 1, 0)$ y $(2, 2, 0)$, respectivamente. Estos estados pertenecen a las representaciones $(\lambda, \mu) = (4, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 2)$ de SU_3 , respectivamente.

La dimensión de una representación (λ, μ) viene dada por

$$\dim(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} (\lambda + 1) (\mu + 1) (\lambda + \mu + 2) \quad (2.55)$$

2.4.3 Clasificación simultánea con respecto a los grupos SU_3 y \mathcal{R}_3

Las representaciones irreducibles del grupo ortogonal \mathcal{R}_3 , llevan el índice L , que representa el momento angular orbital. Un estado de una partícula se transforma con respecto a SU_3 de acuerdo con la representación $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ y tiene $L = 1$. Dos estados cuánticos pueden pertenecer a las representaciones $[2]$ y $[1\ 1]$ de S_2 , a las representaciones $(2, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ de U_3 , a las representaciones $(\lambda, \mu) = (2, 0)$ y $(0, 1)$ de SU_3 , y a las representaciones $L = 1 \otimes 1 = 0, 1$ y 2 de \mathcal{R}_3 de acuerdo a las bien conocidas reglas de acoplamiento de momentos angulares.

El paso siguiente de la clasificación simultánea consiste en aplicar argumentos de dimensionalidad. Las dimensiones de las representaciones de SU_3 ejemplificadas en este caso son $\dim(2, 0) = 6$ y $\dim(0, 1) = 3$. Como es sabido, la dimensión de la representación L de \mathcal{R}_3 es $(2L + 1)$. De esta forma, se puede decir que las funciones de onda (estados) que se transforman de acuerdo con la representación $(\lambda, \mu) = (2, 0)$ de SU_3 , pueden tener $L = 0$ y 2 . Mientras que para las que se transforman de acuerdo con la representación $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ pueden tener solamente $L = 1$.

La regla general para toda representación (λ, μ) de SU_3 , consiste en que el momento angular orbital L está dado por

$$L = K, K + 1, \dots, K + \bar{\lambda} \quad (2.56)$$

si $K \neq 0$ y

$$L = \bar{\lambda}, \bar{\lambda} - 2, \dots, 1 \text{ o } 0 \quad (2.57)$$

si $K = 0$, con $K = \bar{\mu}, \bar{\mu} - 2, \dots, 1$ ó 0 donde $\bar{\lambda}$ es el máximo entre λ y μ , mientras que $\bar{\mu}$ es el mínimo.

2.4.4 Interacción cuadrupolo-cuadrupolo

Hasta ahora, dentro del modelo SU_3 nuclear sólo hemos presentado una visión de la parte formal de la teoría de la clasificación simultánea de estados nucleares con respecto a los grupo S_A, U_3, SU_3 y \mathcal{R}_3 . En esta sección retornamos al problema físico sobre la estructura de los estados nucleares.

Los núcleos livianos con $A \approx 20$ nucleones manifiestan propiedades colectivas. Estas propiedades colectivas son posibles si las interacciones nucleares de dos cuerpos son de largo alcance (comparado con el tamaño nuclear). Es necesario establecer las características que debe tener la interacción efectiva. Para éso se realiza un desarrollo de largo alcance en términos de un cierto parámetro de longitud, digamos a , de cualquier fuerza central de dos cuerpos

$$\hat{V}^{(2)} = \sum_{i < j}^A \hat{V} \left(\frac{r_{ij}}{a} \right) = \sum_{ij}^A \left(\xi_0 + \xi_2 \frac{\hat{r}_{ij}^2}{a^2} + \xi_4 \frac{\hat{r}_{ij}^4}{a^4} + \dots \right) \quad (2.58)$$

Para el caso extremo de un alcance muy grande comparado con la distancia entre nucleones la matriz $\hat{V}^{(2)}$ es diagonal en el problema de A cuerpos y el primer término del desarrollo anterior es $\xi_0 A(A-1)/2$, la primera corrección proviene término

$$\sum_{i < j}^A \hat{r}_{ij}^2 = \sum_{i < j}^A (\hat{r}_i - \hat{r}_j)^2 = \sum_{ij}^A (\hat{r}_i^2 + \hat{r}_j^2 - 2 \hat{r}_i \hat{r}_j \cos \theta_{ij}) = (A-1) \sum_{i=1}^A \hat{r}_i^2 - 2 \sum_{i < j}^A \hat{r}_i \hat{r}_j \cos \theta_{ij} \quad (2.59)$$

El término siguiente del desarrollo de $\hat{V}^{(2)}$ es el proporcional a

$$\sum_{i < j}^A \hat{r}_{ij}^4 = \sum_{i < j}^A (\hat{r}_i^2 + \hat{r}_j^2 - 2 \hat{r}_i \hat{r}_j \cos \theta_{ij})^2 \quad (2.60)$$

que luego de elevar explícitamente al cuadrado se transforma en

$$\sum_{i < j}^A [\hat{r}_i^4 + \hat{r}_j^4 + \frac{8}{3} \hat{r}_i^2 \hat{r}_j^2 + \frac{4}{3} \hat{r}_i^2 \hat{r}_j^2 P_2(\cos \theta_{ij}) - 4 (\hat{r}_i^2 + \hat{r}_j^2) \hat{r}_i \hat{r}_j \cos \theta_{ij}] \quad (2.61)$$

El último término de esta expresión tiene elementos de matriz cero en un modelo de capas con una sólo capa activa, por razones de paridad. Los tres primeros términos son constantes o términos de partícula independiente que no juegan un rol significativo en la ruptura de la degeneración de los estados de muchos cuerpos. Luego, el término que produce una ruptura de la degeneración es

$$\hat{r}_i^2 \hat{r}_j^2 P_2(\cos \theta_{ij}) = \hat{r}_i^2 Y^2(\theta_i \phi_i) \cdot \hat{r}_j^2 Y^2(\theta_j \phi_j) \quad (2.62)$$

Este término se llama potencial P_2 ó potencial QQ .

Este término acopla estados del oscilador armónico de muchos cuerpos que tienen distinto número de cuantos del oscilador. Dichos acoplamientos han sido ignorados dentro del modelo SU_3 . El argumento se basa en que la separación entre capas es grande comparada con estos efectos. Por lo tanto, el potencial QQ de la última expresión debe ser considerado sólo operando dentro de una capa del oscilador. Dentro de una capa de oscilador

$$\hat{r}_i^2 Y_q^2(\theta_i \phi_i) = \frac{b^2}{4} \left(\frac{5}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{Q}_q \quad (2.63)$$

\hat{Q}_q es el operador definido como

$$\hat{Q}_q = \sum_{i=1}^A \hat{Q}_q(i) \quad (2.64)$$

donde

$$\hat{Q}_q = \left(\frac{4\pi}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hat{r}^2 Y_q^2(\theta_r \phi_r) + b^4 \hat{p}^2 Y_q^2(\theta_p \phi_p)}{b^2} \right) \quad (2.65)$$

En esta forma la ruptura de la degeneración en los niveles del oscilador da un corrimiento de los niveles proporcional a

$$\sum_{i < j}^A \hat{Q}(i) \cdot \hat{Q}(j) \quad (2.66)$$

Hemos visto que el oscilador armónico es invariante con respecto a las transformaciones de los grupos U_3 y SU_3 . El operador de Casimir de la forma bilineal del grupo U_3 se puede construir a partir de los operadores $\hat{A}_{\alpha\beta}$

$$\hat{C}_2 = \sum_{\alpha\beta} \hat{A}_{\alpha\beta} \hat{A}_{\beta\alpha} \quad (2.67)$$

El operador de Casimir de SU_3 , \hat{C}_2 se obtiene de \hat{C}_2 sustrayendo de este último toda dependencia en \hat{H}_0

$$\frac{1}{6} \hat{C}_2 = \sum_{\alpha \neq \beta} \hat{A}_{\alpha\beta} \hat{A}_{\beta\alpha} + \frac{1}{6} [2 \hat{A}_{zz} - \hat{A}_{xx} - \hat{A}_{yy}]^2 + \frac{1}{2} [\hat{A}_{xx} - \hat{A}_{yy}]^2 = \frac{1}{6} [(\hat{Q} \cdot \hat{Q}) + 3(\hat{L} \cdot \hat{L})] \quad (2.68)$$

Esta expresión muestra el carácter escalar de \hat{C}_2 por acción de transformaciones de \mathcal{R}_3 . Una interacción atractiva de largo alcance puede escribirse como

$$-\hat{Q} \cdot \hat{Q} = -\hat{C}_2 + 3\hat{L}^2 \quad (2.69)$$

\hat{C}_2 es invariante con respecto a SU_3 , y por lo tanto, no acopla estados que pertenecen a diferentes representaciones. Dentro de una dada representación sólo aparecen los autovalores cuyo valor depende de la representación (λ, μ) . El SU_3 es típicamente un grupo cuya simetría está rota por la presencia del término de acoplamiento cuadrupolar en el hamiltoniano.

De la última ecuación los autovalores de $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$ son proporcionales a $L(L+1)$, lo cual muestra el carácter colectivo del modelo SU_3 . El valor del operador de Casimir en la representación (λ, μ) es ⁵²⁾

$$\langle \hat{C}_2 \rangle_{\lambda\mu} = 4[\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu] \quad (2.70)$$

2.4.5 Aplicación del modelo SU_3 a núcleos livianos

Para núcleos con A entre 16 y 40 nucleones, la capa activa es la $2s1d$. En particular, aplicaremos el modelo a núcleos con A y Z pares. En estas condiciones, y suponiendo que el potencial de interacción es el potencial de la forma cuadrupolo-cuadrupolo puro para una dada representación (λ, μ) de SU_3 , los autovalores del hamiltoniano son

$$E(\lambda, \mu, L) = \kappa [A_0 - 4(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)) + 3L(L+1)] \quad (2.71)$$

donde la constante κ se define como la intensidad de la interacción cuadrupolar, y A_0 es una constante que se fija con la condición

$$E(\lambda, \mu, L=0) = 0 \quad (2.72)$$

para la representación (λ, μ) asociada al estado fundamental de la capa $2s1d$. La intensidad de la interacción κ se fija ajustando la diferencia de energía entre el estado fundamental $J^\pi = 0^+$ y el primer estado excitado $J^\pi = 2^+$.

2.5 Apéndice A: Oscilador armónico

El hamiltoniano para una partícula de masa M para el potencial del oscilador armónico de frecuencia ω en tres dimensiones es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{M\omega^2}{2} \hat{r}^2 \quad (2.73)$$

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para este potencial es

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2M r^2} + \frac{M\omega^2}{2} \hat{r}^2 \right) R_{nl} \left(\frac{r}{b} \right) = E_n R_{nl} \left(\frac{r}{b} \right) \quad (2.74)$$

Los autovalores de la energía son

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (2.75)$$

con $l = n, n-2, \dots, 0$ ó 1 y $j = l \pm \frac{1}{2}$. b es el parámetro del oscilador definido como

$$b = \left(\frac{\hbar}{M\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.76)$$

$x = r/b$ es la variable adimensional en la escala del oscilador b . Con respecto al número cuántico del oscilador n corresponde al número de nodos de la función radial n_r menos 1

$$n = n_r - 1 \quad (2.77)$$

También se definen los números cuánticos $\bar{n} = \frac{n-l}{2}$ y $\alpha = l + \frac{1}{2}$. Las autofunciones radiales del oscilador son

$$R_{nl}(x) = \left(\frac{2\bar{n}!}{b^3 \Gamma(\bar{n} + l + 3/2)} \right)^{\frac{1}{2}} x^l \mathcal{L}_{\bar{n}}^{l+\frac{1}{2}}(x^2) e^{-x^2/2} \quad (2.78)$$

donde

$$\Gamma(\bar{n} + l + 3/2) = (n + l + 1)!! \frac{1}{2^{(n+l+2)/2}} \pi^{\frac{1}{2}} \quad (2.79)$$

!! indica el factorial de enteros impares.

$\mathcal{L}_{\bar{n}}^{l+\frac{1}{2}}(x^2)$ son los polinomios generalizados de Laguerre definidos por medio de la relación recursiva ⁷²⁾

$$\mathcal{L}_{\bar{n}}^{l+\frac{1}{2}}(x^2) = \mathcal{L}_{\bar{n}}^{l-1+\frac{1}{2}}(x^2) + \mathcal{L}_{\bar{n}-1}^{l+\frac{1}{2}}(x^2) \quad (2.80)$$

Comenzando a partir de

$$\mathcal{L}_{\bar{n}}^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!} H_{2n+1}(x) \quad (2.81)$$

Los $H_m(x)$ son los polinomios de Hermite definidos como sigue

$$H_0(x) = 1 \quad (2.82)$$

$$H_1(x) = 2x \quad (2.83)$$

y mediante la relación de recurrencia

$$H_{m+1}(x) = 2x H_m(x) + 2m H_{m-1}(x) \quad (2.84)$$

2.5.1 Propiedades del potencial del oscilador armónico

Para cada l la degeneración de los autovalores del oscilador es $2l + 1$ y un factor 2 adicional por la degeneración del spin, de tal manera que la degeneración total es

$$\Omega(n) = \sum_l^n 2(2l + 1) = (n + 1)(n + 2) \quad (2.85)$$

que para $n \gg 1$ toma la forma

$$\Omega(n) \approx \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 \quad (2.86)$$

El número total de estados es

$$N(n) = \sum_{n'}^n \Omega(n') = \sum_{n'=0}^n (n' + 1)(n' + 2) = \frac{1}{3}(n + 1)(n + 2)(n + 3) \quad (2.87)$$

que en el límite para $n \gg 1$ se convierte en

$$N(n) \approx \frac{(n + 2)^3}{3} \quad (2.88)$$

Con respecto al tamaño de la órbita, se tiene que

$$\langle r^2 \rangle_{nl} = \frac{\hbar}{M\omega} (n + 3/2) \quad (2.89)$$

$$A \langle r^2 \rangle = 2 \frac{\hbar}{M\omega} \sum_{n'=0}^{n_{max}} (n' + 3/2)(n' + 1)(n' + 2) \approx \frac{\hbar}{2M\omega} (n_{max} + 2)^4 \quad (2.90)$$

de aquí se obtiene el radio cuadrático medio. En forma similar se calcula el número total de partículas A del sistema

$$A = 2 \sum_{n'=0}^{n_{max}} (n' + 1)(n' + 2) \approx \frac{2}{3} (n_{max} + 2)^3 \quad (2.91)$$

Combinando estas dos últimas expresiones y usando el hecho de que $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ se obtiene que el radio cuadrático medio se escribe como

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 \quad (2.92)$$

con lo cual se llega a la expresión

$$\hbar\omega \approx 40 A^{-\frac{1}{3}} MeV \quad (2.93)$$

Capítulo 3

Modelos nucleares a temperatura finita

3.1 Introducción

Como hemos indicado en el Capítulo 1 el objeto de este trabajo consiste en entender el comportamiento nuclear a temperatura finita, buscando propiedades de ese comportamiento que den cuenta o descarten, por ejemplo, las llamadas “transiciones de fase” entre otros fenómenos. Es necesario, a fin de completar los elementos de la discusión previa a los cálculos, describir modelos nucleares a temperatura finita. Este es el objeto del presente capítulo.

3.2 Modelos macroscópicos a temperatura finita

3.2.1 Modelo de la gota líquida

Mediante la aproximación extendida del método autoconsistente de Thomas-Fermi (ETF), se determinaron los coeficientes en el desarrollo de la energía libre en el modelo de la gota líquida (MGL) para núcleos a temperatura finita. Estos desarrollos han sido satisfactorios para describir las energías de ligadura de núcleos en su estado fundamental, esto es, a temperatura cero. En esto último se destacan las predicciones de modelo leptodermo ó modelo droplet (ML) ^{41,56}. En las aplicaciones a materia estelar y fragmentación de iones pesados, es necesario conocer la dependencia con la temperatura nuclear de los parámetros de la gota líquida ⁴¹.

Para el caso de núcleos esféricos, la energía libre se escribe en términos de la densidad local $\rho(r)$ como

$$F = E - TS = \int f[\rho(r)]d^3r = F[\rho] \quad (3.1)$$

donde E es la energía interna y S es la entropía. Para la parte de la energía potencial de la funcional $f[\rho]$ se utiliza la interacción de Skyrme de las referencias ^{41,56}). La idea central consiste en que todos los coeficientes del MGL se pueden describir a partir de los coeficientes obtenidos del cálculo variacional con una dimensión geométrica, esto es, el caso de la materia nuclear semi-infinita ^{41,56}).

Con respecto al tratamiento estático de núcleos altamente excitados, debe tenerse en mente que tales sistemas no son estables sino que en ellos se produce una evaporación de nucleones. Para temperaturas inferiores a 4 MeV los tiempos de evaporación son suficientemente largos, de forma tal que el núcleo puede ser tratado estadísticamente como un sistema metaestable.

Desde el punto de vista astrofísico y dentro del estudio del colapso estelar la situación cambia, ya que se establece que los núcleos ahora están en equilibrio con un gas de nucleones y leptones bajo una presión externa ⁴¹).

Un hecho a destacar es que no existe evidencia experimental de núcleos compuestos por encima de los 5 MeV ⁴¹). La validez del MGL se extiende hasta el límite de estabilidad de núcleos pesados tales como el plomo.

Para el caso de núcleos esféricos, la energía libre total, F , se expresa como

$$F = F_{sim} + F_{as} + F_{Coul} \quad (3.2)$$

con $A = Z + N$, donde Z es el número de protones y N es el número de neutrones del núcleo. La parte simétrica se desarrolla, como es usual en el MGL, en potencias de $A^{-1/3}$ y un término constante denotado por a_0

$$F_{sim}(A) = a_V A + a_S A^{2/3} + a_C A^{1/3} + a_0 \quad (3.3)$$

los coeficientes a_i son funciones de la temperatura T y se pueden aproximar en la forma

$$a_i(T) = a_i(0)(1 - \chi_i T^2) \quad (3.4)$$

Los valores de los parámetros $a_i(0)$ y χ_i se dan en la tabla 3.1. La parte asimétrica se puede expresar como

$$F_{as}(A, I) = \frac{JAI^2}{[1 + (9J/4Q)A^{-1/3}]} \quad (3.5)$$

donde

$$I = \frac{N - Z}{A} \quad (3.6)$$

	a_V	a_S	a_C	a_0	J	Q	c_1	c_2
$a_i(0)$	-15.776	17.22	10.24	-8.0	30.03	35.4	0.737	-1.28
$10^3 \chi_i$	-3.36	5.53	5.43	-12.3	1.04	12.8	0.763	-13.2

Tabla 3.1. Coeficientes del MGL y del modelo leptodermo extraídos de la referencia ⁴¹⁾. La primera fila muestra los coeficientes a temperatura cero en MeV. La segunda fila muestra los coeficientes χ_i en MeV^{-2} .

J es la energía de asimetría de volumen y Q es el coeficiente asociado al espesor de la superficie. El término de Coulomb

$$F_{Coul}(A, Z) = c_1 Z^2 A^{-1/3} + c_2 Z^2 A^{-1} \quad (3.7)$$

3.3 Modelo de evaporación nuclear

A partir de cálculos en la aproximación de Hartree-Fock dependiente de la temperatura ⁵⁷⁾, la temperatura límite, T_{lim} para la inestabilidad del campo medio es $T_{lim} \approx 9$ MeV para el ^{56}Fe y $T_{lim} \approx 11$ MeV para el ^{208}Pb , dependiendo del tipo de interacción de Skyrme usada. La dependencia de la energía de ligadura del nucleón con la temperatura nuclear T extraída de la referencia ³²⁾, es la siguiente

$$B(T) = B_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_{lim}} \right)^{5/2} \right) \quad (3.8)$$

Se supone que, debido a las propiedades de saturación nuclear, la energía de ligadura del núcleo a temperatura finita, es proporcional al número de nucleones, A . $-B_0$ es el valor del Q de la reacción entre los dos estados fundamentales, esto es del núcleo inicial con A nucleones y el final con $A - 1$ nucleones ³²⁾. Con la dependencia térmica anterior veremos como queda afectado el proceso del decaimiento, esto es la emisión de un nucleón desde el núcleo inicial. Para el caso de un neutrón, y a partir de la fórmula de Weisskopf, la energía promedio liberada en la evaporación de ese neutrón emitido por un núcleo es

$$\Delta E = 2T + B(T) \quad (3.9)$$

donde, en lugar de B_0 que aparece en la expresión común, ahora se ha incluido la dependencia con la temperatura del núcleo emisor en la energía de ligadura del neutrón.

Esta pérdida de energía disminuye la energía de excitación del núcleo residual pero no siempre lo enfría. Dada una temperatura, la evaporación tiene lugar manteniendo la temperatura constante. O sea, sin producirse el enfriamiento del núcleo residual.

núcleo	$T_{lim}[MeV]$	$T_c^{a_1}[MeV]$	$T_c^{a_2}[MeV]$	$T_c^{a_3}[MeV]$
^{56}Fe	9.	11.9	14.52	15.29
^{208}Pb	11.	13.55	17.23	18.35

Tabla 3.2. Temperatura crítica, T_c , para la evaporación de nucleones desde los núcleos iniciales indicados en la primera columna. T_{lim} es la temperatura límite en cada caso. Los a_i con $i = 1, 2, 3$ son valores del parámetro de densidad de niveles nuclear escrito como $a_i = A/k_i$ donde k_i vale 8 MeV, 13 MeV y 15 MeV para $i = 1, 2, 3$, respectivamente.

En el modelo del gas de Fermi, la energía de excitación por nucleón, e , está relacionada con la temperatura nuclear, T , mediante la expresión

$$e = \frac{E}{A} = \frac{aT^2}{A} \quad (3.10)$$

donde A es el número de nucleones del núcleo y a es el parámetro de densidad de niveles nuclear. Si la energía removida por un neutrón es igual a la energía térmica promedio, entonces

$$\frac{aT^2}{A} = 2T + B(T) \quad (3.11)$$

la temperatura nuclear no cambia durante la evaporación del nucleón. De esta forma, reemplazando $B(T)$ por su expresión en función de T se obtiene una ecuación para la temperatura

$$2T + B_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_{lim}} \right)^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{aT^2}{A} \quad (3.12)$$

Se puede hacer una aproximación cuadrática de la ecuación anterior, con lo que resulta

$$T_c = \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{B_0}{T_{lim}} \right)^2 + \frac{B_0 a}{A}}}{\left(\frac{B_0}{T_{lim}^2} + \frac{a}{A} \right)} \quad (3.13)$$

La temperatura crítica en la aproximación cuadrática se indica como T_c , con $B_0 = 8$ MeV y $a = A/8$ (que es el parámetro de densidad de niveles experimental para bajas temperaturas). Para el caso del ^{56}Fe , $T_c = 11,9$ MeV.

Por debajo de T_c el sistema se enfría y por encima de esa temperatura, se calienta a partir de la evaporación de una partícula. En el caso de los neutrones, la T_c es mayor que la T_{lim} , con lo cual no se produce el calentamiento del núcleo residual. Para el caso de partículas α evaporadas a partir de un núcleo, la energía de separación como función de la temperatura es

$$B_\alpha(T) = 4B(T) - 28.3MeV \quad (3.14)$$

núcleo	$T_{lim}^\alpha [MeV]$	$T_c^{\alpha_1} [MeV]$	$T_c^{\alpha_2} [MeV]$	$T_c^{\alpha_3} [MeV]$
^{56}Fe	9.	4.42	5.22	5.44
^{208}Pb	11.	4.93	6.02	6.35

Tabla 3.3. Temperatura crítica, T_c^α , para la evaporación de partículas α desde los núcleos iniciales indicados en la primera columna. T_{lim} es la temperatura límite en cada caso. Los a_i con $i = 1, 2, 3$ son valores del parámetro de densidad de niveles nuclear escrito como $a_i = A/k_i$ donde k_i vale 8 MeV, 13 MeV y 15 MeV para $i = 1, 2, 3$, respectivamente.

donde 28.3 MeV es la energía de ligadura de la partícula α . La pérdida de energía por nucleón viene dada por la siguiente ecuación

$$\frac{\Delta E}{4} = \frac{2T + B_\alpha(T) + V_c}{4} \quad (3.15)$$

donde $V_c = 5$ MeV es la barrera de Coulomb de la partícula α .

La ecuación de balance de energía es

$$\frac{\Delta E}{4} = \frac{aT^2}{A} \quad (3.16)$$

Si ahora se vuelve a usar la aproximación cuadrática se puede calcular muy fácilmente la temperatura crítica asociada a la evaporación de partículas α , T_c^α

$$T_c^\alpha = \frac{0.5 + \sqrt{0.25 + 8.7 \text{ MeV} \left(\frac{a}{A} + \frac{8 \text{ MeV}}{T_{lim}^2} \right)}}{2 \left(\frac{a}{A} + \frac{8 \text{ MeV}}{T_{lim}^2} \right)} \quad (3.17)$$

En esta forma, la temperatura crítica para la evaporación de las partículas α es $T_c^\alpha = 4.42$ MeV, para el ^{56}Fe . Es decir, que es menor que para el caso de la evaporación de nucleones. Luego, entre la temperatura crítica y la temperatura límite no se produce el enfriamiento y en cambio se produce un efecto de calentamiento del núcleo residual y esto puede producir que el núcleo alcance una temperatura donde se produzca una transición fase de líquido a gas.

3.4 Modelo de distribuciones binomiales de la densidad de estados

Como se ha descrito en el Capítulo 1, el objeto de este trabajo está relacionado con el estudio de la termodinámica de sistemas finitos. Es conveniente estudiar un modelo de una

distribución binomial de estados ⁴³⁻⁴⁵), ya que con este modelo se presentan claramente diferencias entre efectos críticos, asociados a “transiciones de fase”, y efectos de finitud ⁴⁰).

Para distinguir entre estos mecanismos (“transiciones de fase” ó efectos de finitud), se exigirá que la densidad de estados crezca rápidamente en una región relativamente pequeña de la energía de excitación, esto es

$$\frac{d\rho(E)}{dE} \gg \frac{\rho(E)}{E} \quad (3.18)$$

donde E es la energía de excitación del núcleo y $\rho(E) = \Delta N/\Delta E$ es la densidad de estados nucleares.

Otro elemento necesario será el análisis de los grados de libertad relevantes en el problema nuclear. Estos son, por un lado, los grados de libertad colectivos (representados por ejemplo por grados de libertad rotacionales, las bandas Yrast que se presentan típicamente en los espectros de la capa activa $2s1d$ de núcleos livianos como ^{18}O , ^{20}O , ^{20}Ne , ^{22}Ne , ^{24}Ne , ^{22}Mg , ^{24}Mg , ^{26}Mg , ^{26}Si , ^{28}Si) y los grados de libertad de partícula independiente. En los núcleos citados, éstos están presentes y su distribución se asemeja a una distribución binomial de estados. La coexistencia de estas dos regiones espectrales asegura, a priori, la existencia de, al menos, dos escalas distintas de energía. Con ésto en mente, se tiene una noción muy simplificada sobre una posible competencia de escalas sobre alguna región de energía de excitación o temperatura nuclear.

En los sistemas finitos, mesoscópicos, los efectos de finitud pueden ser dominantes. En esta sección estudiaremos un modelo en el cual veremos cómo separar las dos clases de efectos. En dicho modelo, se estudian las funciones espectrales binomiales para describir el comportamiento de funciones termodinámicas de sistemas finitos. Es bien sabido que un hamiltoniano nuclear realista tiene una distribución binomial de autovalores ^{43,44}), y que los grados de libertad relevantes del problema son descriptos por diferentes clases de estados. Cada clase está descrita por un distribución espectral binomial ⁴⁵). Para cada clase i -ésima de estados la función de partición canónica se escribe como

$$\mathcal{Z}_i = \exp \phi_i = \sum_{n_i} \rho_i(n_i) \exp(-\beta E_{n_i}) \quad (3.19)$$

donde $\rho_i(n_i)$ es la densidad de estados de la i -ésima clase con energía E_{n_i} . Para una distribución binomial de estados, la i -ésima clase tiene una densidad de estados dada por

$$\rho_i(n) = \frac{N_i!}{n! (N_i - n)!} p_i^n q_i^{N_i - n} \frac{\Delta n_i}{\Delta n} \quad (3.20)$$

donde Δn es el número de estados contenidos en un intervalo de energía, de los cuales Δn_i pertenecen a la i -ésima clase. En adelante denotaremos como $C(N_i, n)$ al número combinatorio $N_i!/[n! (N_i - n)!]$. p_i y q_i son tales que satisfacen la relación $p_i + q_i = 1$. Con

esta distribución de estados la función de partición canónica se escribe como

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{N}_0(i) \sum_n C(N_i, n) p_i^n q_i^{N_i-n} \exp(-\beta \epsilon_i n) \quad (3.21)$$

donde $\mathcal{N}_0(i)$ es el factor de normalización de la clase i . $\epsilon_i n$ es la energía del estado n -ésimo de la clase i . Luego, la última ecuación se puede reescribir como

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{N}_0(i) (p_i e^{-\beta \epsilon_i} + q_i)^{N_i} \quad (3.22)$$

Se propone el cambio de variable $u_i = e^{-\beta \epsilon_i}$ donde $\beta = \frac{1}{T}$ con T en MeV, suponiendo que T es la temperatura del sistema.

El espaciado entre dos estados consecutivos es la escala característica de energía del sistema. Se entiende que en un intervalo de energía entre E y $E + \epsilon_i$ habrá un sólo estado, es decir que $\Delta n = 1$. La distribución binomial i comienza a partir de $E = n_i \epsilon_i$, con lo cual, la expresión (3.22) se debe multiplicar por $u_i^{n_i} = e^{-\beta \epsilon_i n_i}$, luego ϕ_i de la ecuación (3.19) queda como

$$\phi_i = \ln \mathcal{Z}_i = \ln \mathcal{N}_0(i) + N_i \ln (p_i u_i + q_i) + n_i \ln u_i \quad (3.23)$$

la dependencia sobre el número de partículas N se obtiene si se expresan las siguientes cantidades como

$$\mathcal{N}_0(i) = e^{\delta_i N} = \frac{1}{\mathcal{N}^N} \quad (3.24)$$

donde \mathcal{N} es la norma por partícula, se define la fracción ν_i como $N_i = \nu_i N$, asimismo se define γ_i como $n_i = \gamma_i N$. Las cantidades p_i y q_i se reescriben como $(1 + \eta_i)/2$ y $(1 - \eta_i)/2$, respectivamente. De esta forma ϕ_i se expresa como

$$\phi_i = N \left(\delta_i + \nu_i \ln (1 + u_i) + \nu_i \ln \left(1 + \eta_i \left(\frac{u_i - 1}{u_i + 1} \right) \right) - \nu_i \ln 2 + \gamma_i \ln u_i \right) \quad (3.25)$$

Los parámetros δ_i , γ_i y ν_i son independientes de β debido a lo cual toda la dependencia térmica de ϕ se obtiene a partir de u_i . Si se supone que la forma de la distribución binomial es independiente de la temperatura, entonces η_i es independiente de la temperatura también. Luego, para establecer el carácter extensivo de la cantidad ϕ_i , se puede reescribir como

$$\phi_i = N f_i(\delta_i, \nu_i, \gamma_i, u_i) \quad (3.26)$$

donde la función $f_i(\delta_i, \nu_i, \gamma_i, u_i)$ es la siguiente

$$f_i(\delta_i, \nu_i, \gamma_i, u_i) = \delta_i + \nu_i \ln (1 + u_i) + \nu_i \ln \left(1 + \eta_i \left(\frac{u_i - 1}{u_i + 1} \right) \right) - \nu_i \ln 2 + \gamma_i \ln u_i \quad (3.27)$$

Si se reduce el modelo al caso de dos escalas de energía, esto es, el sistema tiene dos conjuntos de estados con distribuciones de autovalores descritas por dos distribuciones espectrales binomiales, la función de partición canónica es

$$\mathcal{Z} = \exp \phi_1 + \exp \phi_2 \quad (3.28)$$

Haciendo un cambio de variables como sigue: $\psi = (\phi_1 + \phi_2)/2$ y $\phi = (\phi_2 - \phi_1)/2$,

$$\mathcal{Z} = 2 e^\psi \cosh(\phi) \quad (3.29)$$

La energía es

$$E = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} (1 - \tanh(\phi)) \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{2} (1 + \tanh(\phi)) \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} \quad (3.30)$$

Ahora queda explícito que la energía del sistema se expresa como la suma de dos energías, cada una asociada a cada clase de estados y con una función de peso $\Theta(\phi) = 1/2 (1 + \tanh(\phi))$. Haciendo algo de álgebra se obtiene

$$E = -N (1 - \Theta(\phi)) \frac{\partial f_1}{\partial \beta} - N \Theta(\phi) \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \quad (3.31)$$

Para el calor específico por partícula se obtiene

$$\frac{C}{N} = \frac{1}{N} \frac{dE}{dT} = (\beta\epsilon)^2 \left([1 - \Theta(\phi)] K_1 + \Theta(\phi) K_2 + (\kappa_2 - \kappa_1)^2 N \frac{(\text{sech}\phi)^2}{4} \right) \quad (3.32)$$

donde $\kappa_i = u \partial f_i / \partial u$, $u = e^{-\beta\epsilon}$, $\epsilon_i = \epsilon$ y $K_i = u \partial \kappa_i / \partial u$.

La propiedad importante es que el término de la $(\text{sech}\phi)^2$ es proporcional a N , el número de partículas, mientras que los dos primeros no dependen explícitamente de N . La dependencia implícita de N de los dos primeros términos está dentro de ϕ . $\Theta(\phi)$ es una función del tipo escalón que varía entre cero y uno para valores grandes de N . Esto significa que en el límite termodinámico cuando N tiende a infinito, los dos primeros términos de la ecuación (3.32) permanecen finitos. El tercer término puede producir un pico en el calor específico, y dependiendo de ϕ , este pico podría crecer para valores muy grandes de N . Como los argumentos de las funciones κ_i son los parámetros que definen cada densidad binomial de estados, y como estos parámetros se expresan en función de N , se puede suponer que δ_i , ν_i y γ_i son pequeños comparados con N , esto significa que la mayor contribución posible a C/N debida al tercer término de (3.32) será dada por un valor de ϕ para el cual el factor $(\text{sech}\phi)^2$ tienda a uno.

3.5 Densidad de niveles nuclear

Entre los métodos de cálculo de la densidad nuclear de niveles que se tratan en las referencias 19,54), el modelo más sencillo posible, es uno en el cual las densidades de estados de partícula independiente de neutrones y de protones son constantes. El gran potencial del sistema se escribe como

$$\Omega = \Omega_n + \Omega_p \quad (3.33)$$

donde

$$\Omega_n = \int_0^{\infty} g_n(\epsilon) \ln [1 + \exp(\alpha_n - \beta\epsilon)] \quad (3.34)$$

para neutrones y similarmente

$$\Omega_p = \int_0^{\infty} g_p(\epsilon) \ln [1 + \exp(\alpha_p - \beta\epsilon)] \quad (3.35)$$

para protones. En estas dos últimas expresiones se ha reemplazado la suma sobre estados de partícula independiente por una integral sobre una densidad de estados $g_i(\epsilon)$ donde i es n ó p , según se trate de neutrones ó de protones, respectivamente.

Para la aproximación donde se supone que las densidades de niveles son constantes, esto es: $g_n(\epsilon) = g_n$ y $g_p(\epsilon) = g_p$, en el límite de bajas temperaturas el desarrollo de Taylor a primer orden en T da

$$\Omega = \frac{g_n \mu_n^2}{2T} + \frac{g_p \mu_p^2}{2T} + \frac{\pi^2 g_n T}{6} + \frac{\pi^2 g_p T}{6} \quad (3.36)$$

donde $\alpha_i = \mu_i \beta$, con μ_i el potencial químico de neutrones ó de protones. De esta forma se tiene que $N = g_n \mu_n$, donde N es el número de neutrones; $Z = g_p \mu_p$, donde Z es el número de protones, asimismo la energía, E , se escribe como

$$E = \frac{g_n \mu_n^2}{2} + \frac{g_p \mu_p^2}{2} + \frac{\pi^2 g_n T^2}{6} + \frac{\pi^2 g_p T^2}{6} \quad (3.37)$$

la entropía, $S = dE/dT$

$$S = \frac{\pi^2 g_n T}{3} + \frac{\pi^2 g_p T}{3} \quad (3.38)$$

y la energía de excitación es

$$E^* = E - E_0 = \frac{\pi^2}{6} (g_n + g_p) T^2 = a T^2 \quad (3.39)$$

donde el parámetro de densidad de niveles nuclear es

$$a = \frac{\pi^2}{6} (g_n + g_p) \quad (3.40)$$

Tomando la aproximación $(g_n + g_p)^2 \approx 4g_n g_p$ se obtiene la fórmula de Bethe

$$\rho = \frac{\sqrt{\pi} \exp \sqrt{a E^*}}{12 (a E^*)^{1/4}} \quad (3.41)$$

Se puede demostrar que si la densidad de estados de partícula independiente es una función lentamente variable de la energía, los resultados del modelo de espaciamiento constante, son aproximadamente válidos si las densidades g_n y g_p son evaluadas en el nivel de Fermi. Para nucleones en núcleos cuya densidad de materia es aproximadamente constante la densidad de estados $g(E)$ es proporcional a \sqrt{E} . El nivel de Fermi, μ se escribe como

$$\mu = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{g}{4} \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \quad (3.42)$$

donde r_0 es el parámetro del radio nuclear y m_0 es la masa del nucleón. Las densidades son

$$g_n(\mu) = \frac{3 N}{2 \mu} \quad (3.43)$$

y

$$g_p(\mu) = \frac{3 Z}{2 \mu} \quad (3.44)$$

y a es proporcional a A , el número de nucleones del núcleo.

La densidad de niveles dependiente del spin, $\rho(E^*, I)$ se obtiene de la densidad de niveles como se indica a continuación

$$\rho(E^*, I) = \frac{(2I + 1)\rho(E^*)}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3(E^*)} \exp\left(\frac{-I(I + 1)}{2\sigma^2(E^*)}\right) \quad (3.45)$$

donde $\sigma(E^*)$ es el parámetro de “corte” del spin y I es el momento angular.

En el límite estadístico, el parámetro de “corte” del spin se escribe como

$$\sigma^2(E^*) = \frac{\mathcal{J}I}{\hbar^2} \quad (3.46)$$

que es proporcional a $\sqrt{aE^*}A^{2/3}$, en este caso \mathcal{J} es el momento de inercia del núcleo.

Capítulo 4

Consecuencias estadísticas del teorema de Levinson

4.1 Introducción

En este capítulo discutiremos la forma de implementar la inclusión del continuo en el tratamiento estadístico. Comenzaremos por el estudio del teorema de Levinson. Este teorema permite obtener una relación entre los corrimientos de fase de dispersión y el número de estados ligados de un dado potencial. A continuación, se obtendrá una relación entre el número de estados ligados y no ligados. Describiremos estos aspectos en las primeras secciones y luego concentraremos la atención sobre el cálculo estadístico de la densidad de niveles.

En la sección 4.4 discutiremos parcialmente algunos resultados conocidos de la mecánica estadística de sistemas en interacción. Estudiaremos cómo escribir la densidad de estados en términos de las derivadas de los corrimientos de fase de dispersión con respecto a la energía.

En primer término se obtendrá el teorema de Levinson para un sistema unidimensional. Se estudiará el retraso temporal en el límite de bajas energías. En este límite se prueba que el retraso temporal cuántico tiene una cota inferior clásica.

En su formulación usual el teorema de Levinson establece que para un sistema con un potencial con simetría esférica, $V(r)$, que produce un corrimiento de fase $\delta_l(k)$ y n_l estados ligados con momento angular l y bajo la convención $\delta_l(\infty) = 0$, se obtiene ^{58,59)}

$$\delta_l(0) = n_l \pi \quad l \geq 1 \quad (4.1)$$

y

$$\delta_0(0) = n_0 \pi \quad (4.2)$$

ó

$$\delta_0(0) = \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \pi \quad l = 0 \quad (4.3)$$

dependiendo de que exista o no, una solución de energía cero que se anule en el origen ($r = 0$) y se mantenga acotada en el límite cuando $r \rightarrow \infty$. El caso excepcional de la ecuación (4.3) ocurre cuando la función de Jost de la onda S se anula en el umbral⁵⁹). Se habla en este caso de la aparición de un “medio estado ligado”, debido al término adicional $1/2$ en la ecuación (4.3), ó de una resonancia de energía cero, ya que la sección eficaz total de dispersión de la onda S tiende a infinito en ese umbral.

Como fue indicado por Jauch⁶⁰), todas las extensiones del teorema de Levinson son la consecuencia de un principio simple. Esto es la relación de ortogonalidad y completitud de las autofunciones del hamiltoniano completo.

4.2 Teorema de Levinson en una dimensión

Dada la ecuación de Schrödinger en una dimensión

$$\frac{\partial^2 \psi(k, x)}{\partial x^2} + (k^2 - 2mV(x)) \psi(k, x) = 0 \quad (4.4)$$

donde $\hbar = 1$, $x \in \mathcal{R}$, $k \geq 0$ (k es el valor del impulso de la onda incidente), y $V(x)$ es el potencial (por simplicidad se supone que el potencial es atractivo y que se anula fuera del intervalo (x_1, x_2) ^{61,62}), las soluciones físicas de la ecuación (4.4) están determinadas unívocamente por las condiciones de contorno. Estas soluciones linealmente independientes son

$$\psi_{(+)}(k, x) = \begin{cases} T(k) e^{ikx} & \text{si } x \geq x_2 \\ e^{ikx} + L(k) e^{-ikx} & \text{si } x \leq x_1 \end{cases}$$

y

$$\psi_{(-)}(k, x) = \begin{cases} e^{-ikx} + R(k) e^{ikx} & \text{si } x \geq x_2 \\ T(k) e^{-ikx} & \text{si } x \leq x_1 \end{cases}$$

donde $T(k)$ es el coeficiente de transmisión y $R(k)$ y $L(k)$ son los coeficientes de reflexión derecha e izquierda, respectivamente. La matriz de dispersión se define como

$$S(k) = \begin{pmatrix} T(k) & R(k) \\ L(k) & T(k) \end{pmatrix}$$

que en el límite cuando k tiende a ∞ se convierte en $S(k) = I_{4 \times 4} + \mathcal{O}(1/k)$ ⁶¹). El espectro de autovalores de la ecuación (4.4) es completo, o sea que la base de sus autofunciones es completa y la relación de completitud que éstas satisfacen es

$$\sum_{j=1}^N \psi_{E_j}^*(x) \psi_{E_j}(x') + \frac{1}{2\pi} \sum_{\rho=\pm} \int_0^{\infty} dk \psi_{\rho}^*(k, x) \psi_{\rho}(k, x') = \delta(x - x') \quad (4.5)$$

donde ψ_{E_j} , con $E_j < 0$, son los autoestados ligados que se normalizan según

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_{E_j}|^2 = 1 \quad (4.6)$$

Por otra parte, cuando el potencial se anula, esto es, la partícula libre, no hay estados ligados y la relación de completitud queda reducida a

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\rho=\pm} \int_0^{\infty} dk \psi_{\rho}^{0*}(k, x) \psi_{\rho}^0(k, x') = \delta(x - x') \quad (4.7)$$

donde $\psi_{(\pm)}^0(k, x) = e^{\pm ikx}$. Si ahora se resta la ecuación (4.7) a la (4.5), se toma $x' = x$ y se integra entre $-R$ y R se obtiene

$$\int_0^{\infty} dk \frac{k}{m} Tr \tau(k, R) = -2\pi \sum_{j=1}^N \int_{-R}^R dx |\psi_{E_j}(k, x)|^2 \quad (4.8)$$

donde

$$Tr(\tau(k, R)) = \frac{m}{k} \sum_{\rho=\pm} \int_{-R}^R dx (|\psi_{\rho}(k, x)|^2 - |\psi_{\rho}^0(k, x)|^2) \quad (4.9)$$

donde $Tr(\tau(k, R))$ es la traza del operador retraso temporal para una esfera de radio R , en una dimensión ⁶³). Usando la ecuación (4.6) se obtiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} dk \frac{k}{m} Tr \tau(k, x) = -2\pi N \quad (4.10)$$

donde N es el número de estados ligados del potencial $V(x)$.

El razonamiento que nos llevó hasta la ecuación (4.10) se puede generalizar al caso de más de una dimensión espacial, siempre que exista una relación de completitud entre los estados de dispersión (continuo) y los estados ligados ⁵⁹). La expresión (4.10) constituye la relación más general entre el retraso temporal en el potencial $V(x)$ y los estados ligados. Para obtener el teorema de Levinson a partir de dicha expresión es usual considerar la solución de la ecuación (4.4) en la forma que sigue

$$\mathcal{U}^{\pm}(k, x) = U(k) \Psi^{\pm}(k, x) \quad (4.11)$$

donde

$$\mathcal{U}^{\pm}(k, x) = \begin{pmatrix} u_{(+)}(k, x) \\ u_{(-)}(k, x) \end{pmatrix}$$

y

$$\Psi^{\pm}(k, x) = \begin{pmatrix} \psi_{(+)}(k, x) \\ \psi_{(-)}(k, x) \end{pmatrix}$$

donde $U(k)$ es una matriz unitaria dependiente del impulso k que diagonaliza la matriz $S(k)$

$$U(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{L(k)/R(k)} & -1 \\ 1 & \sqrt{R(k)/L(k)} \end{pmatrix}$$

y se hace la parametrización $\sqrt{L(k)/R(k)} = \exp[2i\gamma(k)]$.

Las relaciones entre los coeficientes de transmisión y reflexión y los factores de fase $\delta_{(\pm)}$ están determinadas por las ecuaciones

$$T(k) = e^{i(\delta_{(-)}(k) + \delta_{(+)}(k))} \cos(\delta_{(-)}(k) - \delta_{(+)}(k)) \quad (4.12)$$

y para los coeficientes de reflexión

$$L(k) = e^{i(\delta_{(-)}(k) + \delta_{(+)}(k) + 2\gamma(k) + \pi/2)} \sin(\delta_{(-)}(k) - \delta_{(+)}(k)) \quad (4.13)$$

y

$$R(k) = e^{i(\delta_{(-)}(k) + \delta_{(+)}(k) - 2\gamma(k) + \pi/2)} \sin(\delta_{(-)}(k) - \delta_{(+)}(k)) \quad (4.14)$$

finalmente, la forma de las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno son

$$u_{(+)}(k, x) = i\sqrt{2}e^{i(\delta_{(+)}(k) + \gamma(k))} \begin{cases} \sin(kx + \gamma(k) + \delta_{(+)}(k)) & \text{si } x \geq x_2 \\ \sin(kx + \gamma(k) - \delta_{(+)}(k)) & \text{si } x \leq x_1 \end{cases}$$

y

$$u_{(-)}(k, x) = \sqrt{2}e^{i(\delta_{(-)}(k) - \gamma(k))} \begin{cases} \cos(kx + \gamma(k) + \delta_{(-)}(k)) & \text{si } x \geq x_2 \\ \cos(kx + \gamma(k) - \delta_{(-)}(k)) & \text{si } x \leq x_1 \end{cases}$$

Debido a que la matriz $U(k)$ es unitaria, se satisface la relación de completitud siguiente

$$\sum_{j=1}^N \psi_{E_j}^*(x) \psi_{E_j}(x') + \frac{1}{2\pi} \sum_{\rho=\pm} \int_0^\infty dk u_\rho^*(k, x) u_\rho(k, x') = \delta(x - x') \quad (4.15)$$

En particular, si el potencial es invariante frente a transformaciones de paridad, esto es, $V(x) = V(-x)$, $x_2 = -x_1$, entonces $R(k) = L(k)$ y $\gamma(k) = 0$. De esta forma, las soluciones $u_{(\pm)}(k, x)$ corresponden a la representación diagonal usual de la matriz de dispersión en términos de las funciones pares e impares del impulso k . En esta situación particular valen las relaciones de completitud para los estados de paridad par e impar, separadamente

$$\sum_{j=1}^{n_{(\pm)}} \psi_{\pm, E_j}^*(x) \psi_{\pm, E_j}(x') + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk u_{(\pm)}^*(k, x) u_{(\pm)}(k, x') = \delta(x - x') \mp \delta(x + x') \quad (4.16)$$

donde $\psi_{\pm, E_j}(x)$ son las autofunciones impares y pares, respectivamente. Para el número total de estados ligados N se tiene

$$N = n_{(+)} + n_{(-)} \quad (4.17)$$

donde $n_{(\pm)}$ es el número de estados impares y pares, respectivamente.

Restando la relación de completitud de partículas libres $u_{(\pm)}^0(k, x)$ (para $\delta_{(\pm)}(k) = 0$) a la ecuación (4.18), tomando $x' = x$ e integrando entre $-R$ y R se obtiene

$$\int_0^\infty dk \frac{k}{m} \tau_{(\pm)}(k, R) = -2\pi \sum_{j=1}^{n_{(\pm)}} \int_{-R}^R dx |\psi_{\pm, E_j}(x)|^2 \quad (4.18)$$

donde

$$\tau_{(\pm)}(k, R) = \frac{m}{k} \int_{-R}^R dx (|u_{(\pm)}(k, x)|^2 - |u_{(\pm)}^0(k, x)|^2) \quad (4.19)$$

que son los retrasos temporales en el intervalo $[-R, R]$ para la onda entrante de paridad impar y par, respectivamente, con una energía $E = k^2/2m$.

Derivando la ecuación de Schrödinger con respecto al impulso k , para las soluciones $u_{(\pm)}(k, x)$ se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial k} u_{(\pm)}(k, x) + 2k u_{(\pm)}(k, x) - 2mV(x) \frac{\partial}{\partial k} u_{(\pm)}(k, x) = 0 \quad (4.20)$$

y multiplicando a izquierda por $u_{(\pm)}^*(k, x)$ se obtiene

$$|u_{(\pm)}(k, x)|^2 = \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{(\pm)}^*}{\partial x} \frac{\partial u_{(\pm)}}{\partial k} - u_{(\pm)}^* \frac{\partial^2 u_{(\pm)}}{\partial x \partial k} \right) (k, x) \quad (4.21)$$

Usando la forma explícita de las soluciones $u_{(\pm)}(k, x)$ para el caso asintótico con $\gamma(k) = 0$ se obtiene

$$\tau_{(\pm)}(k, R) = \frac{m}{k} \left(2\delta'_{(\pm)}(k) \pm \pi \sin^2(\delta_{(\pm)}(k)) \frac{\sin(2kR) - \sin(2\delta_{(\pm)}(k))}{\pi k} + \frac{\sin(2\delta_{(\pm)}(k))}{k} \cos(2kR) \right) \quad (4.22)$$

donde ' indica la derivada con respecto a k . Insertando la ecuación (4.22) en la ecuación (4.18) para R suficientemente grande

$$\begin{aligned} \delta_{(\pm)}(\infty) - \delta_{(\pm)}(0) \pm \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dk \sin^2 \delta_{(\pm)}(k) \frac{\sin(2kR)}{\pi k} \\ - \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \frac{\sin 2\delta_{(\pm)}(k)}{k} \cos(2kR) = -\pi \sum_{j=1}^{n_{(\pm)}} \int_{-R}^R dx |\psi_{\pm, E_j}(x)|^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si se define $\delta_{(\pm)}(k)$ como una función continua de k , usando el hecho de que $S(k) = I_{4 \times 4} + \mathcal{O}(1/k)$, se sigue que $\delta_{(\pm)}(k)$ es del orden $1/k$. Mediante las ecuaciones (4.6) y la relación para los $\delta_{(\pm)}(k)$, la ecuación (4.23) en el límite cuando R tiende a infinito se obtiene la ecuación

$$\delta_{(\pm)} = \pi n_{(\pm)} \pm \frac{\pi}{2} \sin^2 \delta_{(\pm)} \quad (4.24)$$

donde se ha introducido la definición $\delta_{(\pm)} = \delta_{(\pm)}(0)$. La integrabilidad de la ecuación (4.23) en el límite infinito surge de la relación asintótica de $\delta_{(\pm)}(k)$, pero la integrabilidad en el origen de la segunda integral implica que

$$\sin 2\delta_{(\pm)} = 0 \quad (4.25)$$

Claramente las soluciones de las ecuaciones (4.24) y (4.25) en el caso de estados de paridad par son

$$\delta_{(+)} = \pi n_{(+)} \quad (4.26)$$

que es el caso que no contiene una solución de energía cero y

$$\delta_{(+)} = \pi (n_{(+)} + 1/2) \quad (4.27)$$

la cual incluye tal solución, esto es, contiene una resonancia de energía cero a la cual se refiere habitualmente como un “medio estado ligado”. Similarmente, para soluciones de paridad impar se obtienen las soluciones

$$\delta_{(-)} = \pi (n_{(-)} - 1/2) \quad (4.28)$$

que no contiene una solución de energía cero y

$$\delta_{(-)} = \pi n_{(-)} \quad (4.29)$$

que incluye una resonancia de energía cero.

El problema de la dispersión para la solución $u_{(+)}(k, x)$, es el mismo que para la onda S y tiene las mismas soluciones (4.1) y (4.3) con $n_{(+)}$ reemplazado por el número total de estados ligados n_0 con momento angular 0. Una solución física de energía cero de la ecuación de Schrödinger en una dimensión, es una constante no nula, fuera del alcance del potencial. Dicha solución no es normalizable y forma parte del continuo. De esta manera, contrariamente a lo que ocurre con el espectro continuo que resulta doblemente degenerado, la solución de energía cero es no degenerada.

El wronskiano de dos soluciones de una ecuación de Schrödinger en una dimensión es una constante que en el caso de soluciones linealmente independientes es no nula. Pero el wronskiano de dos soluciones de energía cero, las cuales son constantes lejos del potencial, es cero, lo cual implica que son linealmente dependientes. De esta forma se tiene

$$\psi_{(+)}(0, x) = \alpha \psi_{(-)}(0, x) \quad (4.30)$$

con α complejo, lo que implica que

$$1 + L = \pm T \quad (4.31)$$

según se trate de soluciones pares o impares, respectivamente. De la unitariedad de la matriz de dispersión S se obtiene

$$|T|^2 + |L|^2 = 1 \quad (4.32)$$

y

$$Re(TL^*) = 0 \quad (4.33)$$

donde se ha utilizado la notación $L = L(0)$ y $T = T(0)$ con $L(k) = R(k)$. Las únicas soluciones de las ecuaciones previas son las siguientes

$$T = 0, \quad L = -1 \quad (4.34)$$

ó

$$T = -1, \quad L = 0 \quad (4.35)$$

$$T = 1, \quad L = 0 \quad (4.36)$$

Mediante la aplicación de las ecuaciones (4.12)-(4.14) la primera de las soluciones presentadas corresponde a la elección

$$\delta_{(+)} = \pi n_{(+)}, \quad \delta_{(-)} = \pi (n_{(-)} - 1/2) \quad (4.37)$$

que no contiene resonancias de energía cero. De las ecuaciones (4.35) y (4.36) con una resonancia de energía cero impar se tiene

$$\delta_{(+)} = \pi (n_{(+)} + 1/2), \quad \delta_{(-)} = \pi (n_{(-)} - 1/2) \quad (4.38)$$

para el caso de una resonancia par de energía cero

$$\delta_{(+)} = \pi n_{(+)}, \quad \delta_{(-)} = \pi n_{(-)} \quad (4.39)$$

Esto es, la probabilidad de reflexión $|R(k)|^2 = 1$, si el potencial tiene soluciones de energía no nula. Cuando existe una solución de energía cero se observa una resonancia de transmisión.

Hasta aquí se ha considerado un potencial simétrico. Para un potencial $V(x)$ no simétrico empezamos por construir la traza de $\tau(k, R)$. En términos de las soluciones (4.11) y la identidad (4.21) para R suficientemente grande se obtiene la expresión siguiente

$$\text{Tr } \tau(k, R) = \frac{m}{k} (2\delta'_{(+)}(k) + 2\delta'_{(-)}(k) + \cos 2\gamma(k) \mathcal{F}[\delta_{(\pm)}, k, R]) \quad (4.40)$$

donde

$$\mathcal{F}[\delta_{(\pm)}, k, R] = (\mathcal{G}[\delta_{(\pm)}, k, R] + \mathcal{I}[\delta_{(\pm)}, k, R]) \quad (4.41)$$

$$\mathcal{G}[\delta_{(\pm)}, k, R] = (\pi \sin^2 \delta_{(+)}(k) - \pi \sin^2 \delta_{(-)}(k)) \frac{\sin 2kR}{\pi k} \quad (4.42)$$

$$\mathcal{I}[\delta_{(\pm)}, k, R] = \frac{2}{k} \sin(\delta_{(-)}(k) - \delta_{(+)}(k)) \cos(\delta_{(-)}(k) + \delta_{(+)}(k)) \cos 2kR \quad (4.43)$$

Insertando la expresión anterior en la ecuación (4.8), tomando el límite cuando R tiende a infinito y usando el límite de $k \rightarrow \infty$ de $\delta_{(\pm)}(k)$ se obtiene

$$\delta_{(+)} + \delta_{(-)} = N\pi - \frac{\pi}{2} \cos 2\gamma \sin(\delta_{(-)} - \delta_{(+)}) \sin(\delta_{(-)} + \delta_{(+)}) \quad (4.44)$$

donde nuevamente $\gamma = \gamma(0)$ y la condición

$$\cos 2\gamma \sin(\delta_{(-)} - \delta_{(+)}) \cos(\delta_{(-)} + \delta_{(+)}) = 0 \quad (4.45)$$

Para resolver estas dos últimas ecuaciones, comencemos estudiando el caso en el cual $\cos 2\gamma \neq 0$. Luego $\sin(\delta_{(-)} - \delta_{(+)}) \cos(\delta_{(-)} + \delta_{(+)}) = 0$.

En el caso de que el $\cos(\delta_{(-)} + \delta_{(+)}) = 0$ la ecuación (4.44) establece que $|\cos 2\gamma \sin(\delta_{(-)} - \delta_{(+)})| = 1$, y para el caso en que $\cos 2\gamma = 1$, las soluciones son de la forma

$$\delta_{(+)} = \pi n, \quad \delta_{(-)} = \pi(m - 1/2), \quad n + m = N \quad (4.46)$$

donde n , m y N son enteros positivos, y

$$\delta_{(+)} = \pi(n + 1/2), \quad \delta_{(-)} = \pi m, \quad n + m = N \quad (4.47)$$

En el caso en que $\cos 2\gamma = -1$ se obtiene

$$\delta_{(+)} = \pi(n - 1/2), \quad \delta_{(-)} = \pi m, \quad n + m = N \quad (4.48)$$

y

$$\delta_{(+)} = \pi n, \quad \delta_{(-)} = \pi(m + 1/2), \quad n + m = N \quad (4.49)$$

Ahora estudiemos el caso en que el $\cos(\delta_{(-)} + \delta_{(+)}) \neq 0$ entonces el $\sin(\delta_{(-)} - \delta_{(+)}) = 0$. La ecuación (4.44) se convierte en $\delta_{(+)} + \delta_{(-)} = N\pi$. Las soluciones de ésta son

$$\delta_{(+)} = \pi(n \pm 1/2), \quad \delta_{(-)} = -\pi(m \pm 1/2), \quad n + m = N \quad (4.50)$$

ó

$$\delta_{(+)} = \pi n, \quad \delta_{(-)} = \pi m, \quad n + m = N \quad (4.51)$$

dando $T = \pm 1$, respectivamente.

Para el caso en que el $\cos 2\gamma = 0$, $\delta_{(+)} + \delta_{(-)} = N\pi$, pero $\delta_{(-)} - \delta_{(+)}$ puede tomar cualquier valor. En esta situación una parte finita de las partículas incidentes se transmite, y $T \neq 0$.

Para resumir vamos a escribir los resultados previos en términos de las fases de los coeficientes transmisión y reflexión: $\alpha_T(k) = \arg[T(k)]$, $\alpha_L(k) = \arg[L(k)]$ y $\alpha_R(k) = \arg[R(k)]$ (donde \arg es el argumento de la función indicada en cada caso). De las ecuaciones (4.12)-(4.14) se obtiene

$$\alpha_T(k) = \delta_{(+)}(k) + \delta_{(-)}(k), \quad \frac{1}{2}(\alpha_L(k) + \alpha_R(k)) = \delta_{(+)}(k) + \delta_{(-)}(k) + \frac{\pi}{2} \quad (4.52)$$

si se toma $\alpha_T(\infty) = 0$ y $\alpha_L + \alpha_R = \pi$ se obtienen las soluciones, con $k = 0$

$$\alpha_T = (N - 1/2)\pi, \quad \alpha_L + \alpha_R = 2N\pi, \quad L = R = -1 \quad (4.53)$$

que corresponde al caso sin resonancia de energía cero y

$$\alpha_T = N\pi, \quad \alpha_L + \alpha_R = 2(N + 1/2)\pi, \quad T \neq 0 \quad (4.54)$$

cuando existe una resonancia de energía cero. Para el caso de un potencial simétrico $L(k) = R(k)$ y las ecuaciones (4.53) y (4.54) se pueden reemplazar por

$$\alpha_T = (N - 1/2) \pi, \quad \alpha_L = N \pi, \quad L = -1 \quad (4.55)$$

y

$$\alpha_T = N \pi, \quad \alpha_L = (N + 1/2) \pi, \quad L = 0 \quad (4.56)$$

En este punto, se puede hacer un análisis del problema causal clásico a energía cero. Este estudio lo haremos en la sección que sigue.

4.3 Causalidad a energía cero

El efecto de la causalidad a nivel clásico consiste en que una partícula no puede abandonar la región de interacción antes de entrar en la misma. En el caso de un potencial de alcance limitado $V(x)$, que se anula fuera de la región $[-a/2, a/2]$, la causalidad establece que el retraso temporal clásico es ^{59,64)}

$$\tau_{cl}(k) = T_{cl}(k, a/2) - T_{cl}^{v=0}(k, a/2) \geq -T_{cl}^{v=0}(k, a/2) = -a \frac{m}{k} \quad (4.57)$$

donde $T_{cl}(k, a/2)$ es el tiempo de permanencia clásico. Para el desplazamiento espacial clásico definido como

$$h_{cl}(k) = \tau_{cl}(k) \frac{k}{m} \quad (4.58)$$

se obtiene

$$h_{cl}(k) \geq -a \quad (4.59)$$

para todo k .

En mecánica cuántica el principio de causalidad consiste en que el tiempo de permanencia cuántico es no-negativo ^{59,64)}. Si el potencial es invariante bajo transformaciones de paridad, para los estados de dispersión se encuentra que

$$\begin{aligned} T_{(\pm)}(k, a/2) &= \frac{m}{k} \int_{-a/2}^{a/2} dx |u_{(\pm)}(k, x)|^2 = \\ &= \frac{m}{k} \left(a + 2 \delta'_{(\pm)}(k) + \frac{\sin(ka + 2\delta_{(\pm)}(k))}{k} \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

y consecuentemente

$$\delta'_{(\pm)}(k) \geq -\frac{a}{2} \pm \frac{\sin(ka + 2\delta_{(\pm)}(k))}{2k} \quad (4.61)$$

Mientras que para el desplazamiento espacial cuántico se obtiene la expresión siguiente

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{k}{m} \tau(k) = \delta'_{(+)}(k) + \delta'_{(-)}(k) \geq \\ &= -a + \frac{1}{2k} (\sin(ka + 2\delta_{(+)}(k)) - \sin(ka + 2\delta_{(-)}(k))) \geq -a - \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (4.62)$$

En esta ecuación se observa la presencia de un término de interferencia y en el límite cuando k tiende a infinito, la ecuación coincide con el límite clásico. Para el otro caso extremo, cuando k tiende a cero, si el potencial no contiene estados ligados, vale un resultado similar (59).

4.4 Mecánica estadística de sistemas en interacción

Para el caso de una gas de partículas no interactuantes la función de partición canónica es

$$Q_N^0(V, T) = \frac{V^N}{N! \lambda^{3N}} \quad (4.63)$$

donde V es el volumen del sistema, N es el número de partículas y λ es la longitud de onda térmica. En el conjunto gran canónico, la función de partición es

$$\mathcal{L}_0(V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N^0(V, T) = \exp\left(\frac{zV}{\lambda^3}\right) \quad (4.64)$$

donde $z = e^\alpha = e^{\frac{\mu}{kT}}$ es la fugacidad, y μ es el potencial químico.

Para un sistema de partículas en interacción, la ecuación de estado en términos de λ^3 y $v = V/N$ es

$$\frac{Pv}{kT} = \frac{v}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{b}_l z^l \quad (4.65)$$

donde P es la presión y T la temperatura del sistema ⁶⁶⁾, y \bar{b}_l es la integral de "cluster" de orden l , en el límite cuando el volumen tiende a infinito. Para la densidad

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} l \bar{b}_l z^l \quad (4.66)$$

Si se escribe

$$\sum_{l=1}^{\infty} \bar{b}_l z^l = \sum_{l=1}^{\infty} a_l(T) \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^l \quad (4.67)$$

se obtiene el desarrollo virial de la ecuación de estado

$$\frac{Pv}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l(T) \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} \quad (4.68)$$

donde los $a_l(T)$ son los coeficientes viriales. Ciertamente, estos coeficientes se pueden expresar en términos de los \bar{b}_l ⁶⁶⁾, reemplazando la ecuación (4.68) en (4.65) y (4.66) se llega a la expresión

$$\frac{\sum_{l=1}^{\infty} \bar{b}_l z^l}{\sum_{l=1}^{\infty} l \bar{b}_l z^l} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l(T) \left(\sum_{l=1}^{\infty} l \bar{b}_l z^l\right)^{l-1} \quad (4.69)$$

desarrollando explícitamente ambos miembros e igualando los coeficientes de iguales potencias de z , se obtienen relaciones de la forma

$$a_1 = \bar{b}_1 = 1 \quad (4.70)$$

$$a_2 = -\bar{b}_2 \quad (4.71)$$

etc., y así se sigue para todos los demás coeficientes viriales.

En forma general la función de partición se puede escribir como

$$\mathcal{L}(z, V, T) = \sum_{N=0}^{N_{max}} z^N Q_N(V, T) = \sum_{N=0}^{N_{max}} \frac{Z_N(V, T)}{N!} \left(\frac{z}{\lambda^3}\right)^N \quad (4.72)$$

donde la integral de configuración es

$$Z_N(V, T) = N! \lambda^{3N} Q_N(V, T) \quad (4.73)$$

La suma se extiende hasta N_{max} en el caso de una interacción que satura.

4.4.1 Tratamiento exacto del segundo coeficiente virial

Como es sabido ⁶⁶⁾, para un sistema cuántico y para un potencial de interacción de dos cuerpos $V(r)$

$$\bar{b}_2 = -a_2 = \frac{1}{2\lambda^3 V} (Z_2 - Z_1^2) \quad (4.74)$$

donde V es el volumen del sistema, mientras que para un sistema no interactuante incluimos el supraíndice ⁽⁰⁾

$$\bar{b}_2^{(0)} = -a_2^{(0)} = \frac{1}{2\lambda^3 V} (Z_2^{(0)} - Z_1^{(0)2}) \quad (4.75)$$

restando estas ecuaciones y sabiendo que $Z_1 = V = Z_1^{(0)}$, se obtiene

$$\bar{b}_2 - \bar{b}_2^{(0)} = \frac{\lambda^3}{V} \left(Tr e^{-\beta \hat{H}_2} - Tr e^{-\beta \hat{H}_2^{(0)}} \right) \quad (4.76)$$

donde Tr indica la traza de los operadores indicados y para evaluarla primero resolvemos

$$\hat{H}_2 \psi_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E_\alpha \psi_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (4.77)$$

donde el hamiltoniano es

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} (\hat{\nabla}_1^2 + \hat{\nabla}_2^2) + u(r_{1,2}) \quad (4.78)$$

que transformado a las coordenadas del centro de masa

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \quad (4.79)$$

y

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (4.80)$$

tiene las autofunciones

$$\Psi_\alpha(\vec{R}, \vec{r}) = \phi_j(\vec{R}) \psi_n(\vec{r}) \quad (4.81)$$

y los autovalores

$$E_\alpha = \frac{P_j^2}{2(2m)} + \epsilon_n \quad (4.82)$$

donde \vec{P} es el impulso total de las dos partículas, $2m$ es la masa total y $\alpha = [j, n]$ son los números cuánticos correspondientes a la función de onda del centro de masa $\phi_j(\vec{R})$ y a la función de onda con respecto al centro de masa $\psi_n(\vec{r})$, respectivamente.

La ecuación de onda para el movimiento relativo al centro de masa es

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m} \hat{\nabla}_r^2 + V(r) \right) \psi_n(\vec{r}) = \epsilon_n \psi_n(\vec{r}) \quad (4.83)$$

donde se ha usado la masa reducida $\frac{m}{2}$.

La ecuación (4.76) se convierte en

$$\bar{b}_2 - \bar{b}_2^{(0)} = \frac{\lambda^3}{V} \sum_\alpha \left(e^{-\beta E_\alpha} - e^{-\beta E_\alpha^{(0)}} \right) = \frac{\lambda^3}{V} \sum_j e^{-\beta P_j^2/4m} \sum_n \left(e^{-\beta \epsilon_n} - e^{-\beta \epsilon_n^{(0)}} \right) \quad (4.84)$$

Resolviendo la primer suma se llega a

$$\bar{b}_2 - \bar{b}_2^{(0)} = 8^{\frac{1}{2}} \sum_\alpha \left(e^{-\beta E_\alpha} - e^{-\beta E_\alpha^{(0)}} \right) \quad (4.85)$$

Ahora, para el caso no interactuante, esto es la parte continua del espectro

$$\epsilon_n^{(0)} = \frac{k^2 \hbar^2}{m} \quad (4.86)$$

La densidad de niveles del continuo para un sistema sin interacción es $g^{(0)}(k)$, y para el sistema en interacción es $g(k)$. Si llamamos con ϵ_B a los autoestados de energía ligados y separamos el segundo miembro de la ecuación (4.85) en una suma de las contribuciones de los estados ligados (niveles discretos), más la contribución de la parte continua del espectro de energía se puede escribir

$$\bar{b}_2 - \bar{b}_2^{(0)} = 8^{\frac{1}{2}} \sum_B e^{-\beta \epsilon_B} + 8^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dk e^{-\beta \hbar^2 k^2/m} \left(g(k) - g^{(0)}(k) \right) \quad (4.87)$$

recordemos que la suma se realiza sobre todos los estados ligados de dos cuerpos.

Para la densidad de niveles $g(k)$ se supone que el potencial es central, las funciones de onda $\psi_n(\vec{r})$ explícitas son

$$\psi_{klm}(\vec{r}) = A_{klm} \frac{\chi_{kl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.88)$$

como para bosones $\psi_{klm}(-\vec{r}) = \psi_{klm}(\vec{r})$ l debe ser par, mientras que para fermiones $\psi_{klm}(-\vec{r}) = -\psi_{klm}(\vec{r})$, l es impar. La forma asintótica de la ecuación radial es ⁶⁷⁾

$$\chi_{kl}(r) \approx \sin\left(kr + \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k)\right) \quad (4.89)$$

Para satisfacer la condición de borde externa $\chi_{kl}(R_0) = 0$ para $R_0 \gg b$, donde b es el alcance efectivo del potencial, es necesario que

$$kR_0 + \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k) = n\pi \quad (4.90)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. La función $\delta_l(k)$ es el corrimiento de fase de dispersión en función del impulso k debido al potencial $V(r)$ y donde l es el momento angular orbital.

Para obtener una expresión para la densidad de estados $g_l(k)$ se observa que

$$\left((k + \Delta k)R_0 + \frac{l\pi}{2} + \delta_l + \frac{\partial\delta_l(k)}{\partial k} \Delta k \right) - \left(kR_0 + \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) = \pi \quad (4.91)$$

desde donde es inmediato escribir

$$\left(R_0 + \frac{\partial\delta_l(k)}{\partial k} \right) \Delta k = \pi \quad (4.92)$$

Definimos explícitamente la densidad de niveles cuyo momento angular orbital es l como

$$g_l(k) = \frac{2l+1}{\Delta k} = \frac{2l+1}{\pi} \left(R_0 + \frac{\partial\delta_l(k)}{\partial k} \right) \quad (4.93)$$

mientras que la densidad total de niveles es

$$g(k) = \sum_l' g_l(k) = \frac{1}{\pi} \sum_l' (2l+1) \left(R_0 + \frac{\partial\delta_l(k)}{\partial k} \right) \quad (4.94)$$

el supraíndice ' indica que para bosones $l = 0, 2, 4, \dots$ y para fermiones l es impar y empieza desde $l = 1$.

En el caso de un sistema sin interacción $\delta_l(k) = 0$ para todo valor de k , por lo cual la densidad de niveles se reduce a

$$g^{(0)}(k) = \frac{R_0}{\pi} \sum_l' (2l+1) \quad (4.95)$$

Definimos la densidad nuclear de niveles $g_{NUC}(k)$ ^{66,68-71}

$$g_{NUC}(k) = g(k) - g^{(0)}(k) = \frac{1}{\pi} \sum_l' (2l+1) \frac{\partial\delta_l(k)}{\partial k} \quad (4.96)$$

reemplazando la ecuación (4.95) en la ecuación (4.87) se obtiene

$$\bar{b}_2 - \bar{b}_2^{(0)} = 8^{\frac{1}{2}} \sum_B e^{-\beta\epsilon_B} + \frac{8^{\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_l' (2l+1) \int_0^\infty dk e^{-\beta\hbar^2 k^2/m} \left(\frac{\partial\delta_l(k)}{\partial k} \right) \quad (4.97)$$

4.4.2 Formalismo basado en la matriz S

Las propiedades macroscópicas de un sistema pueden obtenerse a partir de las interacciones microscópicas de los constituyentes del mismo. La forma en que las partículas son dispersadas en un sistema, está relacionada con el comportamiento del mismo visto desde la termodinámica, considerando al sistema completo ^{55,68,69}. La conexión formal de esto es el desarrollo virial de la ecuación de estado del sistema ^{66,70,71}, ecuación (4.68).

Ahora, en la expresión del gran potencial Ω

$$\Omega(\alpha, \beta) = -T \ln Z(\alpha, \beta) = -T \sum_k \ln(1 + \exp(\alpha - \beta\epsilon_k)) \quad (4.98)$$

es conveniente separar la suma sobre los estados discretos j e introducir la integral sobre los estados del continuo con un peso dado por la densidad de niveles $g(\epsilon)$ del potencial $V(\bar{r})$

$$\Omega(\alpha, \beta) = -T \sum_j \ln(1 + \exp(\alpha - \beta\epsilon_j)) - T \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \ln(1 + \exp(\alpha - \beta\epsilon)) \quad (4.99)$$

Si el núcleo se imagina dentro de una caja de radio R , y se exige que las propiedades del núcleo no dependan de R se define la densidad de niveles nucleares como

$$g_{NUC}(\epsilon) = g(\epsilon) - g_0(\epsilon) \quad (4.100)$$

donde $g_0(\epsilon)$ representa los términos dependientes de R , esto es, los bordes de la caja, mientras que $g_{NUC}(\epsilon)$ se escribe como

$$g_{NUC}(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \sum_{l,j} (2j+1) \frac{d\delta_{lj}}{d\epsilon} \quad (4.101)$$

$\delta_{lj}(\epsilon)$ es el corrimiento de fase del problema de la dispersión de una partícula con el potencial $V(\bar{r})$, l y j son el momento angular orbital y el momento angular total, respectivamente. La variable ϵ en todos los casos representa la energía.

De esta manera se ha establecido una conexión formal entre la termodinámica a través del gran potencial y la matriz S ya que

$$S_{lj} = \exp(2i\delta_{lj}(\epsilon)) \quad (4.102)$$

Definiendo $\mu_n = \alpha_n/\beta$ y $\mu_p = \alpha_p/\beta$ se obtiene para neutrones y para protones, respectivamente, las ecuaciones de vínculo para los cálculos autoconsistentes como se indica a continuación

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_n} (-\beta \Omega_{NUC}) = N \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_p} (-\beta \Omega_{NUC}) = Z \quad (4.104)$$

donde N es el número de neutrones del núcleo y Z el número de protones del mismo. También existe un vínculo para el número de estados del continuo N_c asociado al núcleo (55,68,69)

$$N_c = \int_0^\infty d\epsilon g_{NUC}(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \sum_{l,j} (2j+1) \int_0^\infty d\epsilon \frac{d\delta_{lj}(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{1}{\pi} \sum_{l,j} (2j+1) (\delta_{lj}(\infty) - \delta_{lj}(0)) \quad (4.105)$$

mientras que para potenciales bien comportados, a partir del teorema de Levinson surge que

$$-(\delta_{lj}(\infty) - \delta_{lj}(0)) = \pi N_{B,lj} \quad (4.106)$$

donde $N_{B,lj}$ es el número de estados ligados para los índices l y j indicados. Reemplazando (4.106) en (4.105) se obtiene

$$N_c = \sum_{lj} (2l+1) N_{B,lj} = -N_B \quad (4.107)$$

de donde se observa que

$$N_c + N_B = 0 \quad (4.108)$$

Esto significa que el continuo hace una contribución negativa por cada contribución de estado ligado, esto es, la densidad de estados en la región continua del espectro de energía resulta ser negativa ^{55,68,69}).

Reescribiendo el gran potencial como

$$\begin{aligned} \Omega_{NUC}(\alpha, \beta) &= -T \ln Z_{NUC}(\alpha, \beta) = \\ &= -T \sum_j \ln(1 + \exp(\alpha - \beta \epsilon_j)) \\ &- \frac{T}{\pi} \sum_{l_j} (2j + 1) \int_0^\infty d\epsilon \frac{d\delta_{l_j}(\epsilon)}{d\epsilon} \ln(1 + \exp(\alpha - \beta \epsilon)) \end{aligned} \quad (4.109)$$

Si ahora se integra por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega_{NUC}(\alpha, \beta) &= -T \sum_j \ln(1 + \exp(\alpha - \beta \epsilon_j)) \\ &+ \frac{T}{\pi} \sum_{l_j} (2j + 1) \delta_{l_j}(0) \ln(1 + \exp(\alpha)) \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{l_j} (2j + 1) \int_0^\infty d\epsilon \delta_{l_j}(\epsilon) \frac{e^{\alpha - \beta \epsilon}}{1 + e^{\alpha - \beta \epsilon}} \end{aligned} \quad (4.110)$$

Usando el hecho de que $\delta_{l_j}(\infty) = 0$, $\delta_{l_j}(0) = n_{l_j} \pi$, y por otro lado

$$\sum_{l_j} (2j + 1) n_{l_j} = N_B \quad (4.111)$$

con lo cual la ecuación (4.110) se transforma en

$$\begin{aligned} \Omega_{NUC}(\alpha, \beta) &= -T \sum_k \left(\ln(1 + \exp(\alpha - \beta \epsilon_k)) - \ln(1 + e^{\alpha}) \right) \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{l_j} (2j + 1) \int_0^\infty d\epsilon \delta_{l_j}(\epsilon) \frac{e^{\alpha - \beta \epsilon}}{1 + e^{\alpha - \beta \epsilon}} \end{aligned} \quad (4.112)$$

Esta expresión será usada en el próximo capítulo al estudiar las consecuencias estadísticas del Teorema de Levinson sobre núcleos tales como el ²⁰⁸Pb.

4.5 Apéndice C: Propiedades de los corrimientos de fase de dispersión

4.5.1 Representaciones integrales de los corrimientos de fase de dispersión

La solución regular de la ecuación radial que se obtiene de la ecuación de Schrödinger para un potencial $U_1(r)$ es $y_1(r)$ y para $U_2(r)$ es $y_2(r)$. Notar que $U = 2mV/\hbar^2$. Las respectivas ecuaciones son

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(E - U_1(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right) y_{1l}(r) = 0 \quad (4.113)$$

y

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(E - U_2(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right) y_{2l}(r) = 0 \quad (4.114)$$

La expresión asintótica para estas soluciones es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} y_{2l}(r) \sim \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{lj}(k) \right) \quad (4.115)$$

donde $i = 1, 2$. El wronskiano de estas dos funciones es

$$W(y_{1l}, y_{2l}) = k \sin(\delta_{1l} - \delta_{2l}) \quad (4.116)$$

que vale en límite cuando $r \rightarrow \infty$.

Si se multiplica a derecha la ecuación (4.114) por $y_{1l}(r)$ y la ecuación (4.115) por $y_{2l}(r)$, se integran entre cero e infinito y se restan, se obtiene la ecuación

$$W(y_{1l}, y_{2l})|_0^\infty = k \sin(\delta_{1l} - \delta_{2l}) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr y_{2l}(r) (V_1(r) - V_2(r)) y_{1l}(r) \quad (4.117)$$

En el caso en que

$$V_2(r) = V_1(r) + \Delta V \quad (4.118)$$

donde ΔV es pequeño frente al valor del potencial las soluciones para grandes valores de r difieren en $\Delta y_l(r)$ por lo tanto, al orden dominante, se puede escribir

$$\Delta \delta_l = \delta_{1l} - \delta_{2l} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr y_l^2(r) \Delta V(r) \quad (4.119)$$

En el caso particular en que $V_2(r) = 0$, $\delta_{2l}(r) = 0$ y $y_{2l}(r) = kr j_l(kr)$, donde $j_l(r)$ es la función de Bessel esférica ^{67,72}. Para este caso la ecuación (4.118) se transforma en

$$\sin \delta_l(k) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r j_l(kr) V_1(r) y_l(kr) \quad (4.120)$$

En particular interesa el comportamiento de la derivada

$$\frac{d\delta_l(k)}{dk} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{\hbar^4} \left(\int_0^\infty dr r j_l(kr) V_1(r) y_l(kr) \right)^2}} \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr \left(r \frac{dj_l(kr)}{dk} V_1(r) y_l(kr) + r j_l(kr) V_1(r) \frac{dy_l(kr)}{dk} \right) \quad (4.121)$$

En el límite cuando k tiende a infinito

$$\frac{d\delta_l(k)}{dk} > -\infty \quad (4.122)$$

con lo que se entiende que esta derivada está acotada por abajo.

Capítulo 5

Aplicaciones estudiadas

5.1 Introducción

En este capítulo se desarrollarán las aplicaciones de los modelos presentados anteriormente y se discutirán aspectos relacionados con:

- el parámetro de densidad de niveles nuclear
- el calor específico nuclear
- efectos debidos a la inclusión del continuo.

5.2 Estudio del parámetro de densidad de niveles nuclear

5.2.1 Aspectos asociados a procesos de evaporación y fisión nucleares

El estudio de la dependencia térmica del parámetro de densidad de niveles nuclear ha sido el objeto de recientes publicaciones ^{34,77-81,83}). La información experimental se puede extraer de resultados de reacciones de formación y decaimiento de núcleos compuestos ¹⁻¹⁸).

El valor del parámetro de densidad de niveles nuclear se puede calcular a partir de suposiciones estadísticas por una relación entre la energía de excitación y la temperatura nuclear ⁵⁴). Para un sistema con A nucleones dicho parámetro varía desde $a = \frac{A}{15} \text{ MeV}^{-1}$

y $a = \frac{A}{10} \text{ MeV}^{-1}$ para un gas de Fermi, y para fermiones en un potencial de oscilador armónico, respectivamente, hasta $a = \frac{A}{8} \text{ MeV}^{-1}$, que es el valor empírico obtenido a partir del espaciamiento promedio observado en resonancias de neutrones lentos ⁵⁴).

El modelo del gas de Fermi predice un valor del $a(T)$, que es menor que el que corresponde a un sistema correlacionado. El decrecimiento del $a(T)$ con el aumento de T , ha sido interpretado como una señal de la anulación de las interacciones residuales por Suraud et al. y Hasse et al. ^{35,36}).

Por otro lado, se han realizado distintas parametrizaciones de la energía libre nuclear discutidas en las referencias ^{35,41,57,85-88}). También ha sido argumentado que la dependencia térmica observada del $a(T)$ no puede ser explicada considerando efectos de un sólo campo medio ^{35,36}). Este concepto es válido para bajas temperaturas donde los efectos de las interacciones residuales son importantes. Para temperaturas elevadas, una descripción del $a(T)$ que se base en un único campo medio, no da cuenta de las características observadas en los datos experimentales ³⁵). La dependencia térmica de los coeficientes del MGL, para el desarrollo de la energía libre han sido estudiados en la referencia ⁴¹). Esta parametrización reproduce el resultado de teorías microscópicas a temperatura finita. A partir de esto se puede predecir la dependencia térmica de la barrera de fisión nuclear ^{1,89}), que depende fuertemente del valor del coeficiente de superficie del MGL ^{1,89}). Un efecto similar se obtiene en un MGL donde en lugar de nucleones se usan conjuntos de cuatro nucleones con spin e isospin acoplados a cero. De esta forma, puede pensarse en una competición entre diferentes campos medios, al menos como una conjetura.

Temperaturas límites para la formación de núcleos compuestos han sido reportadas por Abe et al. ³²). Temperaturas de emisión obtenidas por Hagel et al. han sido publicadas en la referencia ¹). Dichas temperaturas se obtuvieron a partir del análisis de la evaporación de partículas de núcleos compuestos altamente excitados. Los resultados obtenidos muestran que las predicciones del campo medio para las temperaturas límites son usualmente mucho mayores que los valores observados experimentalmente ^{1-17,32}).

En esta sección se discutirá la dependencia del parámetro de densidad de niveles nuclear con la temperatura a partir del modelo de evaporación desarrollado en el Capítulo 3. El modelo de evaporación nuclear está basado en la fórmula de Weisskopf ³²). Esta describe el balance de energía asociado a la emisión estadística de una partícula desde un núcleo compuesto ³³). Siguiendo el argumento de Weisskopf, la energía de excitación por partícula de un núcleo a temperatura T se distribuye entre el valor medio de la energía cinética de la partícula emitida y la energía de separación de la partícula emitida con respecto al núcleo inicial. Si se desprecian los efectos asociados al momento angular se obtiene la ecuación

$$\Delta E = E_i - E_f \approx 2T + B(T) \quad (5.1)$$

donde E_i and E_f son las energías inicial y final, respectivamente. $B(T)$ es la energía de separación dependiente de la temperatura, para la partícula emitida. La conexión con el modelo estadístico de excitaciones nucleares se establece definiendo la energía de desexcitación en términos del parámetro de densidad de niveles nuclear ^{1,32,34)}

$$\Delta E = \frac{a(T) T^2}{A} - \frac{T}{A} + \frac{E_0}{A} \quad (5.2)$$

La inversa del parámetro de densidad de niveles, $K(T)$, se define como sigue

$$K(T) = \frac{A}{a(T)} \quad (5.3)$$

y en función de la energía de separación $B(T)$ se escribe como

$$K(T) = \frac{T^2}{2T + B(T) + \frac{T}{A} - \frac{E_0}{A}} \quad (5.4)$$

La dependencia térmica de la energía de ligadura ha sido calculada por Bonche et al. ⁵⁷⁾. La energía de separación ha sido parametrizada por Abe et al. ³²⁾. Esto se escribe como la ecuación (3.8) para nucleones y como la expresión (3.14) para partículas α .

Usando la anterior parametrización para la energía de separación, el $K(T)$ presenta una dependencia lineal en T a temperaturas más altas que la temperatura límite. A bajas temperaturas el $K(T)$, posee una dependencia cuadrática con la temperatura.

Con el fin de introducir efectos de estructura nuclear dependientes de la temperatura, además de la dependencia térmica de la energía de separación nuclear, se puede representar esquemáticamente la distribución de los autovalores de un hamiltoniano nuclear por medio de una distribución espectral de la densidad como la que sigue

$$\rho(E) = \sum_{n=1}^N \delta(E - E_n) + \Theta(E - E_c)g(E) \quad (5.5)$$

donde el primer término de $\rho(E)$ representa estados discretos, y $g(E)$ es una función continua, $\Theta(x)$ es la función escalón definida como $\Theta(x) = 1$ para $x > 0$. Esta forma de la distribución espectral del hamiltoniano se basa en los resultados de cálculos realistas ^{43,44)}. El primer término de $\rho(E)$ corresponde a un conjunto de estados nucleares correlacionados con un espaciado discreto en la energía hasta el corte E_c ; la energía de cada estado se representa por el valor E_n ; la función $g(E)$ se puede modelar por una distribución gaussiana o por una distribución binomial ^{43,44)}.

Esta densidad espectral $\rho(E)$ se ha utilizado para calcular en forma autoconsistente la energía de excitación a una dada T para un número fijo de nucleones. A partir de la relación entre la energía de excitación y la temperatura se puede obtener un valor de $K(T)$. Los resultados de cálculos realistas de propiedades de estructura nuclear ^{43,44)}, se pueden usar para elegir un conjunto apropiado de parámetros para $\rho(E)$. En el caso presente,

se han efectuado cálculos del $a(T)$ dependientes de T , mediante la densidad espectral ya mencionada. Con este modelo se puede describir cualitativamente las principales propiedades del $K(T)$. Los resultados de estos cálculos se comparan con los datos experimentales como describiremos más adelante.

La dependencia térmica de la energía libre nuclear se ha calculado usando el MGL ⁴¹⁾, y puede escribirse como ya se ha indicado en las ecuaciones (3.2) a (3.7).

Con respecto a la barrera de fisión nuclear, se observa su anulación a $T = 5.3$ MeV y $T = 4.0$ MeV en los casos del ^{208}Pb y ^{240}Pu , respectivamente. Una aproximación similar ha sido desarrollada en la referencia ⁸⁹⁾. La dependencia térmica de los parámetros del MGL usados en ⁸⁹⁾ es algo distinta de la que se ha usado en ⁴¹⁾ y la correspondiente temperatura de anulación de la barrera es $T = 8$ MeV. En ambos casos ^{41,89)}, la altura de la barrera de fisión ha sido calculada con el parámetro de fisibilidad

$$\begin{aligned}\chi(T) &= Z^2(1 + 5.2 \times 10^{-3} MeV^{-2} T^2) / (AF_\chi) \\ F_\chi &= 50.88(1 - \kappa I^2) \\ \kappa &= 1.7826\end{aligned}\tag{5.6}$$

llegando a

$$B_f(T) = 0.83n_s(19 - 0.12 MeV^{-2} T^2)(1 - \chi(T))^3 MeV\tag{5.7}$$

para la barrera de fisión $B_f(T)$. El factor $n_s = 0.9444(1 - \kappa I^2)$ se toma de ⁸⁹⁾. Usando esa ecuación, la temperatura de anulación de la barrera de fisión cambia de $T = 8$ MeV a $T = 6$ MeV si se cambia el factor frente al término de T^2 desde 0.12 a 0.21. Este factor es asociado a la dependencia térmica de la tensión superficial de la superficie nuclear. Un cambio similar de la temperatura de anulación de la barrera de fisión se obtiene con un MGL modificado que contiene conjuntos de cuatro partículas en lugar de nucleones individuales como grados de libertad ⁴²⁾. Este Modelo de la Gota Líquida Extendido (MGLE) se ha obtenido por un ajuste basado en el grupo de simetría SU_4 . La expresión resultante para la energía reproduce las energías de ligadura observadas ⁴²⁾. El hecho de que diferentes parametrizaciones dependientes de T del MGL pueden ser reflejadas en los valores de $K(T)$ es evidente. La posibilidad de distinguir entre efectos debidos a diferentes campos medios es, naturalmente, dependiente de los experimentos y en este trabajo se hará uso de ella solamente como una conjetura.

Para el presente análisis se ha seleccionado un conjunto de resultados experimentales correspondientes a diferentes reacciones de formación y decaimiento de núcleos compuestos. Entre estos se han tomado los de la reacción de ^{14}N sobre ^{154}Sm a energías de bombardeo de $E_b = 261$ MeV y 490 MeV ¹⁾, a $E_b = 600$ MeV para el sistema ^{20}Ne sobre ^{165}Ho ³⁾ y $E_b = 650$ MeV para el ^{60}Ni sobre ^{100}Mo ⁶⁾, respectivamente. Los puntos de la figura 5.1

muestran un cambio pronunciado a una temperatura de aproximadamente 3.5 MeV. A bajas temperaturas el valor del $K(T)$ es del orden de 8 MeV, mientras que a altas temperaturas es del orden de 13 MeV. Los puntos extraídos de ¹⁾ muestran una saturación a T del orden de los 5 MeV. Por otro lado los datos de ⁶⁾ presentan cambios importantes cerca de $T = 4.5$ MeV. Estos puntos se han medido a partir de diferentes canales de partículas y se pueden interpretar como una evidencia de la termalización ⁶⁾.

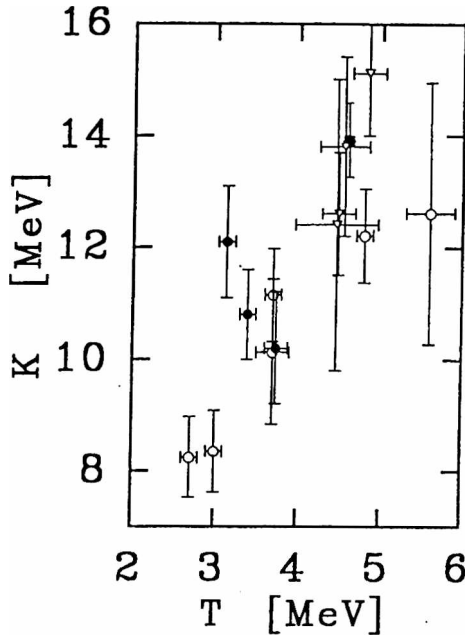


Figura 5.1 Dependencia térmica de la inversa del parámetro de densidad de niveles $K(T)$ obtenida de datos experimentales. Los círculos abiertos corresponden a Hagel et al. ¹⁾; los círculos llenos corresponden a Hilscher et al. ³⁾; los triángulos corresponden a Gonin et al. ⁶⁾ y los cuadrados llenos a Gonin et al. ¹¹⁾.

La dependencia térmica del $K(T)$ obtenida con el modelo de evaporación nuclear ^{32,33)} con una energía de separación dependiente de la temperatura, ecuación (3.9), se muestra en las figuras 5.2, para la evaporación de neutrones, y para partículas α en la figura 5.3 (con $B_\alpha(T)$ de la ecuación (3.14)). Las curvas muestran diferentes valores para la temperatura límite, T_{lim} . La dependencia con la temperatura concuerda con los resultados experimentales, la figura 5.2 reproduce la tendencia del $K(T)$ a bajas temperaturas, y la figura 5.3 reproduce el comportamiento del $K(T)$ a altas temperaturas. Los resultados con energía de separación constante (línea continua), independiente de la temperatura tienen una dependencia lineal del $K(T)$ con T a bajas temperaturas que no resulta consistente con los datos experimentales.

Una representación esquemática de los efectos de correlaciones nucleares se puede construir usando una distribución espectral con estados (discretos) de baja energía, y un continuo a altas energías representado por una distribución gaussiana. Este modelo reproduce las características de un cálculo realista ⁴³⁾ del espectro de excitaciones nucleares. La parte del espectro de baja energía de la distribución espectral $\rho(E)$, describe excitaciones colectivas en estados altamente correlacionados, mientras que la parte de altas energías corresponde a excitaciones no correlacionadas de partícula-agujero. La dependencia térmica del $K(T)$ predicha por este modelo se muestra en la figura 5.4. Las diferentes curvas se obtuvieron mediante parámetros distintos, para la distribución espectral, que son indicados en la figura 5.4. Los valores resultantes del $K(T)$ corresponden a una situación donde el aumento de la temperatura produce la anulación de la correlaciones nucleares a valores de la temperatura relativamente bajos. El colapso térmico de las interacciones nucleares residuales produce la curvatura del $K(T)$ a altas temperaturas. Este efecto se refleja en algunos de los datos experimentales de la figura 5.1. Este modelo muestra esquemáticamente la influencia de efectos de tamaño finito sobre el $K(T)$ ^{45,46,74)}.

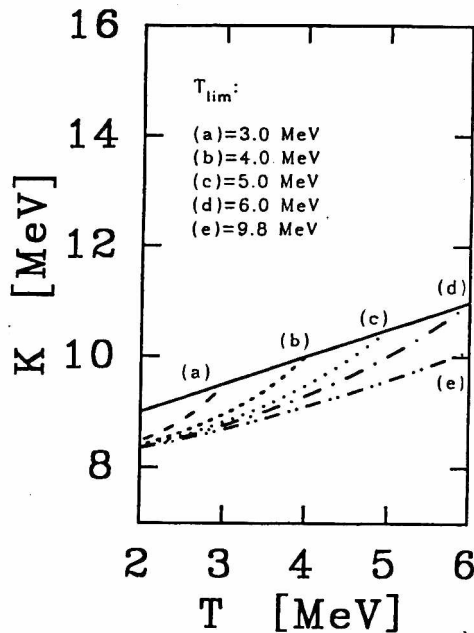


Figura 5.2 Dependencia térmica de la inversa del parámetro de densidad de niveles obtenido del modelo de evaporación nuclear con energía de separación del nucleón dependiente de T . Los resultados que se muestran en la figura corresponden a valores distintos de la temperatura límite T_{lim} . El valor de $T = 9.8$ MeV es la temperatura límite obtenida del MGL.

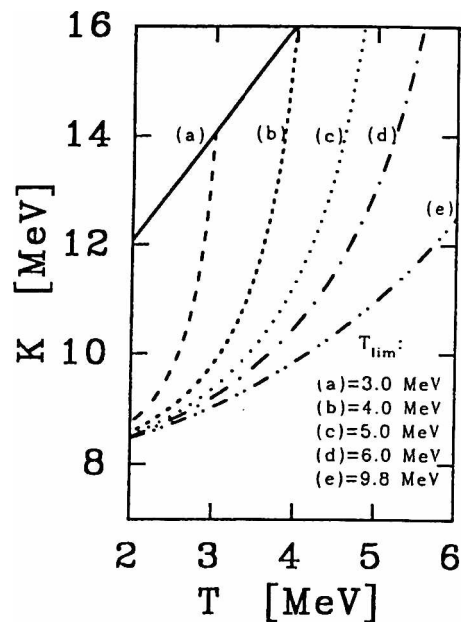


Figura 5.3 Dependencia térmica de la inversa del parámetro de densidad de niveles obtenido del modelo de evaporación nuclear con energía de separación del nucleón dependiente de T , para partículas α . La temperatura límite T_{lim} se indica en forma similar a la figura 5.2.

Para comprender lo que representan los puntos experimentales alrededor de los $T = 3$ a 4 MeV, se ha calculado la energía libre dentro del MGL dependiente de la temperatura ^{41,42}). Los resultados se muestran en la figura 5.5 y han sido obtenidos usando los parámetros de las referencias ^{41,42}). Las curvas en la figura 5.5 representan dos diferentes configuraciones, o sea, dos campos medios distintos. La temperatura de transición mostrada en esta figura es del orden de los $T = 3.5$ MeV.

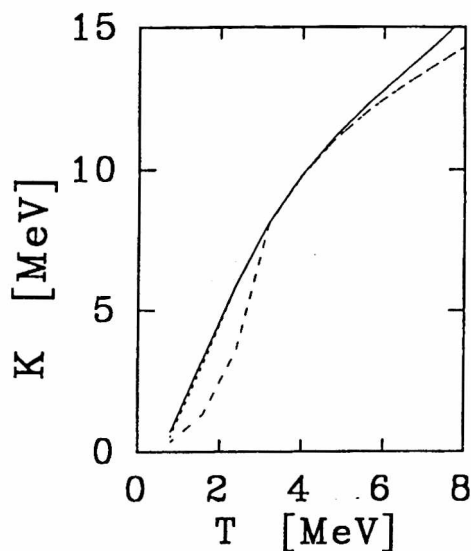


Figura 5.4 Dependencia térmica de la inversa del parámetro de densidad de niveles obtenido de cálculos usando la densidad espectral $\rho(T)$. Las líneas completas, de trazos y de trazos largos corresponde a diferentes valores de la energía de corte $E_c = 40, 65$ y 165 MeV, respectivamente.

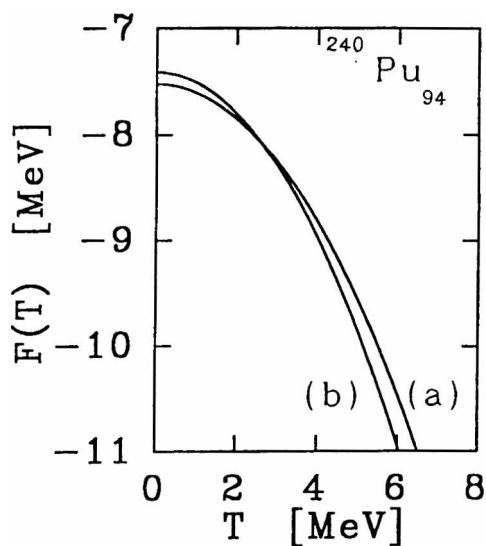


Figura 5.5 Energía libre nuclear por nucleón, $F(T)$, para el ^{240}Pu como función de la temperatura T . La curva a) corresponde al MGL convencional; la curva b) corresponde al MGL de Cauvin et al. ⁴²), ajustado para reproducir la barrera de fisión dada por Sauer et al. ⁸⁹).

Este valor es similar al asociado al cambio en el $K(T)$ como función de la temperatura. Si se puede establecer una relación entre los resultados experimentales y la teoría, entonces, los efectos de grupos de nucleones podrían desempeñar un papel importante en el comportamiento térmico del $K(T)$. Esto sería un señal de que los efectos dependientes de la temperatura no pueden explicarse argumentando sólo sobre la desaparición de las interacciones residuales. Una conclusión similar ha sido trazada desde el estudio de la dependencia con la temperatura de las barreras de fisión, donde los efectos de grupos de nucleones antes mencionados tienen relación con el cambio del valor de los parámetros del término de superficie en la barrera de fisión ⁸⁹). A manera de ejemplo, la dependencia con la temperatura de las barreras de fisión usando el MGL convencional (de nucleones) y un MGL de conjuntos de cuatro nucleones con spin e isospin acoplados a cero se muestran en la figura 5.6. El acuerdo

entre el MGL, donde sólo se modifica el término de superficie (curva 5.6.b) y el MGL de grupos de nucleones ⁴²⁾ (curva 5.6.c), es significativo. Finalmente, los valores experimentales del $K(T)$ se comparan con los obtenidos en diferentes aproximaciones. Los resultados de esto se presentan en la figura 5.7.

Los valores teóricos son valores extremos obtenidos a partir de descripciones de correlaciones nucleares independientes de la temperatura. Es evidente que, a partir de los resultados vistos en esta figura, los efectos de estructura nuclear a T finita son importantes y no se pueden ignorar.

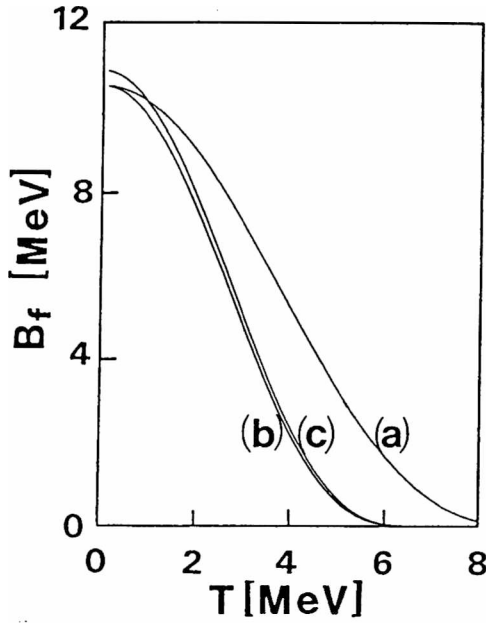


Figura 5.6 Dependencia térmica de la barrera de fisión nuclear B_f obtenida con los parámetros de Sauer et al. ⁸⁹⁾. La curva a) corresponde al modelo MGL convencional; la curva b) corresponde a un MGL con un término de superficie con $\alpha_s = 11.06 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$ y c) al MGL de Cauvin et al. ⁴²⁾, respectivamente.

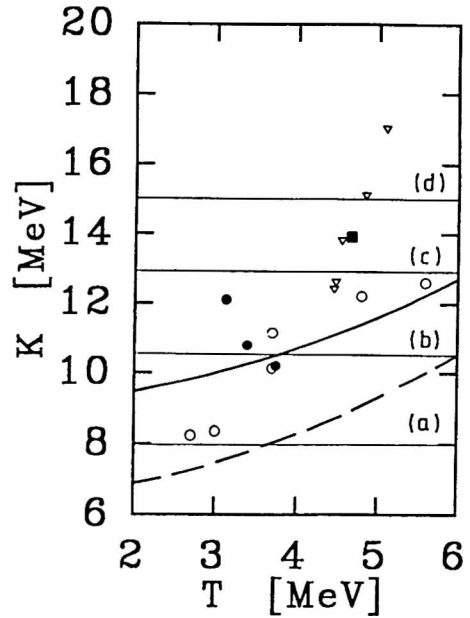


Figura 5.7 Inversa del parámetro de densidad de niveles nuclear $K(T)$ para diferentes casos extremos: a) obtenido a partir de resonancias de neutrones lentos ⁵⁴⁾; b) desde un MGL independiente de T ⁴¹⁾; c) valor de saturación a altas temperaturas adoptado en la referencia ¹⁾ y d) modelo de gas de Fermi, respectivamente. Los datos de la figura 5.1 se presentan en este caso sin la barras de error. Las líneas llenas y líneas de trazos corresponden a cálculos teóricos de la referencia ³⁶⁾.

E_0/A [MeV/nucleón]	ϵ [MeV]	x_0
0.	7.	0.322
1.	20.	0.500

Tabla 5.1 Parámetros de la energía por nucleón de las distribuciones binomiales.

5.3 Aplicaciones de las distribuciones binomiales

La tendencia decreciente del parámetro de densidad de niveles nuclear con el aumento de la temperatura ha sido encontrada tanto en resultados experimentales ¹⁻¹⁶⁾ como en cálculos microscópicos ^{77,78)}. Se puede establecer que para el MGL de nucleones que incluye correcciones de capas el valor del $a(T)$ se aproxima a $A/8 \text{ MeV}^{-1}$, donde A es el número de nucleones del núcleo. Para un MGL de conjuntos de nucleones acoplados el $a(T)$ es de $A/10.4 \text{ MeV}^{-1}$ ⁴⁰⁾. Para realizar una descripción microscópica del $a(T)$ se requiere la definición de una distribución espectral de un dado hamiltoniano. Como se ha indicado en el Capítulo 3 en la referencia ⁴³⁾, se muestra que para hamiltonianos realistas las distribuciones de autovalores son binomiales. Los parámetros de una dada distribución binomial dependen de la estructura microscópica adoptada por el sistema en estudio.

Para un sistema con una distribución binomial de autovalores hemos visto en el Capítulo 3 que la energía de excitación por nucleón se puede escribir como

$$\frac{E}{A} = 0.5 \epsilon (1 - \tanh(\epsilon/2T - x_0)) + \frac{E_0}{A} \quad (5.8)$$

El conjunto de datos experimentales del $a(T)$ es el de la figura 5.1. Para ajustar estos datos son necesarios dos conjuntos de parámetros.

En la tabla 5.1 se indican los parámetros utilizados para ajustar los datos experimentales del $K(T)$, esto es $K(T) = A/a(T)$, la primera línea de dicha tabla muestra el conjunto de parámetros para la curva a) de la figuras 5.8 y 5.9, mientras que la segunda línea contiene los parámetros usados para la curva b) de esa figura.

Las características del ajuste pueden resumirse como sigue, la curva a) es una buena representación de los datos experimentales para bajas temperaturas, pero para T mayores que 3 MeV, esta curva produce una sobreestimación de los mismos en el $a(T)$ (figura 5.9). Los parámetros de esta curva determinan un valor del $a(T)$ que resulta cercano a los $A/8 \text{ MeV}^{-1}$. Por otro lado, la curva b) ajusta los valores experimentales a temperaturas mayores que la “temperatura de transición” de alrededor de $T = 3.5 \text{ MeV}$. La curva b) requiere de una energía por nucleón a $T = 0$ del orden de 1 MeV. El $K(T)$ obtenido a partir de estas dos curvas se muestra en la figura 5.8.

Este ajuste indica que no es posible una única parametrización de la energía por nucleón, y en este trabajo este aspecto se ha estudiado cuidadosamente. De esta forma, desde el punto de vista fenomenológico ocurre un cambio en las correlaciones nucleares a una temperatura entre los 3 y 4 MeV. A partir de la dependencia de las barreras de fisión con la temperatura y desde los datos experimentales del $a(T)$, es obvio que una descripción basada en un sólo campo medio no permite hacer ajustar ninguno de los esquemas o modelos actuales de estructura nuclear a temperatura finita con los datos experimentales cerca de la “temperatura de transición”. Los resultados de estudios preliminares indican que un modelo leptodermo que contenga grupos de nucleones acoplados se puede agregar además de los nucleones. De esta forma, se puede pensar que la dependencia térmica del $a(T)$, es un elemento que sirve para investigar una posible transición descrita por un modelo leptodermo de nucleones y un modelo leptodermo híbrido de nucleones y partículas α ^{40,42}.

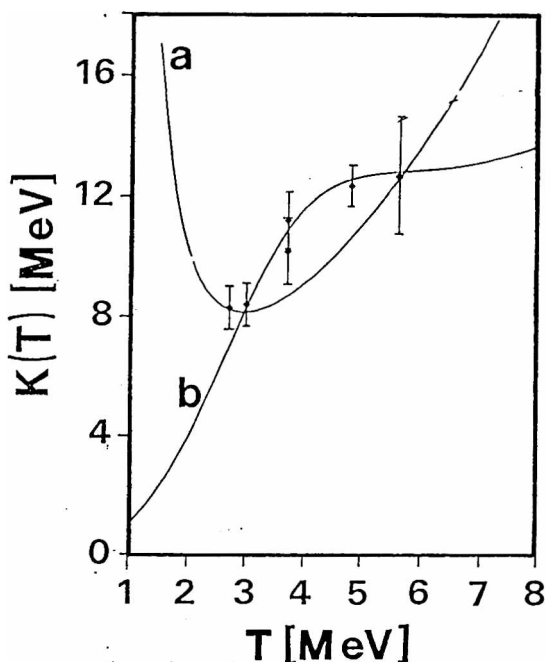


Figura 5.8 Dependencia térmica de la inversa del parámetro de densidad de niveles nuclear $K(T)$. La curva a) ajusta los datos para bajas temperaturas y la curva b) para altas temperaturas. Con las barras de error se indican datos experimentales.

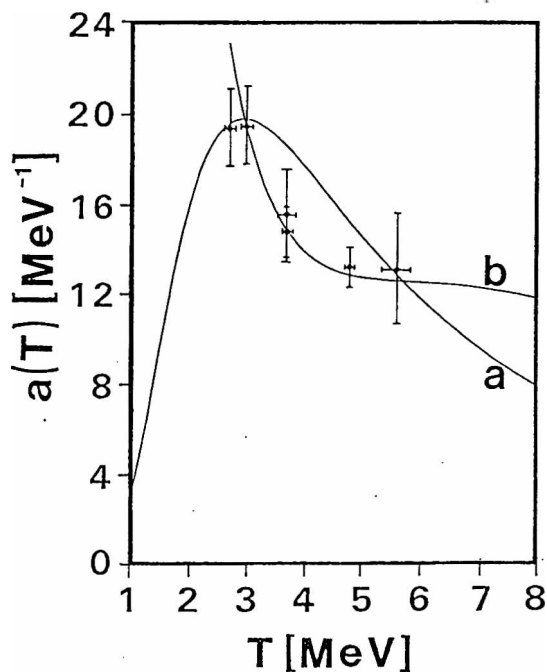


Figura 5.9 Dependencia térmica del parámetro de densidad de niveles nuclear $a(T)$. La curva a) ajusta los datos para bajas temperaturas y la curva b) para altas temperaturas.

5.4 Estudio del efecto Schottky en núcleos livianos en el modelo SU_3 nuclear

En una serie de recientes publicaciones ⁷³⁾ se ha reportado la existencia de “transiciones de fase” en núcleos finitos livianos. Por otro lado, cálculos similares, para algunos núcleos livianos de la capa $2s1d$ dan resultados que se oponen a esa “transición de fase” ^{46,74)}. La aquí referida “transición de fase” fue descrita por Miller et al. ⁷³⁾ como un cambio en la forma nuclear inducido por excitaciones térmicas.

En el trabajo de la referencia ⁷³⁾, el calor específico nuclear para el caso del ^{24}Mg , fue calculado usando autoestados nucleares obtenidos a partir de varias interacciones nucleares realistas, y usando datos observados de energías experimentales. La aparición de un pico destacable en el calor específico, para temperaturas del orden de $1.7 \text{ MeV} \leq T \leq 3 \text{ MeV}$, fue interpretado como señal de una “transición de fase”, más aún un cambio de la forma nuclear fue asociado a este pico ⁷³⁾. Contrariamente, los resultados obtenidos por Dukelsky et al. ⁷⁴⁾ y los de la referencia ⁴⁶⁾, no indican cambios en el momento cuadrupolar eléctrico intrínseco a esas temperaturas. En un trabajo más reciente ⁴⁶⁾ la cuestión sobre la naturaleza de la “transición de fase” sugerida por Miller et al. ⁷³⁾ es revisada, esta vez con referencia a los efectos de tamaño finito (efectos propios de un sistema mesoscópico).

En este trabajo ^{46,74)} se calcularon el calor específico, el momento cuadrupolar intrínseco, y otras cantidades dependientes de la temperaturas, de once núcleos con número de nucleones par-par con capa activa $2s1d$ en el marco del modelo SU_3 nuclear de Elliot ^{50,52)}.

Como hemos visto en el Capítulo 2, en términos del modelo SU_3 los números cuánticos (λ, μ) permiten expresar los autovalores de la energía del hamiltoniano nuclear como en la ecuación (2.71). Las constantes κ (intensidad de la interacción cuadrupolar) y A_0 (el corrimiento de la energía) son obtenidos por el ajuste, para cada núcleo, de la energía del primer estado excitado $J^\pi = 2^+$ e imponiendo la condición $E(\lambda, \mu, L = 0) = 0$ para la representación (λ, μ) asociada al estado fundamental (sección 2.4.5).

Los valores de las representaciones (λ, μ) del grupo SU_3 para diferentes núcleos, estos son ^{18}O , ^{18}Ne , ^{20}O , ^{20}Ne , ^{22}Ne , ^{22}Mg , ^{24}Ne , ^{24}Mg , ^{26}Mg , ^{26}Si y ^{28}Si , fueron extraídos de la referencia ⁷⁶⁾. Las constantes κ y A_0 , el número de representaciones del grupo SU_3 , el número total de configuraciones incluyendo la degeneración en el momento angular total, en el isospin total y la energía experimental del primer estado excitado 2^+ , para cada núcleo son las entradas del presente cálculo ⁴⁶⁾. El número de configuraciones ha sido calculado, en cada caso, aplicando las reglas de Elliot ^{51,52)} en la forma que sigue

$$K = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 0 \text{ ó } 1$$

y

$$L = \begin{cases} K, K+1, \dots, K + \max(\lambda, \mu) & \text{si } K \neq 0 \\ \max(\lambda, \mu), \max(\lambda, \mu) - 2, \dots, 0 \text{ o } 1 & \text{si } K = 0 \end{cases}$$

Para un estado perteneciente a una representación SU_3 , el momento cuadrupolar intrínseco está dado por

$$Q_0(\lambda, \mu) = \begin{cases} (2\lambda + \mu + 3) & \text{si } \lambda \geq \mu \\ (-\lambda - 2\mu - 3) & \text{si } \lambda < \mu \end{cases}$$

5.4.1 El modelo SU_3 y la función de partición

Se supone la validez de la descripción SU_3 y se procede a calcular los valores medios relevantes a temperatura finita, estos son el momento cuadrupolar eléctrico intrínseco, la energía de excitación y calores específicos nucleares ⁴⁶⁾. La función de partición canónica se define como sigue

$$Z(\beta) = \sum_i (2I_i + 1)(2J_i + 1)e^{-\beta E_i} \quad (5.9)$$

donde el subíndice i indica la representación irreducible del grupo SU_3 y β es $1/T$ (con T en MeV). El isospin y el momento angular total, para cada representación irreducible, se denotan como I_i y J_i , respectivamente. Con esta función de partición se calcula el valor medio de la energía

$$E = -\frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta} \quad (5.10)$$

y el calor específico

$$C = \frac{dE}{dT} \quad (5.11)$$

Los otros observables se calculan como

$$\langle \hat{\Theta} \rangle = \frac{\sum_i (2I_i + 1)(2J_i + 1)e^{-\beta E_i} \langle \hat{\Theta} \rangle_{I_i, J_i}}{Z(\beta)} \quad (5.12)$$

donde $\langle \hat{\Theta} \rangle_{I_i, J_i}$ es el elemento de matriz diagonal del operador $\hat{\Theta}$ en una dada representación de SU_3 .

5.4.2 Resultados y Discusión

Para el hamiltoniano de SU_3 se ha adoptado una interacción cuadrupolo-cuadrupolo puro ⁴⁶⁾. Los valores resultantes de κ y A_0 se listan en la tabla 5.2 conjuntamente con el número de representaciones de SU_3 y el correspondiente número de configuraciones para cada núcleo. Esos valores se han tomado de la referencia ⁷⁶⁾. En este caso se ha calculado para todos los núcleos listados en la tabla 5.2. A fin de ilustrar los resultados se han seleccionado algunos casos los cuales se muestran en las figuras 5.10 a 5.16. Las líneas Yrast predichas para cada

núcleo considerado en este análisis se muestran en la figura 5.10. El acuerdo general entre los resultados experimentales y los valores calculados en el esquema SU_3 es aceptable, como se puede verificar a partir de los resultados correspondientes al conjunto completo de núcleos.

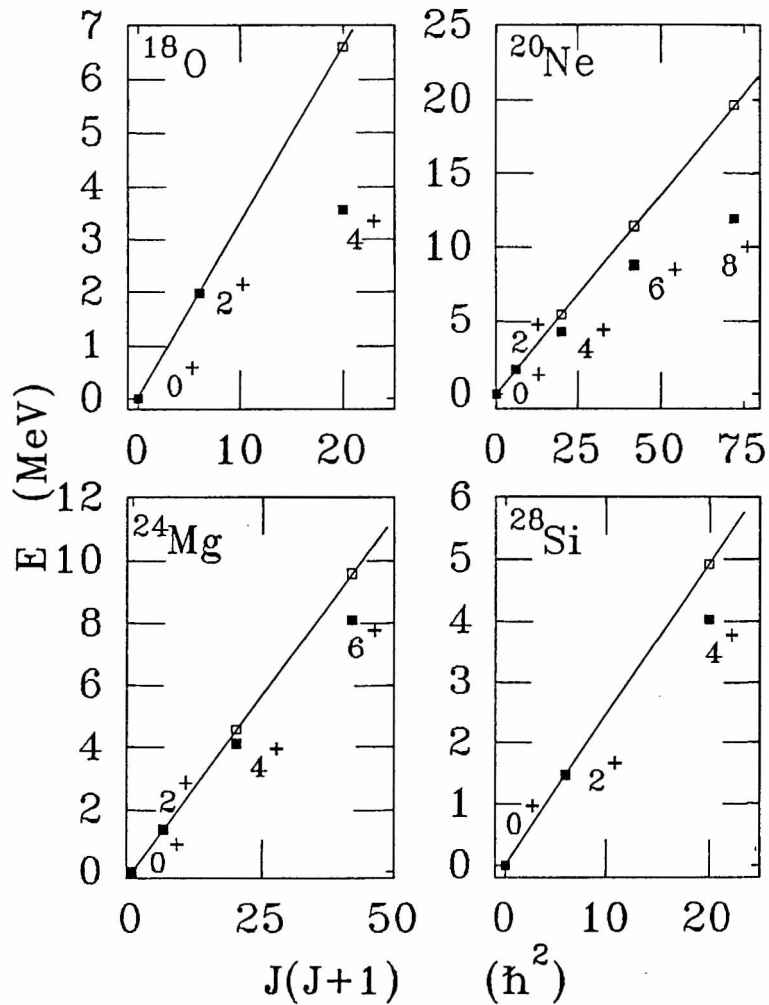


Figura 5.10 Línea Yrast para algunos de los núcleos considerados en el texto. Las líneas continuas con cuadrados en blanco indican la energía predicha por el modelo SU_3 . Los valores experimentales están denotados por cuadrados llenos. Cuando los cuadrados llenos están sobre la línea continua, estos valores coinciden con los cuadrados en blanco, esto es, con las predicciones del modelo SU_3 . Los números indicados dentro de las figuras son los estados denotados por J^π , donde J es el momento angular total y π es la paridad.

La distribución espectral $D(E)$, esto es: el número de autoestados por unidad de energía normalizado al número total de autoestados correspondientes al conjunto de configuraciones de SU_3 incluidas en el cálculo, se muestran en la figura 5.11. Se observa que la $D(E)$ es fuertemente dependiente de A pero satura, o sea que alcanza un máximo valor y luego decrece a energías del orden de 20 a 30 MeV.

La fragmentación es grande para isótopos más pesados. Se ha verificado que un aumento en el número de configuraciones no cambia significativamente la estructura de $D(E)$. Lo mismo se puede indicar sobre la energía de excitación máxima usada en el cálculo, la cual se ha fijado en $E_{max} = 30$ MeV, ya que el cambio hasta $E_{max} = 50$ MeV no afecta los resultados. Los resultados de $D(E)$, en la figura 5.11 reproducen la tendencia observada, esto es, una banda rotacional dominante que incluye al estado fundamental seguida por un gran número de configuraciones pertenecientes a otras representaciones de SU_3 . La distribución de autovalores con excepción de las bandas colectivas del estado fundamental, tienen una forma que se puede describir con una distribución similar a la forma binomial reportada por Cortes et al. ⁴³).

Para resumir, las principales características térmicas de los núcleos estudiados son las siguientes

- a) La banda rotacional que contiene el estado fundamental es reproducida correctamente, ésta llega hasta energías del orden de los 12 MeV para $J^\pi = 8^+$.
- b) La distribución espectral, $D(E)$, es aproximadamente binomial.
- c) La distribución espectral muestra prácticamente en todos los casos un número de estados colectivos de baja energía, seguidos de un gran número de excitaciones no-colectivas. La diferencia entre las excitaciones colectivas y las no-colectivas, obviamente, viene dada por la representación del grupo SU_3 que tenga asociada.

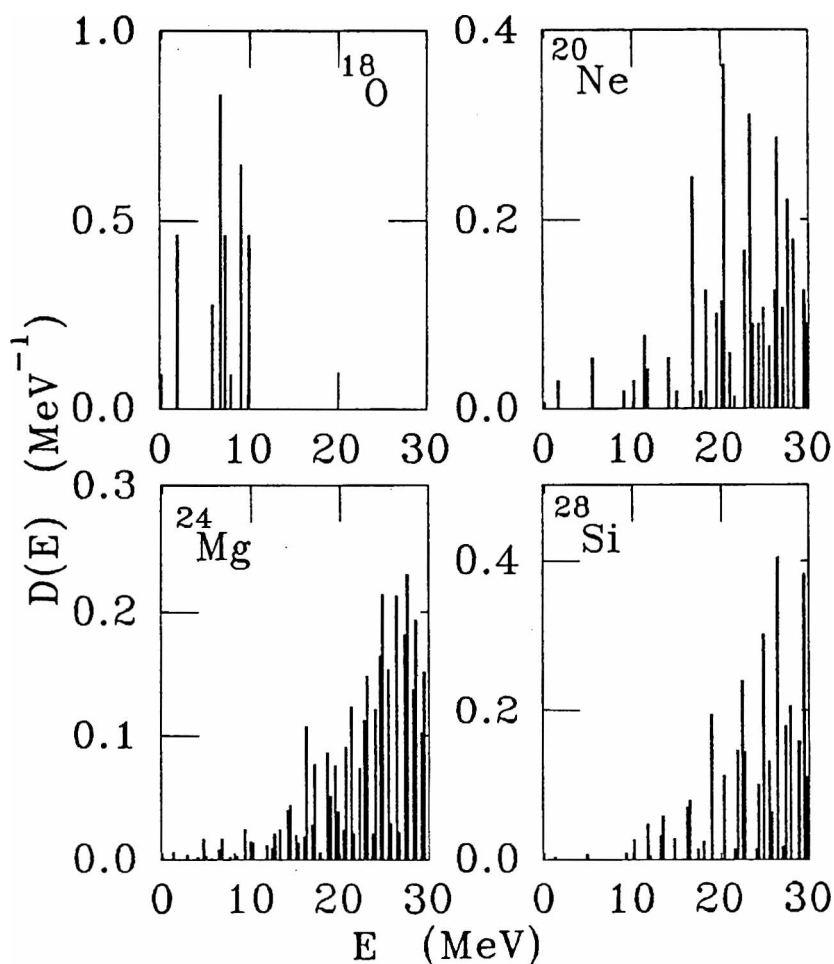


Figura 5.11 Distribución espectral $D(E)$ en el modelo SU_3 como función de la energía E .

Núcleo	A_0	κ [MeV]	Representaciones SU_3	Configuraciones SU_3
^{18}O	112	0.11	3	8
^{18}Ne	112	0.11	3	8
^{20}O	352	0.09	20	78
^{20}Ne	352	0.09	20	84
^{22}Ne	456	0.07	90	493
^{22}Mg	456	0.07	90	500
^{24}Ne	592	0.11	263	170
^{24}Mg	592	0.08	263	625
^{26}Mg	640	0.10	501	417
^{26}Si	640	0.10	501	454
^{28}Si	720	0.08	622	525

Tabla 5.1 Parámetros del modelo SU_3 usados en los cálculos. Las constantes A_0 y κ se ajustaron para reproducir la energía del primer estado cuadrupolar excitado en cada núcleo. El número de representaciones y de configuraciones se ha tomado de la referencia ⁷⁶.

Los valores medios han sido calculados con la función de partición de la ecuación (5.9). La estructura de $Z(\beta)$ es prácticamente la misma para todos los núcleos, excepto para el ^{18}O y el ^{18}Ne , donde el aumento de $Z(\beta)$ con T es menos importante. La dependencia térmica del valor medio de la energía de la ecuación (5.10) se muestra en la figura 5.12. Todas las funciones graficadas en la figura 5.12 muestran una tendencia creciente al aumentar T , pero esa tendencia se aparta de la forma lineal esperada a altas T donde se produce una saturación. Para la mayoría de los casos los cambios de pendiente se observan a bajas T .

El calor específico se muestra en la figura 5.13. La forma de las curvas es similar a la reportada por Dukelsky et al. ⁶⁵). De esta manera, la presente sistemática muestra que la presencia de un pico ancho a T de orden de los 2 MeV a 4 MeV es una característica común en todos los casos.

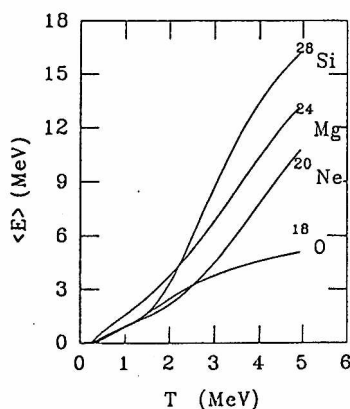


Figura 5.12 Energía de excitación promedio E como función de la temperatura T .

La aparición de un pico a bajas temperaturas depende de cada caso y resulta más pronunciado para algunos casos como el ^{20}Ne , ^{22}Ne y ^{26}Si y menos evidente para otros núcleos (^{18}O). El resultado correspondiente al caso del ^{20}Ne reproduce la tendencia reportada por Dukelsky et al. ⁷⁴). La pregunta de interés está obviamente ligada a la identificación del pico de temperatura más elevada como una señal de una "transición de fase" ⁷³).

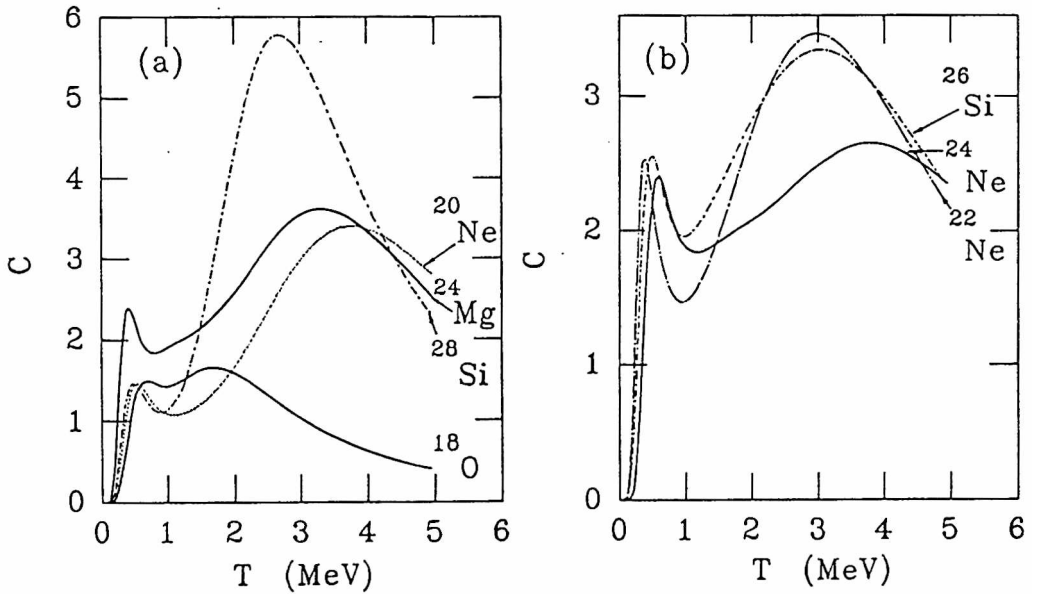


Figura 5.13 Dependencia térmica de los calores específicos C de algunos núcleos.

Siguiendo la discusión de la referencia ^{46,74}), y para responder a la cuestión anterior se han calculado los valores medios del momento cuadrupolar intrínseco $\langle \hat{Q}_0 \rangle$. Los resultados se observan en la figura 5.14. La característica importante observada en esas curvas es que el momento cuadrupolar intrínseco, en todos los casos considerados no cambia de signo.

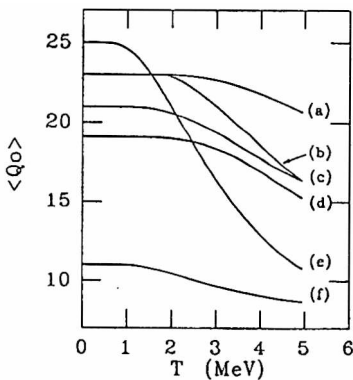


Figura 5.14 Dependencia térmica del momento cuadrupolar eléctrico intrínseco $\langle \hat{Q}_0 \rangle$ (en unidades arbitrarias). Los casos son denotados por (a) ^{24}Ne , (b) ^{24}Mg , (c) ^{22}Ne , (d) ^{20}Ne , (e) ^{26}Si y (f) ^{18}O , respectivamente.

No se producen los efectos descritos como las “transiciones de fase” indicadas por Miller et al. ⁷³⁾. De esta forma, la tendencia del momento cuadrupolar intrínseco es decreciente, no obstante el cambio de forma prolada a oblada, si ocurriera, estaría a una temperatura más allá de la temperatura aceptable para la existencia de núcleos finitos. En lo que concierne al pico a T entre 2 y 4 MeV, es explicado como consecuencia de la finitud del espacio de configuración, esto es, el efecto Schottky ⁴⁶⁾. Para clarificar este punto se ha calculado el calor específico para una situación donde la densidad espectral se representa por una banda rotacional seguida por una distribución binomial que corresponde a estados vibratoriales de alta energía. Los resultados se presentan en la figura 5.15 junto con los resultados obtenidos con el modelo SU_3 . El acuerdo entre ambos modelos es bueno y da base a la conclusión del trabajo de Dukelsky et al. ⁷⁴⁾. Finalmente, y para sostener esta conclusión que concierne a la estructura del pico (entre 2 y 4 MeV) del calor específico, se ha calculado el valor de expectación del número de cuantos de oscilador para cada grado de libertad descrito por el modelo SU_3 . Los resultados se indican en la figura 5.16. A partir de estos resultados, la existencia de la “transición de fase” de forma indicada por Miller et al. ⁷³⁾ queda descartada ^{46,74)}.

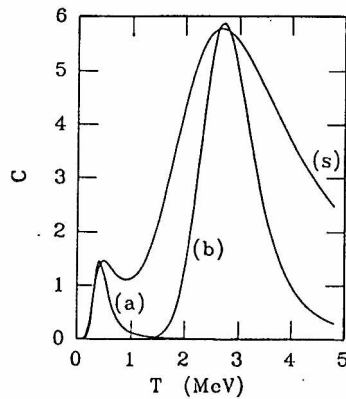


Figura 5.15 Calor específico C para el ^{28}Si calculado con (a) un modelo simplificado con con estados de baja energía rotacionales y (b) con un espectro vibracional. La curva (s) corresponde al modelo SU_3 .

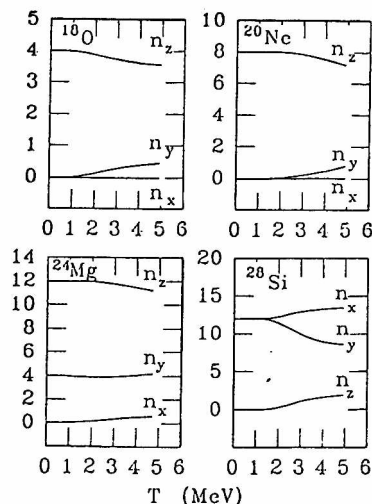


Figura 5.16 Dependencia térmica de los números cuánticos del oscilador SU_3 (n_x , n_y y n_z) para los casos considerados en cada figura.

5.5 Estudio fenomenológico de calores específicos nucleares

Además de la cuestión de cómo caracterizar diferentes “transiciones de fase” es necesario discutir sobre la aplicabilidad de los conceptos usuales de la termodinámica ³⁷⁾. Para este propósito se ha calculado la función de partición canónica, valores medios de la energía de excitación y calores específicos, a partir de niveles de energía observados para una muestra con un total de 28 núcleos ^{47,90-96)} en diferentes regiones de masa nuclear. Con estos datos se han estudiado efectos de truncamiento del espectro de energía, la influencia del primer estado excitado, la estructura de las contribuciones rotacionales y vibracionales a los observables y la aparición de picos y “lomas” en el calor específico nuclear. Luego, se compara la tendencia que presentan los datos experimentales con las propiedades que se obtienen usando una descripción esquemática del espectro nuclear ^{47,90-96)}.

Se ha investigado sobre los efectos asociados con la inclusión de la parte continua del espectro de energía sobre las funciones de partición construidas fenomenológicamente ^{47,90-96)}. Se han estudiado las propiedades observadas del calor específico y las que resultan a partir de la aplicación del teorema de Levinson ^{58,59)}.

Para el presente análisis se ha adoptado el formalismo canónico de la mecánica estadística. Se calcula la función de partición de la ecuación (5.9). El número de estados incluidos en la función de partición canónica $Z(\beta)$, y los otros elementos que entran en la definición de la función de partición, se han tomado de las referencias ^{47,90-96)}. El valor promedio de la energía se define como

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i (2I_i + 1)(2J_i + 1) E_i e^{-\beta E_i}}{Z(\beta)} \quad (5.13)$$

y el correspondiente calor específico está dado por

$$C = \frac{1}{T^2} (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) \quad (5.14)$$

donde

$$\langle E^2 \rangle = \frac{\sum_i (2I_i + 1)(2J_i + 1) E_i^2 e^{-\beta E_i}}{Z(\beta)} \quad (5.15)$$

Las anteriores definiciones son válidas, obviamente, si se asume el equilibrio estadístico y despreciando fluctuaciones ⁴⁷⁾. La sistemática basada en la información experimental ha sido desarrollada usando aquellas ecuaciones.

5.5.1 Energías de excitación y temperaturas obtenidas de los espectros observados.

Para el presente análisis se ha incluido el espectro de energía de los núcleos listados en las tablas 5.3 y 5.4. El número de estados excitados incluidos en los cálculos, correspondientes a cada caso se muestra en las tablas. Los datos se tomaron de las referencias ⁴⁷⁾.

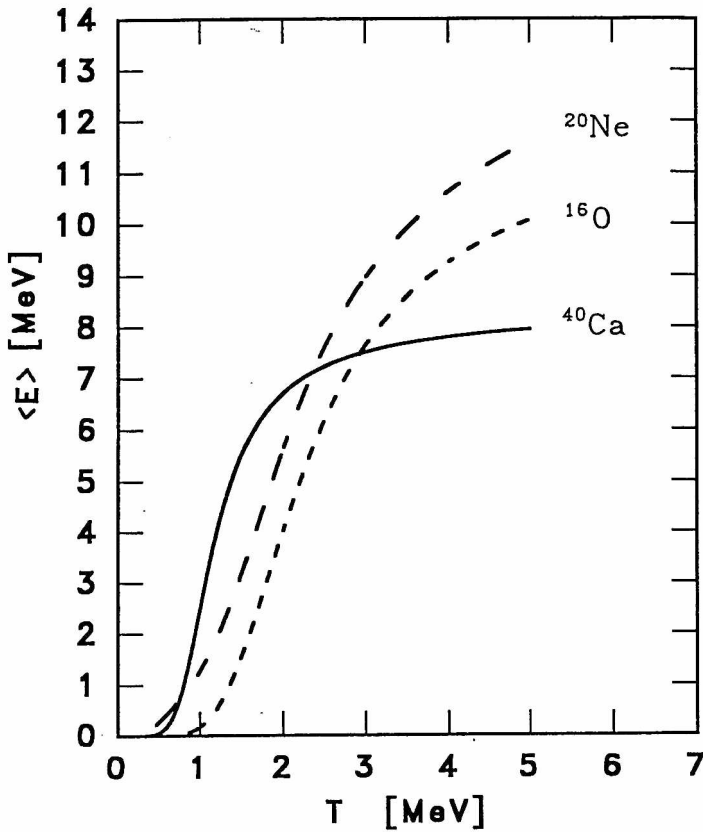


Figura 5.17 Dependencia térmica de la energía de excitación, $\langle E \rangle$ para el ^{16}O , ^{20}Ne y el ^{40}Ca .

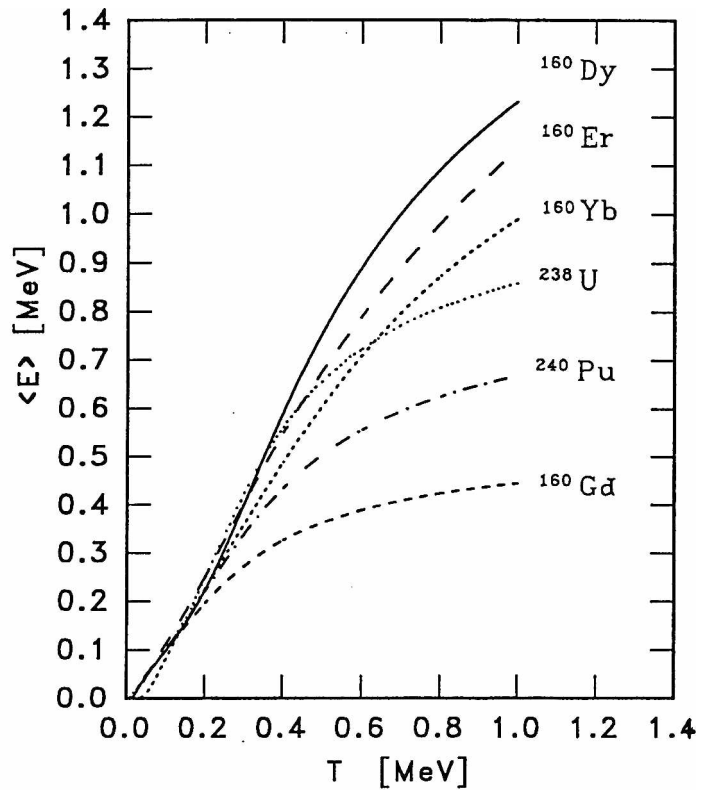


Figura 5.18 Dependencia térmica de la energía de excitación, $\langle E \rangle$ para el ^{160}Dy , ^{160}Er , ^{160}Yb , ^{160}Gd , ^{238}U y ^{240}Pu .

El valor medio $\langle E \rangle$, ecuación (5.13), ha sido calculado como una función de la temperatura T . Los resultados se muestran en las figuras 5.17 y 5.18. Las curvas indican un crecimiento relativamente rápido de la energía de excitación promedio a bajas temperaturas, lo cual es seguido por la saturación a altas temperaturas. La tendencia a la saturación, esto es, los cambios en la energía son menos pronunciados a medida que la temperatura crece, son más evidentes para temperaturas del orden (o mayores que) $T = 2$ MeV. Las curvas muestran un cambio en la pendiente a baja temperatura. Para núcleos más pesados los cambios aparecen a $T \approx 0.30$ MeV, y a valores más altos ($T \approx 1.5$ MeV) para núcleos livianos. Para relacionar el comportamiento de la energía de excitación promedio con las propiedades

conocidas del espectro, tales como la naturaleza rotacional o vibracional de las excitaciones nucleares, se ha indicado la pendiente de cada curva por un valor de T correspondiente al máximo local. Estos valores, T_{Max} , se muestran en la tabla 5.3. Además se ha introducido una energía característica (E_{escala}). La variación observada de los valores T_s ($0.2 \leq T_s \leq 0.6$) es menos pronunciada que la variación de los valores de T_{Max} ($0.014 MeV \leq T_{Max} \leq 1.00 MeV$) de la tabla 5.3. La energía E_{escala} se ha fijado, para cada caso, en el valor de la energía del primer estado excitado del espectro observado. La variación relativamente pequeña que tienen los valores de T_s , junto al hecho de que los núcleos con estructura muy distinta (como ^{40}Ca y ^{240}U) son comparables, sugiere una explicación directa, esto es: que la aparición de un pico de baja temperatura del calor específico nuclear, como el reflejado a partir de los datos experimentales, se puede asociar a la ocupación del primer estado excitado debida a efectos térmicos.

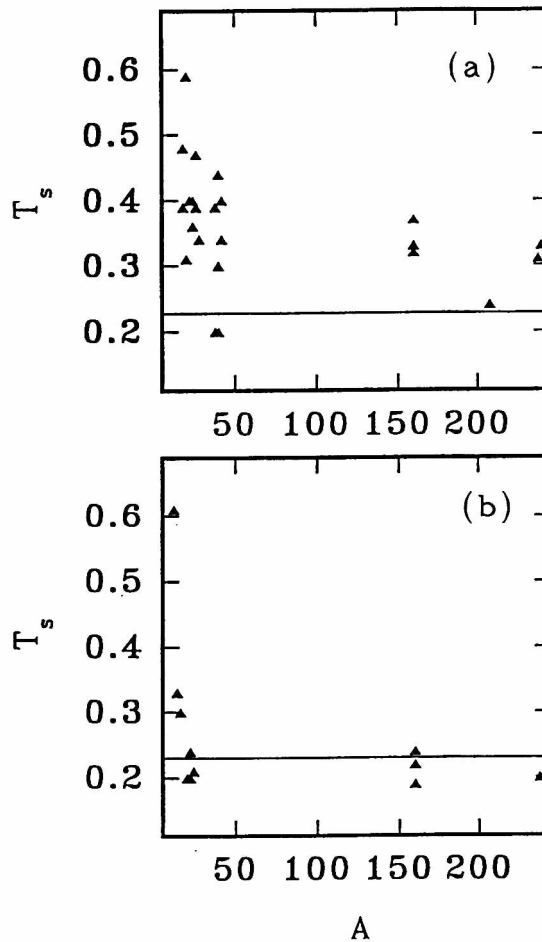


Figura 5.19 Temperatura escaleada, T_s , como función del número atómico A , correspondiente al pico de bajas temperaturas de los calores específicos de los núcleos listados en la tabla 5.3 (figura 19.a) y en la tabla 5.4 (figura 19.b), respectivamente.

Si se elimina el primer estado excitado del espectro correspondiente a cada núcleo, el pico del calor específico a baja temperatura desaparece. Otra propiedad interesante, mostrada por los datos es la aparición de un pico ancho para valores altos de T , cuyo máximo, T_{Max} , se encuentra entre 1 y 3 MeV. Los resultados para T_{Max} y E_{escala} , para estos casos no es la energía del primer estado excitado sino el valor medio de la energía a $T = T_{Max}$, se muestran en la tabla 5.4. El valor escaleado T_s es muy cercano al valor central en los casos de la tabla 5.3. El valor promedio obtenido de $T_s \simeq 0.30$ es del orden del valor presentado en ⁴⁵⁾, y se lo puede asociar con un efecto Schottky nuclear.

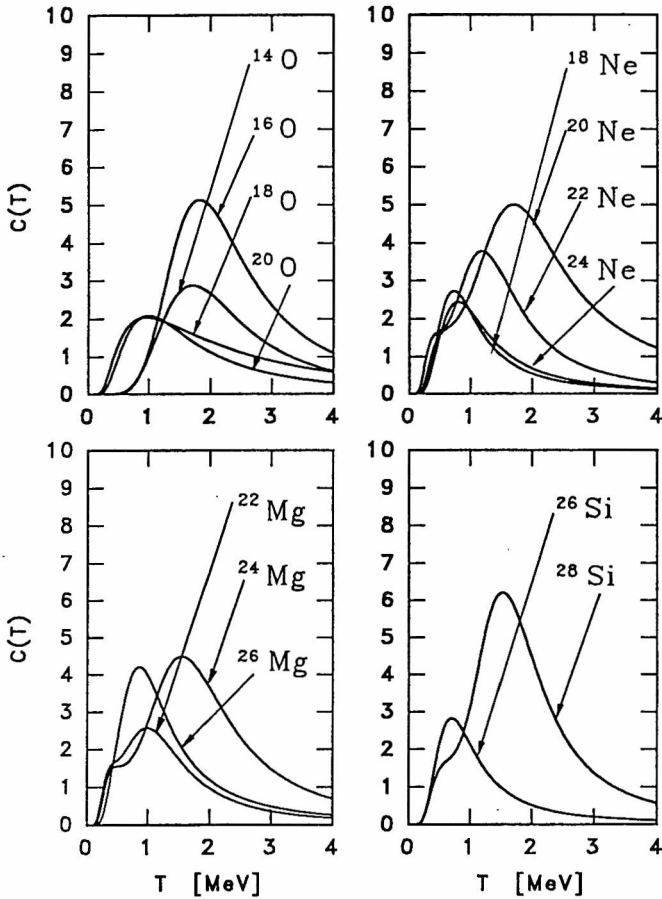


Figura 5.20 Calores específicos nucleares como función de la temperatura para los núcleos livianos indicados en la figura.

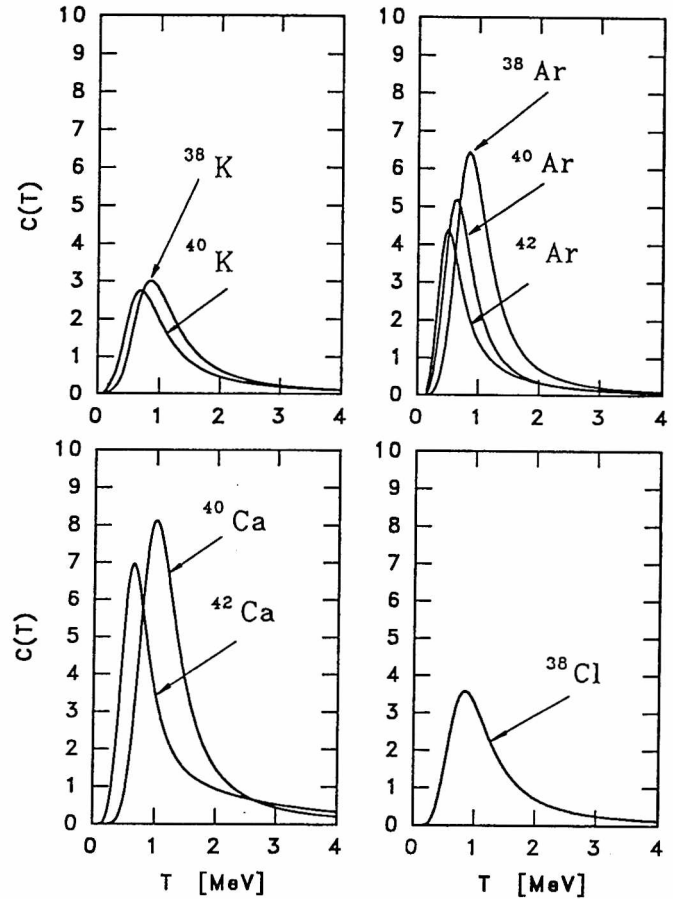


Figura 5.21 Calores específicos nucleares como función de la temperatura para los núcleos de masas intermedias indicados en la figura.

La dispersión de T_s , para el pico de bajas energías C , se muestra en la figura 5.19.a. El valor de T_s correspondiente al efecto Schottky ⁴⁵⁾ es $T_s = 0.24$. Los valores obtenidos a partir de los datos se distribuyen alrededor de $T_s \simeq 0.34$, excepto para los núcleos muy livianos, como en el caso del ^{12}C , el cual es consistente con el valor de $T_s \simeq 0.6$. Por otra parte los valores de T_s correspondientes al pico ancho a altas temperaturas se indican en la figura 5.19.b. Los resultados que se muestran en esta figura están de acuerdo con las

explicaciones previas dadas en términos de los efectos de finitud ^{46,74}).

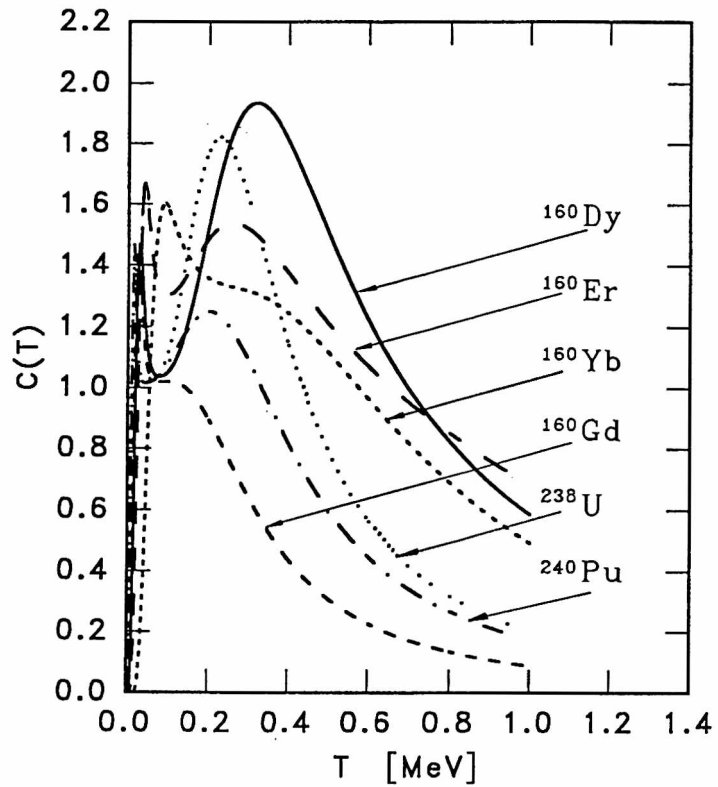


Figura 5.22 Calores específicos nucleares como función de la temperatura para los núcleos pesados indicados en la figura.

Se ha realizado un estudio sistemático de los valores de los calores específicos nucleares, calculados con los espectros experimentales, y esto se presenta en las figuras 5.20 a 5.22.

La forma de las curvas es parecida a pequeñas lomas a bajas T , y eventualmente pueden desarrollar un pico más estrecho para los núcleos más pesados (núcleos deformados). Como consecuencia de este análisis se puede concluir que el pico de C a bajas T es resultado de la ocupación térmica del primer estado excitado de baja energía. La otra propiedad que se ha discutido es la existencia de un pico ancho de T más elevadas, común para todos los casos, y es la señal de un efecto de finitud ^{46,74} (efecto Schottky nuclear).

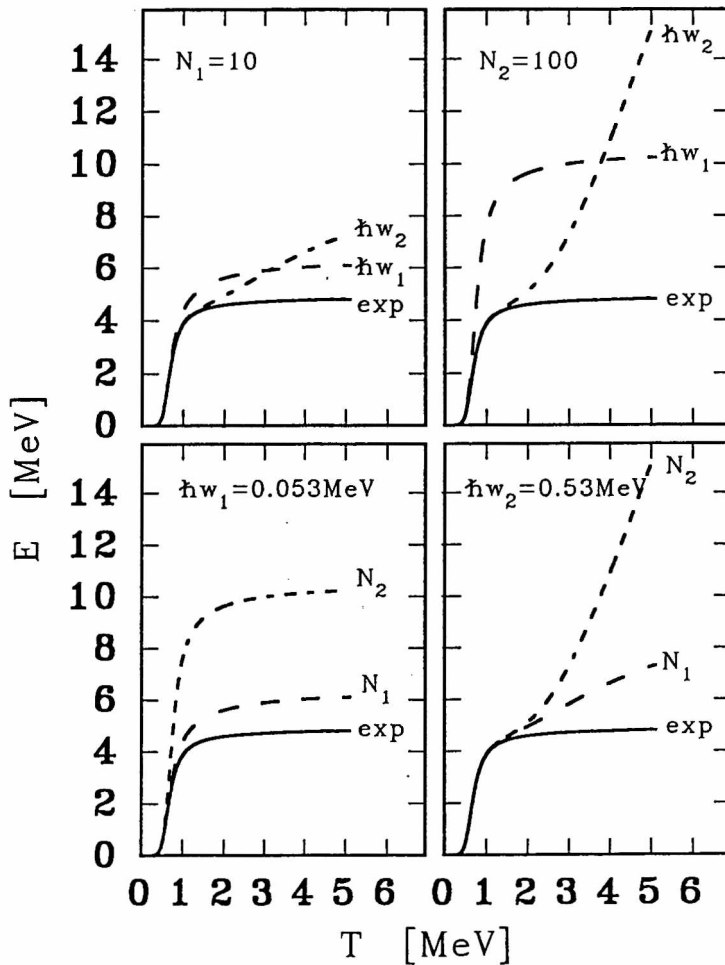


Figura 5.23 Dependencia térmica de la energía de excitación para el ^{208}Pb . Las líneas sólidas representan los valores de $\langle E \rangle$ calculados a partir de niveles de energía experimentales suplementados por niveles de un oscilador armónico con $\hbar\omega = 41A^{-1/3}$ MeV. El número adicional de capas está denotado por N_1 y N_2 . Con $\hbar\omega_1$ y $\hbar\omega_2$ se indican los resultados obtenidos con niveles de energía experimentales suplementados por un oscilador armónico con $\hbar\omega_1 = 0.053$ MeV y $\hbar\omega_2 = 0.53$ MeV.

5.5.2 Tratamiento de la parte continua del espectro de energía

Para investigar los efectos de la parte continua del espectro de energía sobre el valor medio de la energía, $\langle E \rangle$, y el calor específico, C , se ha adicionado al espectro de niveles un número de estados del oscilador armónico con energías de $\hbar\omega = 41A^{-1/3}$ MeV, $\hbar\omega = 0.53$ MeV (que corresponde al valor medio del espaciado de energía entre los últimos dos estados

excitados de la parte superior del espectro del ^{208}Pb) y $\hbar\omega = 0.053 \text{ MeV}$, que es un valor de referencia. Los niveles experimentales de energía del ^{208}Pb son suplementados con una secuencia de niveles del oscilador armónico, comenzando desde el nivel experimental de mayor energía, los resultados para $\langle E \rangle$ y C dependerán del número de niveles incluido y de la frecuencia del oscilador armónico que se tome, ω . Los resultados se muestran en las figuras 5.23 y 5.24.

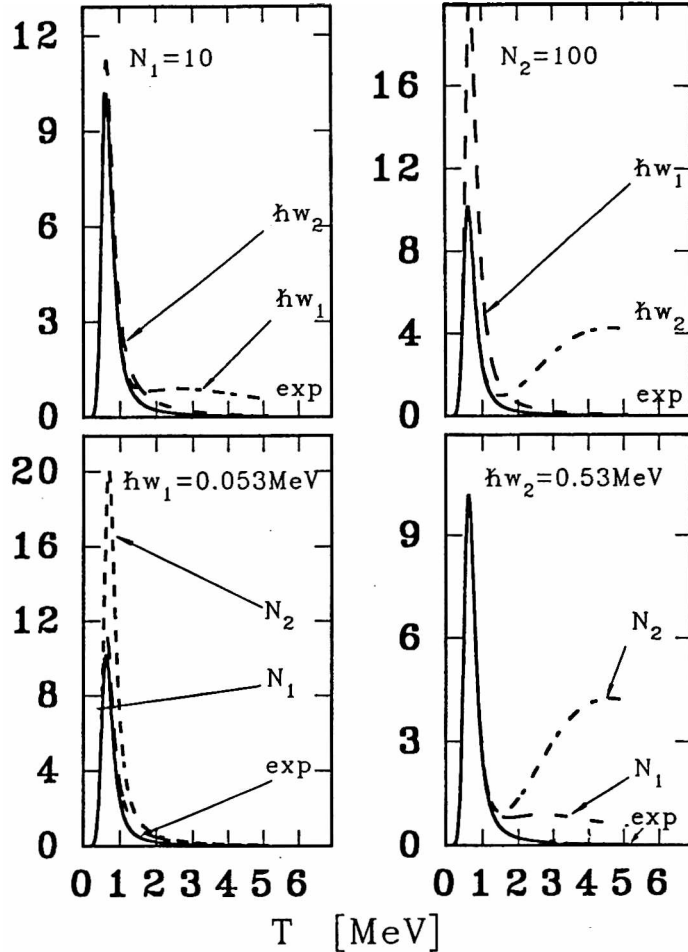


Figura 5.24 Calores específicos para el ^{208}Pb . El significado de las curvas es el mismo que el de la figura 5.23.

De nuevo en ambos casos aparece el pico de bajas T y el pico extendido de altas T . Como se ha dicho antes, el pico de bajas T está asociado a la ocupación térmica del primer estado excitado del espectro mientras que el pico extendido a T mayor, evoluciona como una función del número de estados incluido y como una función del espaciamiento entre ellos. El dominio efectivo para los valores de T que pueden usarse en conjunto con el espectro de energía experimental aparece mucho más restringido que lo esperado. El valor “experimental” de $\langle E \rangle$ se determina exclusivamente por el espectro de baja energía y esto establece un pico de baja energía del C , simplemente debido al hecho de tratarse de

un espectro discreto y el hecho de que un cambio de $\langle E \rangle$ con la temperatura ocurra sólo cuando el primer estado excitado está poblado.

Se ha analizado en detalle la dependencia térmica del C , para los casos de ^{160}Er . Los resultados se ven en las figuras 5.25 y 5.26.

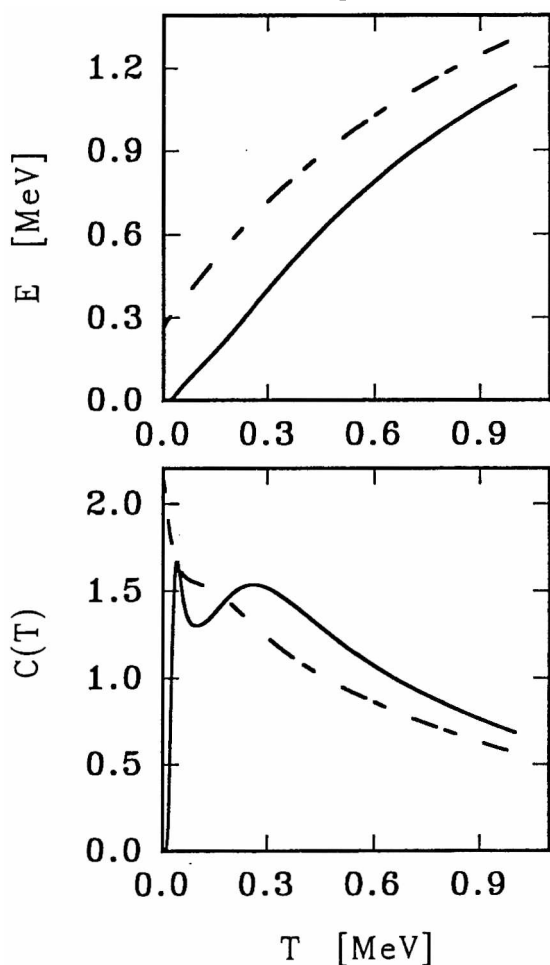


Figura 5.25 Energía de excitación promedio $\langle E \rangle$ y calor específico $C(T)$ como función de la temperatura nuclear T para el ^{160}Er . Con líneas sólidas (a trazos) se representan los resultados de cálculos, incluyendo (excluyendo) el primer estado excitado del ^{160}Er .

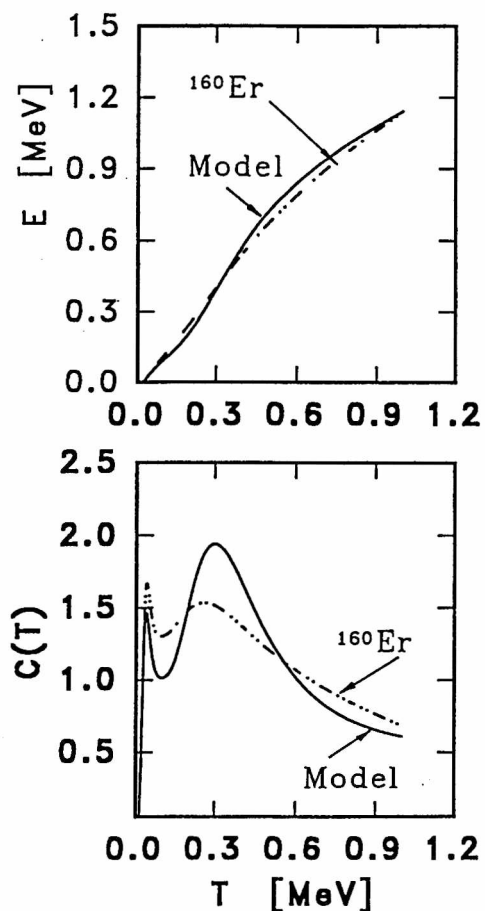


Figura 5.26 Energía de excitación promedio $\langle E \rangle$ y calor específico $C(T)$ como función de la temperatura nuclear T para el ^{160}Er , calculados con la función de partición empírica (líneas de a trazos y puntos) y con un modelo esquemático que incluye grados de libertad rotacionales y vibracionales (línea continua).

Los valores de C obtenidos con los niveles experimentales de energía son comparados con los obtenidos usando un modelo esquemático que incluye niveles rotacionales de baja energía y estados vibracionales de mayor energía. El acuerdo entre los experimentos y las predicciones del modelo es bueno. Los efectos de ocupación térmica del primer estado excitado afectan la dependencia con T de la energía de excitación y consecuentemente C . Como muestra la figura 5.25 el pico de bajas T se corre hacia $T = 0$ cuando el primer estado excitado es removido. Este es un efecto particularmente importante ya que el pico resultante

podría ser interpretado erróneamente como una señal de una “transición de fase” ⁷³⁾.

5.5.3 El teorema de Levinson y su aplicación al cálculo de calores específicos nucleares.

Como ha sido establecido por ^{55,68,69)}, es completamente necesario incluir el continuo ya que éste se ocupa a T elevadas. La inclusión del continuo en cálculos de estructura nuclear a T finita, en la forma presentada por Dean y Mosel ^{68,69)} usando el teorema de Levinson, produce una tendencia a decrecer el C al aumentar T . Es decir, que para un número relativamente pequeño de estados incluidos en la función de partición sumando el continuo representado como una integral sobre una densidad de estados discretizada, hace que siempre aparezca un pico extendido en C ⁴⁷⁾. Otra vez, este pico no tiene que ver con ninguna clase de “transición de fase” como se ha discutido antes.

Núcleo	N	$T_{Max}[MeV]$	$E_{escala}[MeV]$	T_s	Ref.
^{18}O	47	0.950	1.98	0.48	91)
^{20}O	21	0.990	1.67	0.59	91)
^{18}Ne	16	0.730	1.89	0.39	91)
^{20}Ne	184	0.5	1.63	0.31	91)
^{24}Ne	6	0.8	1.98	0.40	90)
^{22}Mg	15	0.5	1.25	0.40	90)
^{24}Mg	109	0.5	1.37	0.36	90)
^{26}Mg	38	0.860	1.81	0.47	90)
^{26}Si	9	0.699	1.79	0.39	90)
^{28}Si	157	0.600	1.78	0.34	90)
^{38}K	64	0.849	4.21	0.20	90)
^{40}K	104	0.690	3.44	0.20	90)
^{38}Ar	56	0.850	2.17	0.39	90)
^{40}Ar	43	0.650	1.46	0.44	90)
^{42}Ar	29	0.489	1.21	0.40	90)
^{40}Ca	113	1.000	3.35	0.30	90)
^{42}Ca	158	0.630	1.84	0.34	90)
^{38}Cl	9	0.850	2.17	0.39	90)
^{160}Dy	26	0.028	0.087	0.33	92)
^{160}Er	27	0.040	0.126	0.32	92)
^{160}Gd	5	0.024	0.075	0.32	92)
^{160}Yb	6	0.090	0.243	0.37	92)
^{208}Pb	100	0.630	2.61	0.24	93)
^{238}U	28	0.014	0.045	0.31	94)
^{240}Pu	22	0.014	0.043	0.33	95)

Tabla 5.3 Temperaturas nucleares T_{Max} en MeV, correspondientes a los picos de bajas temperaturas. La energía del primer estado excitado, E_{escala} , y el cociente $T_s = T_{Max}/E_{escala}$ son tabulados para los núcleos incluidos en los cálculos. N es el número de niveles de energía experimentales de cada espectro.

Núcleo	N	$T_{Max}[MeV]$	$E_{escala}[MeV]$	T_s	Ref.
^{12}C	29	2.72	4.44	0.61	96)
^{14}O	8	1.70	5.21	0.33	96)
^{16}O	38	1.82	6.06	0.30	95)
^{20}Ne	184	1.69	8.45	0.20	90)
^{22}Ne	49	1.18	5.34	0.24	90)
^{22}Mg	15	0.99	5.00	0.20	90)
^{24}Mg	109	1.55	7.35	0.21	90)
^{160}Dy	26	0.32	1.43	0.22	92)
^{160}Er	27	0.26	1.008	0.24	92)
^{160}Gd	5	0.096	0.515	0.19	92)
^{160}Yb	6	0.38	1.736	0.22	92)
^{238}U	28	0.244	1.209	0.20	94)
^{240}Pu	22	0.200	1.002	0.20	95)

Tabla 5.4 Temperaturas nucleares T_{Max} en MeV, correspondientes a los picos anchos de altas temperaturas. La cantidad E_{escala} es el valor medio de la energía de excitación a $T = T_{Max}$ y T_s está dada por el cociente $T_s = T_{Max}/E_{escala}$. N es el número de niveles de energía experimentales de cada espectro.

5.6 Estudios sobre el continuo por aplicación del Teorema de Levinson y sus consecuencias estadísticas

En esta sección se presenta un estudio realizado a partir del teorema de Levinson ^{59,60)} aplicado al estudio del comportamiento térmico de núcleos ^{55,68,69)}. Se indicará que la no aparición de las “transiciones de fase” tales como las indicadas en la referencia ⁷³⁾ son consecuencia del teorema de Levinson ⁴⁸⁾ y del principio de causalidad ^{48,64)}. Este resultado puede introducirse como un teorema que se demuestra usando una relación explícita entre la derivada con respecto a la energía, los corrimientos de fase y los ceros de la función de partición.

Para probar esto, el punto central es el hecho de que la derivada de los corrimientos de fase con respecto de la energía están acotados por debajo. Esto es consecuencia de la validez de un principio general, el principio de causalidad ⁶⁴⁾. Para el caso presente estudiaremos un sistema de fermiones que se mueven en un potencial de un cuerpo independiente de la energía. Este resultado, eventualmente puede ser generalizado a otros sistemas donde pueda aplicarse el teorema de Levinson ⁵⁸⁾.

Como se ha mencionado, se estudia la posibilidad de que un núcleo finito tenga una “transición de fase”. Obviamente, el sentido de esta cuestión nace de la situación límite,

cuando el volumen del sistema crece macroscópicamente a densidad constante, esto es, en el límite termodinámico. La conexión entre ambas situaciones es, actualmente, un problema abierto y hace a la cuestión de cómo saber si un dado sistema mesoscópico en el límite termodinámico presentará transiciones de fase.

5.6.1 Teorema de Levinson y la función de partición nuclear

Aquí se estudiará la conexión del teorema de Levinson con la construcción de la función de partición nuclear. Como ya se sabe, a partir del teorema de Levinson se obtiene una relación entre el número de estado ligados y los estados de la parte continua del espectro de energía.

En su formulación usual el teorema de Levinson establece que para un sistema que posea un potencial bien comportado, $V(r)$, tal que produce los corrimientos de fase $\delta_{lj}(k)$ y donde N_{Blj} es el número de estados ligados con momento angular orbital l y momento angular total j , la diferencia entre los corrimiento de fase a energía cero e infinita está dada por

$$\delta_{lj}(0) - \delta_{lj}(\infty) = \pi N_{Blj} \quad (5.16)$$

Esto implica que $N_B + N_C = 0$, donde N_C es el número de estados ligados.

A fin de conectar este resultado con la termodinámica de un núcleo se parte del desarrollo virial de la ecuación de estado presentado en el Capítulo 4

$$\frac{Pv}{T} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l(T) \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} \quad (5.17)$$

El gran potencial (Capítulo 4), tomando la convención $\delta_{lj}(\infty) = 0$ resulta

$$\begin{aligned} \Omega_{NUC}(\alpha, \beta) = & -T \sum_k (\ln(1 + \exp(\alpha - \beta\epsilon_k)) - \ln(1 + e^\alpha)) \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{lj} (2j+1) \int_0^\infty d\epsilon \delta_{lj}(\epsilon) \frac{e^{\alpha-\beta\epsilon}}{1 + e^{\alpha-\beta\epsilon}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Con estos elementos se puede mostrar que para un sistema de fermiones que se mueven en un dado potencial medio, independiente de la energía, la gran función de partición no tiene ceros para valores reales positivos de la fugacidad z . Para probar esto se parte de la gran función de partición ^{68,69)}

$$\mathcal{Z}_{NUC}(\alpha, \beta) = \prod_k \left\{ \frac{1 + e^{\alpha-\beta\epsilon_k}}{1 + e^\alpha} \right\} \times \prod_{l,j} \exp \left\{ \frac{\beta}{\pi} (2j+1) \int_0^\infty \delta_{lj}(\epsilon) \frac{e^{\alpha-\beta\epsilon}}{1 + e^{\alpha-\beta\epsilon}} d\epsilon \right\} \quad (5.19)$$

La fugacidad z está relacionada con α por la relación $z = e^\alpha$, y ϵ_k es el autovalor de la energía. Sea R una región del plano complejo z donde $\mathcal{Z}_{NUC}(\alpha, \beta)$ puede ser extendida analíticamente. Reemplazando z en la ecuación previa se obtiene la función analítica

$$\mathcal{Z}_{NUC}(z, \beta) = \prod_k \left\{ \frac{1 + z e^{-\beta\epsilon_k}}{1 + z} \right\} \times \prod_{l,j} \exp \left\{ \frac{\beta}{\pi} (2j+1) \int_0^\infty \delta_{lj}(\epsilon) \frac{z e^{-\beta\epsilon}}{1 + z e^{-\beta\epsilon}} d\epsilon \right\} \quad (5.20)$$

El factor general del primer producto es

$$F_k(z, \beta) = \frac{1 + ze^{-\beta\epsilon_k}}{1 + z} \quad (5.21)$$

Sea z parametrizada como $z = a + ib$, donde a y b son números reales, y i es la unidad imaginaria. Reemplazando ésto en la última ecuación e igualando a cero se obtienen las siguientes raíces

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 \\ a_2 &= -e^{\beta\epsilon_k} \end{aligned} \quad (5.22)$$

En el límite cuando b tiende a cero se muestra que el primer producto no contiene raíces reales positivas, lo cual señala el efecto de que los estados ligados no contribuyen a producir ceros en la función de partición. Por otro lado, el segundo producto es, en principio, una parte no trivial ya que contiene un argumento que depende de la integral, esto es, de los corrimientos de fase $\delta_{lj}(\epsilon)$. Cada exponente se puede escribir como el logaritmo de una cierta función analítica de la fugacidad z , esto es, $G_{lj}(z)$, luego se lee

$$\ln [G_{lj}(z)] = \frac{\beta}{\pi} (2j + 1) \int_0^\infty \delta_{lj}(\epsilon) \frac{ze^{-\beta\epsilon}}{1 + ze^{-\beta\epsilon}} d\epsilon \quad (5.23)$$

Las únicas raíces posibles del segundo producto están dadas por la condición $\ln [G_{lj}(z)] \rightarrow -\infty$.

Es de notar que en el cálculo de los cumulantes W_2 ^{66,70,71}) se toma el límite cuando el volumen tiende a infinito y consecuentemente se puede aplicar el teorema de Yang-Lee. La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\ln [G_{lj}(z)] = z \frac{\beta}{\pi} (2j + 1) \left(\int_0^\infty \delta_{lj}(\epsilon) d\epsilon - \int_0^\infty \frac{\delta_{lj}(\epsilon)}{1 + ze^{-\beta\epsilon}} d\epsilon \right) \quad (5.24)$$

La extensión analítica de este factor no presenta ningún problema en el límite de ceros reales ya que esta función converge uniformemente en dicho límite. Debe tenerse presente que aunque para energías de partícula independiente $d\delta_{lj}(\epsilon)/d\epsilon$ se hace negativa, el principio de causalidad implica que no puede ser arbitrariamente grande y negativa ^{48,55,64}).

$$\frac{d\delta_{lj}(\epsilon)}{d\epsilon} > - \left\{ \frac{2\epsilon}{m} \right\}^{1/2} R_{pot} \quad (5.25)$$

donde R_{pot} y m son el alcance del potencial y la masa nuclear, respectivamente. Integrando la ecuación previa dos veces en ϵ se obtiene

$$\int_0^\infty \delta_{lj}(\epsilon) d\epsilon > \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left\{ \delta(0)\epsilon - \frac{4}{15} \sqrt{\frac{2}{m}} \epsilon^{5/2} R_{pot} \right\} \quad (5.26)$$

De esta forma, continuo no proporciona ningún cero a la gran función de partición. Por lo tanto, no hay ceros reales positivos de la función de partición $\mathcal{Z}_{NUC}(\alpha, \beta)$.

5.6.2 Estudio de transiciones de fase

Como aplicación del resultado anterior, se puede calcular el calor específico nuclear definido como

$$C(T) = \frac{1}{T^2} (\langle E \rangle^2 - \langle E^2 \rangle) \quad (5.27)$$

y como se ha visto la función de partición no presenta ninguna discontinuidad, una situación similar acontece para todas sus derivadas con respecto a la temperatura. Luego, las transiciones de fase no ocurren, al menos vistas en este contexto. De esta forma y para los sistemas estudiados y como una consecuencia del teorema de Levinson no se producen transiciones de fase en núcleos finitos.

Es muy común que un pico o “loma” aparezca en el calor específico de núcleos finitos. Con lo comentado más arriba, justamente no puede asociarse un transición de fase con esta clase de picos. En su lugar aparecen efectos de finitud como el efecto Schottky ⁴⁶).

5.7 Aplicación del teorema de Levinson a un hamiltoniano realista

5.7.1 Aplicación al pozo cuadrado unidimensional

Se ha aplicado el formalismo descrito en la sección que antecede a fin de entender las consecuencias que produce el continuo sobre las propiedades térmicas de un sistema. El caso de mayor simplicidad, es un potencial cuadrado en una dimensión, que obviamente no es un problema físicamente realista, sirve para estudiar cómo aparecen los efectos del continuo en un caso extremadamente sencillo.

El potencial es un pozo cuadrado dentro de una gran caja. Esto es $-V_0$ si $|x| \leq a$, cero para $a \leq |x| \leq L$ e infinito si $|x| > L$. Este es el caso de una caja cuadrada de longitud $2a$ dentro de una caja grande de longitud $2L$. En el caso presente se han tomado los valores $V_0 = 45 \text{ MeV}$, $a = 1.21A^{1/3}$ y $A = 208$. Se observa el efecto de un continuo "simulado" si se cambia la longitud de la caja grande.

En la figura 5.27 se muestran cuatro casos donde la longitud de la caja grande toma los valores $L = 10^2 \text{ fm}$, 10^6 fm , 10^9 fm y 10^{12} fm , respectivamente.

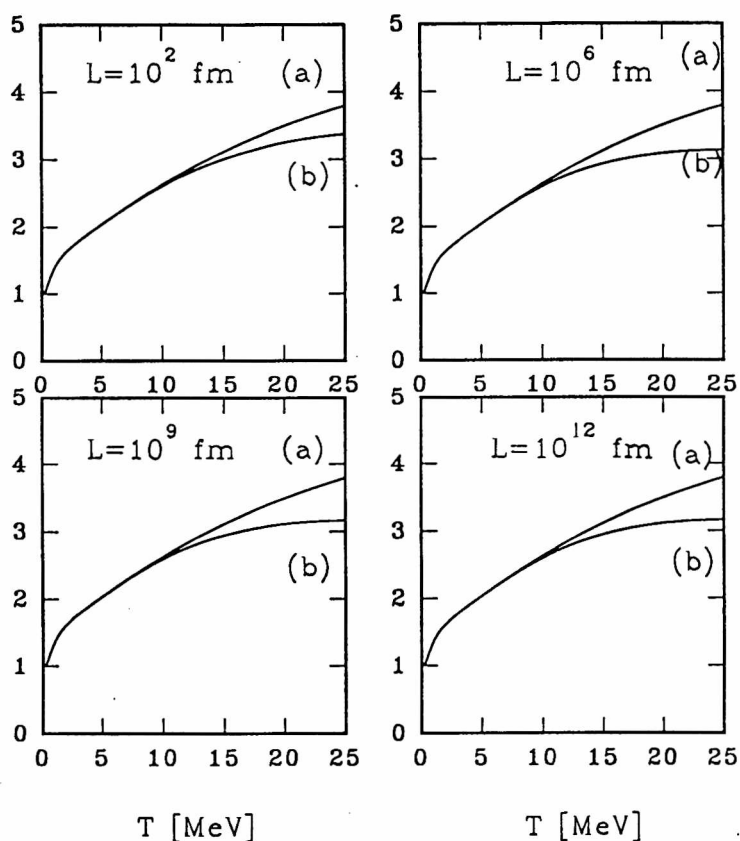


Figura 5.27 Función de partición canónica, Z como función de la temperatura T en MeV para el caso unidimensional. El pozo cuadrado de longitud a se coloca dentro de una caja de gran longitud L . Las figuras son indicadas con los valores de L , esto es, 10^2 fm , 10^6 fm , 10^9 fm y 10^{12} fm , respectivamente. Las curvas (a) incluyen los estados ligados. Las curvas (b) incluyen ambos tipos de estados.

La característica principal que emerge de esto es el hecho de que para L mayor que 10^6 fm , la contribución del continuo exhibe una saturación, esto significa que existe un valor de longitud de la caja grande a partir del cual los efectos del continuo son insensibles a la longitud de la misma. La segunda característica que se obtiene es que la inclusión del

continuo sólo tienen importancia en el dominio de altas T . Como es de esperar a partir del principio de causalidad en la región de bajas T , los efectos del continuo no son apreciables.

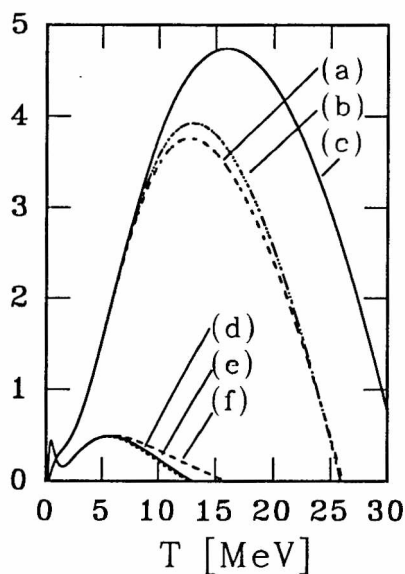


Figura 5.28 Energía promedio $\langle E \rangle$ como función de la temperatura T para los casos indicados en la figura 5.27. La energía límite cae a cero para los casos con $L \geq 10^6$ fm. $\langle E \rangle$ es calculada usando todos los estados, esto es, estados ligados y no ligados. Curvas (a), (b) y (c) corresponden a 10^6 , 10^9 y 10^{12} fm, respectivamente. Los calores específicos C_V se indican como función de la temperatura T en MeV. Para el primer caso la temperatura límite es mayor que 15 MeV, y para los últimos tres casos es menor que 15 MeV. Las curvas (d), (e) y (f) corresponden a 10^6 , 10^9 y 10^{12} fm, respectivamente.

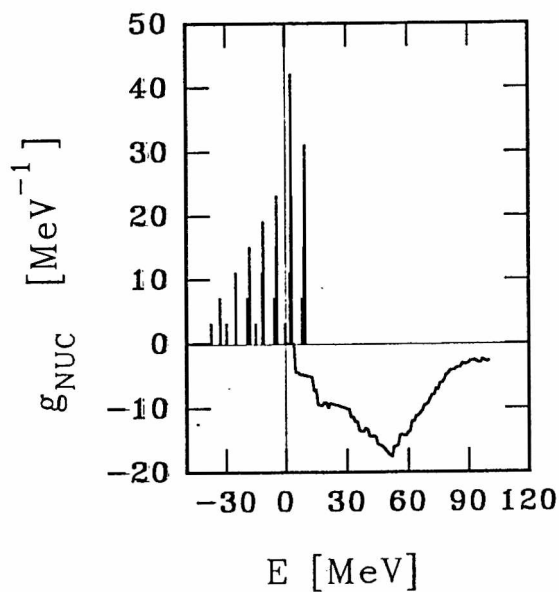


Figura 5.29 densidad de niveles dependiente nuclear $g_{NUC}(E)$ en MeV^{-1} en función de la energía en MeV, para un caso realista, esto es, el potencial de Woods-Saxon para el ^{208}Pb . Las líneas verticales son los estados ligados, la parte negativa de la densidad de niveles corresponde a los estados del continuo calculados con los corrimientos de fase.

En la figura 5.28 se presentan los casos de la figura 5.27, excepto para $L = 10^2$ fm. Se ha calculado el valor promedio de la energía de excitación E como una función de la temperatura T .

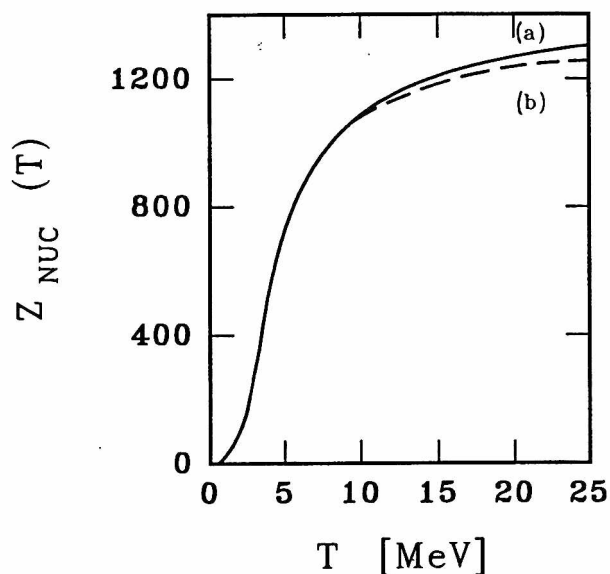


Figura 5.30 Función de partición nuclear $Z_{NUC}(T)$ como función de la temperatura T en MeV. Curva (a) indica la contribución de los estados ligados sólomente. Curva (b) muestra la contribución de los estados ligados y los estados del continuo para un potencial de Woods-Saxon.

La “loma” del primer caso es mayor que en el resto y tiene lugar a altas temperaturas. Para los casos en que la longitud de la caja es suficientemente grande la curva no cambia. Debido a que en la figura 5.28 se grafica el calor específico para los casos indicados en la figura previa y para T cercanas a los 15 MeV el calor específico se anula, se espera que en este modelo exista una temperatura límite. A temperaturas altas los calores específicos muestran una “loma” centrada aproximadamente en $T = 6$ MeV.

5.8 El potencial de Woods-Saxon

En esta sección se estudia un caso realista utilizando el potencial de Woods-Saxon que se escribe en la sección (2.3.3)

El potencial de Woods-Saxon ha sido diagonalizado en la base del oscilador armónico. La figura 5.29 muestra la dependencia de la densidad de niveles $g_{NUC}(E)$ calculada con la expresión (4.96). La contribución de la parte continua es negativa, como consecuencia del teorema de Levinson. Se ha calculado la función de partición $\mathcal{Z}_{NUC}(\alpha, \beta)$ como se muestra en la figura 5.30, excluyendo la parte continua es la curva (a), e incluyendo la parte continua, curva (b). La segunda curva se separa cayendo de la curva (a) para temperaturas elevadas. Esto es una consecuencia del principio de causalidad (en forma similar a lo que ya se describió en el caso de una dimensión).

Capítulo 6

Conclusiones generales

6.1 Aspectos fenomenológicos

A partir de las aplicaciones efectuadas al cálculo del parámetro de densidad de niveles nuclear se pueden establecer las conclusiones que se indican:

- El análisis de los experimentos indica que no se puede interpretar la relación entre la temperatura nuclear y la energía de excitación usando un factor de escala constante.
- Los resultados de la inversa del parámetro de densidad de niveles nuclear, obtenidos en el modelo de evaporación nuclear mediante una energía de separación de partículas dependiente de la temperatura, son consistentes con los datos experimentales.
- El corrimiento de la temperatura del cero de la barrera de fisión hacia temperaturas menores, que se obtiene usando un MGL que incluye conjuntos de nucleones ^{34,40,42}, es consistente con la evidencia sobre temperaturas límites extraídas de los experimentos.

El esquema emergente del presente análisis se puede resumir como sigue:

i) Una descripción consistente con la dependencia térmica observada del parámetro de densidad de niveles nuclear requiere el uso de energías de separación dependientes de la temperatura.

ii) La dependencia con la temperatura del $a(T)$, a temperaturas relativamente bajas, se puede explicar a través del colapso de las interacciones residuales.

iii) La dependencia térmica del $a(T)$, a relativamente altas T , puede explicarse por cambios de campo medio. Como una conjetura se pueden introducir efectos de empaquetamiento de grupos de nucleones en analogía con la dependencia térmica de las barreras de fisión para explicar la tendencia del parámetro de densidad de niveles.

iv) Los resultados experimentales muestran que para $T = 3$ a 4 MeV se produce un cambio en la dependencia con T del $a(T)$.

En lo que respecta a la fenomenología de calores específicos nucleares para todos los casos estudiados, el C presenta picos de bajas T y “lomas” a altas T . Los primeros se pueden atribuir a la ocupación térmica del primer estado excitado mientras que las “lomas” se deben al número finito de estados incluido en la función de partición. Ninguno de estos picos representa una prueba sobre una “transición de fase”. Como ya se ha mencionado, la característica principal mostrada por el C es la aparición de una “loma”. Esto está de acuerdo completamente con las implicaciones del teorema de Levinson. Se puede atribuir al hecho de que la función de partición fenomenológica, construida con estados experimentales y completada con un continuo, siempre da un máximo (o al menos un cambio de pendiente) en la dependencia con T de la $\langle E \rangle$.

Para el conjunto de núcleos incluidos en estos cálculos la universalidad de la escala de temperatura asociada al pico de alta T está relacionado y es cercano al de la referencia ⁴⁵⁾.

Basado sobre estas evidencias, como sale de los datos experimentales, se puede descartar que los picos observados en C de núcleos finitos sean posibles “transiciones de fase”.

6.2 Aspectos microscópicos

En lo que respecta al estudio de núcleos livianos de la capa $2s1d$ se presentan evidencias en contra de la aparición de la llamadas “transiciones de fase de forma” por Miller et al. ⁷³⁾. Las conclusiones se basan en cálculos desarrollados con el modelo SU_3 y son, obviamente, válidas en este esquema. La comparación de los resultados obtenidos con el modelo SU_3 y con interacciones realistas ha probado que las propiedades principales del espectro de los núcleos livianos calculadas con interacciones realistas son muy bien reproducidas con el modelo SU_3 . En el caso presente se muestra que la aparición de un pico extendido en el calor específico se debe a un efecto de tamaño finito y no a una “transición de fase” ^{46,47)}. En este caso y tomando el valor del momento cuadrupolar intrínseco como parámetro de orden la dependencia térmica no muestra las características esperadas en una “transición de fase”.

La inclusión de la parte continua del espectro de energía por aplicación del teorema de Levinson implica que para que se produzca una transición de fase en un sistema dado, es necesario preguntarse por el comportamiento de la ecuación de estado del sistema, la cual es una función de las llamadas integrales de “clusters”, ó de los “cumulantes”, ó de los coeficientes viriales a_l , todas estas son funciones de la temperatura. Luego, dando el

potencial $V(r)$ es posible calcular estas funciones y con las mismas, puede saberse si ocurrirán transiciones de fase. Todo esto es aplicable a sistemas infinitos.

Como es bien sabido, no puede calcularse la ecuación de estado exacta de un núcleo real debido a que no se sabe cuáles son todos los estados accesibles. Uno sí puede preguntarse si la función de partición construida con los autoestados de energía de un hamiltoniano con un potencial determinado, por ejemplo el potencial de Woods-Saxon, tiene asociado o no una transición de fase. Para la función de onda de partícula independiente en un potencial central la respuesta es no, no se producen las transiciones de fase indicadas en la referencia 73).

En conclusión, se ha estudiado un formalismo para investigar sobre la posibilidad de que se produzcan “transiciones de fase” en sistemas finitos. Se descarta la posibilidad de asociar “transiciones de fase” a los picos y “lomas” de los calores específicos nucleares, y se sostiene la conjetura de que la posible “transición de fase” es la que implicaría el cambio de campo medio y que resulta como consecuencia del estudio de modelos teóricos comparados con la fenomenología de colisiones de iones pesados.

El efecto del continuo es la aparición de temperaturas límites en la región de altas temperaturas. Esto es consecuencia del principio de causalidad. Para temperaturas realistas, donde es posible encontrar núcleos finitos compuestos, el comportamiento térmico es gobernado por la estructura de los estados ligados, y en esa zona el continuo no introduce ninguna consecuencia importante.

Agradecimientos

Creo necesario expresar mi agradecimiento a las personas y entidades que, de una u otra forma, me allanaron el camino para concretar esta Tesis Doctoral.

Agradezco al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata por ser el lugar donde desarrollé este trabajo.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por el financiamiento de mi trabajo a través de las Becas de Iniciación (1992-1994) y Perfeccionamiento (1994-1996) que me ha otorgado.

Al Grupo de Física Nuclear Teórica encabezado por el Prof. Dr. O. Civitarese. En particular, agradezco al Profesor Civitarese por su trabajo en la dirección de mi Tesis, por el asesoramiento en la investigación y en los aspectos académicos en general.

A los miembros del Grupo antes mencionado: Prof. Dr. A. De Paoli, Dra. M. Reboiro, Dr. R. Aguirre, Dr. E. Bauer, Dr. M. Rocca. A los profesores del Departamento de Física con los que tuve la oportunidad de tomar cursos de postgrado e interactuar durante estos años: Profs. Drs. H. Falomir, R. Gamboa Saraví, M. Santángelo y F. Schaponik.

A mis colegas y compañeros de estudios M. De Francia, J. Edelstein, J. Ellena, S. Granieri, D. Krmpotić y C. Nuñez por su buena predisposición para las discusiones sobre física y por su amistad.

A las personas que con su ejemplo me dieron motivos para iniciar este camino, hace ya mucho tiempo, al Sr. Adam S'velinger, al Dr. E. Wood y a la Prof. A. Kant.

A mis Padres que me brindaron su respaldo, a quienes agradezco muy especialmente.

Referencias

- 1) K. Hagel et al.; Nucl. Phys. **A 486** (1988) 429.
- 2) G. Nebbia et al.; Phys. Lett **B 176** (1986) 20.
- 3) D. Hilscher et al.; Phys. Rev. **C 36** (1987) 208.
- 4) R. Wada et al.; Phys. Rev. **C 39** (1989) 497.
- 5) A. Chbihi et al.; Phys. Rev. **C 43** (1991) 666.
- 6) M. Gonin et al.; Phys. Lett. **B 217** (1989) 406.
- 7) F. Benrachi et al.; Phys. Rev. **C 48** (1993) 2340.
- 8) M. Gui et al.; Phys. Rev. **C 48** (1993) 1791.
- 9) M. Gonin et al.; Nucl. Phys. **A 495** (1989) 139c.
- 10) H. Rossner et al.; Phys. Rev. **C 40** (1989) 2629.
- 11) M. Gonin et al.; Phys. Rev. **C 42** (1990) 2125.
- 12) D. Hilscher et al.; Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1099.
- 13) M. Kildir et al.; Phys. Rev. **C 51** (1995) 1873.
- 14) K. Knoche et al.; Phys. Rev. **C 51** (1995) 1909.
- 15) J. Gomez del Campo et al.; Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 290 y J. Gomez del Campo et al.; Phys. Rev. **C 43** (1991) 2689.
- 16) L. G. Sobotka et al; Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2187; L. G. Sobotka et al; Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 2004 y J. Brzychczyk et al; Phys. Rev. **C 47** (1993) 1553.
- 17) J. Pochodzalla et al.; Phys. Rev. Lett. (1995), en prensa.
- 18) M. B. Tsang et al.; Preprint of Michigan State University, National Superconducting Cyclotron Laboratory, MSUCL-983, November 1995.
- 19) V. S. Ramamurthy; Proceedings of the Workshop on Applied Nuclear Theory and Nucl. Model Calc. for Nucl. Tech. Applic. ICTP(1988).
- 20) V. N. Strutinsky; Nucl. Phys. **A 122** (1968) 1.
- 21) M. Brack et al.; Rev. Mod. Phys. **44** (1972) 320.

- 22) M. Brack et al.; Nucl. Phys. A **207** (1973) 401.
 J. Bestrosvany and S. Levit, Phys. Lett. B **217** (1989) 1.
- 23) Aa. Bohr and B. R. Mottelson; Nuclear Structure V.II, W. A. Benjamin, Inc. NY, 1969.
- 24) S. K. Kataria, Nucl. Phys. A **437** (1985) 397.
- 25) O. Civitarese et al.; Zeits.Phys. A **309** (1982) 177.
- 26) O. Civitarese et al.; Zeits.Phys. A **311** (1983) 317.
- 27) G. Bozzolo, O. Civitarese and J. P. Vary; Phys. Rev. C **37** (1988)1240.
- 28) G. Batko, O. Civitarese and A. L. De Paoli; Phys. Rev. C **36** (1987) 435.
- 29) O. Civitarese, G. G. Dussel and R. P. J. Perazzo ; Nucl. Phys. A **404** (1983) 15.
- 30) O. Civitarese and A. L. De Paoli; Nucl. Phys. A **440** (1985) 480.
- 31) N. Vinh Mau and D. Vauterin; Nucl. Phys. A **445** (1985) 245.
- 32) Y. Abe, N. Cajan, M. Ohta and T. Wada; (1990) 2nd IN2P3-RIKEN Symp. on Heavy-Ion Collisions (Obernai).
- 33) E. Vogt (1968) Advanced Nuclear Physics vol. 1, ed. M. Baranger and E. Vogt (New York: Plenum) p. 261.
- 34) O. Civitarese and M. Schvellinger; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **20** (1994) 1933.
- 35) E. Suraud, P. Schuck and R. W. Hasse; Phys. Lett. B **164** (1985) 212.
- 36) R. W. Hasse and P. Schuck; Phys. Lett. B **179** (1986) 313.
- 37) D. J. Morrisey, W. Beneson and W. Friedman; Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **44** (1994) 27.
- 38) J. B. Natowitz et al; Phys. Rev. C **48** (1993) 2074.
- 39) J. B. Natowitz et al; Nucl. Phys. A **538** (1992) 263c.
- 40) O. Civitarese, M. Schvellinger and A. P. Zuker; Proc. XV Workshop on Nucl. Phys. Bs. As , Ed. by C. P. Massolo et al; Word Scientific (1992) 299.
- 41) C. Guet, E. Strumberger and M. Brack; Phys. Lett. B **205** (1988) 427.
- 42) M. Cauvin, V. Gillet, F. Soulmagnon and M. Danos, Nucl. Phys. A **361** (1981) 192.

- 43) A. Cortes, R. U. Haq and A. P. Zuker, *Phys. Lett.* **B 115** (1982) 1.
- 44) F. S. Chang and A. P. Zuker, *Nucl. Phys.* **A 198** (1972) 417; F. S. Chang and A. P. Zuker, *Ann. Phys.* **95** (1975) 90.
- 45) O. Civitarese, G. G. Dussel and A. P. Zuker; *Phys. Rev.* **C40** (1989) 2900.
- 46) O. Civitarese and M. Schvellinger, *Phys. Rev.* **C 49** (1994) 1976.
- 47) O. Civitarese and M. Schvellinger (1995), enviado para su publicación al *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*.
- 48) O. Civitarese and M. Schvellinger (1996), a ser enviado para su publicación al *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*.
- 49) H. Feshbach; *Phys. Today* **40** (1987) 9.
- 50) J. P. Elliot and T. H. R. Skyrme; *Proc. Roy. Soc. A* **232** (1955) 561.
- 51) J. P. Elliot; *Proc. Roy. Soc. London A* **245** (1958) 128.
- 52) M. Harvey; *Advances in Nuclear Physics*, edited by M. Baranger (Plenum Press, New York 1968), Vol. 1 p. 67.
- 53) D. J. Rowe; *Nuclear Collective Motion*; Butler and Tanner Ltd. Frome and London (1970).
- 54) Aa. Bohr and B. R. Mottelson; *Nuclear Structure V.I*, W. A. Benjamin, Inc. NY, 1969.
- 55) W. A. Fowler, Ch. A. Engelbrecht and S. E. Woosley; *Ap. J.* **226** (1978) 984 y D. L. Tubbs and S. E. Koonin; *Ap. J.* **232** (1979) L59.
- 56) M. Brack, C. Guet and H.-B. Haakanson; *Phys. Rep.* **123** (1985) 263.
- 57) P. Bonche, S. Levit and P. Vautherin; *Nucl. Phys. A* **436** (1985) 265.
- 58) N. Levinson; *Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat. Fys. Medd.* **25** (1949) 9 y R. G. Newton ; *Scattering Theory of Waves and Particles*, Second Edition, Springer-Verlag N.Y. 1982.
- 59) M. Sassoli de Bianchi; *J.Math. Phys.* **35** (1994) 2719.
- 60) J. M. Jauch ; *Helv. Phys. Acta* **30** (1957) 143.
- 61) L. D. Faddeev ; *Am. Math. Soc. Transl.* **2** (1964) 139.
- 62) P. Deift and E. Trubowitz ; *Commun. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 121.

- 63) Ph. A. Martin ; Acta Phys. Austriaca Suppl. **23** (1981) 159.
- 64) E. P. Wigner; Phys. Rev. **98** (1955) 145.
- 65) R. G. Newton ; J. Math. Phys. **1** (1960) 319.
- 66) R. K. Pathria; Statistical Mechanics, Pergamon Press Oxford (1986) y K. Huang; Statistical Mechanics, John Wiley & Sons (1987)
- 67) A. Messiah ; Mecánica Cuántica, Tomo 1 Editorial Tecnos, Madrid 1983.
- 68) U. Mosel ; Phys. Lett. **B 46** (1973) 8.
- 69) R. Dean and U. Mosel ; Z. Phys. **A 322** (1985) 647.
- 70) E. Beth and G. Uhlenbeck ; Physica **4** (1937) 915.
- 71) G. Uhlenbeck and E. Beth ; Physica **3** (1936) 729.
- 72) M. Abramowitz and I. A. Stegun; Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc. NY, 1970.
- 73) H. G. Miller, R. M. Quick, G. Bozzolo and J. P. Vary, Phys. Lett. **168 B** (1986) 13; H. G. Miller, R. M. Quick and B. J. Cole, Phys. Rev. **C 39** (1989) 1599; B. J. Cole, R. M. Quick and H. G. Miller, Phys. Rev. **C 40** (1989) 1599 y B. J. Cole, R. M. Quick and H. G. Miller, Phys. Lett. **63** (1989) 1922.
- 74) J. Dukelsky et al.; Phys. Rev. **C 44** (1991) 2872.
- 75) G. Ripka, Advances in Nuclear Physics, edited by M. Baranger (Plenum Press, New York 1968), Vol. 1 p. 183.
- 76) R. Perez and J. Flores; Nucl. Data **A 4** (1968) 265.
- 77) S. Shlomo and J. B. Natowitz; Phys. Lett. **B 252** (1990) 1987.
- 78) S. Shlomo and J. B. Natowitz; Phys. Rev. **C 44** (1991) 2878.
- 79) P. F. Bortignon and C. H. Dasso; Phys. Lett. **B 189** (1987) 381.
- 80) A. D'Arrigo, G. Giardina and A. Taccone; Phys. Lett **B 262** (1991) 1.
- 81) R. W. Hasse and P. Schuck; Phys. Lett. **179 B** 313 y E. Suraud, P. Schuck and R. W. Hasse, Phys Lett **164 B** 212.
- 82) L. Henden et al.; Annual Report, Section for Nuclear Physics and Energy Physics, University of Oslo, 1992, pag.28.

- 83) E. Suraud, Ch. Grégoire and B. Tamain ; Prog. Part. Nucl. Phys. **23**, Ed. by A. Faessler (1989) pag. 357.
- 84) M. K. Bannerjee and C. Levinson; Phys. Rev. **130** (1963) 1036.
- 85) P. Bonche, S. Levit and P. Vautherin; Nucl. Phys. **A 427** (1984) 278.
- 86) M. Brack, G. Guet and H. K. Hakansson; Phys. Rev. **C 123** (1985) 276.
- 87) J. Bartel, M. Brack, C. Guet and H. B. Hakansson; Phys. Lett. **B 139** (1984) 1.
- 88) M. Barranco and J. Treiner; Nucl. Phys. **A 351** (1981) 269.
- 89) G. Sauer, H. Chandra and U. Mosel; Nucl. Phys. **A 264** (1976) 221.
- 90) P. M. Endt and C. van der Leun; Nucl. Phys. **A 310** (1978) 1.
- 91) F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. **A 392** (1983) 1.
- 92) C. W. Reich; Nucl. Data Sheets **68** (1983) 205.
- 93) M. J. Martin; Nucl. Data Sheets **47** (1986) 797.
- 94) Y. A. Ellis; Nucl. Data Sheets **B 4** (1970) 635.
- 95) M. R. Schmorak; Nucl. Data Sheets **B 4** (1970) 661.
- 96) F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. **11** (1959) 1.