



**Universidad Nacional de La Plata**  
*Facultad de Ciencias Exactas*  
*Departamento de Física*

**Análisis de periodicidades en propagación libre del  
campo difractado utilizando el formalismo de Walsh-  
Hadamard**

Tesis para optar al título de:

Doctor en Ciencias

Presentada por:

**Oswaldo Juan Trabocchi**

Director: Dr. Mario Garavaglia

Co-Director: Dr. Enrique E. Sicre

Realizada en el Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

**1997**

# Contenido

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUCCIÓN</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1      | Antecedentes . . . . .  | 4         |
| 1.2      | Motivaciones y objetivos de esta tesis . . . . .                        | 5         |
| 1.3      | Resumen de la tesis . . . . .   | 7         |
| <b>2</b> | <b>EFFECTOS TALBOT Y LAU</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1      | Efecto Talbot . . . . .   | 9         |
| 2.1.1    | Efecto de "walk-off" . . . . .  | 11        |
| 2.1.2    | Condiciones necesarias y suficientes . . . . .                          | 14        |
| 2.1.3    | Otros enfoques del efecto Talbot . . . . .                              | 17        |
| 2.2      | Efecto Lau . . . . .  | 17        |
| 2.2.1    | Enfoque en base a la óptica geométrica . . . . .                        | 17        |
| 2.2.2    | Enfoque en base a la teoría de la coherencia . . . . .                  | 19        |
| 2.2.3    | Otros enfoques del efecto Lau . . . . .                                 | 23        |
| 2.3      | Aplicaciones de los efectos Talbot y Lau . . . . .                      | 24        |
| 2.3.1    | Aplicaciones de los efectos Talbot y Lau al filtrado espacial . . . . . | 26        |
| <b>3</b> | <b>FUNCIONES DE WALSH: PROPIEDADES DEL CAMPO DIFRACTADO</b>             | <b>30</b> |
| 3.1      | Introducción . . . . .  | 30        |
| 3.2      | Definiciones Matemáticas . . . . .                                      | 31        |
| 3.2.1    | Frecuencia y secuencia . . . . .  | 31        |
| 3.2.2    | Las funciones de Rademacher . . . . .                                   | 31        |
| 3.2.3    | Las funciones de Walsh . . . . .  | 33        |
| 3.2.4    | Transformada de Walsh-Hadamard . . . . .                                | 35        |
| 3.3      | Propiedades difractivas de las funciones de Walsh . . . . .             | 36        |
| 3.3.1    | Iluminación coherente . . . . .   | 36        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.3.2    | Iluminación incoherente . . . . .  | 39        |
| 3.4      | Funciones transmitancia generales. Aplicaciones al filtrado espacial . . . . .             | 42        |
| <b>4</b> | <b>MÚLTIPLES INTERACCIONES: APERTURA-CAMPO DIFRACTADO</b>                                  | <b>44</b> |
| 4.1      | Propiedades difractivas . . . . .  | 44        |
| 4.2      | Arreglo de múltiples aperturas como dispositivo de filtrado espacial . . . . .             | 51        |
| 4.3      | Resultados . . . . .   | 51        |
| 4.4      | Conclusiones . . . . .   | 59        |
| <b>5</b> | <b>MÚLTIPLES INTERACCIONES BAJO ILUMINACIÓN INCOHERENTE</b>                                | <b>61</b> |
| 5.1      | Propiedades de la coherencia espacial . . . . .  | 61        |
| 5.2      | Arreglo de múltiples aperturas como dispositivo de filtrado espacial incoherente . . . . . | 73        |
| 5.3      | Resultados . . . . .   | 74        |
| 5.4      | Conclusiones . . . . .   | 80        |
| <b>6</b> | <b>PROPIEDADES DIFRACTIVAS DE ESTRUCTURAS PREFRACTÁLICAS</b>                               | <b>84</b> |
| 6.1      | Introducción . . . . .   | 84        |
| 6.2      | Las barras de Cantor . . . . .   | 85        |
| 6.3      | Transformada de Walsh-Hadamard de las barras de Cantor . . . . .                           | 86        |
| 6.4      | Campo difractado por las barras de Cantor y autosimilaridad . . . . .                      | 88        |
| 6.5      | Resultados . . . . .   | 92        |
| 6.6      | Conclusiones . . . . .   | 93        |
| <b>7</b> | <b>OTRAS APLICACIONES EN BASE AL ENFOQUE WALSH-HADAMARD</b>                                | <b>99</b> |
| 7.1      | Introducción . . . . .   | 99        |
| 7.2      | Propiedades de moiré de las funciones de Walsh . . . . .                                   | 99        |
| 7.2.1    | Introducción . . . . .   | 99        |
| 7.2.2    | Propiedades de moiré de las funciones de Walsh . . . . .                                   | 100       |
| 7.2.3    | Determinación de curvas de nivel utilizando funciones de Walsh . . . . .                   | 104       |
| 7.3      | Interpretación de los desplazamientos diádicos en base a permutaciones . . . . .           | 107       |
| 7.3.1    | Introducción . . . . .   | 107       |
| 7.3.2    | Or exclusivo y desplazamientos diádicos . . . . .  | 108       |
| 7.3.3    | La correlación diádica . . . . .   | 114       |
| 7.3.4    | La correlación diádica y el análisis de Walsh-Hadamard . . . . .                           | 118       |
| 7.4      | Conclusiones . . . . .   | 121       |



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Antecedentes

Es conocido que el campo difractado por una transparencia periódica e infinita bajo iluminación coherente y monocromática resulta también ser periódico tanto transversal como longitudinalmente. Este fenómeno llamado efecto Talbot o de autoimágenes fue descubierto por H. F. Talbot en el siglo pasado [1], y da origen a la aparición, por simple propagación de la luz en el espacio libre, de réplicas equiespaciadas de la apertura a lo largo del eje óptico llamadas autoimágenes. El valor del espaciado entre autoimágenes sucesivas, para el caso de una iluminación normal (haz colimado), sólo depende de la longitud de onda de la iluminación y del período de la apertura. Para el caso de una fuente puntual de iluminación situada a distancia finita aparece también una dependencia con la curvatura del haz incidente. Lógicamente, si la fuente de iluminación no fuera monocromática, se generará una serie de patrones de distintos colores y distintas distancias de equiespaciado. La primera explicación teórica del fenómeno la delineó Lord Rayleigh [2], en base al estudio de la interferencia de rayos difractados por la red.

El primer reporte del análisis del fenómeno de las autoimágenes o "imágenes de Fourier" mediante simulaciones computacionales tiene lugar en una publicación de G. L. Rogers [3], quien consideró a las aperturas como redes lineales finitas.

J. T. Winthrop y C. R. Worthington [4] realizaron un estudio analítico de las "imágenes de Fresnel", que corresponden a las intensidades de planos intermedios a los de Talbot, para aperturas periódicas bidimensionales y bajo iluminación de fuentes espacialmente coherentes e incoherentes situadas a distancias finitas. Consideraron los ejes de periodicidad de las transparencias no necesariamente ortogonales, encontrando expresiones generales para las distancias de autoimagen. Tiempo después se realizaron aportes a los métodos de magnificación en los trabajos de D. Joyeux y D. Cohen-Sabban [5, 6] tomando

en cuenta cuidadosamente la compatibilidad de las magnitudes en juego con las aproximaciones utilizadas para los cálculos analíticos, como es el caso de la aproximación parabólica inherente en la aproximación de Fresnel de la difracción.

Si bien las aperturas originalmente tratadas en el estudio del efecto de autoimágenes fueron periódicas, éstas no son las únicas que verifican este fenómeno. W. Duane Montgomery [7] dedujo las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer un objeto plano e infinito bajo iluminación normal y monocromática para que genere réplicas en la amplitud periódicamente distribuidas a lo largo de la dirección de iluminación. Este análisis demostró que las transparencias periódicas son un caso particular de este conjunto de objetos.

En el caso que la fuente de iluminación sea espacialmente incoherente, ocurre un fenómeno relacionado con el efecto Talbot que fue descubierto a mediados del presente siglo por E. Lau [8]. En dicha experiencia, detrás de la red apertura se sitúa una réplica de la misma observándose que para ciertas distancias discretas de separación entre las redes el dispositivo produce un diagrama de franjas en el infinito; en otras palabras, se genera coherencia espacial. Esta distancia, como en el caso del efecto Talbot, también está determinada por la longitud de onda de la radiación iluminante y el período de las redes. Si la iluminación se realizara con una fuente extensa y policromática se producen una serie de franjas coloreadas en el infinito.

El fenómeno es denominado efecto Lau, y puede verificarse aún para redes periódicas no idénticas aunque con ciertas relaciones discretas entre sus frecuencias espaciales (efecto Lau generalizado) [9, 10].

Además de la explicación proporcionada por el propio Lau, existen diversos enfoques que justifican este efecto. Entre otros, Jahns y Lohmann [11] utilizaron la teoría escalar de la difracción, los trabajos de Gori [10], y de Sudol y Thompson [12, 13], se basan en la teoría de la coherencia, mientras que Patorski lo interpretó como la superposición incoherente de múltiples efectos de autoimágenes [14, 15].

Los fenómenos Talbot y Lau tienen su base en el acoplamiento entre las periodicidades laterales y axiales de los campos difractados [16-19]. Las fuertes analogías entre ambos efectos llevó a diversos investigadores a intentar enmarcarlos dentro de una misma teoría [20-22].

## 1.2 Motivaciones y objetivos de esta tesis

La importancia del estudio de los efectos Talbot y Lau radica en sus posibilidades de utilización en procesadores ópticos sencillos y versátiles. Son innumerables sus aplicaciones a la interferometría, espectrometría, técnicas de filtrado espacial, restauración de imágenes, etc. [23]; aunque éstas se encontraban restringidas al empleo de dispositivos con redes de transmitancia periódicas.

En base a los estudios presentados en esta tesis, se logró eliminar en gran medida la restricción de la

periodicidad para las aperturas utilizadas en dispositivos Talbot y Lau, y por consiguiente se ampliaron las posibilidades de empleo de aperturas con funciones de transmitancia más generales. Por otra parte, en lo que respecta al análisis del filtrado espacial en la región de difracción de Fresnel, trabajos precedentes [24, 25] han indicado las ventajas de la utilización del análisis de Walsh-Hadamard [26] frente al de Fourier. Este formalismo permite la implementación inmediata de procesos computacionales debido a su binaridad intrínseca [27]. Las funciones de Walsh forman un conjunto completo de funciones bivaluadas, finitas y no periódicas en general. Es precisamente el enfoque de Walsh-Hadamard el que se utiliza en la presente tesis para desarrollar y estudiar una serie extensiones y generalizaciones de arreglos interferométricos basados en los efectos Talbot y Lau.

Se realiza además un análisis de la eficiencia, poder de selectividad y limitaciones de los dispositivos propuestos. Este estudio se fundamenta en un minucioso desarrollo analítico, cuyos resultados y predicciones son corroborados mediante simulaciones computacionales.

Los restantes temas expuestos en esta tesis, apuntan a mostrar la potencialidad y ductilidad del análisis de Walsh-Hadamard, a través de su aplicación en campos ciertamente disímiles.

Se presenta un estudio de las propiedades de autosimilaridad de los campos difractados por redes prefRACTÁlicas [28]. Aquellas estructuras que verifican algún tipo de invariancia de escala se dice que poseen propiedades de autosimilaridad y se las denomina fractales. Mientras que las funciones que poseen cierto grado de autosimilaridad y mediante algún límite se transforman en fractales, son denominadas prefractales. Las estructuras fractÁlicas han tomado importancia en los últimos años debido a su utilización en modelos de ajuste teóricos de determinadas formaciones o contornos encontrados en la naturaleza. En lo que respecta al comportamiento difractivo de objetos fractÁlicos, los trabajos realizados hasta el momento enfocaban su atención casi exclusivamente en la difracción en la región de Fraunhofer, donde las propiedades de autosimilaridad se mantienen significativamente. Pero pocas publicaciones han tratado la difracción en la región de Fresnel debido a que implica una mayor dificultad. El análisis desarrollado aquí, apunta a completar el panorama de estos estudios ocupándose del campo difractado en la región de Fresnel. Para esto, se emplean una vez más técnicas basadas en el análisis de Walsh-Hadamard.

Por otra parte, es conocida la frecuente utilización de las técnicas de moiré [29] en sistemas destinados a la detección y evaluación de irregularidades superficiales, desajustes o apartamientos de objetos o imágenes respecto de un patrón, etc.. El fenómeno de moiré ocurre cuando se superponen dos redes periódicas o casi-periódicas, y consiste en la aparición de un diagrama de franjas que no corresponde al de las redes individuales. Existen dispositivos que hacen uso de los efectos Talbot o Lau junto con el análisis del moiré, como es el caso de los interferómetros. En esta tesis, se presenta un dispositivo de moiré en el cual las redes son sintetizadas por funciones de Walsh, y no por redes de Ronchi como es más frecuente. Se analizan sus particularidades y ventajas mediante un conjunto de resultados experimentales.

Finalmente, se hace notar el gran desarrollo y la frecuente utilización de las técnicas destinadas al análisis digital de imágenes [30, 31]. En este sentido, en la presente tesis, se muestra un novedoso enfoque de la técnica de procesamiento digital de imágenes basada en el empleo de las propiedades de la correlación diádica y el formalismo discreto de Walsh-Hadamard.

### 1.3 Resumen de la tesis

Se realiza a continuación una síntesis del contenido de los próximos capítulos del presente trabajo de tesis.

En el Capítulo 2 se resumen algunos análisis teórico de los fenómenos Talbot y Lau, y seguidamente se describen algunas aplicaciones, particularmente las destinadas al filtrado espacial.

Dado que los estudios más frecuentes de los efectos Talbot y Lau se circunscriben a la consideración de aperturas periódicas, en el Capítulo 3 se explican algunos trabajos tendientes a la generalización de ambos efectos. Se trata de la demostración de las extensiones de los fenómenos de autoimágenes y de generación de coherencia para aperturas sintetizadas por funciones de Walsh binarizadas. Se introduce asimismo, el formalismo de la transformada de Walsh-Hadamard y su interpretación como espectro de secuencias.

En los capítulos subsiguientes se desarrollan los aportes originales de esta tesis.

Los Capítulos 4 y 5 se deducen las propiedades del campo difractado y la evolución del estado de coherencia en un sistema de múltiples aperturas dispuestas en serie. Se considera que las funciones transmitancias de estas aperturas pueden estar representadas por funciones no necesariamente periódicas. En este sentido, se estudia la verificación parcial de los efectos Talbot y Lau utilizando el análisis de Walsh-Hadamard. Se analizan las sucesivas interacciones del campo y la función coherencia mutua con las aperturas del arreglo en base a desarrollos analíticos, mostrándose seguidamente un conjunto de resultados computacionales que ilustran y corroboran las predicciones teóricas. Posteriormente se exponen las posibilidades de aplicación de estos arreglos como filtros selectivos de frecuencias o secuencias espaciales.

Un estudio de la difracción de aperturas binarias prefractálicas se realiza en el Capítulo 6. Se trata de las funciones binarias llamadas barras de Cantor. La técnica consiste en simular computacionalmente el campo difractado por este tipo de funciones en la región de Fresnel, analizando las variaciones y dependencias del grado de autosimilaridad o fractalidad en base al formalismo de Walsh-Hadamard.

En la primera parte del Capítulo 7 se desarrolla un estudio geométrico de los diagramas de moiré de las funciones de Walsh. Por un lado se trata la superposición plana de dos transparencias sintetizadas por funciones de Walsh mediante métodos analíticos y computacionales. También se propone y analiza la



utilización de las funciones de Walsh como redes en un dispositivo de moiré aplicado a la determinación de curvas de nivel sobre superficies volumétricas. En este caso, los argumentos teóricos se afirman en base a resultados experimentales.

En la segunda parte del Capítulo 7 se expone un novedoso enfoque de la técnica de procesamiento digital de imágenes basada en las propiedades de la correlación diádica y el análisis de Walsh-Hadamard discreto.

Finalmente, en el Capítulo 8, se detallan las conclusiones generales del presente trabajo.

# Capítulo 2

## EFECTOS TALBOT Y LAU

### 2.1 Efecto Talbot

Existen diversas formas de encarar el estudio del efecto Talbot. Para comenzar con una interpretación teórica del fenómeno, se considerará en principio una situación simplificada.

Sea una onda plana monocromática que se propaga en la dirección  $z$ :

$$u(x; z \leq 0^-) = \exp(ikz) \quad , \quad (2.1)$$

siendo  $k = 2\pi/\lambda$  el número de onda, con  $\lambda$  la longitud de onda incidente. Supóngase ahora que en  $z = 0$  se encuentra un objeto plano infinito de transmitancia periódica en una dimensión (según el eje  $x$ ). El campo detrás de dicha apertura según la aproximación de Kirchhoff será:

$$u(x; z = 0^+) = t(x) \quad , \quad (2.2)$$

donde  $t(x)$  es la función transmitancia de la transparencia (figura 2.1).

Siendo la apertura periódica, ésta puede desarrollarse en serie de Fourier:

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(2i\pi n\nu x) \quad , \quad (2.3)$$

en donde  $\nu = 1/d$  es su frecuencia espacial si  $d$  es su período. Entonces es lícito escribir el campo dado por (2.2) como:

$$u(x; z = 0^+) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(2i\pi n\nu x) \quad (2.4)$$

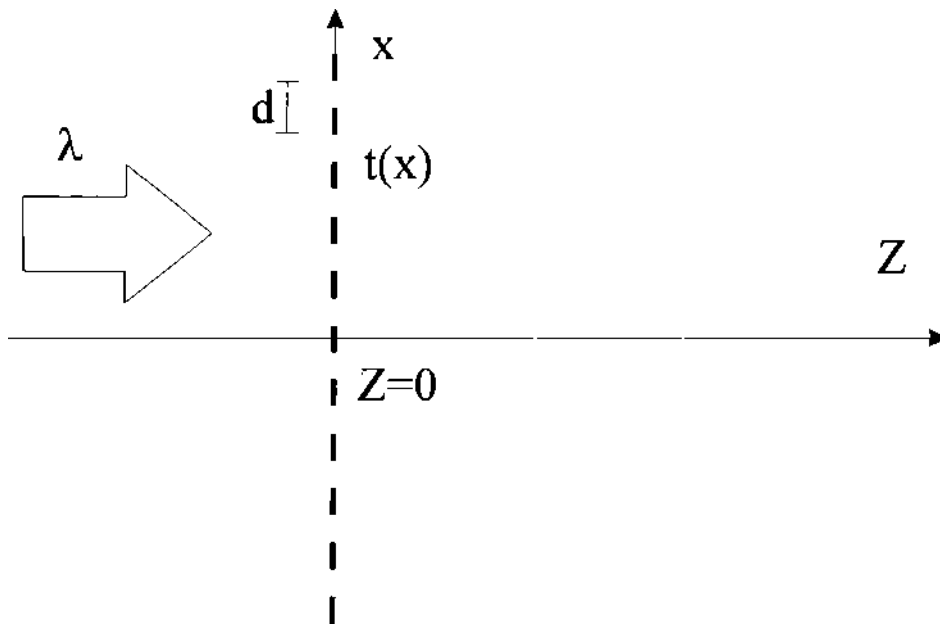


Figura 2-1: Dispositivo Talbot.

Puede establecerse la expresión del campo a una distancia  $z$  propagado libremente desde la transparencia en función del campo en  $z = 0^+$ . Para esto se hace uso de la teoría escalar de la difracción, válida para distancias  $z$  suficientemente grandes y siempre que las dimensiones de la pupila sean mucho mayores que la longitud de onda  $\lambda$ . Se utiliza además la aproximación de Fresnel-Kirchhoff para una región de observación mucho menor que  $z$  (ver por ejemplo [32]). De este modo, la expresión para el campo difractado resulta:

$$u(x; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x'; z = 0^+) \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z} (x - x')^2 \right] dx' \quad (2.5)$$

Reemplazando el desarrollo (2.4) en (2.5) y agrupando convenientemente los términos se obtiene:

$$u(x; z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda z} \left[ x^2 - (x - n\lambda\nu z)^2 \right] \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z} (x' - x + n\lambda\nu z)^2 \right] dx' \quad (2.6)$$

La integral de Fresnel que aparece en (2.6) sólo corresponde a un factor de fase por lo que será desestimado, entonces el campo resulta:

$$u(x; z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp \left[ -i\pi (n\nu)^2 \lambda z \right] \exp(2i\pi n\nu x) \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.7) es evidente que la distribución luminosa será igual a la transmitancia original (2.3) en los planos donde  $z$  verifique la relación:

$$\pi (\nu)^2 \lambda z = 2\pi \ell \quad , \quad (2.8)$$

o de otra forma:

$$z = \ell z_T = 2\ell/\nu^2 \lambda = 2\ell d^2/\lambda \quad , \quad (2.9)$$

donde  $\ell = 1, 2, 3, \dots$ , y:

$$z_T = 2d^2/\lambda \quad , \quad (2.10)$$

es la llamada distancia de Talbot o de autoimagen. Mientras que en los denominados "planos de Talbot", establecidos por las distancias dadas por (2.9), la amplitud del campo es idéntica a la función transmitancia periódica  $t(x)$ , también puede observarse que en los planos intermedios, donde  $z = (\ell/2)z_T$  la amplitud del campo (2.7) reproduce a  $t(x)$  pero desplazada en medio período. En ocasiones la función desplazada coincide con la transmitancia original con contraste invertido  $\overline{t(x)}$ , es por esto que a estas imágenes se las suele denominar "autoimágenes negativas".

De lo deducido se infiere que, la periodicidad transversal de la apertura infinita genera una periodicidad longitudinal y transversal del campo a lo largo del eje  $z$ .

Es posible hallar expresiones de la distancia (2.9) para frentes de ondas más generales, como por ejemplo un frente de iluminación gaussiano o esférico, para ambos frentes la iluminación de onda plana es un caso límite o particular [23].

### 2.1.1 Efecto de "walk-off"

Cabe preguntarse en qué medida son válidas las deducciones realizadas respecto del efecto de autoimágenes más allá de la limitación impuesta por la utilización de la aproximación de Fresnel en (2.5). Se considerará aquí la influencia del tamaño finito de la apertura, lo cual aproxima el análisis a un modelo más realista. Para determinar la región de validez del efecto, siguiendo los razonamientos de Lohmann [33], se supondrá una apertura periódica cosenooidal; esto es:

$$t(x) = \frac{1 + \cos(2\pi\nu_0 x)}{2} , \quad (2.11)$$

siendo  $\nu_0$  la frecuencia espacial de la red.

En este caso el campo inmediatamente detrás de dicha apertura será también:

$$u(x; z = 0^+) = \frac{1 + \cos(2\pi\nu_0 x)}{2} \quad (2.12)$$

Se propone para la forma general del campo a una distancia  $z$  arbitraria detrás de la apertura, la siguiente relación:

$$u(x; z) = A_0(z) + A_1(z) \cos(2\pi\nu_0 x) , \quad (2.13)$$

expresión que deberá verificar necesariamente la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u(x; z) + k^2 u(x; z) = 0 . \quad (2.14)$$

Reemplazando (2.13) en (2.14), y aplicando la condición de contorno (2.12), se llega con facilidad a la siguiente expresión para el campo detrás de la apertura cosenoidal:

$$u(x; z) = \frac{1}{2} \exp(ikz) + \frac{1}{4} \exp \left\{ ik \left[ \lambda\nu_0 x + z\sqrt{1 - (\lambda\nu_0)^2} \right] \right\} + \frac{1}{4} \exp \left\{ ik \left[ -\lambda\nu_0 x + z\sqrt{1 - (\lambda\nu_0)^2} \right] \right\} , \quad (2.15)$$

de donde se observa que es válido interpretar a  $u(x; z)$  como la interferencia de tres ondas planas: el primer término u orden 0 es una onda plana que avanza en la dirección del eje  $z$  o del vector  $k(0; 1)$ ; el segundo u orden +1 avanza en la dirección  $k(\lambda\nu_0; \sqrt{1 - (\lambda\nu_0)^2})$ , mientras que el tercero u orden -1 lo hace en la dirección  $k(-\lambda\nu_0; \sqrt{1 - (\lambda\nu_0)^2})$ .

Puede analizarse este argumento considerando la aproximación parageométrica y suponiendo que en la realidad la apertura tendrá una dimensión finita dada por un ancho transversal  $D = Md$ , donde  $M$  es el número de períodos  $d$  contenidos en la red. En este sentido, se supone que detrás de la apertura se proyectan tres ondas planas de ancho finito las cuales irán separándose y cuya interferencia producirá el efecto de autoimágenes. Por lo tanto, dejará de generarse el efecto cuando estas ondas se alejen y ya no se superpongan. Para el cálculo de esta distancia  $z_{máx}$  se utilizan sencillos argumentos geométricos en base a la figura 2.2. Por un lado, la tangente del ángulo  $\alpha$  que subtiende la dirección de propagación del orden +1 con el eje  $z$  es:

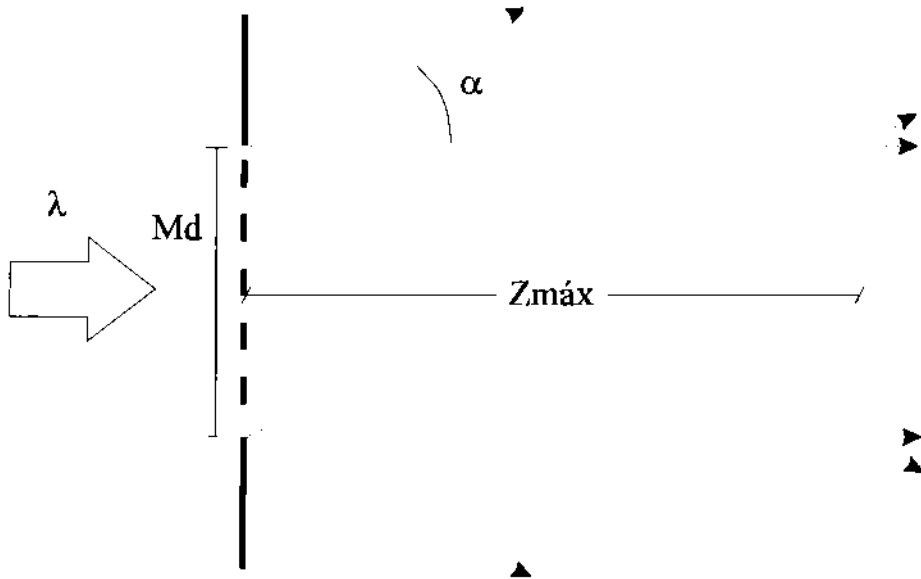


Figura 2-2: Superposición de los órdenes de difracción 0, +1 y -1 en un diagrama explicativo del efecto de "walk-off".

$$\tan \alpha = \frac{Md}{z_{máx}} \quad , \quad (2.16)$$

y por otro el seno resulta:

$$\text{sen } \alpha = \lambda \nu_0 \quad (2.17)$$

Aproximando la expresión (2.15) al seno, e igualándola a (2.17), se obtiene:

$$z_{máx} = \frac{Md^2}{\lambda} \quad , \quad (2.18)$$

cantidad que determina la distancia máxima de verificación del efecto Talbot medida desde la apertura finita y periódica. Debe tomarse en cuenta que la aproximación paracométrica utilizada es válida siempre que  $z < D^2/\lambda = M^2 d^2/\lambda$ , o sea  $z < M z_{máx}$ . Como en general  $M \gg 1$ , resulta ser  $z \ll z_{máx}$ , de donde se deduce que los cálculos realizados cumplen holgadamente la condición paracométrica.

La expresión (2.18) indica que la distancia máxima  $z_{máx}$  aumenta con el número de periodos presentes en la objeto y decrece con la frecuencia espacial y la longitud de onda. De esta forma, para aperturas con grandes frecuencias espaciales debe considerarse cuidadosamente la fidelidad de una autoimagen

relativamente alejada del objeto.

### 2.1.2 Condiciones necesarias y suficientes

Hasta aquí se demostró que la periodicidad de la apertura es una condición suficiente para la obtención del efecto Talbot, pero puede avanzarse en el análisis estableciendo las condiciones necesarias y suficientes para que este fenómeno se verifique. Estas condiciones fueron inicialmente deducidas por W. D. Montgomery [7], y en el presente estudio se seguirá el trabajo de Lohmann [33].

El campo detrás de la apertura, con la aproximación escalar, deberá verificar la ecuación de ondas (2.14) que se considerará como una ecuación en tres variables:

$$\nabla^2 u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0 \quad (2.19)$$

En el caso que esta función tridimensional  $u(x, y, z)$  fuera periódica a lo largo del eje  $z$ , con período  $\Delta z$ , podría ser desarrollada en una serie de Fourier del tipo:

$$u(x, y, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} v_m(x, y) \exp\left(\frac{2i\pi m z}{\Delta z}\right) \quad (2.20)$$

donde los términos con  $m < 0$  se descartan ya que representan ondas retrocediendo.

El desarrollo (2.20) deberá verificar además la condición de contorno:

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=0}^{+\infty} v_m(x, y) = f(x, y) \quad (2.21)$$

donde  $f(x, y)$  es la función transmitancia de la apertura

Reemplazando (2.20) en la ecuación de ondas (2.19), se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \left[ 1 - \left( \frac{m\lambda}{\Delta z} \right)^2 \right] v_m(x, y) = 0 \quad (2.22)$$

Esta ecuación tendrá tres tipos de soluciones dependiendo del signo del término  $1 - (m\lambda/\Delta z)^2$ .

Si se supone que:  $1 - (m\lambda/\Delta z)^2 < 0$ , las soluciones de (2.22) resultan ondas que divergen para valores  $\pm\infty$  de  $x$  e  $y$ , lo cual no tiene significado físico, mientras que si se toma:  $1 - (m\lambda/\Delta z)^2 = 0$ , se obtiene una ondas plana propagándose en la dirección  $z$ . Por lo tanto, la situación relevante ocurre para la condición:

$$1 - (m\lambda/\Delta z)^2 > 0 \quad (2.23)$$

o, de otra forma:

$$0 \leq m \leq \Delta z / \lambda \quad , \quad (2.24)$$

lo que establece un valor máximo para  $m$ :  $m_{\text{máx}} \leq \Delta z / \lambda$ .

Se introducen los desarrollos integrales de Fourier de las funciones  $v_m(x, y)$ :

$$v_m(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_m(\nu, \mu) \exp [2i\pi(\nu x + \mu y)] d\nu d\mu \quad , \quad (2.25)$$

y se los reemplaza en la ecuación (2.22), de lo cual se obtiene:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_m(\nu, \mu) \exp [2i\pi(\nu x + \mu y)] \left\{ -(2\pi)^2 (\nu^2 + \mu^2) + k^2 \left[ 1 - \left( \frac{m\lambda}{\Delta z} \right)^2 \right] \right\} d\nu d\mu = 0 \quad . \quad (2.26)$$

Este desarrollo será nulo si  $\tilde{v}_m(\nu, \mu)$  y/o el término entre corchetes lo son. Considerando la última alternativa, se obtiene la siguiente relación para las frecuencias espaciales:

$$\nu^2 + \mu^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \left( \frac{m}{\Delta z} \right)^2 \equiv \rho_m^2 \quad , \quad (2.27)$$

esta expresión representa circunferencias de radio  $\rho_m$  en el dominio de las frecuencias  $(\nu, \mu)$ , es decir, los llamados "anillos de Montgomery". Por lo tanto la función transmitancia de la apertura deberá ser tal que su espectro de frecuencias espaciales sea discreto y localizado sobre estos anillos de Montgomery de radios  $\rho_m$ . Los primeros anillos aparecen graficados en la **figura 2.3**.

El término  $m = 0$ , que corresponderá a un anillo de radio  $\rho_0 = 1/\lambda$ , responde a ondas evanescentes (fenómeno débil de autoimágenes).

Como cada  $\tilde{v}_m(\nu, \mu)$  debe ser nulo en todo este dominio excepto en un anillo particular  $m$  de radio  $\rho_m$  (**figura 2.3**), tendrán una expresión en coordenadas polares del tipo:

$$\tilde{v}_m(\nu, \mu) = \tilde{V}_m(\rho, \theta) = C_m \delta'(\rho - \rho_m) \phi_m(\theta) \quad , \quad (2.28)$$

donde  $\rho_m = +\sqrt{\nu^2 + \mu^2}$  y  $\theta = \arctan(\mu/\nu)$ , o  $\nu = \rho \cos(\theta)$  y  $\mu = \rho \sin(\theta)$ . Reemplazando (2.28) en (2.25), se obtiene:

$$v_m(x, y) = C_m \rho_m \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_m(\theta) \exp [2i\pi \rho_m (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)] d\theta \quad (2.29)$$

Utilizando aquí las coordenadas cilíndricas  $x = r \cos(\varphi)$  e  $y = r \sin(\varphi)$ , se llega a:



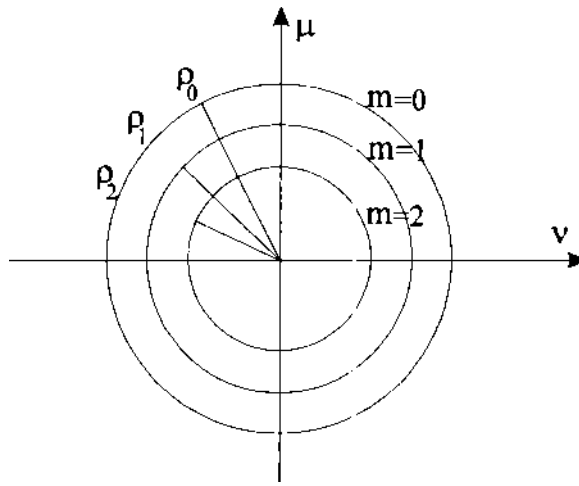


Figura 2-3: Anillos de Montgomery.

$$v_m(x, y) = V_m(r, \varphi) = C_m \rho_m \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_m(\theta) \exp [2i\pi \rho r \cos(\theta - \varphi)] d\theta \quad (2.30)$$

Finalmente, en base a la expresión (2.30) para los coeficientes del desarrollo de Fourier (2.20) del campo,  $u(x, y, z)$  puede escribirse:

$$u(x, y, z) = U(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{m_{\text{máx}}} C_m \rho_m \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_m(\theta) \exp \left\{ 2i\pi \left[ \rho r \cos(\theta - \varphi) + \frac{mz}{\Delta z} \right] \right\} d\theta \quad (2.31)$$

expresión que contempla todos los campos periódicos en  $z$ , cuyos períodos vienen dados por un cierto valor  $\Delta z$ .

Utilizando el resultado (2.31) en la expresión (2.21), todos los objetos apertura capaces de generar un efecto de autoimágenes, tendrán una función transmitancia de la forma:

$$f(x, y) = F(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{m_{\text{máx}}} C_m \rho_m \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_m(\theta) \exp \{ 2i\pi [\rho r \cos(\theta - \varphi)] \} d\theta \quad (2.32)$$

donde  $m_{\text{máx}} \leq \Delta z/\lambda$ .

Puede demostrarse que el caso de anillos equidistantes en el plano de frecuencias, característicos de redes difractivas circulares, y que el caso de puntos equidistantes en dicho plano, característicos de redes difractivas lineales, corresponden a anillos de Montgomery con número  $n = 0, 1, 4, 9, \dots, m^2$ . Por lo tanto,

$$n = m^2 \Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = \Delta z = \lambda^2 / \lambda$$

los objetos con periodicidad lateral de la experiencia original de Talbot son sólo un subconjunto dentro del conjunto de todos los objetos capaces de generar el fenómeno de autoimágenes.

### 2.1.3 Otros enfoques del efecto Talbot

Una alternativa al estudio de la difracción en base a la integral de propagación de Kirchhoff es la formulación de Booker-Ratcliffe-Shinn o de transformada inversa de ~~Fourier~~<sup>Fourier</sup>, la cual fue utilizada por R. F. Edgar [34] para analizar la formación de autoimágenes a partir de estructuras periódicas.

A. Kolodziejczyk [35] presentó una aproximación diferente al efecto de autoimágenes, para lo cual expresó la propagación del campo de Fresnel en forma de convolución y utilizó un desarrollo matemático propio, suponiendo aperturas periódicas bidimensionales infinitas.

Restringiéndose a redes periódicas binarias y de rendijas muy estrechas, P. Latimer y R. F. Crouse [36] realizaron un cuidadoso análisis en base a la interferencia de rayos con el que explicaron la aparición de otras distribuciones de intensidades periódicas ubicadas entre las autoimágenes (ya reportadas en diversas experiencias [37, 4, 3]). Estas "autoimágenes secundarias", con frecuencias mayores que las de las "autoimágenes fundamentales" y con intensidad menor, se sitúan en múltiplos racionales de  $d^2/\lambda$ .

Por otra parte, la experiencia de Hiedemann y Breazuale [37], de 1959, se ocupó del efecto Talbot en el caso que las redes de transmisión son producidas por ondas ultrasónicas.

Otro enfoque posible es el desarrollado por C. Colautti, B. Ruiz, E. E. Sicre y M. Caravaglia [24] en base a la transformada de Walsh-Hadamard que será analizado en el Capítulo 3.

## 2.2 Efecto Lau

### 2.2.1 Enfoque en base a la óptica geométrica

Respecto al fenómeno Talbot las alternativas de descripción y justificación del efecto Lau son aún más diversas.

Se realizará a continuación una aproximación al efecto Lau desde el punto de vista de la óptica geométrica tal como lo presentan J. Jahns y A. W. Lohmann [11]. Supóngase que se ilumina con una fuente espacialmente incoherente un arreglo en serie de dos redes de amplitud binarias, periódicas e idénticas, colocándose detrás de la segunda red una lente convergente de distancia focal  $f$ . Se pretende hallar las condiciones para las cuales la distribución de intensidad en el plano focal  $I$  de la lente resulta ser un diagrama de interferencia. Puede pensarse que la primera red  $R1$  actúa como un arreglo periódico de fuentes incoherentes que ilumina la segunda red  $R2$  (idéntica a  $R1$ ), situada a una distancia  $z_0$  de la primera (ver figura 2.4).

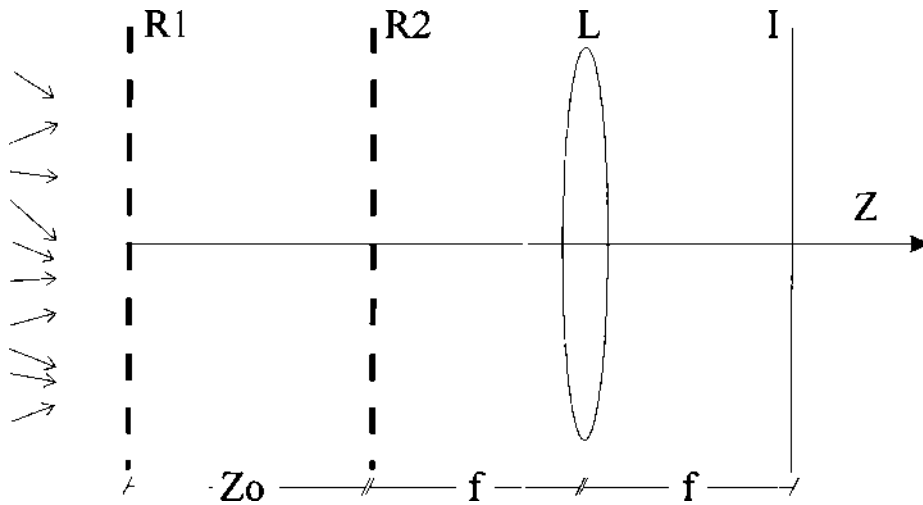


Figura 2-4: Dispositivo Lau.

Se supone que el ancho de las rendijas de las redes es mucho menor que la separación entre ellas, o de otro modo, que el período de las redes  $d$  es muy próximo al ancho de las bandas opacas. De esta manera, una cierta rendija  $S$  de  $R1$  actuará como una fuente lineal la cual emitirá ondas cilíndricas (figura 2.5), que llegarán a  $R2$  generando en ésta una serie de fuentes secundarias en las rendijas  $P0, P1$ , etc.. Para que estas fuentes emitan en fase, las distancias  $SP0, SP1$ , etc., habrán de diferir en números enteros de  $\lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda de iluminación. Así, utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{z_0^2 + d^2} = z_0 + \Delta = z_0 + N\lambda \quad , \quad (2.33)$$

donde  $\Delta$  es la diferencia entre las distancias  $SP0$  y  $SP1$ , y  $N$  es un número entero. Además suponiendo que  $\lambda \ll d \ll z_0$ , resultará:

$$z_0 \sqrt{1 + (d/z_0)^2} \simeq z_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} (d/z_0)^2 \right] = z_0 + \frac{d^2}{2z_0} \quad (2.34)$$

Igualando (2.33) a (2.34), se obtiene:

$$z_0 = d^2 / 2N\lambda \quad (2.35)$$

Si se considera que el desfase  $\Delta$  es sólo de una longitud de onda  $\lambda$ , es decir  $N = 1$ , (2.35) resulta:

$$z_L = d^2 / 2\lambda \quad , \quad (2.36)$$

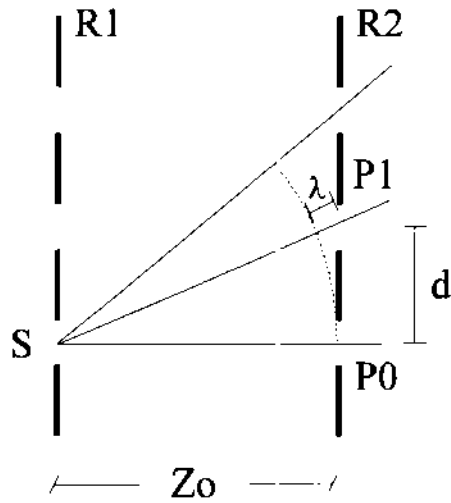


Figura 2-5: Análisis del efecto Lau en base a la óptica geométrica.

que es la denominada distancia Lau. De esta forma, la luz proveniente de la rendija  $S$  de la red  $R1$  producirá un diagrama de interferencia en el plano focal, luego de difractarse en  $R2$ . La deducción es válida para toda rendija de  $R1$ , y por lo tanto, cada una produce el mismo patrón de interferencia. Como la iluminación es espacialmente incoherente todos los patrones sumarán sus intensidades, generando así un diagrama de franjas de alto contraste.

La similitud de las dependencias con la longitud de onda  $\lambda$  y la periodicidad espacial  $d$ , en las expresiones de las distancias características  $z_T$  (dada por (2.10)) y  $z_L$  (dada por (2.36)), indican una marcada relación entre los efectos Talbot y Lau.

### 2.2.2 Enfoque en base a la teoría de la coherencia

En trabajos casi simultáneos, F. Gori [10], y R. Sudol y B. J. Thompson [12, 13] presentaron un análisis del efecto Lau utilizando la teoría de la coherencia. Para desarrollar este análisis se emplea la función densidad espectral mutua  $G(x, x'; \nu)$  [38], tomando en cuenta particularmente una única componente monocromática de la fuente policromática  $S$  que ilumina el dispositivo Lau. La densidad espectral mutua  $G(x, x'; \nu)$ , es la transformada de Fourier de la función coherencia mutua  $\Gamma(x, x'; \tau)$ , la cual coincide con la intensidad mutua  $J(x, x')$  o  $\Gamma(x, x')$ , para el caso cuasimonocromático ( $\tau = 0$ ).

Siguiendo la publicación de Sudol y Thompson, se suponen dos aperturas  $g$  y  $h$  (figura 2.6) de funciones transmitancias  $g(x)$  y  $h(x)$  respectivamente. La fuente espacialmente incoherente  $S$  que ilumina la primera transparencia  $g$ , tendrá una densidad espectral mutua  $G_S(x, x'; \nu) = i_\nu \delta(x - x')$ , donde

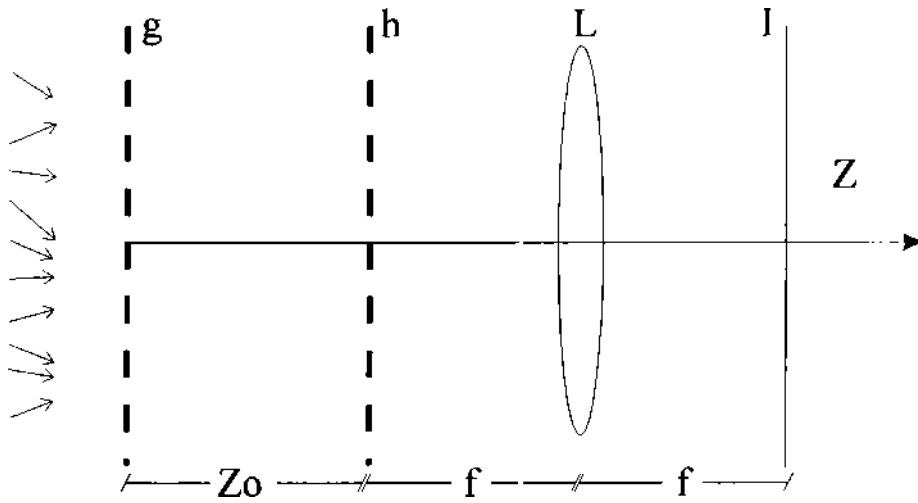


Figura 2-6: Dispositivo Lau con redes de transmitancias  $g(x)$  y  $h(x)$ .

$i_\nu$  es una cantidad real y positiva asociada con la intensidad óptica de la fuente a la frecuencia  $\nu$ . Inmediatamente después de atravesar  $g$ , la densidad espectral mutua vendrá dada por:

$$G_g^+(x, x'; \nu) = g(x)g^*(x')i_\nu\delta(x - x') = |g(x)|^2 i_\nu\delta(x - x') \quad , \quad (2.37)$$

de esta forma, la apertura  $g$  actúa como un arreglo de fuentes incoherentes cuya distribución depende directamente de su función transmitancia  $g(x)$ .

La densidad  $G$  dada por la ecuación (2.37) se propagará desde la apertura  $g$  hacia la apertura  $h$ , situada a una distancia  $z_0$ , según lo indica el Teorema de van Cittert-Zernike [39], e inmediatamente antes de  $h$  tendrá la siguiente expresión:

$$G_h^-(x, x'; \nu) = \frac{\exp [ik(x^2 - x'^2)/2z_0]}{(\lambda z_0)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)|^2 i_\nu \exp [ik(x - x')\xi/z_0] d\xi \quad , \quad (2.38)$$

en donde la variable  $\xi$  recorre toda la extensión unidimensional de  $g$ .

Luego de interactuar con  $h$ , la densidad espectral mutua  $G$  será el producto de la expresión (2.38) por la función transmitancia  $h(x)$  y su conjugada evaluada en  $x'$ :

$$G_h^+(x, x'; \nu) = G_h^-(x, x'; \nu)h(x)h^*(x') \quad (2.39)$$

Haciendo uso nuevamente del teorema de van Cittert-Zernike para analizar el proceso de propagación de

la densidad espectral mutua a través de la lente  $L$ , hasta el plano focal, la expresión de  $G$  sobre plano de observación será:

$$G_f(x, x'; \nu) = \frac{1}{f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} G_h^+(\xi, \xi'; \nu) \exp\left(-ik \frac{x\xi - x'\xi'}{f}\right) d\xi d\xi' \quad , \quad (2.40)$$

siendo  $f$  de distancia focal, y donde se aplicó la aproximación parabólica para el cambio de fase en la lente  $L$ .

La intensidad se relaciona con la función coherencia mutua y la densidad espectral mutua de la siguiente forma [38]:

$$I(x) = \Gamma(x, x; 0) = \int_0^{\infty} C(x, x, \nu) d\nu \quad , \quad (2.41)$$

así, la distribución de intensidad debida a una cierta iluminación de frecuencia  $\nu$ , será:

$$I_\nu(x) = G(x, x; \nu) \quad . \quad (2.42)$$

Entonces, a partir de (2.42) y (2.39), la intensidad observada en el plano focal vendrá dada por:

$$I_{f,\lambda}(x, \nu) = \frac{1}{f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} G_h^-(\xi, \xi'; \nu) h(\xi) h^*(\xi') \exp\left(-ik \frac{x(\xi - \xi')}{f}\right) d\xi d\xi' \quad (2.43)$$

Para avanzar en los cálculos se hace necesario convenir una serie de restricciones respecto a las transmitancias de los objetos. Se supondrá que son redes idénticas, binarias y periódicas de período  $d$ , es decir:

$$|g(x)|^2 = |h(x)|^2 = t(x) \quad , \quad t(x) = t(x + d) \quad (2.44)$$

Por lo tanto las transmitancias podrán representarse por una serie de Fourier, esto es:

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(2i\pi nx/d) \quad , \quad (2.45)$$

donde los coeficientes de Fourier  $C_n$  vienen dados por:

$$C_n = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) \exp(-2i\pi nx/d) dx \quad (2.46)$$

Reemplazando estas expresiones en (2.38) y (2.40), la densidad espectral mutua inmediatamente

antes de la red  $h$  toma la siguiente forma:

$$G_h^-(x + \Delta x, x; \nu) = \frac{i\nu}{\lambda z_0} \exp(ikx\Delta x/z_0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i\pi\lambda z_0 n^2/d^2) C_n \delta(\Delta x - \lambda z_0 n/d) \quad , \quad (2.47)$$

y la intensidad (2.43) en el plano de observación:

$$I_{f,\lambda}(x, \nu) = \frac{1}{f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} G_h^-(\xi + \Delta\xi, \xi; \nu) t(\xi + \Delta\xi) t^*(\xi) \exp(-ikx\Delta\xi/f) d\xi d\Delta\xi \quad , \quad (2.48)$$

donde se introdujeron los cambios de variables  $x = x'$  y  $\Delta x = x - x'$ .

Como la densidad espectral mutua inmediatamente antes de la red  $h$  representada por (2.47), es periódica con período  $\lambda z_0/d$ , la intensidad (2.48) dependerá también de este período. Realizando el reemplazo (2.47) en (2.48), la intensidad en el plano focal resulta:

$$I_{f,\lambda}(x, \nu) = \frac{i\nu}{\lambda z_0 f^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n B_n \exp(i\pi\lambda z_0 n^2/d^2) \exp(-2i\pi n x z_0/d f) \quad , \quad (2.49)$$

donde los coeficientes  $B_n$ , vienen dados por:

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\xi + \lambda z_0 n/d) t^*(\xi) \exp(2i\pi n \xi/d) d\xi \quad (2.50)$$

La distribución de intensidad óptica en el infinito dada por la expresión (2.49), obviando el factor de fase cuadrático en la sumatoria, aparece como el desarrollo de Fourier de la correlación de dos funciones. Los coeficientes de una de las funciones son los  $C_n$  dados por (2.46), y los de la otra son los coeficientes  $B_n$  dados por (2.50). Este último coeficiente puede interpretarse como una función del período de la función densidad espectral mutua:  $\lambda z_0/d$ , en el plano de la segunda red, y considerando que el período de  $t(x)$  es  $d$ , la expresión (2.49) representará un conjunto de franjas de alto contraste en el infinito para aquellos valores de  $z_0$  que satisfagan la condición:

$$z_0 = \frac{\alpha d^2}{\beta \lambda} \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots \quad , \quad (2.51)$$

para una longitud de onda dada.

La ecuación (2.51) indica una generalización del efecto Lau, ya que demuestra que el fenómeno no sólo se verifica para las típicas distancias de múltiplos enteros de  $z_L = 2d^2/\lambda$ , como se obtuvo en (2.36), sino que tendrá lugar aún cuando la separación es un múltiplo racional de la distancia característica  $d^2/\lambda$ .

Del análisis de las expresiones (2.47) y (2.48) que lleva a la obtención de la condición (2.51), puede interpretarse que en el marco del formalismo de la teoría de la coherencia empleado por Sudol y Thompson, el efecto Lau es el resultado de la correspondencia o "macheo" entre el período de la segunda red  $h$  y el período de la densidad espectral mutua del campo incidente sobre dicha red  $G_h^-(x + \Delta x, x; \nu)$ .

Los mismos Sudol y Thompson verificaron el ajuste de los datos experimentales con sus predicciones teóricas [13].

En su publicación, Gori [10] llega a la misma expresión para la distancia Lau generalizada (2.51), utilizando también la teoría de la coherencia, aunque trabajando con la intensidad mutua  $J(x, x')$ , y aproximando la transmitancia de las redes a peines de Dirac al suponer que las ranuras son extremadamente delgadas. De una manera muy simple interpreta el efecto Lau como el ajuste entre la periodicidad de la intensidad mutua inmediatamente antes de la segunda red (calculada utilizando el teorema de van Cittert-Zernike) y la periodicidad de dicha red. Es decir que la segunda apertura actúa como un filtro de coherencia que selecciona el paso sólo de los máximos de la función intensidad mutua. Este "macheo" lleva a la condición (2.51) para la distancia Lau generalizada. Estos razonamientos son muy similares a los utilizados por Sudol y Thompson, pero Gori los emplea con un enfoque geométrico más simple e intuitivo.

Finalmente dentro de las aproximaciones al efecto Lau en base a la teoría de la coherencia se menciona la publicación de B. J. Thompson y C. Roychoudhuri [40]. Los autores trazan una minuciosa analogía entre la propagación de la coherencia mutua  $\Gamma(x, x', \tau)$  y la de la amplitud de campo considerando particularmente los ejemplos de transmitancias de una, dos y  $N$  rendijas.

Los desarrollos originales incluidos en esta tesis en cuanto a sistemas iluminados con luz espacialmente incoherente, hacen uso de básicamente de los formalismos empleados en los trabajos de Sudol y Thompson, y de Gori que se han detallado en esta sección.

### 2.2.3 Otros enfoques del efecto Lau

En el trabajo ya citado, J. Jahns y A. W. Lohmann [11] explican el efecto Lau también a través de la teoría escalar de la difracción.

Patorski [14, 15] desarrolló una justificación teórica del efecto Lau introduciendo el concepto de superposiciones incoherentes de efectos de autoimágenes. Supuso a la primera red como un arreglo mutuamente incoherente de fuentes lineales coherentes y luego tomó en cuenta el tamaño finito de las ranuras. Consideró que para observar un conjunto de franjas bien definidas las autoimágenes de la segunda red generadas por cada una de esas fuentes lineales, deben superponerse en el espacio. Analizó cuidadosamente los casos en que la separación entre las redes es finita [14] e infinita [15].

G. J. Swanson y E. N. Leith [41, 42] interpretaron el efecto Lau como un caso particular del inter-



ferómetro de dos redes en "tandem", previamente propuesto por F. O. Weinberg y N. B. Wood [44].

K. -H. Brenner, A. W. Lohmann y J. Ojeda-Castañeda describieron el efecto Lau utilizando el formalismo de la función de transferencia óptica (OTF) [43]. Posteriores aplicaciones de la OTF en dispositivos Lau fueron reportados por K. Hane y C. P. Grover [45, 46]. En particular J. Sethuraman [47] realizó un estudio del efecto en base a la OTF y a las propiedades de las funciones de Bloch utilizadas en la física del estado sólido.

El efecto Lau puede también explicarse utilizando otro modelo geométrico [48] en el cual las dos redes actúan como selector de canales. Mediante el formalismo presentado por S. Jutamulia, T. Asakura y H. Fuji, el sistema espacialmente incoherente es convertido en un sistema multicanal coherente, donde cada canal es originado por un único punto independiente constituyente de la fuente extendida.

Lohmann, Ojeda-Castañeda y Streibl [20] justificaron la periodicidad de los campos coherentes y parcialmente coherentes asociándolos a las autofunciones del operador que representa las soluciones de la ecuación de Helmholtz, deduciendo las condiciones necesarias y suficientes para la verificación del fenómeno.

Empleando el concepto de transformada virtual de Fourier y el tratamiento ondulatorio de las aberraciones Jahns, Lohmann y Ojeda-Castañeda [21] describieron los efectos Talbot y Lau en términos del formalismo parageométrico. Dicho desarrollo no se restringe a objetos con periodicidad lateral ni a la aproximación paraxial.

J. Ojeda-Castañeda y E. E. Sicre [22] explicaron ambos efectos utilizando las propiedades de propagación paraxial de la función distribución de Wigner. En base a esta representación dual espacio-fase trataron los efectos Talbot y Lau en términos de la descripción de la óptica geométrica.

Existe un estudio del efecto Lau en el marco del análisis de Walsh-Hadamard [25] que será desarrollado en el siguiente capítulo.

## 2.3 Aplicaciones de los efectos Talbot y Lau

La importancia del estudio de los efectos Talbot y Lau reside en la gran variedad de aplicaciones que se sustentan en dichos fenómenos, y que han sido propuestas y utilizadas en las últimas décadas. En esta sección se hará una rápida revisión de algunas de las más significativas. En particular es pertinente, debido a la temática de la presente tesis, hacer incapié en los sistemas destinados al filtrado espacial en la región de difracción de Fresnel, por lo que se les dedicará especial atención.

A. W. Lohmann [49] presentó en 1961 la primera aplicación del efecto Talbot. Se trata de un dispositivo diseñado para caracterizar el espectro temporal de una fuente. Este espectrómetro de Fourier consta de dos redes periódicas idénticas colocadas en serie una detrás de la otra. Si la fuente ilumina

la primera de las redes, el campo difractado detrás de ella presentará una periodicidad sobre el eje de propagación que dependerá de la longitud de onda de la luz emitida; así, el barrido de la segunda red sobre esta zona de Fresnel producirá un efecto espectrométrico. La observación del desplazamiento normal de la segunda red dará una medida del contraste de la intensidad de campo, que lógicamente será máxima cuando se la sitúe en un plano de autoimagen. Una vez establecida esta distancia puede deducirse la magnitud de la longitud de onda correspondiente. H. Klages [50] realizó un estudio más detallado de este espectrómetro.

Es posible también diseñar interferómetros basados en el efecto de autoimágenes. Supóngase como en la experiencia Talbot tradicional que se ilumina con un haz colimado monocromático una red periódica plana, y que se ubica coplanarmente una segunda red, réplica de la anterior, en el campo difractado de Fresnel. En el caso que esta segunda red se colocase en un plano de autoimagen, centrada respecto al eje óptico, la autoimagen y la transmitancia ajustarán perfectamente. Pero si entre ambas transparencias se inserta un cierto objeto de fase, la autoimagen se distorsionará dando lugar a un diagrama de franjas o "moiré" (ver Capítulo 7) en el plano de la segunda red. Dicho diagrama brindará información sobre la derivada espacial respecto a la coordenada transversal de la distribución de fase del objeto. Sencillas variantes de este dispositivo se obtienen desplazando la segunda red en medio período o colocándola en una distancia de autoimagen negativa, obturándose de esta forma el paso de luz. Análogamente al caso anterior, el análisis del diagrama de moiré que aparece cuando se inserta el objeto de fase, brinda información sobre su función distribución de fase.

Estos interferómetros Talbot o de "shearing" con dos redes, fueron inicialmente propuestos en trabajos casi simultáneos por S. Yokozeki y T. Suzuki, y D. E. Silva y A. W. Lohmann. Posteriormente se ha presentado una gran cantidad de variantes.

Yokozeki y Suzuki [51] desarrollaron una interpretación teórica de este tipo de interferómetro, y estudiaron su aplicación en la medición de gradientes de fase y aberraciones de lentes, utilizando el análisis del moiré.

Lohmann y Silva demostraron su posible aplicación al análisis de las derivadas primera y segunda de los objetos de fase [52, 53], y aún de la derivada radial mediante la utilización de redes con simetría circular [53, 54]. Además Silva propuso un método interferométrico del tipo Talbot para establecer el grado de colimación de un haz [55].

Se ha diseñado también un interferómetro donde la segunda red puede generarse en forma conveniente por métodos computacionales [56].

Los dispositivos interferométricos basados en el efecto Talbot pueden aplicarse además al estudio de vibraciones de objetos de fase [57], a mediciones de curvaturas y longitudes focales [58, 59] y de pequeñas inclinaciones [60, 61], etc..

Se han desarrollado también versiones incoherentes de los interferómetros mencionados, es decir, basados en el efecto Lau, como los estudiados por Bartelt y Jahns [62], Patorski [63, 15], N. Bolognini, J. Ojeda-Castañeda y E. E. Sicre [64], y J. Ojeda-Castañeda, J. Ibarra y J. C. Barreiro [65]. El principio del funcionamiento es el mismo, generar un diagrama de franjas con una primera red, ajustarlo con otra, y examinar las desviaciones del moiré cuando se intercala un objeto de fase.

Bartelt y Jahns [62, 66] diseñaron dos interferómetros basados en el efecto Lau para objetos de fase.

Con el propósito de desarrollar sistemas computacionales basados en la óptica que aprovechen la velocidad y capacidad de transmisión y procesamiento de información en paralelo, se han presentado una serie de arreglos ópticos que realizan operaciones lógicas. En este sentido, se han publicado algunos trabajos que se basan en las propiedades del efecto Lau [72-74].

Se ha propuesto también la utilización del efecto de autoimágenes para la codificación de la información volumétrica de ciertos objetos mediante la técnica de pseudocolorado. En el estudio de estas técnicas se basaron los trabajos de Chavel y Strand [75, 76], y de Rodríguez-Vera, Kerr y Mendoza-Santoyo [77]. También se han presentado algunos dispositivos de este tipo empleando iluminación incoherente [78, 71].

Otra aplicación del efecto Talbot en el procesamiento de imágenes es la técnica de restauración de objetos cuasi-periódicos [79-82]. Olof Bryngdahl [83] además propuso dos métodos para la obtención de múltiples imágenes a partir de un sólo objeto mediante la utilización del efecto de autoimágenes.

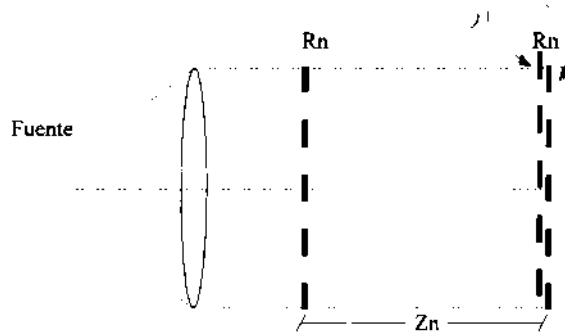
### **2.3.1 Aplicaciones de los efectos Talbot y Lau al filtrado espacial**

El filtrado espacial de imágenes es extensamente utilizado en la óptica. Desde que se demostró las propiedades de las lentes de generar la transformada de Fourier de las imágenes bajo iluminación coherente, se comenzó con el desarrollo de las técnicas de filtrado espacial en el plano focal de frecuencias. A partir de la década del 70 también han surgido dispositivos de filtrado en la región de difracción de Fresnel basados en las propiedades de autoimagen.

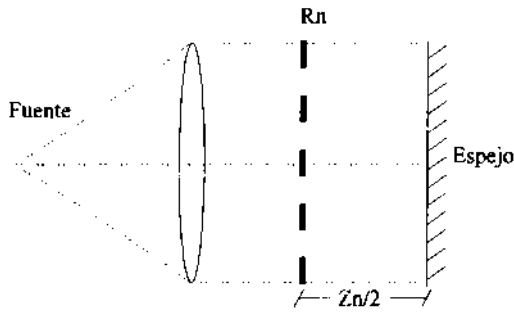
Eu, Liu y Lohmann [67, 68] estudiaron la aplicación del efecto Talbot al filtrado espacial para la obtención de la diferenciación de la imagen. Con la implementación de varios dispositivos demostraron la obtención de la derivada de primer orden y órdenes superiores de transmitancias objeto.

Lohmann, Ojeda-Castañeda y Sicre [69, 70] basándose en el espectrómetro de Fourier [49, 50] propusieron otra aplicación del fenómeno de autoimágenes al filtrado espacial para objetos binarios. Se trata de filtros que utilizan la dependencia de la distancia de autoimagen con la frecuencia espacial del objeto. Las aperturas consideradas poseen funciones transmitancias dadas por una superposición de funciones de Rademacher, es decir redes de Ronchi (ver Capítulo 3, sección 3.2.2), cada una con una frecuencia espacial determinada y diferente. Los dispositivos propuestos son capaces de eliminar de la

imagen alguna de estas frecuencia en forma variable. En uno de los arreglos se coloca una réplica de la primera red en la distancia de autoimagen negativa correspondiente a la frecuencia que se pretende eliminar, al presentar la intensidad en este plano un contraste invertido, la interacción cancela el aporte de la frecuencia en cuestión (figura 2.7 (a)). Es posible eliminar la segunda red situando un espejo a la



(a)

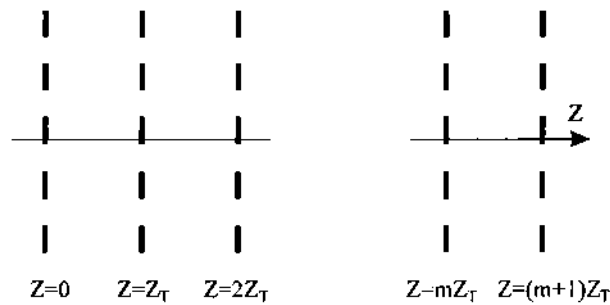


(b)

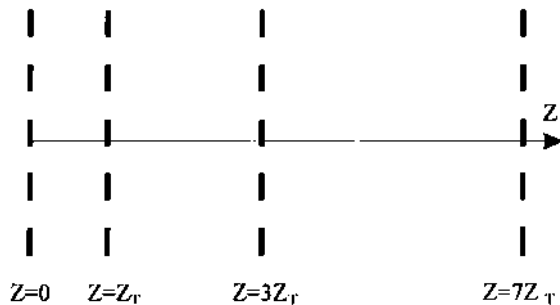
Figura 2-7: Interferómetros Talbot.

mitad de la distancia de las autoimágenes negativas, es decir a un cuarto de la distancia Talbot (figura 2.7 (b)). La selectividad es mejorada con dispositivos que impliquen múltiples interacciones, como un análogo de un interferómetro Fabry-Perot (figura 2.8 (a)) o un filtro de Lyot-Öhman (figura 2.8 (b)) [70]. Estos arreglos de múltiples interacciones campo-apertura en serie son la base de gran parte del trabajo original presentado en esta tesis.

En cuanto a los sistemas de filtrado que operan bajo iluminación espacialmente incoherente, se han propuesto dispositivos basados en el efecto Lau [71], los cuales han sido analizados en base al formalismo propuesto por Gori [10] y Sudol y Thompson [12, 13]. Análogamente al arreglo descrito en la figura



(a)



(b)

Figura 2-8: (a) Interferómetro Fabry-Perot. (b) Filtro de Lyot-Öman.

2.7 (b), se dispone la red frente a un espejo situado a la mitad de la distancia de Lau (figura 2.9), y se supone que la función transmitancias de la apertura es una superposición lineal de funciones de Rademacher. La distancia  $z_0$  puede seleccionarse de tal forma que corresponda a la distancia Lau de una (o de algunas) de las frecuencias presentes en la síntesis. Esto permitirá el ajuste entre la función coherencia mutua proveniente del espejo, inmediatamente detrás de la red con el espaciado de la Rademacher correspondiente a esa frecuencia. De esta forma se originan franjas de alto contraste debido a esta componente, mientras que el resto de las Rademacher presentes en el desarrollo dan lugar a diagramas de franjas de bajo contraste. Dicho de otra forma, por el simple mecanismo de desplazamiento del espejo, puede seleccionarse o "sintonizarse" la frecuencia (o las frecuencias) que se desea transmitir en detrimento de las restantes.

Una extensión de los dispositivos de filtrado espacial en la región de Fresnel para funciones transmitancias generalizadas fue presentada en base a redes sintetizadas por funciones de Walsh [24, 25], dichos

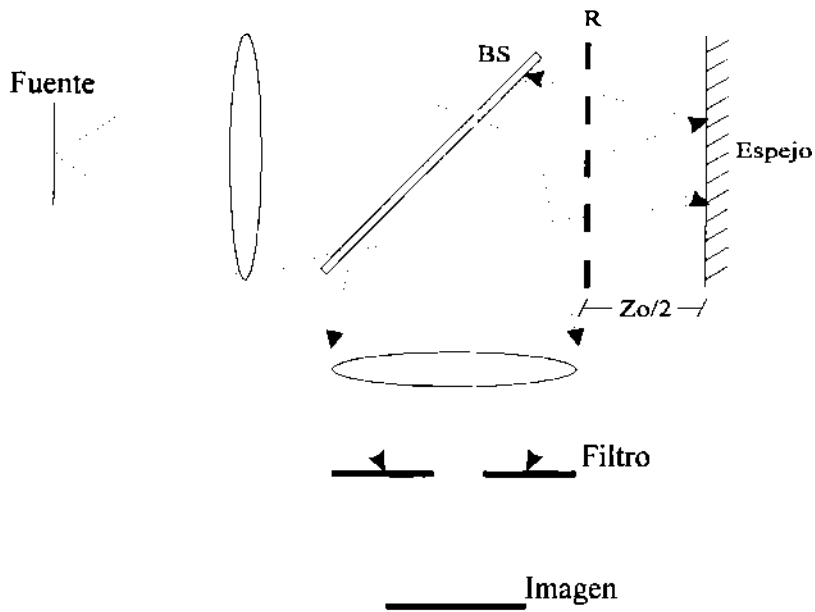


Figura 2-9: Interferómetro Lau.

trabajos serán detallados en el siguiente capítulo.

Finalmente, se menciona que Ojeda-Castañeda, Ibarra y Barreiro [65] propusieron un dispositivo que realiza una determinada frecuencia espacial de una red apertura de frecuencia variable, basado en el efecto Lau.

# Capítulo 3

## FUNCIONES DE WALSH: PROPIEDADES DEL CAMPO DIFRACTADO

### 3.1 Introducción

La óptica de Fourier ha demostrado ser el marco adecuado para describir las propiedades difractivas de gran parte de los sistemas formadores de imágenes [32, 84]. En estos sistemas la señal de entrada se considera como una síntesis lineal de funciones sinusoidales (desarrollo de Fourier). El principio de superposición permite analizar independientemente los efectos del sistema sobre cada una de las componentes del desarrollo, y calcular la respuesta del sistema a la señal original mediante la superposición lineal de las respuestas individuales.

La utilización de lentes en los sistemas ópticos implica el acceso a las transformadas de Fourier de las imágenes, de aquí la conveniencia del uso del análisis de Fourier para el estudio de estos procesadores. En estos términos es relativamente sencillo implementar operaciones de filtrado espacial sobre el espectro de frecuencias de la señal objeto. Ahora bien, si deben considerarse interacciones campo-aperturas en la región de difracción de Fresnel, donde las informaciones espaciales y espectrales de las señales están mezcladas, la aplicación del análisis de Fourier deja de ser sencilla. Es el caso de los sistemas de múltiples aperturas en "tandem", aplicados por ejemplo al filtrado espacial en la región de Fresnel.

Como se ha señalado en el capítulo anterior, en este tipo de dispositivos son de frecuente empleo las redes binarias y periódicas que generan por simple propagación campos también periódicos, y que

son binarios. Dado que la interacción campo difractado-apertura binaria representa un simple producto (dentro de la aproximación de Kirchhoff), parece adecuado aquí introducir la utilización del análisis de Walsh-Hadamard [26].

Las funciones de Walsh-Hadamard constituyen un conjunto completo y ortogonal de funciones bivaluadas, lo que permite que cualquier función arbitraria (por ejemplo la función transmitancia de una apertura en un sistema óptico) sea descompuesta como una síntesis lineal en esta base. Por lo tanto, el comportamiento difractivo de un dispositivo óptico con una o varias aperturas, podrá obtenerse mediante el análisis de los aportes difractivos de cada una de las funciones de Walsh intervinientes en los desarrollos de las funciones transmitancia de tales aperturas. Ejemplos de este tipo de sistemas son los filtros espaciales de Talbot y Lau presentados en este capítulo, y cuyas versiones generalizadas consistentes en arreglos de múltiples aperturas binarias, se proponen y estudian en los Capítulos 4 y 5.

Además se hace notar que el análisis de Walsh-Hadamard ha adquirido gran importancia a partir de su comprobada utilidad en técnicas de procesamiento digital de imágenes [30] y otros campos relacionados con el procesamiento de la información [27].

## 3.2 Definiciones Matemáticas

### 3.2.1 Frecuencia y secuencia

El término *frecuencia* es aplicable al conjunto de funciones sinusoidales (periódicas) para las cuales los cruces por cero están uniformemente espaciados. Este parámetro  $f$  es el que caracteriza una función individual perteneciente al conjunto de las funciones sinusoidales  $\{\sin(2\pi ft)\}$  y  $\{\cos(2\pi ft)\}$ , y puede interpretarse como el número de ciclos completos que genera la función por unidad de tiempo, o un medio de la cantidad de cruces por cero en la unidad de tiempo [86]. Para el caso de las funciones no-periódicas se define la frecuencia generalizada o *secuencia* como un medio del número de cruces por cero en la unidad de tiempo [87].

Cuando se trabaja sobre coordenadas espaciales como en el presente caso, debe entenderse que las frecuencias espaciales y las secuencias espaciales se toman lógicamente por unidad de longitud.

### 3.2.2 Las funciones de Rademacher

Las funciones de Rademacher son un conjunto ortogonal aunque incompleto de funciones periódicas y bivaluadas definidas dentro de una región finita del espacio. Estas funciones fueron desarrolladas por H. Rademacher [85] en 1922.

La función de Rademacher de orden  $k \geq 0$ , que se denotará como  $R_k(t)$ , es un tren de pulsos



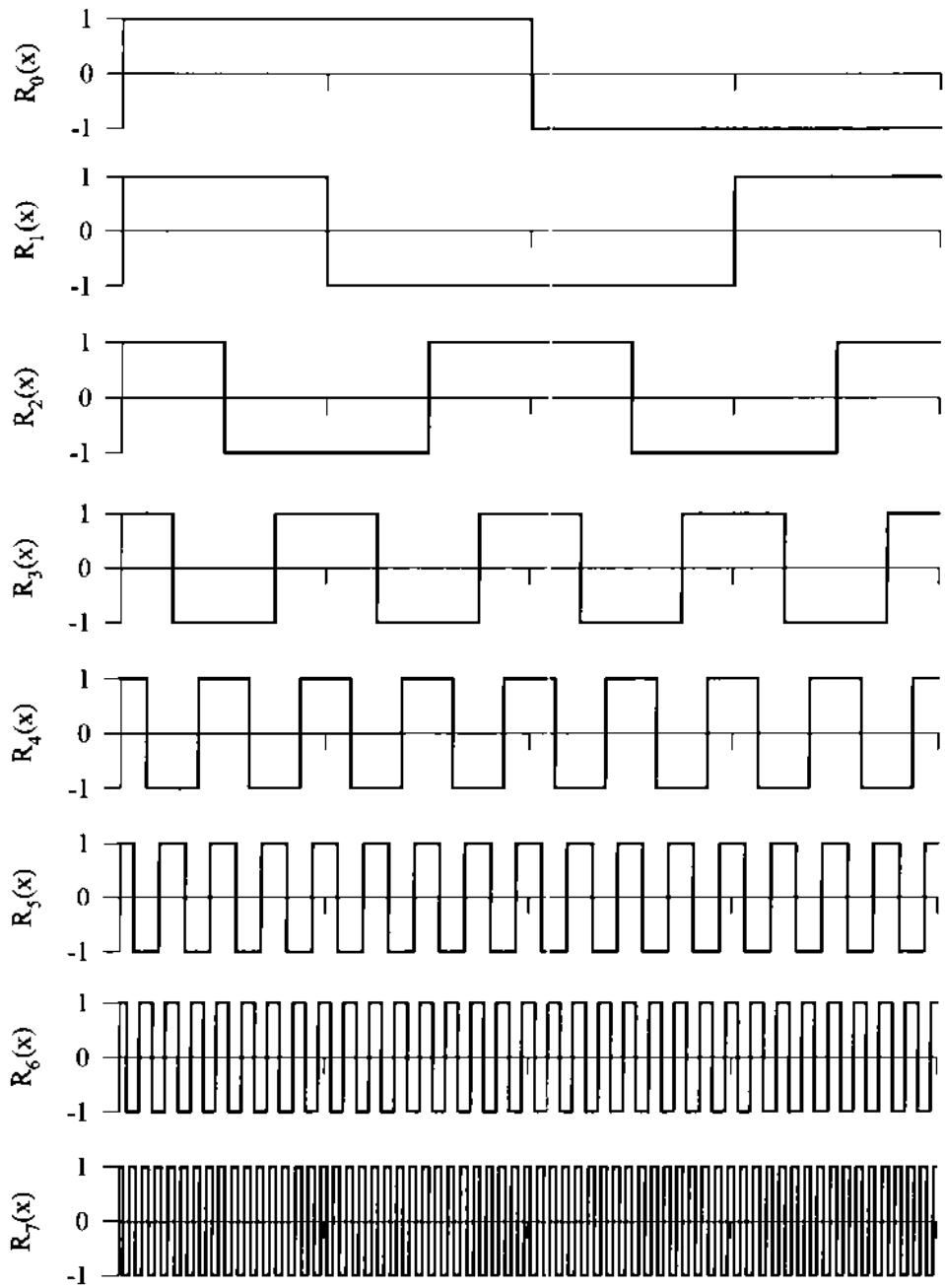


Figura 3-1: Primeros órdenes de las funciones de Rademacher.

rectangulares con  $2^k$  ciclos en el intervalo  $[0,1)$ , que toma los valores  $+1$  o  $-1$ . En la **figura 3.1** se indican las gráficas de los primeros órdenes de las funciones según la convención empleada en este trabajo. Puede notarse que salvo para  $k = 0$  y  $k = 1$ , estas funciones son periódicas y poseen un período dependiente del orden  $k$  cuyo valor es  $d = 2^{1-k}$ , es decir

$$R_k(t + \alpha 2^{1-k}) = R_k(t) , \quad k = 2, 3, \dots ; \quad \alpha = \pm 1, \pm 2, \dots , \quad (3.1)$$

y lógicamente su secuencia será  $1/d = 2^{k-1}$ .

Pueden definirse las funciones de Rademacher utilizando la función signo:

$$R_k(t) = \text{sign} [\cos (2^k \pi t)] = \text{sign} [\cos (2\pi t/d)] \quad , \quad t \in [0, 1). \quad (3.2)$$

Para el caso de un dominio espacial centrado, del tipo  $x \in [-x_0/2, x_0/2]$ , la expresión (3.2) resulta:

$$R_k(x) = \begin{cases} \text{sign} \left[ -\text{sen} \left( \pi \frac{x}{x_0} \right) \right] & ; \quad k = 0 \\ \text{sign} \left[ -\text{cos} \left( 2\pi \frac{x}{x_0} \right) \right] & ; \quad k = 1 \\ \text{sign} \left[ \text{cos} \left( 2^k \pi \frac{x}{x_0} \right) \right] & ; \quad k > 1 . \end{cases} \quad (3.3)$$

Con este cambio de variables, el período espacial de una función de orden  $k$  toma la siguiente forma:

$$d_k = 2^{1-k} x_0 . \quad (3.4)$$

### 3.2.3 Las funciones de Walsh

Las funciones de Walsh forman un conjunto completo y ortogonal de funciones bivaluadas, y pueden definirse como productorias de funciones de Rademacher mediante la siguiente expresión [88]:

$$Wal_n(x) = \prod_{k=0}^m [R_k(x)]^{g_k} ; \quad |x| \leq x_0/2 , \quad (3.5)$$

donde  $Wal_n(x)$  es la función de Walsh de orden  $n \geq 0$ , y los coeficientes  $m$  y  $g_k$  están relacionados con  $n$  a través de su desarrollo binario:

$$n = \sum_{k=0}^m 2^k g_k . \quad (3.6)$$

Es decir que  $m$  es el rango del desarrollo binario de  $n$ , y los coeficientes  $g_k$  son los correspondientes bits, 0 o 1.

A diferencia de las funciones de Rademacher, las funciones de Walsh no son en general periódicas.

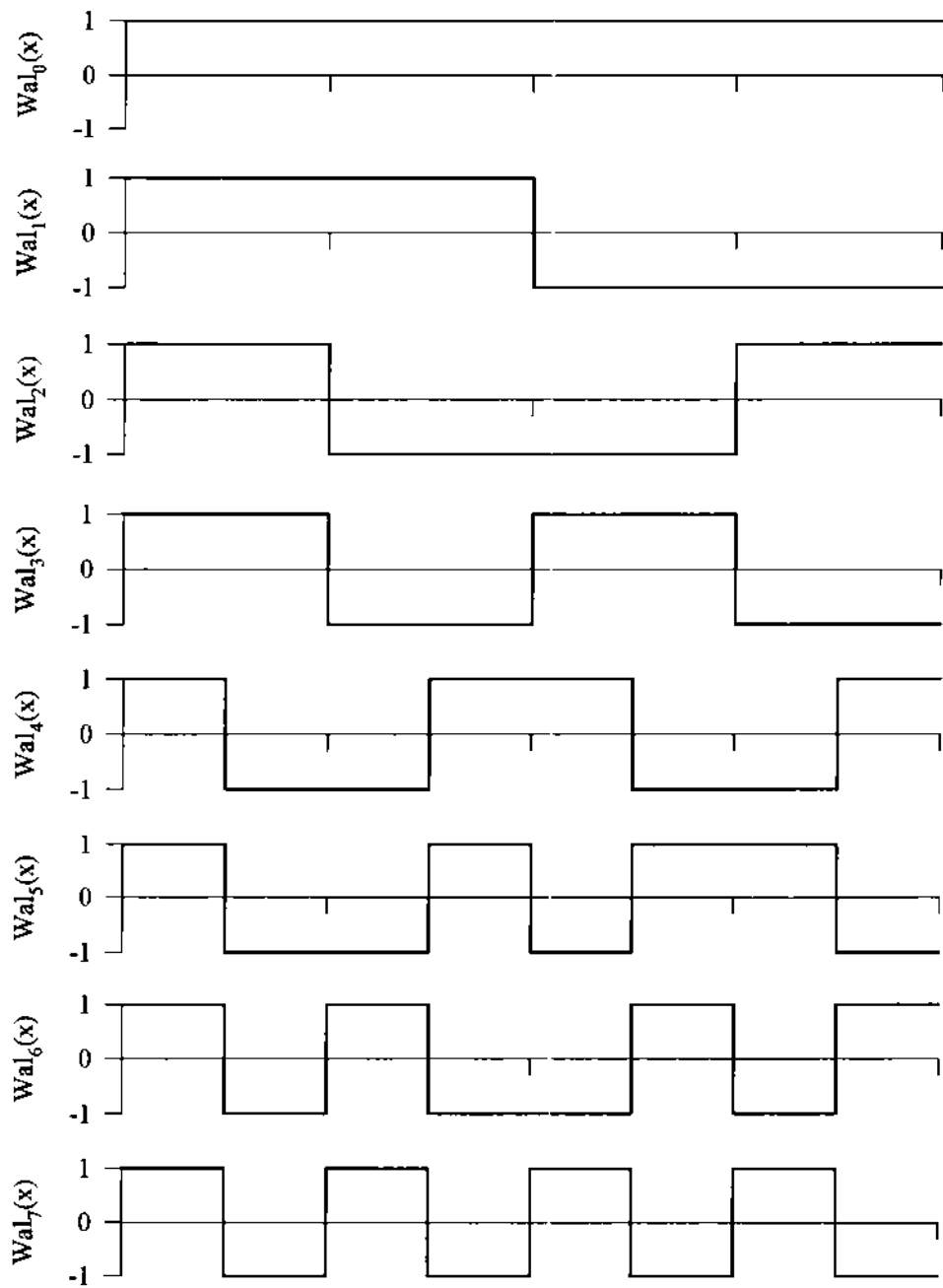


Figura 3-2: Primeros órdenes de las funciones de Walsh.

En la figura 3.2 se encuentran representados los primeros órdenes de estas funciones; debe notarse que se hallan ordenadas en forma creciente con su secuencia (convención de Walsh [89]). La secuencia de una función de Walsh de orden  $n$  viene dada por:

$$1/d = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ n/2 & \text{si } n \text{ par} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}, \quad (3.7)$$

Para ser consistente con la definición de la secuencia como la cantidad de cruces por cero  $n$  (o  $n+1$ ) dividido por dos, debe tomarse estrictamente el intervalo semicerrado  $x \in [-x_0/2, x_0/2)$ , pero por simplicidad en realidad se trabaja con el dominio  $|x| \leq x_0/2$ , como se indica en (3.5).

Utilizando las expresiones (3.3), la definición (3.5), resulta:

$$\begin{aligned} \text{Wal}_n(x) = & \left[ \text{sign} \left( -\text{sen} \left( \pi \frac{x}{x_0} \right) \right) \right]^{g_0} \times \\ & \times \text{sign} \left[ -\cos \left( 2\pi \frac{x}{x_0} \right) \right]^{g_1} \prod_{k=2}^m \left[ \text{sign} \left( \cos \left( 2^k \pi \frac{x}{x_0} \right) \right) \right]^{g_k}; \quad |x| \leq x_0/2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Con el propósito de analizar las propiedades de difracción de configuraciones ópticas, es conveniente reescribir las funciones de Walsh en todo el espacio y tomando los valores 0 y 1, en lugar de  $\pm 1$ ; es decir:

$$W_n(x) = \frac{1}{2} [1 + \text{Wal}_n(x)] \text{rect} \left( \frac{x}{x_0} \right). \quad (3.9)$$

### 3.2.4 Transformada de Walsh-Hadamard

La completitud del conjunto de las funciones de Walsh  $\{W_n(x)\}$ , permite desarrollar cualquier función arbitraria  $f(x)$  definida en el intervalo  $x \in [-x_0/2, x_0/2]$  como una síntesis de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \text{Wal}_n(x), \quad (3.10)$$

donde, dada la ortogonalidad de las funciones de Walsh, los coeficientes del desarrollo  $w_n$  se pueden expresar como:

$$w_n = \frac{1}{x_0} \int_{-x_0/2}^{+x_0/2} f(x) \text{Wal}_n(x) dx. \quad (3.11)$$

La expresión (3.11) puede interpretarse como la transformada de Walsh-Hadamard (WHT) de la función  $f(x)$ :

$$w_n = WHT \{f(x)\} , \quad (3.12)$$

que resulta ser una función de variable discreta  $n = 0, 1, 2, \dots$  (dominio de las secuencias), y representa los diferentes pesos de la función  $f(x)$  en la secuencia  $n$ -ésima, es decir, su espectro de secuencias.

### 3.3 Propiedades difractivas de las funciones de Walsh

En trabajos precedentes se demostró que el formalismo de las funciones de Walsh bajo ciertas circunstancias es el adecuado para estudiar los sistemas ópticos donde tanto la propagación libre de la luz como la interacción entre el campo y las aperturas son relevantes [24, 25].

#### 3.3.1 Iluminación coherente

Bajo iluminación coherente los desarrollos indicaron que en determinadas circunstancias las funciones de Walsh verifican la condición de autoimagen [24], a pesar de tratarse de funciones de dominio finito y en general no-periódicas. Para demostrarlo se procede de la siguiente forma.

Se considera una apertura binaria cuya función transmitancia es una única función de Walsh binarizada arbitraria  $W_n(x)$ . Si ésta es iluminada por una onda plana monocromática de longitud de onda  $\lambda$  que se propaga en la dirección  $z$ , la amplitud de campo difractado en la región de difracción de Fresnel a una distancia  $z$  de la red, será:

$$u_n(x; z) = F_z \{W_n(x)\} , \quad (3.13)$$

donde  $F_z \{\dots\}$  es el operador difracción de Fresnel:

$$F_z \{W_n(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x') \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} (x - x')^2\right) dx' \quad (3.14)$$

Según las expresiones (3.5) y (3.9), para  $W_n(x)$  puede proponerse:

$$W_n(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \prod_{k=0}^m [R_k(x)]^{g_k} \right] \text{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) , \quad (3.15)$$

Introduciendo aquí los desarrollos de Fourier de las funciones de Rademacher intervinientes en la síntesis de  $Wal_n(x)$ , se obtiene:

$$W_n(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{s_0=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{s_m=-\infty}^{+\infty} c_{s_0}^{g_0} \dots c_{s_m}^{g_m} \exp \left[ 2\pi i x \left( \frac{g_0 s_0}{d_0} + \dots + \frac{g_m s_m}{d_m} \right) \right] \right\} \text{rect} \left( \frac{x}{x_0} \right). \quad (3.16)$$

Reemplazando la relación (3.16) en la expresión (3.14), y desestimando el patrón de Fresnel producido por una abertura finita  $|x| \leq x_0/2$ , se llega a:

$$u_n(x; z) \simeq \frac{1}{2} \exp \left( \frac{i\pi x^2}{\lambda z} \right) \sum_{k_0} \dots \sum_{k_m} c_{k_0}^{g_0} \dots c_{k_m}^{g_m} \exp \left( -\frac{i\pi x^2}{\lambda z} \right) * \text{sinc} \left[ x_0 \left( \frac{x}{\lambda z} - \frac{g_0 k_0}{d_0} - \dots - \frac{g_m k_m}{d_m} \right) \right] \quad (3.17)$$

donde  $*$  denota operación convolución.

Para que las funciones de Walsh exhiban, en la propagación libre del campo difractado, propiedades de autoimagen, debe por lo menos minimizarse el efecto del tamaño finito de  $W_n(x)$  sobre  $u_n(x; z)$  en la ecuación (3.17), ya que el fenómeno se verifica para aperturas de extensión infinita. En este sentido, la serie de funciones sinc deben aproximarse a funciones  $\delta$  de Dirac. Esto será factible en la medida que la separación entre los sucesivos máximos del arreglo de funciones sinc, denotado por  $\text{sinc}(x; k_0, \dots, k_m)$ , sea mucho mayor que los anchos individuales de las funciones. El ancho medio para todas las funciones sinc será  $\Delta x = \lambda z/x_0$ , y la separación entre máximos sucesivos de la función  $\text{sinc}(x; k_p = 1, \dots, k_{j-1} = 1, k_j, k_{j+1} = 1, \dots, k_m = 1)$  es  $\delta x_j = \lambda z/d_j = 2^{j-1} \lambda z/x_0$ , con  $p \leq j \leq m$ , donde  $p$  corresponde al menor orden de las funciones de Rademacher intervinientes en la síntesis de  $W_n(x)$ . Como  $\delta x_j/\delta x_p = 2^{j-p}$ , siempre habrá coincidencia entre algunos máximos. Por otra parte, la mínima distancia entre máximos adyacentes del arreglo completo será la correspondiente a  $p$ :  $\delta x = \delta x_p = 2^{p-1} \lambda z/x_0$ . Por lo tanto la aproximación deseada  $\text{sinc}(\cdot) \simeq \delta(\cdot)$  será válida si  $\delta \tau \gg \Delta x$ , o equivalentemente  $2^p \gg 1$ . Si esta condición es satisfecha pueden reemplazarse en (3.17) las funciones sinc por funciones  $\delta$ , y realizar la convolución, obteniéndose:

$$u_n(x; z) \simeq \frac{1}{2} \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \exp \left( -2\pi i x \sum_{r=p}^m \frac{g_r k_r}{d_r} \right) \times \exp \left[ -i\pi \lambda z \left( \sum_{r=p}^m \frac{g_r k_r}{d_r} \right)^2 \right]. \quad (3.18)$$

Por conveniencia se reescribe la expresión (3.18), separando el término proveniente de una de las funciones

de Rademacher arbitraria  $R_j(x)$  presentes en la síntesis, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_n(x; z) &\simeq \frac{1}{2} \sum_{k_p} \dots \sum_{k_{j-1}} \sum_{k_{j+1}} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_{j-1}}^{g_{j-1}} c_{k_{j+1}}^{g_{j+1}} \dots c_{k_m}^{g_m} \times \\
 &\times \exp\left(-2\pi i x \sum_{r \neq j} \frac{g_r k_r}{d_r}\right) \exp\left[-i\pi \lambda z \left(\sum_{r \neq j} \frac{g_r k_r}{d_r}\right)^2\right] \times \\
 &\times \sum_{k_j} c_{k_j} \exp\left(-2\pi i x \frac{k_j}{d_j}\right) \exp\left(-i\pi \lambda z \frac{k_j^2}{d_j^2}\right) \exp\left(-2\pi i \frac{\lambda z k_j}{d_j} \sum_{r \neq j} \frac{g_r k_r}{d_r}\right). \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Analizando las dos últimas exponenciales, la sumatoria sobre  $k_j$  reproducirá el desarrollo de Fourier de  $R_j(x)$ , siempre que:

$$\lambda z \frac{k_j^2}{d_j^2} = 2h, \quad h = 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

y:

$$\frac{\lambda z k_j}{d_j} \sum_{r \neq j} \frac{g_r k_r}{d_r} = q, \quad q = 1, 2, \dots. \quad (3.21)$$

Ambas condiciones se verifican si se cumple la relación:

$$z_j = \frac{2\alpha x_0^2}{\lambda 2^{p+j-2}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.22)$$

donde se utilizó la expresión (3.4). En estos valores de  $z$ , la distribución de amplitud dada por la ecuación (3.19) será la  $\alpha$ -ésima autoimagen positiva de  $R_j(x)$  espacialmente modulada por las restantes funciones de Rademacher desenfocadas, las cuales actuarán como fuente de ruido.

Puede notarse que:

$$z_j = 2^{m-j} z_m, \quad p < j < m; \quad (3.23)$$

lo que significa que la primera autoimagen de  $R_j(x)$  coincidirá con la autoimagen número  $\alpha = 2^{m-j}$  de  $R_m(x)$ , con lo que se deduce que en los planos de las autoimágenes asociadas a  $R_p(x)$ , todas las funciones de Rademacher que sintetizan  $W_n(x)$  se encontrarán correctamente enfocadas. De forma que, para las distancias:

$$z = \alpha z_0 = \frac{2\alpha x_0^2}{\lambda 2^{2p-2}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots; \quad (3.24)$$

las relaciones (3.20) y (3.21) se verifican para todo  $r$ . Entonces de las expresiones (3.18) o (3.19) se obtiene:

$$u_n(x; z) \simeq \frac{1}{2} \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \exp\left(-2\pi i x \sum_{r=p}^m \frac{g_r k_r}{d_r}\right) = \frac{1}{2} \prod_{k=p}^m [R_k(x)]^{g_k} = \frac{1}{2} Wal_n(x). \quad (3.25)$$

Considerando nuevamente el factor 1, desestimado en (3.17), será:

$$u_n(x; z) \simeq \frac{1}{2} [1 + Wal_n(x)] \quad , \quad (3.26)$$

que, dentro del dominio  $x \in [-x_0/2, x_0/2]$ , es la distribución de amplitud correspondiente a una autoimagen de la función de Walsh  $W_n(x)$  con contraste directo.

De esta manera, se concluye que las funciones de Walsh verifican el efecto Talbot siempre que el menor orden de las funciones de Rademacher presentes en la productoria (llamado  $p$ ) sea alto, es decir si  $2^p \gg 1$ .

### 3.3.2 Iluminación incoherente

En el caso de la iluminación incoherente, análogamente se demostró que las funciones de Walsh verifican el efecto Lau bajo circunstancias similares [25], a pesar de tratarse de funciones no periódicas. Se

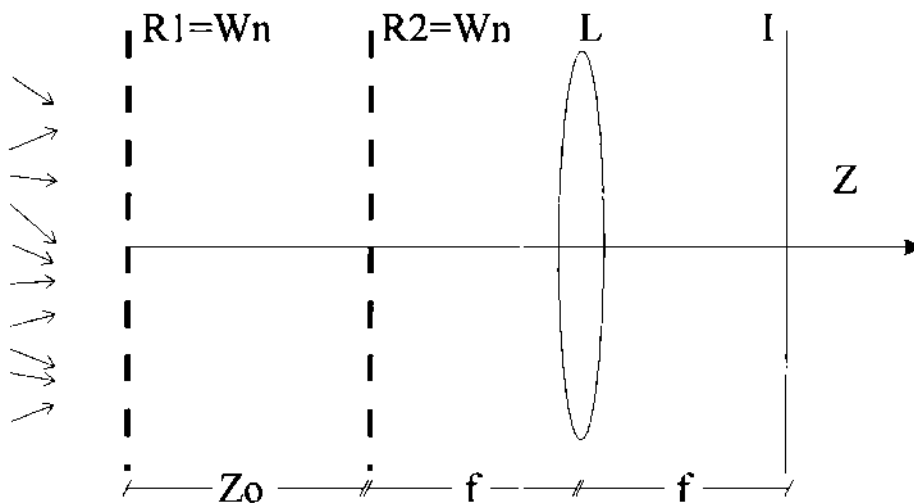


Figura 3-3: Dispositivo Lau con funciones de Walsh como transmitancias.



considera un sistema de dos aperturas binarias idénticas de función transmitancia  $W_n(x)$  que viene dada por la ecuación (3.9). Como indica la figura 3.3 en un típico dispositivo Lau, la primera red  $R1$  es iluminada por una fuente cuasimonocromática y espacialmente incoherente de longitud de onda  $\lambda$  que se propaga en la dirección  $z$ . De forma que la función intensidad mutua  $\Gamma(x_1, x_2; z = 0^{(+)})$  inmediatamente detrás de  $R1$ , será:

$$\Gamma(x_1, x_2; z = 0^{(+)}) = W_n(x_1)W_n^*(x_2)\delta(x_1 - x_2). \quad (3.27)$$

Según el Teorema de van Cittert-Zernike [39], y a partir de (3.27), la función  $\Gamma$  inmediatamente antes de la red  $R2$ , luego de propagarse libremente una distancia  $z_0$ , tendrá la siguiente expresión:

$$\Gamma(x_1, x_2; z_0^{(-)}) = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_0}(x_1^2 - x_2^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x_1') \exp\left[\frac{-2i\pi}{\lambda z_0}x_1'(x_1 - x_2)\right] dx_1'. \quad (3.28)$$

En  $z = z_0$  el campo interactúa con la segunda red  $R2$ , también de transmitancia  $W_n(x)$ , inmediatamente después de esta nueva interacción la función de coherencia mutua vendrá dada por:

$$\Gamma(x_1, x_2; z_0^{(+)}) = \Gamma(x_1, x_2; z_0^{(-)})W_n(x_1)W_n^*(x_2). \quad (3.29)$$

En el plano focal posterior de la lente convergente, la intensidad mutua será:

$$\Gamma_f(x_1, x_2; z_0 + 2f) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_1', x_2'; z_0^{(+)}) \exp\left[\frac{-2i\pi}{\lambda f}(x_1x_1' - x_2x_2')\right] dx_1' dx_2'. \quad (3.30)$$

En esta expresión, tomando  $x_1 = x_2 = x$  como se indicó en la ecuación (2.41), se obtiene la distribución de intensidad en el plano focal  $I_f(x)$ :

$$I_f(x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_1', x_2'; z_0^{(+)}) \exp\left[\frac{-2i\pi}{\lambda f}x(x_1' - x_2')\right] dx_1' dx_2'. \quad (3.31)$$

Introduciendo la expresión con los desarrollos de Fourier (3.16) en (3.28), y aplicando este resultado a (3.29) y (3.31), se llega a:

$$I_f(x) = C + \sum_{k_p = -\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m = -\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \iint_{-\infty}^{+\infty} W_n(x'_1) W_n^*(x'_2) \operatorname{sinc} \left( x'_1 - x'_2 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \exp \left( \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1'^2 - x_2'^2) \right) \times \\
& \times \exp \left[ \frac{-2i\pi}{\lambda f} x (x'_1 - x'_2) \right] dx'_1 dx'_2, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

donde la constante  $C$  es proporcional al área definida por  $W_n(x)$  y donde se explicitó a  $p$  como el menor orden de las funciones de Rademacher presentes en la productoria de  $W_n(x)$ . Las funciones sinc pueden sustituirse por funciones  $\delta$  de Dirac siempre que  $2^p \gg 1$ , como se dedujo en la sección anterior. Con dicho reemplazo y aplicando las deltas, se obtiene:

$$\begin{aligned}
I_f(x) &= C + \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{-\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x'_1) W_n(x'_1 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j}) \exp \left( 2i\pi x'_1 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) dx'_1 \times \\
& \times \exp \left[ -i\pi \lambda z_0 \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right)^2 \right] \exp \left( 2i\pi x \frac{z_0}{f} \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right). \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Analizando la exponencial con la sumatoria al cuadrado en la ecuación (3.33), la intensidad en el plano focal posterior representará un sistema de franjas de alto contraste si es que se verifica:

$$\lambda z_0 \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right)^2 = 2\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots \tag{3.34}$$

Esta condición se cumple si  $z_0$  guarda la relación propuesta en (3.24), es decir:

$$z_0 = \frac{2\alpha x_0^2}{\lambda 2^{2p-2}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots \tag{3.35}$$

Con estos valores de  $z_0$  la intensidad (3.33), resulta:

$$I_f(x) = C + \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{-\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \times$$

$$\times A_n(\alpha; \beta) \exp \left( 2i\pi x \frac{z_0}{f} \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right), \quad (3.36)$$

donde se ha introducido la función Ambigüedad [90]:

$$A_n(\alpha; \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x') W_n(x' - 2\alpha\beta d_p) \exp \left( \frac{2i\pi\beta x'}{d_p} \right) dx'. \quad (3.37)$$

En la expresión (3.37) el factor  $\beta \equiv \sum_{j=p}^m g_j k_j 2^{j-p}$  es un entero impar, y  $d_p = 2^{1-p} x_0$  es el período de la función de Rademacher de menor orden  $p$  entre las que sintetizan la función  $W_n(x)$ .

La ecuación (3.36) representa la productoria de los desarrollos de Fourier que sintetizan  $W_n(x)$  magnificados en  $z_0/f$  y con los coeficientes  $c_{k_j}$  pesados por los valores que toma la función Ambigüedad  $A_n(\alpha; \beta)$ . De esta manera, el patrón de franjas observado en el plano focal, reproduce la función apertura de Walsh salvo los factores de peso mencionados.

En este caso, como con los obtenidos en la sección anterior, los resultados también fueron avalados por una serie de experiencias [25].

### 3.4 Funciones transmitancia generales. Aplicaciones al filtrado espacial

En las dos secciones anteriores se obtuvieron las respuestas de sistemas con aperturas cuya función transmitancia es una única función de Walsh. Se demostró que las respuestas de estos sistemas, tanto bajo iluminación coherente como en el caso de iluminación incoherente, dan lugar a expresiones relativamente simples, que dentro de ciertas condiciones, verifican los efectos Talbot y Lau. Esto constituye la generalización de los fenómenos Talbot y Lau para aperturas finitas y no periódicas.

La importancia de estos resultados surgidos del análisis de las funciones de Walsh como transmitancias en sistemas ópticos se debe a que, como ya se dijo, constituyen un conjunto completo de funciones. De esta manera, cualquier función transmitancia arbitraria situada en un cierto sistema óptico, puede descomponerse como una superposición de funciones de Walsh. En base a dicha síntesis, la respuesta del sistema se obtendrá como la superposición lineal de las respuestas de las funciones de Walsh individuales presentes en el desarrollo.

Dadas las propiedades de generación de los efectos Talbot y Lau por parte de las funciones de Walsh, se han propuesto dispositivos que realizan el filtrado espacial con redes cuyas transmitancia son funciones de Walsh [24, 25], análogos a los que emplean redes periódicas de Ronchi [69-71]. Los

dispositivos clásicos de filtrado espacial utilizando iluminación coherente e incoherente fueron descritos en el capítulo anterior (sección 2.3.1). Las generalizaciones y extensiones del análisis a sistemas ópticos de múltiples aperturas, y sus aplicaciones en dispositivos de filtrado espacial son algunos de los aportes originales de esta tesis, y serán desarrollados en detalle en los dos capítulos siguientes.

## Capítulo 4

# MÚLTIPLES INTERACCIONES: APERTURA-CAMPO DIFRACTADO

Partiendo de los resultados obtenidos en trabajos anteriores y detallados en el Capítulo 3 (sección 3.3.1) para el caso de una sola apertura, se analizará en el presente capítulo el comportamiento difractivo de sistemas de múltiples aperturas periódicamente espaciadas, bajo una iluminación espacialmente coherente. No se restringirá el estudio a aperturas cuyas funciones transmitancias están representadas por una única función de Walsh, sino que se considerará el caso de aperturas de transmitancias reales arbitrarias.

### 4.1 Propiedades difractivas

Se considerará una apertura general. Su amplitud transmitancia siempre puede sintetizarse como una superposición lineal de funciones de Walsh en la forma:

$$t(x) = \sum_n a_n W_n(x) , \quad (4.1)$$

donde las funciones  $\{W_n(x)\}$  están definidas en (3.10) y las cantidades  $a_n$  son los coeficientes del desarrollo.

Si dicha apertura es iluminada por una onda plana monocromática que se propaga a lo largo del eje

$z$ , el campo difractado en la región de difracción de Fresnel a una distancia  $z$  será:

$$\begin{aligned} u(x; z) &= F_z \{u(x; 0)\} \\ &= \sum_n a_n F_z \{W_n(x)\} , \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $F_z \{\dots\}$  es el operador transformada de Fresnel definido en (3.14).

Se estableció en el capítulo anterior (sección 3.3.1, ecuación (3.24)) que las distancias de autoimagen de una función de Walsh tienen una dependencia con el menor orden de las funciones de Rademacher presentes en su síntesis:  $p$ , dada por:

$$z = \alpha z_0 = \frac{2\alpha x_0^2}{\lambda 2^{2p-2}} , \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots , \quad (4.3)$$

siempre que  $2^p \gg 1$ . De esta forma, a una determinada distancia  $z = z_0$  de la apertura, algunas funciones de Walsh generarán autoimágenes y otras no. Por lo tanto la ecuación (4.2) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$u(x; z_0) = \sum_{n'} a_{n'} F_{z_0} \{W_{n'}(x)\} + \sum_{n''} a_{n''} F_{z_0} \{W_{n''}(x)\} , \quad (4.4)$$

donde  $\{W_{n'}(x)\}$  son aquellas funciones de Walsh para las que la distancia  $z_0$  es una distancia de autoimagen (de contraste positivo), mientras que  $\{W_{n''}(x)\}$  son las restantes funciones de Walsh que contribuirán al campo en esa distancia con un cierto nivel de ruido proveniente de sus autoimágenes desenfocadas. En este sentido, puede escribirse:

$$F_{z_0} \{W_{n'}(x)\} = W_{n'}(x) , \quad (4.5)$$

$$F_{z_0} \{W_{n''}(x)\} = \Phi_{n''}(x; z_0) , \quad (4.6)$$

donde las funciones  $\{\Phi_{n''}(x; z_0)\}$  representan los aportes de las autoimágenes desenfocadas. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.4), el campo difractado a una distancia  $z_0$  será:

$$u(x; z_0) = \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) . \quad (4.7)$$

Se considera ahora un arreglo de aperturas equiespaciadas arbitrarias pero con idéntica función transmitancia  $t(x)$ , tal como lo indica la figura 4.1. Es decir que, detrás de la apertura que se acaba de estudiar se colocan una serie de réplicas de la misma a lo largo del eje  $z$ , situadas a las distancias  $z = \alpha z_0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$  dadas por la expresión (4.3).

En este caso, cuando el campo difractado por la primera apertura (ecuación (4.7)) interactúa con la

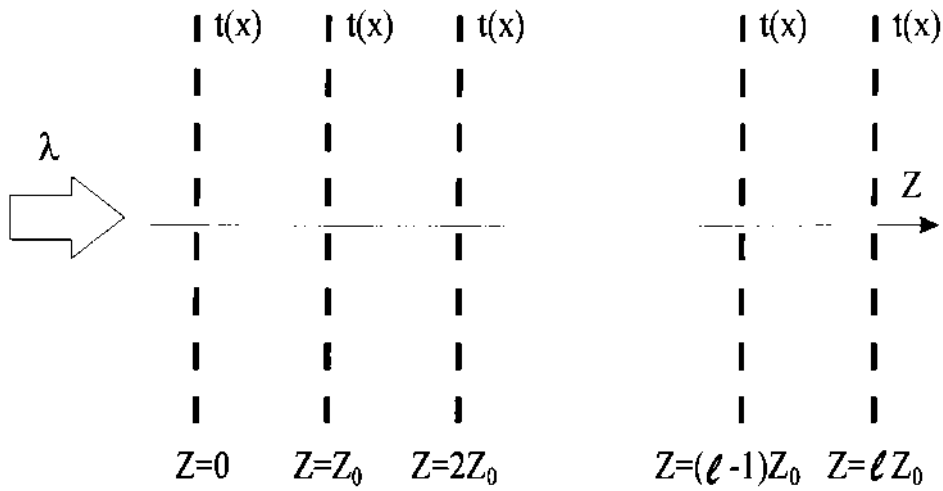


Figura 4-1: Dispositivo de múltiples aperturas.

segunda apertura de función transmitancia  $t(x)$  (dada por el desarrollo (4.1)), la amplitud transmitida resulta:

$$\begin{aligned}
 u(x; z_0^{(+)}) &= t(x) u(x; z_0^{(-)}) = \\
 &= t(x) \left[ \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) \right] = \\
 &= \left( \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + \sum_{n''} a_{n''} W_{n''}(x) \right) \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) = \\
 &= \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + \sum_{n''} a_{n''} W_{n''}(x) \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) = \\
 &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} a_{n_1} a_{n_2} W_{n_1}(x) W_{n_2}(x) + \sum_{n'} \sum_{n''} a_{n'} a_{n''} W_{n'}(x) W_{n''}(x) +
 \end{aligned}$$

$$+t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) , \quad (4.8)$$

donde los índices  $n'_1$  y  $n'_2$  recorren los mismos valores que  $n'$  y se los introdujo para explicitar los productos cruzados de las funciones de Walsh  $\{Wal_{n'}(x)\}$ . Aquí puede utilizarse la siguiente propiedad para dos funciones de Walsh arbitrarias de órdenes  $n'$  y  $n''$ :

$$Wal_{n'}(x) Wal_{n''}(x) = Wal_{n' \oplus n''}(x) , \quad (4.9)$$

donde  $n' \oplus n''$  denota el número cuyo desarrollo binario presenta 0 en las posiciones donde los desarrollos binarios de  $n'$  y  $n''$  poseen el mismo número (0 o 1), y presenta un 1 donde son diferentes. Tal operación es también denominada suma diádica o suma de módulo 2 sobre los desarrollos binarios. En base a la ecuación (4.9) y a la definición (3.9), se obtiene una relación para dos funciones  $W_{n'}(x)$  y  $W_{n''}(x)$  dada por:

$$W_{n'}(x) W_{n''}(x) = \frac{1}{2} [W_{n'}(x) + W_{n''}(x) - \overline{W}_{n' \oplus n''}(x)] , \quad (4.10)$$

donde  $\overline{W}_{n' \oplus n''}(x)$  denota la función de Walsh  $W_{n' \oplus n''}(x)$  pero con contraste invertido.

Reemplazando la expresión (4.10) en el desarrollo (4.8), y distribuyendo, se obtiene:

$$\begin{aligned} u(x; z_0^{(+)}) &= \frac{1}{2} \sum_{n'_1} \sum_{n'_2} a_{n'_1} a_{n'_2} W_{n'_1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{n'_1} \sum_{n'_2} a_{n'_1} a_{n'_2} W_{n'_2}(x) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n'_1} \sum_{n'_2} a_{n'_1} a_{n'_2} \overline{W}_{n'_1 \oplus n'_2}(x) + \frac{1}{2} \sum_{n'} \sum_{n''} a_{n'} a_{n''} W_{n'}(x) + \frac{1}{2} \sum_{n'} \sum_{n''} a_{n'} a_{n''} W_{n''}(x) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n'} \sum_{n''} a_{n'} a_{n''} \overline{W}_{n' \oplus n''}(x) + t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agrupando las sumatorias, se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u(x; z_0^{(+)}) &= \sum_{n'_2} a_{n'_2} \sum_{n'_1} a_{n'_1} W_{n'_1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{n''} a_{n''} \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + \frac{1}{2} \sum_{n'} a_{n'} \sum_{n''} a_{n''} W_{n''}(x) - \\ &- \frac{1}{2} \left[ \sum_{n'_1} \sum_{n'_2} a_{n'_1} a_{n'_2} \overline{W}_{n'_1 \oplus n'_2}(x) + \sum_{n'} \sum_{n''} a_{n'} a_{n''} \overline{W}_{n' \oplus n''}(x) \right] + t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( N' + \frac{N''}{2} \right) \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) + \frac{N'}{2} \sum_{n''} a_{n''} W_{n''}(x) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_n \sum_{n'} a_n a_{n'} \overline{W}_{n \oplus n'}(x) + t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) , \tag{4.12}
\end{aligned}$$

donde se introdujeron las cantidades:

$$N' \equiv \sum_{n'} a_{n'} , \quad N'' \equiv \sum_{n''} a_{n''} . \tag{4.13}$$

Puede notarse del análisis de la expresión del campo en  $z_0$ , que debido a la interacción con la apertura reaparecen las funciones  $\{W_{n''}(x)\}$  que estaban desenfocadas, pero además se generan nuevas funciones de Walsh aunque con contraste invertido: las funciones  $\{\overline{W}_{n \oplus n'}(x)\}$  que no existían en la síntesis original.

Una vez que el campo interactuó con la segunda apertura, se considera la posterior propagación hacia la tercera apertura colocada también a una distancia  $z_0$ .

Para esto debe estudiarse cuidadosamente la propagación libre de las funciones  $\{\overline{W}_{n \oplus n'}(x)\}$ , donde, como se indicó en las ecuaciones (4.4) a (4.7),  $n$  recorre los órdenes  $n'$  de las funciones de Walsh cuya distancia de autoimagen es  $z_0$ , más los órdenes  $n''$  de las que se hallan desenfocadas a dicha distancia. La distancia de Talbot de las funciones  $\{\overline{W}_{n \oplus n'}(x)\}$  coincidirá con la de las funciones de contraste directo  $\{W_{n \oplus n'}(x)\}$ . Ahora bien, la distancia de autoimagen depende, en cuanto al orden de la función de Walsh en cuestión, exclusivamente del menor orden de las funciones de Rademacher presentes en su productoria (ver ecuación (3.24)), llamado genéricamente  $p$ . De aquí que las funciones  $\{W_{n''}(x)\}$  poseerán un factor  $p''$  distinto al de las funciones  $\{W_{n'}(x)\}$ , dado por  $p'$ ; aún más, de (3.23) se deduce que  $p' > p''$  (ya que para que  $z_0$  no sea distancia de autoimagen de  $W_{n'}(x)$ , estas funciones deben tener una distancia Talbot mayor y no menor que  $z_0$ ). Entonces en sus desarrollos binarios,  $n'$  tendrá su primer 1 en el lugar  $p'$ , y  $n''$  en una posición anterior  $p''$ , de donde se deduce que  $n'' \oplus n'$  poseerá su primer 1 en el lugar  $p''$ . Por lo tanto, las funciones  $\{\overline{W}_{n'' \oplus n'}(x)\}$  originarán imágenes desenfocadas en la distancia  $z_0$ . Lógicamente  $n'_1 \oplus n'_2$  poseerá su primer 1 en una posición posterior a  $p'$ , salvo en el caso que  $n'_1 = n'_2$  que originará ceros en todas las posiciones, es decir:  $\overline{W}_{n'_1 \oplus n'_1}(x) = \overline{W}_0(x) = \overline{1} = 0$ . Entonces  $\{\overline{W}_{n'_1 \oplus n'_2}(x)\}$  dará lugar a autoimágenes en  $z_0$ .

En base a estas conclusiones puede expresarse la propagación libre de las funciones  $\{\overline{W}_{n \oplus n'}(x)\}$  como:

$$F_{z_0} \{ \overline{W}_{n'' \oplus n'}(x) \} = \overline{\Phi}_{n'' \oplus n'}(x; z_0) , \tag{4.14}$$

y,

$$F_{z_0} \{ \overline{W}_{n'_1 \oplus n'_2}(x) \} = \overline{W}_{n'_1 \oplus n'_2}(x) , \quad (4.15)$$

según  $n$  recorra los órdenes  $n''$  o  $n'$ .

Tomando esto en cuenta, la propagación del campo (4.12) resulta:

$$\begin{aligned} u(x; 2z_0^{(-)}) &= \left( N' + \frac{N''}{2} \right) \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) - \frac{1}{2} \sum_{n'_1} \sum_{n'_2} a_{n'_1} a_{n'_2} \overline{W}_{n'_1 \oplus n'_2}(x) + \\ &+ \frac{N'}{2} \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) - \frac{1}{2} \sum_{n''} \sum_{n'} a_{n''} a_{n'} \overline{\Phi}_{n'' \oplus n'}(x; z_0) + \\ &+ t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Puede observarse, como en la anterior propagación (4.7), el término de las funciones enfocadas en  $z_0$  y la contribución del ruido dada en este caso por tres términos de imágenes desenfocadas; pero además la aparición de nuevas funciones de Walsh  $W_{n'_1 \oplus n'_2}$  con contraste invertido, provenientes como ya se comentó, de la interacción con la apertura situada en  $z = 2z_0$ .

Considerando la geometría mostrada en la figura 4.1, luego de  $\ell$  interacciones sucesivas entre aperturas y campo difractado y las consiguientes  $\ell$  propagaciones, se llega a una expresión general para el campo, dada por:

$$\begin{aligned} u(x; \ell z_0^{(-)}) &= \left( N' + \frac{N''}{2} \right)^{\ell-1} \sum_{n'} a_{n'} W_{n'}(x) - \frac{1}{2} \left( N' + \frac{N''}{2} \right)^{\ell-2} \sum_{n'_1} \sum_{n'_2} a_{n'_1} a_{n'_2} \overline{W}_{n'_1 \oplus n'_2}(x) + \\ &+ \frac{1}{2} N' \left( N' + \frac{N''}{2} \right)^{\ell-2} \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x, z_0) - \frac{1}{2} \left( N' + \frac{N''}{2} \right)^{\ell-2} \sum_{n''} \sum_{n'} a_{n''} a_{n'} \overline{\Phi}_{n'' \oplus n'}(x; z_0) + \\ &+ \varphi_\ell(x, z_0) + \psi_\ell(x, z_0) , \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde se introdujeron las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\varphi_\ell(x; z_0) = F_{z_0} \left\{ t(x) \left[ \left( N' + \frac{N''}{2} \right)^{\ell-3} \chi(x; z_0) + \varphi_{\ell-1}(x; z_0) \right] \right\} , \quad \ell = 3, 4, 5, \dots ; \quad (4.18)$$

$$\varphi_\ell(x; z_0) = 0, \ell = 1, 2; \quad (4.19)$$

$$\psi_\ell(x; z_0) = F_{z_0} \{t(x)\psi_{\ell-1}(x; z_0)\}, \ell = 3, 4, 5, \dots; \quad (4.20)$$

$$\psi_{\ell=2}(x; z_0) = F_{z_0} \left\{ t(x) \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) \right\}; \psi_{\ell=1}(x; z_0) = 0. \quad (4.21)$$

En la ecuación (4.18) se utilizó la definición:

$$\chi(x; z_0) \equiv \frac{1}{2} N' \sum_{n''} a_{n''} \Phi_{n''}(x; z_0) - \frac{1}{2} \sum_{n''} \sum_{n'} a_{n''} a_{n'} \bar{\Phi}_{n'' \oplus n'}(x; z_0). \quad (4.22)$$

En la expresión (4.17) puede observarse que el campo en  $z = \ell z_0$ , tras  $\ell$  interacciones tendrá un comportamiento determinado preponderantemente por las funciones de Walsh cuya distancia de autoimagen coincide con  $z_0$ ; por un lado las que se hallaban originalmente en la síntesis de  $t(x)$ , es decir el conjunto  $\{W_{n'}(x)\}$ , más el conjunto de las funciones originadas por las interacciones, esto es  $\{W_{n'_1 \oplus n'_2}(x)\}$ . El resto de los términos adicionan ruido a estas imágenes, y provienen del desenfoque también de dos grupos de funciones: las funciones de Walsh presentes originalmente en el desarrollo de  $t(x)$  y cuya distancia de Talbot no coincide con  $z_0$ , definidas por  $\{W_{n''}(x)\}$ , y las generadas en las interacciones cuya distancia de autoimagen tampoco coincide con  $z_0$ , o sea  $\{W_{n'' \oplus n'}(x)\}$ .

Si se toma la distancia  $z_0$  de tal forma que sea distancia de autoimagen para todas las funciones de Walsh presentes en el desarrollo de  $t(x)$ , el campo expresado en (4.17) presentará la síntesis original, más el término de las funciones de Walsh "generadas" en la interacción con las aperturas y cuya distancia Talbot también coincide con  $z_0$ , es decir:

$$\begin{aligned} u(x; \ell z_0^{(-)}) &= (N)^{\ell-1} \sum_n a_n W_n(x) - \frac{1}{2} (N)^{\ell-2} \sum_{n_1} \sum_{n_2} a_{n_1} a_{n_2} \bar{W}_{n_1 \oplus n_2}(x) = \\ &= (N)^{\ell-1} t(x) - \frac{1}{2} (N)^{\ell-2} \sum_{n_1} \sum_{n_2} a_{n_1} a_{n_2} \bar{W}_{n_1 \oplus n_2}(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como era de esperar, el caso particular en que  $t(x)$  se halla sintetizada por una única función de Walsh, el campo propagado dado por la ecuación (4.17), replica la función transmitancia de las aperturas:

$$u(x; \ell z_0^{(-)}) = W_\tau(x). \quad (4.24)$$

## 4.2 Arreglo de múltiples aperturas como dispositivo de filtrado espacial

Con respecto al dispositivo de múltiples aperturas analizado, si bien en los planos en que se sitúan las aperturas se encuentran enfocadas naturalmente las funciones de Walsh del subconjunto llamado  $\{W_{n'}(x)\}$  (ver ecuación (4.4)), el efecto de la colocación de las aperturas es reforzar esta propiedad. De tal forma que, a una distancia  $\ell z_0$  el peso de estas funciones en la síntesis del campo sea mayor (con el sistema de aperturas propuesto), respecto del que tendrían en una experiencia con simple propagación libre a la misma distancia. Esto no ocurrirá con las funciones "desenfocadas" del otro subconjunto:  $\{W_{n''}(x)\}$ .

El arreglo mostrado en la figura 4.1 puede utilizarse a modo de un selector o filtro de frecuencias espaciales, como una extensión y generalización del citado en el Capítulo 3 (sección 3.4), pero para el caso de múltiples aperturas con funciones transmitancias de amplitud generales.

## 4.3 Resultados

Con el fin de ilustrar el análisis desarrollado en las secciones 4.1 y 4.2, se efectuaron una serie de simulaciones computacionales de las sucesivas interacciones apertura-campo difractado, en base a la configuración óptica presentada en la figura 4.1. Con este propósito, se calcula el campo propagado  $u(x; z)$  a través del dispositivo de múltiples aperturas mediante la aplicación sucesiva de las ecuaciones:

$$u(x; \ell z_0^{(-)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x'; z = (\ell - 1)z_0^{(+)}) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z} (x - x')^2\right] dx'; \quad (4.25)$$

$$u(x; \ell z_0^{(+)}) = t(x) u(x; \ell z_0^{(-)}), \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (4.26)$$

La transformada de Fresnel, dada por la ecuación (4.25), que propaga el campo difractado entre dos aperturas sucesivas se realiza mediante la utilización del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT); mientras que la expresión (4.26) permite obtener el campo inmediatamente detrás de cada apertura.

En principio se considera una serie de aperturas cuya función transmitancia consiste en una única función de Walsh, dada por:  $W_{896}(x) = \frac{1}{2} (1 + R_9(x) R_8(x) R_7(x)) \text{rect}(x/x_0)$ . Una parte de dicha función, muestreada en total con 4096 puntos, se encuentra graficada en la figura 4.2 (a). Como puede verse en la figura 4.2 (b), el espectro de Walsh-Hadamard o WHT (ver sección 3.2.4) asociado con tal apertura tiene una única componente ( $n = 896$ ). Como en este caso,  $z_0$  se elige según la expresión

(4.3) y la condición  $2^p = 2^7 \gg 1$  se verifica, el campo transmitido luego de las sucesivas interacciones  $u^{(-)}(x, lz_0)$  es casi completamente sintetizado por  $W_{896}(x)$ . Esto puede observarse en los espectros de Walsh-Hadamard de las distribuciones de amplitud inmediatamente antes de la segunda y cuarta interacciones (correspondientes a las aperturas situadas en  $z_0$  y  $3z_0$ ), graficados en las **figuras 4.2 (c) y (d)**, respectivamente. Los espectros de secuencias se obtienen también por cálculos computacionales utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Walsh-Hadamard.

Si la distancia  $z_0$  entre las sucesivas aperturas se varía de tal forma que deja de coincidir con la distancia de Talbot, dada por la expresión (4.3), entonces la energía contenida inicialmente en la componente de Walsh  $n = 896$  se distribuye en todo el espectro luego de unas pocas interacciones. Las **figuras 4.3 (a) y (b)** ilustran esta situación, a través de los gráficos de los espectros de Walsh del campo inmediatamente antes de la segunda y cuarta aperturas, pero espaciadas en este caso por la distancia "desenfocada"  $z' = 1.21z_0$ .

Seguidamente se repite el procedimiento utilizado en el primer ejemplo pero con otra función de transmitancia, dada por la función de Walsh:  $W_{784}(x) = \frac{1}{2}(1 + R_9(x)R_8(x)R_4(x))\text{rect}(x/x_0)$ , y seleccionando la distancia  $z_0$  como una distancia de Talbot según la relación (4.3). Una sección de esta función de Walsh, y su contenido espectral, se muestran en las **figuras 4.4 (a) y (b)**. Los resultados obtenidos, graficados en las **figuras 4.4 (c) y (d)**, manifiestan un comportamiento similar al de las distancias "desenfocadas" para caso anterior. Esto se debe a que el parámetro  $p$  de la función  $W_{784}(x)$ , no verifica suficientemente la condición  $2^p \gg 1$ , ya que  $p = 4$ , y las aproximaciones utilizadas para hallar las distancias de autoimagen en la sección 4.1 no son válidas.

Se considera a continuación el mismo dispositivo de aperturas múltiples, pero con una función de transmitancia consistente de una superposición de funciones de Walsh procurando ilustrar el resultado (4.17), y su aplicación al filtrado de frecuencias. Se supone que  $t(x) = 0.5W_{768}(x) + 0.5W_{16}(x) + 0.25W_{128}(x)$ , donde por definición,  $W_{768}(x) = \frac{1}{2}(1 + R_9(x)R_8(x))\text{rect}(x/x_0)$ ,  $W_{128}(x) = \frac{1}{2}(1 + R_7(x))\text{rect}(x/x_0)$ , y  $W_{16}(x) = \frac{1}{2}(1 + R_4(x))\text{rect}(x/x_0)$ . En las **figuras 4.5 (a)** se grafica una parte de esta síntesis, y en la **figura 4.5 (b)**, su espectro de Walsh. Se estudia la propagación del campo para tres distancias de resonancia distintas.

En primer lugar se elige la distancia de Talbot  $z_0$  tomando  $p = 7$  en la expresión (4.3). Los espectros de Walsh de los campos inmediatamente antes de la segunda y cuarta interacciones se indican en las **figuras 4.5 (c) y (d)**, respectivamente. Es evidente que el peso de las componentes originales  $n = 768$  y  $n = 128$  prácticamente se conservan en el mismo valor, mientras que el de la restante componente  $n = 16$ , se degrada. La conservación del orden correspondiente a  $W_{128}(x)$  se debe a que su parámetro  $p$  coincide con el utilizado para el cálculo de la distancia  $z_0$ . La constancia de la función  $W_{768}(x)$  se explica en forma análoga, ya que al poseer un parámetro  $p$  mayor que 7 ( $p = 8 > 7$ ), la distancia seleccionada

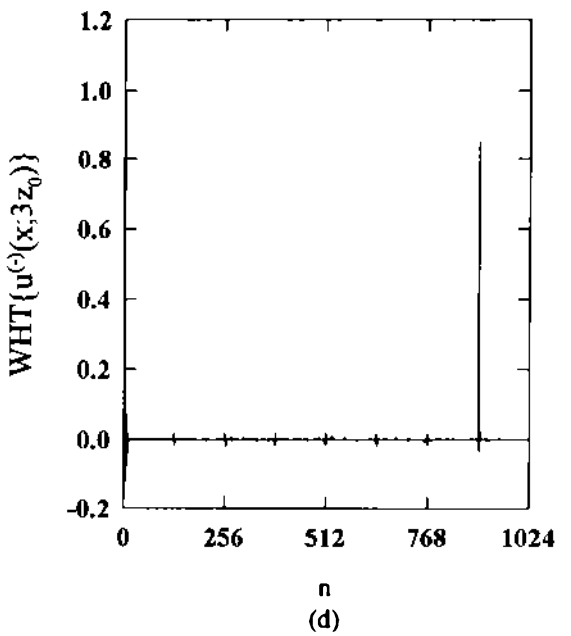
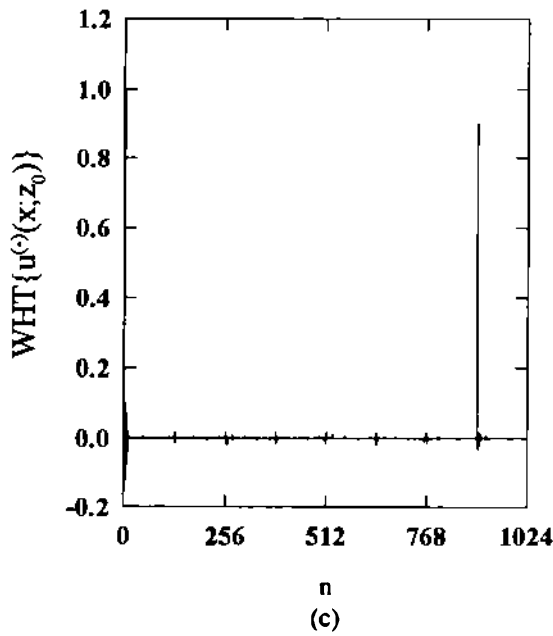
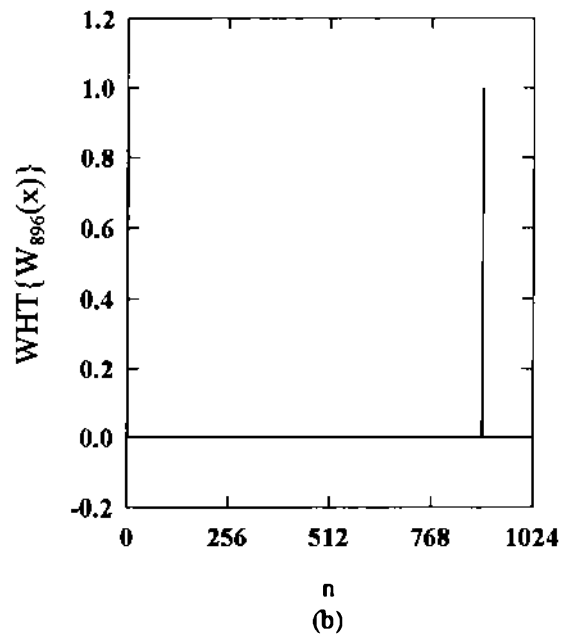
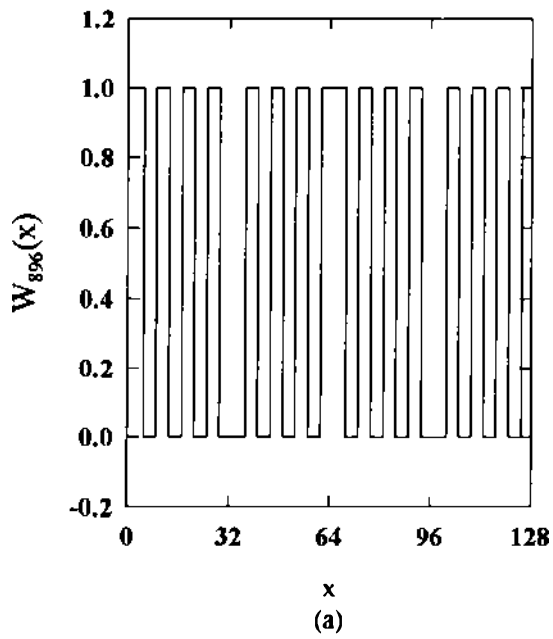


Figura 4-2: (a) Parte de la función de Walsh de orden 896, (b) su espectro de potencias y los espectros del campo luego de la (c) primera y (d) tercera interacciones.

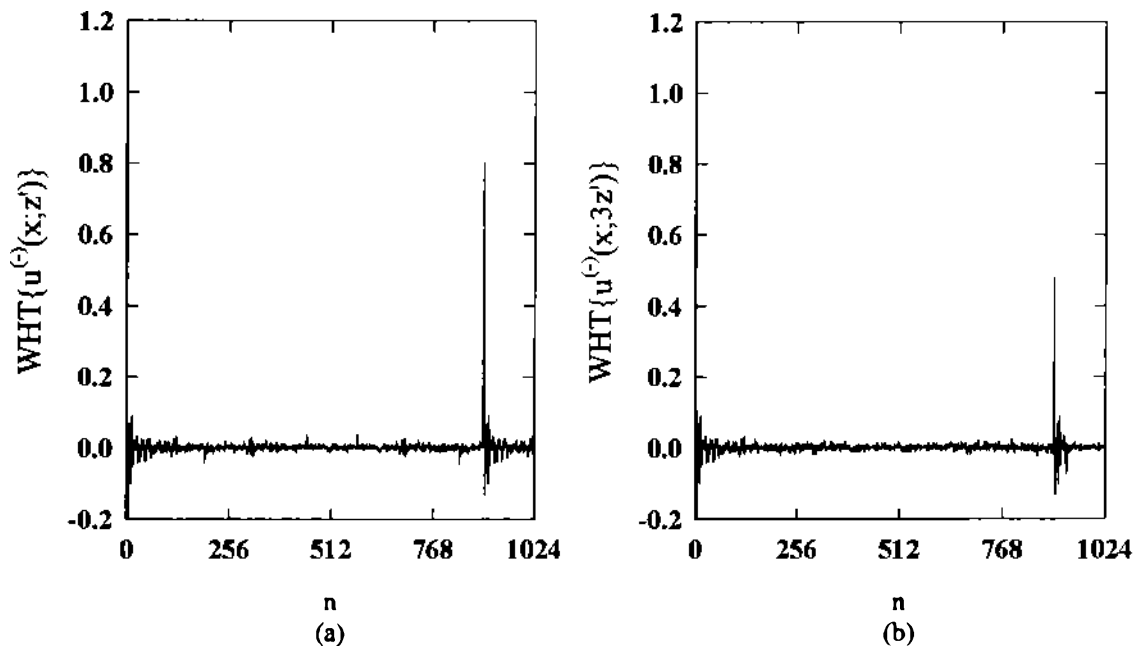


Figura 4-3: Espectro de secuencias del campo luego de la (a) primera y (b) tercera propagaciones con distancia  $z_0$  "desenfocada".

$z_0$  es un múltiplo entero de su distancia de resonancia (como indica la ecuación (3.23)). Mientras que la degradación de la energía originalmente localizada en  $n = 16$ , se debe a que su parámetro  $p$  es menor que 7 ( $p = 4 < 7$ ), lo que indica que se halla desenfocada para el valor de  $z_0$  elegido.

El reciente ejemplo mostró la elección adecuada de  $z_0$  para el filtrado de  $W_{16}(x)$ , frente a la propagación de los órdenes de  $W_{128}(x)$  y  $W_{768}(x)$ . Seguidamente con la misma apertura se procura la no transmisión de  $W_{16}(x)$  y  $W_{128}(x)$ , y la propagación del orden  $W_{768}(x)$ . Para esto se elige  $z'_0$  con la expresión (4.3) pero tomando  $p = 8$ . Las figuras 4.6 (a) y (b) manifiestan la eficiencia del dispositivo propuesto.

Manteniendo la misma función transmitancia, se sitúan ahora las aperturas con un espaciamiento mayor seleccionando una distancia  $z''_0$  calculada con  $p = 4$ , de tal forma de enfocar las tres funciones. Los resultados mostrados en las figuras 4.7 (a) y (b) indican una marcada degradación de los tres órdenes. Esto se explica en parte por lo bajo del valor  $p = 4$ , pero además, por considerar distancias relativamente grandes ( de (3.23) resulta:  $z''_0 = 256z'_0 = 64z_0$ ) comienza a ser importante la incidencia

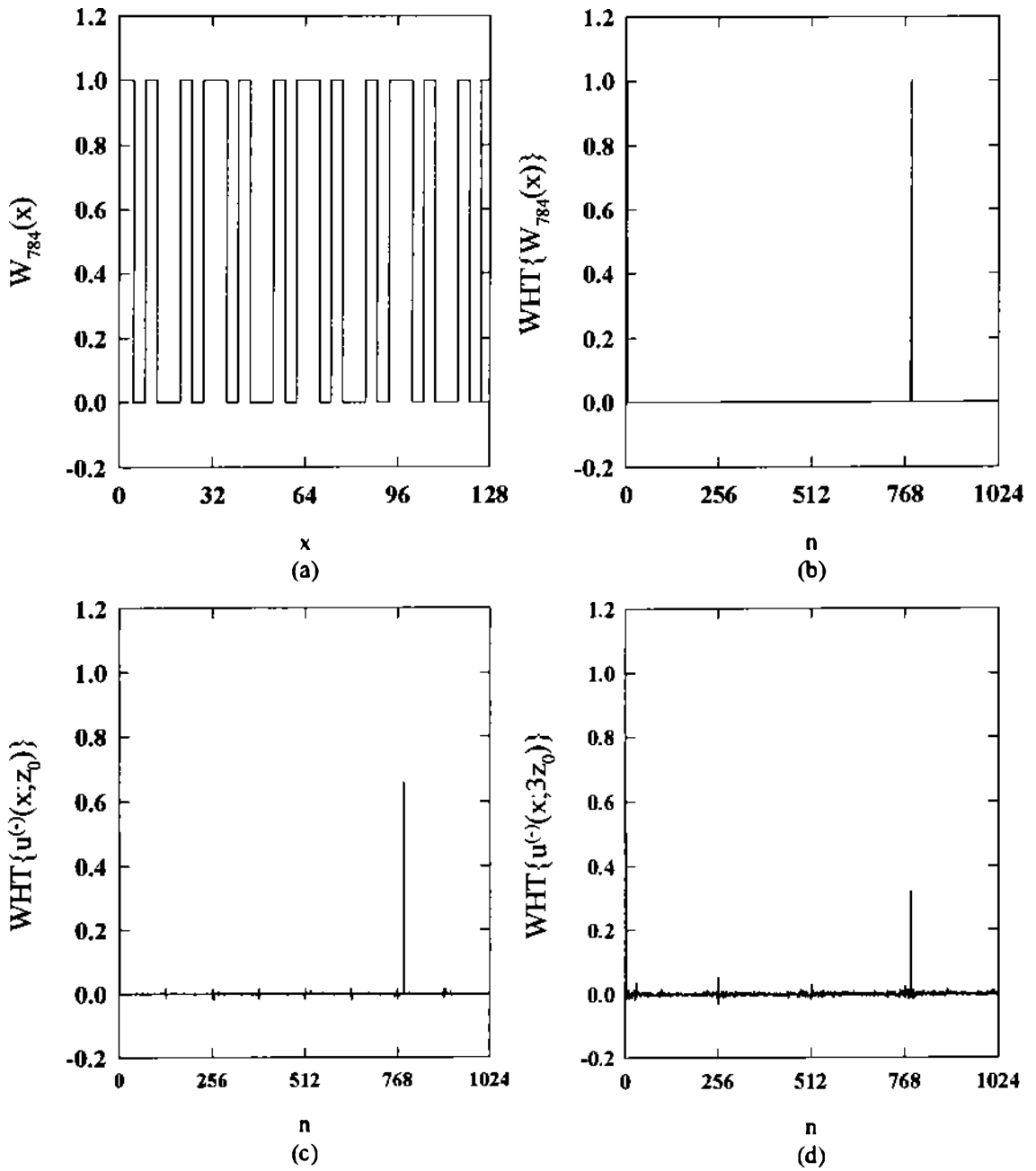


Figura 4-4: (a) Parte de la función de Walsh de orden 784, (b) su espectro de secuencias y los espectros del campo luego de la (c) primera y (d) tercera propagaciones.



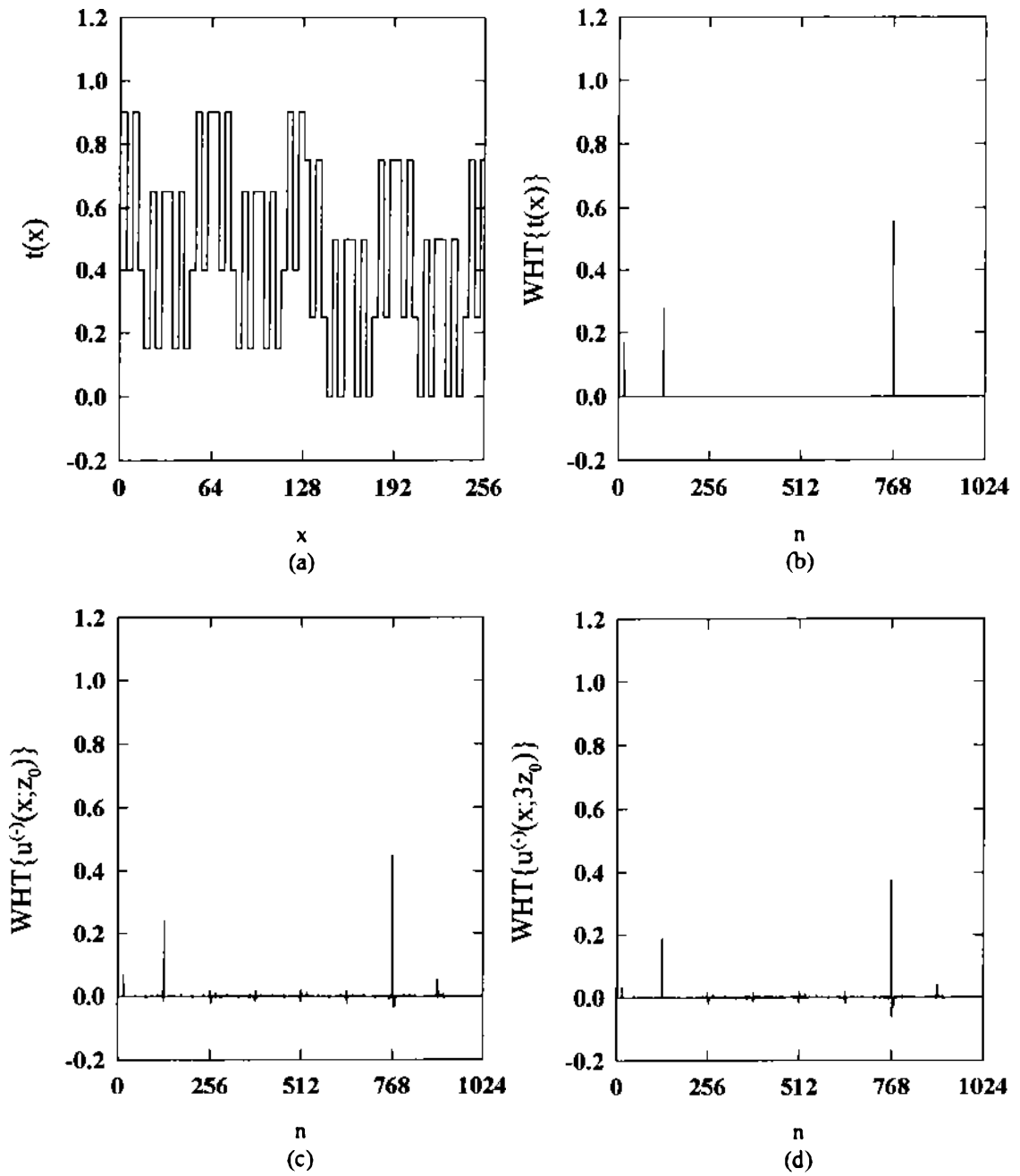


Figura 4-5: (a) Parte de la función dada por una síntesis de funciones de Walsh, (b) su espectro de secuencias, y los espectros del campo luego de la (c) primera y (d) tercera propagaciones con  $Z_0$  calculado para  $p=7$ .

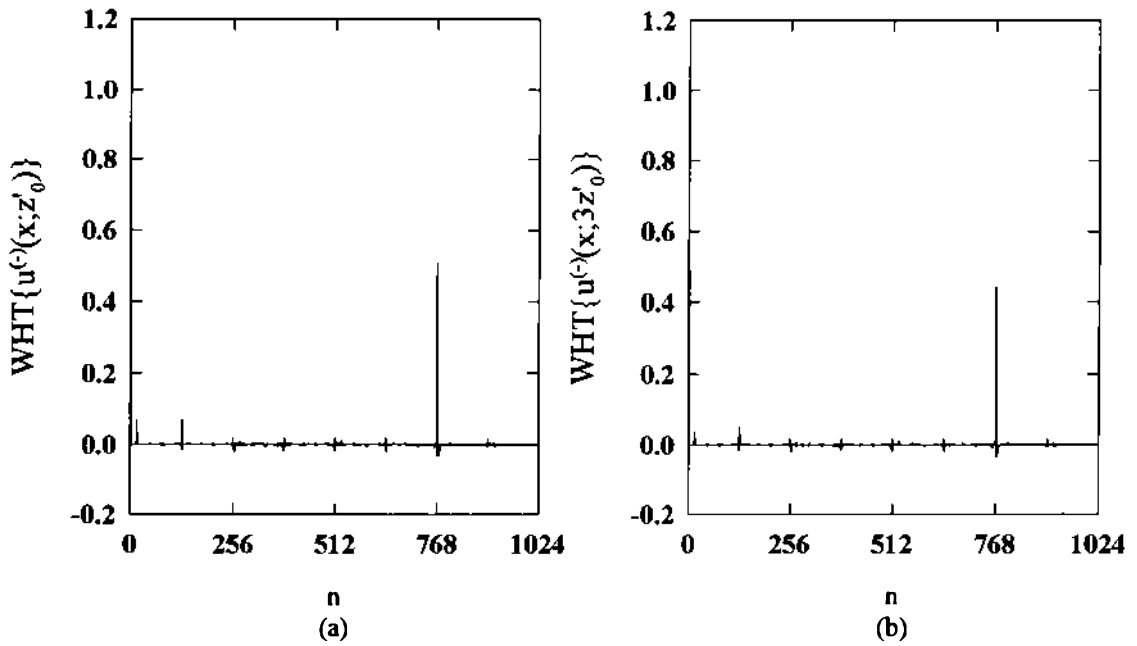


Figura 4-6: Espectro de Walsh del campo luego de la (a) primera y (b) tercera propagaciones con la distancia  $Z_0$  calculada para  $p=8$ .

del efecto de "walk-off" (ver sección 2.1.1).

Respecto al aporte de los órdenes de Walsh provenientes de los productos cruzados predicho en la ecuación (4.17), puede notarse la aparición de un pequeño máximo en  $n = 896$  en las figuras 4.5 (c) y (d), resultante del producto  $W_{128}(x)W_{768}(x) = W_{896}(x)$ . En la situación correspondiente a la figura 4.6, la función de Walsh  $W_{896}(x)$  está desenfocada y sólo contribuye al ruido, mientras que en la correspondiente a la figura 4.7, esta función está afectada por el efecto de "walk-off". En cuanto a las funciones generadas por los productos  $W_{16}(x)W_{128}(x) = W_{144}(x)$  y  $W_{16}(x)W_{768}(x) = W_{784}(x)$ , no presentan contribuciones notorias en ninguno de los tres ejemplos debido a que su parámetro  $p$  es demasiado bajo ( $p = 4$ ).

Finalmente en la figura 4.8 se compara gráficamente los comportamientos, a través de cuatro iteraciones sucesivas, de diferentes funciones transmitancias sintetizadas por un conjunto de funciones de Walsh. Se trata de las funciones  $Wal_{768}(x) = R_9(x)R_8(x)$  ( $p = 8$ ),  $Wal_{128}(x) = R_7(x)$  ( $p = 7$ ),  $Wal_{896}(x) = R_9(x)R_8(x)R_7(x)$  ( $p = 7$ ),  $Wal_{16}(x) = R_4(x)$  ( $p = 4$ ) y  $Wal_{784}(x) = R_9(x)R_8(x)R_4(x)$

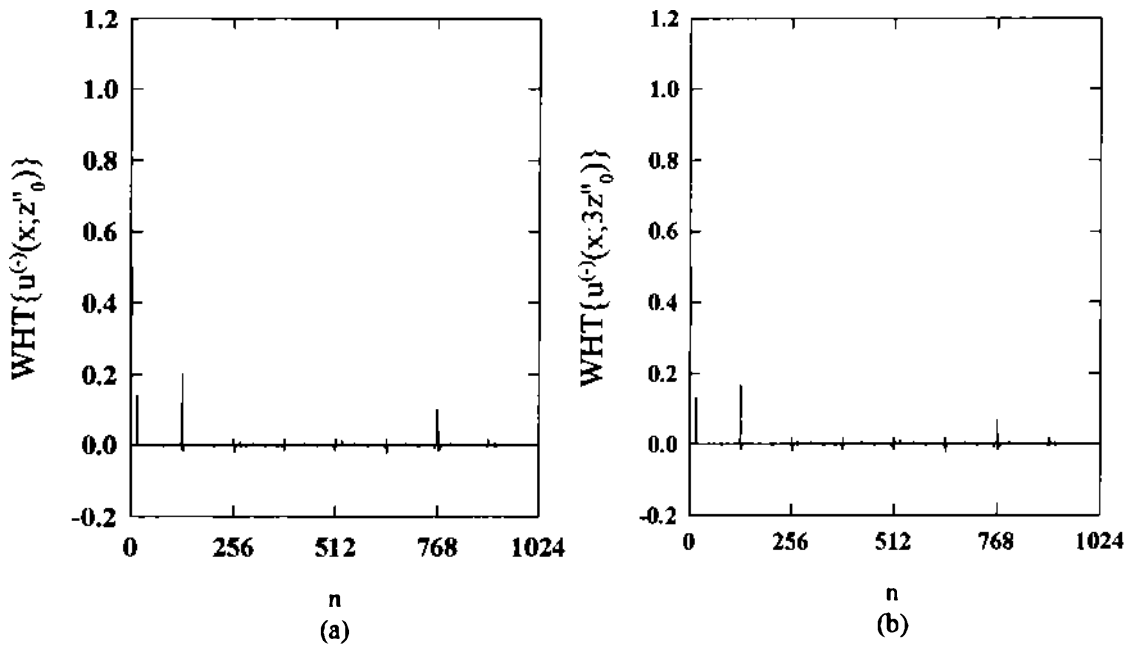


Figura 4-7: Espectro de Walsh del campo luego de la (a) primera y (b) tercera propagaciones con la distancia  $Z_0$  calculada para  $p=4$ .

( $p = 4$ ). En el eje vertical se representa la energía (normalizada) asociada con el orden de Walsh original de la apertura ( $n$ ), llamado  $C_n$ , mientras que el eje horizontal representa el número de la interacción: campo propagado-apertura. Las energías se obtuvieron de los espectros de Walsh calculados sobre los campos inmediatamente antes de las interacciones, excepto la correspondiente a la primera apertura que simplemente se trata del peso en el espectro de secuencias de la apertura, de la función de Walsh que sintetiza las diferentes transmitancias, es decir: 1.

Puede observarse que la conservación del peso  $C_n$  del orden original no sólo depende de  $p$ , sino también del número de funciones de Rademacher presentes en la productoria que genera la función de Walsh. El análisis indica que cuanto menor es el número de funciones de Rademacher intervinientes en la síntesis, mejora la transmisión del orden en cuestión, aún para un mismo valor de  $p$ .

## 4.4 Conclusiones

En el presente capítulo se han analizado algunas propiedades del campo difractado por un arreglo de múltiples aperturas, iluminado por una fuente espacialmente coherente y monocromática, utilizando las propiedades de las funciones de Walsh.

Para la configuración óptica propuesta, se demostró que las funciones de Walsh, como funciones de transmitancia de las aperturas, serán bien transmitidas mediante autoimágenes para ciertos valores discretos de separación (distancias de Talbot), siempre que verifiquen la condición:  $2^p \gg 1$ . Mientras que si se desenfoca el dispositivo o si la condición sobre  $p$  no es suficientemente satisfecha, los órdenes correspondientes se degradarán, de tal forma que la energía de las funciones de Walsh desenfocadas se distribuye en el resto de los órdenes. Este comportamiento se manifiesta como un nivel de ruido en la intensidad de campo propagado.

Se estudió la eficiencia del dispositivo propuesto como sistema de filtrado espacial, y sus límites. En este aspecto, el análisis de Walsh-Hadamard, a través de su transformada, ha demostrado ser el adecuado para el análisis y la comprensión de estas propiedades.

Los resultados obtenidos en base a simulaciones corroboran los cálculos teóricos realizados previamente, y la importancia de las aproximaciones empleadas.

Finalmente, puede entenderse el desarrollo presentado como una extensión del efecto de autoimágenes para dispositivos de múltiples aperturas arbitrarias y de tamaño finito.

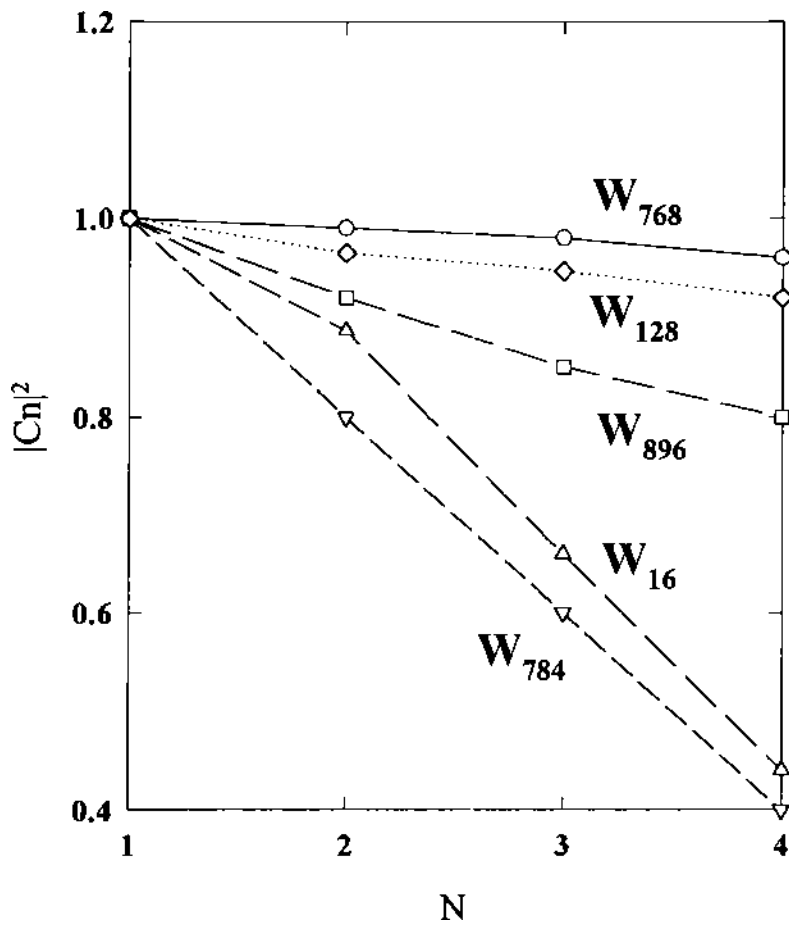


Figura 4-8: Gráfico comparativo de la evolución de la energía del orden correspondiente a la función de Walsh que sintetiza la apertura, calculada para los campos propagados a través de una serie de 4 interacciones, considerando como transmitancias 5 funciones de Walsh distintas.

## Capítulo 5

# MÚLTIPLES INTERACCIONES BAJO ILUMINACIÓN INCOHERENTE

En el presente capítulo se desarrollará el estudio de las propiedades de la coherencia espacial de la luz transmitida por el sistema de múltiples aperturas idénticas y arbitrarias propuesto en el capítulo anterior. Este análisis se basa en algunos resultados anteriormente publicados y que fueron detallados en el Capítulo 3 (sección 3.3.2). En el citado trabajo se consideraba el caso de un solo par de aperturas, y cuya función transmitancia era representada por una única función de Walsh.

### 5.1 Propiedades de la coherencia espacial

Se supondrá una apertura real arbitraria, cuyo desarrollo de Walsh será como en (4.1):

$$t(x) = \sum_n a_n W_n(x) , \quad (5.1)$$

donde las funciones  $W_n(x)$  vienen dadas por la expresión (3.10) y las cantidades  $a_n$  son los coeficientes del desarrollo.

Si esta apertura es iluminada por una fuente cuasimonocromática espacialmente incoherente, la intensidad mutua (ver sección 2.2.2)  $\Gamma(x_1, x_2; z = 0^{(+)})$ , inmediatamente detrás de la apertura vendrá dada por:

$$\Gamma(x_1, x_2; z = 0^{(+)}) = t(x_1)t^*(x_2)\delta(x_1 - x_2) =$$

$$= \sum_n \sum_{n'} a_n a_{n'}^* W_n(x_1) W_{n'}^*(x_2) \delta(x_1 - x_2) , \quad (5.2)$$

donde tanto  $n$  como  $n'$  recorren los mismos valores dados en el desarrollo (5.1), y el símbolo  $*$  indica el complejo conjugado.

Por simplicidad se considerará una única de las funciones de Walsh presentes en la síntesis de  $t(x)$ . En tal situación, la ecuación (5.2) se reduce a:

$$\Gamma(x_1, x_2; z = 0^{(+)}) = W_n(x_1) W_n^*(x_2) \delta(x_1 - x_2) . \quad (5.3)$$

Aplicando la transformación de Zernike para la propagación libre de la intensidad mutua (sección 2.2.2) suponiendo la aproximación paraxial, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2; z = z_0^{(-)}) &= \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_0}(x_1^2 - x_2^2)\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x'_1, x'_2; z = 0^{(+)}) \times \\ &\times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_0}(x_1'^2 - x_2'^2)\right] \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda z_0}(x_1 x'_1 - x_2 x'_2)\right] dx'_1 dx'_2 = \\ &= \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_0}(x_1^2 - x_2^2)\right] \iint_{-\infty}^{+\infty} W_n(x'_1) W_n^*(x'_2) \delta(x'_1 - x'_2) \times \\ &\times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_0}(x_1'^2 - x_2'^2)\right] \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda z_0}(x_1 x'_1 - x_2 x'_2)\right] dx'_1 dx'_2 = \\ &= \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_0}(x_1^2 - x_2^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x'_1) \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda z_0}(x_1 - x_2)x'_1\right] dx'_1 . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Se hace uso aquí de los desarrollos de Fourier de las funciones de Rademacher  $\{R_k(x)\}$  que están presentes en la productoria de la función de Walsh  $W_{a_i n}(x)$ , tal como se la definió en (3.5) y (3.9), y que se introdujera en la expresión (3.16), es decir:

$$W_n(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \exp \left( 2\pi i x \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \right\} \text{rect} \left( \frac{x}{x_0} \right), \quad (5.5)$$

donde los órdenes de las funciones de Rademacher intervinientes  $p, \dots, m$  y sus respectivos coeficientes  $g_p, \dots, g_m$ , como ya se consignó (sección 3.2.3), corresponden al desarrollo binario del orden  $n$  de la función de Walsh  $Wal_n(x)$ :  $n = \sum_{j=p}^m 2^j g_j$ .

Reemplazando el desarrollo (5.5) en la expresión (5.4), se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2; z = z_0^{(-)}) &= C + \frac{1}{2} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left( \frac{x}{x_0} \right) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda z_0} \left( x_1 - x_2 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) x'_1 \right] dx'_1 = \\ &= C + \frac{1}{2} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \times \\ &\times x_0 \text{sinc} \left( x_0 \frac{x_1 - x_2 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j}}{\lambda z_0} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde se utilizó que la transformada de Fourier de la función rectángulo es la función seno cardinal, y donde la constante  $C$  es proporcional al área definida por la extensión de la función de Walsh  $Wal_n(x)$ .

Puede introducirse aquí la aproximación ya utilizada por la que se considera que el menor orden de las funciones de Rademacher  $\{R_k(x)\}$ , es suficientemente grande de tal forma que:  $2^p \gg 1$ . Esto permite aproximar la serie de senos cardinales a un arreglo de funciones  $\delta$  de Dirac. Dentro de estas condiciones se obtiene para la intensidad mutua inmediatamente antes de la segunda apertura, la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2; z = z_0^{(-)}) &\cong C + \frac{1}{2} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \times \\ &\times \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} x_0 \delta \left( x_0 \frac{x_1 - x_2 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j}}{\lambda z_0} \right) = \end{aligned}$$



$$= C + \frac{\lambda z_0}{2} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \delta \left( x_1 - x_2 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right). \quad (5.7)$$

Esta ecuación representa una serie de funciones  $\delta$  pesadas por la productoria de los coeficientes de los desarrollos de las funciones de Rademacher  $\{R_k(x)\}$ . El espaciado de estos máximos de la función de coherencia sobre el plano situado en  $z = z_0$  no es periódico ya que el término  $\lambda z_0 \sum_{j=p}^m g_j k_j / d_j$  varía según se consideren los diferentes coeficientes  $k_j$ . Este comportamiento no-periódico pero con cierta regularidad de la función distribución de coherencia detrás de una apertura finita no necesariamente periódica constituye una generalización del Teorema de van Cittert-Zernike [39].

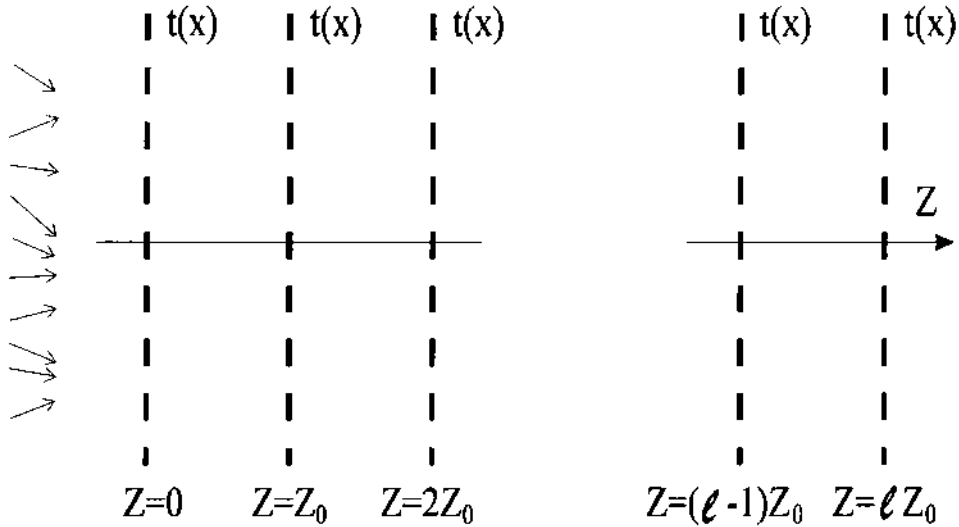


Figura 5-1: Dispositivo de múltiples aperturas bajo iluminación espacialmente incoherente.

Si siguiendo el dispositivo presentado en la figura 5.1, en  $z = z_0$  se encuentra la segunda apertura cuya transmitancia también es  $W_n(x)$ . Luego de interactuar con la misma, la coherencia espacial resulta:

$$\Gamma(x_1, x_2; z = z_0^{(+)}) = \Gamma(x_1, x_2; z = z_0^{(-)}) W_n(x_1) W_n^*(x_2). \quad (5.8)$$

Podría intentarse aquí utilizar el razonamiento de Gori [10], y de Sudol y Thompson [12, 13] para el efecto Lau (sección 2.2.2), mediante el cual se interpreta la interacción de  $\Gamma(x_1, x_2; z = z_0^{(-)})$  con la segunda apertura como un "filtrado de coherencia". Se trata de la deducción de la distancia de Lau imponiendo el ajuste espacial en el plano  $z = z_0$  de los máximos de coherencia con las ranuras de la segunda apertura. Sin embargo se seguirá adelante con los cálculos hasta llegar a la forma general de

la función de coherencia mutua luego de un número arbitrario de interacciones con las aperturas, para recién allí procurar la obtención de la distancia de resonancia de Lau.

Para la propagación de la coherencia desde  $z = z_0^{(+)}$  hasta el plano inmediatamente anterior a la apertura situada en  $z = 2z_0$ , se hace uso nuevamente de la fórmula de Zernike con las expresiones (5.7) y (5.8), desestimándose el factor constante  $C$ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x_1, x_2; z = 2z_0^{(-)}) &= \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x'_1, x'_2; z = z_0^{(-)}) W_n(x'_1) W_n^*(x'_2) \times \\
 &\times \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1'^2 - x_2'^2) \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda z_0} (x_1 x'_1 - x_2 x'_2) \right] dx'_1 dx'_2 = \\
 &= \frac{\lambda z_0}{2} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta \left( x'_1 - x'_2 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \times \\
 &\times W_n(x'_1) W_n^*(x'_2) \exp \left[ 2 \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1'^2 - x_2'^2) \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda z_0} (x_1 x'_1 - x_2 x'_2) \right] dx'_1 dx'_2 = \\
 &= \frac{\lambda z_0}{2} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x'_1) W_n^* \left( x'_1 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \times \\
 &\times \exp \left\{ 2 \frac{i\pi}{\lambda z_0} \left[ x_1'^2 - \left( x'_1 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right)^2 \right] \right\} \times \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{2i\pi}{\lambda z_0} \left[ x_1 x'_1 - x_2 \left( x'_1 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \right] \right\} dx'_1 . \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Para introducir aquí los desarrollos de las funciones de Walsh según (5.5), debe primero efectuarse la siguiente consideración respecto al producto de las funciones rectángulos:

$$\begin{aligned} & \text{rect} \left( \frac{x'_1}{x_0} \right) \text{rect} \left( \frac{x'_1 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j}}{x_0} \right) = \\ & = \text{rect} \left( \frac{x'_1 - \frac{\lambda z_0}{2} \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j}}{x_0 - \left| \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right|} \right) \Theta \left( x_0 - \left| \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right| \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $\Theta(x)$  es la función escalón de Heaviside. Esta función introduce una forma de selección de los términos  $k$  de las sumatorias que contribuirán en la expresión de  $\Gamma(x_1, x_2; z = 2z_0^{(-)})$ , ya que para alguna combinación de valores de la suma  $\sum_{j=p}^m g_j k_j / d_j$ , el argumento de la Heaviside será negativo y anulará todo su aporte a la ecuación (5.9).

Tomando en cuenta lo obtenido en (5.10), se reemplaza ahora la expresión (5.5) en (5.9), y se llega a:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2; z = 2z_0^{(-)}) &= \frac{\lambda z_0}{2} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \times \\ & \times \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} C_{k_p}^{g_p} \dots C_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_m} \dots \sum_{k'_p} C_{k'_p}^{g_p} \dots C_{k'_m}^{g_m} \sum_{k''_m} \dots \sum_{k''_p} C_{k''_p}^{*g_p} \dots C_{k''_m}^{*g_m} \times \\ & \times \Theta \left( x_0 - \left| \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right| \right) \exp \left[ -2i\pi \lambda z_0 \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right)^2 \right] \exp \left( -2i\pi x_2 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i\pi - \frac{2i\pi}{\lambda z_0} \left( x_1 - x_2 - 2\lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) x'_1 \right] \times \\ & \times \exp \left\{ 2i\pi \left[ x'_1 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k'_j}{d_j} - \left( x'_1 - \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \sum_{j=p}^m \frac{g_j k'_j}{d_j} \right] \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \text{rect} \left( \frac{x'_1 - \frac{\lambda z_0}{2} \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j}}{x_0 - \left| \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right|} \right) dx'_1 . \quad (5.11)$$

En la ecuación (5.11) se ha aplicado la función  $\delta$  de Dirac. Por otra parte, desarrollando y reagrupando los términos de la segunda exponencial dentro de la integral (la cual proviene exclusivamente de las síntesis de las funciones de Walsh), se obtiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2; z = 2z_0^{(-)}) &= \frac{\lambda z_0}{2^3} \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \times \\ &\times \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_m} \dots \sum_{k'_p} c_{k'_p}^{g'_p} \dots c_{k'_m}^{g'_m} \sum_{k''_m} \dots \sum_{k''_p} c_{k''_p}^{*g_p} \dots c_{k''_m}^{*g_m} \times \\ &\times \Theta \left( x_0 - \left| \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right| \right) \exp \left\{ -2i\pi \lambda z_0 \left[ \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right)^2 - \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \sum_{j=p}^m \frac{g_j k'_j}{d_j} \right] \right\} \exp \left( -2i\pi x_2 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{2i\pi}{\lambda z_0} \left[ x_1 - x_2 - \lambda z_0 \left( 2 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} + \sum_{j=p}^m \frac{g_j k'_j}{d_j} - \sum_{j=p}^m \frac{g_j k''_j}{d_j} \right) \right] x'_1 \right\} \times \\ &\times \text{rect} \left( \frac{x'_1 - \frac{\lambda z_0}{2} \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j}}{x_0 - \left| \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right|} \right) dx'_1 . \quad (5.12) \end{aligned}$$

La integral de la ecuación (5.12) es la transformada de Fourier de la función rectángulo que da lugar a una serie de funciones seno cardinal. Bajo la condición ya empleada respecto al orden  $p$ , esto es:  $2^p \gg 1$ , pueden nuevamente aproximarse las funciones seno cardinal por un conjunto de funciones  $\delta$ . En estas circunstancias, la función de coherencia mutua dada por (5.12) se aproxima a:

$$\Gamma(x_1, x_2; z = 2z_0^{(-)}) \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda z_0}{2} \right)^2 \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_m} \dots \sum_{k'_p} c_{k'_p}^{g_p} \dots c_{k'_m}^{g_m} \sum_{k''_p} \dots \sum_{k''_m} c_{k''_p}^{*g_p} \dots c_{k''_m}^{*g_m} \times \\
& \times \Theta \left( x_0 - \left| \lambda z_0 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right| \right) \exp \left\{ -2i\pi \lambda z_0 \left[ \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right)^2 - \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \sum_{j=p}^m \frac{g_j k'_j}{d_j} \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left( -2i\pi x_2 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \delta \left[ x_1 - x_2 - \lambda z_0 \left( 2 \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} + \sum_{j=p}^m \frac{g_j k'_j}{d_j} - \sum_{j=p}^m \frac{g_j k''_j}{d_j} \right) \right] . \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Análogamente a la expresión (5.6), la ecuación (5.13) indica una serie de máximos de coherencia bien marcados luego de la segunda propagación, cuyos espaciados en principio no pueden considerarse periódicos.

Realizando cuidadosamente los cálculos de las sucesivas propagaciones según el dispositivo indicado en la **figura 5.1**, se obtiene una expresión general para la función de coherencia mutua en su  $\ell$ -ésima propagación:

$$\begin{aligned}
& \Gamma(x_1, x_2; z = \ell z_0^{(-)}) \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda z_0}{2} \right)^\ell \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \times \\
& \times \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \dots \sum_{k_p^{(2(\ell-1))}} \dots \sum_{k_m^{(2(\ell-1))}} c_{k_p^{(2(\ell-1))}}^{*g_p} \dots c_{k_m^{(2(\ell-1))}}^{*g_m} \times \\
& \times \prod_{r=2}^{\ell} \Theta(x_0 - |\lambda z_0 \sigma_{r-1}|) \exp \left\{ -2i\pi \lambda z_0 \left[ \sigma_{r-1}^2 - \sigma_{r-1} \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j^{(2(\ell-1))}}{d_j} - \sum_{s=1}^{r-2} \sigma_s \right) \right] \right\} \times \\
& \times \exp(-2i\pi x_2 \sigma_{\ell-1}) \delta(x_1 - x_2 - \lambda z_0 \sigma_\ell) , \quad (5.14)
\end{aligned}$$

donde se utilizaron las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\sigma_\ell \equiv \begin{cases} \sum_{j=p}^m g_j k_j / d_j ; & \ell = 1 \\ 0 ; & \ell \leq 0 \\ 2\sigma_{(\ell-1)} - \sigma_{(\ell-2)} + \sum_j g_j \left( k_j^{(2\ell-3)} - k_j^{(2\ell-2)} \right) / d_j ; & \ell > 1 . \end{cases} \quad (5.15)$$

Es conveniente introducir aquí el cambio de variables a coordenadas centro y diferencia; es decir:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} , \quad \Delta x = x_1 - x_2 ; \quad (5.16)$$

de donde:

$$x_1 = x + \frac{\Delta x}{2} , \quad x_2 = x - \frac{\Delta x}{2} . \quad (5.17)$$

Sustituyendo las relaciones (5.17) en la expresión (5.14) se llega a que luego de  $\ell$  propagaciones la función de coherencia mutua viene dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \Delta x; z = \ell z_0^{(-)}) &\cong \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda z_0}{2} \right)^\ell \exp \left[ 2 \frac{i\pi}{\lambda z_0} x \Delta x \right] \times \\ &\times \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \dots \sum_{k_p^{(2(\ell-1))}} \dots \sum_{k_m^{(2(\ell-1))}} c_{k_p^{(2(\ell-1))}}^{*g_p} \dots c_{k_m^{(2(\ell-1))}}^{*g_m} \times \\ &\times \prod_{r=2}^{\ell} \Theta(x_0 - |\lambda z_0 \sigma_{r-1}|) \exp \left\{ -2i\pi \lambda z_0 \left[ \sigma_{r-1}^2 - \sigma_{r-1} \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j^{(2(\ell-1))}}{d_j} - \sum_{s=1}^{r-2} \sigma_s \right) \right] \right\} \times \\ &\times \exp(-2i\pi x \sigma_{\ell-1}) \delta(\Delta x - \lambda z_0 \sigma_\ell) . \end{aligned} \quad (5.18)$$

De esta manera se elimina la asimetría que aparece en la última exponencial de (5.14), la cual sólo depende de  $x_2$ , mientras que en la (5.18) depende de las dos variables a través de la suma  $x_1 + x_2$ .

La ecuación (5.18) representa la generalización del Teorema de van Cittert-Zernike [39] para un sistema de  $\ell$  aperturas idénticas aunque con funciones transmitancia no necesariamente periódicas ni infinitas, colocadas "in tandem".

Si en el plano  $z = \ell z_0$  se coloca una última apertura, la función coherencia mutua luego de la interacción lógicamente resulta:

$$\Gamma(x, \Delta x; z = \ell z_0^{(+)}) = \Gamma(x, \Delta x; z = \ell z_0^{(-)}) W_n \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) W_n^* \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right). \quad (5.19)$$

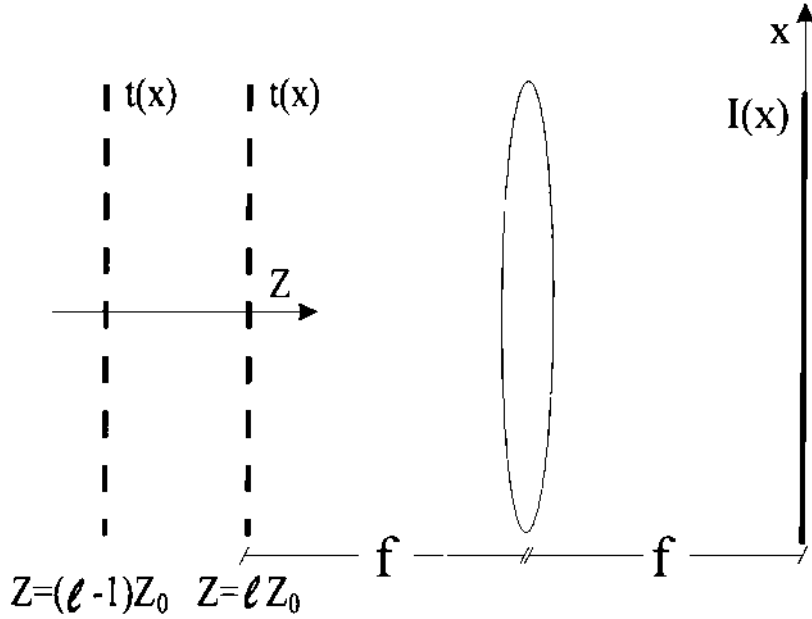


Figura 5-2: Se sitúa a la salida del dispositivo de múltiples aperturas una lente de distancia focal positiva y se analiza la distribución de intensidad sobre el plano focal posterior.

Considerando el dispositivo tipo Lau indicado en la figura 5.2, donde al final del arreglo propuesto se coloca una lente de distancia focal positiva  $f$ , la coherencia mutua en el plano focal será:

$$\Gamma_f(x_1, x_2; \ell z_0 + 2f) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x'_1, x'_2; \ell z_0^{(+)}) \exp \left[ \frac{-2i\pi}{\lambda f} (x_1 x'_1 - x_2 x'_2) \right] dx'_1 dx'_2, \quad (5.20)$$

o con el cambio de variables dado por (5.17):

$$\begin{aligned} \Gamma_f(x, \Delta x; z = \ell z_0 + 2f) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x', \Delta x'; z = \ell z_0^{(+)}) \times \\ &\times \exp \left[ \frac{-2i\pi}{\lambda f} (x \Delta x' + x' \Delta x) \right] dx' d\Delta x'. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Tomando en esta expresión  $\Delta x = 0$ , como se indicó en la ecuación (2.41), se obtiene la distribución de intensidad en el plano focal  $I_f(x)$ :

$$I_f(x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x', \Delta x'; z = \ell z_0^{(+)}) \exp \left[ \frac{-2i\pi}{\lambda f} x \Delta x' \right] dx' d\Delta x' . \quad (5.22)$$

Sustituyendo los resultados (5.18) y (5.19) en esta ecuación, e integrando con la  $\delta$  de Dirac sobre la variable  $\Delta x'$ , se llega a:

$$\begin{aligned} I_f(x) = & \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda z_0}{2} \right)^\ell \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \dots \sum_{k_p^{(2(\ell-1))}} \dots \sum_{k_m^{(2(\ell-1))}} c_{k_p^{(2(\ell-1))}}^{*g_p} \dots c_{k_m^{(2(\ell-1))}}^{*g_m} \times \\ & \times \prod_{r=2}^{\ell} \Theta(x_0 - |\lambda z_0 \sigma_{r-1}|) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} W_n \left( x' + \frac{\lambda z_0 \sigma_\ell}{2} \right) W_n^* \left( x' - \frac{\lambda z_0 \sigma_\ell}{2} \right) \exp [2i\pi x' (\sigma_\ell - \sigma_{\ell-1})] dx' \times \\ & \times \exp \left\{ -2i\pi \lambda z_0 \left[ \sigma_{r-1}^2 - \sigma_{r-1} \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j^{(2(\ell-1))}}{d_j} - \sum_{s=1}^{r-2} \sigma_s \right) \right] \right\} \exp \left[ -2i\pi x \frac{z_0}{f} \sigma_\ell \right] , \quad (5.23) \end{aligned}$$

que es una ecuación análoga a la hallada en (3.33) para el caso particular de una sola interacción.

Imponiendo aquí la condición ya utilizada en los Capítulos 3 y 4 (3.35) y (4.3) sobre las distancias de separación:

$$z_0 = \frac{2\alpha x_0^2}{\lambda 2^{p-2}} , \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots , \quad (5.24)$$

la exponencial que acompaña a la función de Heaviside en (5.23) resulta ser igual a 1. De esta forma la intensidad luminosa en el plano focal puede escribirse como:

$$\begin{aligned} I_f(x) = & \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda z_0}{2} \right)^\ell \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \dots \sum_{k_p^{(2(\ell-1))}} \dots \sum_{k_m^{(2(\ell-1))}} c_{k_p^{(2(\ell-1))}}^{*g_p} \dots c_{k_m^{(2(\ell-1))}}^{*g_m} \times \\ & \times A_{n,\ell}(\alpha, \beta_{\ell-1} - \beta_\ell) \exp \left[ -2i\pi x \frac{z_0}{f} \sigma_\ell \right] \prod_{r=2}^{\ell} \Theta(x_0 - |2\alpha d_p \beta_{r-1}|) , \quad (5.25) \end{aligned}$$



donde se introdujo la función Ambigüedad [90]:

$$A_{n,\ell}(\alpha, \beta_{\ell-1} - \beta_{\ell}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x) W_n(x - 2\alpha\beta_{\ell}d_p) \exp[2\pi i x (\beta_{\ell} - \beta_{\ell-1}) / d_p] dx, \quad (5.26)$$

y donde el factor  $\beta_{\ell} \equiv \sigma_{\ell}d_p$  es un entero impar, siendo  $d_p = 2^{1-p}x_0$  el período de la función de Rademacher de menor orden  $p$  entre las que sintetizan la función  $W_n(x)$ .

Del análisis de la expresión (5.25), se deduce que el factor  $\sigma_{\ell}$  presente en la exponencial compleja puede sustituirse básicamente por la sumatoria  $\sum_{j=p}^m g_j k_j / d_j$ . De este modo, (5.25) representa una serie de productorias de los desarrollos de Fourier que sintetizan  $W_n(x)$  magnificados en  $z_0/f$  y con los coeficientes  $c_{k_j}, \dots, c_{k_j^{g_j(2(\ell-1))}}$  pesados por los valores que toma la función Ambigüedad  $A_{n,\ell}(\alpha, \beta_{\ell-1} - \beta_{\ell})$ . De esta manera, el patrón de franjas observado en el plano focal reproduce aproximadamente la función apertura  $W_n(x)$  salvo los factores de peso mencionados, lo cual implica un efecto del tipo de autocorrelación similar al fenómeno de Lau con estructuras estrictamente periódicas.

El resultado (5.25) puede extenderse a la apertura general inicialmente propuesta en (5.1); es decir:

$$t(x) = \sum_n a_n W_n(x). \quad (5.27)$$

Para esto, el conjunto de funciones de Walsh presentes en el desarrollo  $\{W_n(x)\}$  se considera compuesto por dos clases de funciones. Por un lado el subconjunto de las funciones de Walsh cuyas distancias de resonancia dadas por (5.24) para sus correspondientes factores  $p$  y para algún valor de  $\alpha$ , coinciden con la distancia  $z_0$ :  $\{W_{n'}(x)\}$ ; y por otro, el subconjunto de funciones de Walsh que no verifican esta condición:  $\{W_{n''}(x)\}$ .

Se estima en este sentido que las funciones del subconjunto  $\{W_{n'}(x)\}$  contribuirán determinante a la distribución de intensidad en el plano focal de tal forma que el espectro de secuencias de la distribución poseerá máximos importantes para los órdenes  $n'$ . Mientras que por otro lado la energía de los órdenes correspondientes a las funciones  $\{W_{n''}(x)\}$  se degradará y distribuirá sobre todo el espectro sin presentar máximos notorios. Además se espera la contribución de las funciones de Walsh originadas en las interacciones y cuya distancia de resonancia coincida con  $z_0$ , es decir, el grupo de funciones de Walsh provenientes de los productos cruzados de las funciones  $\{Wal_{n'}(x)\}$ , el cual se anotó en el capítulo anterior como:  $\{W_{n'_1 \oplus n'_2}\}$ .

## 5.2 Arreglo de múltiples aperturas como dispositivo de filtrado espacial incoherente

Puede interpretarse el sistema de múltiples interacciones como un filtrado de coherencia de la misma forma que lo plantean Gori [10] y Sudol y Thompson [12, 13] (sección 2.2.2) para explicar el efecto Lau con dos redes periódicas. Para esto nótese que la expresión (5.18), con la condición (5.24), resulta:

$$\Gamma(x, \Delta x; z = \ell z_0^{(-)}) \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda z_0}{2} \right)^\ell \exp \left[ 2 \frac{i\pi}{\lambda z_0} x \Delta x \right] \times$$

$$\times \sum_{k_p} \dots \sum_{k_m} C_{k_p}^{g_p} \dots C_{k_m}^{g_m} \dots \sum_{k_p^{(2(\ell-1))}} \dots \sum_{k_m^{(2(\ell-1))}} C_{k_p^{(2(\ell-1))}}^{g_p} \dots C_{k_m^{(2(\ell-1))}}^{g_m} \times$$

$$\times \prod_{r=2}^{\ell} \Theta(x_0 - |\lambda z_0 \sigma_{r-1}|) \exp(-2i\pi x \sigma_{r-1}) \delta(\Delta x - \lambda z_0 \sigma_r) . \quad (5.28)$$

Del análisis de las funciones  $\delta$  de Dirac en esta relación, se observa que la función de coherencia mutua verifica una periodicidad proporcional a los períodos de las funciones de Rademacher presentes en la síntesis de la función de Walsh. De esta forma, considerando una apertura general como la indicada en (5.27), las sucesivas interacciones entre la función intensidad mutua con las aperturas van seleccionando el paso de los máximos de coherencia, haciendo coincidir las  $\delta$  con las ranuras de las aperturas correspondientes a las funciones de Walsh que satisfacen la condición de resonancia (ecuación (5.24)).

Una posible aplicación práctica del dispositivo mostrado en la figura 5.2, es su utilización como una generalización del filtro de frecuencias o secuencias espaciales no-coherente citado en el Capítulo 3 (sección 3.4). La distribución de intensidad en el plano focal será determinada principalmente por las funciones de Walsh presentes en el desarrollo de las transmitancias (5.27) cuya distancia de resonancia coincida con la distancia de equiespaciamiento elegida:  $z = z_0$ . Mientras que el resto de las funciones de Walsh de la síntesis de  $t(x)$ , sólo contribuirán con un cierto nivel de ruido. La variación de la distancia  $z_0$  puede entenderse como una "sintonía" de las secuencias de las funciones de Walsh que verifiquen la condición (5.24) para la distancia en cuestión. Este proceso de selección de la distancia de resonancias afecta la distribución de intensidad del campo lejano a la salida del sistema de aperturas cambiando su contenido de frecuencias o secuencias espaciales.

### 5.3 Resultados

Con el propósito de ilustrar y corroborar los análisis desarrollados en las secciones 5.1 y 5.2, se realizaron simulaciones computacionales de las sucesivas interacciones: **apertura-coherencia mutua**, en base al arreglo presentado en la **figura 5.1**. Con este fin, se propaga la función intensidad mutua  $\Gamma(x_1, x_2; z)$  a través de este arreglo mediante la aplicación sucesiva de las ecuaciones:

$$\Gamma(x_1, x_2; z = \ell z_0^{(-)}) = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1^2 - x_2^2) \right] \iint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x'_1, x'_2; z = (\ell - 1)z_0^{(+)} ) \times \\ \times \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z_0} (x_1'^2 - x_2'^2) \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda z_1} (x_1 x'_1 - x_2 x'_2) \right] dx'_1 dx'_2 ; \quad (5.29)$$

$$\Gamma(x_1, x_2; \ell z_0^{(+)}) = t(x_1)t^*(x_2)\Gamma(x_1, x_2; \ell z_0^{(-)}) , \quad \ell = 1, 2, 3, \dots . \quad (5.30)$$

La transformación de Zernike, dada por la ecuación (5.29), que propaga la intensidad mutua entre dos aperturas sucesivas se obtiene mediante la utilización del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT); mientras que la expresión (5.30) permite obtener la función coherencia mutua detrás de cada apertura.

En principio se considera una función transmitancia dada por una única función de Walsh:  $W_{896}(x) = \frac{1}{2} (1 + R_9(x) R_8(x) R_7(x)) \text{rect}(x/x_0)$ . Una parte de dicha función, muestreada en total con 4096 puntos, se grafica en la **figura 5.3 (a)**.

El módulo de la función intensidad mutua incidente inmediatamente antes de la cuarta y quinta aperturas derivado de las ecuaciones (5.29) y (5.30) se muestra en las **figuras 5.3 (b) y (c)**. Para obtener la condición de generación de coherencia establecida en la sección 5.1, la distancia  $z_0$  se eligió de acuerdo con la ecuación (5.24), con  $p = 7$  y  $\alpha = 1$ .

En este caso, se verifica la condición que llevó la deducción desde la ecuación (5.6) a la (5.28); es decir  $2^p \gg 1$ , y por lo tanto se detecta un incremento de la coherencia espacial en virtud de la serie de máximos importantes que se generan en la función intensidad mutua.

Se repite ahora el mismo procedimiento pero con una función de Walsh tal que la condición  $2^p \gg 1$  no es suficientemente satisfecha. Se toma como transmitancias de las aperturas la función:  $W_{784}(x) = \frac{1}{2} (1 + R_9(x) R_8(x) R_4(x)) \text{rect}(x/x_0)$ , graficada en parte en la **figura 5.4 (a)**. De tal forma que en este caso, el menor orden de las funciones de Rademacher presentes en la síntesis ( $p = 4$ ) es significativamente menor que en el ejemplo anterior.

Las **figuras 5.4 (b) y (c)** muestran el módulo de la función coherencia mutua incidente sobre dos aperturas sucesivas. Como es lógico, en este caso, el valor de la distancia  $z_0$  es cambiado por el calculado

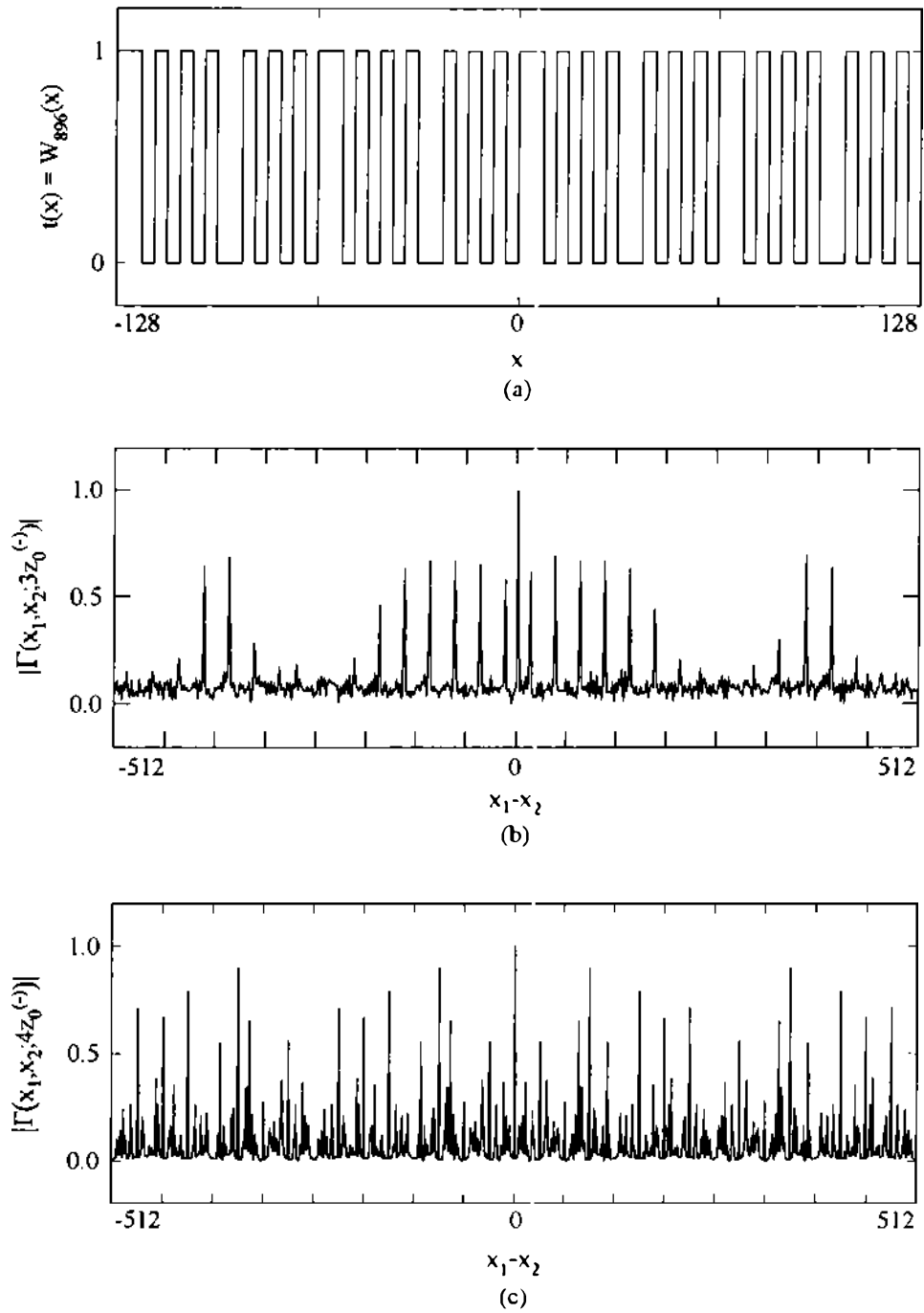


Figura 5-3: (a) Sección de la función de Walsh de orden 896 y módulo de la función coherencia mutua inmediatamente antes de la (b) cuarta y (c) quinta interacciones.

de la ecuación (5.24) con  $p = 4$ , y  $\alpha = 1$ . De este modo las aperturas se sitúan bastante más alejadas entre sí. Los resultados muestran el efecto de la no verificación de la condición:  $2^p \gg 1$ . Contrariamente a lo que indicaban las simulaciones del caso anterior, para este ejemplo se observa un decrecimiento de los escasos máximos de coherencia.

El análisis siguiente muestra las posibilidades del arreglo de aperturas múltiples, según se grafica en la figura 5.2, como dispositivo de filtrado espacial de frecuencias.

Partiendo del primer ejemplo con la transmitancia dada por la función de Walsh  $W_{896}(x)$ , se coloca una lente de distancia focal positiva  $f$  detrás de la cuarta apertura. La figura 5.5 (a) muestra el perfil de intensidad normalizada en el plano focal de la lente  $I_f(x)$ . El diagrama se obtiene aplicando computacionalmente la transformada de Fourier a la coherencia mutua obtenida luego de la quinta apertura, para luego calcular  $I_f(x) = \Gamma_f(x, x)$ .

Si bien en el diagrama no se manifiesta una gran semejanza con la función de Walsh de las aperturas, la figura 5.5 (b) es más clarificadora. Esta figura muestra el correspondiente espectro de Walsh-Hadamard (ver sección 3.2.4) del perfil de la intensidad en el plano focal:  $WHT\{I_f(x)\}$ , cuya variable  $n$  son los órdenes discretos de las funciones de Walsh. Los espectros de secuencias se obtienen también por cálculos computacionales utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Walsh-Hadamard. Como puede verse, la intensidad está principalmente sintetizada por las funciones de Rademacher presentes en  $W_{896}(x)$ ; es decir,  $R_7(x) = Wal_{128}(x)$ ,  $R_8(x) = Wal_{256}(x)$  y  $R_9(x) = Wal_{512}(x)$ , y por la función de Walsh  $W_{896}(x)$  misma. También se manifiestan otros máximos provenientes de los términos cruzados generados en las interacciones, y que responden a la propiedad (4.9):  $Wal_{n'}(x)Wal_{n''}(x) = Wal_{n' \oplus n''}(x)$ , utilizada en el Capítulo 4 para las propagaciones bajo iluminación coherente. Los productos de  $Wal_{896}(x)$  con  $R_7(x) = Wal_{128}(x)$ ,  $R_8(x) = Wal_{256}(x)$  y  $R_9(x) = Wal_{512}(x)$ , generan los máximos de  $n = 768$ ,  $n = 640$  y  $n = 384$ , respectivamente. Estas funciones de Walsh, con órdenes que no existían en la síntesis original, logran propagarse ya que su parámetro  $p$  es igual o mayor que  $p = 7$ , en base al cual se fijó  $z_0$ , y por lo tanto sus distancias de resonancia coinciden con  $z_0$  o caben un número entero de veces en ésta.

Análogamente, puede analizarse el diagrama de intensidad en el plano focal pero a la salida de la configuración del segundo ejemplo (también con cinco aperturas), cuyas funciones de transmitancia están sintetizadas por la función de Walsh  $W_{784}(x)$ . Los resultados se grafican en las figuras 5.6 (a) y (b). En este caso el diagrama de intensidad  $I_f(x)$  no corresponde a un sistema de franjas, y la energía inicialmente contenida en la componente de Walsh  $n = 784$  se distribuye en todo el espectro. Esto se debe a que, como se mencionó previamente, la condición:  $2^p \gg 1$  no está suficientemente satisfecha ya que  $p = 4$ .

Seguidamente se modifica el arreglo utilizado para obtener los resultados mostrados en la figura 5.5, de tal forma que se varía la distancia entre las aperturas  $z_0$  en un factor 1.21. Dado que la distancia

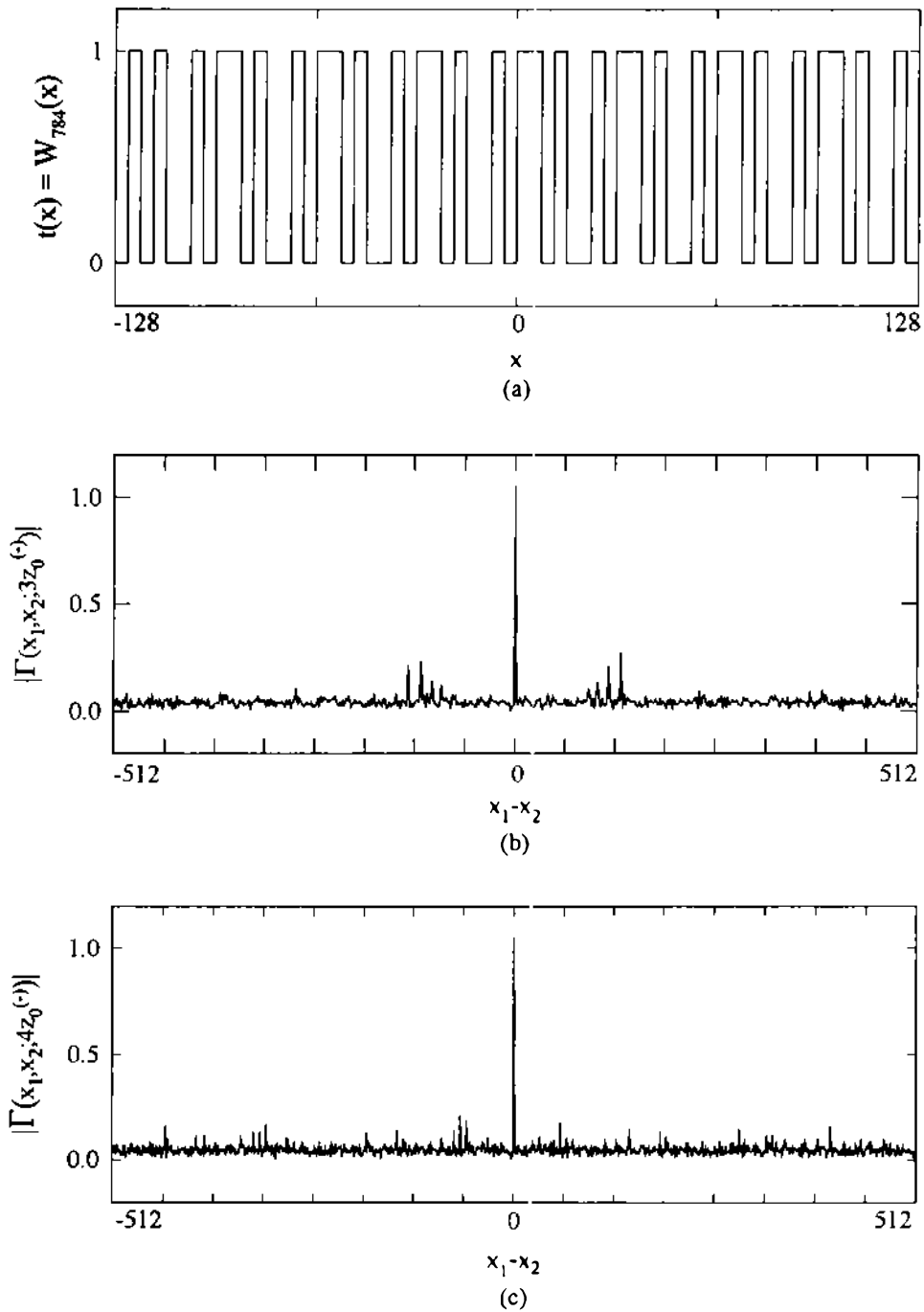


Figura 5-4: (a) Sección de la función de Walsh 784 y módulo de la función coherencia mutua inmediatamente antes de la (b) cuarta y (c) quinta interacciones.

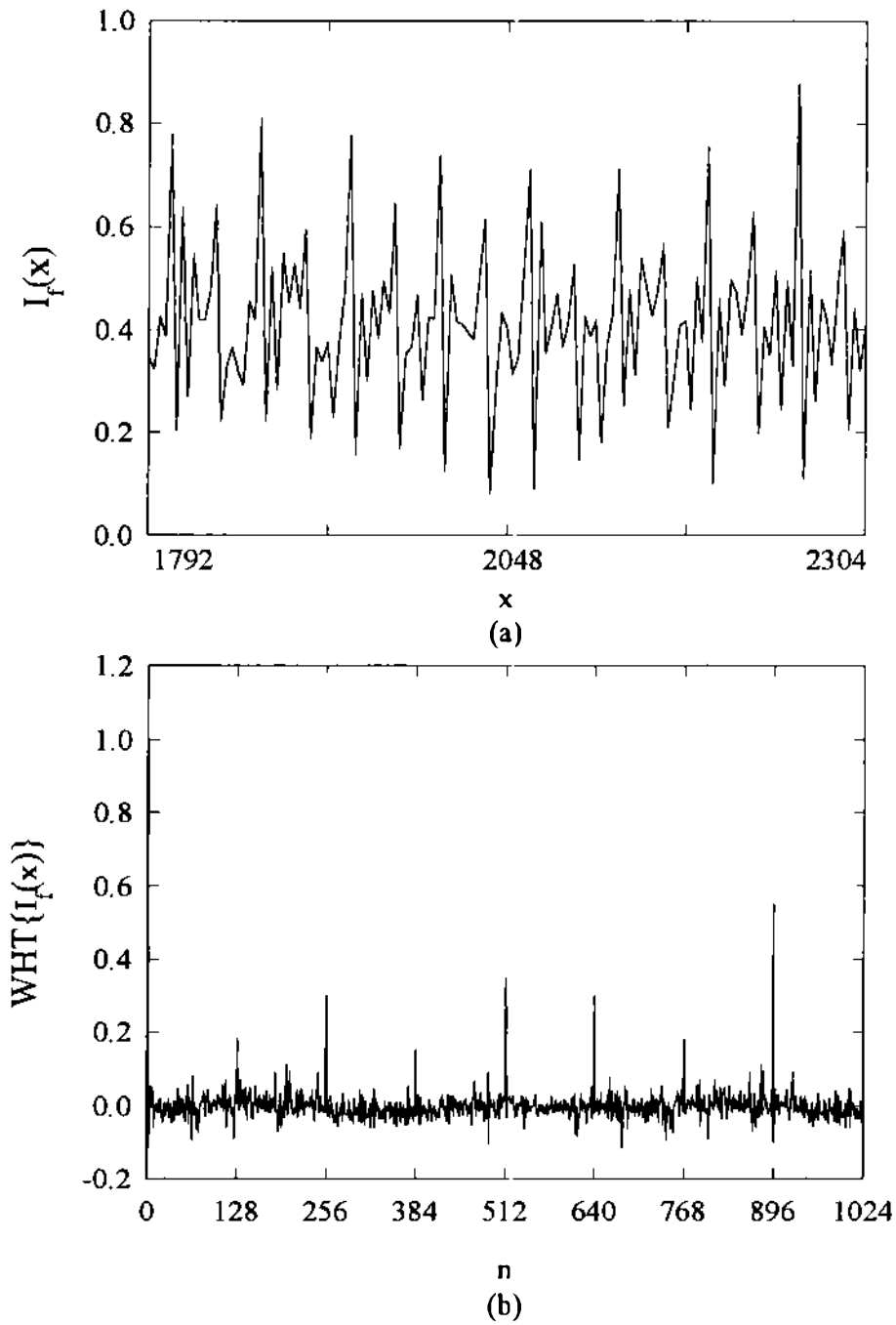


Figura 5-5: (a) Perfil de la intensidad y (b) su espectro de Walsh en el plano focal de una lente colocada a la salida del dispositivo correspondiente a la situación de la figura 5.3.

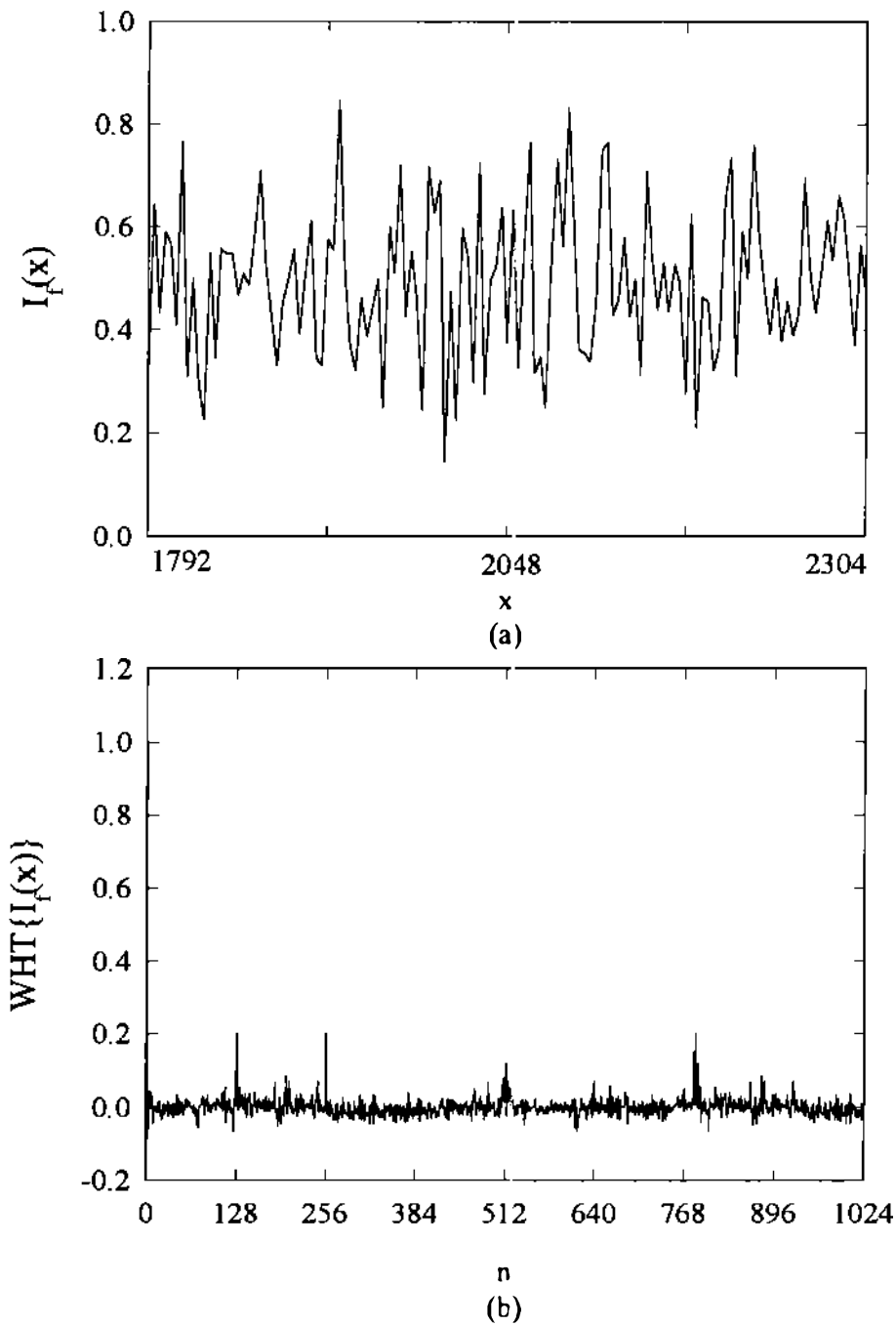


Figura 5-6: (a) Perfil de la intensidad y (b) su espectro de Walsh en el plano focal de una lente colocada a la salida del dispositivo correspondiente a la situación de la figura 5.4.



de resonancia  $z_0$  se obtenía a partir de la expresión (5.24), la nueva distancia  $1.21z_0$  no verificará tal condición, produciendo una especie de "desenfoco" del dispositivo. Los resultados se muestran en las figuras 5.7 (a) y (b). Como era de esperar, la intensidad  $I_f(x)$  no corresponde al diagrama de franjas cuasiperiódico como el que se obtenía bajo las condiciones de las figuras 5.5, y su WHT asociada se encuentra distribuida sobre todo el espectro de Walsh sin presentar máximos considerables.

Finalmente, se considera como función transmitancia del sistema de cuatro aperturas, una superposición de funciones de Walsh de la forma:  $t(x) = 0.25W_{640}(x) + 0.33W_{768}(x) + 0.42W_{896}(x)$ , que se encuentra graficada en la figura 5.8 (a).

Con el propósito de destacar la influencia que posee la distancia  $z_0$  sobre la propagación de la coherencia en un dispositivo de este tipo, se elige el valor de la distancia  $z_0$  entre las aperturas en base a la expresión (5.24), pero eligiendo  $p = 8$ . Según los cálculos realizados en las secciones 5.1 y 5.2, y dado que para  $Wal_{640}(x) = R_7(x)R_9(x)$ ,  $p = 7$ ; para  $Wal_{768}(x) = R_8(x)R_9(x)$ ,  $p = 8$ ; y para  $Wal_{896}(x) = R_7(x)R_8(x)R_9(x)$ ,  $p = 7$ ; esto significa que la distancia elegida será distancia de resonancia sólo de  $W_{768}(x)$ , mientras que el peso de los otros dos términos se irá atenuando en las sucesivas interacciones.

Esta predicción teórica es evidentemente corroborada por la gráfica del espectro de Walsh-Hadamard de la distribución de intensidad en el plano focal (obtenida con el mismo procedimiento utilizado hasta ahora), representada en la figura 5.8 (b). El espectro de secuencias de  $I_f(x)$  exhibe un máximo notable en  $n = 768$  ( $p = 8$ ), pero no para  $n = 640$  y  $n = 896$ . Por la misma razón discutida en el análisis de la figura 5.5 (b), aparecen máximos menores en  $n = 128, 256, 384$  y  $512$ .

## 5.4 Conclusiones

En suma, se ha analizado en este capítulo un dispositivo periódico de aperturas bajo iluminación incoherente y cuasimonocromática, utilizando las propiedades de las funciones de Walsh. Se ha considerado a las funciones transmitancias sintetizadas por funciones de Walsh, las cuales conforman una base completa. Para aquellas funciones de Walsh que satisfacen la condición de resonancia dada por (5.24), se produce un ajuste entre la transmitancia y la función intensidad mutua calculada en los planos de las diferentes aperturas. Esto se traduce en un incremento del grado de coherencia espacial. Mientras que para las funciones de Walsh que no verifican la condición, la luz a la salida del arreglo se mantiene espacialmente incoherente.

En este sentido, la serie de aperturas binarias finitas actúan como un "filtro de coherencia espacial", en forma similar al dispositivo Lau, el cual se restringe a sólo un par de aperturas periódicas e infinitas. Este razonamiento indica que el estudio presentado puede considerarse como una extensión del efecto

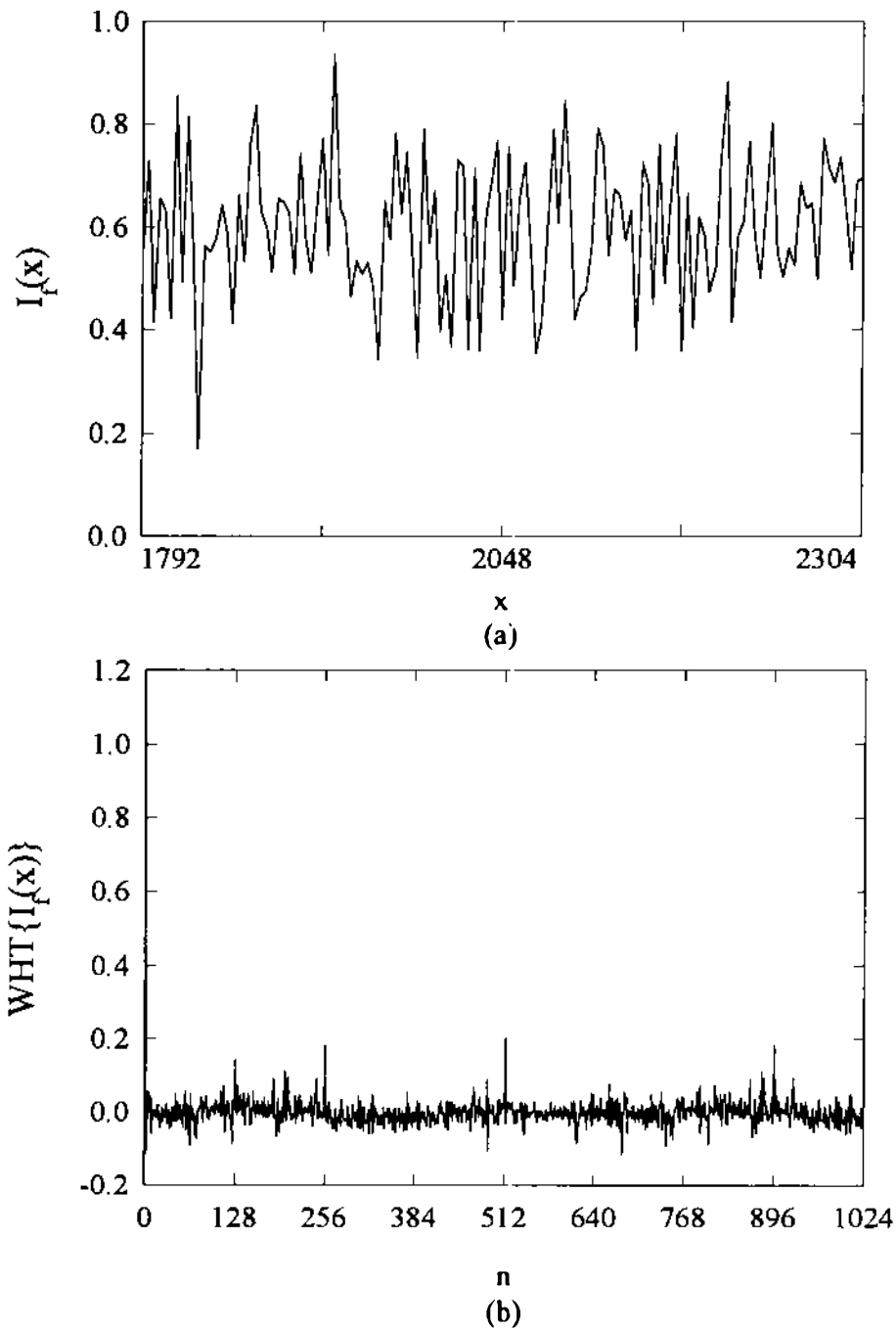


Figura 5-7: (a) Perfil de la intensidad y (b) su espectro de Walsh en el plano focal de una lente colocada a la salida del dispositivo correspondiente a la situación de la figura 5.3 pero variando la distancia  $Z_0$ .

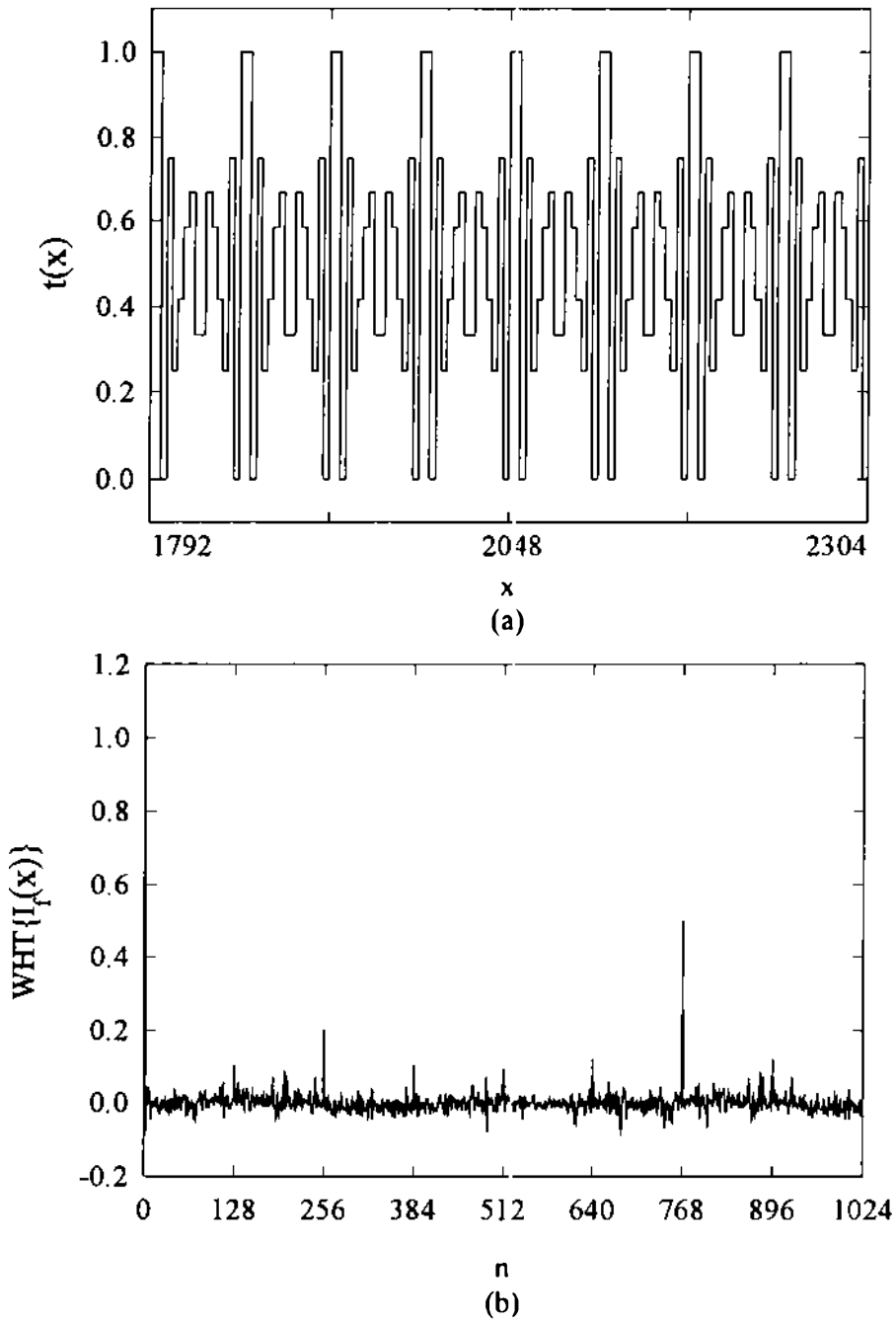


Figura 5-8: (a) Sección de una superposición de funciones de Walsh y (b) espectro de secuencias de la intensidad en el plano focal de una lente colocada a la salida del correspondiente dispositivo de cinco aperturas.

Lau para un arreglo de aperturas múltiples.

El formalismo de la transformada de Walsh-Hadamard (WHT) es empleado para analizar los diagramas de franjas generados en el plano focal posterior de una lente colocada a la salida del arreglo de múltiples aperturas, demostrando que se encuentra sintetizado principalmente por las componentes del desarrollo de Walsh de la función de transmitancia que verifican la condición de resonancia para la distancia de equiespaciado elegida, mientras que el resto de las componentes sólo contribuyen con un cierto nivel de ruido.

Los resultados obtenidos en base a simulaciones corroboran los cálculos teóricos realizados previamente, y la importancia de las aproximaciones empleadas.

El enfoque del análisis de Walsh ha demostrado ser el adecuado para realizar el estudio de la variación del grado de coherencia espacial en un sistema de múltiples interacciones bajo iluminación espacialmente incoherente.

## Capítulo 6

# PROPIEDADES DIFRACTIVAS DE ESTRUCTURAS PREFRACTÁLICAS

### 6.1 Introducción

Si bien no existe una definición estricta de fractal, puede decirse que se trata de estructuras que poseen alguna invariancia de forma ante dilataciones y rototraslaciones (invariancia de escala). En algún sentido, secciones convenientemente demagnificadas de dichas estructuras son iguales a todo el conjunto, es decir que poseen la llamada propiedad de autosimilaridad [28].

Se hallan ejemplos de este tipo de formaciones en los diversos campos de la ciencia, como la geofísica, la astronomía, la biología, la química y las matemáticas. De todas maneras, como por definición la invariancia de escala de los fractales debe verificarse hasta el límite infinitesimal de su constitución, estas estructuras existen sólo como idealizaciones matemáticas, y la fractalidad de las formaciones que se encuentran en la naturaleza es sólo aproximada.

En el marco de la óptica, se ha estudiado la difracción de objetos fractálicos no sólo por un interés en el fenómeno mismo, sino también con el propósito de hallar posibles aplicaciones a la ingeniería óptica.

Se han realizado numerosos análisis de la difracción en la región de Fraunhofer de distintas estructuras fractálicas. C. Allan y M. Cloitre [91, 92] estudiaron algunas propiedades de escala de los campos de Fraunhofer difractados por barras de Cantor, fractales de Vicsek y "tapices" de Sierpinski. El campo difractado en la región de Fraunhofer por fractales de Koch fue discutido entre otros por J. Uozumi

[94, 95]. Uno, Uozumi y Asakura [96] estudiaron algunas propiedades estadísticas de la difracción en la región de Fraunhofer por fractales "random" de Koch.

Los estudios en este sentido han establecido la conservación de las propiedades de autosimilaridad de los fractales en el campo difractado en la región de Fraunhofer. En forma más general, Lakhtakia y Caufield [97] demostraron que la transformada de Fourier es un caso particular de un conjunto de transformaciones integrales que mantienen la propiedad de fractalidad.

Recientemente se han comenzado los estudios de la difracción en la región de Fresnel de objetos fractálicos. Sakurada entre otros [98, 99] analizó las propiedades difractivas de las barras de Cantor en la región de Fresnel, encontrando que la autosimilaridad disminuye notablemente a menos que se consideren distancias muy alejadas de la apertura.

En este capítulo se estudiarán las propiedades de autosimilaridad del campo difractado en la región de Fresnel por las barras de Cantor para distancias cercanas a la apertura. Con este fin se aplica el análisis propuesto en el **Capítulo 4**, que hace uso del formalismo de Walsh-Hadamard.

## 6.2 Las barras de Cantor

Las barras de Cantor constituyen un conjunto de funciones que puede generarse de la siguiente forma. La

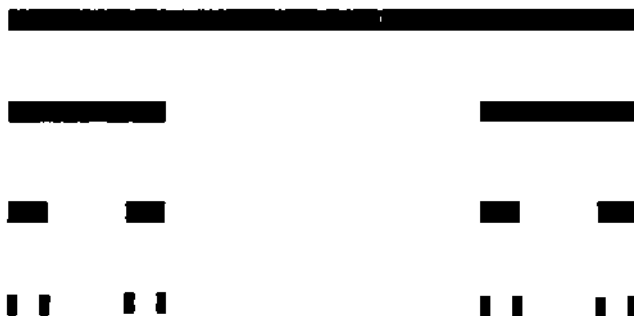


Figura 6-1: El iniciador y los tres primeros órdenes de las barras de Cantor.

figura 6.1 indica el "iniciador" y los tres primeros niveles del conjunto de Cantor de escala un cuarto. El iniciador, que define la longitud de la estructura de las barras de Cantor, consiste en un único intervalo  $[-x_0/2, x_0/2]$ . A esta barra se le realiza el siguiente proceso: se la divide en cuatro partes de igual longitud, eliminándose los dos segmentos correspondientes a la sección central. De este modo el nivel 1, denominado unidad generadora o "generador", resulta estar compuesto por las dos barras situadas en los extremos. A cada una de estas dos barras se le realiza el mismo proceso dando lugar al nivel 2. La barra de Cantor de nivel  $N$  se obtendrá luego de repetir  $N$  veces la misma operación. Estrictamente el

fractal de Cantor se obtiene en el caso límite  $N \rightarrow \infty$ , mientras que los distintos niveles finitos de las barras de Cantor constituyen en realidad un conjunto de funciones "prefractálicas".

Expresando como una función  $C(x)$  al fractal de Cantor, la condición de autosimilaridad puede escribirse:

$$C(mx) = C(x) , \tag{6.1}$$

donde  $m$  es el factor de magnificación o de escala, que en este caso  $m = 4$ . Mientras que los prefractales verificarán esta igualdad en forma aproximada:

$$C_N(mx) \cong C_N(x) , \tag{6.2}$$

ya que la versión demagnificada  $C_N(mx)$  poseerá una estructura de repetición menos que  $C_N(x)$ .

Sin pretender profundizar demasiado en el formalismo matemático de las estructuras fractálicas, puede mencionarse que la dimensión  $D$  de un fractal de este tipo se relaciona con el número  $M$  de segmentos en un determinado nivel iterativo y con la longitud relativa de cada sección o razón de escala  $\epsilon$ . De tal forma que en el límite asintótico  $\epsilon \rightarrow 0$ , verifican la siguiente ecuación:

$$M(\epsilon) = \epsilon^{-D} , \tag{6.3}$$

de donde la dimensión fractálica en este ejemplo resulta  $D = \log(2)/\log(4) = 0.5$ .

El conjunto de barras de Cantor de escala un cuarto ( $m = 4$ ) propuesto, es sólo una de las posibles definiciones de esta clase de fractales lineales. En particular, el conjunto más citado es en realidad el de escala un tercio ( $m = 3$ ), cuya dimensión fractálica es  $D = \log(2)/\log(3) \cong 0.6309$ .

### 6.3 Transformada de Walsh-Hadamard de las barras de Cantor

Si sobre cada barra de Cantor de cierto nivel  $N$ , se asigna el valor 0 en los lugares del segmento  $[-x_0/2, x_0/2]$  donde hay barras, y 1 a donde no las hay, se la puede considerar como una serie de funciones rectángulo. La barra de Cantor de nivel  $N$  tendrá  $2^N$  funciones rectángulo de ancho  $x_0/4^N$ .

Las funciones de Cantor como cualquier función arbitraria pueden desarrollarse en base al conjunto completo y ortogonal de funciones de Walsh (ver sección 3.2.3), de la siguiente manera:

$$C_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x) . \tag{6.4}$$

En base a la definición establecida para las barras de Cantor, puede demostrarse con facilidad que en

los primeros niveles los desarrollos resultan:

$$C_0(x) = W_0(x) = R_0^2(x) , \quad (6.5)$$

$$C_1(x) = W_0(x) + W_2(x) = R_0^2(x) + R_1(x) , \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= W_0(x) + W_2(x) + W_8(x) + W_{10}(x) = \\ &= R_0^2(x) + R_1(x) + R_3(x) + R_1(x)R_3(x) , \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$C_3(x) = W_0(x) + W_2(x) + W_8(x) + W_{10}(x) + W_{32}(x) + W_{34}(x) + W_{40}(x) + W_{42}(x) =$$

$$\begin{aligned} &R_0^2(x) + R_1(x) + R_3(x) + R_1(x)R_3(x) + R_5(x) + \\ &+ R_1(x)R_5(x) + R_3(x)R_5(x) + R_1(x)R_3(x)R_5(x) , \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde  $\{R_k(x)\}$  representan las funciones de Rademacher (ver sección 3.2.2). A partir de estas expresiones, se halla la siguiente relación iterativa para las funciones de Cantor:

$$C_N(x) = C_{N-1}(x) (1 + R_{2^{N-1}}(x)) ; \quad (6.9)$$

además puede notarse que el desarrollo (6.4) posee en general  $2^N$  términos (funciones de Walsh).

La simplicidad de los desarrollos de Walsh de las funciones de Cantor sugiere analizar la transformada de Walsh-Hadamard (WHT) de estas funciones. Tal como se la presentó en las expresiones (3.11) y (3.12), la WHT se formula como un operador integral aplicado a una función  $f(x)$ , de la forma:

$$WHT \{f(x)\} \equiv \frac{1}{x_0} \int_{-x_0/2}^{+x_0/2} f(x) Wal_n(x) dx , \quad (6.10)$$

cuya variable es el orden discreto  $n$  de las funciones de Walsh  $\{Wal_n(x)\}$ .

Las WHT de las distintas barras de Cantor se las obtiene por cálculo computacional como ya se lo ha indicado en los Capítulos 4 y 5.



En la **figura 6.2** se grafican las secciones no nulas de los espectros de Walsh-Hadamard de las barras de Cantor de niveles  $N = 4, 5$  y  $6$ . En particular, la **figura 6.2 (c)** junto con las **figuras 6.3 (a) y (b)** muestran la transformada de Walsh-Hadamard de la barra de Cantor de nivel  $6$  en tres diferentes escalas del dominio (o magnificaciones),  $1, 1/4$  y  $1/16$ , respectivamente. Puede deducirse de estas representaciones, que las WHT de los prefractales de Cantor resultan ser también prefractales, con factor de escala  $m = 4$ , cuyas secciones no son rectángulos sino funciones delta de Dirac aunque acotadas al valor  $1$ . Gráficas similares pueden obtenerse para distintos órdenes  $N$ , observándose que cuanto mayor es el orden  $N$ , mayores son los cambios de escala que verifican esta similaridad. Por lo tanto, la transformada de Walsh-Hadamard se suma al grupo de las transformadas integrales propuestas por Lakhtakia [97] que conservan la fractalidad.

## 6.4 Campo difractado por las barras de Cantor y autosimilaridad

Dada la naturaleza binaria de las barras de Cantor, se las puede considerar como funciones de transmitancia de determinados objetos. La función transmitancia correspondiente a la barra de Cantor de nivel  $3$  se encuentra graficada en la **figura 6.4**. En relación con la configuración óptica mostrada en la **figura 6.5**, donde la apertura es una cierta barra de Cantor, se analizará la propagación de la luz entre el plano localizado en  $z = 0$  y un plano en la región de difracción de Fresnel. Se considerará la apertura iluminada normalmente por una onda plana monocromática. Por lo tanto, la amplitud compleja  $u(x; z)$  puede evaluarse mediante la integral unidimensional de Fresnel dada por:

$$u(x; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_N(x') \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} (x - x')^2\right) dx' \quad (6.11)$$

Introduciendo el desarrollo (6.4) en la expresión (6.11), se obtiene:

$$u(x; z) = \sum_n a_n \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x') \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} (x - x')^2\right) dx' \quad (6.12)$$

La integral (6.11) resulta así dividida en  $2^N$  integrales cada una de las cuales corresponde a la contribución de una de las  $2^N$  funciones de Walsh que sintetizan la barra de Cantor original.

Por lo demostrado en el Capítulo 4 (ver ecuación (4.4)), dada una cierta distancia  $z_0$  particular en la que se pretenda obtener el campo propagado, y que coincide con la distancia de autoimagen de un subconjunto de las funciones de Walsh  $\{W_{n'}(x)\}$  presentes en el desarrollo de  $C_N(x)$ , puede analizarse la propagación como la superposición de las autoimágenes de las funciones de este conjunto, más la contribución de las funciones "desenfocadas"  $\{W_{n''}(x)\}$  en forma de ruido de fondo.

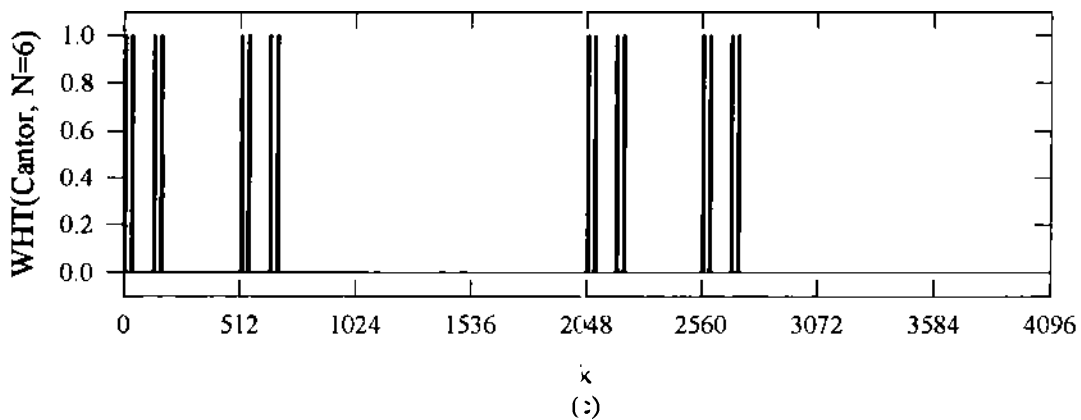
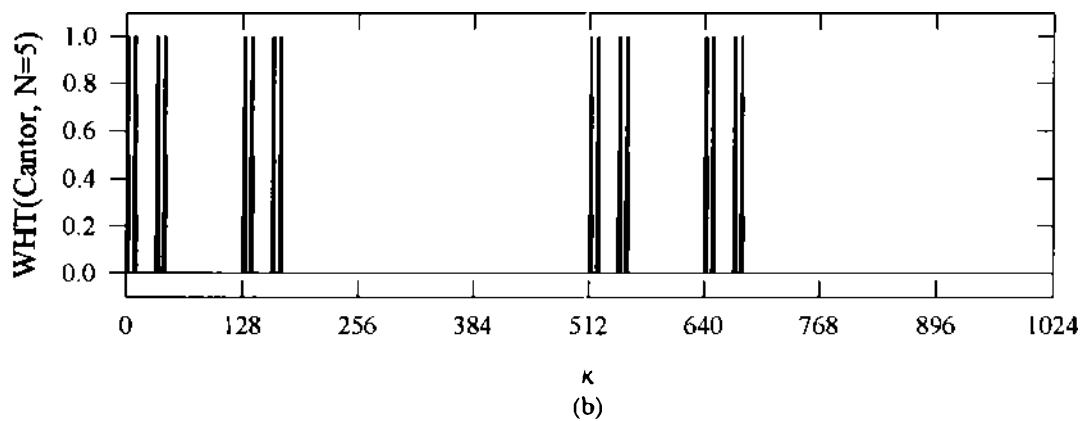
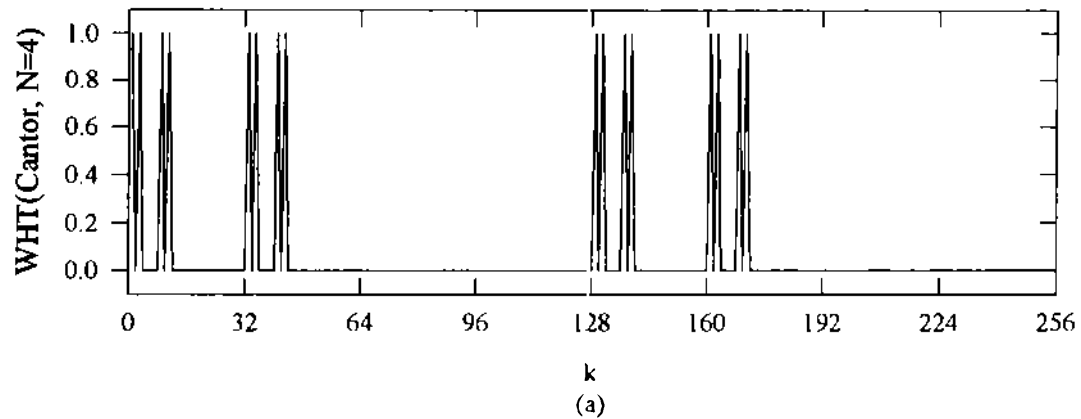


Figura 6-2: Secciones no nulas de los espectros de Walsh de las barras de Cantor de niveles 4, 5 y 6.

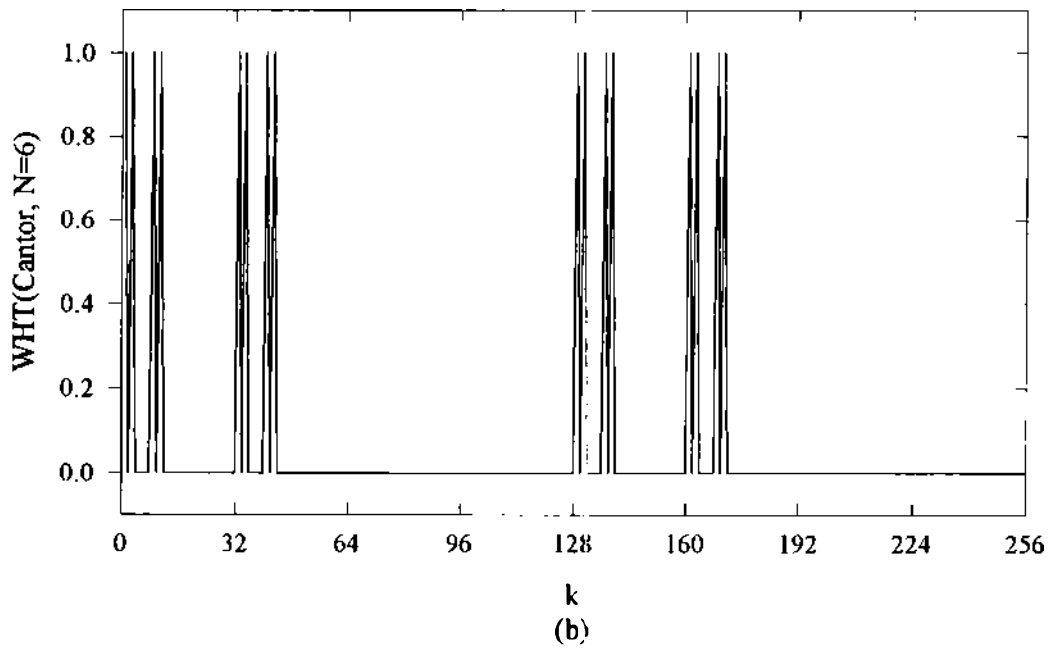
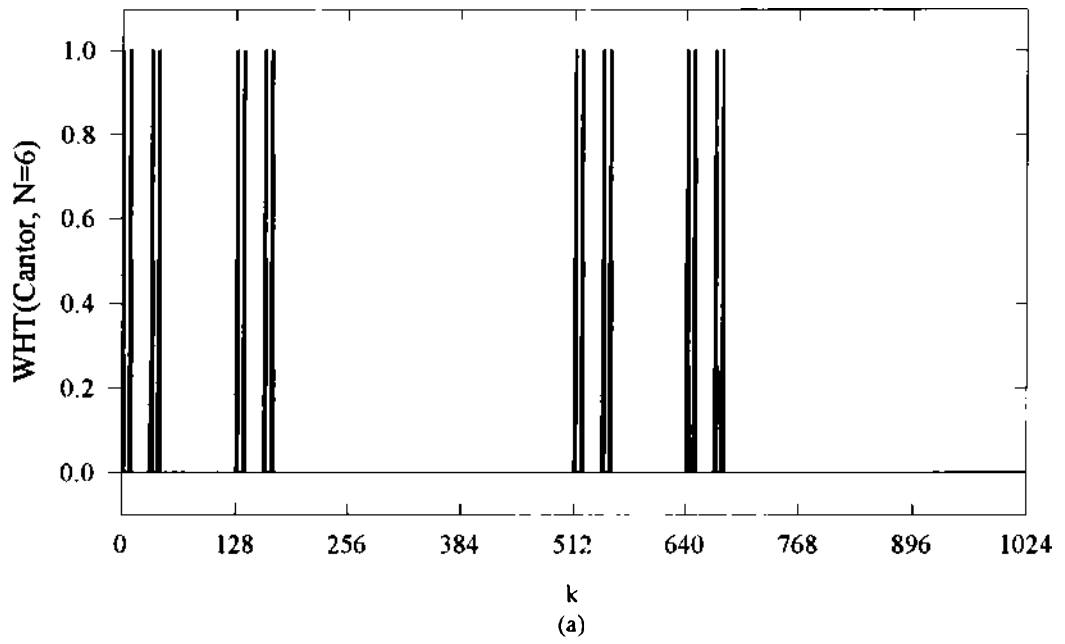


Figura 6-3: Magnificación 4 y 16 del espectro de Walsh (figura 6.2 (c)) de las barras de Cantor de nivel 6.

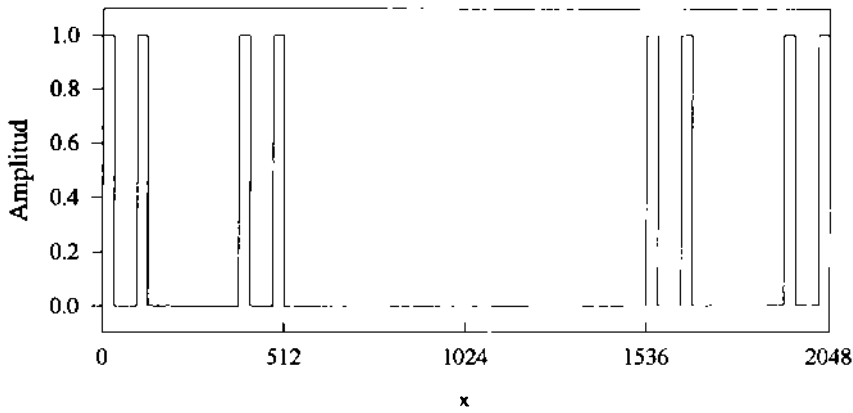


Figura 6-4: Función transmitancia sintetizada por la barra de Cantor de nivel 3.

De todas maneras dicho argumento fue extensamente ilustrado en el Capítulo 4, y en este capítulo para hallar el campo  $u(x; z)$  simplemente se procede a calcular numéricamente la suma de integrales (6.12) para diversas distancias  $z$ .

Con el propósito de evaluar el grado de fractalidad de los campos difractados se introduce aquí un parámetro utilizado por Sakurada [98] para evaluar la autosimilaridad. Este parámetro es definido como el coeficiente de correlación de la función intensidad calculada a cierta distancia sobre el eje óptico  $I(x; z)$ , y su expresión demagnificada,  $I(x/m; z)$ . De tal modo que, el grado de autosimilaridad  $S(m; z)$ , se propone como:

$$S(m; z) = \frac{\int (I(x; z) - \bar{I})(I(x/m; z) - \bar{I}_m) dx}{\sqrt{\int (I(x; z) - \bar{I})^2 dx \int (I(x/m; z) - \bar{I}_m)^2 dx}} \quad (6.13)$$

donde  $\bar{I}$  y  $\bar{I}_m$  son los valores medios de  $I(x; z)$  e  $I(x/m; z)$ , respectivamente. El intervalo de integración es el "dominio fractálico", el cual está determinado por el ancho del diagrama de difracción producido en la región de Fraunhofer por el mínimo elemento de la barra de Cantor. El grado de autosimilaridad varía entre 0 y 1, alcanzando este último valor cuando se considera una función fractálica ideal.

Según se infirió de las figuras de la sección anterior, la transformada de Walsh constituye una transformada que conserva la fractalidad en el caso de los prefractales. Para corroborar dicha propiedad respecto a los campos propagados en la región de difracción de Fresnel (los cuales a priori no verificarán

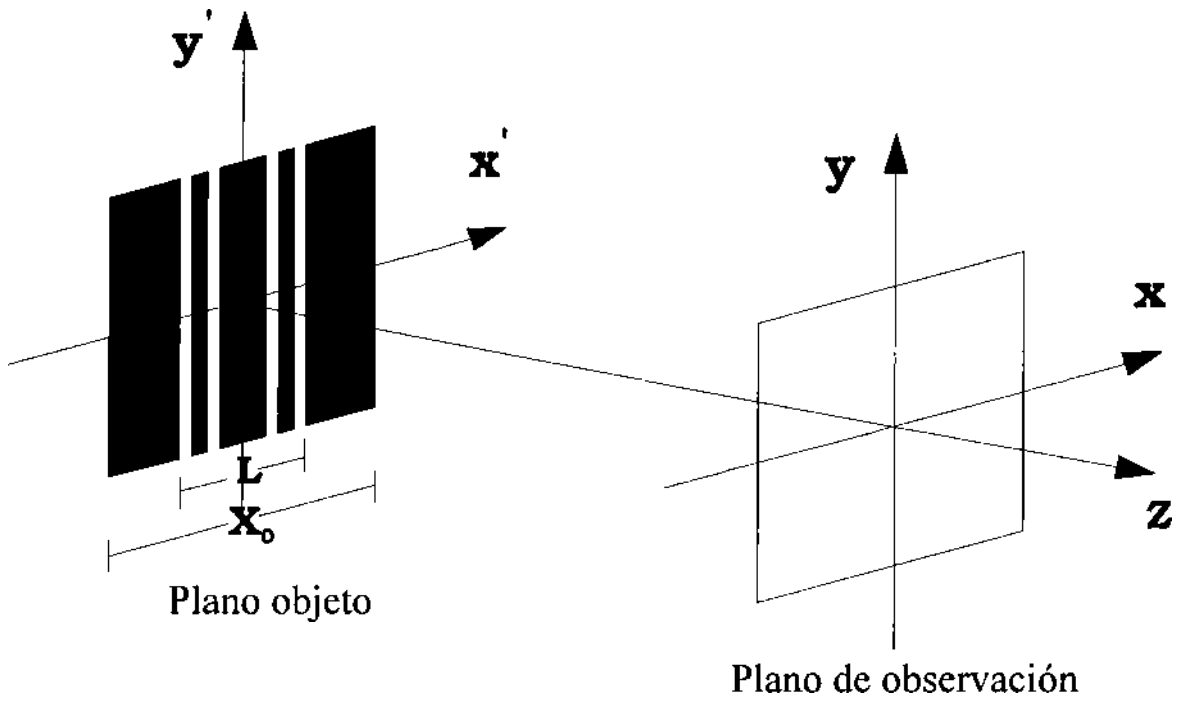


Figura 6-5: Dispositivo difractivo con una apertura sintctizada por una barra de Cantor.

una fractalidad muy alta), se define aquí un parámetro análogo al grado de autosimilaridad; se trata del coeficiente de correlación espectral  $S'(m; z)$ , que compara el espectro de WH de la intensidad con la versión demagnificada de dicho espectro. Es decir:

$$S'(m; z) = \frac{\sum_k (W_k - \overline{W})(W_{k/m} - \overline{W}_m)}{\sqrt{\sum_k (W_k - \overline{W})^2 \sum_k (W_{k/m} - \overline{W}_m)^2}} \quad (6.14)$$

donde las funciones  $W_k$ , de variable discreta  $k$ , son los coeficientes de Walsh de la WHT de la distribución de intensidad  $I(x; z)$ , mientras que las funciones  $W_{k/m}$  son los coeficientes de Walsh del espectro demagnificado, y los parámetros  $\overline{W}$  y  $\overline{W}_m$  son sus respectivos valores medios.

## 6.5 Resultados

Con el propósito de ilustrar y corroborar las deducciones de la sección anterior se realizaron una serie de simulaciones computacionales.

En primer término se evaluó numéricamente la serie de integrales (6.12), considerando el prefractal

de Cantor de nivel 6 como apertura del dispositivo mostrado en la **figura 6.5**, donde el tamaño de la apertura es  $x_0 = 3.6 \text{ cm}$  y la longitud de onda de la iluminación es  $\lambda = 630 \text{ nm}$ .

En la **figura 6.6 (a)** se muestra la sección central del campo magnificado cuatro veces, calculado a una distancia  $z = 37.5 \text{ cm}$ , mientras que la **figura 6.6 (b)** indica la versión magnificada dieciséis veces del mismo campo. Aún cuando la autosimilaridad no es muy alta, puede observarse una semejanza en la forma general de estas figuras. Es notorio además que ambas gráficas satisfacen la razón de escala de 1 a 4 ( $m = 4$ ); esto puede atribuirse a que el factor de escala de la función apertura es  $m = 4$ .

Seguidamente, se repitió en forma análoga el cálculo del campo mediante la fórmula (6.12) pero para diversas distancias  $z$  sobre el eje óptico. Considerándose el rango  $36\text{cm} \leq z \leq 41\text{cm}$ , los cálculos de los campos en los distintos planos fueron utilizados para evaluar la expresión (6.13), calculando la autosimilaridad  $S(m; z)$  como una función de  $z$  (tomando  $m = 4$ ). Los resultados, graficados en la **figura 6.7**, indican como era previsible que la autosimilaridad es bastante más baja que el máximo 1, valor al cual debería tender asintóticamente  $S(m; z)$  a medida que  $z$  aumenta hasta ingresar en la región de difracción de Fraunhofer.

Por otra parte, en la **figuras 6.8 (a)** se muestra el espectro de Walsh del campo completo calculado para la **figura 6.6**, en tanto que en las **figuras 6.8 (b) y (c)**, se grafican las magnificaciones  $1/4$  y  $1/16$  del mismo espectro. Puede observarse que el espectro también posee propiedades de autosimilaridad con  $m = 4$ , de la misma forma que el campo en la **figura 6.6**.

También se realizó el cálculo de los espectros de Walsh para los campos situados en el intervalo  $36\text{cm} \leq z \leq 41\text{cm}$ , y se los utilizó para evaluar la correlación o autosimilaridad espectral  $S'(m; z)$ , en base a la ecuación (6.14). Los resultados, mostrados en la **figura 6.9**, indican una correspondencia casi perfecta con la autosimilaridad calculada en base a la intensidad, de la **figura 6.7**.

Finalmente, se ilustra la ventaja del cálculo de la autosimilaridad a través del espectro de Walsh-Hadamard cuando el fractal situado en la apertura se encuentra contaminado con ruido "random". En la **figura 6.10 (a)** se representa una transmitancia dada por la barra de Cantor de nivel 4 superpuesta con ruido random, mientras que la **figura 6.10 (b)** muestra su espectro de Walsh. Por simple comparación es evidente la disminución del ruido relativo al trabajar con el espectro de Walsh-Hadamard.

## 6.6 Conclusiones

A partir del estudio del espectro de Walsh de las barras de Cantor, pudo observarse la invariancia de la autosimilaridad bajo la transformación de Walsh-Hadamard.

Se estudió la difracción en la región de Fresnel de aperturas sintetizadas por barras de Cantor (estructuras prefactálicas). Se comprobó la existencia de ciertas propiedades de autosimilaridad, así como

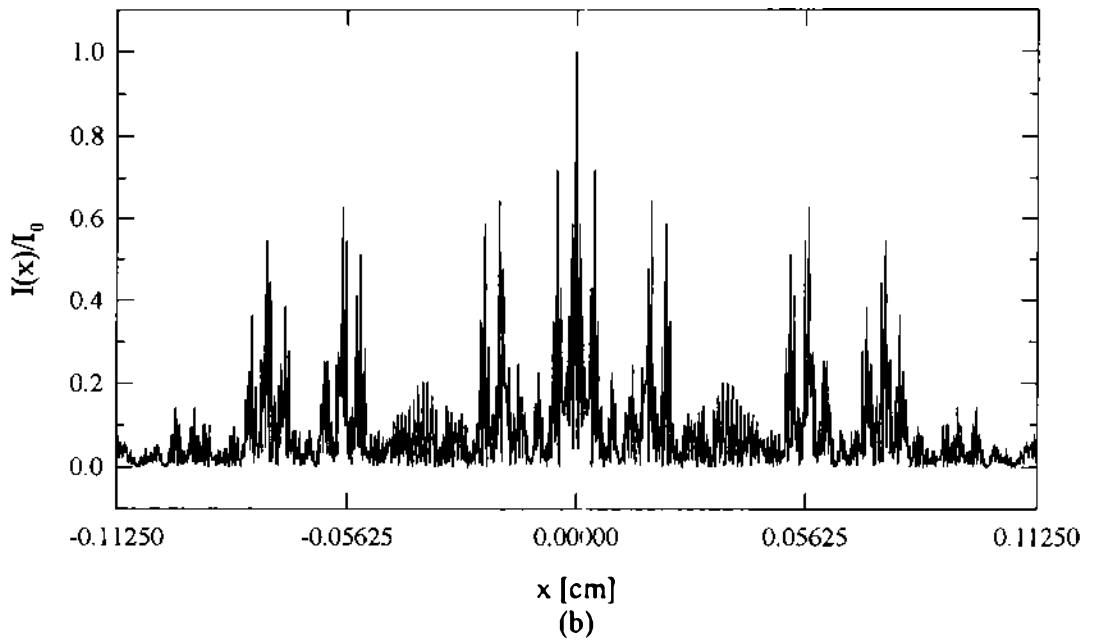
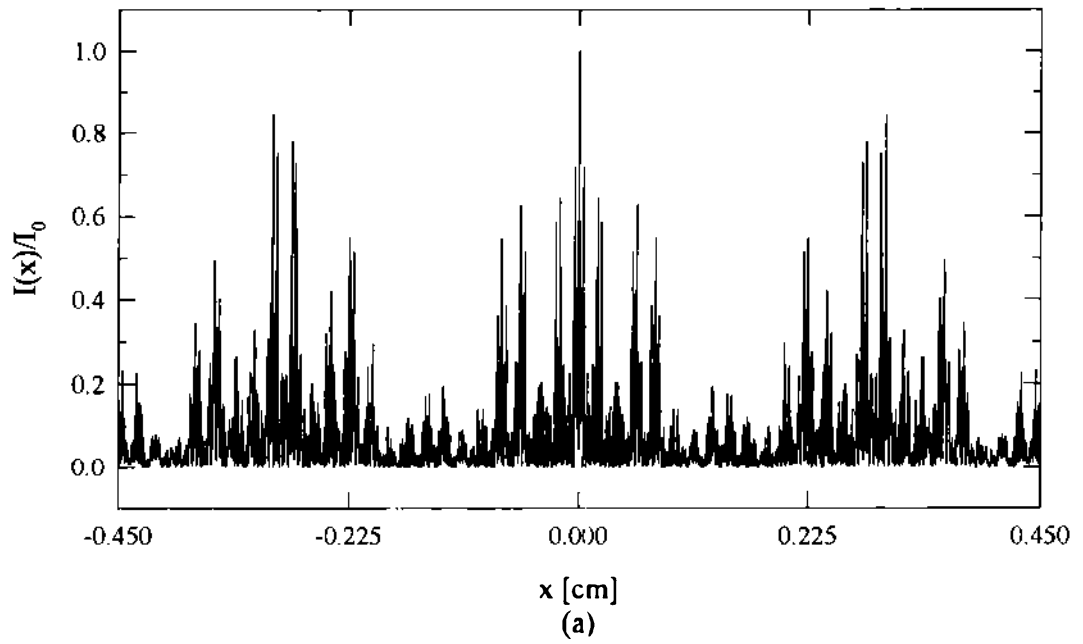


Figura 6-6: Intensidad de campo difractado magnificada 4 y 16 veces calculada en  $z=37.5$  cm.

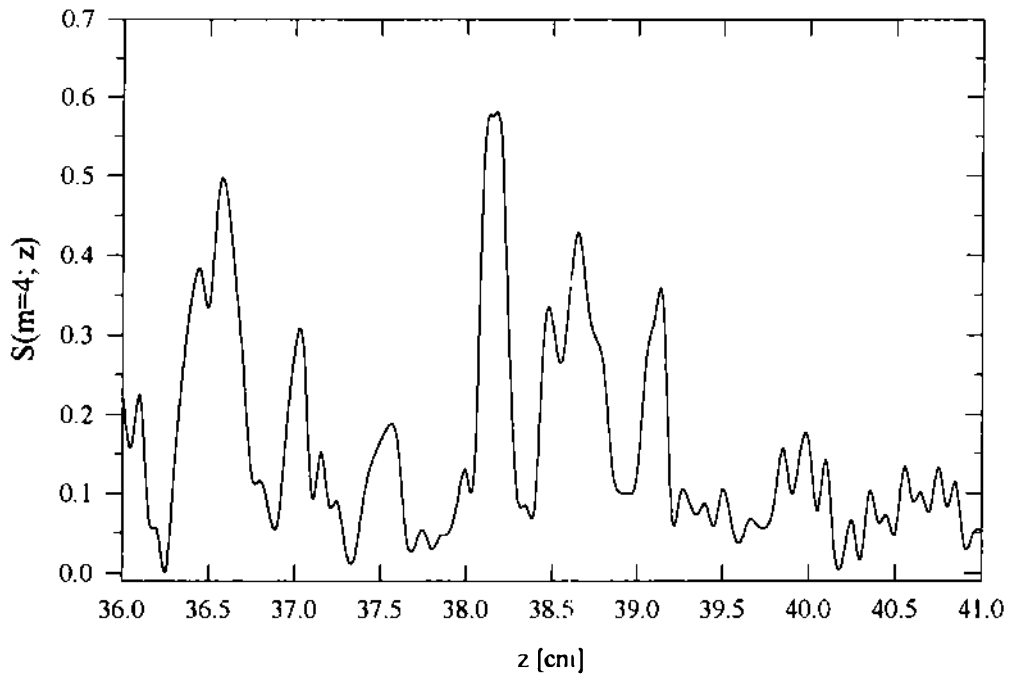


Figura 6-7: Autosimilaridad de la intensidad como función de la distancia  $z$ .

lo equivalente de trabajar con la intensidad del campo o con el espectro de Walsh-Hadamard de dicha intensidad, mediante la introducción de un parámetro de correlación espectral.

Por último, se evidenció la ventaja de operar con el espectro de Walsh-Hadamard respecto al empleo de la amplitud de campo, cuando la transmitancia de la apertura es una barra de Cantor contaminada con ruido "random".



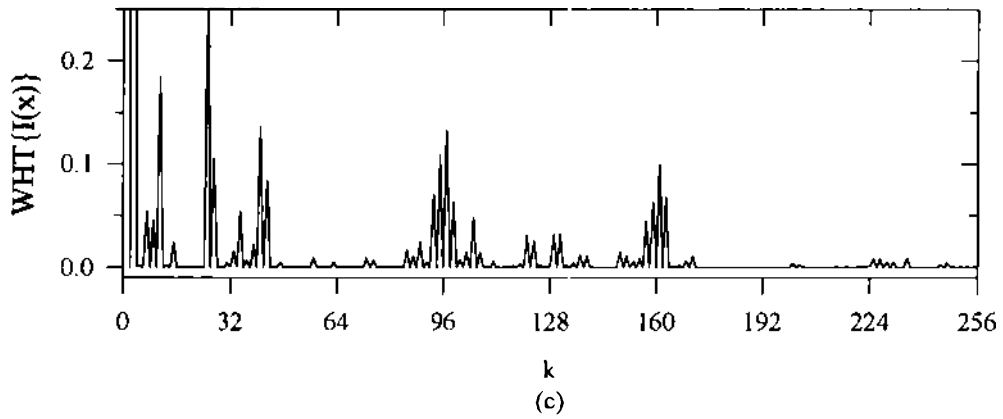
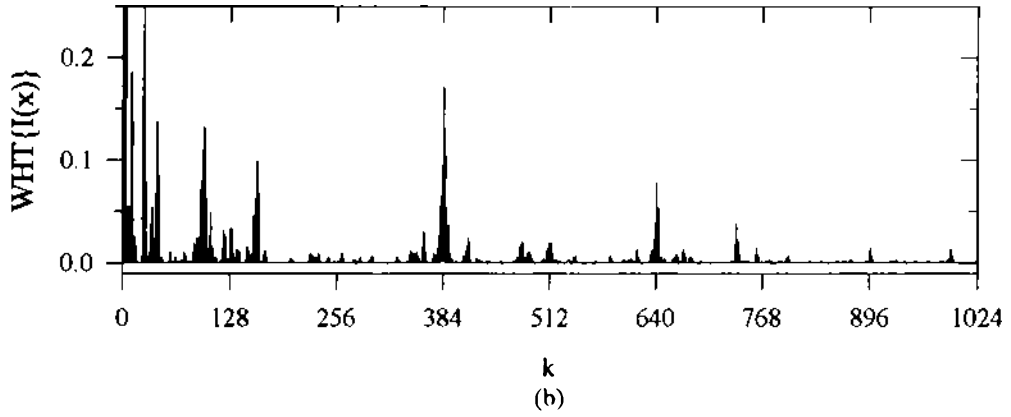
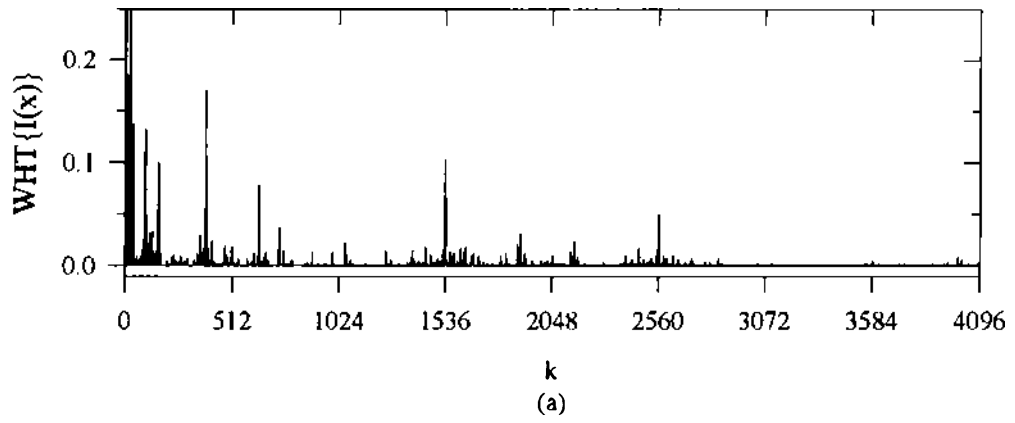


Figura 6-8: Espectro de Walsh y su magnificación 4 y 16 de la intensidad de campo calculada en  $z=37.5$  cm.

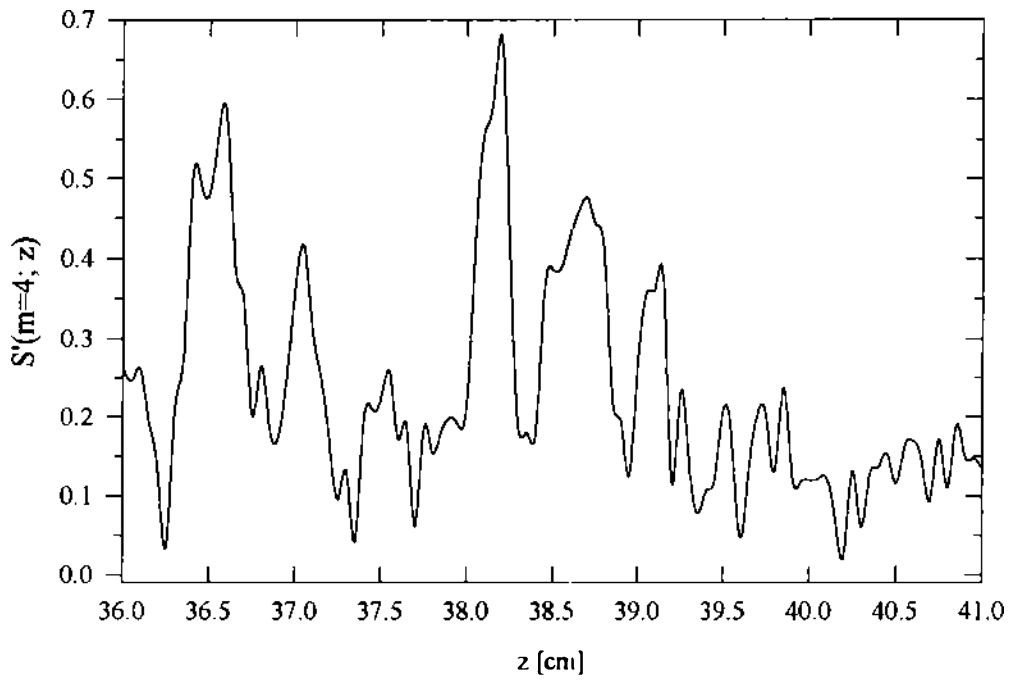
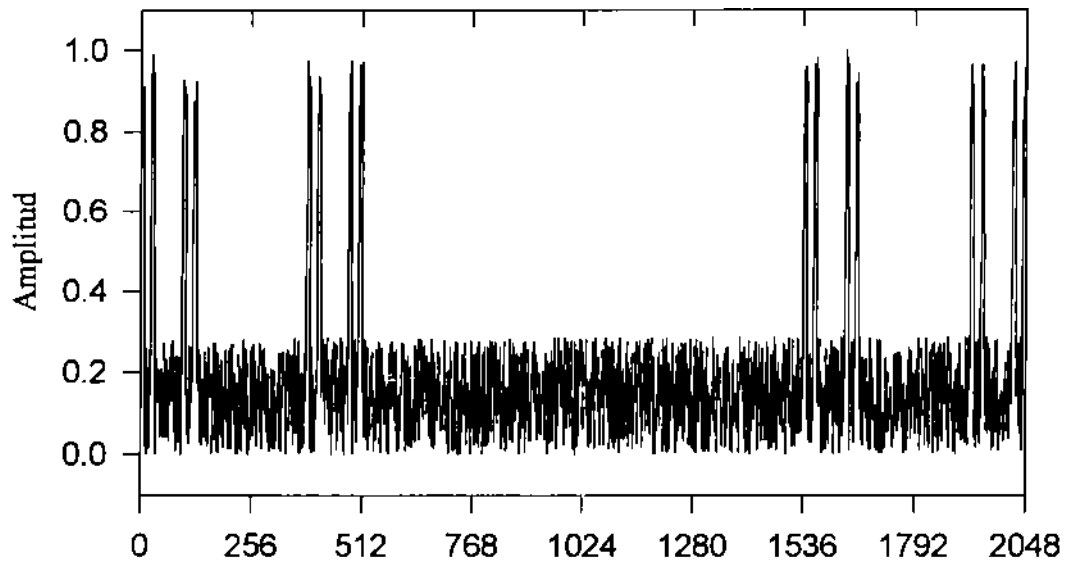
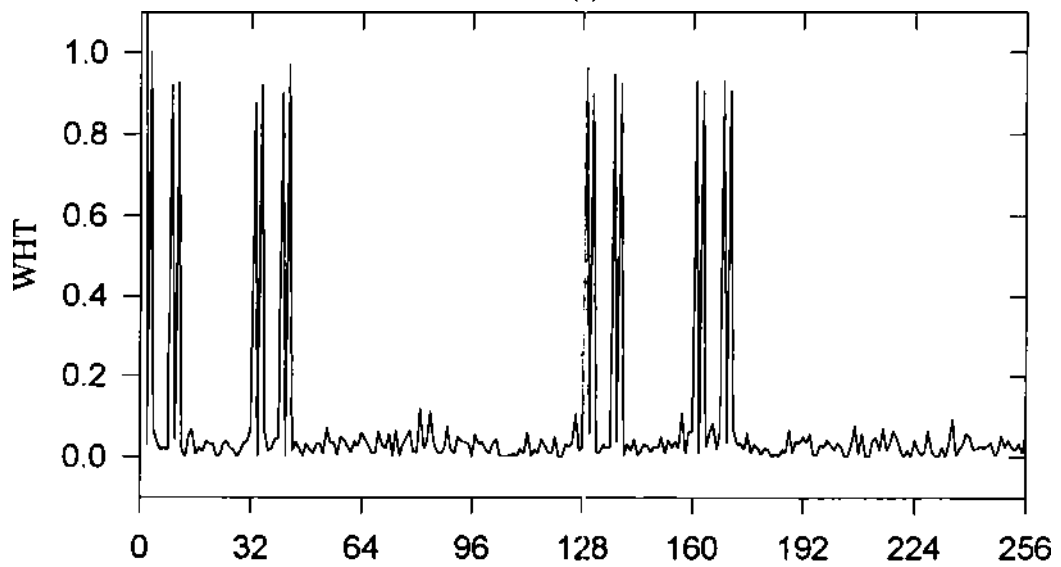


Figura 6-9: Autosimilaridad del espectro de Walsh de la intensidad como función de la distancia  $z$ .



x  
(a)



k  
(b)

Figura 6-10: Barra de Cantor de nivel 4 contaminada con ruido "random" y su espectro de Walsh.

# Capítulo 7

## OTRAS APLICACIONES EN BASE AL ENFOQUE WALSH-HADAMARD

### 7.1 Introducción

En este capítulo se discutirán dos aplicaciones en las cuales, a diferencia de las tratadas hasta aquí, no se consideran efectos difractivos. De todas maneras, el formalismo utilizado es el de Walsh-Hadamard, análisis que constituye un nexo general de los diferentes temas expuestos en esta tesis.

Por un lado se estudiarán las propiedades del moiré producido por la superposición de redes de Walsh binarizadas, para lo cual se empleará un enfoque puramente geométrico, sin tener en cuenta, como ya se indicó, la propagación difractiva de los campos luminosos.

En segunda instancia, se presentará una interpretación particular del desplazamiento diádico, aplicado al procesamiento digital de imágenes, en base al concepto de las permutaciones.

### 7.2 Propiedades de moiré de las funciones de Walsh

#### 7.2.1 Introducción

El fenómeno de moiré tiene lugar cuando dos transparencias periódicas o cuasi-periódicas son superpuestas. Este efecto consiste en la aparición de un diagrama de franjas en la superposición, que no se encontraba originalmente en las transmitancias individuales [100].

Las propiedades de los diagramas de moiré pueden derivarse utilizando argumentos geométricos o algebraicos [101, 102].

Por otra parte, el fenómeno de moiré ha sido utilizado en dispositivos destinados a la determinación de contornos o curvas de nivel, llamadas técnicas de "contouring" [29]. En este caso, las franjas de moiré son generadas por la superposición, proyectada sobre la superficie a analizar, de una red primaria con la transmitancia de una red secundaria. La red secundaria puede ubicarse tanto en el mismo sistema óptico, como sobre material fotográfico o dentro de una cámara especial.

Existe la posibilidad de implementar un experimento de contouring para el cual una única red actúa como red primaria y secundaria [103], denominado dispositivo de red simple. Para tal fin, una red (de un tamaño considerable) es colocada frente al objeto en estudio, y es iluminada de tal forma que proyecte su sombra sobre éste. La observación del moiré se lleva a cabo a través de la misma red (por ejemplo mediante un registro fotográfico o la toma de imágenes a través de una cámara CCD). El diagrama corresponde por consiguiente a la superposición de las franjas proyectadas sobre el objeto con las de la propia red de referencia.

En la primera parte de este capítulo se analizarán las propiedades geométricas del moiré producido por dos redes sintetizadas por funciones binarias de Walsh, tal como se las definió en el Capítulo 3. Este tipo particular de redes se aplicará también en un dispositivo de contouring de red simple, mostrándose una serie de resultados experimentales ilustrativos.

## 7.2.2 Propiedades de moiré de las funciones de Walsh

Se estudiará la superposición coplanar de dos redes con idéntica función transmitancia  $t(x)$  rotadas entre sí un ángulo  $\theta$ . Puede considerarse que estas redes se hallan rotadas un ángulo  $+\theta/2$  y  $-\theta/2$ , respecto a un eje fijo  $x$ ; la función transmitancia resultante entonces vendrá dada por:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= t(x_1)t'(x_2) = \\ &= t(x \cos \theta/2 + y \operatorname{sen} \theta/2) t(x \cos \theta/2 - y \operatorname{sen} \theta/2) \end{aligned} \quad (7.1)$$

La observación de los diagramas de moiré se evidencia más claramente si se considera que la superposición de las transmitancias se detecta a través de un sistema óptico cuya función de línea extendida ("line-spread function") es [111]:

$$S(x, y) = \frac{\delta(y)}{L_x} \quad , \quad (7.2)$$

donde  $L_x$  es una longitud de normalización y  $\delta(y)$  es la delta de Dirac. Esta función de línea extendida puede ser considerada como una aproximación analítica del promedio en la dirección  $x$  dada cuando se ignoran los detalles de las altas frecuencias a lo largo de la dirección de las franjas de moiré, y es posible obtenerla mediante un filtro espacial adecuado.

La distribución de intensidad vendrá dada entonces por la siguiente integral:

$$I(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(x - x', y - y') |T(x', y')|^2 dx' dy' \quad (7.3)$$

Reemplazando las expresiones (7.1) y (7.2) en la ecuación (7.3), tomando en cuenta que para redes binarias  $|T(x, y)|^2 = T(x, y)$ , se obtiene que la intensidad resulta ser:

$$\begin{aligned} I(x, y) = I(y) &= \frac{1}{L_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x' \cos \theta/2 + y \text{sen } \theta/2) t^*(x' \cos \theta/2 - y \text{sen } \theta/2) dx' = \\ &= \frac{\cos \theta/2}{L_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\nu) t^*(\nu - 2y \text{sen } \theta/2) d\nu \quad , \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde se introdujo el cambio de variables:  $\nu = x' \cos \theta/2 + y \text{sen } \theta/2$ .

En el caso que la transmitancia estuviera sintetizada por una función de Walsh, tal como se las definió en (3.9):

$$t(x) = W_n(x) = \frac{1}{2} [1 + \text{Wal}_n(x)] \text{rect} \left( \frac{x}{x_0} \right) \quad , \quad (7.5)$$

éstas podrán desarrollarse como la productoria de las series de Fourier de las funciones de Rademacher presentes en la síntesis de  $\text{Wal}_n(x)$  (como se indicó en (3.16)). Es decir:

$$t(x) = W_n(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \exp \left( 2\pi i x \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \right\} \text{rect} \left( \frac{x}{x_0} \right) \quad , \quad (7.6)$$

Sustituyendo el desarrollo (7.6) en la integral (7.4), se obtiene:

$$I(y) = \frac{\cos \theta/2}{L_x} \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(\nu) W_n^*(\nu - 2y \text{sen}(\theta/2)) d\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \theta/2}{4L_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 + \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \exp \left( 2\pi i \nu \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) + \right. \\
&+ \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \exp \left( 2\pi i (2y \operatorname{sen}(\theta/2)) \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \exp \left( -2\pi i \nu \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) + \\
&+ \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k'_m=-\infty}^{+\infty} c_{k'_p}^{*g_p} \dots c_{k'_m}^{*g_m} \exp \left( 2\pi i (2y \operatorname{sen}(\theta/2)) \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \times \\
&\quad \left. \times \exp \left( 2\pi i \nu \sum_{j=p}^m \frac{g_j (k_j - k'_j)}{d_j} \right) \right\} d\nu, \tag{7.7}
\end{aligned}$$

donde por simplicidad no se tomó en cuenta el tamaño finito de las redes.

Distribuyendo la integral en la suma y considerando que las integrales sólo actúan sobre las exponenciales, se llega a:

$$\begin{aligned}
I(y) &= \frac{\cos \theta/2}{4L_x} \left\{ x_0 + \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \delta \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) + \right. \\
&+ \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{*g_p} \dots c_{k_m}^{*g_m} \exp \left( 2\pi i (2y \operatorname{sen}(\theta/2)) \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \delta \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) + \\
&+ \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k'_m=-\infty}^{+\infty} c_{k'_p}^{*g_p} \dots c_{k'_m}^{*g_m} \exp \left( 2\pi i (2y \operatorname{sen}(\theta/2)) \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \times \\
&\quad \left. \times \delta \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j (k_j - k'_j)}{d_j} \right) \right\} = \\
&= \frac{\cos \theta/2}{4L_x} \left\{ x_0 + A_1 + A_2 + \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k'_m=-\infty}^{+\infty} c_{k'_p}^{*g_p} \dots c_{k'_m}^{*g_m} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \exp \left( 2\pi i (2y \operatorname{sen}(\theta/2)) \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right) \delta \left( \sum_{j=p}^m \frac{g_j (k_j - k'_j)}{d_j} \right) \quad (7.8)$$

donde se introdujeron las constantes:

$$A_1 = \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m}, \quad \text{con } \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} = 0; \quad (7.9)$$

y:

$$A_2 = \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{*g_p} \dots c_{k_m}^{*g_m}; \quad \text{con } \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} = 0. \quad (7.10)$$

Sin tomar en cuenta los factores constante, la intensidad dada por (7.8), puede escribirse:

$$I(y) = \frac{\cos \theta/2}{4L_x} \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k'_m=-\infty}^{+\infty} c_{k'_p}^{*g_p} \dots c_{k'_m}^{*g_m} \times \\ \times \exp \left( 2\pi i (2y \operatorname{sen}(\theta/2)) \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{d_j} \right), \quad (7.11)$$

donde los coeficientes  $c_{k_j}$  y  $c_{k'_j}$  que contribuyen a las sumatorias deben ser aquellos cuyos índices  $k_j$  y  $k'_j$  verifiquen la siguiente condición:

$$\sum_{j=p}^m g_j (k_j - k'_j) / d_j = 0. \quad (7.12)$$

Introduciendo los períodos modificados:  $\tilde{d}_j = d_j / 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ , la expresión (7.11) para la intensidad resulta:

$$I(y) = \frac{\cos \theta/2}{4L_x} \sum_{k_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} c_{k_p}^{g_p} \dots c_{k_m}^{g_m} \sum_{k'_p=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k'_m=-\infty}^{+\infty} c_{k'_p}^{*g_p} \dots c_{k'_m}^{*g_m} \times \\ \times \exp \left( 2\pi i y \sum_{j=p}^m \frac{g_j k_j}{\tilde{d}_j} \right). \quad (7.13)$$

Esta ecuación puede interpretarse como el desarrollo de Fourier de la función de Walsh  $Wal_n(x)$  que sintetiza cada red, convenientemente magnificada y orientada según la dirección  $y$ , pero con una selección de los coeficientes  $c_{k_j}$  y  $c_{k'_j}$  que contribuyen a las sumatorias, dada por la condición (7.12). De este modo, el diagrama de moiré estará determinado por la función de Walsh que sintetiza las transmitancias, y



presentará su misma periodicidad o pseudo-periodicidad dependiente de los períodos  $\{d_j\}$  de las funciones de Rademacher incluidas en su síntesis, salvo el factor de escala:  $1/2\text{sen}(\theta/2)$ .

Los diagramas de moiré producidos por dos redes idénticas rotadas entre sí un ángulo  $\theta = 20^\circ$  se muestran en las figuras 7.1 (a) y (b), considerando funciones de transmitancia sintetizadas por  $Wal_{384}(x) = R_8(x)R_7(x)$  y  $Wal_{272}(x) = R_8(x)R_4(x)$ , respectivamente. Estos diagramas, generados por simulaciones computacionales, ilustran cómo la distribución de las bandas de moiré paralelas al eje  $y$  replican aproximadamente la función de Walsh original con un factor de escala dependiente de  $1/2\text{sen}(\theta/2)$ , corroborando el análisis realizado. La incidencia de la presencia de una función de período notoriamente mayor en el segundo ejemplo respecto del primero, en referencia a  $R_4(x)$ , se ve reflejada claramente en el mayor período del moiré producido en la figura 7.1 (b).

En lo que concierne a la influencia de la condición (7.12), puede decirse que ésta produce las irregularidades notorias y lógicas de los bordes de las bandas del moiré, así como sus discontinuidades.

### 7.2.3 Determinación de curvas de nivel utilizando funciones de Walsh

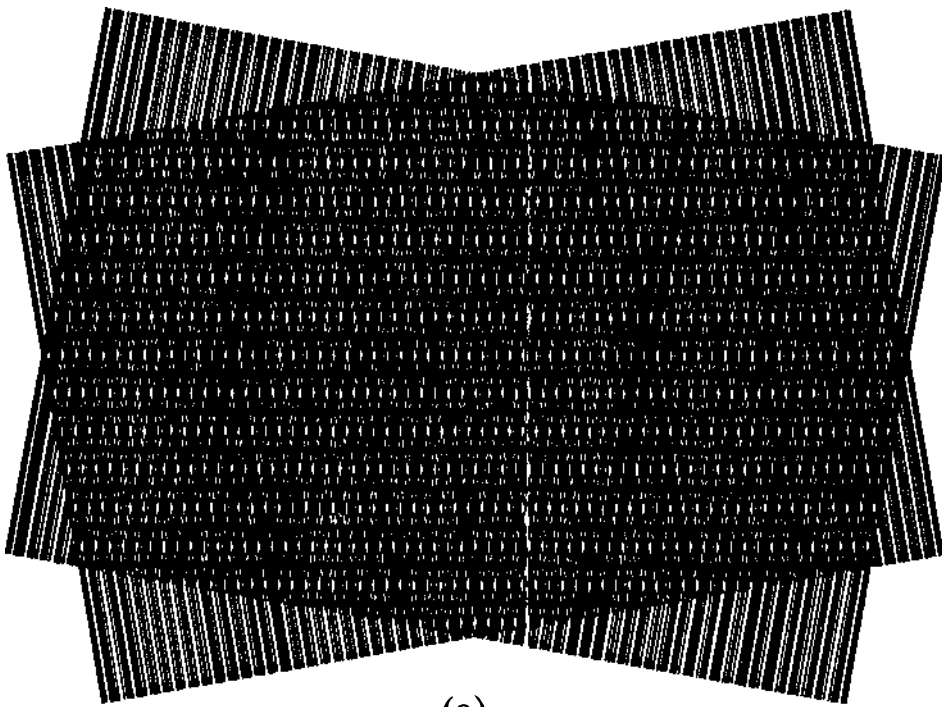
Se realizó una experiencia de determinación de curvas de nivel ("contouring") empleando redes planas sintetizadas por funciones de Walsh binarizadas (ver ecuación (7.5)). Tal como se grafica en la figura 7.2, el objeto en estudio se ha iluminado con luz blanca a través de una red de Walsh, mientras que mediante una cámara CCD se han adquirido las imágenes de la superposición entre la proyección de la red sobre el objeto y la red misma.

Como objeto de estudio se ha tomado un plano inclinado con una discontinuidad en su superficie dada por un pequeño escalón, mientras que la red es sintetizada por la función  $W_{384} = \frac{1}{2}(1 + R_8(x)R_7(x))\text{rect}(x/x_0)$ . Como consecuencia de la inclinación del plano, las franjas de moiré verifican una variación de su espaciamiento. Esto puede observarse en el diagrama de moiré y en el perfil de intensidad de las franjas indicados en la figuras 7.3 y 7.4, respectivamente.

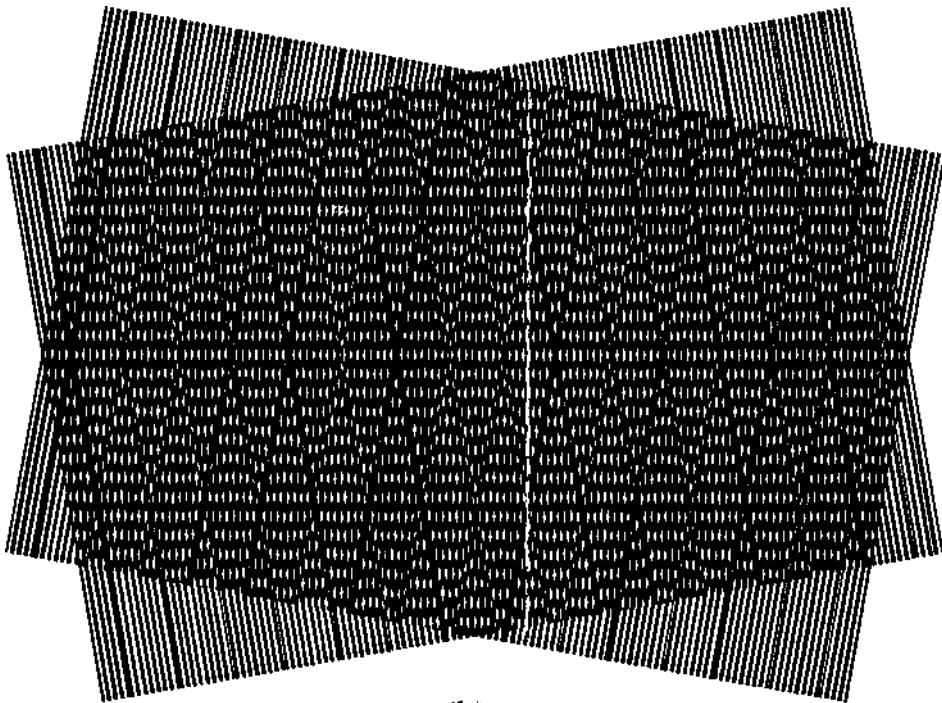
Por otra parte, se observa la discontinuidad de las franjas de moiré debida al pequeño escalón. La altura del escalón fue medida y resultó ser de  $0.47 \pm 0.005$  mm, tal discontinuidad provocó un salto de las franjas de moiré de  $2.01 \pm 0.005$  mm (en la región media del plano), que es aproximadamente medio ancho de línea correspondiente a la franja más amplia. En la figura 7.5 se grafican los perfiles de intensidad tomados a izquierda y a derecha de la discontinuidad, notándose el corrimiento de los máximos.

Se procuró además realizar una comparación con una experiencia de "contouring" tradicional, utilizando una red de Ronchi. Para esto se empleó el mismo dispositivo, bajo las mismas condiciones pero colocando una red sintetizada por la función  $R_8(x) = Wal_{256}(x)$ . El diagrama de moiré resultante se muestra en la figura 7.6.

Observando los diagramas de las figuras 7.3 y 7.6, se concluye que en esta experiencia la utilización



(a)



(b)

Figura 7-1: Moiré de las funciones de Walsh 384 y 272 rotadas 20°.

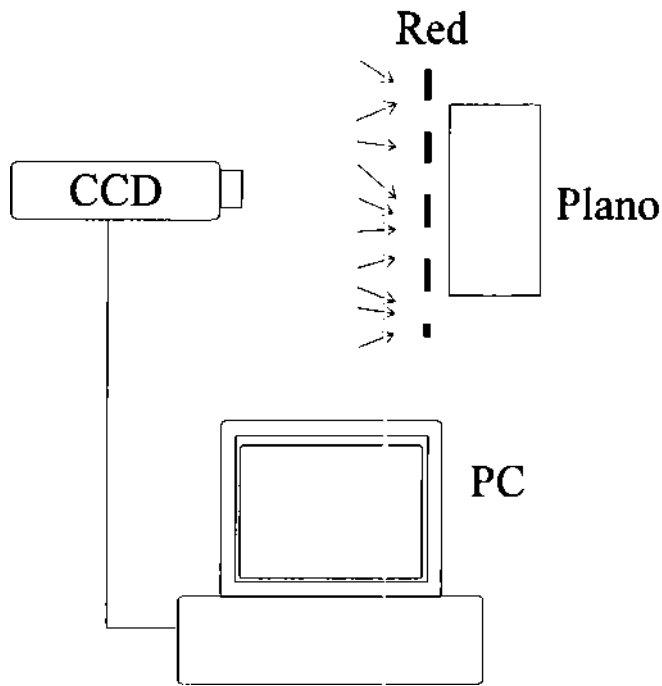


Figura 7-2: Dispositivo de moiré de red simple.

de la transmitancia  $R_8(x) R_7(x)$  brinda mayor resolución que la de la Ronchi  $R_8(x)$ . Además debe notarse que en la segunda imagen no puede asegurarse con facilidad que una determinada franja de moiré a izquierda sea la continuación de una franja en particular situada a la derecha. Esta correspondencia, es bastante más clara en la primera imagen producida por la red de Walsh, debido a una mayor distinguibilidad entre las distintas franjas. La posibilidad de discernir esta correspondencia es fundamental para la cuantificación de las discontinuidades evidenciadas en este tipo de aplicaciones de los dispositivos de moiré.

La propiedad de las funciones de Walsh de estar constituidas por una productoria de funciones con períodos distintos, lleva a pensar que esta técnica puede utilizarse en aplicaciones donde deban tenerse en cuenta más de un rango de detección. Por ejemplo, podrían observarse grandes desplazamientos, detectados mediante las franjas debidas a las funciones de Rademacher de mayor período presente en la función de Walsh, a la vez que pequeñas irregularidades, señaladas por el diagrama proveniente de las funciones de períodos más bajos.

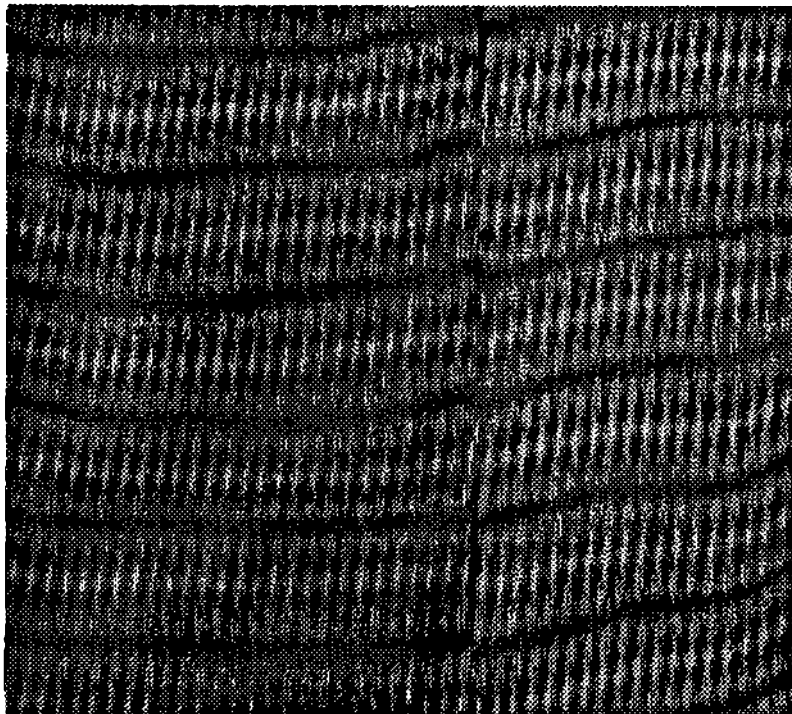


Figura 7-3: Imagen de moiré obtenida con una transmitancia sintetizada por la función de Walsh de orden 384 proyectada sobre un plano inclinado.

## 7.3 Interpretación de los desplazamientos diádicos en base a permutaciones

### 7.3.1 Introducción

El procesado de la información mediante técnicas digitales [104, 31] ha sido extensamente estudiado y se encuentra en continuo desarrollo. Más específicamente se han propuesto técnicas de procesado digital que hacen uso de las propiedades del llamado "desplazamiento diádico" (que se define a partir de la tabla de verdad del or exclusivo) y su correspondiente correlación diádica [105]. Las aplicaciones más frecuentes del desplazamiento diádico al procesado digital de imágenes se relacionan con el formalismo discreto de Walsh-Hadamard [106-109].

La ventaja del empleo en el procesamiento digital de imágenes del análisis de Walsh-Hadamard discreto, respecto de otros formalismos utilizados, es que su binaridad intrínseca permite implementaciones computacionales inmediatas. Dada la naturaleza binaria de las imágenes digitales se hace más accesible el procesado sobre el dominio de secuencias respecto de, por ejemplo, el procesado en el dominio de

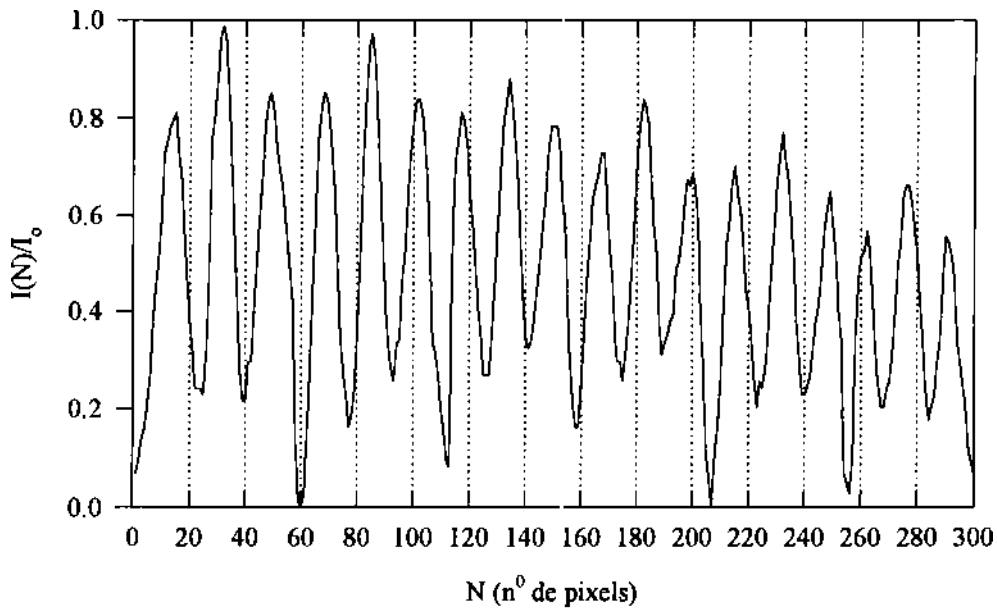


Figura 7-4: Perfil de intensidad de la imagen de la figura 7.3 tomado a derecha de la discontinuidad y a lo largo de la pendiente del plano inclinado.

frecuencias de Fourier.

Se presenta en la sección final de este capítulo una interpretación de los desplazamientos y las correlaciones diádicos, aplicados a imágenes bidimensionales digitalizadas consideradas como arreglos matriciales, en base a permutaciones de los elementos de dicha matriz. Con el mismo enfoque se reinterpretan las técnicas de filtrado de secuencias que surgen del empleo de la correlación diádica y de la utilización del formalismo de Walsh-Hadamard discreto.

### 7.3.2 Or exclusivo y desplazamientos diádicos

El "or exclusivo" o XOR, denotado por el símbolo  $\oplus$ , es una operación bit a bit entre dos dígitos binarios, cuya regla de definición es  $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$  y  $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ , que equivale a la suma de módulo 2. La tabla indicada en la figura 7.7 muestra la operación XOR entre dos dígitos de 3 bits  $m$  y  $k$ .

Puede considerarse una función digital bidimensional y real  $f(n, m)$  como un arreglo de  $(2^N - 1) \times$

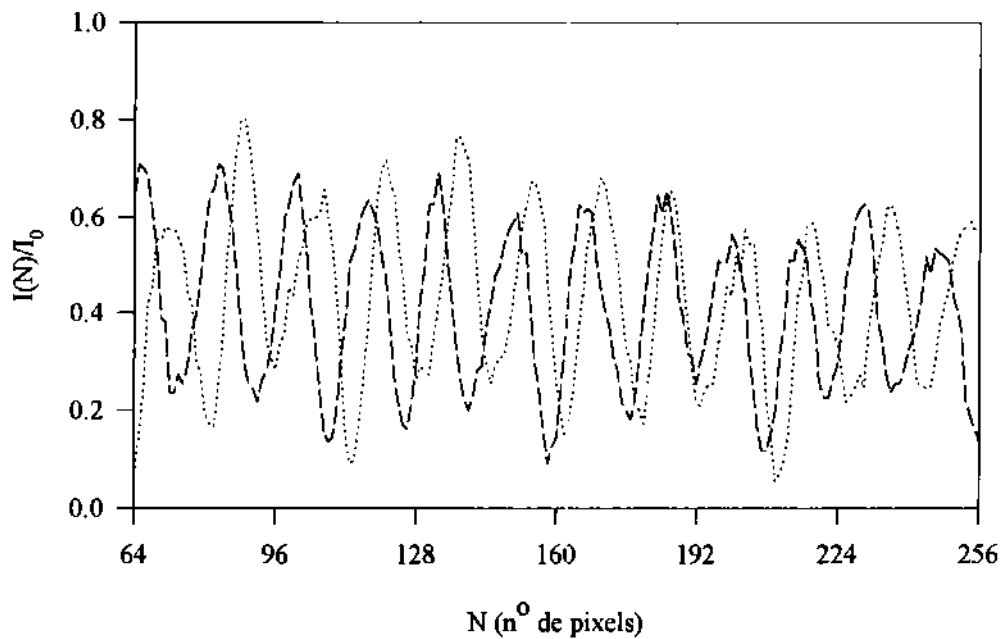


Figura 7-5: Perfiles de intensidad del moiré tomados a la derecha y a la izquierda del escalón.

$(2^M - 1)$  dígitos, con  $N, M = 1, 2, 3, \dots$ ; por ejemplo una imagen capturada por un sensor CCD. Los dígitos  $n$  y  $m$  constituyen las posiciones de los valores que toma la función, que en sistema decimal corresponden a  $n = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$  y  $m = 0, 1, 2, \dots, 2^M - 1$ , respectivamente.

Un desplazamiento diádico o desplazamiento XOR de la función  $f(n, m)$  de  $j$  en la dirección  $n$  y de  $k$  en la dirección  $m$  se denota por:  $f(n \oplus j, m \oplus k)$ , donde  $j$  y  $k$  pueden tomar los valores  $j = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$  y  $k = 0, 1, 2, \dots, 2^M - 1$  (en sistema decimal). Para llevar a cabo la suma diádica bit a bit, obviamente se deberá primero expresar  $n, m, j$  y  $k$  en sus desarrollos binarios.

El desplazamiento diádico verifica la propiedad de clausura, es decir que las nuevas direcciones  $n \oplus j$  y  $m \oplus k$  tienen el mismo número de bits que  $n$  y  $m$ , respectivamente. De esta forma, la operación  $f(n \oplus j, m \oplus k)$  puede interpretarse como un reordenamiento de los elementos de  $f(n, m)$ , ya que  $f(n \oplus j, m \oplus k)$  posee los mismos valores de la función original (por ejemplo, valores de grises de una imagen digitalizada) pero con una distribución distinta dentro del mismo dominio. Aún más, para cualquier par  $j, k$  elegido, la correspondiente operación de redistribución puede atribuirse directamente a una operación

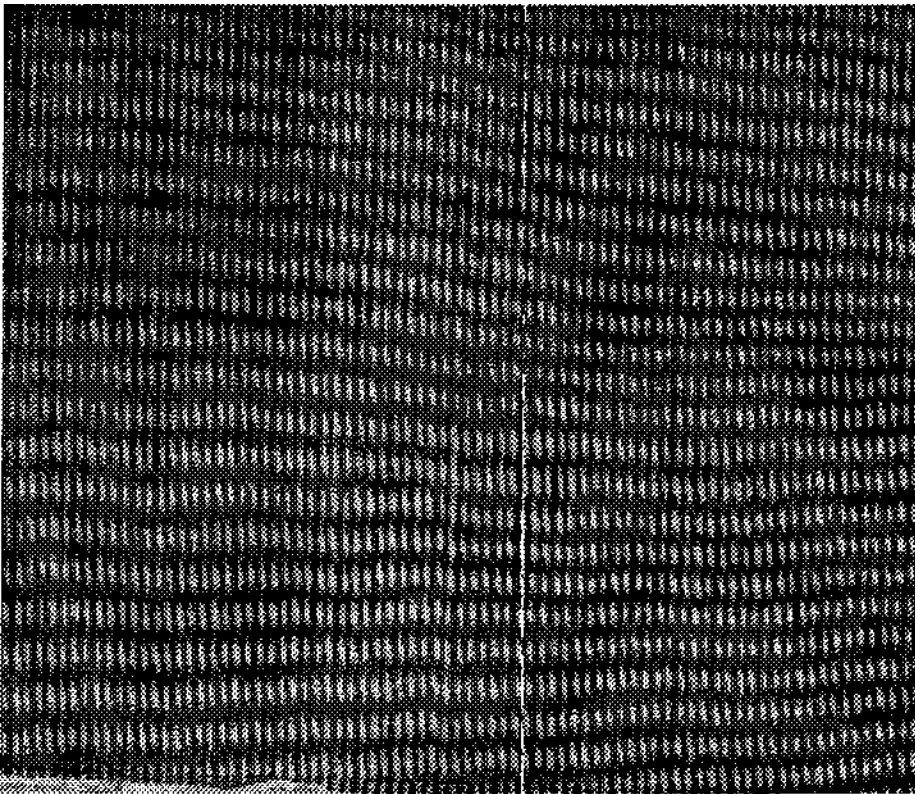


Figura 7-6: Imagen de moiré obtenida con una red de Ronchi sintetizada por la función de Rademacher de orden 8 proyectada sobre el mismo plano inclinado ya considerado.

de permutación o a una serie de permutaciones de los elementos de  $f(n, m)$  en las direcciones  $n$  y  $m$ . Dicho de otra forma, existe siempre una permutación o serie de permutaciones que transforma el arreglo  $f(n, m)$  en  $f(n \oplus j, m \oplus k)$ , de tal modo que es posible asociar cada par  $j, k$  a un único par de operaciones de permutación independientes en las direcciones  $n$  (filas) y  $m$  (columnas).

Para ilustrar estas afirmaciones se considerará por simplicidad un arreglo unidimensional de 3 bits ( $N = 3$ ) o matriz columna de 8 elementos (por ejemplo una imagen digital unidimensional). Puede suponerse que la distribución original de los elementos  $f(m)$  está determinada por la variable  $m$  en la fila  $k = 0$  de la tabla de la figura 7.7, y que las sumas diádicas con los sucesivos  $k$ ,  $f(m \oplus k)$ , los van acomodando según las correspondientes filas  $k$  de dicha tabla. Procediendo de esta forma, se obtienen las siguientes asignaciones:

|     |          | m   |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |          | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| k   | $\oplus$ | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|     | 000      | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|     | 001      | 001 | 000 | 011 | 010 | 101 | 100 | 111 | 110 |
|     | 010      | 010 | 011 | 000 | 001 | 110 | 111 | 100 | 101 |
|     | 011      | 011 | 010 | 001 | 000 | 111 | 110 | 101 | 100 |
|     | 100      | 100 | 101 | 110 | 111 | 000 | 001 | 010 | 011 |
|     | 101      | 101 | 100 | 111 | 110 | 001 | 000 | 011 | 010 |
|     | 110      | 110 | 111 | 100 | 101 | 010 | 011 | 000 | 001 |
| 111 | 111      | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |     |

Figura 7-7: Tabla del XOR de 3 bits.

$$\begin{aligned}
 f(m \oplus 000) &= f(m) = P_0 \{f(m)\} && \text{permutación "identidad",} \\
 f(m \oplus 001) &= P_1 \{f(m)\} && \text{permutación de orden 1 o de primeros vecinos,} \\
 f(m \oplus 010) &= P_2 \{f(m)\} && \text{permutación de orden 2 o de pares de vecinos,} \\
 f(m \oplus 011) &= P_1 P_2 \{f(m)\} && \text{permutación de orden 1 más la de orden 2,} \\
 f(m \oplus 100) &= P_3 \{f(m)\} && \text{permutación de orden 3 o de cuartetos de vecinos,} \\
 f(m \oplus 101) &= P_1 P_3 \{f(m)\} && \text{permutación de orden 1 más la de orden 3,} \\
 f(m \oplus 110) &= P_2 P_3 \{f(m)\} && \text{permutación de orden 2 más la de orden 3,} \\
 f(m \oplus 111) &= P_1 P_2 P_3 \{f(m)\} && \text{permutaciones de orden 1, 2 y 3.}
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Las combinaciones de permutaciones también pueden asociarse a las siguientes operaciones:  $P_1 P_2 \{f(m)\}$  es la reflexión de elementos tomados en cuartetos,  $P_1 P_3 \{f(m)\}$  es la reflexión de  $P_2 \{f(m)\}$ ,  $P_2 P_3 \{f(m)\}$  es la reflexión de  $P_1 \{f(m)\}$  y  $P_1 P_2 P_3 \{f(m)\}$  es la reflexión respecto a la posición central o inversión completa.

Cada permutación intercambia las posiciones de grupos específicos de direcciones, cuyo número de elementos son potencias de dos (1, 2, 4, 8, 16, ...). Las correspondientes potencias determinan el orden de la permutación, de la siguiente manera: si  $p$  es el orden de una permutación, ésta intercambiará las posiciones de grupos de  $2^{p-1}$  elementos es decir, el primer orden de permutación se lleva a cabo entre primeros vecinos, el segundo orden de permutaciones entre pares de vecinos, el tercer orden de permutación entre cuartetos de vecinos, etc.. La permutación diádica de máximo orden intercambia grupos de  $2^{M-1}$  elementos, o  $2^{N-1}$  elementos, según la dirección que se esté considerando, y que corresponden



respectivamente a las permutaciones de orden  $M$  y  $N$ . En el caso bidimensional, los órdenes de las permutaciones vendrán dados por pares ordenados del tipo  $(p_n, p_m)$ , si  $p_n$  es el orden de la permutación sobre la variable  $n$ , y  $p_m$  es el orden de la permutación sobre la variable  $m$ .

El hecho que los desplazamientos diádicos puedan siempre asociarse unívocamente a permutaciones o series de permutaciones, lleva a convenir la designación de "permutaciones diádicas" a todas las operaciones provenientes de los desplazamientos diádicos, que en el caso bidimensional (es decir  $f(n, m)$  con  $(2^N - 1) \times (2^M - 1)$  datos) son  $N^3 \times M^3$ , mientras que en el caso unidimensional (es decir  $f(n)$  con  $(2^N - 1) \times 1$  datos) son  $N^3$ . Se denotará la permutación diádica por  $D_r$  como el operador que aplicado a una función discreta, le aplica la suma diádica en  $r$  sobre el argumento, es decir:

$$D_r \{f(m)\} = f(m \oplus r) . \tag{7.15}$$

Para los órdenes que verifican  $r = 2^{p-1}$ , con  $p$  entero mayor que 1, la permutación diádica  $D_r$  coincide con la "permutación pura"  $P_p$ , que como ya se indicó, intercambia la posición de grupos de  $2^{p-1}$  elementos.

En base a las propiedades de la suma diádica, puede demostrarse con facilidad que:

$$D_r D_s = D_{r \oplus s} = D_s D_r , \tag{7.16}$$

que indica la conmutatividad de las permutaciones. Además, si  $s = r$ :

$$D_r D_r = P_1 , \tag{7.17}$$

es decir que  $D_r$  es su propia inversa. Tomando  $r = t \oplus s$ :

$$D_t D_s D_r = D_{t \oplus s} D_r = P_0 , \tag{7.18}$$

lo que significa que si se aplican a una imagen digital las permutaciones diádicas de orden  $t$ , luego la de orden  $s$  y finalmente la permutación diádica cuyo orden se obtiene de la suma diádica de los órdenes  $t$  y  $s$ , se recupera la imagen original.

La interpretación de las sumas diádicas como permutaciones, y las mismas propiedades de las permutaciones recién expuestas, pueden representarse en un "mapa de permutaciones" como lo indica la figura 7.8, para el caso de 4 bits. Se considera a  $m = 0, \dots, 15$  (en sistema decimal) como la coordenada de una imagen unidimensional de 16 elementos, o como el índice de las columnas de una imagen bidimensional de  $16 \times 16$ . Las diferentes sumas diádicas o permutaciones sobre la imagen original (correspondiente al recuadro  $m \oplus 0000$ ) la van asignando descendientemente a los distintos recuadros. Las flechas conectan las imágenes indicando el orden de permutación pura  $p$  (número junto a la trayectoria)

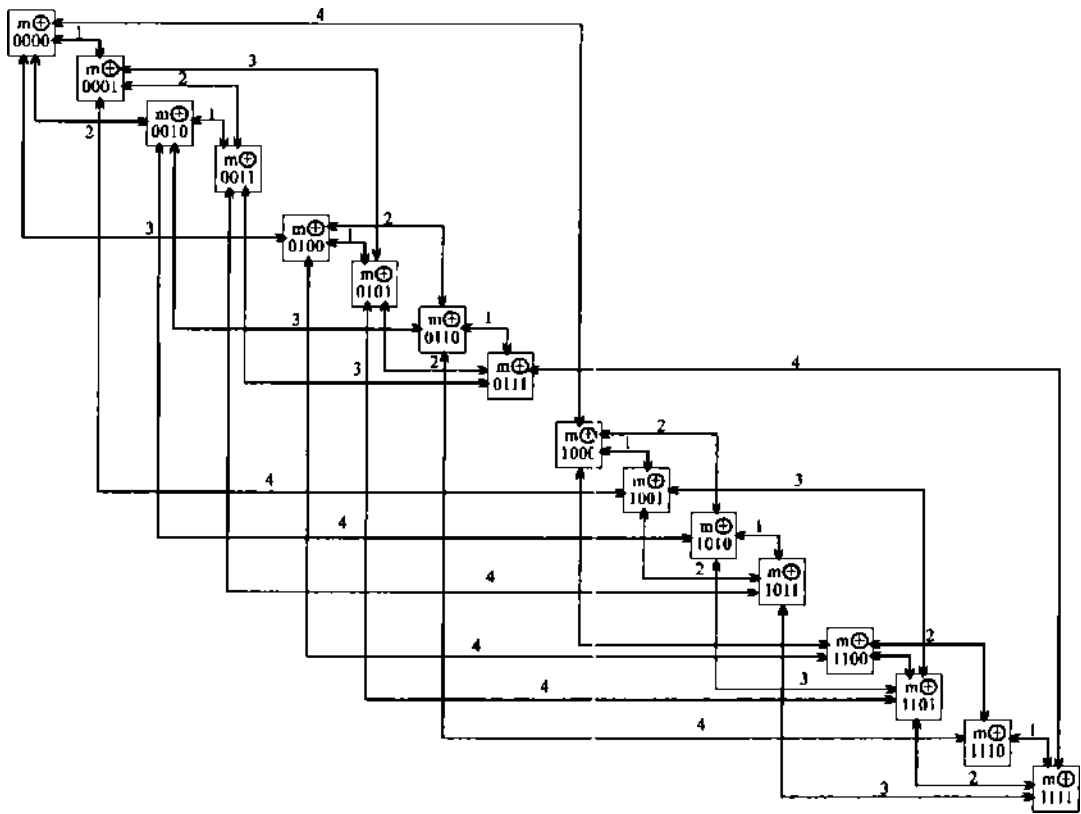


Figura 7-8: Mapa de permutaciones de 4 bits.

que transforma una imagen en la otra. Se han graficado sólo las trayectorias correspondientes a las permutaciones puras  $P_p = D_{2^p-1}$  para favorecer la claridad del diagrama. Hay imágenes que se conectan a través de dos o más trayectorias encadenadas, implicando que se relacionan por dos o más permutaciones en serie. La reversibilidad de las permutaciones, deducida en (7.17), se indican por la doble dirección de las trayectorias. La conmutatividad, dada por la ecuación (7.16), se verifica observando que si se siguen dos trayectorias sucesivas de órdenes  $r$  y  $s$  para transformar de una imagen en otra, la misma imagen final se obtiene si se recorre primero una trayectoria de orden  $s$  y seguidamente una de orden  $r$ . Por ejemplo, el primer recuadro correspondiente a la imagen original se transforma en la cuarta imagen por la aplicación sucesiva de  $P_1$  y  $P_2$ , o aplicando primero  $P_2$  y luego  $P_1$ . Pueden observarse grupos o "clusters" de imágenes determinados por el máximo orden de permutación que los relaciona. En este sentido, se observa que los 16 elementos se agrupan en 8 pares de imágenes que se encuentran conectadas por permutaciones de primer orden  $P_1$ , la primera con la segunda, la tercera con la cuarta, etc.. Existen asimismo, 4 grupos de 4 elementos que se conectan por permutaciones  $P_1$  y  $P_2$ , que son

parejas de conjuntos de pares. Finalmente, hay dos conjuntos de 8 imágenes (de la 1ª a la 8ª, y de la 9ª a la 16ª) que se conectan por permutaciones  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . Estos conjuntos se conectan entre sí solo por permutaciones de orden 4.

Se ilustra el resultado (7.18) por técnicas computacionales considerando una imagen digital de 8 bits ( $256 \times 256$ ), como se muestra en las figuras 7.9 y 7.10. Se trata de la imagen de moiré obtenida en la experiencia descrita en la sección 7.2.3. A la imagen original representada en la figura 7.9 (a) se le aplica una permutación diádica de orden  $j, k = 55, 55$  obteniéndose la figura 7.9 (b); seguidamente a ésta se le aplica la permutación diádica  $j, k = 11, 11$  llegando al resultado mostrado en la figura 7.10 (a). Finalmente, se recupera la imagen original aplicando a la imagen de la figura 7.10 (a), la permutación cuyo orden resulta de la suma diádica de 55 y 11 en cada orden, es decir  $j, k = 11 \oplus 55, 11 \oplus 55 = 60, 60$ , obteniéndose la imagen de la figura 7.10 (b). Este proceso puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D_{60,60} D_{11,11} D_{55,55} \{f(n, m)\} &= D_{60,60} D_{11 \oplus 55, 11 \oplus 55} \{f(n, m)\} = \\ &= D_{60,60} D_{60,60} \{f(n, m)\} = f(n, m) . \end{aligned} \quad (7.19)$$

Es conveniente aquí establecer la clase o conjunto de imágenes que se relacionan entre sí mediante alguna permutación diádica. En este sentido se dirá que dos arreglos o funciones digitales bidimensionales  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$  son "similares" si existen dos parámetros  $j$  y  $k$  tal que:

$$f(n \oplus j, m \oplus k) = g(n, m) , \quad (7.20)$$

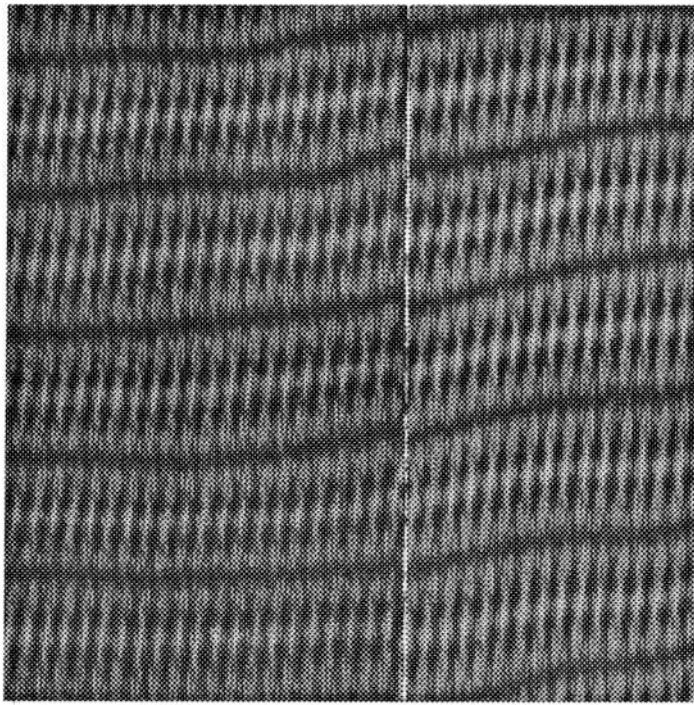
donde  $n, j = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$  y  $m, k = 1, 2, 3, \dots, 2^M - 1$  (en sistema decimal). O de otra manera,  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$  son similares si existe una permutación diádica (bidimensional) que transforma  $f$  en  $g$ :

$$D_{j,k} \{f(n, m)\} = g(n, m) . \quad (7.21)$$

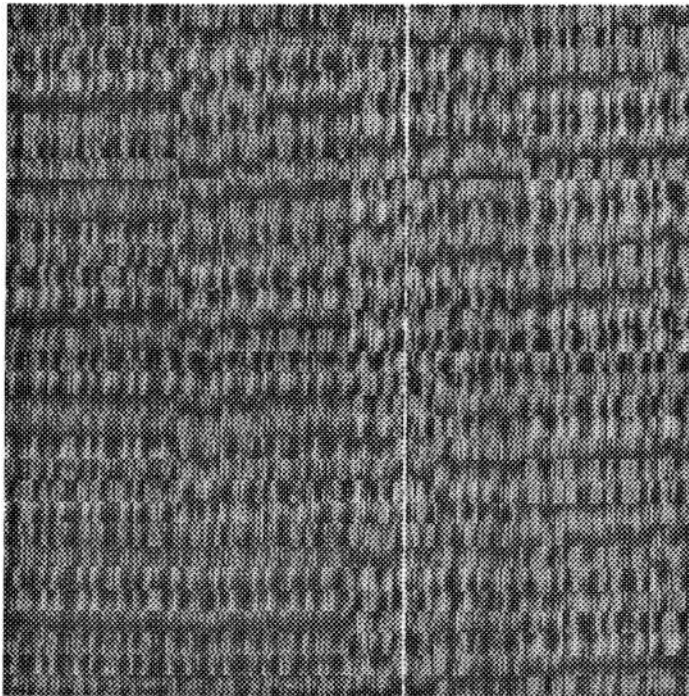
### 7.3.3 La correlación diádica

En base al desplazamiento diádico es posible definir la correlación o convolución diádica bidimensional [110], para todo par de funciones reales discretas  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$ , de la siguiente forma:

$$\Gamma_{fg}(j, k) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \sum_{m=0}^{2^M-1} f(n, m) g(n \oplus j, m \oplus k) , \quad (7.22)$$

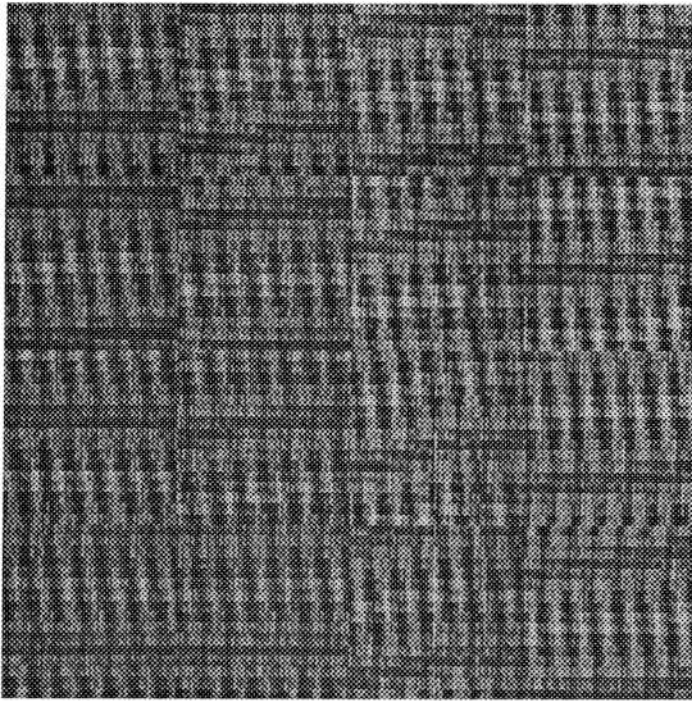


(a)

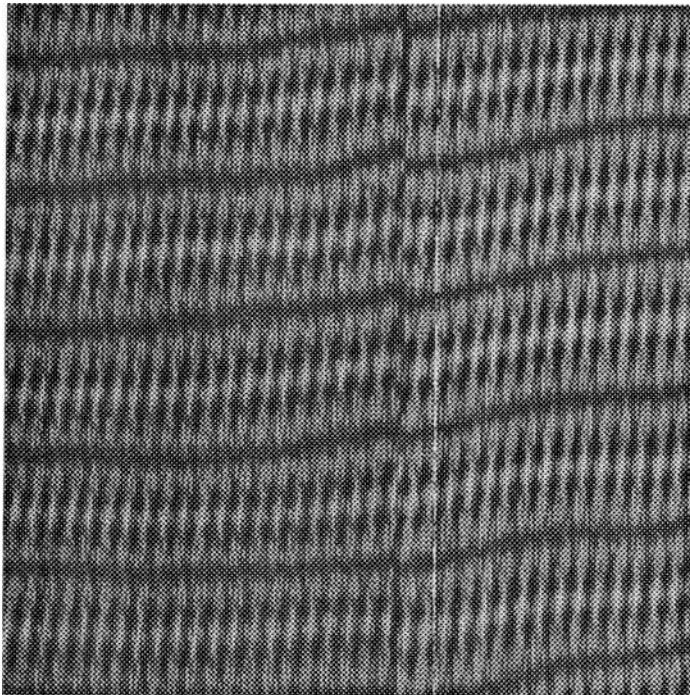


(b)

Figura 7-9: (a) Imagen original. (b) Imagen obtenida luego de aplicarle a (a) la permutación diádica  $D_{55,55}$ .



(a)



(b)

Figura 7-10: (a) Imagen obtenida luego de aplicar la permutación diádica  $D_{11,11}$  a la imagen de la figura 7.9 (b). (b) Imagen final resultante luego de aplicarle a (a) la permutación  $D_{60,60}$ .

que constituye otra matriz o función digitalizada de  $(2^N - 1) \times (2^M - 1)$  dígitos, donde  $n, j = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$  y  $m, k = 1, 2, 3, \dots, 2^M - 1$  (en sistema decimal).

La expresión (7.22) para la correlación diádica suma los productos de la función  $f(n, m)$  con todas las permutaciones diádicas de  $g(n, m)$ .

En términos de permutaciones, la correlación (7.22) puede obtenerse de la siguiente manera:

- 1) Se calculan todas las permutaciones posibles de  $g(n, m)$  dadas por el corrimiento diádico.
- 2) Se multiplican los valores de  $f(n, m)$  con los de las permutaciones de  $g(n, m)$ .
- 3) Se suman todos los productos.

Por otra parte, si  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$  fueran similares, la función  $\Gamma_{fg}(j, k)$  tendrá un máximo en cierta posición  $j_0, k_0$  que estará asociada con el orden de la permutación bidimensional diádica que aplicada a  $f(n, m)$  la transforma en  $g(n, m)$ ; es decir, que  $D_{j_0, k_0} \{f(n, m)\} \equiv f(n \oplus j_0, m \oplus k_0) = g(n, m)$ . Pero si  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$  no fueran similares, la función correlación diádica no poseerá máximos significativos.

Como ejemplo se toman las imágenes binarias de dimensiones  $4 \times 4$  (2 bits) que se indican en las figuras 7.11 (a) y (b). Sus representaciones matriciales tienen la siguiente expresión:

$$f(n, m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

y:

$$g(n, m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Las coordenadas de los elementos de ambas matrices pueden establecerse en base a 2 bits. Entonces, utilizando una tabla de XOR análoga a la de la figura 7.7, el cálculo de la correlación diádica (7.22) con las funciones dadas por (7.23) y (7.24), resulta:

$$\Gamma_{fg}(j, k) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

representada en la figura 7.11 (c). El valor máximo de la matriz correlación (7.25) se encuentra

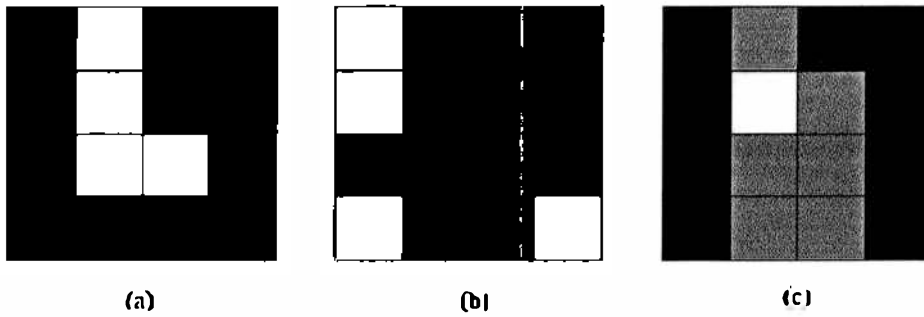


Figura 7-11: (a) y (b) imágenes binarias de 2 bits, (c) representación de su correlación diádica.

notoriamente en  $j = 01$  y  $k = 01$ ; por lo tanto la permutación diádica que aplicada a  $f(n, m)$  la transforma en  $g(n, m)$  debe ser  $D_{01,01} \equiv (. \oplus 01, . \oplus 01)$ , que es equivalente a la permutación de orden 1 o de primeros vecinos (en ambas dimensiones). Puede corroborarse con facilidad que:

$$P_{01,01} \{f(n \oplus m)\} \equiv f(n \oplus 01, m \oplus 01) = g(n, m) . \quad (7.26)$$

De esta manera, se verifica que  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$  definidas en (7.24) y (7.25) son funciones similares.

### 7.3.4 La correlación diádica y el análisis de Walsh-Hadamard

Considerando la completitud del conjunto de funciones de Walsh, las funciones binarias generales  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$  que aparecen en la definición de correlación diádica (7.22), pueden expandirse como una doble serie de Walsh discretas [86] de la siguiente forma:

$$f(n, m) = \sum_{r=0}^{2^N-1} \sum_{s=0}^{2^M-1} F(r, s) Wal(r, n) Wal(s, m) , \quad (7.27)$$

y:

$$g(n, m) = \sum_{r=0}^{2^N-1} \sum_{s=0}^{2^M-1} G(r, s) Wal(r, n) Wal(s, m) , \quad (7.28)$$

donde  $F(r, s)$  y  $G(r, s)$  son los coeficientes de los desarrollos de  $f$  y  $g$  respectivamente, en la base de las funciones discretas de Walsh  $\{Wal(n, m)\}$ . La serie de coeficientes del desarrollo de Walsh (7.27) define la transformada de Walsh discreta de la función  $f(n, m)$ , también llamada espectro de Walsh o de secuencias de  $f(n, m)$ , ya que como se ha explicado en el Capítulo 3 las funciones de Walsh están caracterizadas por su secuencia de cruces por cero. Precisamente el orden  $n$  (primera variable) de la función de Walsh indica el número de cruces por cero, que se encuentra directamente relacionado con la

secuencia como se expresó en la ecuación (3.7).

Las funciones de Walsh discretas  $\{Wal(r, n)\}$ , con  $r, n = 0, \dots, N - 1$  y con  $N = 2^\ell$ , siendo  $\ell$  entero, pueden definirse a partir de la discretización de la expresión (3.5), considerando que se la muestra dividiendo el dominio  $|x| \leq x_0/2$  en  $N$  intervalos iguales, con lo que el elemento  $Wal(r, n)$  del desarrollo (7.28):

$$Wal(r, n) = W_{cl_r}(n) , \quad (7.29)$$

identifica a la función de Walsh de orden  $r$  (es decir, con  $r$  cruces por cero) evaluada en el  $n$ -ésimo intervalo de su dominio. Los elementos  $Wal(r, n)$  constituyen la denominada matriz de Hadamard [26].

Los productos  $Wal(r, n)Wal(s, m)$  suelen definirse como las funciones de Walsh bidimensionales de orden  $r, s$  y variables  $n = 0, \dots, N - 1$  y  $m = 0, \dots, M - 1$  (con  $N$  y  $M$  potencias de 2):

$$Wal(r, s; n, m) \equiv Wal(r, n)Wal(s, m) ; \quad (7.30)$$

función que tendrá  $r$  cruces por cero en la coordenada discreta  $n$ , y  $s$  cruces por cero en la coordenada discreta  $m$ .

Para procurar un análisis de la correlación de dos funciones digitales  $f$  y  $g$  en términos de las secuencias, pueden introducirse los desarrollos (7.27) y (7.28) en la definición de la correlación diádica (7.22), obteniéndose:

$$\begin{aligned} \Gamma_{fg}(j, k) &= \sum_{n=0}^{2^N-1} \sum_{m=0}^{2^M-1} \left( \sum_{r=0}^{2^N-1} \sum_{s=0}^{2^M-1} F(r, s)Wal(r, n)Wal(s, m) \right) \times \\ &\times \left( \sum_{r=0}^{2^N-1} \sum_{s=0}^{2^M-1} G(r, s)Wal(r, n \oplus j)Wal(s, m \oplus k) \right) = \\ &= \sum_{r=0}^{2^N-1} \sum_{s=0}^{2^M-1} \sum_{r'=0}^{2^N-1} \sum_{s'=0}^{2^M-1} F(r, s)G(r', s')Wal(r', j)Wal(s', k) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{2^N-1} \sum_{m=0}^{2^M-1} Wal(r, n)Wal(s, m)Wal(r', n)Wal(s', m) = \end{aligned}$$



$$= 2^N 2^M \sum_{r=0}^{2^N-1} \sum_{s=0}^{2^M-1} F(r, s) G(r, s) Wal(r, j) Wal(s, k) , \quad (7.31)$$

donde se utilizó la propiedad (4.9) sobre las sumas diádicas, y la ortogonalidad de las funciones de Walsh, dada por:

$$\sum_{n=0}^{2^N-1} Wal(r, n) Wal(r', n) = 2^N \delta_{rr'} . \quad (7.32)$$

La sumatoria de la expresión (7.31) no es más que el desarrollo de Fourier de la correlación  $\Gamma_{fg}(j, k)$ :

$$\Gamma_{fg}(j, k) = \sum_{r=0}^{2^N-1} \sum_{s=0}^{2^M-1} \tilde{\Gamma}_{FG}(r, s) Wal(r, j) Wal(s, k) , \quad (7.33)$$

con los coeficientes de Walsh dados por:

$$\tilde{\Gamma}_{FG}(r, s) = F(r, s) G(r, s) , \quad (7.34)$$

donde se desestimó la constante de normalización  $C \equiv 2^N 2^M$ .

La ecuación (7.34) indica que la transformada de Walsh bidimensional de  $\Gamma_{fg}(r, s)$  coincide con el producto de las transformadas de Walsh bidimensionales individuales de  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$ . De esta forma, puede obtenerse la correlación diádica de  $f$  y  $g$ :  $\Gamma_{fg}(j, k)$ , a partir de la transformada inversa de Walsh (que coincide con la directa) de dicho producto, es decir:

$$\Gamma_{fg}(j, k) = WHT \{ F(r, s) G(r, s) \} . \quad (7.35)$$

Por otra parte, el producto (7.34) resultará ser no nulo sólo para las secuencias  $r$  comunes a las funciones  $f$  y  $g$ , y dará cero para las secuencias que no compartan. En este sentido, sólo las secuencias comunes entre  $f$  y  $g$  aportarán a la suma (7.33), y cuanto mayor sea la influencia de estas secuencias sobre la síntesis de ambas (dada por grandes valores relativos de  $F(r, s)$  y  $G(r, s)$ ), mayor será el aporte a la correlación diádica  $\Gamma_{fg}(j, k)$ . Entonces, en base a lo deducido en la sección anterior, la aparición de máximos importantes en la matriz  $\tilde{\Gamma}_{FG}(r, s)$  dados por una o varias secuencias comunes significativas, indicarán la existencia de una permutación específica que transforma  $f(n, m)$  en  $g(n, m)$ , o lo que es lo mismo, la similitud entre  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$ . Mientras que la no existencia de secuencias comunes en el espectro  $F(r, s)$  y  $G(r, s)$  (es decir, los ceros de  $\tilde{\Gamma}_{FG}(r, s)$ ) señalará la no similitud entre  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$ .

En otras palabras, mientras la correlación diádica  $\Gamma_{fg}(j, k)$  describe la similitud entre  $f(n, m)$  y  $g(n, m)$  a través de la comparación de  $f(n, m)$  con permutaciones de  $g(n, m)$ , su espectro de secuencias

$\tilde{\Gamma}_{FG}(r, s)$  la describirá mediante el establecimiento de secuencias comunes y no comunes.

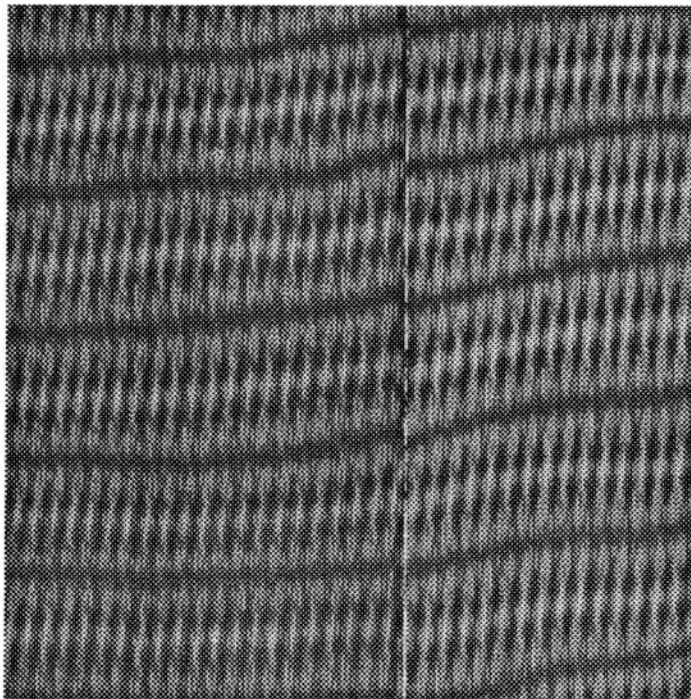
Por otro lado, teniendo en cuenta que la convolución diádica coincide con la correlación diádica, puede considerarse a  $\Gamma_{fg}(j, k)$  como la salida de un filtro diádico con respuesta impulso  $g(n, m)$  y con una señal de entrada representada por la función  $f(n, m)$ . En base a lo establecido, los valores significativos de  $\Gamma_{fg}(j, k)$  corresponderán a permutaciones de la respuesta impulso  $g(n, m)$  que la aproximan a la función de entrada  $f(n, m)$ , a la vez que los valores no nulos del espectro de secuencias de salida  $\tilde{\Gamma}_{FG}(r, s)$  se deberán a sus secuencias comunes, y los nulos a secuencias no comunes. Esto hace posible suprimir o modular secuencias específicas de una señal  $f(n, m)$  mediante la utilización de un filtro diádico con una adecuada respuesta impulso  $g(n, m)$ . La determinación de las características del filtrado que produzca  $g(n, m)$  corresponderán a las secuencias establecidas por las permutaciones en común con  $f(n, m)$  que permita la función  $g(n, m)$  elegida. De esta manera, el filtrado de secuencias corresponde a una selección de permutaciones realizada por la elección de  $g(n, m)$ .

Se llevó a cabo la implementación computacional del resultado expresado en la ecuación (7.35), de tal forma de obtener un método de identificación del orden de la permutación diádica que relaciona dos imágenes similares. Por ejemplo, se consideraron las imágenes de la figura 7.12. Se trata de la imagen de moiré original ya utilizada y una cierta permutación de ésta. Los programas realizaron sucesivamente la transformada de Walsh bidimensional de dos imágenes, luego la multiplicación de estas transformadas y, finalmente, la transformada de Walsh de este producto. El resultado fue una matriz que presentaba un máximo absoluto en  $j, k = 16, 16$ . Efectivamente puede comprobarse que la permutación diádica  $D_{16,16}$  aplicada a la imagen de la figura 7.12 (a) genera la imagen de la figura 7.12 (b), corroborando la eficacia de la técnica digital propuesta.

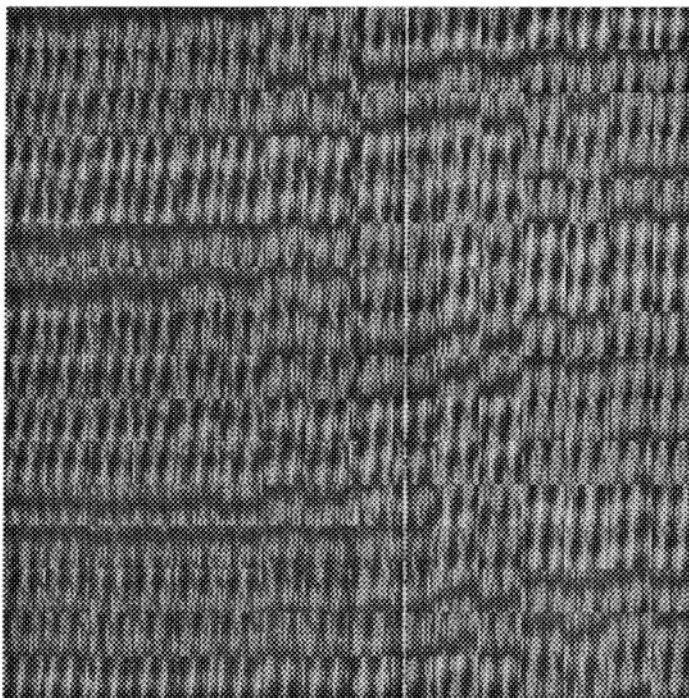
## 7.4 Conclusiones

En este capítulo se han estudiado las propiedades de moiré de las funciones de Walsh, mostrándose cómo las características individuales de las funciones de Walsh intervinientes en la superposición determinan la forma de la distribución del diagrama de franjas resultante. En base a este desarrollo se ha propuesto la utilización de redes de Walsh en una experiencia de determinación de curvas de nivel, demostrándose su utilidad en los casos en que es necesario detectar curvas de nivel en diferentes escalas espaciales. Además se ha hecho notar que la utilización de las funciones de Walsh en este tipo de dispositivos elimina en parte una cierta incerteza propia de las experiencias de moiré en base a redes de Ronchi.

En la segunda parte del capítulo se han abordado técnicas conocidas en el procesado digital de imágenes, como la correlación diádica y el filtrado de secuencias, pero desde el punto de vista de las permutaciones. Se ha presentado una interpretación de las operaciones diádicas sobre imágenes digitales



(a)



(b)

Figura 7-12: (a) Imagen de moiré original y (b) imagen obtenida mediante la aplicación de una permutación diádica de cierto orden sobre la imagen (a).

como permutaciones aplicadas a la distribución de los elementos de la imagen. Se ha realizado una interpretación gráfica de las diferentes relaciones de permutaciones entre una determinada imagen y sus corrimientos diádicos. Se ha analizado la correlación diádica de dos funciones digitales y su transformada de Walsh-Hadamard, estableciendo una equivalencia entre la similaridad (o no) de las imágenes y la existencia de secuencias comunes (o la no existencia) entre las imágenes. La aplicación de la técnica que se basa en la correlación diádica y el análisis de Walsh-Hadamard para el filtrado de secuencias de una imagen entrada, también pudo entenderse como una selección de las permutaciones diádicas posibles de tal imagen.

En este último campo aún se continúa trabajando en la implementación computacional y en las posibles aplicaciones del enfoque presentado.

# Capítulo 8

## CONCLUSIONES GENERALES

Las propiedades de periodicidad, tanto longitudinal como transversal, del campo difractado por una apertura periódica e infinita, iluminada por una fuente cuasimonocromática y espacialmente coherente, fueron descubiertas por H. F. Talbot en el siglo pasado. Este fenómeno es conocido como efecto Talbot o de autoimágenes, y genera la aparición de réplicas de la apertura distribuidas en forma equiespaciada a lo largo del eje de iluminación. Existe otro efecto íntimamente relacionado con el anterior, el cual tiene lugar cuando dos aperturas idénticas periódicas e infinitas colocadas en serie, son iluminadas por una fuente espacialmente incoherente. Tal dispositivo genera un cierto estado de coherencia que provoca que en el infinito (o lo que es lo mismo, en el plano focal posterior de una lente positiva colocada detrás de la segunda red) se produzca un diagrama de franjas de interferencia periódico. Este fenómeno es denominado efecto Lau. La importancia del estudio de ambos efectos radica en sus posibilidades de aplicación en el procesamiento óptico de imágenes, como es el caso de los diferentes interferómetros Talbot y Lau, o el espectrómetro de Fourier, entre otros ejemplos.

Si bien W. D. Montgomery ha demostrado que la periodicidad de la función transmitancia de las aperturas es sólo una condición suficiente para la verificación del efecto de autoimágenes, la mayor parte de los trabajos en relación con este fenómeno, se han ocupado de aperturas periódicas. Este hecho imponía una fuerte restricción en cuanto a las posibilidades de la aplicación de tales efectos al procesado de imágenes mediante los dispositivos antes mencionados. Una parte de estas restricciones son salvadas en base a los desarrollos presentados en esta tesis. En este sentido, se han demostrado ciertas extensiones y generalizaciones de los efectos Talbot y Lau mediante el estudio de sistemas de múltiples aperturas de tamaño finito, dispuestas en serie, cuyas funciones transmitancias son en principio arbitrarias.

En el primer capítulo de la tesis se realiza una breve introducción a los temas que se desarrollarán.

En el Capítulo 2 se resumen algunos enfoques teóricos de los fenómenos Talbot y Lau, y seguidamente,

se describen algunas aplicaciones, particularmente las destinadas al filtrado espacial.

El estudio más frecuente de los efectos Talbot y Lau se restringe a aperturas periódicas. Sin embargo, es posible realizar una extensión a redes binarias no periódicas como es el caso de las funciones de Walsh. Los trabajos previos en este sentido se analizan en el Capítulo 3, donde se introduce el formalismo de la transformada de Walsh-Hadamard y se estudian las propiedades restringidas de autoimagen y de generación de coherencia de las funciones de Walsh.

En los capítulos subsiguientes se desarrollan los aportes originales de esta tesis.

Teniendo en cuenta las propiedades ya estudiadas de las funciones de Walsh consideradas como transmitancias de dispositivos de Talbot y Lau clásicos (es decir, arreglos de una única red para el caso de iluminación coherente, y de dos redes para el caso de iluminación incoherente), en los Capítulos 4 y 5 se analizaron las propagaciones del campo difractado y de la función coherencia mutua a lo largo del dispositivo de múltiples aperturas propuesto. Se ha supuesto que las aperturas puedan estar sintetizadas no sólo por una única función de Walsh, sino por una síntesis general de estas funciones. La importancia del estudio de las funciones de Walsh como transmitancias en sistemas ópticos, reside en la completitud del conjunto formado por estas funciones. Tal completitud permite que cualquier función transmitancia arbitraria pueda desarrollarse en esta base.

El análisis de Fourier ha demostrado su gran eficacia en el estudio de las interacciones del campo luminoso con lentes y filtros espaciales en sistemas formadores de imágenes. La ventaja del formalismo de Walsh-Hadamard empleado en esta tesis, frente al de Fourier, se evidencia en el hecho que en la región de difracción de Fresnel considerada, las informaciones espaciales y espectrales se encuentran aún mezcladas.

Los desarrollos propuestos demostraron la verificación de los efectos Talbot y Lau para las transparencias sintetizadas por funciones de Walsh de orden relativamente alto, a la vez que se mostró la dependencia de las distancias de resonancia características con el orden de la función de Walsh o su secuencia. Tal comportamiento permitió caracterizar los sistemas de múltiples aperturas por una razón señal-ruido; esto es, aquellas funciones de Walsh presentes en la amplitud de campo que al producirse las sucesivas interacciones fueran transmitidas constituyen el nivel de señal, mientras que las restantes funciones de Walsh que se propaguen severamente distorsionadas, contribuyen al nivel de ruido. Este es el principio de la aplicación del dispositivo propuesto al filtrado espacial de secuencias tanto bajo iluminación espacialmente coherente como incoherente.

En el caso de la iluminación coherente (Capítulo 4) se analizó la propagación del campo en las sucesivas interacciones, mostrándose la importancia del enfoque del sistema mediante la elección adecuada de las distancias de equiespaciamiento. Mientras que en el caso de la iluminación incoherente (Capítulo 5), en primer lugar se estudió la evolución de la función coherencia mutua a lo largo del dispositivo

propuesto, deduciéndose que esta propagación puede interpretarse como el "ajuste" entre el espaciado de los máximos de coherencia y las pseudo-periodicidades de las funciones de Walsh de las aperturas. A esto le siguió un segundo paso: la expresión general de la función coherencia ya calculada, llevó a la obtención de la distribución del diagrama de franjas en el infinito y su posterior análisis. Éste indicó que el "ajuste" o "desajuste" de la distancia de equiespaciado del sistema respecto a las distancias Lau correspondientes a las funciones de Walsh intervinientes en la síntesis de las aperturas, produce el filtrado de ciertas frecuencias o secuencias en el diagrama de interferencia final obtenido.

La interpretación del arreglo de aperturas como un filtro de secuencias (presentes en el campo o en la función coherencia mutua) indica lo apropiado del empleo del formalismo de Walsh-Hadamard para el estudio de este tipo de dispositivos ópticos, ya que las funciones de Walsh están caracterizadas precisamente por su secuencia.

Las evidentes similitudes en los comportamientos del campo difractado y la función coherencia mutua a través de su propagación en el dispositivo de múltiples aperturas, indica una vez más la fuerte relación entre los fenómenos Talbot y Lau, generalizados en este trabajo.

Una aplicación del formalismo de Walsh-Hadamard al estudio de la propagación del campo difractado bajo iluminación coherente cuando las aperturas tienen propiedades de autosimilaridad fue presentada en el Capítulo 6. En general, las estructuras que verifican algún tipo de invariancia ante cambios de escala, llamada propiedad de autosimilaridad, son denominados fractales, y si bien se basan en abstracciones matemáticas idealizadas, existen ejemplos aproximados de estos en la naturaleza. Los prefractales son conjuntos de funciones que mediante algún límite generan una función fractálica. Como parte de dispositivos ópticos, estas estructuras prefractálicas son en definitiva las que en la práctica pueden estudiarse debido a que las limitaciones físicas y computacionales no permiten abordar los fractales ideales. En el Capítulo 6 se estudia la propagación del campo difractado en la región de Fresnel por un conjunto de funciones prefractálicas llamado barras de Cantor. Este análisis constituye un importante aporte en este campo, ya que la mayor parte de los estudios hasta el momento se han ocupado de la región de difracción de Fraunhofer, debido a que la autosimilaridad ha mostrado invariancia ante la transformación de Fourier. Como era previsible, el grado de autosimilaridad en la región de difracción de Fresnel resultó ser ciertamente bajo, aunque no nulo, debido a que la transformada de Fresnel no conserva esta propiedad.

Otra novedad del análisis propuesto es la utilización del enfoque de Walsh-Hadamard en el estudio de los fractales, ya que el cálculo de la difracción de las barras de Cantor, se llevó a cabo utilizando los resultados obtenidos en los Capítulos 3 y 4 para transmitancias sintetizadas por funciones de Walsh. Además se mostró la invariancia del grado de autosimilaridad ante la transformada de Walsh, asegurando en este sentido la equivalencia de los análisis basados en el estudio del campo con aquellos que hacen uso de su espectro de secuencias de Walsh. En este aspecto también se hizo notar la conveniencia del

segundo enfoque en el caso que la transmitancia consistiese en una función de Cantor contaminada con ruido "random".

En el Capítulo 7 se presentaron dos aplicaciones que no implican propagación luminosa, a diferencia de los fenómenos estudiados en los capítulos precedentes. Sin embargo para el análisis de ambas situaciones se utilizó nuevamente el formalismo de Walsh-Hadamard, el cual provee un eje general a esta tesis.

Cuando se superponen dos redes periódicas o cuasi-periódicas se verifica la aparición de un diagrama de franjas que no se encuentra individualmente en estas redes; se trata del llamado diagrama de moiré. En la primera parte del Capítulo 7 se estudió el fenómeno de moiré desde un punto de vista puramente geométrico, para el caso en que las redes están sintetizadas por funciones de Walsh binarizadas. Se obtuvo la distribución del sistema de franjas resultante en base a las características de las redes de Walsh originales. Además, con este mismo tipo de redes, se realizó una aplicación a la determinación de curvas de nivel de un objeto volumétrico, mediante la implementación experimental de un dispositivo óptico de moiré clásico. Los aportes en este sentido residen en que en la mayor parte de los estudios del moiré se utilizan redes tipo Ronchi, y hasta el momento no se han empleado las funciones de Walsh. Se indicó además una ventaja del dispositivo propuesto frente a los tradicionalmente utilizados, y es que, haciendo uso de redes de Walsh, las cuales están sintetizadas por una productoria de funciones de Rademacher de diferentes períodos, se amplía el rango de detección de las curvas de nivel. Las funciones de mayor período presentes en la productoria señalarán las mayores irregularidades mientras que las de período menor mostrarán los detalles más pequeños. Por otro lado, cuando este tipo de dispositivos son aplicados a la evaluación de discontinuidades sobre objetos volumétricos, el moiré característico de las funciones de Walsh elimina en parte una cierta indeterminación que aparece en los diagramas obtenidos mediante la utilización de redes de Ronchi. Por ejemplo, en el caso tratado de una discontinuidad tipo escalón, sobre el diagrama de franjas producido por redes de Ronchi, no es posible discernir unívocamente respecto a la correspondencia entre una determinada franja de moiré situada a un lado de la discontinuidad y su continuación dada en alguna otra franja situada sobre el otro lado. Tal determinación resulta obviamente de fundamental importancia para la evaluación cuantitativa de una discontinuidad de este tipo mediante el uso de estas técnicas.

El procesado digital de la información ha sido extensamente estudiado y se encuentra en continuo desarrollo. Más específicamente se han propuesto técnicas de procesado de imágenes digitales que hacen uso de las propiedades del denominado "desplazamiento diádico" (que se define a partir de la tabla de verdad del *or* exclusivo) y su correspondiente correlación diádica en el marco del análisis de Walsh-Hadamard.

En la segunda parte del Capítulo 7 se presenta una interpretación novedosa de los desplazamientos y las correlaciones diádicas, aplicados a imágenes binarizadas, en base a permutaciones de los elemen-



tos componentes de la imagen. A partir del análisis de la correlación diádica de dos imágenes y su transformada de Walsh se ha establecido una correspondencia entre la similaridad de las imágenes, es decir la existencia de una permutación diádica que relaciona ambas imágenes, y la existencia de una secuencia o serie de secuencias en común. Con respecto a la técnica de filtrado que surge del empleo de la correlación diádica y de la utilización del formalismo de Walsh-Hadamard discreto, se demostró que el filtrado de secuencias de una imagen de entrada, puede interpretarse como una selección de las posibles permutaciones de la imagen.

Los temas desarrollados en esta tesis y sus respectivas conclusiones fueron ampliamente corroborados por simulaciones computacionales, o por resultados experimentales (en el caso específico del dispositivo estudiado en el Capítulo 7).

Como síntesis general, debe destacarse que en lo que respecta a las generalizaciones de los efectos Talbot y Lau, la importancia de los desarrollos presentados radica en la inmediata extensión de los procesadores originalmente propuestos para dispositivos clásicos de aperturas simples y periódicas al caso de sistemas de múltiples aperturas de funciones de transmitancias arbitrarias.

Por otra parte los estudios de la difracción en la región de Fresnel de prefractales utilizando el formalismo de Walsh-Hadamard, así como el de los diagramas de moiré de las funciones de Walsh apuntan a completar y enriquecer campos con amplio desarrollo. Finalmente, el novedoso enfoque basado en la interpretación de los desplazamientos diádicos como permutaciones, y la técnica de filtrado de secuencias aplicado al procesado digital de imágenes, se hallan aún en estado de desarrollo y con perspectivas de generar una serie de aplicaciones en este campo en muy corto plazo.

# Bibliografía

- [1] H. F. Talbot, "Facts relating to Optical Science. No IV", *Philos. Mag.* **9**, 401-407 (1836).
- [2] Lord Rayleigh, "On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected", *Philos. Mag.* **11**, 197-205 (1881).
- [3] G. L. Rogers, "Calculations of intermediate Fourier images of a finite line grating on digital computer, with an application to unusual case", *Br. J. Appl. Phys.* **14**, 657-661 (1963).
- [4] J. T. Winthrop and C. R. Worthington, "Theory of Fresnel images. I. Plane periodic objects in monochromatic light" *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 373-381 (1965).
- [5] D. Joyeux and Y. Cohen-Sabban, "High magnification self-imaging", *Appl. Opt.* **21**, 625-627 (1982).
- [6] Y. Cohen-Sabban and D. Joyeux, "Aberration-free nonparaxial self-imaging", *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 707-719 (1983).
- [7] W. D. Montgomery, "Self-imaging objects of infinite aperture", *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 772-778 (1967).
- [8] E. Lau, "Beugungerscheinungen and Doppelrastern", *Ann. Phys. (Leipzig)* **6**, 417-423 (1948).
- [9] M. L. Roblin, "Réalisation d'un système de franges achromatiques à pas variable" *Optica Acta* **7**, 539-545 (1971).
- [10] F. Gori, "Lau effect and coherence theory", *Opt. Commun.* **31**, 4-8 (1979).
- [11] J. Jahns and A. W. Lohmann, "The Lau effect (a diffraction experiment with incoherent illumination)", *Opt. Commun.* **28**, 263 (1979).
- [12] R. Sudol and B. J. Thompson, "An explanation of the Lau effect based on coherence theory", *Opt. Commun.* **31**, 105 (1979).

- [13] R. Sudol and B. J. Thompson, "Lau effect: theory and experiment", *Appl. Opt.* **20**, 1107-1116 (1981).
- [14] K. Patorski, "Incoherent superposition of multiple self-imaging. Lau effect and moiré fringe explanation", *Optica Acta* **30**, 745-758 (1983).
- [15] K. Patorski, "Incoherent superimposition of multiple self-imaging under plane wave-front illumination", *Appl. Opt.* **25**, 2396-2403 (1986).
- [16] A. W. Lohmann and J. Ojeda-Castañeda, "Spatial periodicities in partially coherent fields", *Optica Acta* **30**, 475-479 (1983).
- [17] G. Indebetouw, "Propagation of spatially periodic wavefields", *Opt. Acta* **31**, 531-539 (1984).
- [18] G. Indebetouw, "Spatially periodic wave fields: an experimental demonstration of the relationship between the lateral and the longitudinal spatial frequencies", *Opt. Comm.* **49**, 86-90 (1984).
- [19] S. Chitralakha, K. V. Avudainayagam, S. V. Pappu and P. S. Ramanujam, "Experimental verification of the lateral periodicity of axially periodic incoherent fields using the Lau effect", *J. Mod. Opt.* **35**, 1263-1267 (1988).
- [20] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda and N. Streibl, "Spatial periodicities in coherent and partially coherent fields", *Opt. Acta* **30**, 1259-1266 (1983).
- [21] J. Jahns, A. W. Lohmann and J. Ojeda-Castañeda, "Talbot and Lau effects, a parageometrical approach", *Optica Acta* **31**, 313-324 (1984).
- [22] J. Ojeda-Castañeda and E. E. Sicre, "Quasi ray-optical approach to longitudinal periodicities of free and bounded wavefields", *Optica Acta* **32**, 17-26 (1985).
- [23] K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Prog. Opt.* Vol. **XXVII**, 3-108, edited by E. Wolf, Amsterdam: North-Holland (1989).
- [24] C. Colautti, B. Ruiz, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Walsh functions: analysis of their properties under Fresnel diffraction", *J. Mod. Opt.* **34**, 1385-1391 (1987).
- [25] C. Colautti, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Analysis of the Lau effect using Walsh functions", *Opt. Lett.* **13**, 1069-1088 (1988).
- [26] K. G. Beauchamp, *Walsh Functions and Their Applications*, Academic Press, New York (1975).
- [27] R. B. Schulz, *Applications of Walsh functions-Proceeding Symposium 1971*, R. W. Zeek and A. E. Showalter Editors, Washington D. C. (1971).

- [28] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, Boston (1983).
- [29] P. S. Theocaris, *Moiré Fringes in Strain Analysis*, Pergamon Press, New York (1969).
- [30] H. C. Andrews, *Computers Techniques in Image Processing*, pg. 72-80 y pg. 109-119, Academic Press, New York (1978).
- [31] R. J. Clarke, *Transform Coding of Images*, Academic Press, New York (1985).
- [32] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York (1968).
- [33] A. W. Lohmann, *Optical Information Processing*, Lectures notes, p. 60, Erlangen (1978).
- [34] R. F. Edgar, "The Fresnel diffraction images of periodic structures", *Opt. Acta* **16**, 281-287 (1969).
- [35] A. Kolodziejczyk, "Self-imaging effect- A new approach", *Opt. Comm.* **65**, 84-86 (1988).
- [36] P. Latimer and R. F. Crouse, "Talbot effect reinterpreted", *App. Opt.* **31**, 80-89 (1992).
- [37] E. A. Hiedemann and M. A. Breazeale, "Secondary interference in the Fresnel zone of gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **49**, 372-375 (1959).
- [38] L. Mandel and E. Wolf, "Spectral coherence and the concept of cross-spectral purity", *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 529-535 (1976)
- [39] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 4th Ed., chap. X, Oxford (1964).
- [40] B. J. Thompson and C. Roychoudhuri, "On the propagation of coherent and partially coherent light", *Opt. Acta* **26**, 21-34 (1979).
- [41] G. J. Swanson and E. N. Leith, "Lau effect and grating imaging and generalized grating imaging", *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 552-555 (1982).
- [42] G. J. Swanson and E. N. Leith, "Analysis of the Lau effect and grating imaging", *J. Opt. Soc. Am.* **A 2**, 789-793 (1985).
- [43] K. -H. Brenner, A. W. Lohmann and J. Ojeda-Castañeda, "Lau effect: OTF theory", *Opt. Comm.* **46**, 14-17 (1983).
- [44] F. O. Weinberg and N. B. Wood, "Interferometers based of four diffraction gratings", *J. Sci. Instrum.* **36**, 227 (1959).
- [45] K. Hane and C. P. Grover, "Imaging with rectangular transmission gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **A 4**, 706-711 (1987).

- [46] K. Hane and C. P. Grover, "Magnified gratings images used in displacement sensing", *Appl. Opt.* **26**, 2355-2359 (1987).
- [47] J. Sethuraman, "Bloch functions and Lau effect", *Opt. Comm.* **52**, 377-379 (1985).
- [48] S. Jutamulia, T. Asakura y H. Fuji, "Lau effect and noncoherent processing", *Opt. Comm.* **53**, 77-79 (1985).
- [49] A. W. Lohmann, *A New Fourier Spectrometer Consisting of a Two-gratings-interferometer*, K. J. Habbell Ed., London (1961), Butterworth.
- [50] H. Klages, "Fourier spectrometry based on grating resonances", *Journal de Physique* **28**, c2.40-c2.43 (1967).
- [51] S. Yokozeki and T. Suzuki, "Shearing interferometer using the grating as beam splitter", *Appl. Opt.* **10**, 1575-1580 (1971).
- S. Yokozeki and T. Suzuki, "Shearing interferometer using the grating as beam splitter. Part 2", *Appl. Opt.* **10**, 1690-1693 (1971).
- [52] A. W. Lohmann and D. E. Silva, "An interferometer based on the Talbot effect", *Opt. Comm.* **2**, 413-415 (1971).
- [53] D. E. Silva, "Talbot interferometer for radial and lateral derivatives", *Appl. Opt.* **10**, 2613-2624 (1972).
- [54] A. W. Lohmann and D. E. Silva, "A Talbot interferometer with circular gratings", *Opt. Comm.* **4**, 326 (1972).
- [55] D. E. Silva, "A simple interferometric method of beam collimation", *Appl. Opt.* **10**, 1980-1982 (1971).
- [56] C. S. Lim and V. Srinivasan, "Talbot interferometer with computer generated gratings", *Opt. Comm.* **44**, 219-222 (1983).
- [57] H. Kaijun, J. Jahns and A. W. Lohmann, "Talbot interferometry with a vibrating phase objects", *Opt. Comm.* **45**, 295-300 (1983).
- [58] Y. Nakano and K. Murata, "Talbot interferometry for measuring the focal length of lens", *Appl. Opt.* **24**, 3162-3166 (1985).
- [59] K. V. Sriram, M. P. Kothiyal and R. S. Sirohi, "Talbot interferometry in noncollimated illumination for curvature and focal length measurements", *Appl. Opt.* **31**, 75-79 (1992).

- [60] Y. Nakano and K. Murata, "Talbot interferometry for measuring the small tilt angle variation of an object surface", *Appl. Opt.* **25**, 2475-2477 (1986).
- [61] Y. Nakano, "Measurements of the small tilt-angle variation of an object surface using moiré interferometry and digital image processing", *Appl. Opt.* **26**, 3911-3914 (1987).
- [62] H. O. Bartelt and J. Jahns, "Interferometry based on the Lau effect", *Opt. Comm.* **30**, 268-274 (1979).
- [63] K. Paturski, "Periodic source Ronchi-Talbot shearing interferometer", *Optik* **62**, 207-210 (1982).
- [64] N. Bolognini, J. Ojeda-Castañeda and E. E. Sicre, "Interferometry based on the Lau effect. A quasi-ray description", *Opt. Acta* **32**, 409-422 (1985).
- [65] J. Ojeda-Castañeda, J. Ibarra and J. C. Barreiro, "Noncoherent Talbot effect: coherence theory and applications", *Opt. Comm.* **71**, 151-155 (1989).
- [66] H. O. Bartelt and Y. Li, "Lau interferometry with cross gratings", *Opt. Comm.* **48**, 1-6 (1983).
- [67] J. K. T. Eu and A. W. Lohmann, "Spatial filtering effects by means of hologram copying", *Opt. Comm.* **8**, 176-182 (1973).
- [68] J. K. T. Eu, C. Y. C. Liu and A. W. Lohmann, "Spatial filtering for differentiation", *Opt. Comm.* **9**, 168-171 (1973).
- [69] J. Ojeda-Castañeda and E. E. Sicre, "Tunable bandstop filtering for binary objects: a self-imaging technique", *Opt. Comm.* **47**, 183-186 (1983).
- [70] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castañeda and E. E. Sicre, "Multiple interaction bandstop filters based on the Talbot effect", *Opt. Comm.* **49**, 388-392 (1984).
- [71] C. Colautti, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Incoherent optical spatial filtering based on the Lau effect", *Opt. Comm.* **57**, 16 (1986).
- [72] J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés and J. Ibarra, "Lenless theta decoder with high light throughput", *Opt. Comm.* **4**, 256-260 (1988).
- [73] P. Andrés, J. Ojeda-Castañeda and J. C. Barreiro, "Lau effect and binary logic", *SPIE 963 Opt. Computing* **88**, 642-645 (1988).
- [74] J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés and J. C. Barreiro, "Abbe-Porter experiment and logic operations", *Opt. Comm.* **71**, 145-150 (1989).

- [75] P. Chavel and T. C. Strand, "Pseudocolor encoding of depth information using Talbot effect", *Proc. ICO: Optics in four dimensions* **431** (1980).
- [76] P. Chavel and T. C. Strand, "Range measurement using Talbot diffraction imaging of gratings", *Appl. Opt.* **23**, 862-871 (1984).
- [77] R. Rodriguez-Vera, D. Kerr and F. Mendoza-Santoyo, "3-D contouring of diffuse objects by Talbot-projected fringes", *J. Mod. Opt.* **38**, 1935-1945 (1991).
- [78] D. Courjon, J. Bulabois and C. Mered, "Spatial frequency pseudocolor encoding using coarse gratings", *Appl. Opt.* **23**, 1642-1646 (1984).
- [79] H. Danimann, G. Groh and M. Kock, "Restoration of faulty images of periodic objects by means of self-imaging", *Appl. Opt.* **10**, 1454-1455 (1971).
- [80] A. Kalestynski and B. Smolinska, "Self-restoration of the autoidolon of defective periodic objects", *Opt. Acta* **25**, 125-134 (1978).
- [81] B. Smolinska and A. Kalestynski, "Autoidolon of quasi-periodic optical objects", *Opt. Acta* **25**, 257-263 (1978).
- [82] A. P. Smirnov and A. D. Galpern, "Effect of errors of a periodic transparency on Fresnel images", *Opt. Spectrosc.* **48**, 324-326 (1980).
- [83] O. Bryngdahl, "Imaging formation using self-imaging techniques", *J. Opt. Soc. Am.* **63**, 416-419 (1973).
- [84] W. T. Cathey, *Optical information processing and holography*, Wiley, New York (1974).
- [85] H. Rademacher, "Einige Sätze von allgemeinen Orthogonalfunktionen", *Math. Annal.* **87**, 122-138 (1922).
- [86] N. Ahmed, H. Schreiber and P. Lopresti, "On notation and definition of terms related to a class of complete orthogonal functions", *I. E. E. E. Transactions on. Electromagnetic Compatibility*, Vol. EMC-15 N°3, 75-80, 1973.
- [87] H. Harmuth, *Transmission of Information by Orthogonal Functions*, 2nd. ed. New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1972, Chapter 1.
- [88] N. M. Blachman, "Sinusoids versus Walsh functions", *Procc. IEEE* **62**, 346-354 (1974).
- [89] J. L. Walsh, "A closed set of orthogonal functions" *Amer. J. of Mathem.* **45**, 5-24 (1923).

- [90] A. Papoulis, "Ambiguity function in Fourier optics", *J. Opt. Soc. Am.* **64**, 779-788 (1974).
- [91] C. Allain and M. Cloitre, "Optical diffraction on fractals", *Phys. Rev. B* **33**, 3566-3569 (1986).
- [92] C. Allain and M. Cloitre, "Spatial spectrum of a general family of self-similar arrays", *Phys. Rev. A* **36**, 5751-5757 (1987).
- [93] A. Lakhtakia, R. Messier and V.K. Varadan, V.V. Varadan: Fractal dimension from the backscattering cross-section. *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 1615-1619 (1987).
- [94] J. Uozumi, H. Kimura and T. Asakura, "Fraunhofer diffraction by Koch fractals", *J. Mod. Opt.* **37**, 1011-1031 (1990)
- [95] J. Uozumi, H. Kimura and T. Asakura, "Fraunhofer diffraction by Koch fractals: the dimensionality", *J. Mod. Opt.* **38**, 1335-1347 (1991).
- [96] K. Uno, J. Uozumi and T. Asakura, "Statistical properties of Fraunhofer diffraction field produced by random fractals", *Appl. Opt.* **32**, 2722-2729 (1993).
- [97] A. Lakhtakia and H.J. Caulfield, "On some mathematical and optical integral transforms of self-similar (fractal) functions", *Optik* **91**, 131-133 (1992).
- [98] Y. Sakurada, J. Uozumi and T. Asakura, "Fresnel diffraction by one-dimensional regular fractals", *Pure Appl. Opt.* **1**, 29-40 (1992).
- [99] Y. Sakurada, J. Uozumi and T. Asakura, "Scaling properties of the Fresnel diffraction field produced by one-dimensional regular fractals", *Pure Appl. Opt.* **3**, 371-380 (1994).
- [100] C. Oster, *The Science of Moiré Patterns*, second edition, Edmund Scientific (1969).
- [101] Y. Nishijima and G. Oster, "Moiré patterns: Their application to refractive index and refractive index gradient measurement", *J. Opt. Soc. Am.* **54**, 1-5 (1964).
- [102] G. Oster, M. Wasserman and C. Zwerling, "Theoretical interpretation of moiré patterns", *J. Opt. Soc. Am.* **54**, 169-175 (1964).
- [103] D. M. Meadows, W. O. Johnson and J. B. Allen, "Generation of surface contours by moiré patterns", *Appl. Opt.* **9**, 942-947 (1970).
- [104] H. C. Andrews, *Computers Techniques in Image Processing*, Academic Press, New York (1978).
- [105] T. H. Frank, "Implementation of dyadic correlation", *Procee. Symp. Applications of Walsh Functions* pg. 111-117, 1971.



- [106] F. R. Ohnsorg, "Spectral modes of Walsh-Hadamard transform", *Procee. Symp. Applications of Walsh Functions* pg. 55-59, 1971.
- [107] J. H. Rosenbloom, "Physical interpretation of dyadic groups", *Procee. Symp. Applications of Walsh Functions* pg. 158-165, 1971.
- [108] F. Pichler, "On state-space description of linear dyadic-invariant systems", *Procee. Symp. Applications of Walsh Functions* pg. 166-170, 1971.
- [109] N Ahmed, K. R. Rao and A. L. Abdussattar, "On cyclic aurocorrelation and the Walsh-Hadamard transform", *I. E. E. E. Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. EMC-15 N°3, 111-117, 1973.
- [110] F. Pichler, "Walsh functions and optimal linear system", *Procee. Symp. Applications of Walsh Functions* pg. 17-22, 1970.
- [111] J. D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, pg. 339, John Wiley & Sons, New York (1978).

Los trabajos presentados en esta tesis se hallan en su mayor parte desarrollados en las siguientes publicaciones:

1. *"Diffraction properties of periodic multiple-aperture systems: an approach based on the Walsh functions"*, *Optical Engineering* **35**, 94-101, (1996).  
Autores: O. Trabocchi, C. Colautti y E. E. Sicre.
2. *"Spatial coherence properties of a multiple aperture system: an analysis based on the Walsh functions"*, *Journal of Modern Optics* **44**, 715-729, (1997).  
Autores: O. Trabocchi, C. Colautti, G. Saavedra y E. E. Sicre.
3. *"Moiré properties of Walsh functions"*, aceptado para su publicación en *Optics & Laser Technology*.  
Autores: C. Colautti, O. Trabocchi y E. E. Sicre.
4. *"Walsh-Hadamard analysis of the Fresnel diffraction by Cantor fractals"*, aceptado para su publicación en *Optik*.  
Autores: O. Trabocchi, C. Colautti y E. E. Sicre.
5. *"A new interpretation of dyadic shifts"*, trabajo en preparación.  
Autores: O. Trabocchi, R. Henao y R. Castañeda.