www.cibereduca.com

V Congreso Internacional Virtual de Educación
7-27 de Febrero de 2005

EL ALUMNADO DE SECUNDARIA ANTE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Rafael José Conde Caballero
Yolanda Conde Caballero

RESUMEN

Se pretende plantear distintas estrategias que permita a los alumnos de secundaria resolver problemas matemáticos, que ayuden al alumnado a enfrentarse a lo que consideran una gran dificultad en el currículo de secundaria: la resolución de problemas matemáticos. Se aportarán varios ejemplo, incluyendo juegos matemáticos que a la vez que hacen que practiquen las distintas estrategias de resolución, se diviertan con las matemáticas.. También se analizará el papel del profesor de Matemáticas a la hora de plantear y resolver problemas, así como los errores más comunes de los alumnos.

INTRODUCCIÓN.

En el área de las matemáticas uno de los principales objetivos a conseguir es que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas. Son muchos los motivos que avalan esta afirmación, entre ellos, la utilidad de la resolución de problemas para la vida cotidiana de los alumnos y el aumento del aprendizaje de contenidos matemáticos, tanto conceptos, como procedimientos y como actitudes. La resolución de problemas no es sólo un objetivo general del área, es también un instrumento metodológico importante. La reflexión que se lleva a cabo durante las labores de resolución de problemas ayuda a la construcción de los conceptos y a establecer relaciones entre ellos. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes aprenden matemáticas y pueden llegar a ser usuarios de este lenguaje internacional.

Conseguir este objetivo es una tarea difícil, ya que resolver problemas es un proceso complejo en el que intervienen una gran cantidad de variables, entre las que destacan el repertorio de estrategias generales y específicas que se es capaz de poner en marcha, la influencia de factores individuales y afectivos, las características de cada problema y los métodos de enseñanza utilizados por el profesor. Es una tarea que se puede aprender, el desafío es cómo se la puede enseñar a todos los alumnos y no sólo a los más capaces o los más motivados por las matemáticas.

Crear actitudes y aptitudes en los estudiantes para acometer esta tarea debe ser una meta obligada de todo enseñante. ¿Cuántas veces hemos conocido casos de alumnos y alumnas que resuelven de maravilla ecuaciones complicadas, pero que se pierden ante un sencillo problema que se reduce a una simple ecuación?.

Cuando un problema incita al alumno a plantearse nuevas preguntas sobre el mismo, por ejemplo, si se puede generalizar el resultado obtenido a otro tipo de figuras o números, o qué pasa si se modifican las condiciones iniciales del problema, puede decirse que se ha entrado en una auténtica investigación que seguramente le enseñará más sobre las matemáticas que la sola reiteración de ejercicios.

No se aprende a resolver problemas por el mero hecho de haber aprendido algunos conceptos y algoritmos. Hay que proporcionar al alumnado herramientas, técnicas específicas y pautas generales de resolución de problemas que les permitan enfrentarse a ellos sin miedo y con cierta garantía de éxito. La mejor manera de aprender a resolver problemas eficazmente es resolver una cantidad suficiente de problemas, lo que lleva mucho tiempo, y transmitirles la importancia que tiene en la resolución de problemas, la reflexión sobre la forma de resolver cada uno de ellos. Para que el alumno sea un buen resolutor de problemas, debe intentar resolver no sólo muchos problemas, sino una gran variedad. Tan importante como resolver problemas es acostumbrarse a plantear problemas a partir de situaciones que requieren una formulación precisa de los mismos

La resolución de problemas es un tema en permanente discusión. Basta comprobar el número de libros que cada año se publican o la gran cantidad de artículos que nos ofrecen las revistas especializadas. Además, esta importancia se ve reflejada en el currículo, ya que la resolución de problemas aparece en los currículos de ESO y Bachillerato como una tarea necesaria en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es más, los contenidos relacionados con la resolución de problemas tienen un carácter transversal y por consiguiente están presentes en el desarrollo de los restantes contenidos matemáticos.

¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

Aunque no es sencillo, para entendernos es interesante delimitar qué es lo que entendemos por problema. Hay que caracterizar los "problemas" por oposición a los ejercicios.

En matemáticas conviene distinguir entre las situaciones que consisten en trabajar sobre cierto número de ejemplos idénticos o casi idénticos a los que ha resuelto el profesor o se ha explicado ya en el texto, y aquellos que requieren cierto comportamiento distinto de la aplicación rutinaria de un procedimiento ya establecido.

Un verdadero problema en matemáticas puede definirse como una situación que es nueva a quien se pide resolverla. A menudo, determinado ejercicio es simple rutina para algunos individuos, mientras que para otros se convierte en una tarea que requiere decisión y reflexión cuidadosa, de manera que "lo que para una persona es un problema para otra es un ejercicio y para una tercera un fracaso". Por ejemplo, ante el enunciado: ¿Cuál es el rectángulo de mayor área entre todos los rectángulos de igual perímetro?, un alumno con conocimientos de Cálculo planteará fácilmente una función y estudiará sus extremos para resolverlo, mientras que otro alumno que no maneje estas herramientas algebraicas, deberá buscar otras estrategias. Es por esto que, con frecuencia, resulta difícil determinar de antemano si una situación determinada es o no un problema para cierta persona.

En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar. Pero, una vez localizado, se aplica y basta. Justamente, la proliferación de ejercicios en clase de matemáticas ha desarrollado y arraigado en los alumnos un síndrome generalizado; en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una somera reflexión, contestan: "lo sé" o "no lo sé", según haya localizado o no el algoritmo apropiado. Ahí acaban, en general, sus elucubraciones.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; hay que relacionar conocimientos de diferentes campos.

Por tanto, un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos provoque las ganas de resolverla, una tarea a la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzos. Como consecuencia de todo ello, una vez resuelta nos proporciona una sensación considerable de placer. E incluso, sin haber acabado el proceso, sin haber logrado la solución, también en el proceso de búsqueda, en los avances que vamos realizando encontremos una componente placentera.

Polya no definió lo que entendía por problema cuando escribió su libro en 1945. Sin embargo, en su libro *Mathematical Discovery* (Polya, 1961), proporcionó una definición: "Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata".

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik: "Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma "(Krulik y Rudnik, 1980).

Otra definición esta vez de Wheathey es: resolver un problema es lo que hacemos cuando no sabemos qué hacer"(Wheathey, 1984)

Para un alumno de Secundaria, descomponer un número en factores primos es un ejercicio. Sin embargo, averiguar cómo son los números que tienen exactamente tres divisores, es un problema. Las divisiones largas por temibles que parezcan no son problemas, sino meros ejercicios.

En líneas generales podríamos decir que un buen problema representa un desafío para quien lo intenta resolver, no deja bloqueado de entrada a quien lo ha de resolver, tiene interés por sí mismo, estimula en quien lo resuelve el deseo de proponerlo a otras personas y proporciona al resolverlo un determinado placer difícil de explicar pero agradable.

Según el procedimiento seguido en la resolución de un problema podemos clasificar a estos en cuatro tipos:

1. *Problemas de aplicación directa*, que son los que sólo requieren de operaciones matemáticas simples, suelen denominarse ejercicios. Por ejemplo, la sustitución de datos de las variables de una ecuación y despeje de la incógnita.

2. *Problemas algorítmicos*, que implican el seguimiento de una secuencia de operaciones cerrada que garantiza la consecución de la solución.

3. *Problemas heurísticos*, problemas que suelen precisar de la puesta en juego de una estrategia con una planificación consciente previa. En este grupo se pueden incluir la mayoría de los problemas clásicos.

4. *Problemas creativos*, son aquellos problemas que permiten la adopción de estrategias de resolución que no suelen ajustarse a ningún patrón predeterminado (admitiéndose incluso la resolución por intuición) aunque no se garantiza que todos los sujetos puedan hallar una solución ni que ésta sea la óptima.

En cuanto al número de soluciones se suele hablar de *problemas cerrados* cuando la solución es única y además no admite dudas en cuanto a su validez, y *problemas abiertos* que son aquellos problemas que admiten varias soluciones que a priori no pueden ser rechazadas o aceptadas con total certeza.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS: PAUTAS A SEGUIR POR LOS ALUMNOS.

La resolución de problemas es el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución. Llevará consigo el uso de la heurística, pero no de una manera predecible, porque si la heurística pudiera ser prescrita de antemano, entonces ella se convertiría en algoritmo y el problema en ejercicio.

Resulta básico que los alumnos tengan un modelo mental de las fases del proceso de resolución de un problema, puesto que le facilitará el acercamiento al mismo.

Otro recurso que debemos incorporar es una serie de preguntas adecuadas que les permita, en cada fase, la argumentación de lo ya realizado o, en el peor de los casos, la superación de un bloqueo en el que hayan caído. Dichas preguntas resultarán de una gran utilidad para intentar mantenerse en el buen camino.

Vamos a ver un método de resolución de problemas. Para desarrollar este apartado, utilizaremos una lista de pautas elaboradas por Miguel de Guzmán en su libro “Aventuras matemáticas”. Esta lista, basada en las ideas de Polya, tienen el gran valor de estar dirigida a los alumnos y alumnas, y su lenguaje es sencillo y nada denso.

La finalidad de este modelo consiste en adquirir unos cuantos hábitos mentales que capaciten para un manejo eficaz de los problemas. Si dichos hábitos son sanos, la actividad mental será un ejercicio menos costoso, suave e incluso placentero.

Miguel de Guzmán considera cinco fases:

1ª fase. **Trata de comprender el enunciado**:

- **Lee** el problema despacio.
- Trata de entender todas las **palabras**.
- Distingue los **datos** del problema (lo que conoces) de la **incógnita** (lo que buscas).
- Trata de ver la **relación** entre los datos y la incógnita.
- Intenta expresar el problema con tus propias palabras.

2ª fase. **Intenta comprender el problema**:

- Si puedes, haz un **dibujo** o un **esquema** de la situación.
- Si los datos del problema no son cantidades muy grandes, intenta expresar la situación jugando con objetos (fichas, botones, papel…).
- Si las cantidades que aparecen en el enunciado son grandes, entonces imagínate el mismo problema con cantidades más pequeñas y haz como dice el punto anterior.
- Si el problema está planteado de forma general, da valores concretos a los datos y trabaja con ellos.

3ª fase. **Busca unas cuantas estrategias para solucionar el problema**.

La siguiente lista te puede ayudar:

- ¿Es semejante a otros problemas que ya conoces?. ¿Cómo se resuelven éstos?. ¿Alguna idea te podría servir?.
- Imagínate un problema más fácil para empezar y, así, animarte.
- Experimenta con casos particulares, ¿te dan alguna pista sobre la posible solución?.
- ¿Puedes ayudarte de un dibujo o de una representación gráfica?.
- ¿Puedes elegir una buena notación para pasar del lenguaje natural al lenguaje matemático?.
- Supón el problema resuelto, ¿cómo se relaciona la situación de partida con la situación final?.
- Imagínate lo contrario a lo que quieres demostrar, ¿llegas a alguna contradicción?.
- ¿El problema presenta alguna simetría o regularidad?, ¿Podemos usar algunos "trucos matemáticos"?.
- ¿Será el caso general más sencillo que éste particular?.

4ª fase. **Selecciona una de las estrategias y trabaja con ella**:

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior.
- No te arrugues fácilmente.
- No te emperres con esta estrategia. Si ves que no conduce a nada, déjala.
- Si la estrategia que elegiste no va bien, acude a otra de las estrategias que seleccionaste o a una combinación de ellas.
- Trata de llegar hasta el final.

5ª fase. **Reflexiona sobre el proceso seguido**:

- Examina a fondo el camino que has seguido.¿Cómo ha sido el camino?, ¿Dónde te atascaste?.
- ¿En qué momento y cómo has salido de los atascos?.
- ¿Cuáles han sido los momentos de cambio de rumbo?, ¿Han sido acertados?.
- ¿Entiendes bien tu solución?, ¿Entiendes por qué marcha?, ¿Tiene sentido esta solución o es absurda?.
- ¿Sabes hacerlo ahora de manera más sencilla?.ç
- ¿Sabes aplicar el método empleado a casos más generales?.
- ¿Puedes resolver otras situaciones relacionadas con el tema que sean interesantes?.
- ¿Cuál ha sido la tendencia de tu pensamiento: visual, analítica, lenta, rápida, segura, dudosa, variada, monótona…?.
- Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

Recuerda: lo que importa es el camino.

ERRORES MÁS COMUNES.

Vamos a comentar algunos de los errores que vemos casi a diario en el aula de Matemáticas cuando los alumnos intentan resolver problemas. Son casos particulares encontrados pero fácilmente generalizables:

Cuando se proponen problemas en los que se requiere conocer las propiedades de los lados y ángulos de cuadrados y polígonos para calcular perímetros y superficies, los alumnos manifiestan temor a la resolución, se produce en ellos un bloqueo importante. En estos casos es cuando se ve la importancia que tiene la actitud frente a un problema.

Cuando se propone algún problema muchos alumnos creen que son de lo último que se está dando. Si se está dando el tema de porcentajes, muchos rápidamente pensarán que tienen que calcular algún porcentaje.

Hay una tendencia de los alumnos a iniciar la resolución de un problema sin realizar una lectura detallada y sin analizar qué estrategia de resolución puede utilizar. Esto se comprueba en el hecho de que los alumnos buscan en el texto del problema los números para realizar con ellos cualquier operación. Combinan los números contenidos en el problema de cualquier forma para obtener una solución.

Cuando se proponen algún problema hay algunos alumnos que dicen que no saben hacerlo. Si se indaga la causa por la que no lo sabe resolver casi siempre se descubre que el problema central es el desconocimiento de algún término (o la flojera). Esto se comprueba con el hecho de que muchos alumnos piden ayuda para resolver un problema antes de haber terminado de leer el problema.

En muchos problemas geométricos, los alumnos tienen dificultad en cómo expresar el resultado en la unidad adecuada.

En problemas del tipo: "Calcular el área de un triángulo cuya base mide 20 cm y su altura mide $2/3$ de la base", los alumnos conocen la fórmula que tienen que usar, pero no saben establecer la relación entre la base y los $2/3$ de la misma, como la altura. La conexión entre los datos de un problema es algo que provoca muchas dificultades.

BLOQUEOS.

La predisposición ante un problema debe ser de curiosidad y de entusiasmo, produciendo satisfacción el sólo hecho de enfrentarse a él, incluso aunque no se logre una solución. Una actitud adecuada para abordar un problema debe caracterizarse por la confianza en las posibilidades del resolutor. No obstante, si un problema es un verdadero problema el resolutor puede quedar bloqueado. Hay muchos tipos de bloqueos:

1. *Bloqueo de tipo inercial*, ya que nuestro proceder suele acomodarse inconscientemente a unas reglas fijas. Esto empobrece nuestra capacidad y reduce nuestras posibilidades de éxito. Para superar este tipo de bloqueo es preciso adoptar una perspectiva distinta de la nuestra (si se es profesor mirar con ojos de alumno, adoptar la perspectiva de hijos si se es padre, etc.)

2. *Bloqueo de origen afectivo*, debido a una amplia gama de sentimientos que favorecen el bloqueo, como la apatía, la pereza ante el comienzo, el miedo al fracaso, la ansiedad, etc. La actuación sobre este tipo de sentimientos no es sencilla. En general, reconocer estos sentimientos suele abrir vías para la superación. Si detectamos un origen justificado, quizás se deba a alguna carencia en nuestra formación que podemos tratar de enmendar. Si su origen no es racional, tal vez podamos reducir sus efectos.

3. *Bloqueo de tipo cognitivo*, que se puede producir cuando tenemos dificultad para percibir el problema, identificarlo, definirlo o desglosarlo en tareas más sencillas. Además, hay otras actitudes que suelen conducirnos a la misma situación como una tendencia hipercrítica hacia nuestro trabajo, la rigidez mental en el empleo de procesos o en la espera de resultados, la incapacidad para dilucidar cuándo disponemos de suficiente información para abordar el problema, etc. En general, estas actitudes suponen una aplicación descompensada de capacidades que empleadas en su justa medida pueden convertirse en una herramienta útil. Éste es uno de los aspectos en los que el profesor y sus acciones de control pueden desempeñar un papel determinante.

4. *Bloqueos de tipo cultural y ambiental*, ya que el conjunto de ideas y formas de pensar prevalentes en nuestro ambiente influyen del modo más sutil en nuestro modus operandi.

Entran a formar parte de nuestra estructura de pensamiento y dirigen, sin nosotros percibirlo, nuestra actuación hacia zonas que no son siempre fructíferas.

Si habitualmente no reflexionamos sobre la resolución de problemas, cuando solucionamos otro similar recaemos en muchos caminos sin salida. Sólo tras un número de repeticiones y si examinamos a fondo nuestros propios procesos mentales, el proceso de resolución de problemas comienza a ser ágil, claro y riguroso.

Además de lo dicho anteriormente existen tres pasos generales para desbloquearse. Éstos son:

- Reconocer que se está bloqueado y aceptarlo.
- Desechar el pánico.
- Hacer algo.

Los dos primeros pasos, aunque en un sentido trivial, son previos pues sólo un resolutor que ha dominado los sentimientos de pánico puede razonar productivamente para encontrar nuevas formas de abordar el problema.

Para tratar de hacer algo, se sugiere a los resolutotes que se pregunten:

- ¿Qué SÉ sobre el problema?
- ¿Qué QUIERO encontrar?
- ¿Qué puedo USAR que me pueda ayudar?
- ¿Puedo hacer una CONJETURA?
- ¿Puedo COMPROBAR lo que he encontrado?

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Muchos estudios han mostrado que los buenos resolutores de problemas se caracterizan por tener un conjunto de estrategias generales o heurísticas que guían su acción y que les ayuda a superar dificultades que van encontrando durante el proceso de resolución.

Las estrategias nos permiten transformar el problema en una situación más sencilla y que sepamos resolver.

Vamos a analizar algunas de las más frecuentes estrategias de resolución de problemas, puesto que cuantas más conozcan nuestros alumnos más y mejor preparados estarán para resolver problemas. Porque, aunque los procesos mentales tengan mucho de subjetivo por su propia naturaleza, sí hay ciertas pautas generales que todos podemos manejar.

Se debe tener en cuenta que muy pocos problemas se resuelven utilizando una única estrategia, en general se necesitará la utilización de varias.

Las estrategias son líneas de pensamiento que ponemos en juego cuando queremos resolver un problema. Por tanto, dependen de:

- Conocimientos previos.
- Relación con los otros temas.
- Similitud con otros problemas.

Las estrategias se componen de heurísticos, considerados como procesos específicos de pensamiento que se ponen en juego cuando se desarrolla una estrategia. Entre estos heurísticos, destacamos los siguientes:

1. Razonamiento regresivo o considerar el problema resuelto.

A veces ocurre que un problema se ve mejor cuando se mira desde otra perspectiva distinta. Si te colocas en la situación final y vas retrocediendo hasta la inicial, el camino es, a veces, más claro.

En el proceso de análisis se admite como verdadero lo que hay que demostrar o, dicho de otra forma, como hecho lo que el problema pide que se haga. El método consiste en buscar de qué antecedente se puede derivar el resultado que queremos conseguir, después de qué antecedente se puede deducir el antecedente y así sucesivamente hasta que se encuentra un enunciado que se puede considerar como verdadero. Este proceso también se llama *solución hacia atrás*.

Partiendo de una verdad se van deduciendo otras verdades hasta que se llega a la pedida en el problema.

Se utiliza en los casos en los que conocemos el resultado final y el problema consiste en determinar el conjunto correcto de operaciones que nos llevará desde el estado inicial hasta el objetivo.

Al imaginar el problema resuelto aparecen los datos más cercanos a lo que buscamos y más fácilmente encontramos el camino desde donde estamos hasta donde queremos llegar.

Ejemplo: ¿Cómo se pueden medir exactamente 6 litros de agua si sólo se tienen dos recipientes de 9 y 4 litros respectivamente?

Supongamos que el problema está resuelto, es decir, tenemos 6 litros de agua en el recipiente mayor. La pregunta es ¿qué situación anterior podría producir que tuviésemos exactamente 6 litros en él?. Una posibilidad es la siguiente: tener el recipiente grande lleno y el pequeño con un litro de agua. Si llenásemos completamente el pequeño con agua del grande, le quitaríamos a éste 3 litros, quedándonos 6. y de nuevo, ¿de qué situación anterior se pueden derivar la situación “tener el recipiente grande lleno y un litro de agua en el recipiente pequeño”?. Esta situación es análoga a tener 1 litro en el grande. En este momento hemos encontrado una situación que se puede resolver: llenamos el recipiente grande y lo vaciamos dos veces en el pequeño, así obtendremos un litro en el grande y podremos invertir el proceso.

Ejemplo: Calcular el valor de x en la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{\frac{8+x}{3}+9}{2}+7}{3}-4=2$$

Si el resultado es 2, eso quiere decir que las fracciones vale 6. De esa forma, al restarle 4 queda 2. Por tanto:

$$\frac{\frac{\frac{8+x}{3}+9}{2}+7}{3}=6$$

El denominador es 3. Como el resultado es 6, el numerador tendrá que ser 18.

$$\frac{\frac{8+x}{3}+9}{2}+7=18$$

Siguiendo de la misma forma tenemos que la fracción tiene que valer 11, entonces el numerador (al ser el denominador 2) tiene que ser 22:

$$\frac{8+x}{3}+9=22$$

Siguiendo de la misma forma tenemos que la fracción tiene que valer 13, entonces el numerador (al ser el denominador 3) tiene que ser 39:

$$8+x=39$$

De lo que deducimos que $x=31$

2. Particularizar y generalizar.

Particularizar y generalizar son dos procesos concretos que ayudan al razonamiento matemático, y que son de gran valor a la hora de abordar un problema.

La **particularización** consiste simplemente en concentrar nuestra atención en algunos ejemplos para entender mejor el significado de la pregunta. Los ejemplos elegidos deben ser casos particulares de una situación más general que se plantea en el problema, y en un principio no nos resolverán el problema mismo, pero nos darán gran confianza y nos formarán una idea de lo que va pasando.

Es una de las mejores estrategias para los principiantes, pues sirve para adquirir confianza, y en otros casos proporciona ayuda en los atascos y bloqueos y nos permite, manipulando los datos, entrar en materia.

La particularización puede tener tres vertientes, es decir, la manera de escoger nuestros ejemplos puede ser:

- *Aleatoriamente*, para hacerse una idea del significado del problema.
- *Sistemáticamente*, para preparar el terreno a la generalización.
- *Ingeniosamente*, o sea, con astucia, para comprobar la generalización.

Las **generalizaciones** constituyen el auténtico soporte de la matemática. Los casos particulares pueden ser valiosos, pero el resultado verdaderamente matemático es el resultado general.

El proceso de generalización comienza en cuanto se intuye un cierto esquema general subyacente, pero que todavía no se puede explicar con claridad. Un buen estudio de los casos particulares nos facilitará el camino de la generalización.

La generalización responde a tres preguntas. Podemos decir que generalizar significa descubrir alguna ley que nos indique:

- **Qué** parece ser cierto (una conjetura).
- **Por qué** parece ser cierto (una justificación).
- **Dónde** parece ser cierto. Es decir, plantearse un problema más general (otro problema).

Está claro que a lo largo del camino que nos lleva de la particularización a la generalización nos encontraremos a menudo atascados. En estas ocasiones, habrá que volver hacia atrás, hacerse nuevas preguntas, buscar nuevas particularizaciones y, lo que es más importante, no desanimarse nunca.

Ejemplo: ¿Cuál es el resultado de sumar los cubos de los 15 primeros números consecutivos?

Si no se conoce la respuesta, el primer intento debe ser averiguar qué ocurre en algunos casos particulares:

- $n = 1 \Rightarrow 1^3 = 1$
- $n = 2 \Rightarrow 1^3 + 2^3 = 9$
- $n = 3 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$
- $n = 4 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
- $n = 5 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$

Observamos que los resultados de sumar cubos son cuadrados. Además, estos cuadrados corresponden al cuadrado de la suma de los números que elevamos al cubo. Generalizando, podemos inducir que:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$$

Luego $1^3 + 2^3 + ... + 15^3 = (1 + 2 + ... + 15)^3 = 1728000$

Ejemplo: Al comprar un televisor tienes un descuento del 35%, pero, al mismo tiempo, tienes que pagar unos impuestos del 16%. ¿Qué prefieres, que aplicasen primero el descuento o el impuesto?

Después de haberlo leído y entendido, lo más natural es particularizar, es decir, elegir un artículo con un determinado precio, y hacer los dos cálculos: primero el descuento, y a continuación, primero el impuesto: A la hora de elegir nuestro caso particular, es muy normal empezar por un artículo que cueste 100 euros:

Primero el descuento:

$100 - (35\% de 100) = 100 - 35 = 65$ euros

$65 + (16\% de 65) = 65 + 10{,}40 = 75{,}40$ euros

Primero el impuesto:

$100 + (16\% de 100) = 100 + 16 = 116$ euros

$116 - (35\% de 116) = 116 - 40{,}60 = 75{,}40$ euros

El resultado obtenido nos sorprende a primera vista: ¡da lo mismo!. ¿Ocurrirá igual con otro precio?. ¡Prueba!. Es importante recordar que buscamos una ley general. Una vez que nos aseguramos de que el resultado se va repitiendo, hagamos los cálculos de otra manera:

Para esto observamos que:

a) restar el 35% del precio equivale a pagar el 65%, es decir, pagar 0,65 veces el precio.
b) Añadir el 16% del precio equivale a pagar 1,16 veces el precio.

Y aplicando esto, tenemos:
Primero el descuento: $1{,}16 \cdot (0{,}65 \cdot 100) = 75{,}40$ euros
Primero el impuesto: $0{,}65 \cdot (1{,}16 \cdot 100) = 75{,}40$ euros

Y aquí ya vislumbramos una cierta estructura. Sólo queda generalizar.

Estudiemos ahora qué ocurre con un artículo que cuesta P pesetas:
Primero el descuento: pagaremos $1{,}16 \cdot 0{,}65 \cdot P$ euros.

Primero el impuesto: pagaremos $0{,}65 \cdot 1{,}16 \cdot P$ euros.

Y estos dos resultados siempre son iguales por la conmutatividad del producto.

Hemos visto un buen ejemplo de cómo la particularización, primero aleatoriamente, y luego ingeniosamente, nos ha permitido encontrar la estructura subyacente que nos ha llevado a la generalización. Ahora sólo queda reflexionar sobre el resultado: ¿se podrá aplicar a otros problemas?, ¿y si fueran dos descuentos sucesivos?, ¿podremos dar una receta para calcular descuentos sucesivos?, sabremos explicárselo a otras personas?.

3. Eliminación de términos técnicos. Definiciones.

La primera fase de resolución de problemas es la de "entender el enunciado". En esta fase es esencial "eliminar" o traducir aquellos términos que se desconozcan o que "encubran" el sentido del problema. El proceso de eliminación se basa en la definición. La definición de un término matemático cualquiera se formula con unos términos primitivos no definidos, o con términos derivados de los primitivos que ya hayan sido definidos. Cuando en el enunciado de un problema se sustituyen los términos técnicos por lo que significan, se suele despejar y aclarar qué es lo que se pide y cuáles son los datos.

Además esta "aplicación de las definiciones" suele proporcionar pistas para resolver el problema, convirtiéndose así en una estrategia más.

Evidentemente, la influencia que tiene en la comprensión del enunciado la sustitución de los términos por sus definiciones, expresa el grado de conocimientos que el resolutor tenga sobre el tema. Por ejemplo, para comprender el enunciado: "Determinar el punto de intersección de una recta dada y una parábola cuyo foco y directriz son dadas" ningún profesor de matemáticas necesita sustituir los términos parábola, foco y directriz por sus definiciones. Sin embargo, esta sustitución puede ser útil para un alumno de 4º de ESO que se enfrente al problema. Lo que sí necesitarán ambos es aplicar la definición para resolverlo.

4. Descomponer y recomponer el problema.

En la resolución de un problema es necesario primeramente comprenderlo y considerarlo como un todo, pero una vez vista la idea global suele ser útil ir descomponiéndolo gradualmente en problemas más sencillos.

El examen de cada uno de los elementos del problema: datos, incógnita y condición, o bien, hipótesis y conclusión, lleva a una descomposición del problema en elementos que si posteriormente se combinan de modo diferente, desemboca en una recomposición del mismo. Si esta nueva recomposición resulta más fácil de resolver que la inicial y aporta pistas para resolverla, la estrategia habrá tenido éxito.

Esta estrategia puede llevarse a cabo siguiendo los pasos siguientes:

- Descomponer el problema en subproblemas, llevando un registro de las relaciones existentes entre esas partes como parte del problema total.

- Resolver los subproblemas.

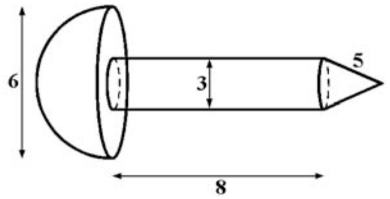
- Combinar los resultados hasta lograr una solución del problema global.

Son muchas las combinaciones que pueden hacerse con los elementos de un problema, pero las más usuales y las que dan mejores resultados son las siguientes:

- Conservar la incógnita y variar los datos y la condición.
- Conservar los datos y cambiar la incógnita y la condición.
- Cambiar a la vez la incógnita y los datos.

El problema reformulado que surge de la primera combinación puede parecerse a otro con la misma incógnita que haya sido resuelto anteriormente y que, por lo tanto, ayuda a resolver el problema inicial.

Ejemplo: Calcular el volumen de la siguiente figura.



La figura se puede descomponer en otras figuras de las que se conozcan el volumen; se calcula el área de la semicircunferencia, del cilindro y del cono y al final se suman todos.

5. Representaciones gráficas: dibujos, figuras, esquemas, grafos…

Es útil para comenzar, escribir o dibujar algo. La representación gráfica como estrategia de resolución consiste en el trazado de cualquier objeto que represente la situación propuesta en el problema. Según esto, consideramos que los gráficos no sólo son útiles en los problemas geométricos sino también en muchos otros. Una figura siempre ayuda a comprender mejor todas las partes del enunciado del problema.

A continuación exponemos algunos consejos para dibujar figuras geométricas:

- Los dibujos deben realizarse tan precisamente como sea posible. En general será suficiente con realizar cuidadosamente el dibujo a mano alzada.

- Es importante que los elementos de la figura se dibujen de manera que se cumplan las relaciones requeridas, y no lo es que se dibujen en el mismo orden en el que aparecen en el problema. Si, por ejemplo, se está resolviendo un problema relacionado con la trisección del ángulo, se debe dibujar un ángulo y transportarlo consecutivamente 2 veces más, ya que, como se sabe, no es posible trisecar un ángulo utilizando regla y compás.

- La figura no debe sugerir ninguna propiedad de la que no se esté seguro. Por ejemplo, los ángulos no deben parecer rectos ni las rectas perpendiculares si no lo son, dos segmentos no deben parecer iguales si no lo son, etc.

En cuanto a las representaciones gráficas de problemas no geométricos debemos recordar, por ejemplo, la utilidad de los diagramas de árbol en el cálculo de probabilidades o las representaciones gráficas de funciones.

6. Problemas relacionados.

Es muy difícil que cuando se resuelve un problema no recuerde, en algún aspecto, a otro que ya se ha resuelto. Es más frecuente que el resolutor recuerdo muchos problemas relacionados con el suyo y se le presente la duda de cuál elegir. Para decidir, se debe examinar atentamente la incógnita y tener en cuenta que, en general, los problemas que más ayudan son los que se relacionan con el inicial por medio de una generalización, una particularización o una analogía.

7. Notación.

La utilización de una buena notación tiene una importancia evidente si hablamos de problemas de matemáticas. No debemos olvidar que en la construcción de las matemáticas hubo grandes avances cuando se conseguía encontrar una notación adecuada.

En la gran mayoría de las ocasiones entender y resolver un problema pasa por un proceso de traducción de las distintas partes a un lenguaje simbólico.

Desde el punto de vista didáctico hay que tener en cuenta que la necesidad de utilizar un lenguaje simbólico, en particular el algebraico, es la causa de la mayoría de las dificultades de aprendizaje de los alumnos. Aprender un nuevo lenguaje siempre es difícil, y lo es mucho más si el alumno no encuentra ninguna razón para hacerlo. Por ello es muy importante que el alumno se encuentre con situaciones en las que la traducción a símbolos mejora la comprensión y facilita la resolución y que descubra la rapidez y elegancia del álgebra. El proceso de simbolización es uno de los contenidos más importantes del álgebra y como tal debería incluirse en los programas de estudios.

8. Analogía o semejanza.

La analogía es una herramienta que se utiliza en muchas situaciones cotidianas para resolver problemas. Podemos decir que una analogía es una similitud entre dos objetos o situaciones que hace que dichos objetos concuerden en algunas de las relaciones que guardan sus elementos.

La analogía puede ser útil en dos aspectos: podemos utilizar el método de resolución de un problema análogo para resolver el que nos ocupa, o bien podemos utilizar directamente el resultado de ese problema análogo. Puede suceder que el resultado no sea directamente aplicable al problema inicial por lo que será necesario reformarlo hasta que sea útil.

Ante la situación que nos ocupa nos podemos preguntar: ¿A qué nos recuerda?, o ¿Es como aquella otra?

Es bueno buscar situaciones semejantes a la propuesta. Al hacerlo, probablemente, surgirán procedimientos de ataque de dichas situaciones semejantes, que nos proporcionarán estrategias válidas para la que nos ocupa. Esta búsqueda será más fácil cuanta más experiencia tengamos en la resolución de problemas.

Esta estrategia suele ir asociada a la particularización y generalización.

Ejemplo: Con una caja de zapatos de medidas x, y, z, encuentra la expresión de su diagonal en función de las medidas anteriores.

Se resuelve fácilmente viendo la analogía entre el plano (donde se conoce el teorema de Pitágoras) con el espacio.

9. Reducción al absurdo y demostración indirecta.

La reducción al absurdo es un método de demostración que demuestra la falsedad de una afirmación deduciendo de ella una falsedad manifiesta.

Es una manera de razonar para demostrar que una situación, P, determinada es verdadera. Suponemos que no lo es, es decir, que se verifica “o P” Deducimos consecuencias correctas de “no P” y nos encontramos con una que supone un absurdo, que no se tiene en pie. Por tanto, nuestro punto de partida “no P” es falso, es decir, P es verdadero.

La demostración indirecta establece la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la afirmación contraria.

En muchas ocasiones ambos métodos se combinan, ya que para demostrar la falsedad de la afirmación contraria en el método de demostración indirecta, se utiliza el método de reducción al absurdo.

Con esta estrategia es fácil demostrar que existen infinitos números primos.

10. Simulación.

En la resolución de problemas sobre azar, la simulación es una estrategia muy útil al alcance de todos. Si tratamos de averiguar cuál es la probabilidad de que un suceso ocurra al realizar un experimento aleatorio y no sabemos cómo, lo mejor y más fácil es realizar el experimento y ver qué ocurre. Este método está basado en la Ley de los grandes números y, como sabemos, es necesario realizar muchas pruebas para que se pueda aplicar la ley. Sin embargo, aunque no sea posible realizar un número elevado de pruebas, la realización del experimento ayudará a entenderlo mejor.

11. Ensayo y error.

Consiste en realizar los siguientes pasos:

- Elegir un valor (resultado, operación o propiedad) posible.
- Llevar a cabo con éste valor las condiciones indicadas por el problema.
- Probar si hemos alcanzado el objetivo buscado.

Esta estrategia puede ser puesta en práctica de formas diferentes, éstas son:

- Ensayo y error fortuito: Realizado sin pautas o al azar.
- Ensayo y error sistemático: Los valores no se eligen a la aventura, sino de manera ordenada, de forma que eliminemos las posibles repeticiones de ensayo agotando las soluciones posibles hasta encontrar lo que buscamos.
- Ensayo y error dirigido: En él contrastamos cada respuesta para ver si estamos más cerca o más lejos del objetivo buscado.

Ejemplo: Calcular un número que al elevarlo al cuadrado y restarle el número buscado obtenemos 210.

Se va probando con números, vamos viendo si se van quedando por debajo o por encima de la solución, hasta que vemos que la solución es 15.

Para conseguir que el profesor facilite el aprendizaje de estrategias generales de resolución de problemas, es necesario estudiar e incorporar en un proceso de enseñanza-aprendizaje qué métodos de enseñanza pueden ser más apropiados para conseguir este objetivo.

JUEGOS Y PROBLEMAS DE INGENIO.

En la tarea de iniciar a los jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionantes.

Es interesante dedicar algunas clases a juegos y problemas de ingenio. Son los que más atraen a los alumnos y con ellos se divierten con las matemáticas.

Hay una infinidad de libros y páginas de internet dedicados a ellos. Aquí vamos a enunciar una pequeña muestra..

Ejemplos.

1. Escribe las cifras que faltan (se han tenido que usar del 1 al 9 sin haberlas repetido) para que los lados del triángulo sumen 20.

Una solución es, empezando donde está el 2 para arriba, 2, 6, 7, 5, 3, 4, 8, 1, 9.

2. Mi gran afición es la lectura. Ahora estoy leyendo un libro de menos de 150 páginas. Las cifras de la página que estoy leyendo suman el doble que las cifras de la página siguiente. ¿De qué página se trata?

Solución. Las páginas 79 y 80, ya que sumando 7 y 9 se obtiene 16, el doble de 8.

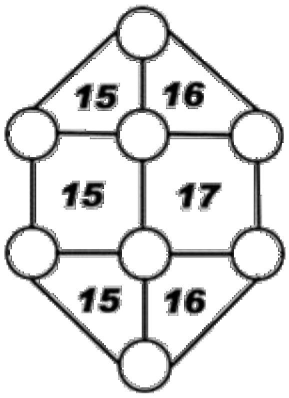
3. ¿Cómo se colocan 9 bolas en 4 cajas de forma que cada una tenga un número impar de bolas y distinto del de cada una de las otras tres?.

La solución son tres cajas pequeñas, conteniendo 1, 3 y 5 bolas respectivamente. Estas tres cajas se hallan dentro de una caja mayor que las contiene a todas (9).

4. ¿Cómo podemos hacer para que mediante cinco cifras impares obtengamos una suma de 20?

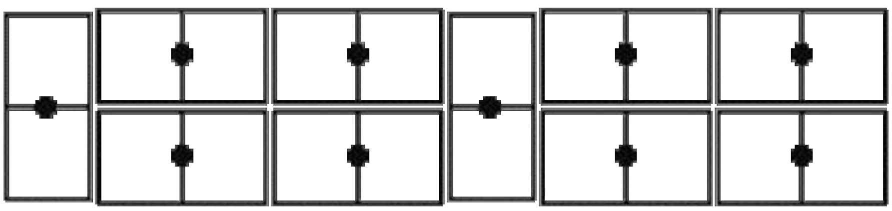
La solución es $1 + 1 + 5 + 13 = 20$

5. Situar las cifras del 1 al 8 en los círculos (una cifra diferente en cada uno de ellos) de manera que los tres círculos-vértices de los triángulos y los cuatro círculos-vértices de los cuadrados sumen las cantidades que se indican en su interior.

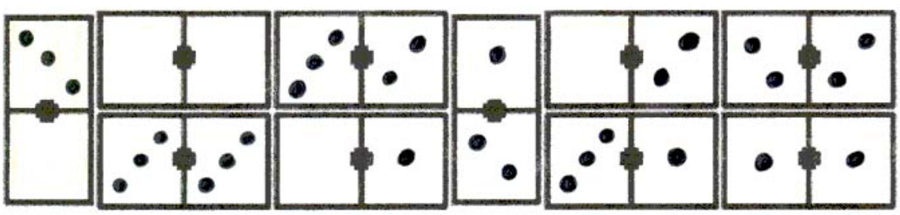


La solución, de arriba abajo es 7; 3, 5, 4; 1, 6, 2; 8

6. Colocar las diez fichas más pequeñas del dominó (3-3, 3-2, 3-1, 3-0, 2-2, 2-1, 2-0, 1-1, 1-0, 0-0) formando la siguiente composición, de modo que todas las columnas verticales sumen lo mismo, y las dos filas horizontales también.



La solución es:



7. En el siguiente cuadrado hay cuatro números. Sitúa los doce restantes (2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15) en las casillas vacías que quedan de forma que dos números consecutivos no deben ocupar casillas contiguas o vecinas ni horizontal, ni vertical, ni diagonalmente.

		1	
3		16	5

La solución por filas, de arriba abajo es: 14, 2, 7, 11; 8, 10, 4, 13; 15, 12, 1, 9; 3, 6, 16, 5.

PRECEPTOS A TENER EN CUENTA POR LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

Cualquier profesor que se decida a trabajar la resolución de problemas de forma sistematizada debe, en primer lugar, ser consciente de la importancia que su propio papel tiene a lo largo de todo el proceso. Y es un papel que empieza desde la elección misma del problema que se va a resolver.

Resulta muy importante que el profesorado inicie a los alumnos y alumnas en las técnicas básicas de resolución de problemas y en las estrategias de pensamiento inherentes a la misma. Para valorar y orientar la fase de resolución en la que se encuentra cada alumno, será fundamental que el profesor prevea las distintas maneras de afrontar el problema, las dificultades que pueden presentarse, las diversas soluciones con distinto grado de generalidad que admite y los diferentes lenguajes que pueden utilizarse en cada momento.

Siguiendo al profesor P. Puig Adam recogemos aquí diez preceptos a tener en cuenta por todo profesor de Matemáticas a la hora de plantear y resolver problemas.

1. *La didáctica no ha de ser rígida, sino susceptible de adaptarse al alumno.*

No se hace sino resaltar el papel que el alumno juega en todo proceso de aprendizaje.

Las diferentes aptitudes y actitudes de los alumnos obliga a tender a una enseñanza individualizada.

Todo ello ha de tenerse en cuenta, sobre todo, en la E.S.O. y niveles inferiores.

2. *Tener en cuenta origen y evolución histórica de los conceptos matemáticos.*

Nunca se debe presentar la Matemática al alumno como algo aislado. Fundamentalmente, se han de plantear problemas abiertos que sirvan para reflejar soluciones a cuestiones que surjan en el entorno del alumno. Es ahí donde una buena selección de problemas juega un papel fundamental y motivador.

Hay que mostrar al alumno cómo la investigación suele ir dirigida a resolver necesidades reales y que la abstracción es una etapa final en la evolución de un proceso de aprendizaje.

3. *Presentar a la Matemática como una unidad relacionada con la sociedad.*

La enseñanza de la Matemática ha de contribuir a la integración del alumno en la sociedad. De ahí que se le presenten problemas reales y con datos actualizados.

Hay que presentar situaciones problemáticas que se parezcan, en su riqueza y complejidad, a situaciones reales, de tal forma que la experiencia que los estudiantes obtengan en clase pueda ser transferida a otros contextos.

4. *Graduar los niveles de abstracción.*

El alumno ha de adquirir paulatinamente, conforme a sus conocimientos y actitudes, el nivel de abstracción oportuno. Esto ha de hacerse de un modo gradual y resolviendo problemas de dificultad creciente.

5. *Guiar al alumno tanto en su actividad creadora como descubridora.*

Hay que procurar que el alumno no acepte de modo pasivo los conocimientos matemáticos. Para ello es fundamental la labor del profesor en el descubrimiento por el alumno de los conceptos matemáticos y en la evolución de su actividad creadora.

El profesor ha de guiar y controlar la actividad del alumno.

6. *Motivar la actividad creadora del alumno.*

El profesor no ha de ser únicamente guía de la actividad creadora del alumno, sino que también ha de motivarle para que esa actividad surja y se manifieste con continuidad.

El profesor ha de conocer qué intereses tiene el alumno y ponerse a su nivel oportunamente. De ahí la necesidad que el profesor tiene de estar en contacto con los alumnos para comprender sus inquietudes y necesidades.

7. *Inculcar la autocorrección.*

Hay que sugerir al alumno que debe comprobar los resultados obtenidos. Además se le debe guiar razonadamente en los posibles errores de un mal resultado final; no se debe responder al alumno con los lacónicos bien o mal.

Una expresión razonada de los errores ocasionará una autocorrección de gran utilidad para posteriores ejercicios.

8. *Obtener destreza en la obtención de soluciones antes de automatizarlas.*

El alumno ha de razonar el camino que conduce hasta el algoritmo. Éste ha de ser únicamente una herramienta.

Se debe comprender el problema antes de automatizarlo. De lo contrario el aprendizaje resulta frío e insulso.

9. *La expresión del alumno ha de ser reflejo, lo más exacto posible, de su pensamiento.*

La enseñanza de la Matemática contiene recursos suficientes para que el alumno se exprese con rigor, no siendo ésta su única finalidad. Al fin y al cabo hablamos mal pero nos entendemos.

La exposición de la resolución de un problema puede permitir al alumno expresarse con claridad, brevedad y precisión.

Una buena formación matemática suele conllevar las anteriores virtudes.

10. *Evitar al alumno el desaliento.*

Hay que valorar adecuadamente los progresos efectuados por el alumno. Ello amortiguará el desaliento que inevitablemente surgirá en otras ocasiones.

Es imprescindible, pues, que el profesor gradúe las actividades para que siempre algunas estén al alcance del alumno.

Quizás la falta de éxitos es la que provoca esa aversión hacia la Matemática que sufren muchos alumnos (y profesores).

En cuanto a la labor del profesor respecto a la resolución de problemas, Lester (1983) da las siguientes sugerencias:

ACCIONES DE ENSEÑANZA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	
Acción	Propósito
ANTES	
1. Leer el problema... Discutir palabras y frases que no puedan entender los estudiantes.	Ilustrar la importancia de la lectura cuidadosa; atención al vocabulario especial.
2. Emplear discusiones de toda clase para enfatizar la importancia de la comprensión del problema.	Enfocar los datos importantes, clarificación del proceso.
3. (Opcional). Discusión de las posibles estrategias para resolver el problema.	Obtener ideas para posibles caminos para resolver el problema.
DURANTE	
4. Observar y cuestionar los estudiantes dónde están.	Diagnosticar solidez y debilidad.
5. Proveer sugerencias según se necesite.	Ayudar a los estudiantes a superar bloqueos.
6. Proveer extensiones del problema, si es necesario.	Desafiar a los que acaban pronto a generalizar.
7. Requerir a los que obtienen una solución a "responder a la cuestión".	Procurar que los estudiantes den un vistazo a su trabajo y se aseguren de que tiene sentido.
DESPUÉS	
8. Mostrar y discutir soluciones.	Mostrar y nombrar diferentes estrategias.
9. Relacionar con problemas previamente resueltos o animar a resolver extensiones.	Demostrar la aplicabilidad general de las estrategias de resolución de problemas.
10. Discutir características especiales como dibujos.	Mostrar cómo pueden influir las características en la aproximación.

¿CÓMO CREAR PROBLEMAS PARA LOS ALUMNOS?

Vamos a dar algunas sugerencias para que el profesor pueda crear problemas interesantes para sus alumnos. Algunas se inspiran en un trabaja presentado por Thomas Butts en el IV Congreso Internacional de Educación Matemática en agosto de 1980.

- Proponer una serie de ejercicios relacionados que sean ejemplos de algún patrón general. Éstos, aunque son ejercicios, conllevarán a un análisis más profundo por las interrelaciones que existen entre ellos.

- Proponer el recíproco de una pregunta común. En términos generales, el recíproco de un ejercicio puede ser un problema interesante. Además, este tipo de problemas interesa porque frecuentemente existen varias soluciones, y éste es el caso más general en matemáticas.

- Proponer problemas que requieren un ejemplo del alumno. Éstos, bien utilizados, pueden encaminar al estudiante hacia el descubrimiento de relaciones importantes en la matemática. Por otra parte, la gran variedad de respuestas a algunos de ellos tiende a desfavorecer a aquel alumno que memoriza sin entender.

- Proponer un problema con datos realistas. Este punto conjuntamente con el siguiente, nos guían hacia el mejor contexto de los problemas. El enunciado de los problemas debe hacerse en un contexto que tenga interés para el alumno. Hay gran variedad de personalidades en cualquier grupo de estudiantes, pero hay dos contextos que han mostrado ser de gran motivación: el más realista y el más imaginativo.

- Proponer un problema donde la incógnita sea algo que, en la realidad, se esperaría que fuera desconocida.

- Proponer un problema donde la incógnita sea algo que una persona verdaderamente tendría motivo de averiguar.

- También forman parte del realismo aquellos problemas que contienen datos extraños o insuficiente información. En la práctica casi todo problema se nos presenta en un contexto envuelto en datos que no tienen nada que ver, o análogamente, donde nos faltan datos para obtener una solución determinada.

- Para animar a la investigación podemos proponer en forma de pregunta un problema que no tienen ninguna solución.

- Proponer un problema imaginativo. Los problemas realistas y los problemas imaginativos son los más indicados para provocar la curiosidad e interés del alumno.

Finalizando, y como resumen podemos señalar que los que buscamos es propone un problema de tal manera que el alumno se sienta motivado para resolverlo, lo entienda y recuerde luego el concepto o método pertinente, y aprenda así algo del arte de resolver problemas, que le servirá tanto en sus estudios posteriores como en las relaciones que hará entre sus estudios y los problemas que enfrentará en la vida real.

BIBLIOGRAFÍA

Aventuras matemáticas, Miguel de Guzmán, Ed. Labor, 1986.

Cómo plantear y resolver problemas, Polya G..Ed. Trillas, Mexico.1965 (Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Prees en 1945).

Matemáticas y Razonamiento Plausible, Polya, G. , Tecnos, Madrid 1966 (Versión en español de Mathematics and Plausible Reasoning publicada por Princeton University Press en 1954).

Temas de oposiciones a profesores de enseñanza secundaria Tomo 3, Braulio de Diego, Agustín Llerena y Francisco Padilla, Editorial Deimos.

Oposiciones Secundaria- Matemáticas, Temario específico, www.eltemario.com.

Temario de oposiciones de Matemáticas, Ed. Cen.

Temario de oposiciones de Matemáticas, Ed. Cede.

http://64.233.183.104/search?q=cache:LTPXbh7y1HEJ:www.unizar.es/ttm/2004-05/EstrategiasRosaViar.doc+resolucion+problemas+matematicos+filetype:doc&hl=es

www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material_docentes/a**matematica**/resolucion_problemas.doc

http://www.matematicas.profes.net/

http://www.galeon.com/tallerdematematicas/problemas.htm

http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v19n2p297.pdf

http://www.matesxronda.net/

http://www.iespana.es/cryssta/juegos_de_ingenio.htm

http://www.sectormatematica.cl/juegmat.htm

©CiberEduca.com 2005
La reproducción total o parcial de este documento está prohibida
sin el consentimiento expreso de/los autor/autores.
CiberEduca.com tiene el derecho de publicar en CD-ROM y
en la WEB de CiberEduca el contenido de esta ponencia.

® CiberEduca.com es una marca registrada.
©™ CiberEduca.com es un nombre comercial registrado