

*Este trabajo se lo dedico a mis Padres:
Nélida y Juan. Y también a Diana.
Con todo cariño y el mejor de mis recuerdos...*

Prólogo

Los resultados que aquí se presentan contienen trabajos originales obtenidos en el *Laboratorio de Optica del Departamento de Fisica de la Universidad Nacional del Sur* (Bahía Blanca - Argentina), en el *Centro de Investigaciones Opticas (CIOp, La Plata - Argentina)*, en el *Moore School and Complex Media Laboratory, Faculty of Engineering and Applied Sciences of the University of Pennsylvania* (Philadelphia - USA) y en el *Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada (CICESE, Ensenada - México)*. Representan el inicio de mi carrera en la investigación científica en el área de interacción entre ondas y geometría, las cuales son de interés básico en la actualidad y cuyas aplicaciones tecnológicas aún no han sido del todo explotadas.

Es digno mencionar aquí la gran colaboración recibida por el **Prof. Dr. Mario Garavaglia** (*Depto Física, Facultad de Cs. Exactas, Universidad Nacional de La Plata y CIOp*), quien me dirigió a la largo de la presente tesis y quien ha sido referencia importante en varios de los resultados obtenidos. También debo nombrar a otros investigadores que pude conocer de diferentes lugares, y con quienes actualmente mantengo algún tipo de colaboración: **Prof. Dr. Dwight L. Jaggard** (*University of Pennsylvania, USA*), **Dra Tatiana Alieva** (*Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands* y *A. L. Mintz Radiotechnical Institute, Russia.*) y **Prof. Dr. Eugenio Méndez** (*CICESE, México*). Mención especial para el **Prof. Dr. Roberto Torroba** (*Depto Física, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata*) y el **Prof. Dr. Enrique Sicre** (*Depto Física, Universidad Nacional del Sur*), ambos del *Centro de Investigaciones Opticas* de La Plata, con quienes trabajé en el inicio de esta tesis.

El mayor de los agradecimientos para todos los anteriormente nombrados, porque su aporte ha permitido enriquecer mi formación científica.

Dado el actual interés de los objetos fractales como geometría de la naturaleza, es importante estudiar sus propiedades en la interacción con las ondas en general. Nos interesan aquí las ondas electromagnéticas, que es nuestra área tradicional de trabajo, pero los resultados pueden ser extendidos a ondas acústicas o cuánticas. Dado que todo esto representa el comienzo de una línea de trabajo mucho más general, damos también algunas posibles extensiones en las que estaríamos interesados en el futuro.

Mario Lehman
Bahía Blanca, 14/3/98

Agradecimientos

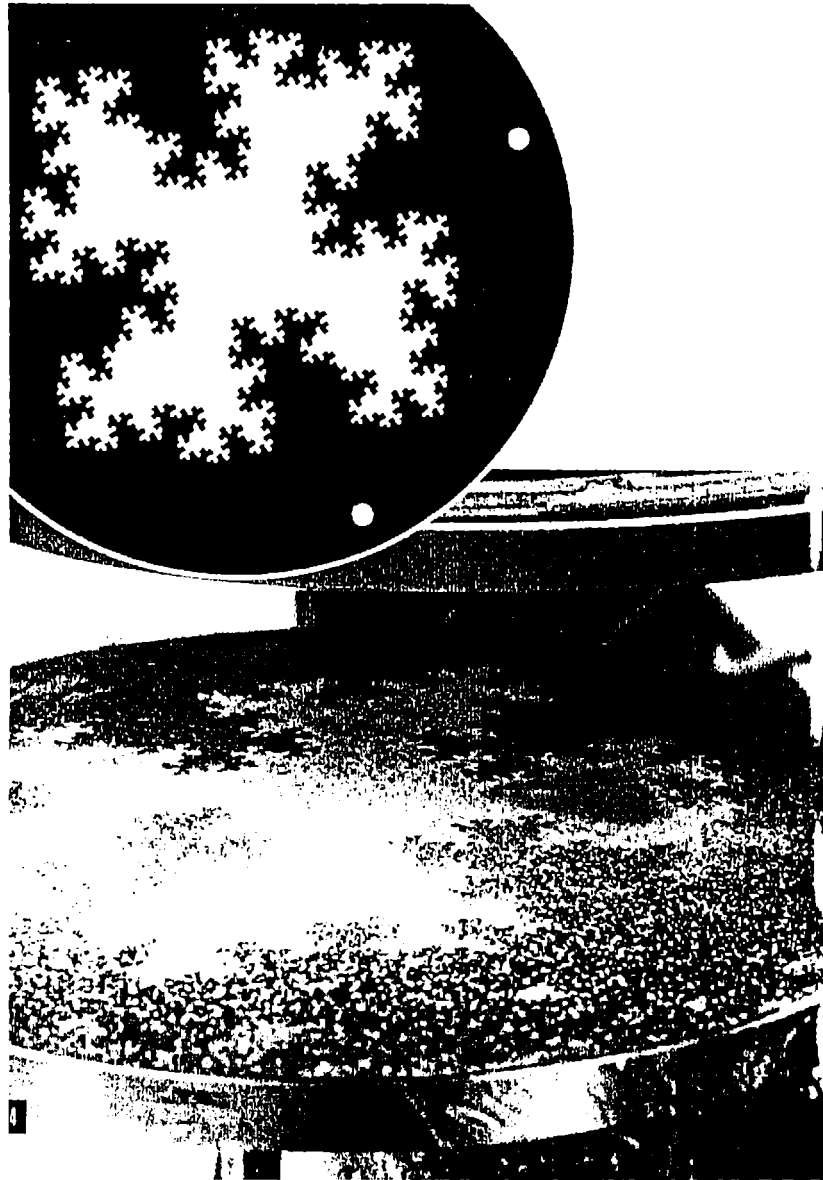
Hago extensivo mi agradecimiento a todas aquellas instituciones, en las cuales he participado de sus actividades, y al personal de las mismas que en mayor o menor medida prestaron su colaboración para llevar adelante mi trabajo. Ellas son: Departamento de Física de la Universidad Nacional del Sur, Centro de Investigaciones Ópticas, Faculty of Engineering and Applied Sciences y Centro de Investigación y Educación Superior de Ensenada.

Una mención especial también para quienes han sido jurados de esta tesis: Prof. Dr. Huner Fanchiotti, Prof. Dr. Carlos García Canal y Prof. Dr. Héctor Vucetich. Fueron los primeros en leerla y contribuyeron a mejorar su presentación.

Desde ahora y para siempre, muchas gracias a todos...

Advertencia al lector: Muchos de los gráficos, tablas y figuras han sido colocados en su forma original (como presentados a revistas de publicación internacionales), con escrituras en idioma inglés. A nuestro juicio, consideramos que esto no afecta la lectura de esta tesis.

© Hecho el depósito correspondiente por los derechos de autor.
Marzo de 1999, Bahía Blanca, Argentina.



El tambor fractal. Una membrana vibrando se sostiene a su borde por una forma fractal (arriba a la izquierda) en lugar de la clásica circular. Esto origina que los modos resonantes de vibración estén fuertemente localizados en el espacio, como puede observarse por el paso de un haz laser en paralelo y muy cercano a la membrana vibrante. (Bernard Sapoval, "Les Fractals", Editions Aditech, Paris, 1990)

INTERACCION DE ONDAS
ELECTROMAGNETICAS CON
ESTRUCTURAS FRACTALES

Lic. Mario Lehman
Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur (Bahía
Blanca, Argentina)
Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Exactas de la
Universidad Nacional de La Plata
Director: Prof. Dr. Mario Garavaglia (UNLP-CIOp)
Marzo de 1999

Indice de temas

	<i>Pág.</i>
INTRODUCCION GENERAL.	1
<u>CAPITULO I: <i>Introducción a los conceptos básicos utilizados en geometría fractal.</i></u>	
1 – Introducción.	5
2 - Teoría matemática básica.	5
Compacticidad. Conjunto de Borel. Transformación lineal. Funciones de Hölder y Lipschitz. curvas rectificables.	
2.1 - Medidas y distribuciones de masa.	7
Probabilidad y teoría de la medida. Medida de Lebesgue. Medida de Hausdorff. Propiedad de escalamiento.	
2.2 - Dimensión y co-dimensión.	10
Dimensión de Hausdorff-Besicovich. Dimensión de box-counting. Propiedades descables de una dimensión. Otras definiciones de dimensión.	
3 - Los fractales en la naturaleza y en la ciencia.	12
Referencias.	13
<u>CAPITULO II: <i>Método de generación de estructuras fractales con dominios periódicos y sus propiedades derivadas.</i></u>	
1 - Construcción de formas fractales.	16
1.1 - Auto-similaridad y auto-afinidad.	16
1.2 - Sistema de Funciones Iteradas (IFS).	18
Teorema del mapeo de contracción. Definición Teorema del Collage.	
1.3 - Algunos ejemplos de fractales.	20
2 - Conjuntos Fractales y Dominios Distribuidos en Forma Periódica.	21
2.1 - Conjuntos de Cantor.	23
Función Simple.	
2.2 - Generalización a otros conjuntos fractales regulares.	25
2.2.1 - Carpeta de Sierpinski.	26
2.2.2 - Triángulo de Sierpinski.	27
2.2.3 - Fractal de Koch.	29
2.3 - Conjuntos fractales construídos cíclicamente.	30
3 - Operaciones con conjuntos fractales.	31
3.1 - Producto cartesiano de Fractales.	31
3.2 - Intersección de Fractales.	32
4 - Aleatorización y cuasi-aleatorización.	33
5 - Autocorrelación de funciones fractales.	34
6 - Multifractalidad.	34
7 - Conclusiones y futuros desarrollos.	35

Referencias.	36
Bibliografía complementaria para los capítulos I y II	38

CAPITULO III: Resultados de la Teoría Escalar y aplicaciones al procesamiento óptico de la información.

1 - Estudios en las regiones de Fresnel y Fraunhofer.	45
1.1 - Determinación de la dimensión y otras propiedades por métodos ópticos.	45
2 - Región de Fraunhofer.	47
2.1 - Auto-similaridad del campo difractado.	51
2.2 - Auto-similaridad en orden.	53
2.3 - Auto-similaridad en dirección.	53
2.4 - Auto-similaridad compuesta.	54
3 - Región de Fresnel.	54
3.1 - Efecto Talbot.	55
3.2 - Transformada fraccional.	56
Referencias.	59
4 - Aplicaciones al procesamiento óptico.	61
4.1 - Estudio de superficies. Interferometría Speckle.	62
Referencias.	65
4.2 - Procesamiento de la Información. Speckle Modulado por Franjas de Young.	64
Referencias.	65
4.3 - Interferometría y obtención de estructuras fractales.	65
Referencias.	67
4.4 - Superposición de Imágenes y percolación.	68
Referencias.	69
4.5 - Entropía y fractales. Función de Entropía Electromagnética.	70
4.5.1 - Propagación de Haces-SGL en el espacio libre.	71
Referencias.	72
5 - Conclusiones y futuros desarrollos.	73
Bibliografía complementaria para el capítulo III.	75

CAPITULO IV: Resultados de la Teoría Vectorial y algunas de sus aplicaciones.

1 - Interacción de la radiación electromagnética con la materia.	78
1.1 - Efectos superficiales.	79
Plasmones superficiales. Fonones ópticos superficiales.	84
Referencias.	84
2 - El problema general de scattering electromagnético.	84
Referencias.	86
3 - Reflexión y transmisión en una interface.	88
3.1 - Relación con la reflexión y transmisión en electromagnetismo.	88
3.2 - Método de impedancia superficial variable.	89
3.3 - Cálculos usando la función impedancia de entrada.	90
Modo TE. Modo TM.	

Referencias.	93
4 - Multicapas y distribución geométrica.	94
4.1 - Cálculo de la intensidad.	95
4.2 - Impedancia de entrada de un film.	96
4.3 - Grado de auto-similaridad en orden de la distribución intensidad.	97
Referencias.	101
5 - Efectos no-especulares.	103
5.1 - Corrimiento Angular.	105
5.2 - Corrimiento Lateral .	106
Referencias.	107
6 - Arreglos fractales y arreglos de factores.	109
6.1 - Antenas fractales. Antena de Sierpinski.	110
Referencias.	110
7 - Conclusiones y futuros desarrollos.	111
Bibliografía complementaria para el capítulo IV.	112
CONCLUSIONES GENERALES.	114

Introducción General.

La gran complejidad y estructura intrincada que caracteriza a los fractales, que pueden obtenerse a partir de ecuaciones matemáticas sencillas, los hace importantes en diversas aplicaciones artísticas y tecnológicas. Seguramente el lector los conoce a través de estructuras de tipo coloreadas con formas geométricas llamativas que habrá visto alguna vez. Con los algoritmos fractales se pueden crear modelos precisos de plantas, líneas costeras, montañas, nubes, sistemas biológicos y otros objetos naturales que serían difíciles, o hasta imposible, de modelar por otros medios. Durante la última década, científicos que trabajan en las más diversas áreas han reconocido que la mayoría de sus experimentos poseen una complejidad geométrica especial. La introducción de este tipo de formas geométricas se debe principalmente a la actividad de B. B. Mandelbrot, que llamó la atención hacia las propiedades geométricas particulares de dichos objetos y dió el nombre fractal para estas formas que podían caracterizarse por una dimensionalidad no entera (fractal).

Además, los fractales proveen una forma de almacenar la estructura detallada de objetos complejos en forma compacta y eficiente. Los objetos fractales han permitido a estudiar áreas relacionadas tales como el caos, el aparente comportamiento aleatorio de ciertas ecuaciones y la caracterización de sistemas muy complejos en su estructura.

Un área de investigación muy importante de la ciencia y la tecnología lo representa el estudio de las propiedades de diferentes objetos a través de su interacción con ondas. En particular, las ondas electromagnéticas constituyen un método de amplio desarrollo, principalmente caracterizadas por su muy poca (o casi nula, en algunos casos) interacción con el objeto de interés. Esta interacción y la distribución de intensidad que de ella resulta, ha dado lugar a diferentes tipos de estudios tales como difracción, scattering o propagación de ondas en un medio en particular. En estos tipos de desarrollos tiene importancia también la relación entre el tamaño del objeto a estudiar (o de sus componentes) y la longitud de onda de la radiación incidente. Interesa fundamentalmente obtener información del objeto a partir de la contenida en la onda reflejada o transmitida. Es decir, interesa relacionar la distribución de intensidad de la radiación electromagnética con las características y propiedades del objeto en cuestión. El estudio del speckle, ampliamente desarrollado en óptica es un ejemplo de esto, donde se relaciona la distribución estadística del campo dispersado por la correspondiente distribución de las rugosidades de una superficie.

La pregunta fundamental en nuestro caso es: por qué estudiar fractales y su interacción con ondas electromagnéticas?. Es sabido ahora que la geometría fractal es "lo normal", mientras que la geometría caracterizada por curvas regulares y "de buen comportamiento" o derivables son los casos "anómalos". Es importante entonces iniciar un estudio más profundo tendiente a estudiar la interacción de ondas con la geometría de un objeto, y ver en que forma esta geometría queda reflejada en las ondas resultantes que salen desde el objeto. Con esta finalidad desarrollamos primero algunos de los conceptos fundamentales para el estudio de la geometría fractal, que serán aplicados posteriormente en el área de la física en que estamos interesados.

En el capítulo I se presenta una introducción matemática básica a los conceptos

necesarios para utilizar en geometría fractal. Es enfocado en un sentido más general, ya que interesan en este caso los aspectos geométricos de diversos conjuntos, dando ejemplos que permiten vislumbrar las posteriores aplicaciones a conjuntos fractales. Los conjuntos y sus propiedades de medida y dimensión son introducidos en esta sección, así como casos más específicos como lo es la medida de Hausdorff y las posibles definiciones de dimensión, de las cuales la de Hausdorff-Besicovich y la de box-counting son ejemplos a tener en cuenta. Se muestran finalmente algunos ejemplos de fractales en la naturaleza que inspiraron las aplicaciones de estos objetos geométricos.

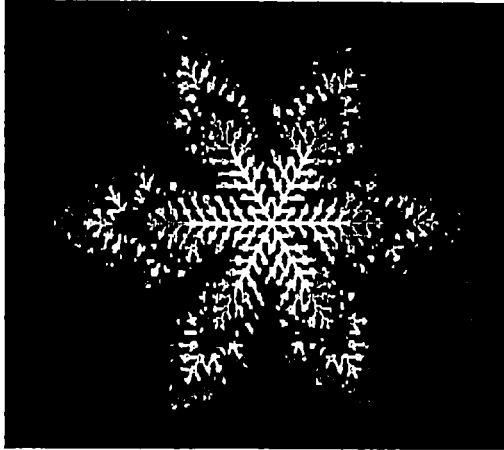
En el capítulo *II* se introducen conceptos más específicos y que hacen a la geometría fractal, tales como auto-similaridad y auto-afinidad, contracción y algunos teoremas relacionados que dan la base para el método de construcción con Sistemas de Funciones Iteradas (*IFS*), el cual fue principalmente desarrollado por Barnsley y que constituye un trabajo fundamental especialmente para nosotros porque puede relacionarse con métodos de procesamiento de imágenes. Luego se dan varios ejemplos de funciones o conjuntos fractales matemáticos, como el conjunto de Cantor, el de Koch o los de Sierpinski, los cuales son importantes porque sobre ellos se realizan los posteriores estudios de difracción y scattering por ondas electromagnéticas. La mayor parte del capítulo *II* está dedicada a los métodos de construcción que hemos desarrollado, utilizando distribuciones periódicas. También se trata el caso de conjuntos fractales que poseen diferente forma funcional de la frontera para los dominios involucrados, lo que da una estructura fina diferente en cada paso de la iteración. A partir de estos tipos de caracterización, introducir la aleatoriedad en un fractal es una cosa sencilla, sin embargo también pueden lograrse casos de cuasi-aleatoriedad si solo algunas de las componentes periódicas tienen este tipo de distribución. El construir conjuntos fractales con funciones rectangulares es el principal logro sin dudas y, si bien está relacionado con las *IFS* en los métodos de construcción, permiten dar una visión diferente sobre los conjuntos fractales. La posibilidad de filtrado de componentes es un caso especial de importantes consecuencias en el procesamiento óptico y electromagnético de la información.

Al final de los capítulos *I* y *II* puede encontrarse una extensa bibliografía que incluye los fundamentos y las más diversas aplicaciones de los objetos fractales.

El capítulo *III* contiene las aplicaciones a la óptica clásica, es decir la relacionada con una teoría escalar de los campos electromagnéticos, de los resultados obtenidos a partir de los métodos de construcción enunciados en el capítulo anterior, relacionando con las aplicaciones corrientes de los parámetros y conceptos desarrollados por otros autores, como T. Asakura y su grupo de trabajo, A. Laktakha y T. Alieva. Se muestran aquí diversos resultados experimentales con redes de difracción fractal, el estudio de la auto-similaridad en diversos casos tanto en la región de Fraunhofer como en la de Fresnel. En una segunda parte se desarrollan brevemente algunos temas que hemos estado estudiando y que en el futuro nos interesaría relacionar con los conceptos que aquí utilizamos referidos a geometría fractal. Estos ejemplos se refieren al estudio de superficies mediante métodos speckle y de microscopía óptica, aplicaciones al procesamiento óptico de la información, construcción de formas fractales mediante métodos interferométricos, superposición de imágenes con distribuciones aleatorias de elementos y formulación de entropía para el estudio de la propagación de haces

electromagnéticos en diversos medios.

El capítulo *IV* se refiere a las aplicaciones en el ámbito de una teoría vectorial. Comenzamos con una introducción a los fundamentos de la interacción entre la radiación y la materia, y mostramos una relación entre la geometría fractal y las excitaciones no lineales de una superficie que ha sido desarrollado por otros autores. Los aportes que hemos conseguido en este sentido tienen que ver con multicapas y superficies, utilizando métodos de impedancia de entrada de tales estructuras. Hemos relacionado en este sentido con resultados obtenidos por D. L. Jaggard y aplicaciones desarrolladas anteriormente por R. A. Depine. Dos temas importantes son finalmente considerados en este sentido, como es el caso de los efectos no especulares y antenas. En el primer caso relacionando con un fundamento de entropía que ya hemos publicado y en el segundo caso porque los métodos matemáticos que desarrollamos en el capítulo *II* también pueden ser aplicados al estudio de la radiación por antenas fractales. Este último tema ha sido principalmente estudiado por D. L. Jaggard y C. Puente en diversos trabajos.



CAPITULO I

INTRODUCCION A LOS CONCEPTOS BASICOS UTILIZADOS EN GEOMETRÍA FRACTAL

1. Introducción.

Introducimos aquí los conceptos necesarios sobre teoría de conjuntos y topología para el estudio de estructuras fractales. Se presentan teoremas y definiciones desde los aspectos básicos hasta, como compacticidad, conjunto de Borel y transformaciones lineales, hasta el concepto de medida, medida de Hausdorff, dimensión y co-dimensión. También se incluyen las propiedades deseables de una dimensión y algunas de las cuestiones planteadas en los trabajos que orientaron a las aplicaciones de fractales en la naturaleza.

2. Teoría matemática básica.

Desarrollamos a continuación algunos conceptos básicos sobre teoría de conjuntos y topología, de utilidad en la comprensión de los objetos fractales que aquí nos interesa. El estudio general se realiza en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n donde la distancia entre los puntos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ está definida como:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (1)$$

Definición 0. Una bola de centro en el punto \mathbf{x} y radio r se define mediante:

$$\mathbb{B}_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq r\} \quad , \quad (2)$$

para el caso estrictamente menor se dice que la bola es abierta. Este concepto se utiliza para la definición de conjunto abierto y conjunto cerrado como se muestra en la figura 1.

Compacticidad. Un conjunto Λ es compacto si cualquier colección de conjuntos abiertos que cubre a Λ (esto es, con la unión conteniendo a Λ) tiene una subcolección finita que también cubre a Λ . La intersección de cualquier colección de conjuntos compactos es compacto. Para una secuencia $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots$, la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$ es no vacía. Además, si $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$ está contenida en \mathbb{X} (conjunto abierto), entonces $\bigcap_{i=1}^k \Lambda_i$ también está contenida en \mathbb{X} para algún k .

Conjunto de Borel. Es un concepto matemáticamente importante, muy empleado en la teoría de fractales. Es la menor colección de subconjuntos de \mathbb{R}^n con las siguientes propiedades:

- a) todo conjunto abierto y todo conjunto cerrado es un conjunto de Borel.
- b) la unión (o intersección) de toda colección finita o numerable de conjuntos de Borel es un conjunto de Borel.

Sean \mathbb{X} e \mathbb{Y} dos conjuntos cualesquiera, entonces un mapeo, función o transformación f de \mathbb{X} en \mathbb{Y} asocia un punto $f(x)$ de \mathbb{Y} a cada punto x de \mathbb{X} . Una transformación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una similaridad si para una constante c y para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que: $|T(x) - T(y)| = c|x - y|$. Y en el caso que la transformación conserve las distancias y/o los ángulos se denomina una congruencia o isometría. Son ejemplos de congruencias las traslaciones $T(x) = x + a$, las rotaciones con centro en a tal que $|T(x) - a| = |x - a|$, la transformación identidad $I(x) = x$ y las reflexiones que mapean puntos a su imagen especular.

Transformación lineal. Es aquella función $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica:

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y) \quad , \\ T(\lambda x) &= \lambda T(x) \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de la forma $S(x) = T(x) + a$, tal que $T(x) = 0 \iff x = 0$ (esto significa que es no singular) y $a \in \mathbb{R}^n$, entonces $S(x)$ es llamada una transformación afín o una afinidad. En la figura 2 se pueden observar distintos ejemplos de transformaciones definidas sobre un conjunto de puntos \mathbf{A} .

Funciones de Hölder y de Lipschitz. Una función $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ es llamada una función de Hölder de exponente α si:

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha \quad x, y \in \mathbb{X}, c \text{ es alguna constante} \tag{4}$$

Si α puede tomar el valor 1 entonces f es llamada función de Lipschitz, y bi-Lipschitz si se cumple que:

$$c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y| \quad x, y \in \mathbb{X}, 0 < c_1 \leq c_2 < \infty \tag{5}$$

Curvas rectificables. Sea $\lambda(P)$ la longitud de la línea plana poligonal en el plano $x - y$, dada en forma paramétrica mediante la variable independiente t . Esta curva puede describirse mediante los puntos $[f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_{p-1})]$ donde $f(t_i) = [x(t_i), y(t_i)]$ y P es la secuencia finita $[t_1, t_2, \dots, t_p]$, que corresponde a los puntos medidos sobre la poligonal. Se dice que el arco es rectificable si el límite superior de los números reales $\lambda(P)$ cuando $p \rightarrow \infty$ es el número finito L que se llama entonces la longitud de la curva Γ , tal como se muestra en la figura 3. Supongamos que todos los elementos son de la misma longitud $\eta(p)$ y que los intervalos $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ son todos iguales para todo i . Entonces la secuencia P es equivalente a dar el número p de pasos de medida.

Si se tiene entonces un número N de pasos en la línea poligonal, tendremos que:

$$\lambda(p) = N(p) \eta(p) \tag{6}$$

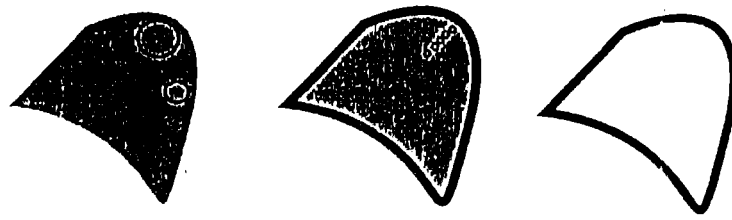


Figura 1 – De izquierda a derecha: conjunto abierto, con bolas contenidas en él, conjunto cerrado con un sucesión que converge hacia el límite y al final, límite del conjunto.

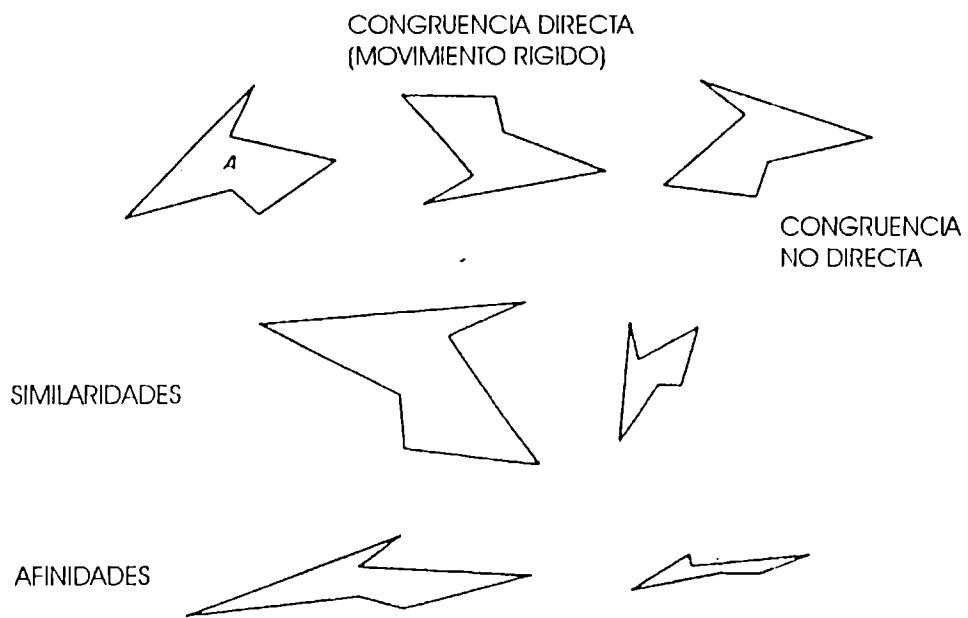


Figura 2 – El efecto de algunas transformaciones sobre el conjunto A .

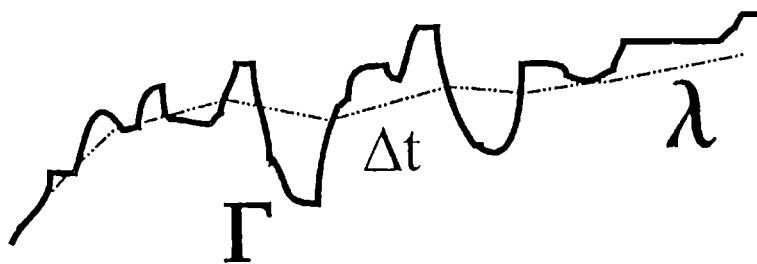


Figura 3 – Curva rectificable Γ , aproximada mediante la poligonal λ con intervalos Δt .

La rectificabilidad de la curva implica que:

$$\lambda(p) \rightarrow L \text{ cuando } p \rightarrow \infty, \text{ o sea cuando } \Delta t \rightarrow 0 \text{ y es finito.} \quad (7)$$

Sin embargo, existen curvas que no cumplen con la condición (7), o sea no son rectificables, y por lo tanto se presentan como curvas "anómalas". En la figura 4 se ilustra el comportamiento que es característico de aquellas curvas que son muy irregulares cuando se mide el perímetro el perímetro de la misma como función de la unidad de medida η (elementos de igual longitud) utilizada. Aquí se ha diferenciado entre la curva rectificable R , y la curva fractal F , que denomina a la otra clase. Como ejemplo de las curvas de tipo F podemos citar las costas en ciertas regiones (ver figura 5).

La suposición de Mandelbrot, en términos de una longitud característica l_0 y la pendiente de la curva F , es que:

$$N(p) [\eta(p)]^\Delta = l_0^\Delta \quad , \quad (8)$$

nos lleva a que la medición del perímetro en términos del parámetro η , y queda dado por:

$$\lambda_\eta = l_0^\Delta \eta^{1-\Delta} \sim \eta^{1-\Delta} \quad , \quad (9)$$

lo cual muestra que cuando el parámetro de escalamiento $\Delta > 1$, la longitud tiende a infinito para $\eta \rightarrow 0$. Un resultado más general queda expresado en términos del valor γ que divide el conjunto de números reales en dos subconjuntos de acuerdo a la medida de la poligonal λ_η . De acuerdo a la relación:

$$\lambda_{\eta,\gamma} = N_\eta \eta^\gamma \quad , \quad (10)$$

se tiene que:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lambda_{\eta,\gamma} = \begin{cases} 0 & \gamma > \Delta \\ cte & \gamma = \Delta \\ \infty & \gamma < \Delta \end{cases} \quad , \quad (11)$$

la operación de encontrar el parámetro de dimensión Δ del espacio es llamada la operación de medida de este espacio.

2.1. Medidas y distribuciones de masa.

Una medida es una manera de darle un parámetro a un conjunto (nos interesaremos por conjuntos incluidos en \mathbb{R}^n) para tener idea de tamaño relacionado con el mismo. Llamamos a μ una medida de \mathbb{R}^n si asigna un número no negativo (posiblemente ∞) a cada subconjunto de \mathbb{R}^n , tal que:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- b) $\mu(\mathbb{A}) \leq \mu(\mathbb{B})$ si $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$

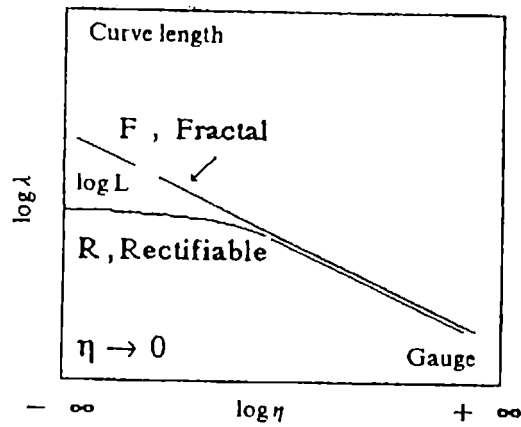


Figura 4 – Comparación de una curva fractal y una curva rectificable.
 (A. Le Méhauté, *Fractal Geometries: Theory and Applications*, pág. 5, CRC Press Inc., Boca Raton, 1991)

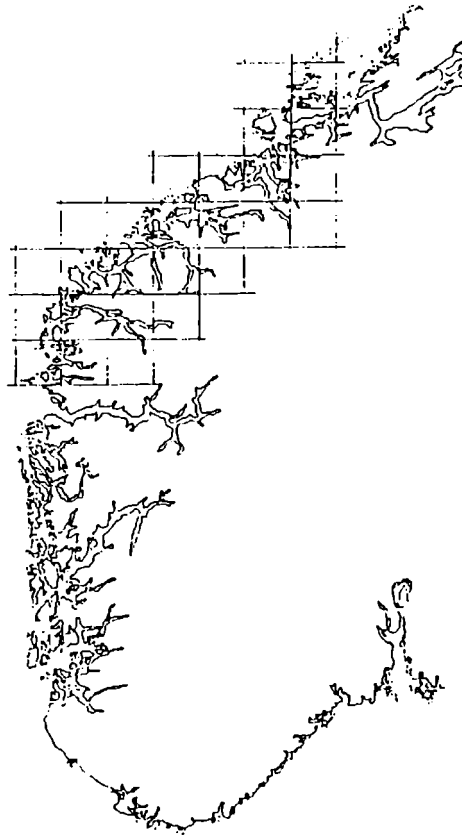


Figura 5 – Ejemplo de fractal en la naturaleza: las costas de Noruega.

c) Si $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ es una secuencia numerable (o finita) de conjuntos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Lambda_i) \quad , \quad (12)$$

y se da la igualdad cuando los Λ_i son conjuntos disjuntos.

Sea $\Lambda \subset \mathbb{B}$, el cual puede expresarse como una unión disjunta: $\Lambda = \mathbb{B} \cup (\Lambda \setminus \mathbb{B})$, con:

$$\mu(\Lambda \setminus \mathbb{B}) = \mu(\Lambda) - \mu(\mathbb{B}) \quad (13)$$

Para una secuencia de conjuntos de Borel que se incrementa: $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots$, se cumple que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i = \Lambda_1 \cup (\Lambda_2 \setminus \Lambda_1) \cup (\Lambda_3 \setminus \Lambda_2) \cup \dots$ y finalmente:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right) = \mu(\Lambda_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(\Lambda_{i+1}) - \mu(\Lambda_i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\Lambda_k) \quad (14)$$

Más generalmente, si para $\delta > 0$, Λ_δ es siempre un conjunto de Borel que se incrementa cuando δ decrece, esto es: $\Lambda_{\delta'} \subset \Lambda_\delta$ para $0 < \delta < \delta'$, entonces:

$$\lim \mu(\Lambda_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta > 0} \Lambda_\delta\right) \quad (15)$$

El soporte de una medida μ es el conjunto cerrado más pequeño \mathbb{X} tal que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{X}) = 0$. El soporte de una medida es siempre cerrado y \mathbf{x} está en el soporte si y solo si $\mu(\mathbb{B}_r(\mathbf{x})) > 0$ para todo radio positivo r . Se dice que μ es una medida sobre el conjunto Λ , si este contiene el soporte de μ . Una medida sobre un conjunto limitado de \mathbb{R}^n para el cual $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ es una distribución de masa y $\mu(\Lambda)$ es la masa del conjunto Λ .

Definición 1. Un espacio métrico (\mathbb{X}, d) es un espacio \mathbb{X} junto con una función de medida real $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, que mide la distancia entre pares de puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} en \mathbb{X} . Se requiere que d cumpla con las siguientes condiciones:

- a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$.
- b) $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \infty \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
- c) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- d) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$.

Definición 2. Una función $f : \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}_2$, desde un espacio métrico (\mathbb{X}_1, d) en otro espacio métrico (\mathbb{X}_2, d) es continua si para cada $\varepsilon > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{X}_1$, hay un δ tal que:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d_2(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon \quad . \quad (16)$$

Definición 3. Una transformación $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ sobre un espacio métrico (\mathbb{X}, d) es llamada un mapeo de contracción si hay una constante $0 \leq s < 1$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{X} \quad (17)$$

Definición 4. Sea (\mathbb{X}, d) un espacio métrico completo, entonces $\mathbb{H}(\mathbb{X})$ denota el espacio cuyos puntos son los subconjuntos compactos de \mathbb{X} , distintos del conjunto vacío. Nota: este será el espacio de los conjuntos fractales.

Incluímos a continuación algunos ejemplos clásicos que forman parte de la teoría de la medida, para desarrollar posteriormente el concepto de medida de Hausdorff, que es de utilidad en la teoría de fractales.

Probabilidad y teoría de la medida. La probabilidad es una medida; cumple con la definición anterior. Posee las siguientes propiedades:

a) Probabilidad condicional. dados dos acontecimientos \mathbb{A} y \mathbb{B} , la probabilidad de que ocurra \mathbb{A} habiendo ocurrido \mathbb{B} está dada por:

$$P(\mathbb{A}/\mathbb{B}) = \frac{P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}{P(\mathbb{B})} \quad (18)$$

b) Eventos independientes. Para dos eventos independientes \mathbb{A} y \mathbb{B} , o una secuencia de eventos \mathbb{A}_k independientes entre ellos, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) &= P(\mathbb{A}) P(\mathbb{B}) \quad , \\ P\left(\bigcap_{k \in J} \mathbb{A}_k\right) &= \prod_{k \in J} P(\mathbb{A}_k) \end{aligned} \quad (19)$$

siendo J un intervalo natural inicial.

Medida de Lebesgue. Si $\mathbb{A} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ es un sistema coordinado en \mathbb{R}^n , el volumen n -dimensional de \mathbb{A} está dado por:

$$vol^n(\mathbb{A}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \quad , \quad (20)$$

entonces, la medida n -dimensional de Lebesgue está dada por:

$$\mathcal{L}^n(\mathbb{A}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(\mathbb{A}_i) : \mathbb{A} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{A}_i \right\} \quad (21)$$

Medida de Hausdorff.

Existe una amplia variedad de dimensiones fractales, pero la definición de Hausdorff, basada en la construcción de Carathéodory, es la más antigua y la más importante. Tiene la ventaja de estar definida sobre cualquier conjunto y ser matemáticamente la más conveniente, así como de sencilla manipulación.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, el diámetro de U se define como:

$$|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\} \quad , \quad (22)$$

Esta es la mayor distancia de cualquier par de puntos de U . Si $\{U_i\}$ es una colección finita de conjuntos de diámetro δ que cubre a F $\left(\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)$, entonces $\{U_i\}$ es un δ -cubrimiento de F . Si $s > 0$, para cualquier $\delta > 0$ definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\} \quad (23)$$

Para una colección $\{F_i\}$ numerable de conjuntos de Borel disjuntos:

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) \quad (24)$$

La medida de Hausdorff generaliza las ideas familiares de longitud, área, volumen, etc. Puede demostrarse que para los subconjuntos de \mathbb{R}^n , la medida n -dimensional de Hausdorff está dentro de un múltiplo constante de la medida n -dimensional de Lebesgue (el volumen n -dimensional).

Propiedad de escalamiento. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ entonces

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \quad , \quad (25)$$

donde $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$. Estas propiedades de escalamiento se comparan con las usuales de longitud y área en la figura 6.

Teorema 1. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha \quad x, y \in F \quad , \quad (26)$$

para las constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces para cada s :

$$\mathcal{H}^{s/2}(f(F)) \leq c^{s/2} \mathcal{H}^s(F) \quad (27)$$

2.2. Dimensión y co-dimensión.

Mandelbrot demostró que el área A y el perímetro λ de una curva están relacionadas por la ecuación:

$$\lambda_\eta \sim \eta^{1-\Delta} \left(\frac{A}{\eta} \right)^{\Delta/2} \quad \text{para } \eta \rightarrow 0 \quad (28)$$

donde Δ se llama la dimensión de la curva.

Hay varios objetos de este tipo caracterizados por tener perímetros muy grandes y pequeña masa. Una dimensión importante es la dimensión de masa fractal Δ_M y

que no es la misma que la dimensión Δ anteriormente utilizada. Se puede mostrar la relación entre estos parámetros utilizando una bola como medida, lo cual nos lleva a obtener la ley exponencial:

$$M \sim R^{\Delta_M} \quad , \quad (29)$$

en términos del contenido de la bola M y su correspondiente radio R . Supongamos que un objeto de dimensión Δ está en un espacio de dimensión d , entonces la masa dentro de una bola de radio R está dada por la ecuación anterior. Pero la bola también encierra un contenido del medio que rodea dado por:

$$C_H \sim R^d \quad , \quad (30)$$

en consecuencia, la densidad fractal relativa al objeto está dada por:

$$\frac{M}{C_H} \sim R^{-\zeta} \quad , \quad (31)$$

donde ζ es llamada la co-dimensión del objeto, y está asociada a las propiedades intensivas del objeto.

Dimensión de Hausdorff-Besicovich.

A partir de la definición (23) puede mostrarse que existe un valor crítico de la medida de Hausdorff que produce un salto entre 0 e ∞ . Este se grafica en la figura 7, y el valor es llamado la dimensión de Hausdorff, que formalmente se define como:

$$\dim_H F = \inf \{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \quad (32)$$

Si $s = \dim_H F$ entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser 0 o bien ∞ , o bien puede satisfacer:

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty \quad . \quad (33)$$

En otras palabras, la dimensión de Hausdorff-Besicovich es la dimensión crítica para el cual la medida M_d cambia de cero a infinito:

$$M_d = \sum \gamma(d) \delta^d = \gamma(d) N(\delta) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & d > D \\ \infty & d < D \end{cases} \quad (34)$$

Dimensión de box-counting.

Relacionada con la mayoría de las definiciones de medición es importante la medición a escala de δ . Para cada δ medimos un conjunto que ignore irregularidades de tamaño menor a δ , y vemos como estas mediciones se comportan cuando $\delta \rightarrow 0$. Por ejemplo, si F es un plano curvo, entonces nuestra medición $M_\delta(F)$ podría ser el número de pasos requeridos por un par de divisores colocados a longitud δ para cubrir F . Entonces, una medición de la dimensión de F se determina por una ley de potencia. Si:

$$M_\delta(F) \sim c \delta^{-s} \quad , \quad (35)$$

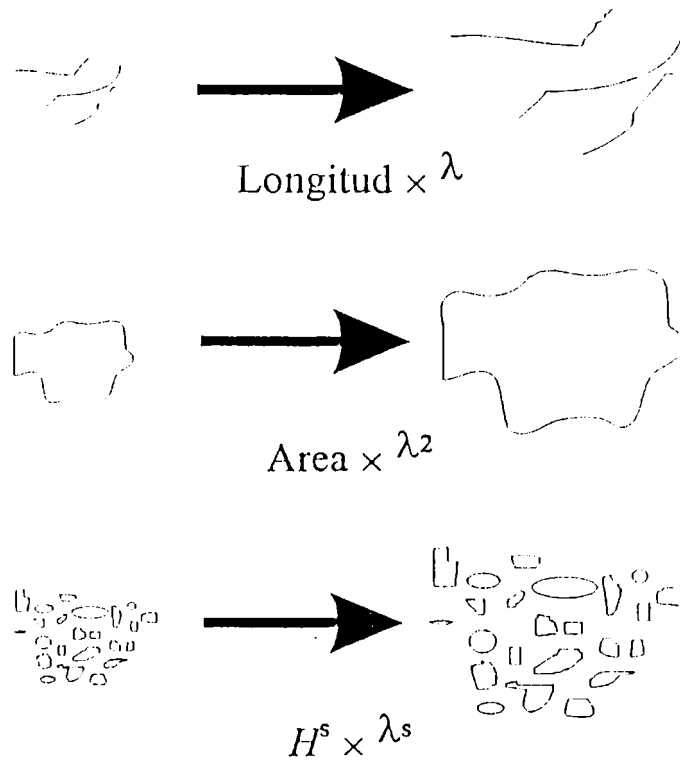


Figura 6 – Conjuntos escalados por un factor λ .

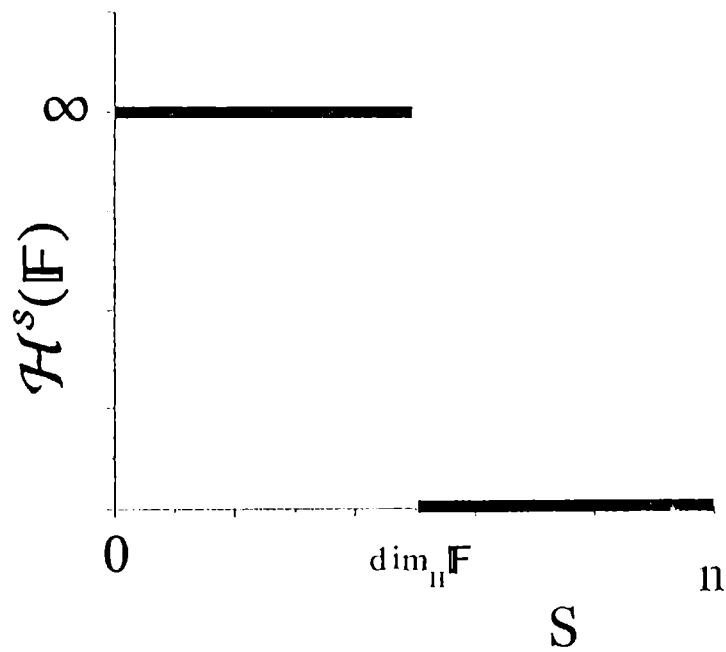


Figura 7 – La Dimensión de Hausdorff–Besicovich en el valor para el cual se produce el salto desde ∞ a 0

para las constantes c y s , se podría decir que \mathbb{F} tiene dimensión s , con c considerada como la longitud s -dimensional de \mathbb{F} . Finalmente:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(\mathbb{F})}{-\log \delta} \quad (36)$$

Estos resultados poseen facilidad de cálculo computacional y experimental, ya que s puede estimarse como el gradiente de una gráfica log-log trazada sobre un rango apropiado de δ . Este método está ejemplificado gráficamente para el caso de la costa de Noruega. El resultado (36) define entonces la dimensión de box-counting que será notada mediante $\dim_B \mathbb{F}$.

Propiedades deseables de una dimensión. Nos referimos como ejemplo a la dimensión de Hausdorff, que posee entonces las siguientes propiedades:

- 1) **Monotonicidad:** Si $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ entonces $\dim_H \mathbb{E} \leq \dim_H \mathbb{F}$.
- 2) **Estabilidad:** $\dim_H(\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) = \max(\dim_H \mathbb{E}, \dim_H \mathbb{F})$.
- 3) **Estabilidad numerable:** $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H \mathbb{F}_i$.
- 4) **Invariancia geométrica:** $\dim_H f(\mathbb{F}) = \dim_H \mathbb{F}$ para traslaciones, rotaciones, similitud o afinidad.
- 5) **Invariancia de Lipschitz:** $\dim_H f(\mathbb{F}) = \dim_H \mathbb{F}$ si f es una transformada bi-Lipschitz.
- 6) **Conjuntos numerables:** $\dim_H \mathbb{F} = 0$ si \mathbb{F} es finito o numerable.
- 7) **Conjuntos abiertos:** Si \mathbb{F} es abierto subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces $\dim_H \mathbb{F} = n$.

Otras definiciones de dimensión.

Una amplia variedad de otras definiciones de dimensión han sido introducidas, la mayoría de limitada aplicabilidad. La forma especial de las curvas da lugar a las diversas definiciones. Una curva de Jordan C se define como la imagen de un intervalo $[a, b]$ bajo una biyección continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (restringiendo así la atención a las curvas que no se intersectan entre sí). Si C es la curva y $\delta > 0$ definimos $M_\delta(C)$ como el número máximo de puntos x_0, x_1, \dots, x_m en la curva C en ese orden, de manera que $|x_k - x_{k-1}| = \delta$ para $k = 1, 2, \dots, m$. Así $(M_\delta(C) - 1)\delta$ puede pensarse como la longitud de la curva C medida utilizando un par de divisores con puntos colocados a una distancia δ de separación. La dimensión del divisor se define como:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(C)}{-\log \delta}, \quad (37)$$

suponiendo que el límite existe (de otra manera definiríamos dimensiones superiores e inferiores del divisor utilizando límites superiores e inferiores).

3. Los fractales en la naturaleza y en la ciencia.

La auto-similaridad parece ser una de las construcciones principales fundamentales en la naturaleza. Por millones de años la evolución ha dado forma a los organismos basándose en la supervivencia del mejor adaptado. En muchas plantas y también

órganos de animales, esto ha llevado a estructuras fractales ramificadas. Por ejemplo, en un árbol las estructuras ramificadas permiten capturar una máxima cantidad de luz solar por medio de las hojas; el sistema de vasos sanguíneos en un pulmón tiene una ramificación similar de manera que la máxima cantidad de oxígeno pueda ser asimilada. Aunque la auto-similaridad de estos objetos no sea estricta en el sentido matemático, podemos identificar los bloques que construyen la estructura, o sea las ramas en diferentes niveles. Mencionamos esta falta total de similaridad en el sentido matemático debido a las limitaciones de la naturaleza, en cuanto a que si se desea representar una estructura de este tipo mediante un método matemático iterativo de construcción, el número de dichas iteraciones estará limitado. Es por eso que en un sentido riguroso, deberíamos hablar de pre-fractales y no de fractales, sin embargo se sobreentiende el contexto en el cual se inscriben dichos términos y muchas veces se usan ambos indistintamente.

Varias formas naturales poseen la propiedad de ser irregulares pero aún así obedecer algunas leyes de escalamiento en potencias. Una de las consecuencias es que resulta imposible asignar cantidades tales como la longitud o área de superficie a estas formas naturales. Un típico ejemplo de esto es cuando uno quiere medir la longitud de la costa de Noruega (ver figura 5), evidentemente este problema no posee una respuesta simple. Si alguien midiera cierta cantidad de kilómetros, alguna otra persona con una mejor técnica de medición podría obtener un resultado diferente. Entonces, lo importante sería caracterizarla desde el punto de vista de sus irregularidades.

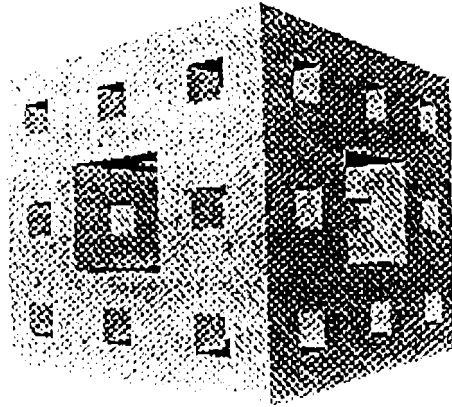
En muchos casos el mundo inanimado contiene algunas características fractales. Una montaña, por ejemplo, puede verse como todo rango de montañas a diferentes escalas. La distribución de los cráteres en la luna obedece algunas leyes de escalamiento en potencias, como un fractal. Los ríos, costas y nubes son otros ejemplos. Sin embargo, es generalmente imposible encontrar bloques de construcción jerárquicos para estos objetos como en el caso de la materia viviente. No existe una aparente auto-similaridad, pero aún así los objetos se ven iguales en el sentido estadístico (que se encontrará) cuando se magnifican.

Estos conceptos de aleatoriedad nos llevan al fenómeno de percolación con aplicaciones que van desde la fragmentación de un núcleo atómico hasta la formación de clusters en las galaxias. Un experimento que lleva a estructuras fractales aleatorias dendríticas (en forma de árbol) en una escala intermedia es el proceso de agregación electroquímica. Un modelo matemático de este proceso de agregación se basa en el movimiento Browniano de partículas y puede implementarse en una computadora sin complicaciones.

Referencias

1. S. Baldo, C. Tricot, *Introduction à la Topologie des Ensembles Fractals*, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal (1991).
2. G. I. Barenblatt, *Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics*, Consultants Bureau, Second Russian edition, Moscow (1983).
3. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc. (1988).

4. M. F. Barnsley, *Fractal Approximation*, Special Issue of the Journal of Constructive Approximations, 5(1), New York (1989).
5. H. Bauer, *Probability Theory and Elements of Measure Theory*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York (1972).
6. J. Bélari, S. Dubuc, *Fractal Geometry and Analysis*, Kluwer, Boston (1991).
7. G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, New York (1990).
8. K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, University Press, Cambridge, UK. (1984).
9. M. Farge, J. Hunt, T. Vassilicos, *Wavelets, Fractals and Fourier Transforms: New Developments and New Applications*, Oxford University Press (1993).
10. J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, New York and London (1988).
11. A. Le Méhauté, *Fractal Geometries: Theory and Applications*, CRC Press Inc., Boca Raton (1991).
12. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco: Freeman (1982).
13. M. Peruggia, *Discrete Iterated Function Systems*, A. K. Peters, Wellesley, MA. (1993).
14. J. M. Smith, *Fundamentals of Fractals for Engineers and Scientists*, Wiley, New York (1991).
15. C. Tricot, *Bourbes et Dimension Fractale*, Springer & Montreal: Editions Science et Culture, Paris (1993).
16. K. R. Wicks, *Fractals and Hyperspaces*, Springer, Berlin (1991).



CAPITULO II:

METODOS DE GENERACION DE ESTRUCTURAS FRACTALES CON DOMINIOS PERIODICOS Y SUS PROPIEDADES DERIVADAS

1. Construcción de formas fractales.

Es nuestro interés poder desarrollar aquí los fundamentos matemáticos para la construcción de objetos fractales regulares, que pueden ser utilizados como redes de difracción, superficies rugosas o antenas, que a su vez nos brindan la posibilidad de estudiar las propiedades del campo electromagnético dispersado o generado por estas estructuras.

La forma de representación de conjuntos fractales a través de una superposición multiplicativa de componentes periódicas, puede relacionarse con la construcción misma del fractal. Utilizando una secuencia de conjuntos como unión de intervalos disjuntos y, en una forma similar al método que emplea un *Sistema de Funciones Iteradas (IFS)*, se pueden realizar las operaciones de intersección necesarias entre los dominios distribuidos en forma periódica. Igualmente, el método *IFS* provee el marco teórico necesario para fundamentar la utilización de tales dominios periódicos.

1.1. Auto-similaridad y auto-afinidad.

Introducimos a continuación algunos conceptos básicos, propios de los desarrollos teóricos que involucran objetos fractales, que serán empleados y constituirán la base del presente trabajo. Estas propiedades matemáticas básicas de tales objetos son de interés para poder caracterizarlos desde diferentes puntos de vista.

Como se ha desarrollado en el capítulo anterior, una transformación de similaridad es aquella que transforma puntos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ en el espacio de N dimensiones en puntos $\mathbf{x}' = (r x_1, \dots, r x_N)$ con una relación de escala r . Un conjunto fractal \mathbb{F} se dice que es auto-similar con respecto a una relación de escala r , si \mathbb{F} es la unión de N subconjuntos disjuntos $\mathbb{II}_1, \dots, \mathbb{II}_N$, cada uno de ellos congruente al conjunto $r(\mathbb{F})$ (esto es, idénticos a través de un cambio de escala, una traslación y/o una rotación), obtenido a partir de \mathbb{F} por una transformación de similaridad definida en $0 < r < 1$. El conjunto \mathbb{F} es estadísticamente auto-similar si es la unión de N subconjuntos disjuntos, está escalado en r desde el conjunto original y es estadísticamente idéntico en todo respecto a $r(\mathbb{F})$.

Una transformación auto-afín es la que transforma puntos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ en los nuevos puntos $\mathbf{x}' = (r_1 x_1, \dots, r_N x_N)$, donde las relaciones de escala r_1, \dots, r_N no son todas iguales. Un conjunto es auto-afín con respecto a una relación vectorial $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ si \mathbb{F} es la unión de N subconjuntos disjuntos $\mathbb{II}_1, \dots, \mathbb{II}_N$ y cada uno de ellos es congruente al conjunto $\mathbf{r}(\mathbb{F})$ obtenido a partir de \mathbb{F} por una transformación afín.

Del mismo modo, dadas las contracciones $\mathbb{II}_1, \dots, \mathbb{II}_m$, decimos que un subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{X}$ es invariante para las transformaciones \mathbb{II}_i si:

$$\mathbb{F} = \bigcup_{i=1}^N \mathbb{II}_i(\mathbb{F}) . \quad (1)$$

En las figuras 1(a) y 1(b) se puede visualizar el concepto de conjunto auto-similar

y auto-afín respectivamente, utilizando el ejemplo de transformaciones auto-similares y auto-afines ya mostrados en la correspondiente figura 1 del capítulo anterior.

A continuación damos un teorema que utiliza el concepto de unión e intersección entre conjuntos para la construcción de un conjunto fractal, y nos permite comenzar a visualizar el concepto de Sistema de Funciones Iteradas y el método de construcción de conjuntos fractales a través de ellas.

Teorema 1. Sean $\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_N$ contracciones sobre $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

$$|\mathbb{H}_i(\mathbf{x}) - \mathbb{H}_i(\mathbf{y})| \leq c_i |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad (2)$$

con $c_i < 1$ para cada i . Entonces existe un único conjunto compacto no-vacío \mathbb{F} que es invariante para las \mathbb{H}_i , y satisface la condición (1). Además, si definimos una transformación Λ , sobre la clase de conjuntos compactos no vacíos \mathfrak{Q} , mediante:

$$\Lambda(\mathbb{E}) = \bigcup_{i=1}^N \mathbb{H}_i(\mathbb{E}), \quad (3)$$

y denotamos como Λ^k al conjunto en la k -ésima iteración de Λ , cuya secuencia está dada por: $\Lambda^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$, $\Lambda^k(\mathbb{E}) = \Lambda(\Lambda^{k-1}(\mathbb{E}))$ para $k \geq 1$, entonces:

$$\mathbb{F} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Lambda^k(\mathbb{E}), \quad (4)$$

para cualquier conjunto inicial $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$, tal que $\mathbb{H}_i(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ para cada i .

Otra propiedad de las estructuras o funciones que poseen cierto grado de similitud, la cual además es útil para representar la invariancia en escala, queda dada por la relación de homogeneidad:

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{x}), \quad (5)$$

donde λ es un factor arbitrario y α es un exponente de escalamiento que depende de las propiedades topológicas de la función $f(\mathbf{x})$. Toda estructura o función fractal cumple con la igualdad (5), pero no es una característica recíproca. Como nosotros desarrollamos la mayor parte de los estudios a partir del conocimiento de la fractalidad del objeto, esta propiedad constituye la base para poder relacionar el factor de cambio de escala del campo con el correspondiente cambio de escala (o ley exponencial) del objeto fractal.

Consideremos como ejemplo la función de Weierstrass-Mandelbrot coseno-fractal definida mediante la función:

$$W_c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[1 - \cos(b^n x)]}{b^{(2-D)n}}, \quad (6)$$

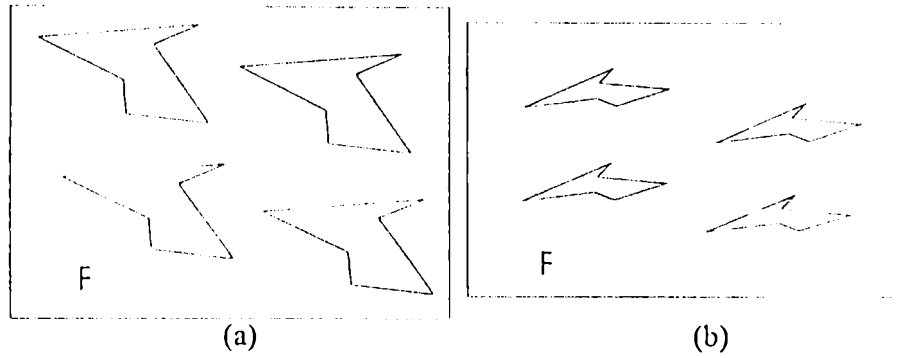


Figura 1 – Forma de construir un conjunto (a) auto-similar y (b) auto-afin, mediante el agrupamiento de objetos auto-similares y auto-afines contruidos individualmente en el capítulo anterior.

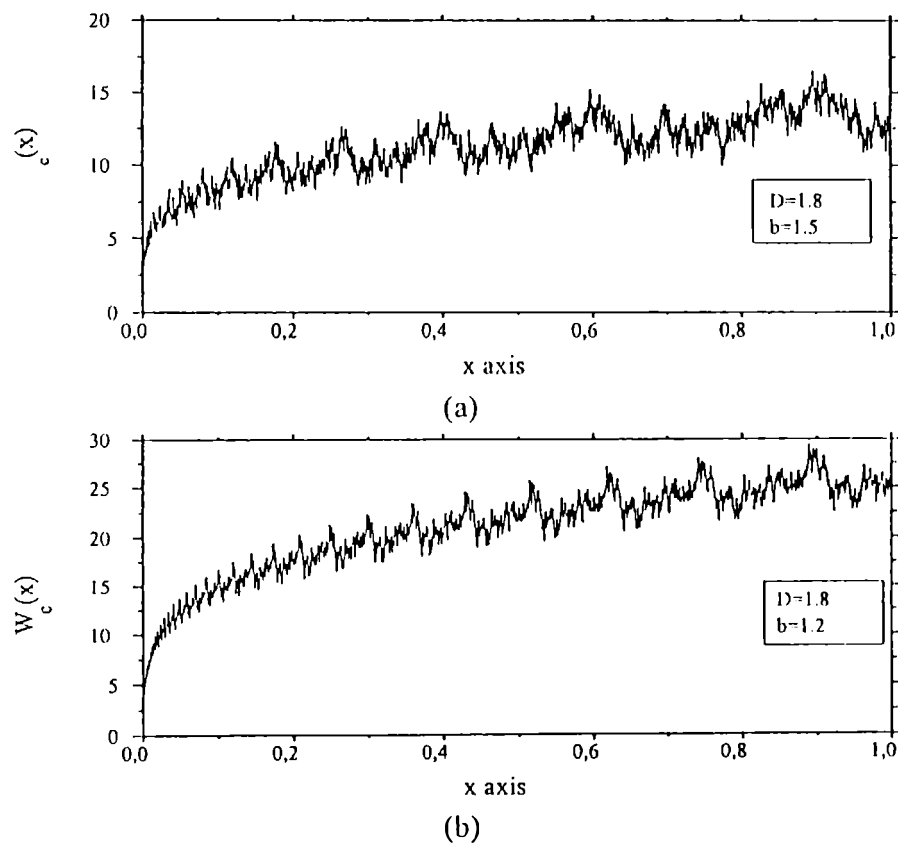


Figura 2 – Gráfica obtenida para la función de Weierstrass-Mandelbrot para diferentes valores de sus parámetros D y b .

para la cual b tiene una dependencia trivial y sólo determina hasta qué punto las irregularidades de la curva se hacen visibles. Además $1 < D < 2$ y se cumple la condición de escalamiento anterior (ecuación (5)) ya que:

$$W_c(bx) = b^{2-D} W_c(x) , \quad (7)$$

y por lo tanto, se ve que se verifica la propiedad anteriormente mencionada en (5). Algunos ejemplos de funciones definidas por la ecuación (6), obtenidas para distintos valores del parámetro b se pueden observar en la figura 2.

1.2. Sistema de Funciones Iteradas (IFS).

Definición 1. Sea $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ una transformación sobre un espacio métrico. Un punto $\mathbf{x}_f \in \mathbb{X}$ es llamado punto fijo de la transformación si $f(\mathbf{x}_f) = \mathbf{x}_f$.

Teorema del Mapeo de contracción. Sea $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ un mapeo de contracción sobre un espacio métrico completo (\mathbb{X}, d) . Entonces f posee exactamente un punto fijo $\mathbf{x}_f \in \mathbb{X}$ y para cualquier punto \mathbf{x} , la secuencia $\{f^{(n)}(\mathbf{x}) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ converge a \mathbf{x}_f . Esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_f \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X} . \quad (8)$$

nota: con la notación $f^{(n)}$ se simboliza la composición de funciones tal que $f^{(n+1)}(\mathbf{x}) = f \circ f^{(n)}(\mathbf{x}) = f(f^{(n)}(\mathbf{x}))$.

Definimos ahora el espacio métrico $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), \mathcal{H}^s(d))$, donde $\mathcal{H}^s(d)$ es la métrica de Hausdorff, y mostramos a continuación algunas conclusiones interesantes.

Lema 1. Sea $W : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ un mapeo de contracción sobre el espacio métrico (\mathbb{X}, d) , entonces W es continua y mapea $\mathbb{H}(\mathbb{X})$ en sí mismo.

Definición 2. Un *Sistema de Funciones Iteradas (IFS)* consiste de un espacio métrico completo (\mathbb{X}, d) junto con un conjunto finito de mapeos de contracción $W_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, con los factores respectivos s_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Su factor de contractividad es $s = \max \{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Teorema 2. Sea $\{W_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}, n = 1, 2, \dots, N\}$ un IFS con factor de contractividad s . Entonces la transformación $W : \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$ definida por:

$$W(\mathbb{B}) = \bigcup_{n=1}^N W_n(\mathbb{B}) , \quad (9)$$

para todo $\mathbb{B} \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ es un mapeo de contracción sobre el espacio métrico completo $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), \mathcal{H}^s(d))$ con el factor de contractividad s . Esto es:

$$\mathcal{H}^s(W(\mathbb{B}), W(\mathbb{C})) \leq s \mathcal{H}^s(\mathbb{B}, \mathbb{C}) , \quad (10)$$

para todo $\mathbb{B}, \mathbb{C} \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$. El único punto fijo, $\Lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$, obedece:

$$\Lambda = W(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^N W_n(\Lambda), \quad (11)$$

y está dado por $\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(\mathbb{B})$ para cualquier $\mathbb{B} \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$. En la figura 3 se grafica la forma de obtención del invariante \mathbb{F} utilizando sucesivas contracciones, lo cual muestra en alguna medida los conceptos hasta aquí desarrollados en esta sección.

Definición 3. El punto fijo $\Lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ descrito en el Teorema 1 es llamado el atractor del *IFS*.

Definición 4. Sea (\mathbb{X}, d) un espacio métrico y sea $\mathbb{C} \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$. Definimos una transformación $W_n : \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$ mediante $W_n(\mathbb{B}) = \mathbb{C}$ para todo $\mathbb{B} \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$. Entonces W_n es llamada una transformación de condensación y \mathbb{C} es llamado el conjunto de condensación asociado.

Teorema del Collage. Sea (\mathbb{X}, d) un espacio métrico completo. Sea $\mathbb{L} \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ y sea $\varepsilon \geq 0$. Elegimos un *IFS* con condensación, con factor de contractividad $0 \leq s < 1$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s \left(\mathbb{L}, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^N W_n(\mathbb{L}) \right) &\leq \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{1-s} \mathcal{H}^s \left(\mathbb{L}, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^N W_n(\mathbb{L}) \right) \quad \forall \mathbb{L} \in \mathbb{H}(\mathbb{X}), \end{aligned} \quad (12)$$

donde $\mathcal{H}^s(d)$ es la métrica de Hausdorff y Λ es el atractor del *IFS*. Una aplicación interesante de estos resultados es la compresión y decompresión de datos. Si una imagen complicada puede codificarse con una pequeña cantidad de información entonces dicha imagen puede transmitirse o almacenarse con una alta eficiencia. El teorema del Collage da una idea de que tan buena aproximación es un conjunto \mathbb{L} al invariante de una colección de contracciones W_n .

Con frecuencia los conjuntos invariantes en el plano que proveen buenas imágenes de objetos físicos tendrán un área positiva, no así los fractales en el sentido usual. Sin embargo, dichos conjuntos bien pueden delimitarse por curvas fractales, una característica que agrega realismo a las imágenes de objetos naturales. Estas ideas pueden extenderse para dar imágenes sombreadas o coloreadas, asignando probabilidades a cada transformación de contracción, lo cual define una distribución de masa fractal en el conjunto invariante \mathbb{F} , y el conjunto puede sombreadarse o colorearse de acuerdo a la densidad local de masa.

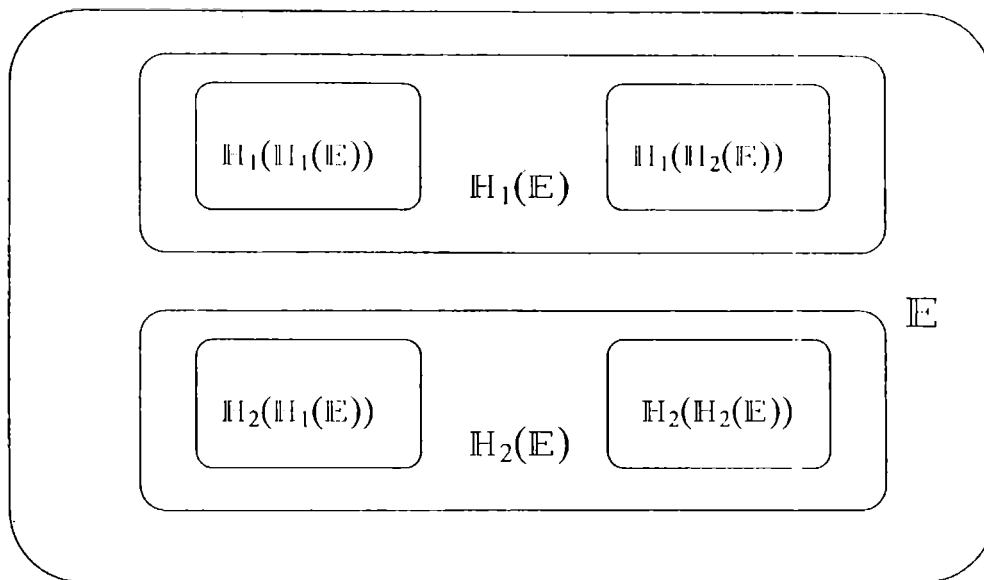


Figura 3 – Método de construcción del invariante \mathbb{F} a partir de contracciones \mathbb{H}_i de un conjunto \mathbb{E} inicial.

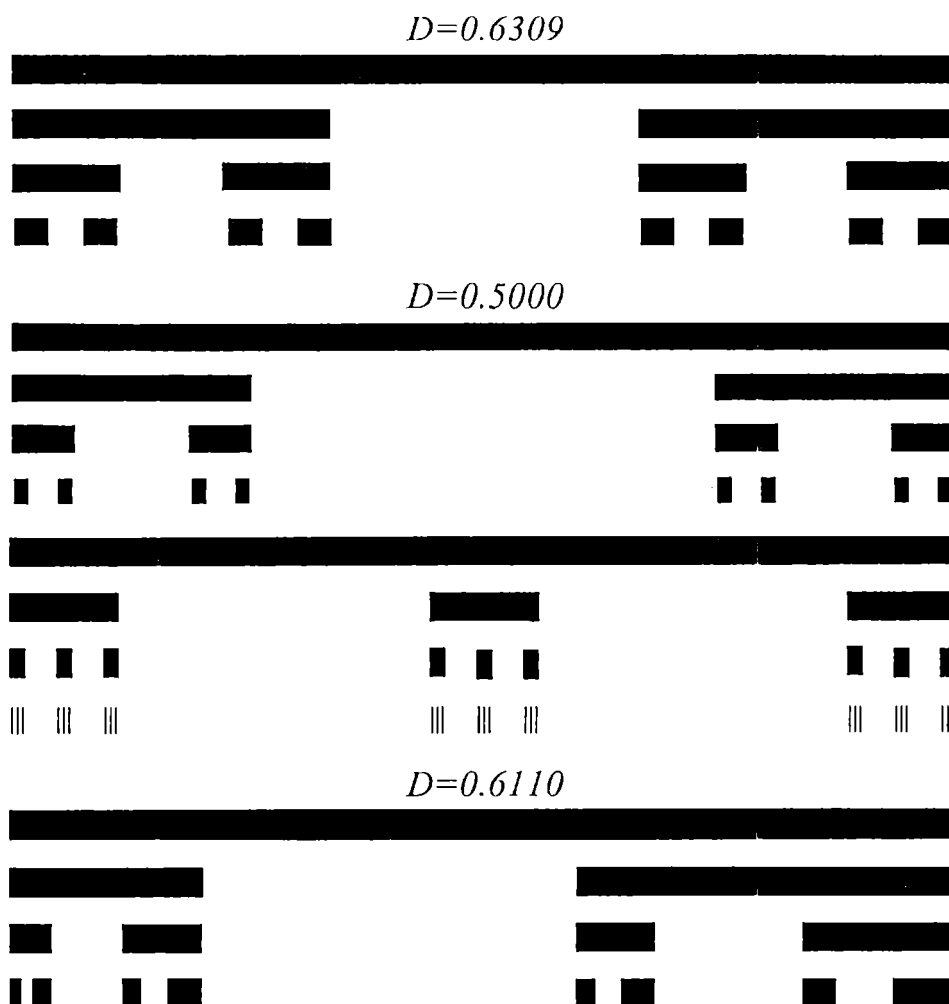


Figura 4 – Diferentes casos de barras de Cantor que serán considerados a lo largo del presente trabajo. En los dos casos que están en el centro la dimensión es $D=0.5$, pero poseen diferente lacunaridad.

Definición 5. Un sistema de funciones iteradas con probabilidades consiste de los conjuntos $IFS \{X : W_1, W_2, \dots, W_N\}$, junto con el conjunto de números $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$, tal que:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1 \quad \text{y} \quad p_i > 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

La probabilidad p_i está asociada con la transformación W_i .

El método general de IFS permite describir imágenes de objetos naturales a través de un reducido número de transformaciones y probabilidades en una manera efectiva. Esto representa una enorme compresión de información comparada con la requerida para detallar el color en cada pixel de una imagen y es fácil producir una ampliación de una región pequeña. La desventaja es que existe una alta correlación dentro del conjunto que forma la imagen, si bien el método es excelente para darnos una idea general de la misma. Asimismo es complicado obtener el conjunto de transformaciones para representar un objeto o imagen.

1.3. Algunos ejemplos de fractales.

Un ejemplo muy simple de fractal lo constituye el conjunto de Cantor triádico, el cual da origen a un fractal de dimensión $D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 0.6309$, y se construye como se muestra en el primer ejemplo de la figura 4. A partir de un intervalo inicial, denominado iniciador, se lo divide en tres partes iguales y se quita el tercio central, este resultado obtenido constituye el generador. El proceso se repite sucesivamente aplicando la estructura del generador a las partes que van quedando. La dimensión fractal del conjunto de Cantor es:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \left[\frac{1}{r} \right]}, \quad (14)$$

siendo N el número de segmentos de longitud $l = \frac{1}{3^k}$ en un cierto paso de la iteración, y r el factor de cambio de escala. Por el contrario, su dimensión topológica es cero. Otros conjuntos de Cantor (con diferente lacunaridad) pueden ser obtenidos variando los valores de N y r , como se muestra también en la figura 4 para el conjunto con dimensión $D = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 0.5$.

Definición 6. Se dice que para una secuencia de conjuntos \mathbb{H}_i se satisface la condición de conjunto abierto si existe un límite abierto no vacío \mathbb{A} , tal que:

$$\mathbb{A} \supset \bigcup_{i=1}^N \mathbb{H}_i(\mathbb{X}), \quad (15)$$

con la unión disyunta entre cada \mathbb{H}_i .

Teorema 3. Supongamos que la condición de conjunto abierto se satisface para las similitudes \mathbb{H}_i sobre \mathbb{R}^n con relaciones c_i ($1 \leq i \leq n$). Si \mathbf{F} es el conjunto invariante que satisface la condición de la igualdad (15), entonces $\dim_H \mathbf{F} = \dim_B \mathbf{F} = s$, donde s está dado por:

$$\sum_{i=1}^N c_i^s = 1, \quad (17)$$

y también, para este valor de s , $0 < \mathcal{H}^s(\mathbf{F}) < \infty$.

Si ambas porciones en el fractal de Cantor fueran diferentes, la dimensión se puede obtener a partir de la fórmula:

$$\sum_{i=1}^N r_i^D = 1. \quad (18)$$

Un ejemplo puede visualizarse en el último caso de la figura 4 para el fractal de Cantor de dimensión $D \cong 0.6110$, y el par de segmentos que se obtiene es $r_1 = \frac{1}{4}$ y $r_2 = \frac{2}{5}$ respectivamente, a partir de la barra inicial.

Para crear la curva de Koch comenzamos con el segmento de línea y aplicamos el generador tal como se muestra en la figura 5(a). Fractal bidimensional significa que la menor dimensión euclídea del espacio donde el fractal se encuentra es dos. El iniciador también puede ser entonces un triángulo o hexágono, para el caso bidimensional, y el generador se puede aplicar sobre cada uno de sus lados. La carpeta de Sierpinski es otro ejemplo de este tipo de objetos bidimensionales, comenzando con un cuadrado al cual se divide en nueve partes iguales como muestra la figura 5(b). Entonces, removemos el cuadrado central y repetimos el proceso sobre los ocho cuadrados restantes. El generador de la carpeta de Sierpinski consiste de ocho transformaciones. Cada una de estas simplemente escala el cuadrado en x, y , trasladándolo luego a cada una de las ocho posiciones. Este procedimiento es similar a la construcción del fractal de Cantor. El triángulo de Sierpinski (ver figura 5(c)) comienza con un triángulo y, en un proceso que también es similar al conjunto de Cantor se quita el triángulo central. Este proceso se repite con los sucesivos triángulos obtenidos.

2. Conjuntos Fractales y Dominios Distribuidos en Forma Periódica.

Como ya hemos visto, las transformaciones básicas para construir los objetos fractales son tres: cambio de escala, traslación y rotación; en consecuencia, nos basaremos en ellas para aplicarlas a distribuciones periódicas de dominios cuya superposición nos permita construir conjuntos fractales. Llamamos dominios periódicos a cierta distribución de conjuntos disyuntos ubicados en el plano tal como se muestra en la

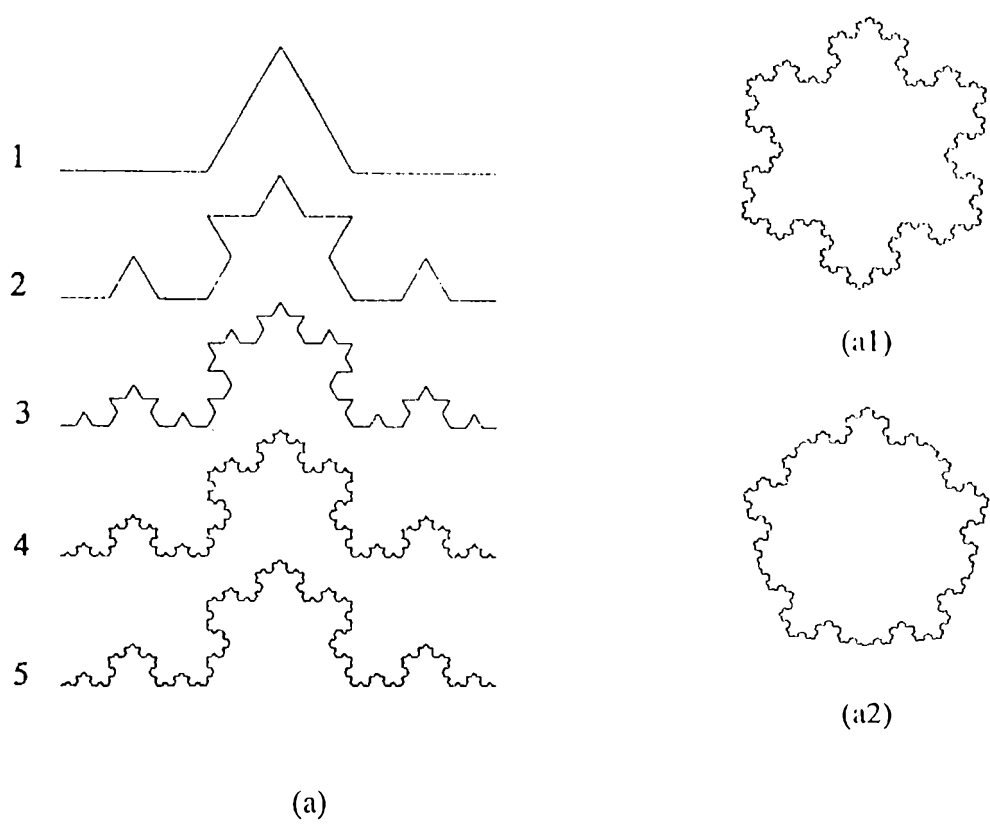
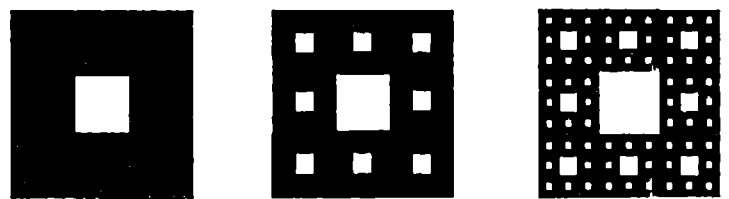


Figura 5 – Ejemplos de fractales determinísticos utilizados en los experimentos y cálculos desarrollados en el presente trabajo. (a) Fractal de Koch, a la derecha pueden observarse el resultado obtenido para (a1) iniciador triangular y (a2) pentagonal. (b) Carpeta de Sierpinski y (c) Triángulo de Sierpinski.



(b)



(c)

figura 6(a). La región sombreada seleccionada incluye un cambio de escala sobre la distribución inicial, cuyo proceso será aplicado iterativamente.

Sea (X, d) un espacio métrico compacto, la función característica de un conjunto $A \subset X$ está definida por:

$$\chi[A] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \quad (19)$$

En el caso de contar con dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset X$, es sencillo demostrar la siguiente propiedad para la intersección de ambos conjuntos:

$$\begin{aligned} \chi[A \cap B] &= \inf \{ \chi[A], \chi[B] \} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap B \\ 0 & \text{si } x \notin A \cap B \end{cases} \\ &= \chi[A] \chi[B], \end{aligned} \quad (20)$$

que se puede visualizar en la figura 6(b).

Entonces, para una dada secuencia A_t , a partir de la cual se puede definir un dominio como superposición de las mismas, se cumplirá la siguiente condición:

$$\chi \left[\bigcap_{t=0}^N A_t \right] = \inf \{ \chi[A_t] \}_{t=0}^N = \prod_{t=0}^N \chi[A_t], \quad (21)$$

donde N representa el orden del proceso para obtener la estructura final o el número de operaciones similares a realizar.

Si una secuencia de dominios A_t periódicamente distribuidos e incluidos dentro del dominio inicial A_0 poseen la siguiente propiedad (ver por ejemplo la figura 7):

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots, \quad (22)$$

donde cada secuencia está compuesta por la unión de subconjuntos disyuntos que son versiones escaladas de A_0 :

$$A_t \equiv \bigcup_{i=1}^M \Pi_{t,i} \quad \text{siendo } \Pi_{t,k} \cap \Pi_{t,n} \equiv \emptyset \quad k \neq n. \quad (23)$$

Entonces se obtiene finalmente la estructura fractal mediante la operación:

$$F = \bigcap_{t=0}^N A_t, \quad (24)$$

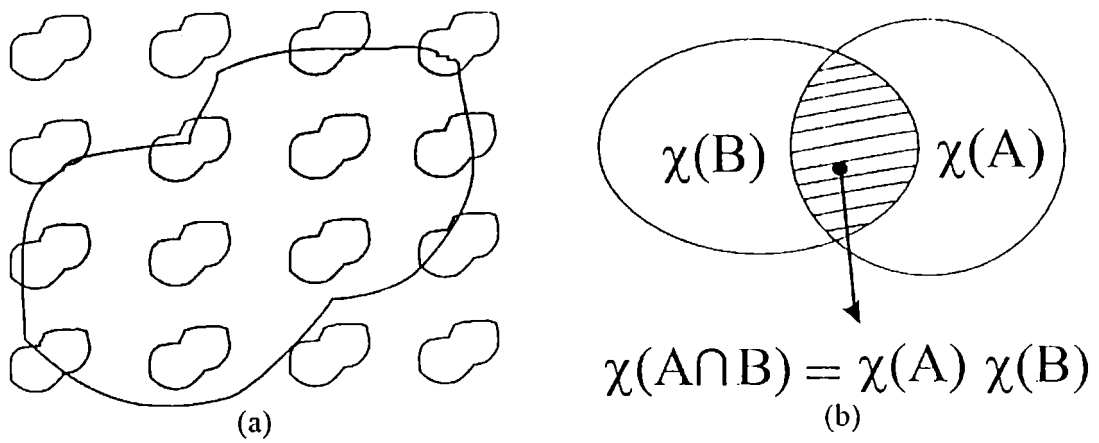


Figura 6 – (a) Superposición de dos versiones escaladas de dominios periódicamente distribuidos. (b) Función característica de la intersección de dos conjuntos

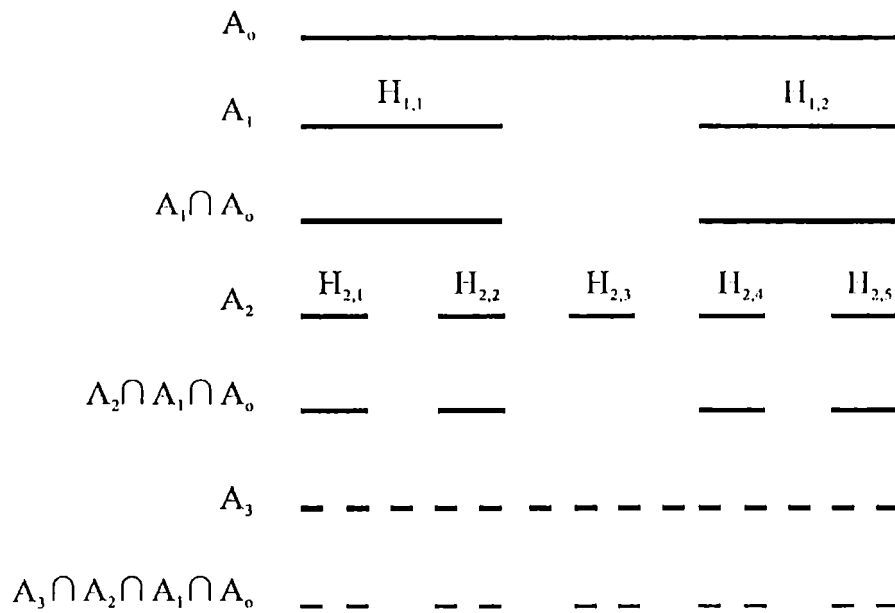


Figura 7 – Método de construcción del conjunto de Cantor para $D = 0.6309$

teniendo en cuenta que el objeto fractal, en el sentido estrictamente matemático, se consigue cuando $N \rightarrow \infty$. Finalmente, en virtud de las propiedades de los conjuntos considerados se tiene el resultado que cada dominio puede relacionarse con la correspondiente función característica mediante:

$$\chi[\mathbb{F}] = \prod_{l=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^{3^l} \chi[\mathbb{I}_{l,i}] \right\}, \quad (25)$$

lo cual significa que para cada orden l de la iteración, se puede definir la función característica del conjunto fractal que se obtienen mediante el proceso de superposición de dominios distribuidos.

2.1. Conjuntos de Cantor.

Se utiliza aquí una función densidad de Cantor, que se obtiene como superposición multiplicativa de funciones periódicas. Consideramos una variación a lo largo de una sola dimensión, o sea para un intervalo unidimensional, dentro del cual queda definida la secuencia de dominios disyuntos Λ_l . Si dicha secuencia es periódicamente distribuida, por ejemplo dentro del intervalo $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, se tiene la propiedad:

$$\Lambda_l \subset \Lambda_0 \equiv \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]. \quad (26)$$

La función característica para cada subconjunto $\mathbb{I}_{l,i}$ puede ponerse, de acuerdo a la definición (19), como:

$$\chi(x_o) = \text{rect} \left[\frac{x_o - x_{oi}}{\Delta_i} \right] = \begin{cases} 1 & \text{para } x_o - x_{oi} < \Delta_i, \\ \frac{1}{2} & \text{para } x_o - x_{oi} = \Delta_i, \\ 0 & \text{para } x_o - x_{oi} > \Delta_i, \end{cases} \quad (27)$$

siendo Δ_i el ancho de cada subconjunto $\mathbb{I}_{l,i}$ y x_{oi} el punto central de los mismos.

Definición 7. Una función $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada simple si:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N R_i \chi_{I_i}(\mathbf{x}), \quad (28)$$

donde $I_i \in \mathfrak{B}$ y $R_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, N$, $\bigcup_{i=1}^N I_i = \mathbb{X}$ y $I_i \cap I_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Donde \mathfrak{B} es un conjunto de Borel.

Teniendo en cuenta la definición anterior, la función característica de cada secuencia Λ_l puede representarse entonces mediante:

$$\chi \left[\bigcup_{i=1}^M \mathbb{I}_{l,i} \right] = \sum_{i=0}^M R_i \text{rect} \left[\frac{x_o - x_{oi}}{\Delta_i} \right] . \quad (29)$$

De esta forma, el fractal de Cantor de dimensión $D = \ln 2 / \ln 3 \cong 0.6309$ es obtenido, a través de la función densidad:

$$\mathcal{C}(x_o) = \prod_{l=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^{3^l} R_i \text{rect} \left[\frac{x_o - x_{oi}}{\frac{l}{3^l}} \right] \right\}^{g_l} , \quad (30)$$

para el cual se efectúa siempre un cambio de escala dado por el factor 3, siendo ahora x_{oi} el punto central de cada escalón rectangular definido para los subconjuntos $\mathbb{I}_{l,i}$. Se ha adicionado aquí el exponente $g_l \in \{0,1\}$, con lo cual se puede filtrar individualmente cada componente periódica. Esto significa que la estructura fractal se obtiene sólo cuando $g_l = 1$ para todo l . De acuerdo a los valores dados para la secuencia g_l se pueden obtener también estructuras incompletas y, como caso límite $g_l = 0$ para todo $l < N$ y $g_N = 1$, se obtiene una distribución periódica. Dado que existen muchas posibilidades de configuración, llamaremos estado de una estructura fractal al dado por la secuencia g_l y orden de la misma al mayor subíndice $l = N$. En la figura 8 se observan los primeros órdenes obtenidos para el fractal de Cantor dado por la función densidad de la expresión (30).

Observamos también que la función densidad anterior describe un tipo de estructura para la cual es 1 solo para los valores correspondientes a la llamada estructura fina del conjunto, o intervalo más pequeño para cada orden N (todos de la misma longitud). Puede también obtenerse el conjunto complementario fácilmente, con lo cual se tiene una estructura fina variable de acuerdo al número de iteraciones u orden de la misma:

$$\mathcal{C}^\dagger(x_o) = 1 - \mathcal{C}(x_o) , \quad (31)$$

donde se utilizó el símbolo \dagger para indicar que corresponde al conjunto o función densidad complementaria.

Una estructura más general y a la vez más compleja puede ser obtenida utilizando intervalos con diferente longitud y/o trasladados a lo largo del eje, con lo cual se combinan las operaciones básicas (traslación y cambio de escala) que pueden definirse en una dimensión. El método, de acuerdo a la teoría de conjuntos, queda graficado en la figura 9 para conjuntos de Cantor con diferente dimensión y/o lacunaridad. La combinación de funciones rectángulo escaladas de diferente forma da las correspondientes funciones densidad de Cantor para tales distribuciones.

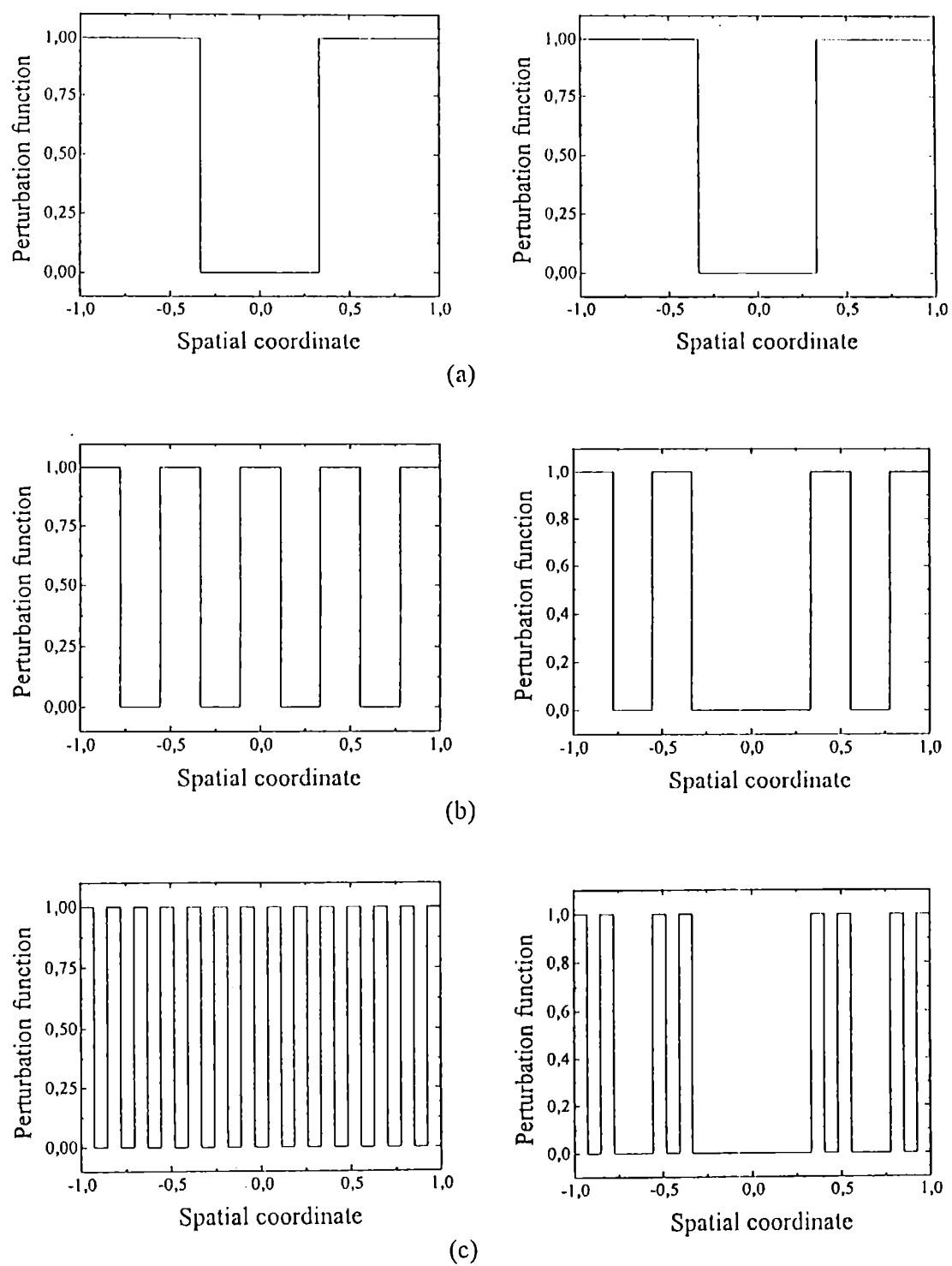
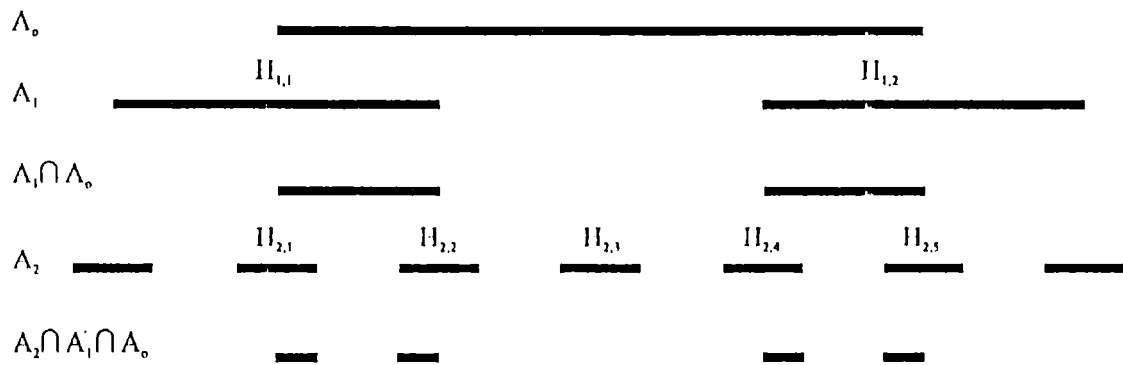
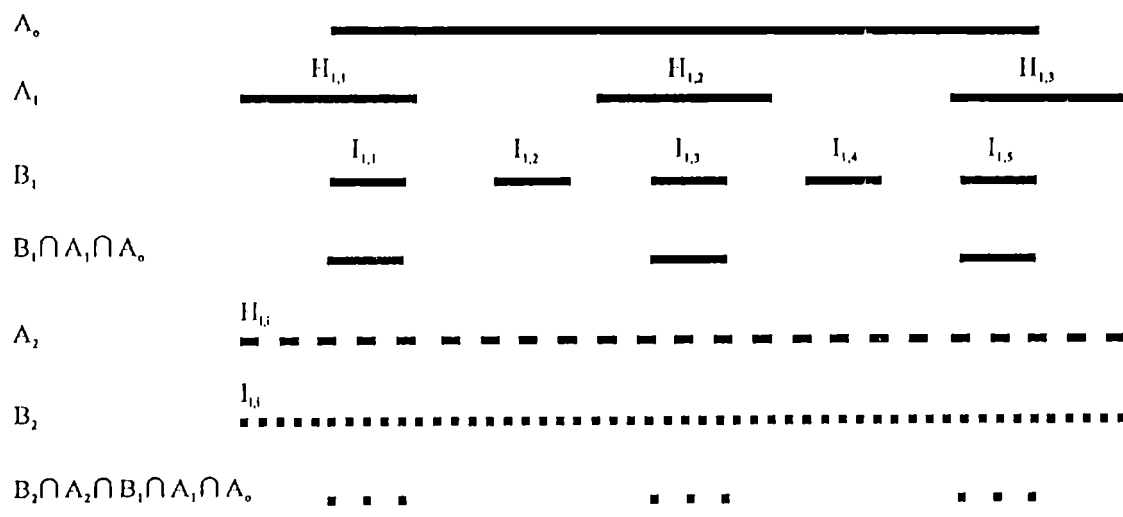


Figura 8 – Primeros órdenes para el fractal de Cantor con $D=0.6309$

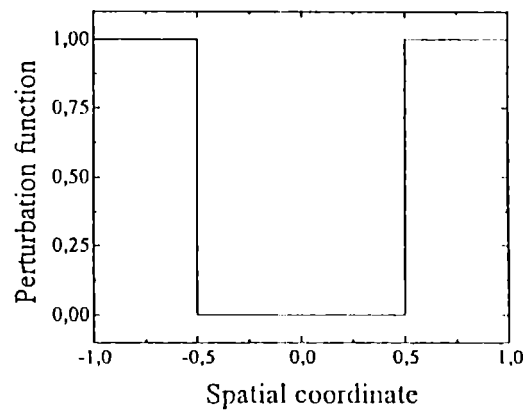
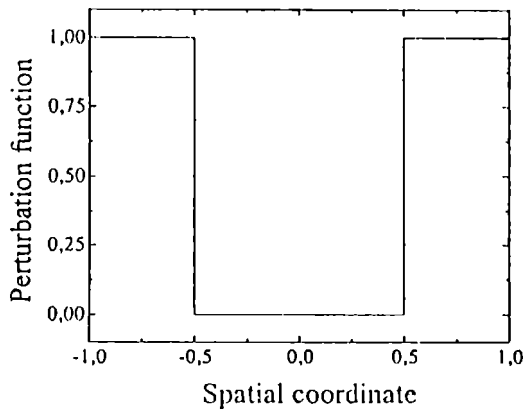


(a)

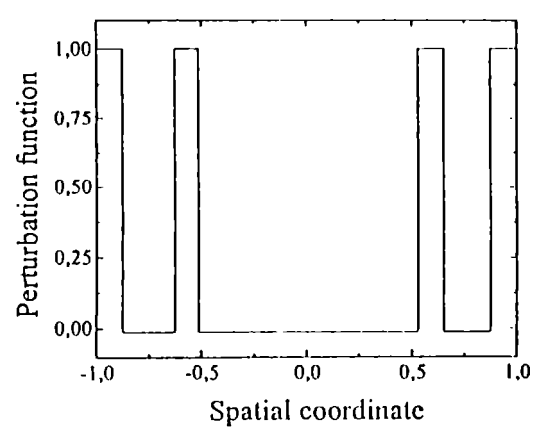
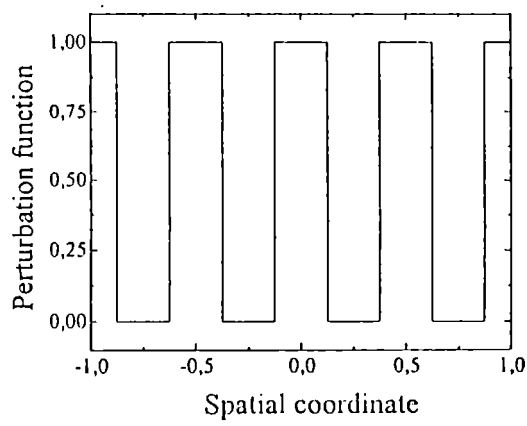


(b)

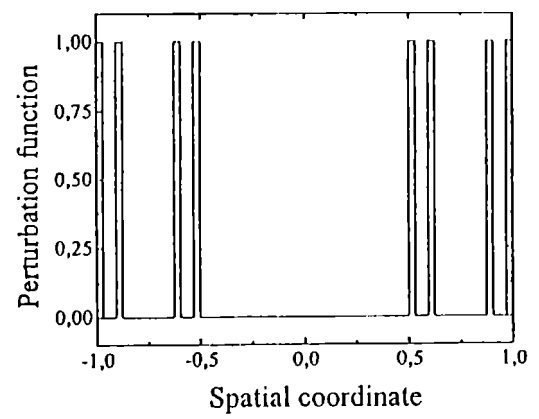
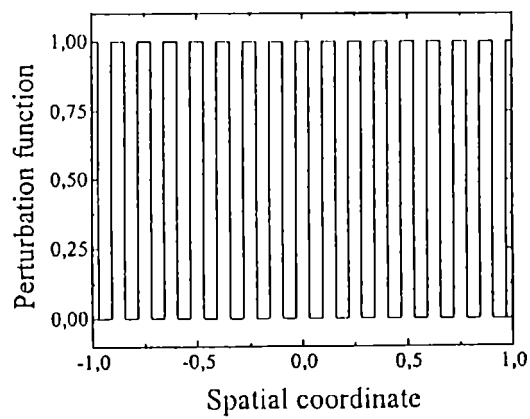
Figura 9 – Método de construcción del conjunto fractal de Cantor para $D=0.5$, pero con diferente lacunaridad.



(a)

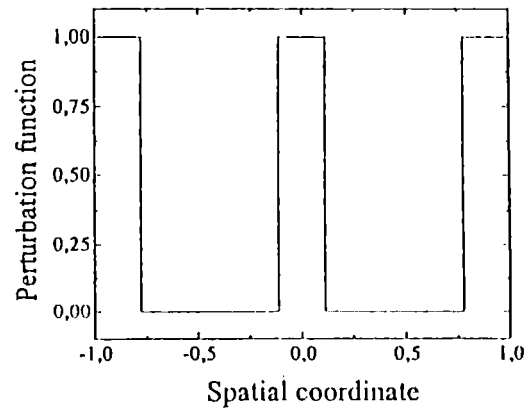
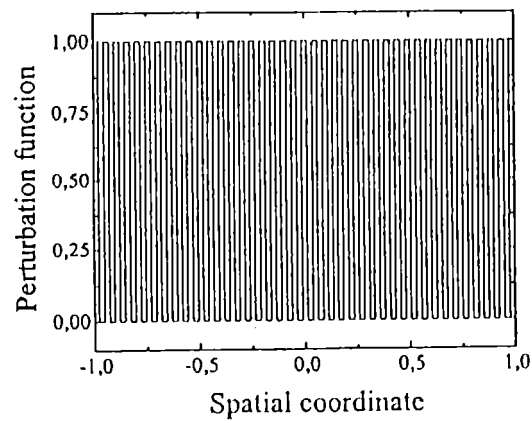
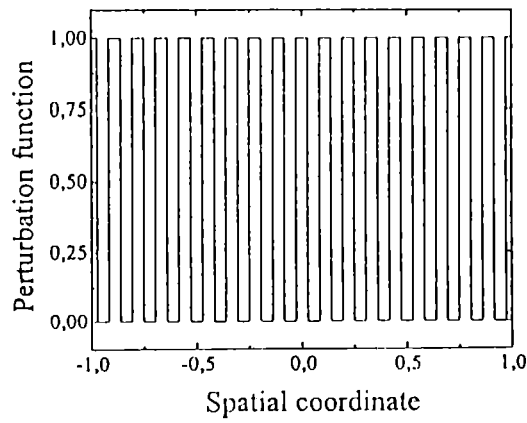
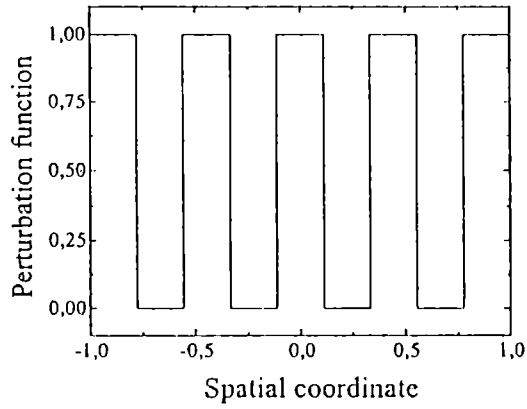
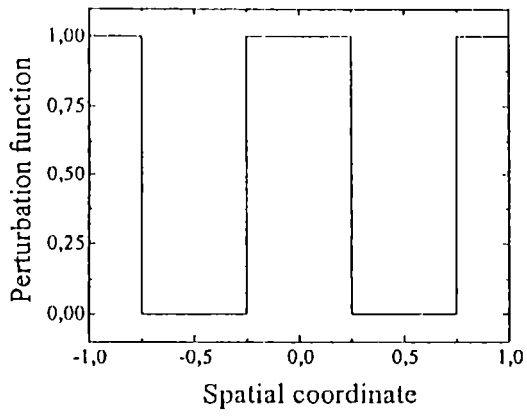


(b)

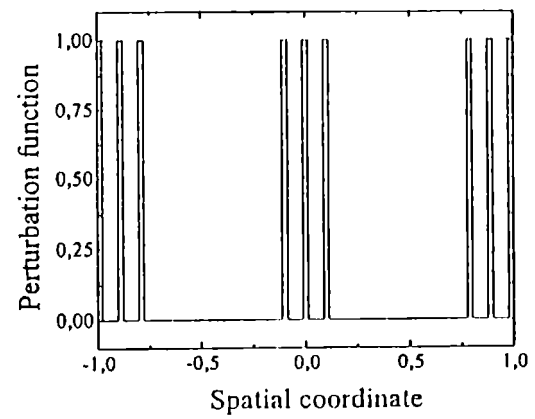


(c)

Figura 10 – Primeros órdenes para $D = 0.5$



(a)



(b)

Figura 11 – Igual que en la Figura 10, pero diferente lacunaridad.

En una forma general, utilizando un número infinito de dominios periódicamente distribuidos, se puede representar la densidad de Cantor mediante:

$$C(x_o) = \text{rect} \left[\frac{x - \frac{L}{2}}{\frac{L}{2}} \right] \prod_{i=1}^N \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_i \text{rect} \left[\frac{x_o - x_{oi}}{\Delta_1} \right] \right\}^{g_i} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} S_j \text{rect} \left[\frac{x_o - x_{oj}}{\Delta_2} \right] \right\}^{h_i} \quad (32)$$

siendo N el orden del objeto fractal, R_i y S_j son valores constantes dentro del intervalo en que se define cada componente rectangular centrada en los puntos x_i y x_j respectivamente. Además, g_i y h_i pueden tomar, como antes, los valores dentro del conjunto $\{0, 1\}$ y Δ_1 , Δ_2 son los correspondientes períodos de las funciones rectangulares escaladas. Entonces, la combinación de dos funciones periódicas con diferente escalamiento nos permite obtener otro tipo de conjunto de Cantor, ya sea con diferente dimensión y/o lacunaridad lo cual representa una generalización del resultado previo. Además, debe tenerse en cuenta el número de componentes periódicas escaladas que intervienen en cada caso que podemos denotar mediante $n_1(l)$, $n_2(l)$. Las figuras 10 y 11 representan los fractales de Cantor con dimensión 0.5, donde se han utilizado los siguientes datos: $n_1(l) = 2^{2l-1}$, $\Delta_1 = \frac{L}{2^{2l-1}}$, $h_l = 0$ ($\forall l$) en el caso mostrado en la figura 10; $n_1(l) = 2^l$, $\Delta_1 = \frac{L}{2^{2^l-1}}$ y $n_2(l) = 3^{2^l}$, $\Delta_2 = \frac{L}{3^{2^l}}$ para el ejemplo mostrado en la figura 11. Ambas estructuras quedan diferenciadas en su lacunaridad, la cual es otra propiedad del conjunto fractal que se refiere a la forma en que se distribuye internamente la estructura fina. Puede verificarse también que, mediante la expresión (32), se obtiene como caso particular la densidad de Cantor definida en (30).

2.2. Generalización a otros conjuntos fractales regulares.

Interesa ahora poder extender los resultados a conjuntos fractales contenidos en el plano, con lo cual se podrán construir estructuras con una mayor dimensión, esto es $1 < D < 2$ utilizando los métodos de superposición multiplicativa hasta ahora expuestos. Las transformaciones básicas utilizadas para la generación de conjuntos fractales se van a denotar en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathfrak{T}[d] \mathbb{A}_i = \{ \mathbf{x} + \mathbf{d} : \mathbf{x} \in \mathbb{A}_i \} & \text{Traslación ,} \\ \mathfrak{R}[\theta] \mathbb{A}_i = \left\{ \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{A}_i \right\} & \text{Rotación ,} \\ \mathfrak{M}[m] \mathbb{A}_i = \left\{ \frac{1}{m} \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{A}_i \right\} & \text{Cambio de escala ,} \end{cases} \quad (33)$$

que constituyen las operaciones básicas aplicadas sobre dominios. Siendo \mathfrak{T} , \mathfrak{R} y \mathfrak{M} los operadores aplicados sobre los puntos del conjunto $\mathbb{A}_i \subset \mathbb{X}$, \mathbf{d} es el vector traslación,

θ el ángulo de rotación y m el factor de magnificación.

2.2.1. Carpeta de Sierpinski.

Ya que la construcción de la carpeta de Sierpinski es muy similar a la del conjunto de Cantor, pueden emplearse funciones rectangulares bidimensionales para representar el conjunto fractal que aquí nos interesa. Esto es, empleando funciones escaladas del tipo:

$$\chi(x_o, y_o) = \text{rect}\left[\frac{x_o - x_{oi}}{\Delta}\right] \text{rect}\left[\frac{y_o - y_{om}}{\Delta}\right] = \begin{cases} 1 & \text{para } x_o - x_{oi} < \Delta \\ & \text{y } y_o - y_{om} < \Delta, \\ \frac{1}{2} & \text{para } x_o - x_{oi} = \Delta \\ & \text{y } y_o - y_{om} = \Delta, \\ 0 & \text{para } x_o - x_{oi} > \Delta \\ & \text{y } y_o - y_{om} > \Delta. \end{cases} \quad (34)$$

Sin embargo, los pasos a seguir son un poco mas largos, ya que debe utilizarse la función complementaria debido a que este fractal posee estructura fina variable. Primeramente utilizamos una función bidimensional similar a la función densidad del conjunto de Cantor y además una generalización bidimensional para la definición de función simple. Entonces llegamos a:

$$\mathcal{G}(x_o, y_o) = \mathcal{C}(x_o, y_o) \prod_{l=1}^N \left\{ \sum_{\substack{i=-\infty \\ j=-\infty}}^{\infty} R_{i,j} \text{rect}\left[\frac{x_o - x_{oi}}{\frac{L}{3^l}}\right] \text{rect}\left[\frac{y_o - y_{oj}}{\frac{L}{3^l}}\right] \right\}^{g_l}, \quad (35)$$

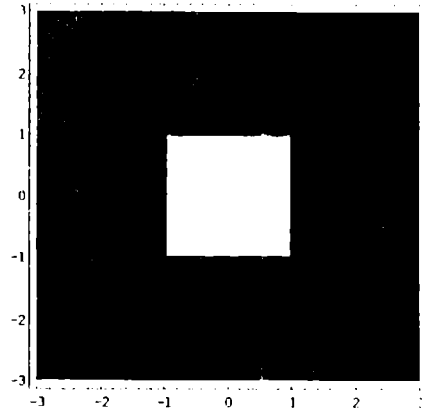
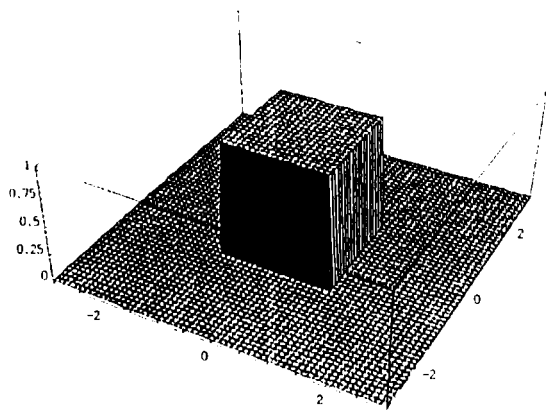
con la función ventana que define los límites del conjunto fractal dada por:

$$\mathcal{C}(x_o, y_o) = \text{rect}\left[\frac{x_o}{\frac{L}{2}}\right] \text{rect}\left[\frac{y_o}{\frac{L}{2}}\right].$$

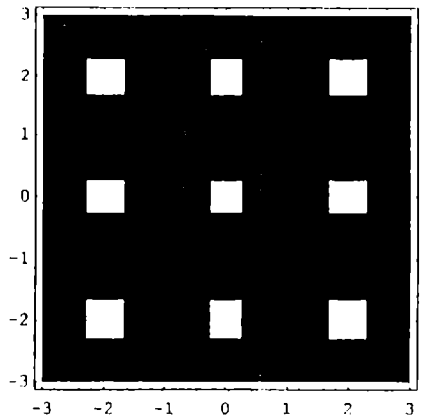
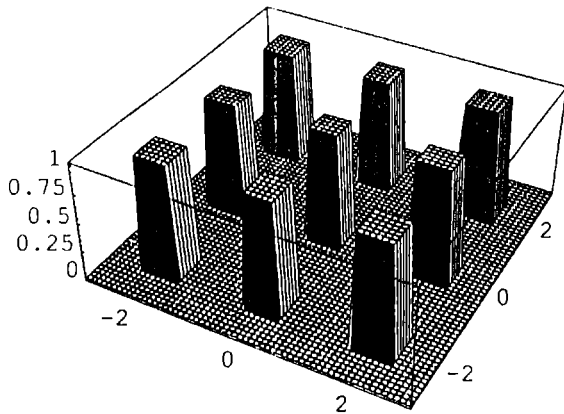
Aquí también se ve que cuando los exponentes g_l ($\in \{0, 1\}$) son todos iguales a 1 podrá obtenerse la carpeta de Sierpinski sin componentes filtradas. Los x_{oi} e y_{oj} corresponden a los puntos centrales de cada dominio de ancho $L/3^{l-1}$ ($= \Omega$, en nuestro caso).

Los valores centrales de cada intervalo $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ pueden ser calculados a partir de:

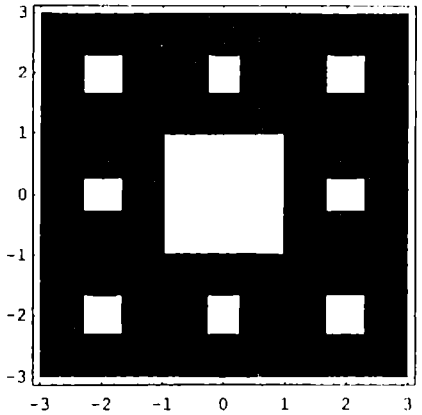
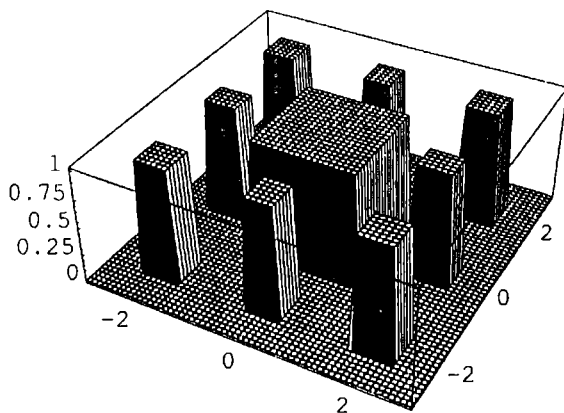
$$\left. \begin{matrix} x_{ok} \\ y_{ok} \end{matrix} \right\} = -\frac{L}{2} + \frac{\Omega}{2} + \Omega(k-1) \quad k = 1, \dots, 3^{l-1}. \quad (36)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 12 – Primeras componentes y órdenes correspondientes para la Carpeta de Sierpinski.

También, llamamos N al orden de la estructura y $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ es el intervalo de definición para cada eje coordenado. El valor que toma g_l ($l = 1..N$) para un cierto estado de la función $\mathcal{G}(x_o, y_o)$ es precisamente el que determina cuales componentes periódicas bidimensionales son consideradas dentro de la productoria. Las funciones rectangulares utilizadas son mostradas en la figura 12(a) y 12(b), mientras que para conseguir la carpeta de Sierpinski se utiliza la función complementaria de cada componente con la que se obtiene, por ejemplo, la figura 12(c). La expresión matemática final a ser considerada para representar la carpeta de Sierpinski es:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x_o, y_o) &= 1 - \mathcal{G}^1(x_o, y_o) = 1 - \prod_{l=1}^N \mathcal{R}^1(x_o, y_o) = & (37) \\ &= 1 - \prod_{l=1}^N \left\{ 1 - \sum_{\substack{i=-\infty \\ j=-\infty}}^{3^l-1} R_{i,j} \operatorname{rect}\left[\frac{x_o - x_{3^l i-1}}{\frac{L}{3^l}}\right] \operatorname{rect}\left[\frac{y_o - y_{3^l j-1}}{\frac{L}{3^l}}\right] \right\}^{g_l}, \end{aligned}$$

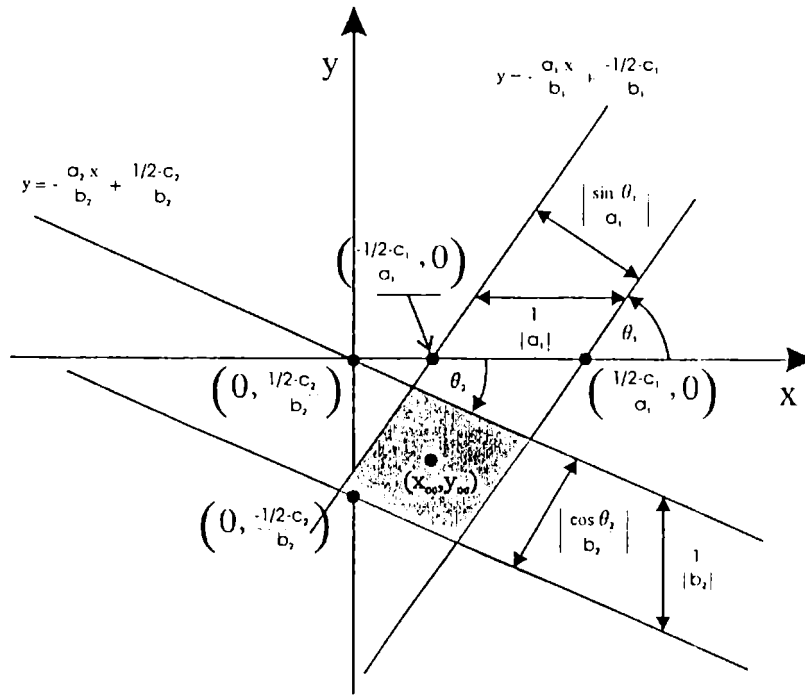
donde el símbolo “+” indica la función complementaria, y $\mathcal{R}(x_o, y_o)$ denota la función bidimensional compuesta por la sumatoria de funciones rectángulo. En notación utilizando operaciones sobre los dominios, tendremos:

$$CS_N = \mathcal{C}[\mathcal{M}[g^N] CS_o] \cup \mathcal{C}[CS_{N-1}], \quad (38)$$

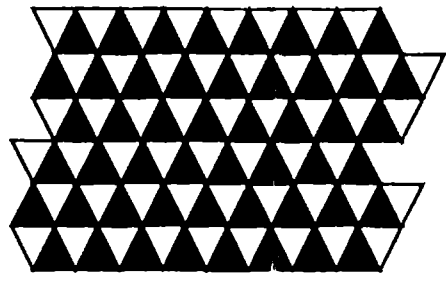
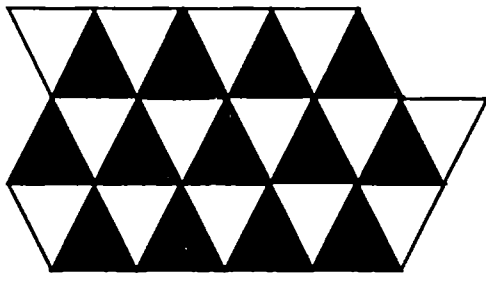
donde aquí se han usado las operaciones entre conjuntos.

2.2.2. Triángulo de Sierpinski.

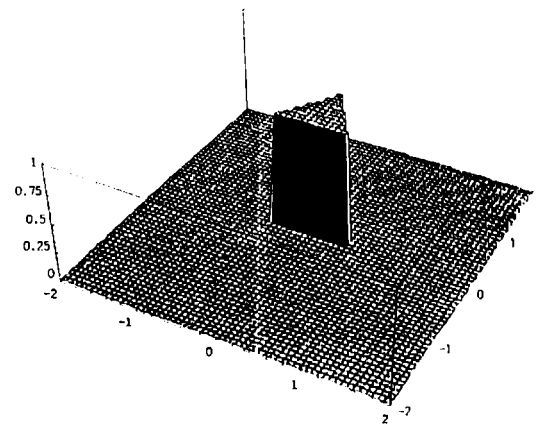
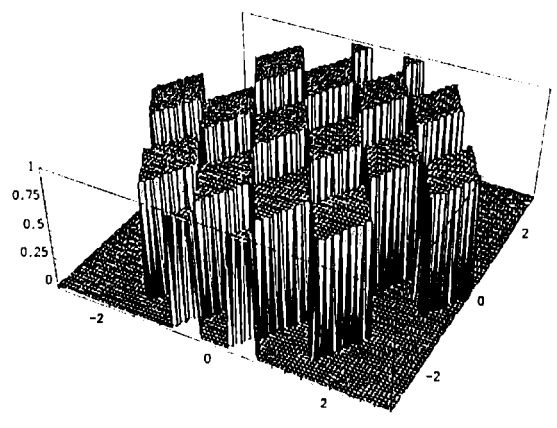
Más compleja aún es la construcción de este conjunto fractal a través de funciones rectángulo superpuestas y en ángulo con los ejes coordenados. Si consideramos ahora la función rectángulo bidimensional, pero teniendo en cuenta un cambio de escala y una deformación en ángulo (en este caso será de 60°), se tendrá entonces que:



(a)



(b)



(c)

Figura 13 – Método de construcción del triángulo de Sierpinski: (a) Funciones tipo rectangulares que son superpuestas multiplicativamente. (b) Diminios triangulares periódicos. (c) Obtención de los dominios como en el caso descrito en (a), y resultado de superponer la función rectángulo a lo largo del eje y.

$$\text{rect}[a_1 x_o + b_1 y_o + c_1] \text{rect}[a_2 x_o + b_2 y_o + c_2] = \begin{cases} 1 & -\frac{\Delta}{2} < a_1 x_o + b_1 y_o + c_1 < \frac{\Delta}{2} \\ & y - \frac{\Delta}{2} < a_2 x_o + b_2 y_o + c_2 < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{2} & a_1 x_o + b_1 y_o + c_1 = \pm \frac{\Delta}{2} \\ & y a_2 x_o + b_2 y_o + c_2 = \pm \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{otros valores} \end{cases} \quad (39)$$

cuyo gráfico aparece en la figura 13(a), y está centrada en el punto:

$$x_{oc} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad , \quad y_{oc} = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad , \quad (40)$$

El triángulo de Sierpiński se obtiene a partir de la superposición de funciones del tipo:

$$\mathcal{D}(x_o, y_o) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[x_o - \frac{\sqrt{3}}{3} y_o + x_{oi} \right] \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[x_o + \frac{\sqrt{3}}{3} y_o + x_{oi} \right] \quad , \quad (41)$$

con lo cual, se expresa finalmente en la forma:

$$SG(x_o, y_o) = \mathcal{C}(x_o, y_o) \prod_{i=1}^N \mathcal{R}(x_o, y_o) \quad , \quad (42)$$

donde se tiene la definición siguiente:

$$\mathcal{R}(x_o, y_o) = \left\{ \mathcal{D}(x_o, y_o) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[\frac{y_o - y_{o,2j+1}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \Delta} \right] + [1 - \mathcal{D}(x_o, y_o)] \sum_{j=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[\frac{y_o - y_{o,2j}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \Delta} \right] \right\}^{g_1} \quad , \quad (43)$$

y además:

$$\mathcal{C}(x_o, y_o) = \text{rect} \left[x_o - \frac{\sqrt{3}}{3} y_o + x_{oi} \right] \text{rect} \left[x_o + \frac{\sqrt{3}}{3} y_o + x_{oi} \right] \text{rect} [y_o - y_{o,2j+1}] \quad , \quad (44)$$

Nuevamente, cuando los exponentes $g_l \in \{0, 1\}$ son todos iguales a 1, se obtiene el triángulo de Sierpinski sin las componentes filtradas. Donde adicionalmente se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x_i = \pm \frac{2l+1}{2} \Delta \quad , \\ y_j = \pm \frac{4l+1}{4} \sqrt{3} \Delta \quad , \end{cases} \quad (45)$$

siendo $\Delta = \frac{L}{2^l}$, y cada recta hace un ángulo $\theta = \tan^{-1} \left[-\frac{3}{\sqrt{3}} \right]$ con el eje x. Las figuras 13(b) y 13(c), muestran la construcción del gasket de Sierpinski con el método descrito.

En una forma general, en términos de los dominios aquí definidos, podemos utilizar la notación:

$$TS_N = (\mathfrak{M}[A^N] TS_o \cup \mathfrak{M}[A^N] \mathfrak{T}[(L, L)] TS_o) \cap TS_{N-1} \quad (46)$$

2.2.3. Fractal de Koch.

Debido a que este conjunto fractal ha sido utilizado en la obtención de varios resultados teóricos y experimentales en el área de óptica, incluimos a continuación una forma de construcción mediante la superposición de dominios periódicos. A partir de haber obtenido las estructuras fractales para los casos anteriores, en términos de dominios definidos por funciones rectangulares, es fácil hacer una extensión al caso del fractal de Koch bidimensional. Esto se muestra en la figura 14, donde se grafica el método de obtención para dos casos con diferente iniciador: triángulo y cuadrado, respectivamente.

Damos también otro método de construcción que se ha utilizado en aplicaciones ópticas. Como ya se explicó, el generador es un conjunto de m segmentos conectados con longitud L/μ donde L es la longitud del segmento iniciador. Después de N sustituciones tenemos que el fractal de Koch de orden N se obtiene mediante sucesivos cambios de escala, traslaciones y rotaciones, y está dado por:

$$\mathcal{K}_N(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \left\{ M \left[\frac{1}{\mu} \right] \sum_{k_i=1}^m T[d(k_i)] R[\theta(k_i)] \right\} \mathcal{K}_o(\mathbf{x}) \quad , \quad (47)$$

donde, siendo que $\mathbf{x} = (x, y)$, el segmento inicial está definido por:

$$\mathcal{K}_o(\mathbf{x}) = \begin{cases} \delta(y) & |x| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \end{cases} \quad (48)$$

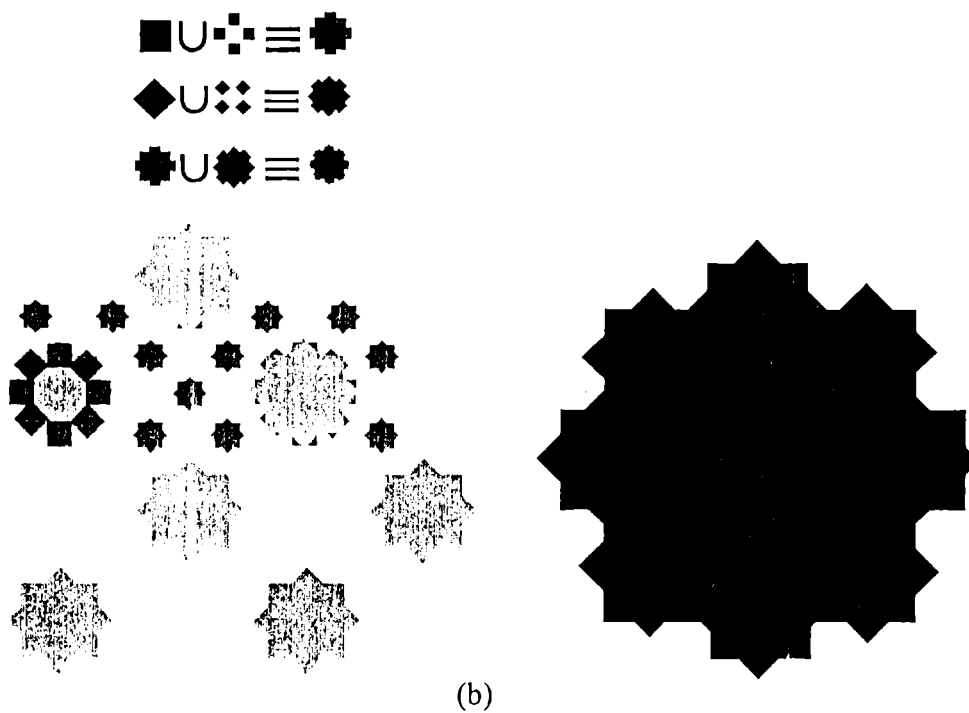
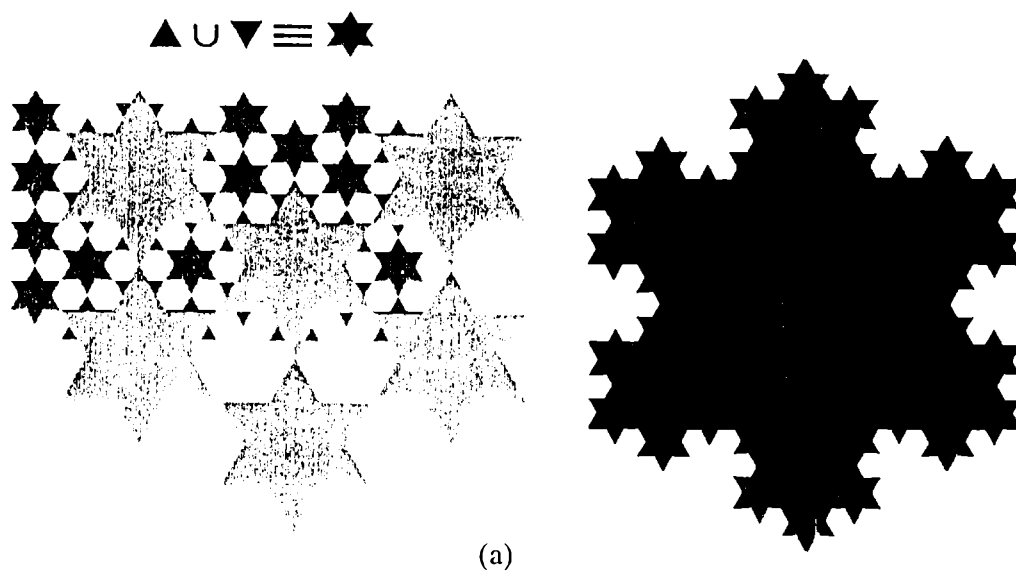


Figura 14 – Método de construcción de fractales de Koch con diferentes iniciadores, utilizando dominios distintos

Otra representación puede obtenerse a partir de la superposición de dominios utilizando los operadores definidos en el conjunto de ecuaciones (33), aplicados a los mismos, y finalmente se llega a expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_N(x, y) = & \left\{ M \left[\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4} \right] T[d] R[\theta = \pi] \mathcal{D}_{N-1}(x, y) \right\} + \mathcal{D}_{N-1}(x, y) \\ & - \mathcal{D}_{N-1}(x, y) \left\{ M \left[\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4} \right] T[d] R[\theta = \pi] \mathcal{D}_{N-1}(x, y) \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

La dimensión fractal de la curva de Koch, queda definida entonces mediante:

$$D = \frac{\log m}{\log \mu} \quad (50)$$

Como una extensión mas nos referimos a la figura 15, donde se muestra el proceso para construir otro tipo de fractal con elementos hexagonales y que admitiría también un método de construcción con dominios periódicos en la forma que aquí hemos desarrollado.

2.3. Conjuntos fractales construidos cíclicamente.

El término "cíclicamente" aquí significa que en cada iteración se disponen dominios obtenidos geoméricamente a partir de un dominio inicial, y utilizando las operaciones ya mencionadas para la construcción de un conjunto fractal. Esto significa que a partir del dominio inicial, cambiando ciertos parámetros en la fórmula que define su contorno, cambiará la estructura del paso en consideración de la iteración. Esto genera conjuntos fractales con variaciones en cada paso iterativo y que pueden repetir su estructura después de varios pasos. A partir de la ecuación (25), puede verse que dado que los valores que adopta la función característica $\chi[\mathbb{I}_{l,i}]$ son 0 o 1, esta puede ser implementada a través de funciones adecuadas a la simetría del contorno del conjunto $\mathbb{I}_{l,i}$, esto es, utilizando por ejemplo funciones rectángulo y/o cilíndricas.

Se pueden combinar funciones cilíndricas y/o rectángulo de modo que el fractal de Sierpinski tome diferente estructura para cada interacción. Las funciones cilíndricas, por ejemplo, están dadas por:

$$cyl \left[\frac{r_o}{\Delta} \right] = \begin{cases} 1 & 0 \leq r_o < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{2} & r_o = \frac{\Delta}{2} \\ 0 & r_o > \frac{\Delta}{2} \end{cases} , \quad (51)$$

siendo además $r_o = (x, y)$.

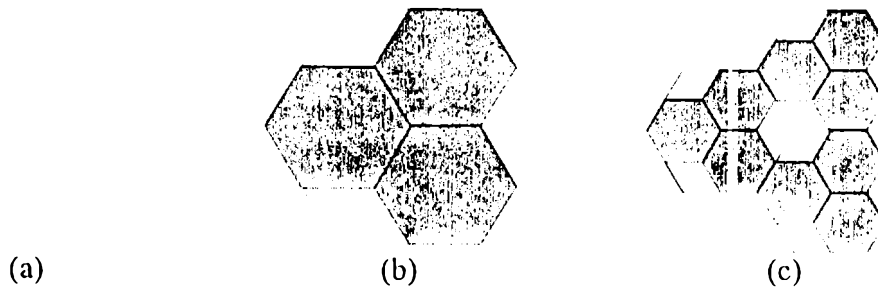


Figura 15 – Proceso para generar un fractal con elementos hexagonales encajados uno dentro de otro.

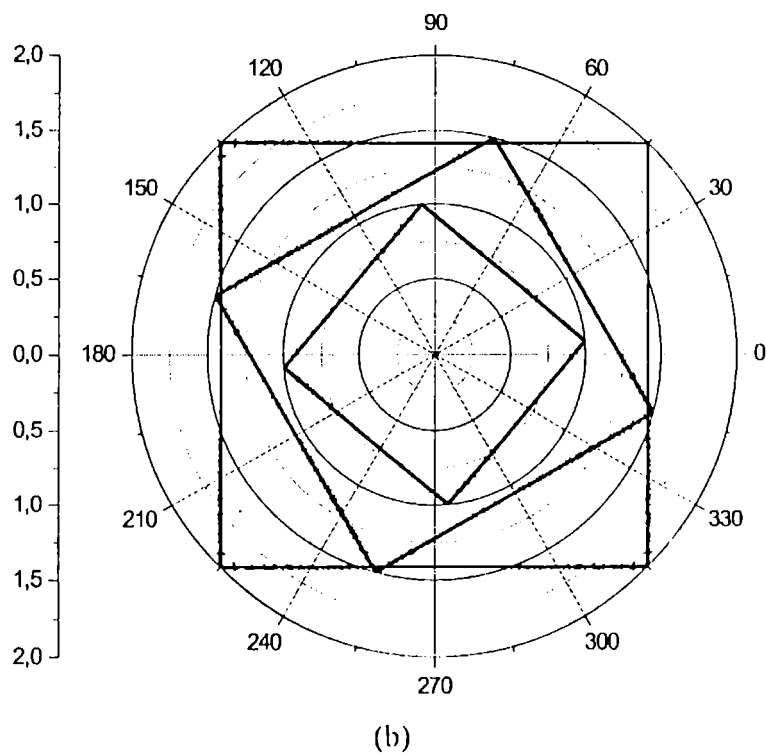
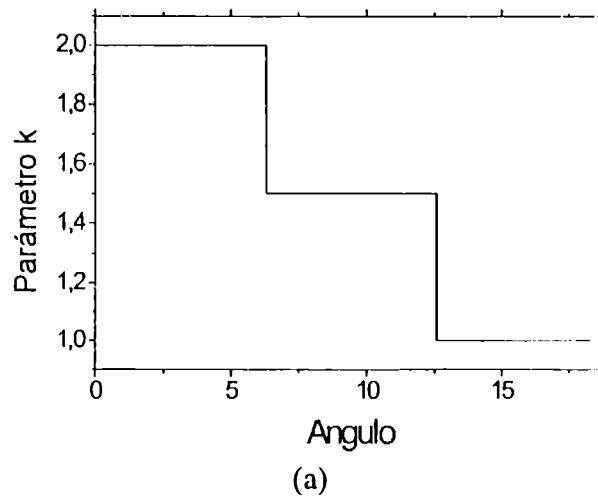
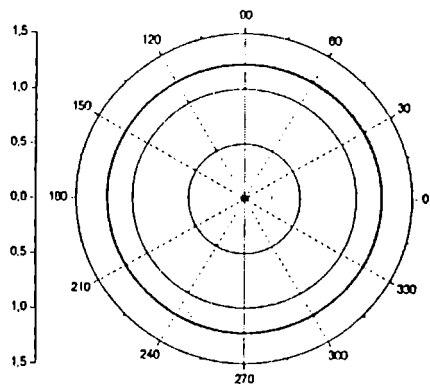
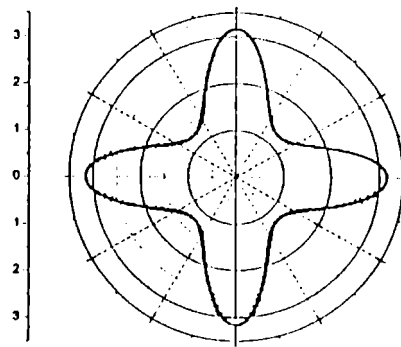


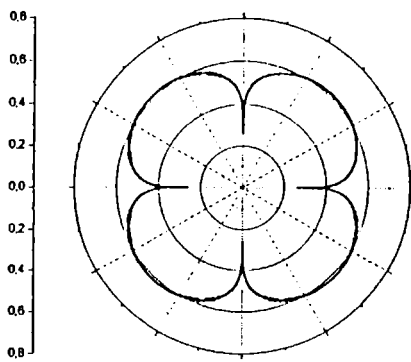
Figura 16 - (a) Ejemplo de cómo varía el parámetro k en cada ciclo de iteración para construir el conjunto fractal. (b) Operaciones básicas de cambio de escala y rotación en un cuadrado.



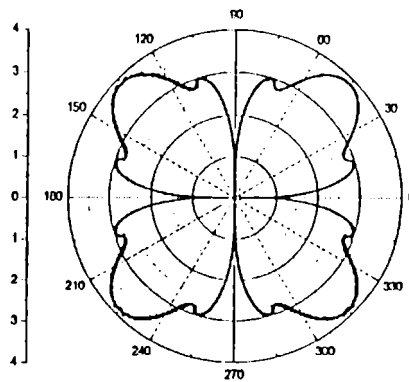
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 17 – Representación de figuras con los siguientes parámetros: (a) $s=0.1$, $p_2=3$, $p_i=1$ (para el resto); (b) $s=0.8$, $p_2=20$, $p_i=1$ (para el resto); (c) $s=0.3$, $p_o=1$, $p_1=1.7$, $p_2=p_3=1.5$, $p_4=1.2$, $p_5=1$, $p_6=1.4$, (d) $s=1$, $p_o=1.8$, $p_1=2.8$, $p_2=2.5$, $p_3=2$, $p_4=p_5=1$, $p_6=1.5$.

En una forma más general puede utilizarse una función que representa el contorno de la estructura fina mediante:

$$\rho(\phi) = \left\{ \frac{2 p_o k^2}{s^2 \sin^2 p_a(2\phi)} \left[1 - p_i (1 - s^2 \sin^2 p_o(2(\phi - \phi_o)))^{\frac{p_a}{2}} \right]^{p_a} \right\}^{\frac{p_a}{2}}, \quad (52)$$

para la cual se dan los casos límites siguientes:

$$\begin{cases} s = 0, p_i = 1 \forall i = 0, \dots, 6 & \text{representa una circunferencia de radio } k \\ s = 1, p_i = 1 \forall i = 0, \dots, 6 & \text{representa un cuadrado de lado } k \end{cases} \quad (53)$$

Diferentes tipos de estructuras obtenidas se muestran en la figura 16(a) de acuerdo a los parámetros k y s utilizados en cada caso. Los mismos parámetros pueden tomar diferentes valores (los cuales pueden ser inclusive aleatorios) en cada ciclo de la construcción del fractal, para obtener estructura fina variable en cada paso de la iteración. En la figura 16(b) se muestra una forma de implementar algunas operaciones interesantes como rotación y cambio de escala, mediante los valores que adopte el parámetro k y el ángulo inicial ϕ_o . En la figura 17 se muestran algunos ejemplos de las curvas obtenidas a través de la ecuación (51) cuando se varían los parámetros p_i .

3. Operaciones con conjuntos fractales.

La superposición de conjuntos fractales y las operaciones que con ellos puedan realizarse tiene consecuencias sobre la dimensión del conjunto final resultante. A partir de dos conjuntos fractales puede obtenerse otro con una dimensión diferente y en consecuencia, aplicado por ejemplo al caso de scattering esto deberá tener incidencia sobre los campos electromagnéticos dispersados. Mostramos aquí algunas de las operaciones que en el futuro podrán ser tenidas en cuenta en algunas aplicaciones.

3.1. Producto cartesiano de Fractales.

Si $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^m$ son ambos conjuntos de Borel. Su producto cartesiano es:

$$\mathbb{E} \times \mathbb{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{F}\}, \quad (54)$$

entonces se verifica que:

$$\dim_H(\mathbb{E} \times \mathbb{F}) \geq \dim_H \mathbb{E} + \dim_H \mathbb{F} \quad (55)$$

3.2. Intersección de Fractales.

Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F} \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos de Borel, y sea G un grupo de transformaciones sobre \mathbb{R}^n . Entonces:

$$\dim_H (\mathbb{E} \cap \sigma(\mathbb{F})) \geq \dim_H \mathbb{E} + \dim_H \mathbb{F} - n \quad , \quad (56)$$

para un conjunto de movimientos $\sigma \in G$ de medida positiva en los siguientes casos:

- a) G está en el grupo de similitudes y \mathbb{E} y \mathbb{F} son conjuntos arbitrarios.
- b) G es el grupo de movimientos rígidos, \mathbb{E} es arbitrario y \mathbb{F} es una curva, superficie o manifold rectificable.
- c) G es el grupo de movimientos rígidos y \mathbb{E} y \mathbb{F} son arbitrarios, con $\dim_H \mathbb{E} > \frac{1}{2}(n+1)$ o bien $\dim_H \mathbb{F} > \frac{1}{2}(n+1)$.

4. Aleatorización y cuasi-aleatorización.

Si, por ejemplo, se utilizan generadores aleatorios para cada componente de un dominio con una distribución periódica, se pueden obtener diferentes configuraciones de cuasi-aleatoriedad en la estructura. Aleatorizar un fractal clásico determinístico es el primer y más simple acercamiento para generar una forma 'natural'.

El método para incluir aleatoriedad en la construcción del "copo de nieve" de Koch requiere únicamente una pequeña modificación a la construcción clásica. Se reemplazará un segmento de línea recta, por una línea partida en cuatro segmentos, cada uno un tercio tan largo como el segmento original. De igual forma, la forma del generador será la misma. Sin embargo, existen dos posibles orientaciones en el paso de reemplazo: el ángulo pequeño puede ir ya sea a la izquierda o derecha, ver figura 18.

Escogeremos una de estas orientaciones de forma aleatoria en cada paso de reemplazo. Llamemos al resultado la curva aleatoria de Koch. Al componer tres diferentes versiones de la curva de Koch colocadas de manera que sus puntas finales coincidan obtenemos el copo de nieve aleatorio de Koch. En este proceso algunas características del fractal de Koch se mantendrán. Por ejemplo, la dimensión fractal de la curva será la misma (alrededor de 1.26). Pero la apariencia visual es drásticamente diferente; se ve mucho más parecida a la línea costera de una isla que la curva original del copo de nieve.

En el ejemplo de fractales aleatorios tratado en el párrafo anterior, se tuvieron que tomar decisiones aleatorias en el proceso de construcción. Cada decisión se basó en la elección de una de dos posibilidades. Ahora daremos un ejemplo donde se utiliza un número aleatorio de un intervalo entero, el gasket aleatorizado de Sierpinski. El proceso de construcción es idéntico al original. Pero, para este caso cada paso en el triángulo se subdivide en cuatro subtriángulos, de los que el central es removido. Sin embargo, en la subdivisión podemos ahora permitir subtriángulos que no son equiláteros. En cada lado del triángulo que se subdividirá, escogemos luego un punto

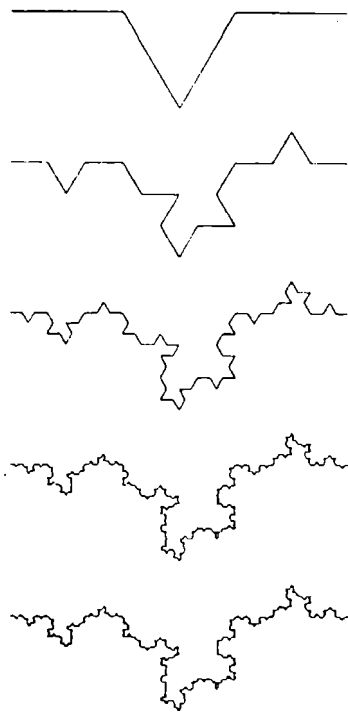
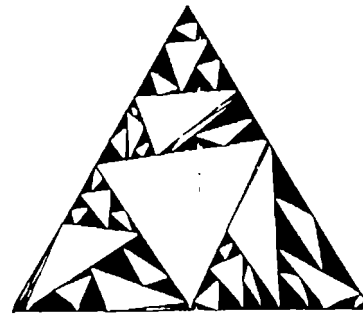
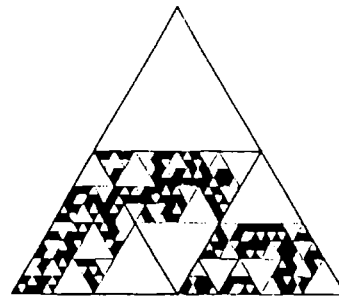


Figura 18 – Aleatorización en el fractal de Koch



(a)



(b)

Figura 19 – Dos ejemplos de aleatorización en la forma y distribución de los triángulos en el gasket de Sierpinski.

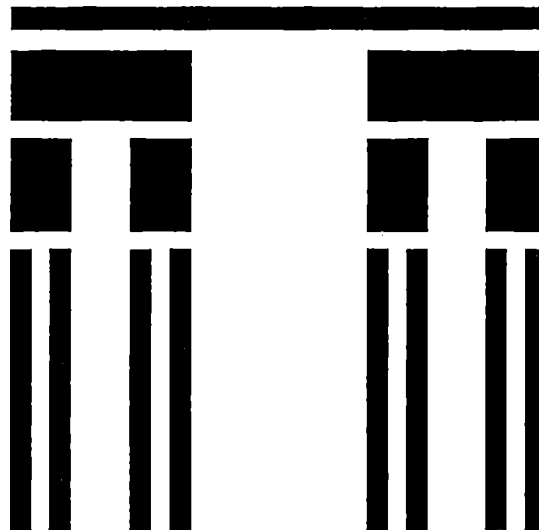


Figura 20 – Ejemplo de multifractalidad en el conjunto de Cantor.

aleatoriamente y conectamos los tres puntos para obtener cuatro subtriángulos. El subtriángulo central es removido y el procedimiento se repite, ver figura 19(a).

Ahora discutiremos la modificación del gasket de Sierpinski. Esto nos llevará directamente a un fenómeno físico con muchas aplicaciones: percolación. De nuevo utilizamos la subdivisión estándar en triángulos equiláteros. Una modificación sencilla es entonces, escoger uno de los cuatro subtriángulos en el paso de reemplazo aleatoriamente y removerlos. Así el subtriángulo central puede removerse, pero uno diferente podría seleccionarse y removerse, ver figura 19(b). En esta figura podemos ver clusters pequeños y grandes de triángulos conectados. Un cluster se define como una elección de triángulos negros, que se encuentran conectados a través de sus lados y se encuentran completamente rodeados por triángulos blancos. Hay un cluster que conecta los tres lados del triángulo más grande? Cual es la probabilidad de que eso suceda? Cual es el tamaño esperado del cluster más grande? Preguntas de este tipo son relevantes en la teoría de percolación, cuyas respuestas se utilizarán en las aplicaciones incluidas en el próximo capítulo.

Sea \mathbb{H} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n con la clausura $\bar{\mathbb{H}}$, sea $m \geq 2$ un entero, y sea también $0 < b < 1$. Tomamos Ω la clase de secuencias decreciente $\bar{\mathbb{H}} = \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \Lambda_3 \supset \dots$ de conjuntos cerrados satisfaciendo las siguientes condiciones: el conjunto Λ_k es una unión de m^k conjuntos cerrados $\bar{\mathbb{H}}_{i_1, \dots, i_k}$ donde $i_j = 1, \dots, m$ ($1 \leq i \leq k$) y $\bar{\mathbb{H}}_{i_1, \dots, i_k}$ es similar a \mathbb{H} o bien es el conjunto vacío.

Asumimos que, para cada i_1, \dots, i_k el conjunto $\bar{\mathbb{H}}_{i_1, \dots, i_k}$ contiene $\mathbb{H}_{i_1, \dots, i_k, i}$ ($1 \leq i \leq m$) y que estos conjuntos son disyuntos, esto es, esencialmente equivalentes a la condición de conjunto abierto. Si $\bar{\mathbb{H}}_{i_1, \dots, i_k}$ es no vacío, escribimos $C_{i_1, \dots, i_k} = |\mathbb{H}_{i_1, \dots, i_k}| / |\bar{\mathbb{H}}_{i_1, \dots, i_k}|$ para la relación de similaridad entre sucesivos conjuntos y tomamos $C_{i_1, \dots, i_k} = 0$ si $\bar{\mathbb{H}}_{i_1, \dots, i_k}$ es el conjunto vacío. Escribimos luego: $\mathbb{F} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$.

Sea P la medida de probabilidad de una familia de subconjuntos de Ω tal que las C_{i_1, \dots, i_k} son variables random. Supongamos que dadas $C_{i_1, \dots, i_k} > 0$, o sea que $\bar{\mathbb{H}}_{i_1, \dots, i_k}$ es no vacío, C_{i_1, \dots, i_k} tiene idéntica contribución a C_i para cada secuencia i_1, \dots, i_k y para $1 \leq i \leq m$. Asumimos que las C_{i_1, \dots, i_k} son independientes, excepto que, para cada secuencia i_1, \dots, i_k , las variables random $C_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, C_{i_1, \dots, i_k, m}$ necesiten no ser independientes. Esto define una distribución de probabilidad auto-similar sobre las construcciones de Ω . Escribimos N para el número (random) de las C_1, \dots, C_k que son positivas; esto es, el número de conjuntos $\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_k$ que son no vacíos.

Teorema 4. El conjunto \mathbb{F} descrito tiene la probabilidad q de estar vacío, donde q es la menor raíz no negativa de la ecuación polinomial:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m \hat{P}(n=j) x^j = x \quad , \quad (57)$$

con probabilidad $1 - q$ el conjunto \mathbb{F} tiene dimensiones de Hausdorff y box-counting dadas por la solución s de:

$$E \left[\sum_{j=0}^m C_j^s \right] = 1 \quad , \quad (58)$$

siendo E la esperanza matemática.

5. Autocorrelación de funciones fractales.

La propiedad característica del cambio de escala, que mejor puede relacionarse con hechos físicos y posibilidad de una medición es la autocorrelación que poseen internamente las estructuras fractales. Esta autocorrelación se puede verificar a diferentes escalas en el conjunto fractal. Dada la función $f(x)$, la función autocorrelación se define por:

$$C(\beta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int [f(x + \beta) - \langle f(x) \rangle] [f(x) - \langle f(x) \rangle] dx \quad , \quad (59)$$

si $|\beta|$ es pequeño, se satisface la ley de potencia:

$$C(0) - C(\beta) \cong c |\beta|^{4-2s} \quad , \quad (60)$$

y además, se esperaría que s sea la dimensión de box. Existe una íntima relación con el espectro de potencia de la función f :

$$S(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T f(x) \exp[i x \cdot w] d^n x \right| \quad , \quad (61)$$

cuya transformada de Fourier esta relacionada con la función autocorrelación mediante:

$$C(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp[i \beta \cdot w] d^n w \quad (62)$$

6. Multifractalidad.

Las medidas multifractales están relacionadas con el estudio de una distribución de cantidades físicas u otros soportes geométricos. El soporte puede ser un plano ordinario, la superficie o un volumen, o puede ser el mismo fractal. La idea es que una medida fractal puede ser representada en términos de subconjuntos fractales interrelacionados teniendo diferentes exponentes de escalamiento, lo cual lleva a nuevas aplicaciones a los sistemas físicos. Es por esto que el estudio de los multifractales es un campo de rápido desarrollo.

Si se modifica la construcción del conjunto de Cantor (ver figura 20, considerando la barra inicial con una densidad ρ_o , una longitud l_o y en consecuencia una masa μ_o . La operación de aplicar el generador consiste ahora en cortar la barra inicial en dos barras de masa $\mu_1 = \mu_2 = 0.5 \mu_o$ y con una longitud para cada parte

El proceso conserva la masa, así que:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = \mu_o \quad , \quad (63)$$

lo cual constituye un proceso de aglutinamiento ya que lleva la distribución de masa original a regiones pequeñas con alta densidad. Los segmentos de masa de longitud l_i están dados por:

$$\mu_i = l_i^\alpha \quad \text{siendo } \alpha = \ln 2 / \ln 3 \quad , \quad (64)$$

y la densidad de cada pequeña porción es:

$$\rho_i = \frac{\mu_i}{l_i} = \rho_o l_i^{\alpha-1} \quad , \quad (65)$$

la cual diverge cuando $l_i \rightarrow 0$.

7. Conclusiones y futuros desarrollos.

A partir de los desarrollos que se obtuvieron para diferentes estructuras fractales, utilizando funciones periódicas rectangulares, clásicas de la teoría óptica, pueden derivarse interesantes resultados desde el punto de vista básico y aplicado. La extensión a diversas formas fractales que pueden emplearse en diferentes modelos físicos permiten estudiar el efecto de cada componente. Fundamentalmente es este el punto central: la descomposición o construcción de conjuntos y/o funciones fractales a partir de conjuntos y/o funciones más simples.

Es nuestro interés extender tales construcciones con distribuciones periódicas a otros conceptos señalados al final de este capítulo, tales como aleatoriedad y multifractalidad, para poder estudiar fenómenos aún más complejos desde el punto de vista físico en relación a las propiedades de interacción onda-geometría. Esto es muy importante, ya que las propiedades de los objetos tendrán consecuencias sobre los campos de scattering, algunas de las cuales se verán en el siguiente capítulo.

La función densidad de Cantor se ha definido en una forma similar a las funciones de Walsh. Con esto se ve que ambas funciones pertenecen a una misma clase, y poseen un escalamiento. Sin embargo es sencillo probar que las funciones de Walsh forman un conjunto ortonormal completo y las densidades de Cantor no.

Referencias

1. G. I. Barenblatt, *Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics*, Consultants Bureau, Second Russian edition, Moscow (1983).
2. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc. (1988).
3. M.F. Barnsley, *The Fractal Transform*, Jones and Bartlett, Boston (1992).
4. K. Falconer, *Fractal Geometry* (John Wiley & Sons, Chichester, England, 1990).
5. J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, New York and London, 1988.
6. A. D. Freitas and S. Coutinho, "Multifractality of generalized Fibonacci profiles", *Fractals* 1(3), 694-701 (1993).
7. J. D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, John Wiley & Sons, New York (1978).
8. D. L. Jaggard and T. Spielman, "Triadic Cantor target diffraction", *Microw. and Opt. Tech. Lett.* 5(9): 460-466, 1992.
9. M. Lehman, "Diffraction by a fractal transmittance obtained from a multiplicative superposition of periodical rectangular functions", *Fractals* 6(4), 313-326 (1998)
10. M. Lehman, "Fractal diffraction gratings decomposed as periodical domains", enviado a *Fractals*.
11. M. Lehman, "Cantor fractals and periodical functions and diffraction", enviado a *J. Opt. Soc. Am. A*.
12. M. Lehman and M. Garavaglia, "In-order correlation of fractal transmittances defined cyclically", en *Far- and Near-Field Optics: Its Physics and Information Processing*, Suganda Jutamulia and Toshimitsu Asakura, Eds., *Proceedings of SPIE* Vol. 3467, 288-295 (1998).
13. A. Le Méhauté, *Fractal Geometries: Theory and Applications*, CRC Press Inc., Boca Raton (1991).
14. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco: Freeman (1982).
15. P. R. Mossopust, *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*, Academic Press, Inc., USA (1994).
16. M. E. Montiel, A. S. Aguado and E. Zaluska, "Fourier Series Expansions of Irregular Curves", *Fractals*, Vol. 5, N° 1, 105-119 (1997).

17. M. Obert, Numerical Estimates of the Fractal Dimension D and the Lacunarity L by the Mass Radius Relation, *Fractals* **1**(3), 711-721 (1993).
18. F. B. Tatom, "The relationship between fractional calculus and fractals", *Fractals* **3**(1), 217-229 (1995).

Bibliografía complementaria para los capítulos I y II

1. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco: Freeman (1982).
2. A. Le Méhauté, *Fractal Geometries: Theory and Applications*, CRC Press Inc., Boca Raton (1991).
3. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc. (1988).
4. *Fractals and Disordered Systems*, A. Bunde and S. Havlin, Springer, Berlin, 1996
5. *Fractals*, J. Feder, Plenum Press, New York and London, 1988.
6. K. Falconer, *Fractal Geometry* (John Wiley & Sons, Chichester, England, 1990).
7. H. Bauer, *Probability Theory and Elements of Measure Theory* (Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1972)
8. A. Aharony, J. Feder, *Fractals in Physics*, Proceedings of an International Conference honoring B. B. Mandelbort on his 65th. birthday, Venice, France (1989).
9. A. Amann, L. Cederbaum, W. Gans, *Fractals, Quasicrystals, Chaos, Knots and Algebraic Quantum Mechanics*, Maratea, 1987 Proceedings, Boston-Dordrecht.: Kluwer (1988).
10. D. Avnir, *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, Wiley, New York (1989).
11. S. Baldo, C. Tricot, *Introduction à la Topologie des Ensembles Fractals*, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal (1991).
12. G.I. Barenblatt, *Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics*, Consultants Bureau, Second Russian edition, Moscow (1983).
13. M.F. Barnsley, *Fractal Approximation*, Special Issue of the Journal of Constructive Approximations, 5(1), New York (1989).
14. M.F. Barnsley, *The Fractal Transform*, Jones and Bartlett, Boston (1992).
15. M.F. Barnsley, F. Anson, *The Fractal Transform*, Wellesley, MA (1993).
16. M.F. Barnsley, S. Demko, *Chaotic Dynamics and Fractals*, Academic Press, Orlando, FL. (1987).
17. M.F. Barnsley, L. P. Hurd, *Fractal Image Compression*, Wellesley, MA (1993).
18. C. C. Barton, P. R. LaPointe, *Fractal Geometry and its Use in the Earth Sciences*, Plenum, New York (1994).

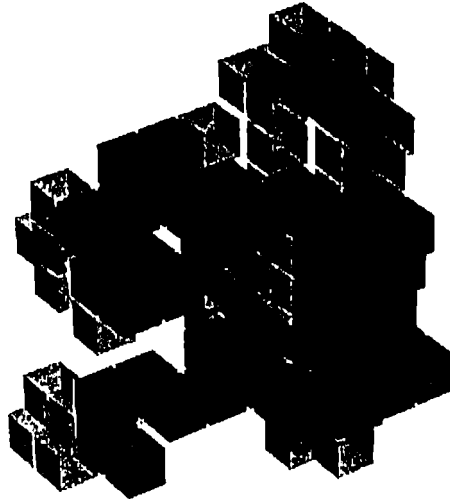
19. C. C. Barton, P. R. LaPointe, *Fractal Geometry and its use in the Geosciences and in Petroleum Geology*, (1994).
20. J. B elari, S. Dubuc, *Fractal Geometry and Analysis*, Kluwer, Boston (1991).
21. K. S. Birdi, *Fractals in Chemistry, Geochemistry, and Biophysics*, Plenum, New York (1993).
22. N. Boccara, M. Daoud, *Physics of Finely divided Matter*, Springer, Berlin (1985).
23. B. A. Bondarenko, *Generalized Pascal Triangles and Pyramids; their Fractals, Graphs, and Applications*, Publishing House of the Uzbek Academy of Sciences, Tashkent (USSR) (1990).
24. A. B. Cambel, *Applied Chaos Theory*, Academic, New York (1992).
25. G. Cherbit, *Fractals: Dimensions Non Enti eres et Applications*, Masson, Paris (1987).
26. F. Cramer, *Chaos and Order*, VCH, New York (1993).
27. R. L. Devaney, *Chaos, Fractals and Dynamics. Computer Experiments in Mathematics*, Addison Wesley, Reading, MA (1990)
28. R. L. Devaney, *Dynamical Systems, Chaos and Fractals*, Special issue of the College Mathematics Journal 22(1) (1991).
29. R. L. Devaney, *A first Course in Dynamical Systems: Theory and Experiment*, Addison Wesley, Reading, MA. (1992).
30. R. L. Devaney, L. Keen, *Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics*, A.M.S. Short Course 1988, Lecture Notes, American Mathematical Society, Providence, RI. (1988).
31. S. Dubuc, *Atelier de G eom etrie Fractale*, Montréal 1986 Proceedings, Special issue of Annales des Sciences Mathématiques du Québec 11(1) (1987).
32. R. A. Earnshaw, T. Crilly, H. Jones, *Fractals and Chaos*, Springer, New York (1990).
33. G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, New York (1990).
34. G. A. Edgar, *Classics on Fractals*, Addison-Wesley, Reading MA (1993).
35. K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, University Press, Cambridge, UK. (1984).
36. F. Family, D. P. Landau, *Kinetics of Aggregation and Gelation*, Athens, GA 1985 Proceedings, Amsterdam, North Holland (1984).

37. F. Family, T. Vicssek, *Dynamics of Fractal Surfaces*, World Scientific, Singapore (1991).
38. L. T. Fan, D. Neogi, M. Yashima, *Elementary Introduction of Spatial and Temporal Fractals, Lecture Notes in Chemistry*, Springer, New York (1991).
39. M. Farge, J. Hunt, Vassilicos, *Wavelets, Fractals and Fourier Transforms: New Developments and New Applications*, Oxford University Press (1993).
40. J. Feder, T. Jossang, *Fractals in Oil Technology*, Fracton (limited distribution), Oslo (1988).
41. P. Fischer, W. Smith, *Chaos, Fractals and Dynamics*, M. Dekker, New York (1985).
42. M. Fleischmann, D. Tildesley, R. C. Ball, *Fractals in the Natural Sciences*, Princeton University Press, London (1990).
43. J. F. Gouyet, *Physique et Structures Fractales*, Masson, Paris (1992).
44. M. Gratzel, J. Weber, *Fractal Structures, Fundamentals and Applications in Chemistry*, Special issue of *New Journal of Chemistry* 14(3), March (1990).
45. A. J. Hurd, B. B. Mandelbrot, D. A. Weitz, *Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems, Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston*, Pittsburgh PA: Materials Research Society (1987).
46. A. J. Hurd, *Fractals: Selected Reprints*, American Association of Physics Teachers, College Park MD (1989).
47. Integrated Systems, Inc., *Snapshots: Three Color Photo Images Using the Fractal Formatter*, A. K. Peters, Willesley MA (1992).
48. R. Jullien, R. Bottet, *Aggregation and Fractal Aggregation*, World Scientific, Singapore (1987).
49. R. Jullien, L. Peliti, R. Rammal, N. Boccara, *Universalities in Condensed Matter, Les Houches, 1988 Proceedings*, New York: Springer (1988).
50. R. Jullien, J. Kertész, P. Meakin, D. E. Wolf, *Surface Disordering: Growth, Roughening, and Phase Transitions*, Nova Science, New York (1993).
51. H. Jürgens et al., *Chaos and Fraktale, Spektrum der Wissenschaft*, Heidelberg (1989).
52. J. H. Kaufman, J. E. Martin, P. W. Schmidt, *Fractal Aspects of Materials, 1989, Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston*, Materials Research Society, Pittsburgh, PA. (1989).
53. S. K. Kachigan, *The Fractal Notion: A Modern Analytical Tool*, Radius Press, New York (1992).

54. B. Kaye, *A Random Walk through Fractal Dimensions*, VCH, New York (1989).
55. B. Kaye, *Chaos & Complexity: Discovering the Surprising Pattern of Science and Technology*, VCH, New York (1993).
56. F. Korvin, *Fractal Models in the Earth Sciences*, Elsevier, Amsterdam (1992).
57. R. B. Laibowits, B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja, *Fractal Aspects of Materials, Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston*, Materials Research Society, Pittsburgh, PA. (1985).
58. L. Lam, *Nonlinear Physics for Beginners: Fractals, ...*, World Scientific, Singapore (1991).
59. H. Laurwerier, *Fractals: Endlessly Repeated Geometrical Figures*, Princeton University Press (1991).
60. T. Lindstrom, *Brownian Motion on Nested Fractals*, American Mathematical Society, Providence RI. (1990).
61. B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja, *Fractal Aspects of Materials: Metal and Catalyst Surfaces, Powders and Aggregates, Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston*, Materials Research Society, Pittsburgh, PA. (1984).
62. J. E. Martin, A. J. Hurd, *Fractals in Material Science, M.R.S. Fall Meeting Course Notes*, Materials Research Society, Pittsburgh, PA. (1989).
63. G. Mayer-Kress, *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems, Pecos River, 1985 Proceedings*, Springer, New York (1986).
64. R. K. Miller, T. C. Walker, *Fractals & Chaos: Exploiting Real-World Applications*, SEAI Technical Publications, Norcross, GA. (1991).
65. R. K. Miller, T. C. Walker, *Chaos, Fractals and Non-Linear Dynamic Systems*, Future Technology Surveys, Lilburn, GA. (1989).
66. F. C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics*, Wiley, New York (1992).
67. A. V. Neimark, *Percolation and Fractals in Colloid and Interface Science*, World Scientific, Singapore (1994).
68. T. F. Nonnenmacher, *Fractals in Biology and Medicine & bul.*, Birkhauser, Basel (1993).
69. L. Nottale, *Fractal Space-time and Microphysics, Towards a Theory of Scale Relativity*, World Scientific, Singapore (1992).
70. H.-O. Peitgen, J. M. Henriques, L. F. Penedo, *Fractals in the Fundamental and Applied Sciences, Proceedings fo the IFIP Conference on Fractals, Lisbon, June 1990*, Elsevier, Amsterdam (1992).

71. H.-O. Peitgen, P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer, New York (1986).
72. H.-O. Peitgen, D. Saupe, *The Science of Fractal Images*, Springer, New York (1988).
73. M. Peruggia, *Discrete Iterated Function Systems*, A. K. Peters, Wellesley, MA. (1993).
74. L. Pietronero, *Fractals' Physical Origins and Properties*, Erice, 1988 Proceedings, Plenum, New York (1989).
75. L. Pietronero, E. Tossati, *Fractals in Physics, Trieste, 1985 Proceedings*, North Holland, Amsterdam (1986).
76. A. G. D. Philip, A. Robucci, M. Frame, K. W. Philip, *Series on Fractals I: Midgets on the Spike*, L. Davis Press, Schenectady, NY. (1991).
77. E. R. Pike, L. A. Lugiato, *Chaos, Noise and Fractals*, Adam Hilger, Bristol (1987).
78. R. Pynn, A. Skjeltorp, *Scaling Phenomena in disordered Systems*, Geilo, 1985 Proceedings, Plenum, New York (1985).
79. P. J. Reynolds, *On Clusters and Clustering: From Atoms to Fractals*, North Holland, Amsterdam (1991).
80. P.J. Reynolds, *On Cluster and Clustering*, North Holland, Amsterdam (1993).
81. M. O. Robbins, J. P. Stokes, T. Witten, *Scaling in Disordered Materials, Fractal Systems and Dynamics, Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston*, Materials Research Society, Pittsburgh, PA. (1990).
82. B. Sapoval, *Les Fractales/Fractals*, Aditech, Paris (1990).
83. D. W. Schaefer, R.B. Laibowitz, B. B. Mandelbrot, S. H. Liu, *Fractal Aspects of Materials II, Extended Abstracts of a Symposium, Boston*, Materials Research Society, Pittsburgh, PA (1986).
84. D. Schertzer, S. Lovejoy, *Non-Linear Variability in Geophysics: Scaling and Fractals*, Kluwer, Dordrecht (Holland) & Norwell, MA. (1991).
85. M. Schöder, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*, Freeman, New York (1991).
86. M. F. Shlesinger, B. B. Mandelbrot, R. J. Rubin, *Proceedings of the Githersburg Symposium on Fractals in the Physical Sciences, Special issue of the Journal of Statistical Physics 39*, Plenum, New York (1984).
87. J. M. Smith, *Fundamentals of Fractals for Engineers and Scientists*, Wiley, New York (1991).

88. H. E. Stanley, N. Ostrowsky, *On Growth and Form: Fractal and Non Fractal Patterns in Physics, Gargèse, 1985 Proceedings*, Nijhoff-Kluwer, Boston & Dordrecht (1986).
89. H. E. Stanley, N. Ostrowsky, *Random Fluctuations and Pattern Growth: Experiments and Models, Gargèse, 1988 Proceedings*, Kluwer, Boston (1988)
90. D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor & Francis, London (1992).
91. C. Tricot, *Bourbes et Dimension Fractale*, Springer & Montreal: Editions Science et Culture, Paris (1993).
92. D. L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press (1992).
93. T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific, Singapore (1992).
94. T. Vicsek, M. Shlesinger, M. Matsuchita, *Fractals in Natural Sciences: International Conference on the Complex Geometry in Nature (Budapest, 1993 Proceedings)*, World Scientific, Singapore (1994).
95. D. A. Weitz, L. M. Sander, B. B. Mandelbrot, *Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems, Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston*, Materials Research Society, Pittsburgh PA. (1988).
96. B. J. West, *Fractal Physiology and Chaos in Medicine*, World Scientific, Singapore (1990).
97. K. R. Wicks, *Fractals and Hyperspaces*, Springer (1991).
98. T. Peli, Multiscale fractal theory and object characterization, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 7, No 6, 1101-1112 (1990)
99. S. Kyriacos, S. Buczowski, F. Nekka and L. Cartilier, A modified box counting method, *Fractals*, Vol. 2, No. 2, 321-324 (1994).
100. J. Thelier, Estimating fractal dimension, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 7, No 6 (1990)



CAPITULO III

RESULTADOS DE LA TEORIA ESCALAR Y APLICACIONES EN PROCESAMIENTO OPTICO DE LA INFORMACION

1. Estudios en las regiones de Fresnel y Fraunhofer.

Los casos más conocidos de redes de difracción que han dado lugar a numerosos estudios y aplicaciones en óptica son aquellos que poseen una periodicidad o una cuasi-periodicidad en su estructura. Sin embargo, numerosos estudios han surgido a lo largo de esta década principalmente, relativos a la difracción debido a redes planas con una cierta geometría particular, lo que representa un concepto más general que el anterior, pues las incluye.

Las propiedades geométricas propias de un objeto fractal deben, en alguna forma, quedar reflejadas en su interacción con las ondas electromagnéticas. Tal es el objeto de estudio en las regiones de campo lejano y cercano. Si bien en esta primera instancia tenemos definidas las propiedades de la estructura fractal, la finalidad de estos estudios es poder resolver lo que se denominaría Problema Inverso, esto es, a partir de la estructura del campo poder determinar las propiedades geométricas del objeto. Aquí se hace hincapié en algunos resultados obtenidos de la teoría escalar de la difracción y se presentan imágenes de la intensidad de campo medida con sistemas opto-electrónicos. El objetivo es poder establecer parámetros adecuados que nos permitan reconocer propiedades de la estructura geométrica.

1.1. Determinación de la dimensión y otras propiedades por métodos ópticos.

La forma más directa de obtener información sobre la geometría de un objeto es digitalizar una imagen de este. El sistema es sencillo y fácil de montar a los fines experimentales. Fundamentalmente, se requiere una cámara de video y una computadora, con una plaqueta adecuada de procesamiento de imágenes. Los datos almacenados en la forma de un arreglo bidimensional de píxeles cuyos valores contienen diferentes niveles de grises o colores corresponden a las regiones ocupadas por la imagen. Los datos pueden evaluarse utilizando los métodos clásicos para el cálculo de la dimensión D . Existen diferentes procedimientos como el de box counting, Kolmogorov, Minkowski, Hurst o Fourier, que permiten realizar el análisis dimensional (teniendo cada uno sus ventajas y desventajas), pero que en general llevan a diferentes resultados. El principal cuestionamiento al procesamiento de imágenes surge porque en general se tratan imágenes contenidas en el espacio tridimensional mediante métodos que procesan en el plano (de dos dimensiones).

Tal como lo ha señalado Vicksek, "la dimensión fractal de la proyección de un objeto en un plano $(d-M)$ -dimensional (d es la dimensión del espacio que lo contiene) es la misma que su dimensión fractal original si $D < d - M$. Desafortunadamente, solo existen argumentos heurísticos que soportan esta suposición y pueden ocurrir desviaciones considerables de ella, especialmente cuando D es un poco más pequeña que $d - M$. Adicionalmente, si D es mayor que $d - M$ el método no es aplicable, ya que en este caso la proyección es simplemente un objeto $(d - M)$ -dimensional". Sin embargo, dado que en este trabajo estamos por el momento interesados en fractales

contenidos en un espacio bidimensional, no tendremos este tipo de problemas aunque es bueno señalarlo para ser considerado en futuros desarrollos. Además, debido a que las estructuras poseen algún tipo de simetría intrínseca, pueden implementarse métodos sencillos para la medida de la dimensión, o bien clasificar los patrones de difracción efectuando un corte a la imagen. Con esto, se puede calcular la dimensión de un cierto patrón de intensidad utilizando el método de Richardson, es decir, midiendo el perímetro total para una cierta unidad de longitud característica para diferentes rangos de esta y graficando la curva log – log como conviene hacer en estos casos, para una mejor visualización de los resultados.

La propagación del campo electromagnético dispersado por una cierta transmitancia, en el marco de una teoría escalar de la difracción, está regida por la conocida integral de Fresnel:

$$U(\xi, \eta; z) = \frac{1}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} T(\xi_o, \eta_o) \exp \left\{ -i \frac{k}{2z} [(\xi - \xi_o)^2 + (\eta - \eta_o)^2] \right\} d\xi d\eta \quad , \quad (1)$$

siendo $T(\xi_o, \eta_o)$ la función transmitancia.

A partir de la propiedad de escalamiento para una función fractal, mostrada en la ecuación (5) del capítulo anterior, el campo electromagnético a lo largo de su propagación se expresa entonces mediante:

$$U(\xi, \eta; z) = \frac{m^2}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} m^{-\alpha} U(\xi_o, \eta_o) \exp \left\{ -i \frac{k m^2}{2z} \left[\left(\frac{\xi}{m} - \xi_o \right)^2 + \left(\frac{\eta}{m} - \eta_o \right)^2 \right] \right\} \quad , \quad (2)$$

donde α es un exponente de escalamiento. Esto es, el campo cumple con la propiedad:

$$U(\xi, \eta; z) = m^{-\alpha} U \left(\frac{\xi}{m}, \frac{\eta}{m}; \frac{z}{m^2} \right) \quad , \quad (3)$$

que es la relación de escalamiento dentro de la región de Fresnel. Como se ve, existe un relación de escala tanto en las coordenadas transversales como en la dirección de propagación del campo.

Esta propiedad también se vuelve importante para poder establecer la relación de escala en campo lejano a partir de la correspondiente a la transmitancia fractal. Ya ha sido probado (A. Lakhtakia and H. J. Caulfield) que para el caso general de transformadas integrales definidas mediante:

$$F_n(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, v) v^n f(v) dv \quad , \quad (4)$$

siendo $f(v)$ una función con la propiedad de escalamiento antes mencionada y $K(\xi, v)$ el núcleo de la transformada integral, que esta función transformada $F(\xi)$ tiene la propiedad de escalamiento dado por:

$$F_n(\xi) = \lambda^{n+D+1} F_n(\lambda \xi) \quad , \quad (5)$$

donde D es la dimensión fractal de $f(v)$ y $n = 0$ para el caso de la transformada de Fourier, como aquí nos interesa.

2. Región de Fraunhofer.

En un sentido general, para una transmitancia bidimensional, el campo lejano en la región de Fraunhofer está dado por:

$$U(x_1, y_1) = \frac{e^{i \left[k z + \frac{k}{2z} (x_1^2 + y_1^2) \right]}}{i \lambda z} \mathcal{F} \{ U(x_o, y_o) \} \quad , \quad (6)$$

siendo (x_o, y_o) el sistema de coordenadas adherido a la red de difracción y (x_1, y_1) el sistema de coordenadas sobre una pantalla transversal a la dirección de propagación z . Además, λ es la longitud de onda de la radiación electromagnética y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el vector de onda. El operador $\mathcal{F} \{ \}$ indica la transformada de Fourier en el espacio de las frecuencias $f_x = \frac{x_1}{\lambda z}$, $f_y = \frac{y_1}{\lambda z}$.

Si la red de difracción se expresa como producto de funciones periódicas, como es el caso de las funciones de densidad fractal definidas en el capítulo anterior, entonces el campo se obtiene mediante:

$$U(x_1, y_1) = \frac{e^{i \left[k z + \frac{k}{2z} (x_1^2 + y_1^2) \right]}}{i \lambda z} \otimes_{i=1}^N \mathcal{F} \{ R(x_o, y_o) \} \quad , \quad (7)$$

donde el símbolo \otimes indica la convolutoria de la transformada de Fourier del campo sobre cada una de las componentes periódicas $R(x_o, y_o)$. En esta misma forma se pueden calcular los casos de una red de Cantor, la carpeta y el triángulo de Sierpinski.

Si se considera que los elementos constitutivos de estructura fina son con forma de rectángulos uni-dimensionales como es el caso de una red de Cantor, el campo puede expresarse en una forma sencilla:

$$U(x_1) = e^{i \left[k z + \frac{k}{2z} x_1^2 \right]} \frac{\Delta}{i \lambda z} \text{sinc} \left[\frac{\pi \Delta}{\lambda z} x_o \right] \sum_{j=1}^{3^N} C(x_{oj}) e^{i 2 \pi \frac{x_1}{\lambda z} x_{oj}} \quad (8)$$

siendo $C(x_{oj})$ la densidad de Cantor tratada en el capítulo anterior.

Por ejemplo, cuando la dimensión fractal es $D = \ln 2 / \ln 3 \cong 0.6109$, la distribución de intensidad queda expresada a través de:

$$I(x_1) = \left| \frac{\Delta}{\lambda z} \right|^2 \left| \text{sinc} \left[\frac{\pi \Delta}{\lambda z} x_o \right] \right|^2 \left| \sum_{j=1}^{3^N} \left\{ \prod_{i=1}^N \left\{ \sum_{l=1}^{3^i} \text{rect} \left[\frac{x_o - x_{oi}}{\frac{\Delta}{3^i}} \right] \right\} \right\}^{g_i} e^{i 2 \pi \frac{x_1}{\lambda z} x_{oj}} \right|^2 \quad (9)$$

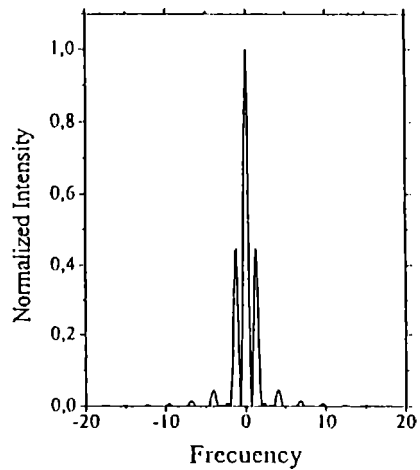
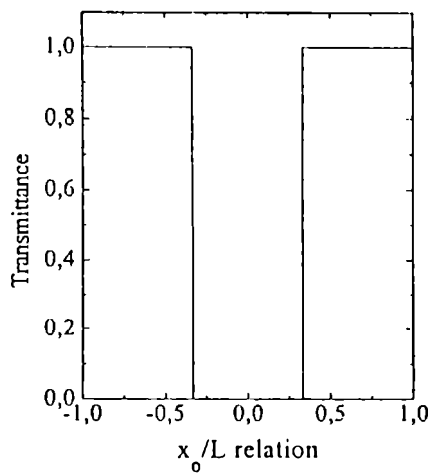
donde se ve claramente que esta se divide en un factor de forma y un factor de estructura. El primero está relacionado con la envolvente del patrón de difracción y

el último con la denominada estructura fina, es decir la forma en que se distribuyen los elementos más pequeños de la estructura que producen la difracción.

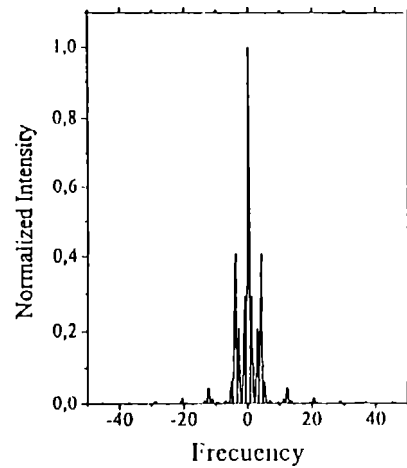
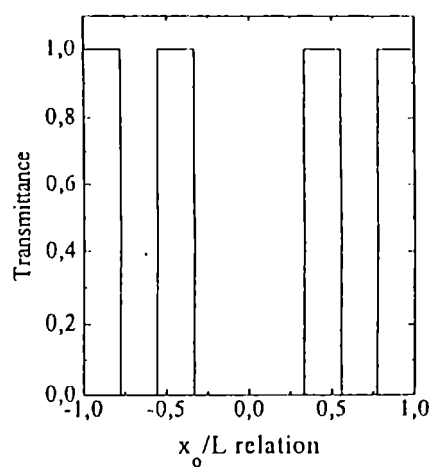
La expresión dada por la ecuación (30) del capítulo anterior para la red de difracción y la obtenida para la distribución de intensidad correspondiente a partir de la ecuación (9), nos permite estudiar la contribución de cada componente periódica sobre el patrón de difracción completo.

Las figuras 1(a) – 1(c) muestran los primeros órdenes de la transmitancia fractal de Cantor junto a sus correspondientes patrones de intensidad para $N = 1, 2$ y 3 respectivamente, calculados en la región de Fraunhofer. Como ha sido observado por otros autores, en el caso de fractales de Cantor y de Koch, la distribución de intensidad puede ser dividida en un dominio periódico y un dominio fractal. La extensión de ambos dominios está relacionada con la estructura fina compleja del objeto, o el segmento más fino en el caso del conjunto de Cantor. En esta forma, cuando una función rectangular con componente periódica de menor período es agregada el orden o estado se incrementa y son obtenidas mayores frecuencias espaciales en el patrón de intensidad. La distribución individual de la intensidad difractada para cada componente periódica se muestra en la figura 2 (para una red de Cantor de orden 6), donde los máximos secundarios están siempre en relación directa con el cambio de escala de cada componente. Para las componentes periódicas de orden 6, los máximos secundarios coinciden y están superpuestos y entonces el patrón de intensidad cubre la región contenida bajo la envolvente sinc^2 . De tales resultados se desprende la conveniencia señalada por algunos autores de utilizar orden 5 o 6 como mínimo, para la obtención de buenos resultados en el estudio de la relación geométrica entre el objeto y la intensidad de campo.

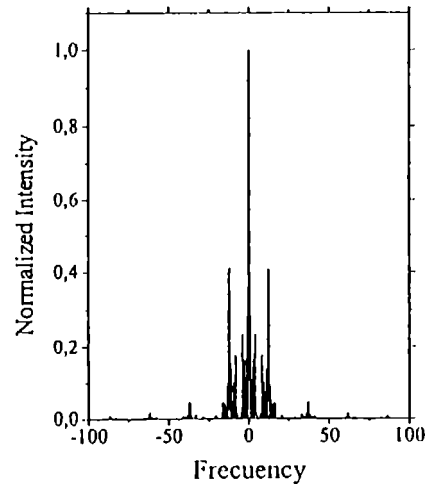
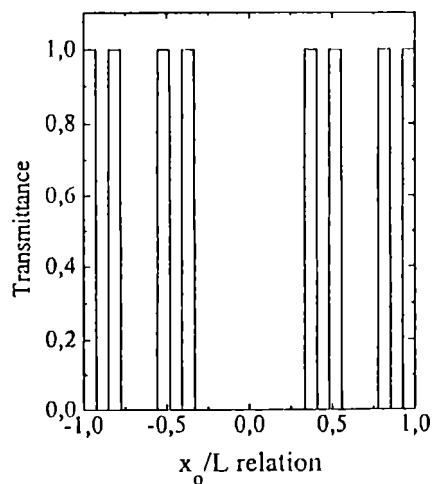
Como ya se demostró para el “target” de Cantor, el patrón de intensidad para un dado orden fractal es una versión magnificada de los órdenes previos. Una modulación entre órdenes sucesivos puede ser observada dentro del dominio fractal, con un factor de cambio de escala de 3. Entonces, en el patrón de intensidad hay una auto-similaridad implícita directamente derivada de la correspondiente auto-similaridad del objeto fractal. Sin embargo, la forma en la cual la densidad de Cantor $\mathcal{C}(x_0)$ ha sido definida, permite filtrar cualquier componente periódica si los correspondientes exponentes g_i son iguales a cero. En este caso, la propiedad de reescalamiento o magnificación para dos órdenes diferentes es perturbada y hay una pérdida de auto-similaridad en el objeto y en el patrón de intensidad difractado por él. Este hecho muestra la alta sensibilidad del campo en relación a la geometría del objeto. El filtrado de cualquier componente cambia el factor de estructura de la distribución de intensidad inicial dada en la ecuación (9), pero no cambia el factor de forma como se muestra en la figura 3 donde se han considerado diferentes secuencias para los exponentes g_i . En la figura 3(a) se ve el patrón de difracción del fractal de Cantor de orden 6, con $g_i = 1$. Los sucesivos resultados corresponden a los siguientes estados: 3(b): $g_1 = g_2 = 0, g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = 1$; 3(c): $g_1 = g_2 = 1, g_3 = g_4 = 0, g_5 = g_6 = 1$, 3(d): $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = 0, g_6 = 1$. En dichas figuras se pueden observar las distribuciones de intensidad para estados intermedios y compararse con el caso del patrón para el fractal de Cantor mostrado en la figura 3(a). En nuestros cálculos tendremos en cuenta estas secuencias, además del caso: $g_1 = g_2 = 1, g_3 = g_4 = g_5 = 0$,



(a)



(b)



(c)

Figura 1 – Ordenes 1, 2 y 3 junto con su correspondiente patrón de difracción en cada caso para una red de Cantor de orden 6.

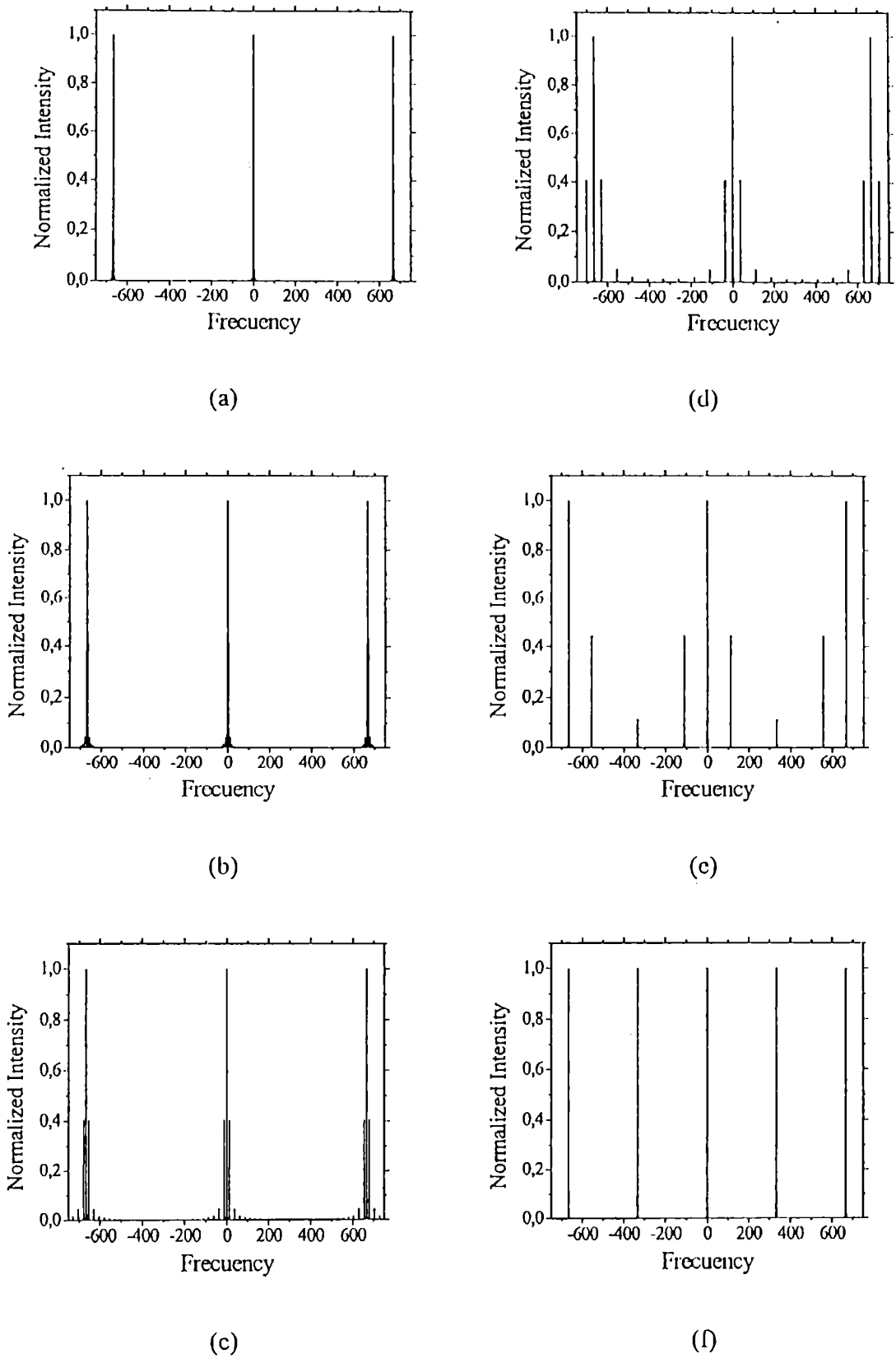
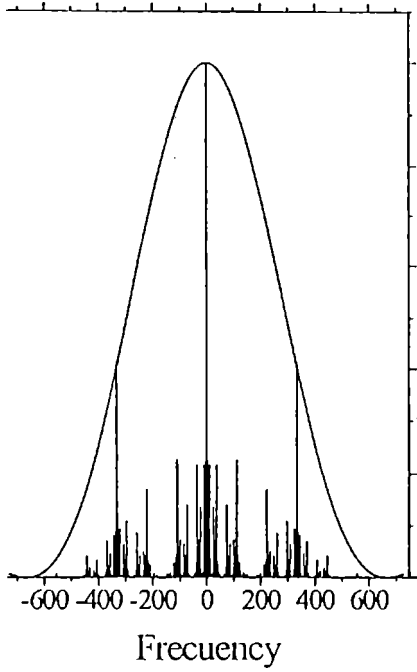
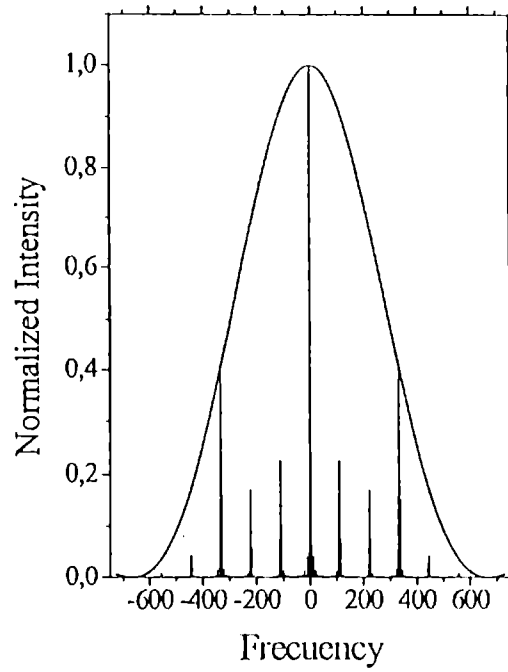


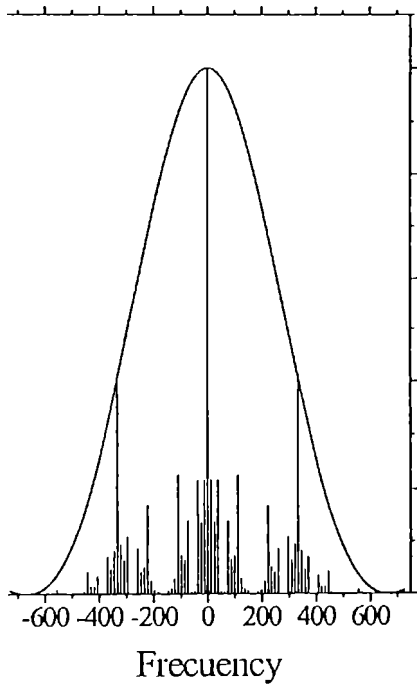
Figura 2 – Patrón de difracción para cada una de las componentes periódicas que componen una red de difracción de Cantor de orden 6.



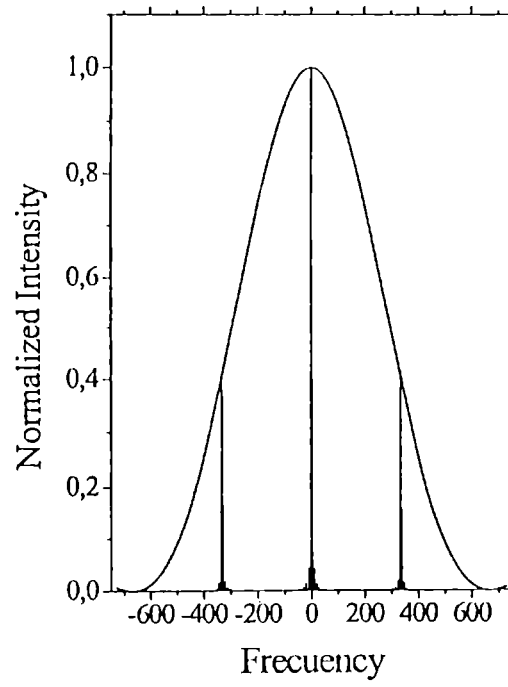
(a)



(c)



(b)



(d)

· Patrón de difracción para diferentes secuencias de filtrado en la función densidad de Cantor
 $g_2=g_3=g_4=g_5=g_6=1$; (b) $g_1=g_2=0, g_3=g_4=g_5=g_6=1$; (c) $g_1=g_2=1, g_3=g_4=0, g_5=g_6=1$; (d)
 $g_1=g_2=g_3=g_4=g_5=0, g_6=1$

$g_6 = 1$. Resultados experimentales que muestren la diferente estructura fina en cada caso pueden ser obtenidos con el montaje de difracción general de la figura 4(a). Con el mismo se obtuvieron las imágenes de los estados correspondientes a los casos (a) y (b) anteriormente calculados, los cuales se muestran en la figura 4(b).

Todo esto otorga un marco experimental, con una base formal anteriormente detallada, que puede ser utilizado para describir propiedades básicas o bien con fines de procesamiento óptico, cuando las operaciones entre conjuntos o la convolución puedan llegar a ser utilizadas o implementadas ópticamente.

Para una mejor visión de la estructura del campo lejano difractado para los casos de fractales de Sierpinski y Koch emplearemos los operadores de cambio de escala, traslación y rotación definidos ahora sobre funciones, y calculando la transformada de Fourier de la correspondiente función transmitancia.

En una forma general se tiene que, para un fractal $F_N(\mathbf{x})$ de orden N , donde $n(N)$ es el número de elementos que lo constituyen (esto es, el número de veces que se ha aplicado el generador al iniciador), el campo puede expresarse como:

$$F_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n(N)} M[m] T[\mathbf{d}(k)] R[\theta(k)] F_o(\mathbf{x}) \quad , \quad (10)$$

donde los operadores y la transformada correspondiente se definen mediante:

$$\left\{ \begin{array}{l} T[\mathbf{d}(k)] f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{d}(k)) \quad y \quad \mathcal{F}\{T[\mathbf{d}(k)] f(\mathbf{x})\} = \exp[2\pi i \epsilon q L \cos(\phi - \alpha)] \tilde{f}(q) \quad , \\ R[\theta(k)] f(\mathbf{x}) = f(x; \psi - \theta(k)) \quad y \quad \mathcal{F}\{R[\theta(k)] f(\mathbf{x})\} = \tilde{f}(q; \phi - \alpha) \quad , \\ M[m] f(\mathbf{x}) = f\left(\frac{1}{m} \mathbf{x}\right) \quad y \quad \mathcal{F}\{M[m] f(\mathbf{x})\} = m \tilde{f}(m q) \quad , \end{array} \right. \quad (11)$$

siendo \mathbf{d} el vector de traslación, θ el ángulo de rotación (ambos dependen del elemento k considerado) y m es la magnificación; el cambio de coordenadas es $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$ en la transformada de Fourier. El resultado matemático que se obtiene para la expresión de la transformada de Fourier del fractal de Koch en estas condiciones es:

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_N(q) = & 3^{-N} L \sum_{k_1=1}^4 \sum_{k_2=1}^4 \dots \sum_{k_N=1}^4 \exp \left\{ 2\pi i q L \sum_{r=1}^N 3^{-r} \epsilon(k_r) \right. \\ & \left. \cos(\phi - \alpha(k_r) - \Theta_{r-1}) \sin [3^{-N} L q \cos(\phi - \Theta_N)] \right\} \quad , \end{aligned} \quad (12)$$

y algunas imágenes del patrón de difracción en campo lejano conteniendo diferentes iniciadores pueden observarse en la figura 5.

En la figura 6(a) se ve un cálculo de la distribución de intensidad difractada para la componente de orden 2 en el caso de la carpeta de Sierpinski y luego algunas imágenes

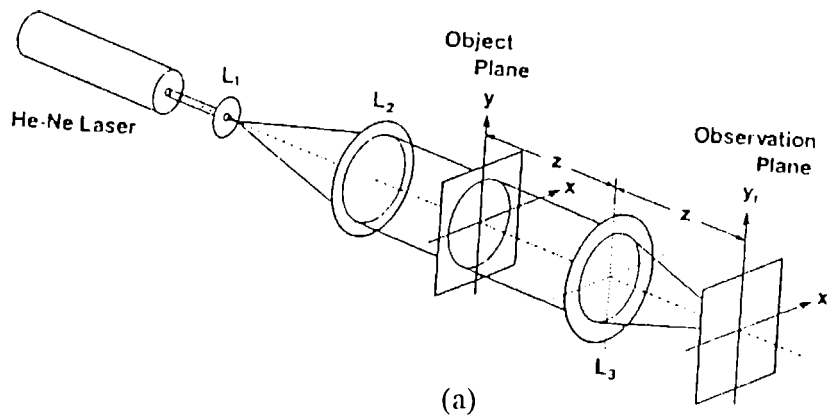
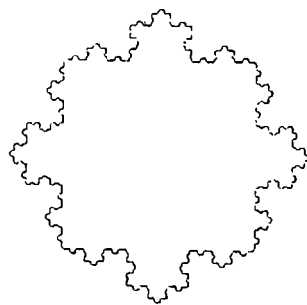
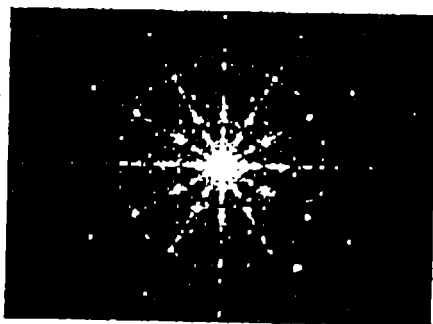


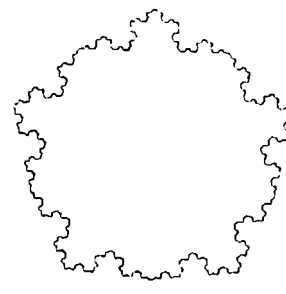
Figura 4 – (a) Montaje experimental, (b) patrón de intensidad para las secuencias: $g_1=g_2=0$, $g_3=g_4=g_5=g_6=1$ y $g_1=g_2=g_3=g_4=g_5=g_6=1$ respectivamente.



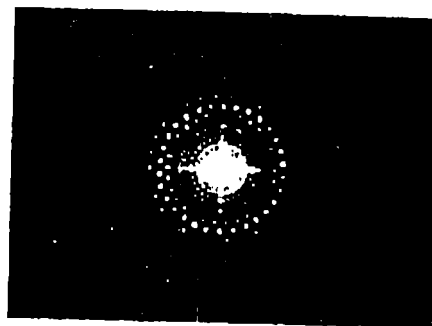
(a)



(b)



(a)



(b)

Figura 5 – Fractal de Koch con iniciador cuadrado y pentagonal junto con su correspondiente patrón de difracción (J. Uozumi, T. Asakura, K. E. Peiponen, R. Silvennoinen and M. Savolainen, Education and Training in Optics, Vol. I, p. 139, 1993)

obtenidas con cámara *CCD* para la misma en campo lejano (figura 6(b)) para órdenes fractales 3 y 4 respectivamente.

En la figura 7 se muestran diferentes casos de redes de difracción fractal. En la primera imagen (figura 7(a)) se puede visualizar el patrón de difracción cuando la componente de orden 2 ha sido filtrada en el caso de la carpeta de Sierpinski. La estructura del patrón de difracción y el filtrado de la primera componente para el caso del triángulo de Sierpinski se muestra en las figuras 7(b) respectivamente. La pequeña imagen entre ellas nos muestra un detalle de la estructura del máximo central. No se observan diferencias entre ambos casos debido a que el principal aporte corresponde a las componentes de estructura fina, y en este caso el filtrado de la componente de orden 1 tiene el mismo efecto que el de una pantalla complementaria. Es interesante destacar también que puede verse claramente que la estructura total resulta de una superposición de funciones rectángulo a lo largo de tres direcciones diferentes. Estas pueden verse en las imágenes y son una prueba del tipo de construcción que hicimos en el capítulo anterior.

Para mostrar los patrones de difracción de otras estructuras y las variaciones que tienen lugar en las componentes de estructura fina, vemos primeramente en la figura 7(c) los patrones para los dos primeros órdenes de la carpeta de Sierpinski. La diferencia entre los patrones de intensidad está obviamente, relacionada en forma directa con la geometría de la estructura inicial y esto nos sirve para poder predecir como será la distribución de intensidad ya que será el generador el que se repita al igual que su correspondiente distribución espectral en campo lejano. Todo esto es útil para poder estudiar estructuras cada vez mas complejas, al igual que diferentes combinaciones entre ellas.

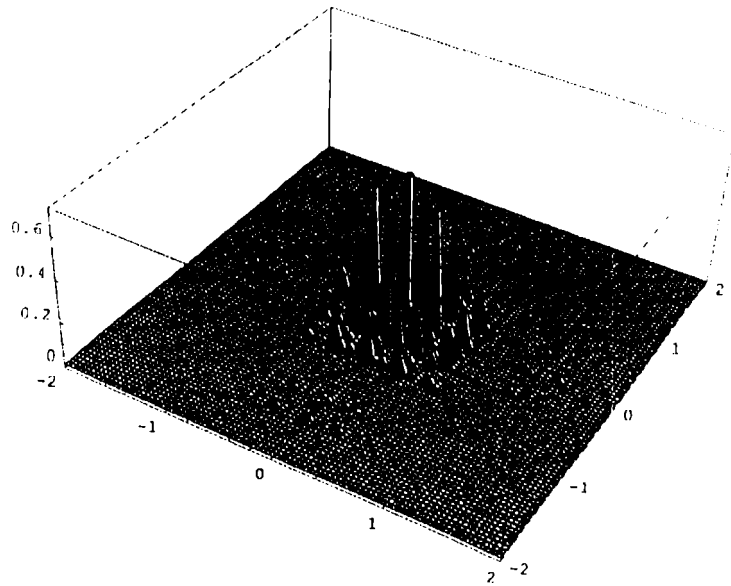
Como un ejemplo de lo anterior tenemos la combinación de círculos y cuadrados dispuestos en diferente forma, lo que por supuesto tiene también su influencia sobre el patrón de difracción, y esto a su vez representa un resultado útil para procesamiento óptico de la información. Observamos en la figura 7(d) que una mejor distribución de los órdenes difractados se consigue cuando todos los elementos de estructura fina son de la misma naturaleza y que en el primer caso, aún siendo muy pequeños los círculos que intervienen (podrían aproximarse a cuadrados, pues están en el orden 3) conservan influencia sobre la distribución de intensidad. Estos son también hechos interesantes a los fines de procesamiento óptico.

Debemos destacar también que pueden obtenerse estructuras fractales con una cierta aleatoriedad o cuasi-aleatoriedad en su estructura geométrica, esto da lugar a nuevos estudios relacionados con temas estadísticos que aquí no vamos a desarrollar, pero los resultados presentados pueden ser fácilmente extendidos a estos caso. Como ya hemos señalado también, una cuasi-aleatoriedad puede ser obtenida si se incluyen este tipo de variaciones en una o varias de las componentes de la transmitancia fractal.

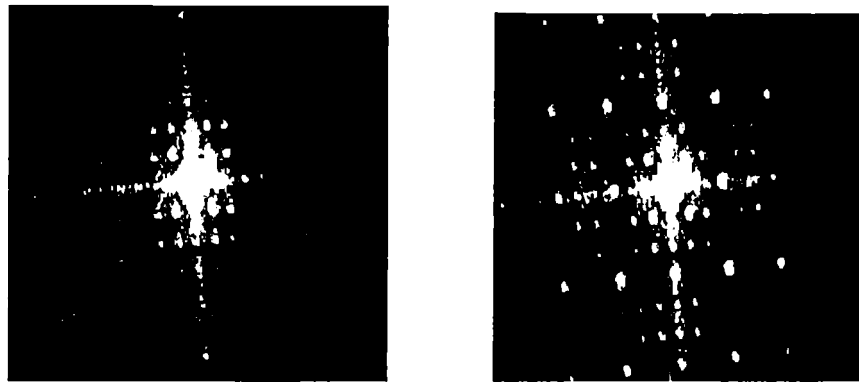
Existen otros resultados interesantes obtenidos por otros autores que involucran el concepto de masa fractal, con la cual se puede expresar una propiedad exponencial:

$$M(r) \propto r^D \quad ,$$

para una distribución de masa dentro del radio r .

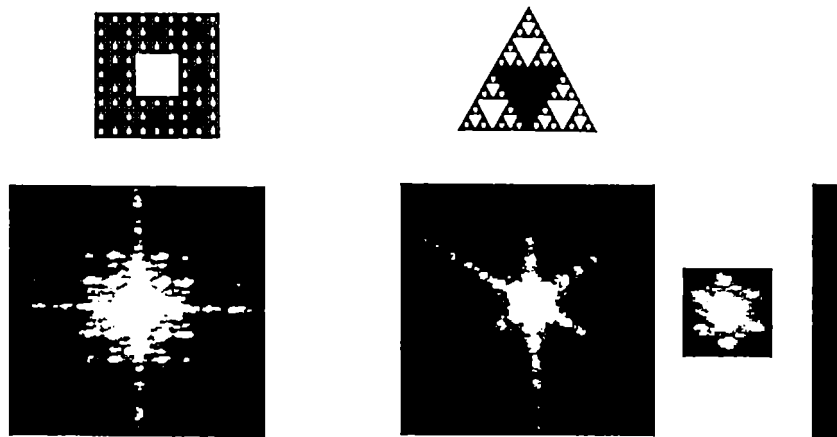


(a)



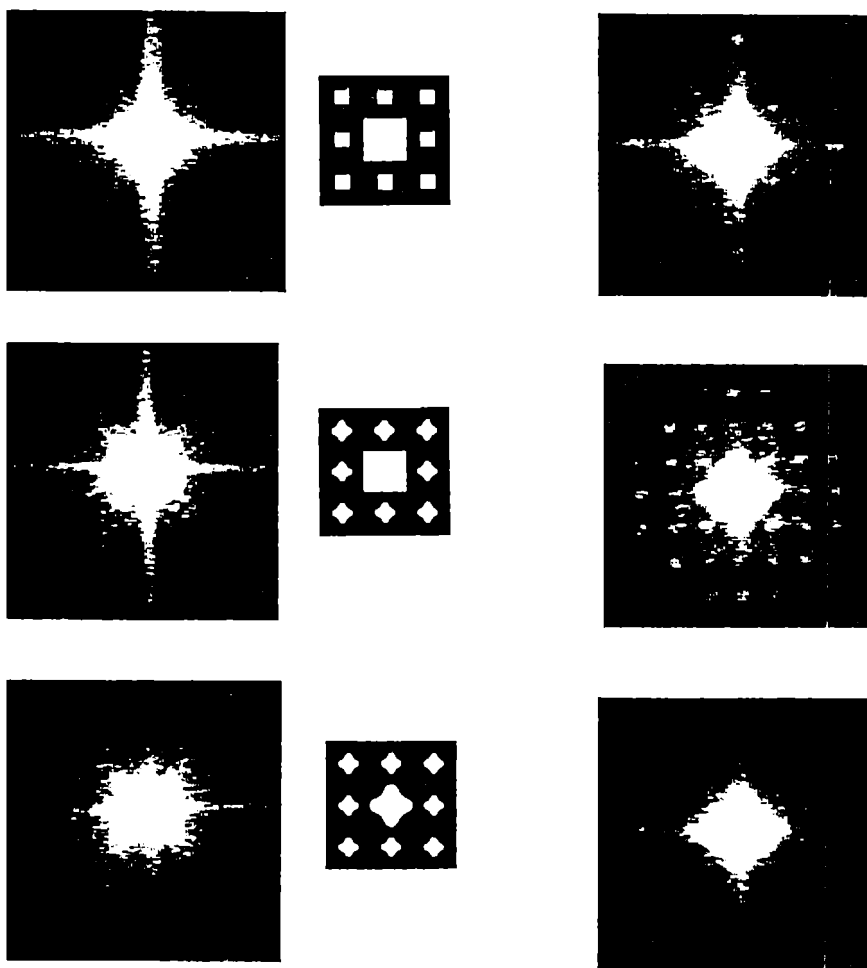
(b)

Figura 6 - Patrones de intensidad para la carpeta de Sierpinski: (a) componente periódica de orden 2. (b) Distribuciones de intensidad para órdenes 3 y 4 respectivamente.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 7 – Patrones de difracción en diferentes casos: (a) Carpeta de Sierpinski con orden 2 filtrada. (b) Dos casos para el triángulo de Sierpinski. (c) Generadores con compleja en la carpeta de Sierpinski. (d) Combinación de estructuras circulares

En el caso de transparencias rotacionales (fractales construídos usando rotaciones, ver figura 8(a)), para las cuales se tiene una distribución multifractal de masa sobre $\mathbb{F} \left(= \bigcup_{\alpha=1}^N \mathbb{F}_\alpha \right)$, la distribución de intensidad puede ser determinada desde (figura 8(b)):

$$I[f(x)] = \sum_{\alpha=1}^{\infty} p_\alpha I[f(S_\alpha x)] \quad (13)$$

donde p_α es la masa total sobre \mathbb{F}_α y f es una función cualquiera. Las propiedades fractales quedan demostradas en el factor de estructura del patrón de intensidad, las cuales siguen una ley exponencial del tipo:

$$\langle S_N \rangle = q^{-D} \quad , \quad (14)$$

tal como es mostrado en la figura 8(c), siendo ahora q la variable de frecuencias espaciales en la región de campo lejano y D la dimensión fractal.

2.1. Auto-similaridad del campo difractado.

Todas las situaciones consideradas anteriormente pueden ser cuantificadas a través de la función auto-similaridad (T. Asakura *et al.*), la cual se define como la correlación de la intensidad del campo y una versión magnificada de ella:

$$S(m) = \frac{\int_{\mathcal{R}} [I_{sf}(\xi) - \langle I_{sf}(\xi) \rangle] \left[I_{sf}\left(\frac{\xi}{m}\right) - \left\langle I_{sf}\left(\frac{\xi}{m}\right) \right\rangle \right] d\xi}{\sqrt{\int_{\mathcal{R}} [I_{sf}(\xi) - \langle I_{sf}(\xi) \rangle]^2 d\xi \int_{\mathcal{R}} \left[I_{sf}\left(\frac{\xi}{m}\right) - \left\langle I_{sf}\left(\frac{\xi}{m}\right) \right\rangle \right]^2 d\xi}} \quad , \quad (15)$$

donde la integral se calcula dentro de la región \mathcal{R} para la función I_{sf} , que es el factor de estructura de la distribución de intensidad, o sea que a partir del patrón de intensidad se debe normalizar este con la envolvente.

Se ha observado que la función auto-similaridad tiene una periodicidad que coincide con potencias de 3, y también está relacionada con el fractal de Cantor utilizado aquí, que es para los valores $m = 3^1, 3^2, 3^3, \dots$, aunque los valores de los picos para la distribución de intensidad obtenidos en tales posiciones dependen del orden o estado. Aquí, se ha utilizado un fractal de orden 6, así que también es posible calcular un grado de auto-similaridad para estructuras incompletas cuando algunas componentes periódicas son filtradas correlacionando la distribución de intensidad de la red en este caso y su versión magnificada por un factor $m = 3$.

Los patrones correspondientes se muestran en las figuras 9(a) – 9(d), donde se pueden ver claramente los dominios fractal y periódico. El comportamiento de los picos de auto-similaridad para una magnificación 3 correspondientes a la secuencia usada en los patrones de intensidad de la figura 3 se muestran en la tabla 1. Dos casos

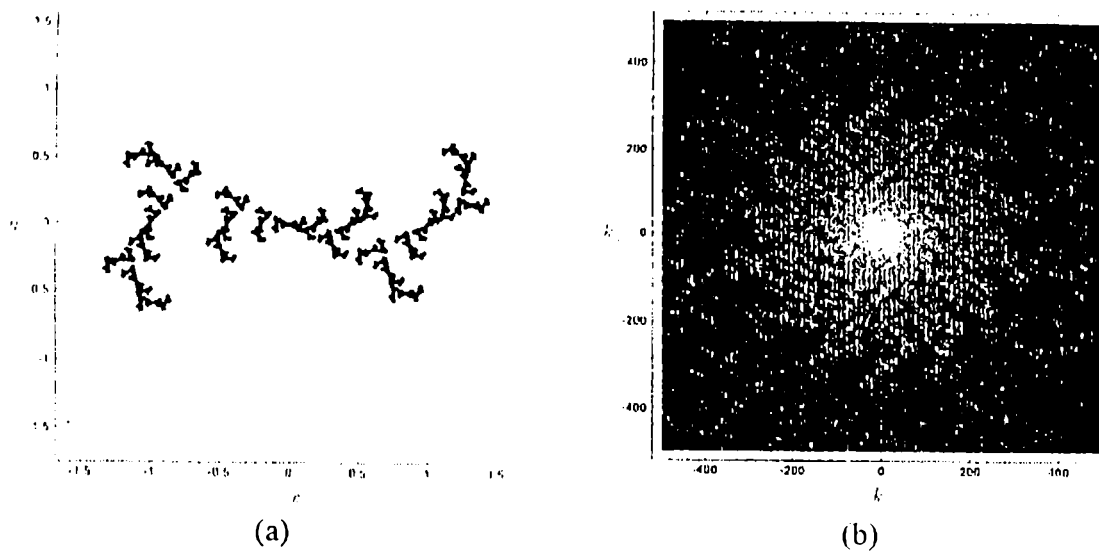
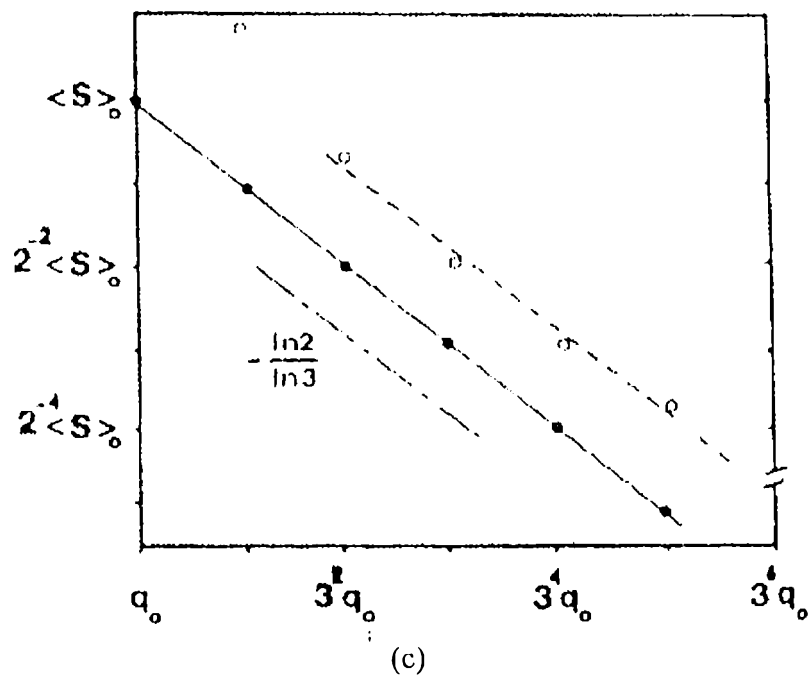


Figura 8 – (a) Conjunto fractal con rotación de orden 7 y (b) su patrón factor de estructura. (C. P. Dettmann and N. E. Frankel, "Structure factor of deterministic fractals with rotations", *Fractals*, Vol. 1, N° 2, 253-261, 1993).

(c) Gráfico *log-log* dando las variaciones del orden 7 del factor de estructura $\langle S_7(q) \rangle$ para las barras de Cantor. Se comparan valores teóricos (•) y experimentales (o). (C. Allain and M. Cloitre, "Optical diffraction on fractals", *Phys. Rev. B*, Vol. 33, N° 5, 3566-3569, 1986)



son considerados: (1) la región \mathcal{R} coincide aproximadamente con el intervalo central $[-168, 168]$ (ver figura 9(a)) y (2) para un intervalo mayor que el mencionado en (1), pero incluyendo la región $[-L, L]$. A partir de los resultados de auto-similaridad mostrados en la tabla 1, puede verse que los tres primeros tienen relativamente buena auto-similaridad y los dos restantes valores corresponden a una auto-similaridad pobre, también cuando la región se extiende en el dominio periódico, tiene un menor grado de auto-similaridad. Evidentemente, la contribución de las componentes rectangulares más cercanas a la de menor período, para un cierto orden del objeto fractal, son las que tienen más peso para evaluar el parámetro $\mathcal{S}(m)$. La envolvente incluida en la figura 6 es el factor de forma que no se modifica; sin embargo, el grado de auto-similaridad tiene cambios. La división en dos dominios: forma y estructura, es una consecuencia de la transformada de Fourier en la región de Fraunhofer. Entonces, se asume como un buen método comparar no sólo órdenes sucesivos, sino también cuando algunas componentes periódicas son filtradas en el orden fractal. El patrón de difracción fue dividido en dos dominios: fractal y periódico; sin embargo, desde las figuras 9(a) – 9(d) puede verse que hay un dominio periódico intrínseco con la contribución de componentes periódicas.

El objeto fractal considerado aquí tiene un número finito de componentes periódicas, lo cual se refleja en la estructura fina compleja del patrón de Fraunhofer. Para estados altos del fractal de Cantor o si el objeto es generado por un número finito de funciones periódicas, se espera que el patrón de difracción ocupe toda la región bajo la envolvente. Para un caso hipotético de este tipo no habrá una clara división entre los dominios fractal y periódico, pero el filtrado a alguna componente rectangular da como resultado la introducción de diferencias dentro del dominio periódico intrínseco. Tal comportamiento se enfatiza de acuerdo con el número finito de componentes periódicas o iteraciones utilizadas para generar el fractal. El proceso multiplicativo con funciones rectangulares es, en alguna medida, reflejado en la superposición de las frecuencias espaciales correspondientes a cada una de ellas.

Unos gráficos más completos de la función auto-similaridad son mostrados en la figura 10, también para los estados de la tabla 1. Un mayor valor para $\mathcal{S}(m)$ corresponde a un alto grado de superposición entre la función intensidad y alguna versión magnificada de ella. El análisis que sería hecho con estos resultados es muy similar al caso en el que la auto-similaridad en las regiones de Fresnel y Fraunhofer sean comparadas. Grandes valores en la función auto-similaridad son observados para el factor $\log_3(m) = 1, 2, 3, \dots$, pero hay un decrecimiento cuando el fractal es incompleto. Además, desde la ecuación (9) y la información dada por las figuras 9(a) – (d), el factor de estructura es caracterizado principalmente por la función rectangular con menor período a través de los correspondientes picos en el patrón de intensidad, si bien el grado de auto-similaridad es principalmente caracterizado por el balance entre las componentes periódicas que originan mayores y menores frecuencias espaciales en el patrón de difracción.

Otro parámetro importante para distinguir la auto-similaridad para diferentes casos es la función contraste (o visibilidad):

$$C = \frac{\mathcal{S}_{\max} - \mathcal{S}_{\min}}{\mathcal{S}_{\max} + \mathcal{S}_{\min}}, \quad (16)$$

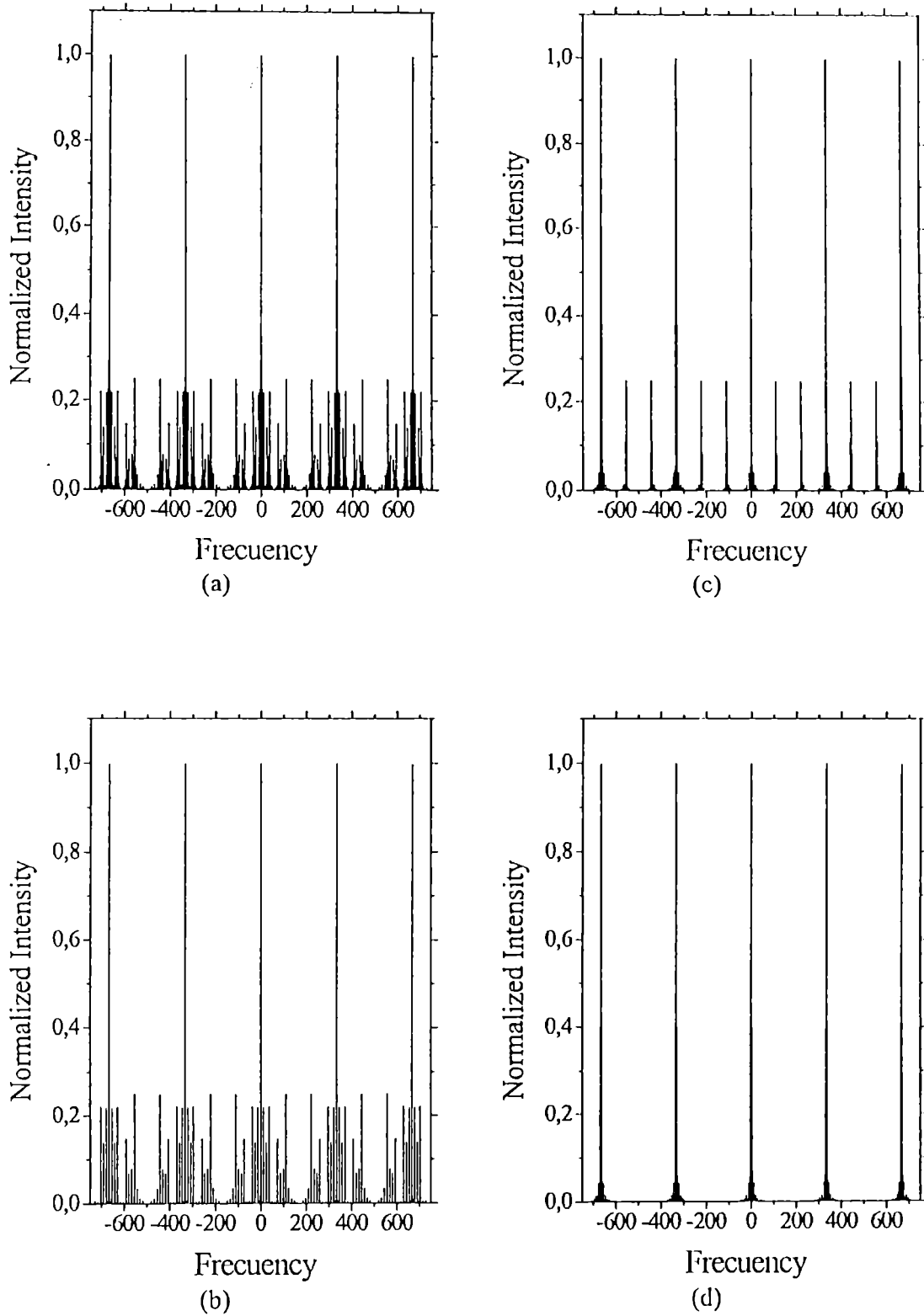


Figura 9 – Dominios periódico, fractal y periódico intrínseco para los casos ya mostrados en la figura 3. Aquí se pueden ver mas claramente cada dominio, pues el patrón de intensidad ha sido normalizado con la envolvente..

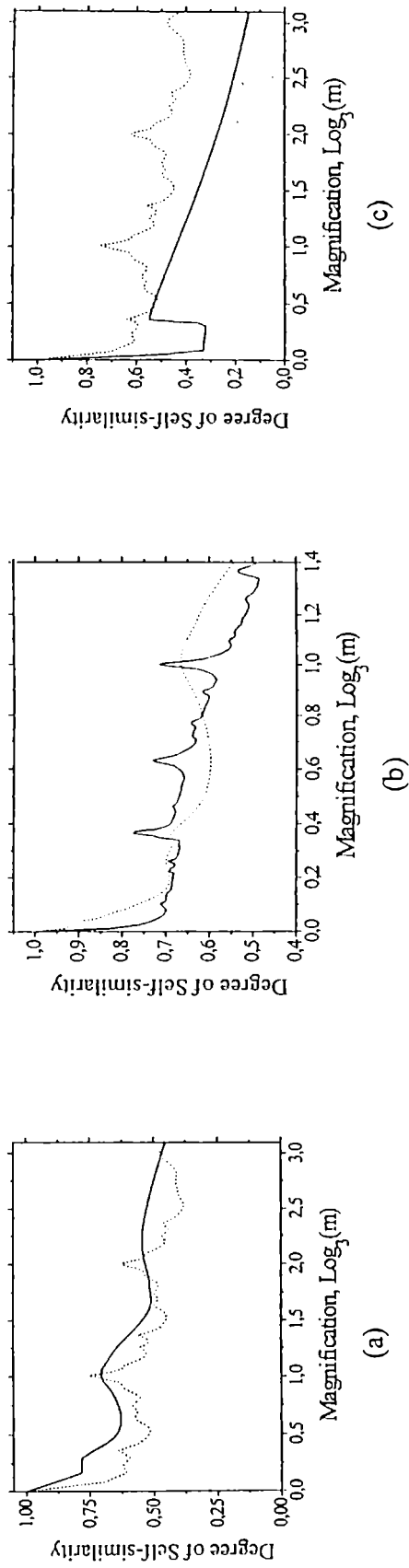


Figura 10 – Auto-similaridad del campo difractado por una red de Cantor y por los estados intermedios. En los casos (a) y (c) la línea a trazos indica la auto-similaridad del fractal de Cantor completo.

SEQUENCE (or state of structure, with order δ)	SELF-SIMILARITY (case 1, $m=3$)	SELF-SIMILARITY (case 2, $m=3$)	CONTRAST OR VISIBILITY (case 1, first maximum)
$g_1=g_2=g_3=g_4=g_5=g_6=1$	0.769	0.606	0.287
$g_1=g_2=0, g_3=g_4=g_5=g_6=1$	0.726	0.559	0.218
$g_1=g_2=1, g_3=g_4=g_5=0, g_6=1$	0.705	0.529	0.137
$g_1=g_2=1, g_3=g_4=0, g_5=g_6=1$	0.667	0.359	0.130
$g_1=g_2=g_3=g_4=g_5=0, g_6=1$	0.441	0.328	0.107

Tabla 1 – Comparación de valores de auto-similaridad y de contraste para cada secuencia.

la cual posibilita obtener el grado de auto-similaridad para fractales completos o incompletos, como los casos que aquí se evalúan. El contraste para cada caso es calculado teniendo en cuenta las fluctuaciones de las curvas en el gráfico de la función auto-similaridad, incluyendo en la ecuación (16) un máximo relativo (en $m = 1$) junto con los mínimos anterior y posterior. Debido en cada caso a que el factor de estructura ha sido modificado, existe una gran diferencia entre esta situación y cuando se comparan las regiones de Fresnel y Fraunhofer. Entonces, se propone como parámetro de grado de auto-similaridad la media entre el contraste del primer máximo relativo ($m = 3$) con los correspondientes mínimos anterior ($m = 3^{\frac{1}{2}}$) y posterior ($m = 3^{\frac{3}{2}}$), esto es:

$$C = \frac{1}{2} \left[\frac{S_{\max}(1) - S_{\min}(0.5)}{S_{\max}(1) + S_{\min}(0.5)} + \frac{S_{\max}(1) - S_{\min}(1.5)}{S_{\max}(1) + S_{\min}(1.5)} \right], \quad (17)$$

los valores de la función contraste para las secuencias usadas aquí están incluidos en la tabla 1. De allí se puede deducir que es un parámetro que permite cuantificar el estado (o geometría) de la red de difracción obtenida por medio de una densidad de Cantor.

2.2. Auto-similaridad en orden.

Pueden también correlacionarse diferentes órdenes del patrón de difracción originado por la transmitancia fractal (esto también lo veremos aplicado al caso de multicapas fractales), para saber a partir de que momento de la iteración que origina el objeto ya comienzan a mantenerse estables las propiedades fractales. Si además se correlacionan dos estados iguales, uno de los cuales es un orden fractal y el otro posee algunas componentes filtradas, puede estudiarse cuales son las componentes periódicas que faltan dentro de la estructura mediante este procedimiento. Definimos entonces la auto-similaridad en orden como la correlación de dos órdenes diferentes S y S' de la estructura, en la forma:

$$A(S, S') = \frac{\int_{\Delta} [f^{(S)}(\xi) - \langle f^{(S)}(\xi) \rangle] [f^{(S')}(\xi) - \langle f^{(S')}(\xi) \rangle] d\xi}{\int_{\Delta} [f^{(S)}(\xi) - \langle f^{(S)}(\xi) \rangle]^2 d\xi \int_{\Delta} [f^{(S')}(\xi) - \langle f^{(S')}(\xi) \rangle]^2 d\xi} \quad (18)$$

2.3. Auto-similaridad en dirección.

Las propiedades direccionales de una red de difracción y el aporte de frecuencias conocido a través de la teoría y la práctica del efecto Moiré tienen incidencia también en la superposición de estructuras de tipo periódica como las estudiadas aquí. Si se dan dos direcciones coordenadas (x, y) , se puede establecer la auto-similaridad de una cierta función en relación a esta coordenada, por lo tanto, definimos la auto-similaridad direccional como las componentes de una función vectorial de auto-similaridad dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
S_x(m) = \frac{\int_{\mathcal{R}} [I_x(\xi) - \langle I_x(\xi) \rangle] \left[I_x\left(\frac{\xi}{m}\right) - \left\langle I_x\left(\frac{\xi}{m}\right) \right\rangle \right] d\xi}{\sqrt{\int_{\mathcal{R}} [I_x(\xi) - \langle I_x(\xi) \rangle]^2 d\xi} \int_{\mathcal{R}} \left[I_x\left(\frac{\xi}{m}\right) - \left\langle I_x\left(\frac{\xi}{m}\right) \right\rangle \right]^2 d\xi} , \\
S_y(m) = \frac{\int_{\mathcal{R}} [I_y(\xi) - \langle I_y(\xi) \rangle] \left[I_y\left(\frac{\xi}{m}\right) - \left\langle I_y\left(\frac{\xi}{m}\right) \right\rangle \right] d\xi}{\sqrt{\int_{\mathcal{R}} [I_y(\xi) - \langle I_y(\xi) \rangle]^2 d\xi} \int_{\mathcal{R}} \left[I_y\left(\frac{\xi}{m}\right) - \left\langle I_y\left(\frac{\xi}{m}\right) \right\rangle \right]^2 d\xi}
\end{array} \right. , \quad (19)$$

En la figura 11 se muestra como quedan dos redes de Cantor superpuestas en una forma similar a las redes de difracción periódicas y cuasi-periódicas, donde ahora la frecuencia vectorial corresponderá a cada componente periódica del fractal. Definir una dirección en la auto-similaridad es importante para los casos en que pueden existir deformaciones en cada red de difracción fractal, bien directamente diferencias en su dimensión.

2.4. Auto-similaridad compuesta.

En muchos casos dos o más efectos pueden estar combinados, por lo tanto es útil definir una función auto-similaridad compuesta. Es decir, no solo es necesario por ejemplo correlacionar la función con una versión magnificada de la misma, sino a veces es útil poder determinar si existe alguna componente filtrada o bien si se ha llegado a un orden lo suficientemente alto como para asegurar la fractalidad de la estructura y del campo. Se propone entonces una auto-similaridad compuesta dada por:

$$T(m; S, S') = S(m) \mathcal{A}(S, S') \quad , \quad (20)$$

valores típicos en este caso pueden fluctuar entre 0.6 y 0.9 de acuerdo a los órdenes que se comparen. Sin embargo, es de esperar que a partir de un cierto orden y por encima de él, no existirán grandes diferencias en la función de auto-similaridad compuesta y conservará un valor alto. Esto depende siempre de la naturaleza y el tipo de estructura fina de la red de difracción y la forma en que se combinen los elementos constitutivos que representan el generador.

3. Región de Fresnel.

El campo en este caso está dado por:

$$U(x_1, y_1) = \frac{e^{i \left[k z + \frac{k}{2z} (x_1^2 + y_1^2) \right]}}{i \lambda z} \mathcal{F} \left\{ U(x_0, y_0) e^{i \frac{k}{2z} (x_0^2 + y_0^2)} \right\} \quad , \quad (21)$$

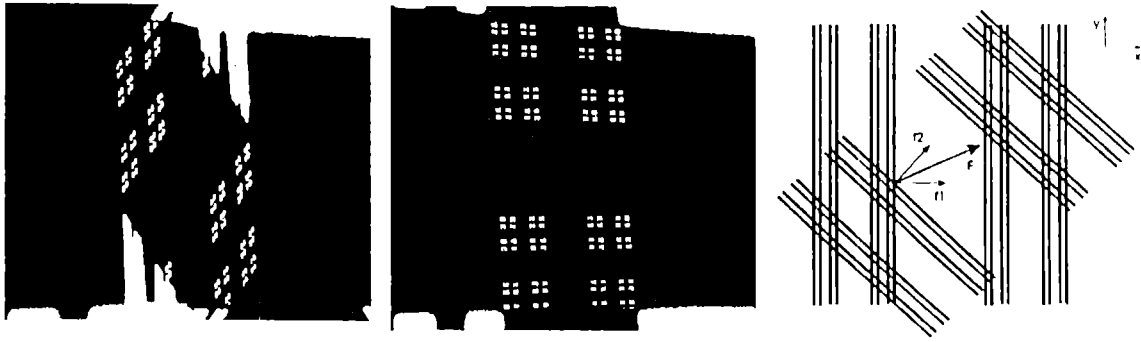


Figura 11 – Superposición de dos redes de Cantor.

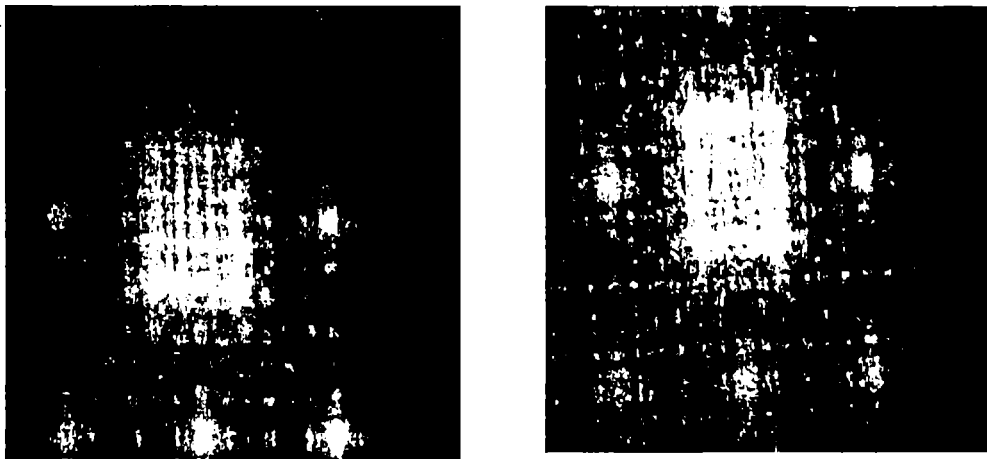


Figura 12 – Difracción en la región de Fresnel para la carpeta de Sierpinski con órdenes 3 y 4 respectivamente.

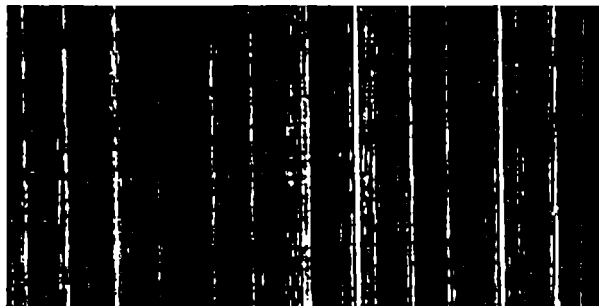


Figure 13 – Patrón de intensidad para la posición de la primera auto-imagen para la componente de menor período en un Cantor de orden 5.

igualmente que para la región de campo lejano, y definiendo ahora la convolutoria \otimes . La distribución de intensidad está dada entonces mediante:

$$I(x, y) = \left| \frac{1}{\lambda z} \right|^2 \left| \left[\otimes_{l=1}^N [\mathcal{F}\{C(x_o, y_o)\}]^{g_l} \right] \otimes \mathcal{F}\left\{ e^{i \frac{k}{z} (x_o^2 + y_o^2)} \right\} \right|^2 \quad (22)$$

Algunas imágenes obtenidas en la región de Fresnel se muestran en la figura 12 en el caso de la carpeta de Sierpinski, para órdenes 3 y 4 respectivamente, con lo cual puede verse la compleja forma del campo dentro de esta región. Ya no será tan sencillo el poder caracterizar la distribución de intensidad a través de una función de auto-similaridad.

3.1. Efecto Talbot.

Debido a que las redes de difracción fractal se pueden obtener a partir de funciones periódicas, como se demostró en el capítulo anterior, es digno estudiar el fenómeno de formación de auto-imágenes en la región de Fresnel. El fundamento podría obtenerse en una forma similar a la utilizada con funciones de Walsh, a partir de una transmitancia del tipo ya definido en el capítulo anterior:

$$C(x_o) = \prod_{l=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^{3^l} R_i \text{rect} \left[\frac{x_o - x_{oi}}{\frac{L}{3^l}} \right] \right\}^{g_l}, \quad (23)$$

Un mayor valor para $S(m)$ corresponde a un alto grado de superposición entre la función intensidad y alguna versión magnificada de ella. El análisis que sería hecho con estos resultados es muy similar al caso en el que la auto-similaridad en las regiones de Fresnel y Fraunhofer sean comparadas.

donde la sumatoria sobre las funciones rectángulo tienen una forma matemática similar a las funciones de Rademacher, pero con un factor de escalamiento 3 en este caso. El campo en la región de Fresnel, para un orden suficientemente alto de la estructura fractal, puede descomponerse entonces en una forma similar. Las posiciones de autoimágenes para cada componente periódica están dadas por:

$$z_T = \frac{2 m d^2}{\lambda}, \quad (24)$$

donde m es un entero y d es el periodo de la red de difracción. Como aquí obtenemos redes escaladas, podemos hacer consideraciones sobre el escalamiento. Este método introduce claramente una forma de medir la lacunaridad de una red de difracción a través de las posiciones de autoimágenes, es decir, en los ejemplos dados en el capítulo anterior cuando se tenía dos redes con la misma dimensión pero diferente lacunaridad, esta puede medirse a través de las componentes escaladas que aparecen en posiciones diferentes para cada caso. Por ejemplo, para una dimensión $D = 0.5$, en el primer caso se tiene que el factor de escalamiento es $y = 4$ en el segundo caso es $y = 9$. Entonces, pudiendo medir estas posiciones z_T de las autoimágenes, se puede determinar la relación de lacunaridad y diferenciar entre redes con la misma

dimensión pero lacunaridad diferente. En la figura 13 se puede observar la distribución de intensidad en una posición cercana a la correspondiente a la primera autoimagen de la componente periódica de menor período, para el caso de una red de Cantor de orden 5. Dicha posición es de alrededor de 15.5cm para una transparencia cuya dimensión es cerca de 30mm.

Otra propiedad que puede ser utilizada es la superposición y puede entonces relacionarse con la dimensión, ya que en el caso de efecto Talbot fraccional puede no existir una relación entera entre los correspondientes coeficientes, y se tendrán dos posiciones Talbot para cada red superpuesta normalmente.

3.2. Transformada fraccional.

El arreglo experimental que se desea investigar fue desarrollado por primera vez por C. Allain and M. Cloitre, pero en nuestro caso efectuamos mediciones entre la red de difracción y el plano de Fourier, como se muestra en la figura 14.

La red fractal G es iluminada por una onda esférica que converge sobre la pantalla S , donde d es la distancia entre la red y el plano de Fourier. La amplitud de campo compleja es:

$$a(x, y) = a_0 \exp\left(-\frac{i\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)\right) \quad (25)$$

En el plano de la red está dada por:

$$a^g(x, y) = a(x, y) f(x, y) \quad , \quad (26)$$

donde $f(x, y)$ denota la transmitancia.

Entonces para la distancia d_i (medida desde el plano de entrada) en la aproximación paraxial de la teoría escalar de la difracción, la propagación del campo electromagnético puede ser escrito como:

$$F(u, v, d_i) = \frac{a_0}{i\lambda d_i} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d_i}(u^2 + v^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\left(\frac{i\pi(x^2 + y^2)(d - d_i)}{\lambda d d_i}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi}{\lambda d_i}(xu + yv)\right) dx dy \quad , \quad (27)$$

y en el sistema de referencia de la transformada canónica integral se representa como:

$$F(u, v, d_i) = F_M(u, v) = R^M [f(x, y)](u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) K_M(x, y, u, v) dx dy \quad , \quad (28)$$

con el kernel:

$$K_M(x, y, u, v) = \frac{a_0}{i\lambda B} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda} \frac{(x^2 + y^2)A + (u^2 + v^2)D - 2xu - 2yv}{B}\right) \quad , \quad (29)$$

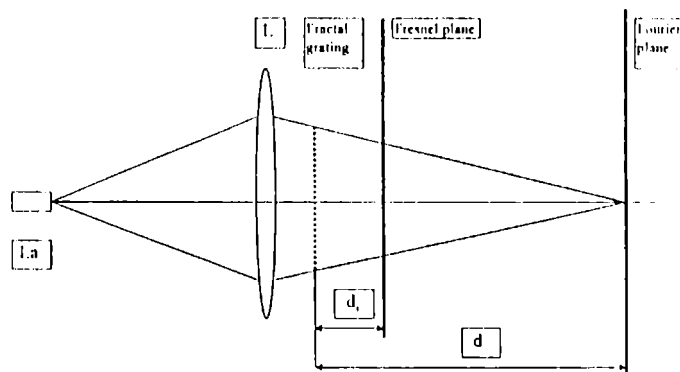


Figura 14 – Arreglo experimental para verificar la estructura auto-similar del patrón de intensidad en la región de Fresnel.

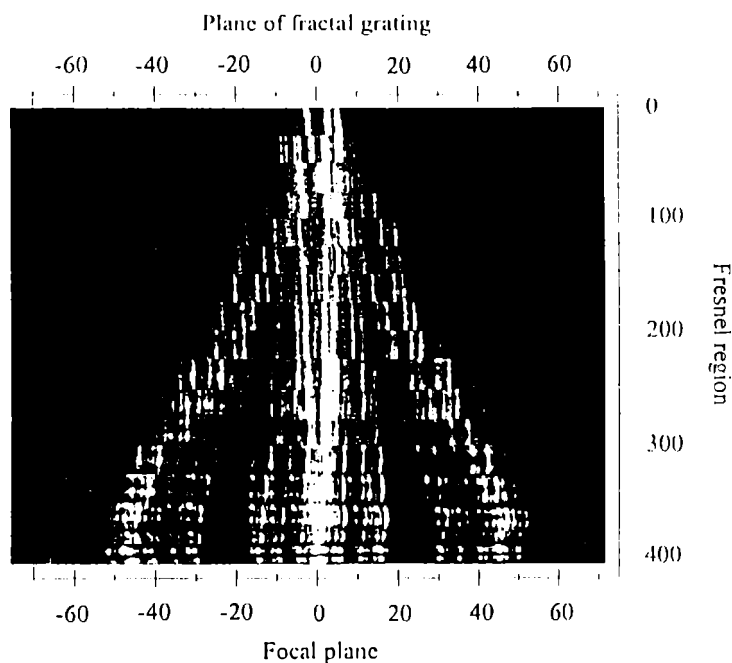


Figure 15 – Distribución de intensidad a lo largo de la dirección de propagación desde la transparencia hasta la región de Fraunhofer (las dimensiones están en *cm*)

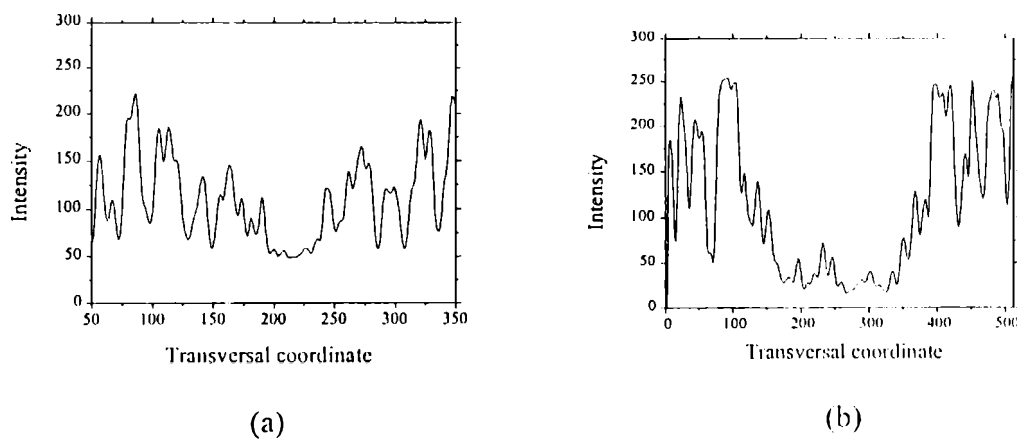


Figure 16 – Distribución de intensidad para las posiciones: (a) $d_1 = \frac{1}{4} d$ y (b) $d_1 = \frac{3}{4} d$ (longitud transversal en *mm*).

donde $A = (d - d_i)/d$, $B = d_i$ y $D = 1$. Esta transformada es parametrizada por una matriz de transferencia M de 2×2 con determinante igual a 1:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d-d_i}{d} & d_i \\ -1/d & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

para todo par de coordenadas (x, u) y (y, v) . Los parámetros de esta matriz A , B dependen de la distancia d_i . Es fácil ver que la transformada integral canónica se reduce a la transformada de Fourier si $d_i = d$. El sistema óptico descrito por esta transformada integral es usualmente nombrado de primer orden. Consideraremos las distribuciones de intensidad del campo fractal $|F(u, v, d_i)|^2 = |F_M(u, v)|^2$ para los diferentes planos $d_i \in [0, d]$.

Una propiedad típica de la mayoría de las estructuras fractales es que sus medidas son auto-afines. Suponiendo que se tiene la medida fractal $d\mu(x, y) = f(x, y) dx dy$ para una red de difracción fractal que es auto-afin con un exponente de escala H alrededor de algún punto (x_0, y_0) :

$$d\mu(px + x_0, py + y_0) \approx p^H d\mu(x + x_0, y + y_0), \quad (31)$$

De los teoremas de escalamiento y corrimiento para la transformada de la integral cónica y la relación (31) las distribuciones de intensidad para los patrones de difracción en las distancias d_1 y d_2 de tal forma que

$$A(d_1)B(d_2) = p^2 A(d_2)B(d_1), \quad (32)$$

relacionadas por:

$$|F_{M_1}(u + A(d_1)x_0, v + A(d_1)y_0)|^2 = \left(p^{-H} \frac{d_2}{d_1}\right)^2 |F_{M_2}\left(\frac{d_2}{pd_1}u + A(d_2)x_0, \frac{d_2}{pd_1}v + A(d_2)y_0\right)|^2 \quad (33)$$

De la (32) se pueden obtener las distancias d_1 y d_2 para las que la relación de afinidad (33) puede observarse

$$p^2(d - d_2)d_1 = (d - d_1)d_2 \quad (34)$$

Cabe notar que el escalamiento de las coordenadas d_2/pd_1 en el lado derecho de la ecuación (33) será uno cuando

$$d_1 + d_2 = d \quad (35)$$

La distribución de intensidad en los planos correspondientes será similar entre sí:

$$|F_{M_1}(u, v)|^2 = \left(\frac{d_1}{d - d_1}\right)^{2(H-1)} \left|F_{M_2}\left(u + \frac{2d_1 - d}{d}x_0, v + \frac{2d_1 - d}{d}y_0\right)\right|^2, \quad (36)$$

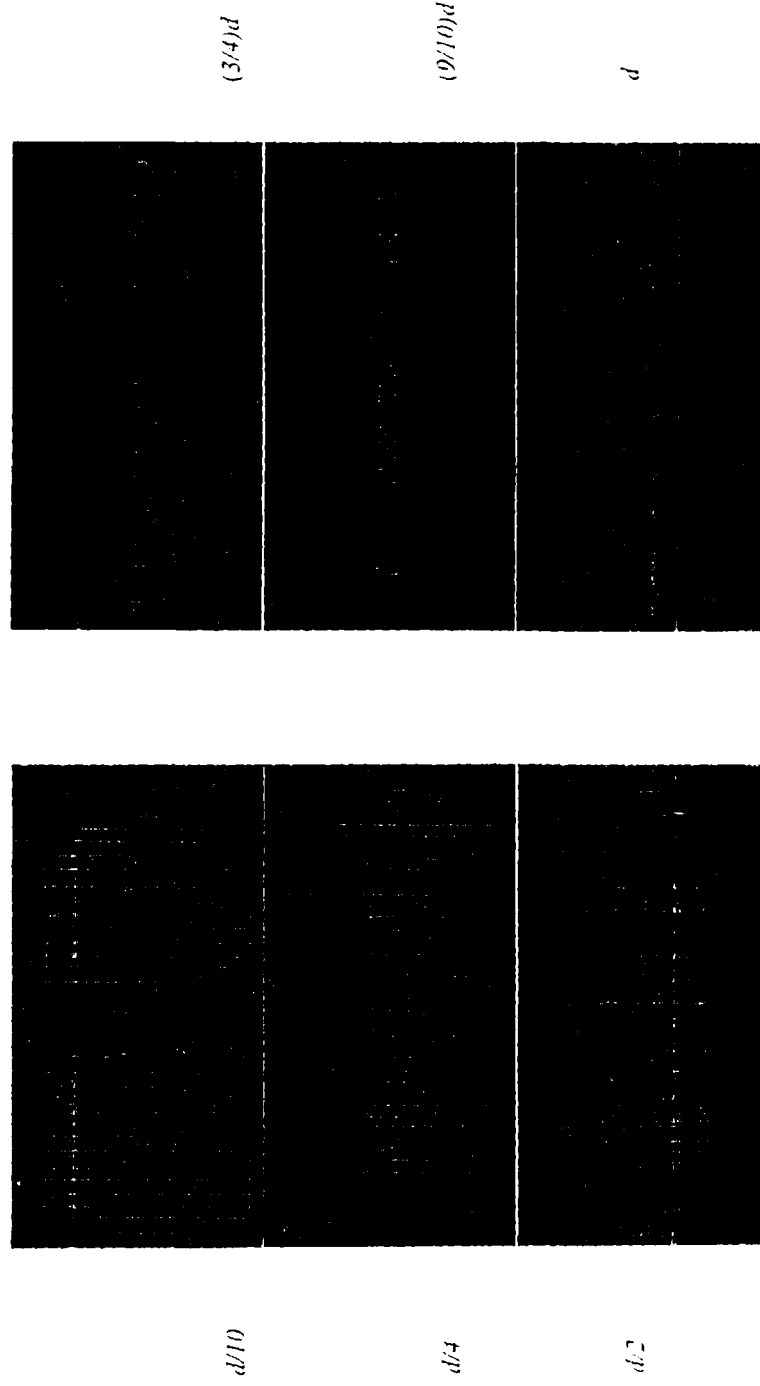


Figura 17 – Patrones de difracción a diferentes posiciones (d_i) entre la red de difracción y el plano de Fourier, con $d=4m$.

y las relaciones de las distribuciones intensidad define el exponente escalado H .

Por lo general, para fractales finitos reales, la relación (31) no es siempre cierta para toda p , sin embargo, para algunas secuencias $p = p_0^k$ donde $p_0 > 1$, $k = 1, \dots, N$ y N es un nivel fractal: $d\mu_N(p_0^k x + x_0, p_0^k y + y_0) \approx p_0^{kH} d\mu_{N-k}(x + x_0, y + y_0)$. La relación (33) se transforma en:

$$\left| F_{M_1}^{(N)}(u + A(d_1)x_0, v + A(d_1)y_0) \right|^2 \approx \left(p_0^{-kH} \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \left| F_{M_2}^{(N-k)} \left(\frac{d_2}{p_0^k d_1} u + A(d_2)x_0, \frac{d_2}{p_0^k d_1} v + A(d_2)y_0 \right) \right|^2, \quad (37)$$

donde d_1 y d_2 estan relacionadas por:

$$d_2 = \frac{p_0^{2k} d d_1}{d + d_1(p_0^{2k} - 1)} \quad (38)$$

De igual forma, la relación (33) para fractales con soporte finito es válida en cualquier caso, excepto cuando $A, B = 0$ ($d_i = 0, d_i = d$), la ecuación (37) para estructuras finitas es solamente cierta para una región $d_i \in [\delta, d - \delta]$, donde δ depende del tamaño del fractal real y la longitud de onda λ . Para d_i en la región $[0, \delta]$ el patrón de difracción es casi el mismo que para la distancia 0 y para $d_i > d - \delta$ es un patrón de difracción quasi-Fraunhofer. Para $d_k = p_0^{2k} d \delta / (d + \delta(p_0^{2k} - 1))$ la estructura se asocia a un fractal de nivel $N - k + 1$ y en la distancia d_N la estructura se relaciona estrechamente con el generador del fractal investigado. Así, las observaciones de la evolución del patrón de difracción para la distancia $d_i \in [\delta, d - \delta]$ revela la estructura jerárquica del objeto fractal.

Para los fractales reales con escalamiento discreto p_0^k la relación (36) puede observarse para los planos:

$$\begin{cases} d_1^{(k)} = \frac{d}{1 + p_0^k} \\ d_2^{(k)} = \frac{d p_0^k}{1 + p_0^k} \end{cases} \quad (39)$$

Para los fractales conocidos como el conjunto triádico de Cantor y la carpeta de Sierpinski ($p_0 = 3$) de nivel 4, derivamos el siguiente conjunto de distancias con distribuciones de intensidad similares $(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}) = (d/4, 3d/4), (d/10, 9d/10), (d/28, 27d/28), (d/82, 81d/82)$, donde $k = 1, \dots, 4$. Para fractales de nivel finito N la similitud se da únicamente en parte de los patrones de difracción en las distancias $d_1^{(k)}$ y $d_2^{(k)}$, puesto que estos patrones se asocian con los fractales de diferentes niveles (ver ecuación (37)). Sin embargo, a partir de las observaciones de distribuciones de intensidad similares, corridas una de otra en $((2d_1^{(k)} - d)x_0/d, (2d_1^{(k)} - d)y_0/d)$ el punto (x_0, y_0) pueden determinarse alrededor de la localización de la simetría escalada.

Usando el arreglo experimental que se mostró en la figura 14, podemos comentar algunos interesantes resultados. En la figura 15 se muestra la evolución del patrón de intensidad desde la red de difracción de Cantor de orden 5 utilizada, hasta la posición del plano de Fourier. Este resultado confirma estudios teóricos previamente desarrollado por T. Alieva *et al.* en relación a la evolución del espectro de Fourier usando una transformada de Radon-Wigner (*RWT*), y el poder contar con estos datos es útil para analizar el comportamiento de la auto-similaridad en la propagación a lo largo de la región de Fresnel. Para ciertos planos, siendo $d = 4m$, se obtuvieron los patrones de intensidad mostrados en la figura 16 para las posiciones donde se esperan distribuciones de intensidad similares. En la figura 17 se muestran dos cortes para el par de distancias $(d/4, 3d/4)$ que muestran autosimilaridad en diferentes posiciones a lo largo de cada distribución.

Referencias

1. T. Alieva and F. Agullo-López, "Reconstruction of the optical correlation function in a quadratic refractive index medium", *Optics Comm.* **114**, 161-169 (1995).
2. T. Alieva and F. Agullo-López, "Optical wave propagation of fractal fields", *Optics Comm.* **125**, 267-274 (1996).
3. T. Alieva, "Fractional Fourier transform as a tool for investigation of fractal objects", *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1189-1192 (1996).
4. T. Alieva and A. M. Barbé, "Fractional Fourier analysis of objects with scaling symmetry", en el libro de trabajos seleccionados *Fractal in Engineering*, J. Lévy-Véhel, E. Lutton and C. Tricot, eds., Springer-Verlag, 252-265 (1997).
5. T. Alieva and F. Agullo-López, "Diffraction analysis of random fractals", *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 669-674 (1998).
6. C. Allain, and M. Cloitre, "Optical diffraction on fractals", *Phys. Rev.* **B33(55)**, 3566-3569 (1986).
7. C. Allain and M. Cloitre, "Optical Fourier Transforms of Fractals", en *Fractals in Physics*, L. Pietronero and E. Tosatti, eds. Elsevier Science Publishers B. V., New York, 61-64 (1986).
8. C. Allain and M. Cloitre, "Spatial spectrum of a general family of self-similar arrays", *Phys. Rev.* **A36**, 5751-5757 (1987).
9. M. V. Berry and S. Klein, "Integer, fractional and fractal Talbot effects", *J. Mod. Optics* **43**, 2139-2164 (1996).
10. C. P. Dettman, N. E. Frankel, "Structure Factor of Deterministic Fractals with Rotations", *Fractals* **1(2)**, 253-261 (1993).

11. A. Dogariu, J. Uozumi and T. Asakura, "Angular power spectra of fractal structures", *J. Mod. Opt.* **41**(4), 729-738, 1994.
12. D. L. Jaggard and Y. Kim, "Diffraction by band-limited fractal screens", *J. Opt. Soc. Amer.* **A4**(6), 1055-1062 (1987).
13. D. L. Jaggard and T. Spielman, "Triadic Cantor target diffraction", *Microw. and Opt. Tech. Lett.* **5**(9), 460-466 (1992).
14. E. Jakeman, "Fresnel scattering by a corrugated random surface with fractal slope", *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 1034-1041 (1982).
15. E. Jakeman, "Fraunhofer scattering by a sub-fractal diffuser", *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 1034-1041 (1983).
16. E. Freysz, B. Pouligny, F. Argoul, and A. Arneodo, "Optical wavelet transform of fractal aggregates", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 745-748 (1990).
17. M. Garavaglia, M. Lehman and T. Alieva, "Diffraction on fractals in first-order optical system: experiments", aceptado para presentar en *Fractals in Engineering*, Delf, Holanda (1999).
18. Y. Kim, H. Grebel and D. L. Jaggard, "Diffraction by fractally serrated aperture", *J. Opt. Soc. Amer.* **A8**, 20-26 (1991).
19. A. Lakhtakia and H. J. Caulfield, "On some mathematical and optical integral transforms of self-similar (fractal) functions", *Optik* **91**, 131-133 (1992).
20. M. Lehman, "Fractal diffraction gratings decomposed as periodical domains", enviado a *Fractals*.
21. M. Lehman, "Fraunhofer diffraction from fractal gratings expressed through a density function, Proceedings of *Fractals in Engineering*, Arcachon, France, June 25-27 (1997).
22. M. Lehman, "Cantor fractals, periodical functions and diffraction", enviado a *J. Opt. Soc. Am. A*.
23. M. Lehman and M. Garavaglia, "In-order correlation of fractal transmittances defined cyclically", en *Far- and Near-Field Optics: Its Physics and Information Processing*, Suganda Jutamulia and Toshimitsu Asakura, Eds., *Proceedings of SPIE* **3467**, 288-295 (1998).
24. M. Lehman, "Diffraction by a fractal transmittance obtained from a multiplicative superposition of periodical rectangular functions", *Fractals* **6**(4), 313-326 (1998).
25. M. Lehman and M. Garavaglia, "In-order correlation of fractal transmittances defined cyclically", enviado a *Optics Comm.*

26. M. Lehman, L. De Pasquale, D. Patrignani and J. L. Poubo, "Properties of in-order self-similarity function in the Fresnel region for the Sierpinski carpet grating", in *Algorithms, Devices, and Systems for Optical Information Processing*, Bahram Javidi, Demetri Psaltis, Eds., *Proceedings of SPIE* Vol. 3159, 261-268 (1997).
27. M. Lehman, D. L. Jaggard y M. Garavaglia, "Difracción de Fraunhofer para redes de Cantor construídas mediante funciones periódicas", *Proceedings de la 3ra Reunión Iberoamericana de Optica y 6ta Reunión Latinoamericana de Optica, Láser y Aplicaciones*, Cartagena de Indias, Colombia, Setiembre 28 - Octubre 2 (1998).
28. A. W. Lohmann, *Optical Information Processing*, Univ. Erlangen, Alemania (1978).
29. M. Nazarathy and J. Shamir, "First-order optics - a canonical operator representation: lossless systems", *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 356-364 (1982).
30. K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Progress in Optics XXVII*, E. Wolf, ed, **3**, 1-108 (1989).
31. Y. Sakurada, J. Uozumi, and T. Asakura, "Fresnel diffraction by one-dimensional regular fractals", *Pure Appl. Opt.* **1**, 29-40 (1992).
32. J. Uozumi, H. Kimura and T. Asakura, "Fraunhofer diffraction by Koch fractals", *J. Mod. Opt.* **37**(6), 1011-1031 (1990).
33. J. Uozumi, Y. Sakurada and T. Asakura, "Fraunhofer diffraction from apertures bounded by regular fractals," *J. Mod. Optics* **42**, 2309-2322 (1995).
34. J. Uozumi, H. Kimura, T. Asakura, "Fraunhofer diffraction by Koch fractals: The dimensionality", *J. Mod. Optics* **38**, 1335-1347 (1991).
35. T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, 2nd edition, World Scientific, Singapur (1992).

4. Aplicaciones al procesamiento óptico.

Se presentan aquí algunos trabajos en desarrollo, no necesariamente en relación directa con la geometría fractal, pero que son de interés para posteriores relaciones y aplicaciones en dicha área. El estudio de las superficies y la caracterización desde el punto de vista fractal es de interés no solo para poder correlacionar las propiedades geométrico-aleatorias de la estructura, sino también para poderla reconstruir a partir de unos pocos datos. En este sentido los métodos de estudio que figuran entre los más importantes desde el punto de vista óptico, se relacionan con microscopía y speckle. Además, el manejo de la información óptica utilizando sistemas de procesamiento que aprovechen la geometría y sus propiedades impresas sobre el campo son de interés en

áreas como óptica computacional y procesamiento de señales en general. La posibilidad de realizar filtrado y modificar la estructura de las redes fractales lleva a nuevos campos de aplicación en estos temas. El estudio de imágenes y superposición de las mismas obteniendo estructuras cuasi-Moiré, permiten sacar nuevas características y propiedades del objeto y extender las aplicaciones a otros ámbitos relacionando con ciencia de materiales, como es el caso de la percolación y efectos de la visión. Posteriormente, el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas y su formulación desde un punto de vista de entropía permite utilizar este parámetro dentro de la óptica con una formulación más cercana a la teoría termodinámica, y que permitirá extenderla a propagación en medios desordenados y caóticos, donde la teoría fractal desempeña un rol fundamental.

4.1. Estudio de superficies. Interferometría Speckle.

La posibilidad de los métodos fractales de generar estructuras para representar superficies con una gran complejidad prácticamente no tiene límites. Medir las rugosidades y formas de una superficie es importante, pues estas tienen influencia sobre muchas de las propiedades que derivan de dicha superficie. Diferentes métodos pueden ser implementados para este fin, y existen sistemas que ya permiten este tipo de mediciones, como el microscopio de fuerza atómica (*AFM*) cuyo software incorporado permite, por ejemplo, obtener los resultados mostrados en la figura 18. Igualmente, el análisis de objetos inhomogéneos y medios complejos, a través de los speckles formados cuando son iluminados con luz coherente o parcialmente coherente, es uno de los problemas de interés de la óptica estadística. El estudio de la evolución de la dimensión de Hausdorff o las anteriormente mencionadas en este capítulo en relación al procesamiento de imágenes, o bien las propiedades de correlación de una superficie son algunos de estos parámetros que interesa medir. Algunos trabajos reportados demuestran que la fractalidad del patrón de intensidad de una superficie tiene una dependencia angular, y puede establecerse una ley exponencial de la forma:

$$(I_s) \sim (\sin \theta_s)^{-\alpha} \quad , \quad (39)$$

donde α es un parámetro que depende de las propiedades topológicas de la superficie y θ_s es el ángulo de scattering respecto a la normal a la superficie. El rango de ángulo de scattering que corresponde a la dependencia (39) está relacionado con las frecuencias espaciales:

$$\sin \theta_s \approx \lambda f_s \quad , \quad (40)$$

para el cual f_s es la frecuencia espacial y λ la longitud de onda utilizada en el testeo experimental.

Técnicas de speckle más elaborada pueden darnos mayor información sobre los parámetros de una superficie como los que aquí nos interesan. Cuando un difusor es iluminado se produce un alto contraste en los patrones de speckle, pero también puede ser visto en los patrones de interferencia, pues está asociado con la coherencia del haz del láser. Luego de muchos estudios los métodos de speckle han tenido innumerables

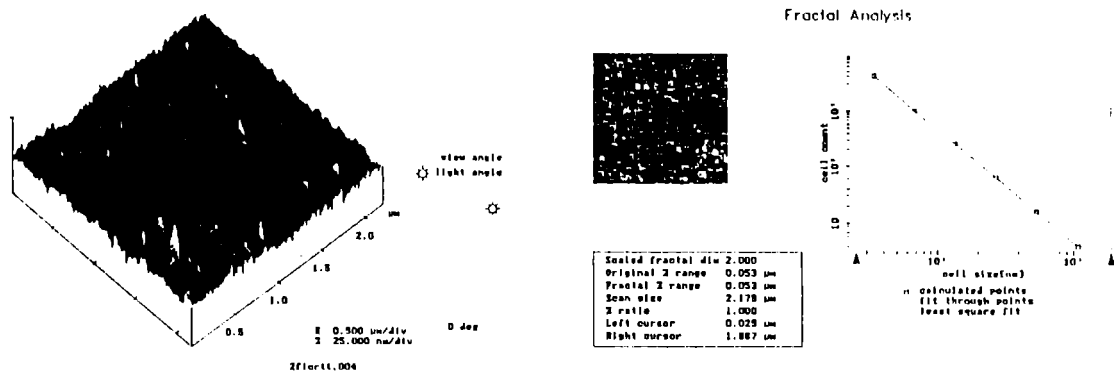


Figura 18 – (a) Estructura de una superficie y (b) caracterización fractal de la misma, obtenida con un equipo de microscopía *AFM* (gentileza: Lic. M. Bab, Dcpto de Física – UNS)

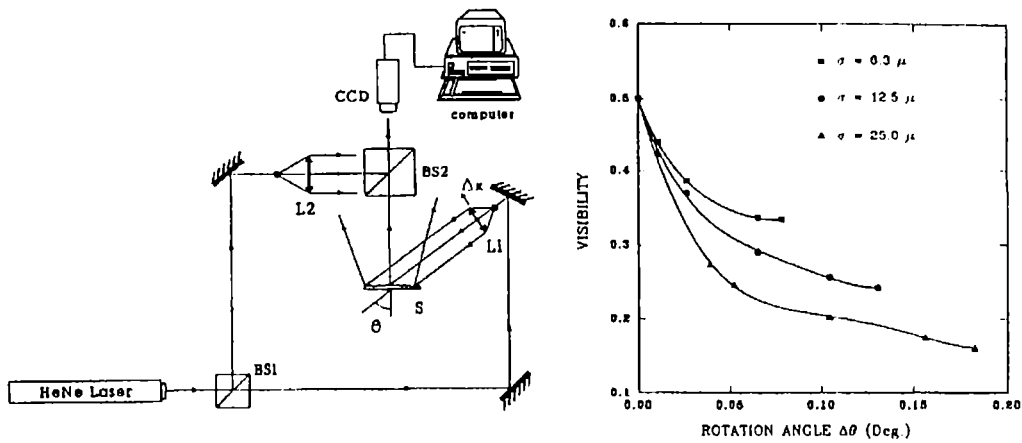
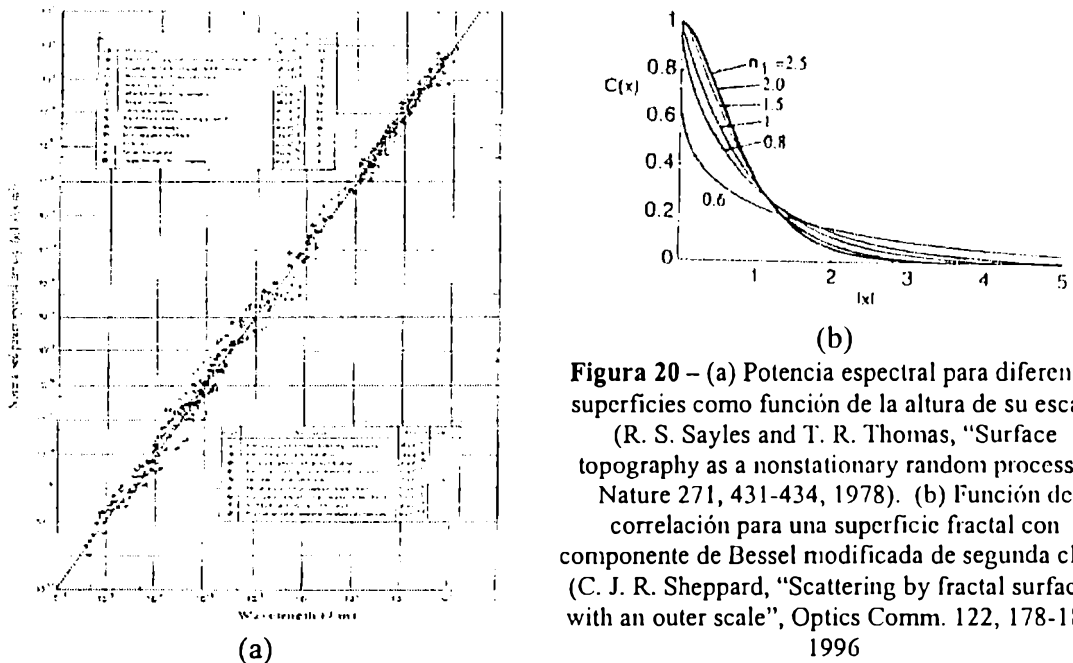


Figura 19 – (a) Montaje experimental DSPI, y (b) visibilidad de las franjas de interferencia para una superficie metálica con diferentes rugosidades.



(b) **Figura 20 – (a) Potencia espectral para diferentes superficies como función de la altura de su escala (R. S. Sayles and T. R. Thomas, "Surface topography as a nonstationary random process", Nature 271, 431-434, 1978). (b) Función de correlación para una superficie fractal con componente de Bessel modificada de segunda clase (C. J. R. Sheppard, "Scattering by fractal surfaces with an outer scale", Optics Comm. 122, 178-188, 1996**

aplicaciones y dentro de ellos las aplicaciones en lo que se refiere a las rugosidades de superficies.

La idea básica de correlacionar dos imágenes de la misma superficie bajo diferentes ángulos de iluminación lleva a la idea del cálculo de la dimensión de esta superficie y de los parámetros estadísticos. Un experimento que utiliza el método de Digital Speckle Pattern Interferometry (*DSPI*) es mostrado en la figura 19(a). Posibilita medir las rugosidades de una superficie utilizando mediciones ópticas y procesamiento digital de la información.

Si se tiene que el campo antes y después de rotar la superficie está dado por las siguiente igualdades:

$$\begin{cases} A_1 = A_o \sum \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda} (Z_j (1 + \cos \theta) + \phi_o) \right] + A_R \exp(i\phi_R) \quad , \\ A_2 = A_o \sum \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda} (Z_j (1 + \cos(\theta + \Delta\theta)) + \phi_o) \right] + A_R \exp(i\phi_R) \quad , \end{cases} \quad (41)$$

donde Z es la altura del elemento j -ésimo de scattering, ϕ es una constante de fase, A_1 es la amplitud incidente y A_2 es la amplitud reflejada.

El método *DSPI* detecta una cantidad proporcional a $\langle (I_1 - I_2)^2 \rangle^{1/2}$, la cual finalmente está dada por:

$$\begin{aligned} \langle (I_1 - I_2)^2 \rangle &= \langle I_1 \rangle^2 + \langle I_2 \rangle^2 - 2 \langle I_1 I_2 \rangle \\ &= 2A \left[3 - \exp(-\xi^2 \sigma^2) - 2 \exp\left(\frac{-\xi^2 \sigma^2}{2}\right) \right] \quad , \end{aligned} \quad (42)$$

con lo cual se llega a que la visibilidad:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad , \quad (43)$$

puede ser medida y entonces se puede caracterizar la rugosidad como lo muestra la figura 19(b). Otro tipo de correlación involucraría la misma superficie y los cambios dimensionales cuando existen cambios sobre ella (como por ejemplo cambios en su temperatura o tensiones).

Existen métodos para la generación y estudio de los parámetros característicos de superficies con propiedades fractales. Un resultado importante es la ley exponencial que se ha verificado para las rugosidades de varias superficies, y cuyo resultado es mostrado en la figura 20(a). Ya que la función correlación de una superficie puede ser expresada en base a la función de potencia espectral, en dicha figura se muestra esta función en términos de la longitud de onda de las ondulaciones de la superficies. Además, también ha sido considerado el caso en que la función correlación de la superficie está dada por una función de Bessel modificada, la cual involucra el caso que normalmente consideran los estudios de speckle (correlación exponencial). Un

ejemplo del resultado obtenido para la función correlación de la superficie se muestra en la figura 20(b), lo cual tendrá consecuencias sobre los estudios de patrones de speckle que puedan realizarse.

Referencias

1. P. Beckman and A. Spizzichino, *The scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Pergamon, Oxford (1963).
 2. M. V. Berry, "Diffractals", *J. Phys. A: Math. Gen.* **12**, 781-796 (1979).
 3. J. C. Dainty, *Laser Speckle and Related Phenomena*, ed., Springer, New York (1975).
 4. F. Family, T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces*, World Scientific, Singapore (1991).
 5. E. Jackeman, "Scattering by a Corrugated Random Surface with Fractal Slope", *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, L55-L59 (1982).
 6. M. Lehman, J. Pomarico and R. Torroba, "DSPI applied to surface roughness study", *Opt.Eng.* **34**(4), (1995).
 7. J. Pomarico and R. Torroba, "Digital visibility measurements by Fourier analysis", *Optik* **95**(4), 152-154 (1994).
 8. J. C. Russ, *Fractal Surfaces*, Plenum Press, New York and London (1994).
 9. R. S. Sayles and T. R. Thomas, "Surface topography as a nonstationary random process", *Nature* **271**, 431-434 (1978).
 10. R. S. Sayles and T. R. Thomas, Reply to "Topography of random surfaces", por M. V. Berry and J. H. Hannay, *Nature* **273**, 573 (1978).
 11. C. J. R. Sheppard, "Scattering by fractal surfaces with an outer scale", *Optics. Comm.* **122**, 178-188 (1996)
 12. D. A. Zimnyakov, "Evolution of the Fractal Dimension of Speckles in the Near Field Diffraction", *Opt. Spectrosc.* **83**(5), 734-739 (1997)
- 4.2. Procesamiento de la Información. Speckle Modulado por Franjas de Young.**

Desde el experimento de Abbe-Porter (ver figura 21), las técnicas de filtrado espacial se han hecho importantes en el tratamiento de la información óptica. Aquí se muestra un método de filtrado espacial combinado con franjas de Young, para obtener un método con aplicaciones a procesamiento de imágenes fractales. Cuando un objeto tiene speckle en su imagen, podemos aplicar filtrado óptico si el patrón de speckle es modulado con franjas de Young. Como el tamaño del speckle es muy pequeño, en la

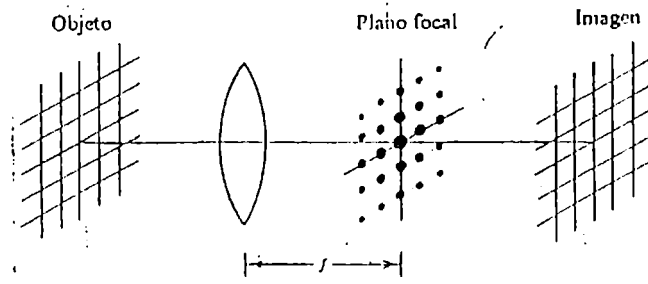


Figura 21 – Experimento de Abbe-Porter.

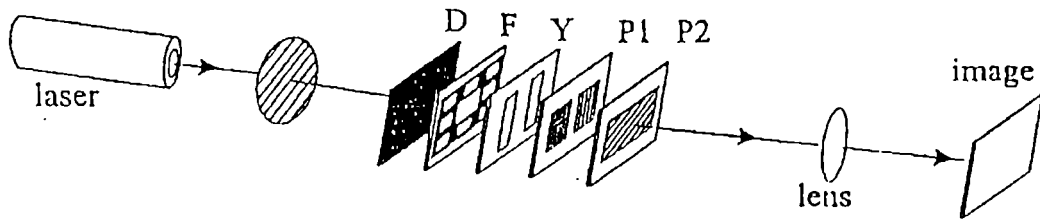


Figura 22 – Montaje experimental para el filtrado mediante speckle modulado por franjas de Young (YFMS)

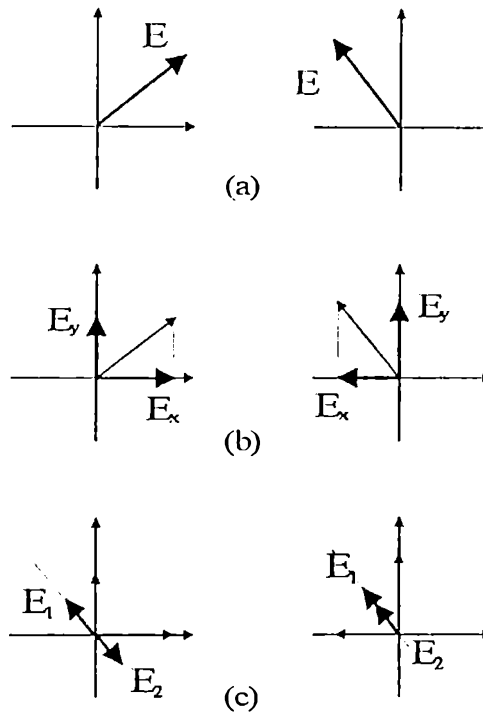


Figura 23 – Campos electromagnéticos que grafican el proceso obtenido con el arreglo experimental de la figura anterior. (a) Campo después de atravesar el rotador R_1 . (b) Componentes para cada polarización en $P1$. (c) Diferencia de fase debida al polarizador $P2$.

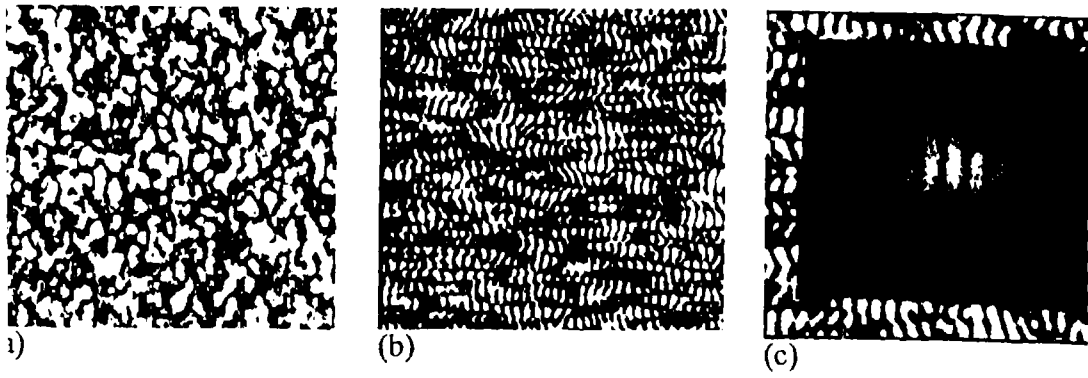


Figura 24 – (a) Imagen típica de speckle desde una superficie. (b) Speckle modulado por franjas de Young. (c) Transformada de Fourier sobre una ventana en la figura (b)

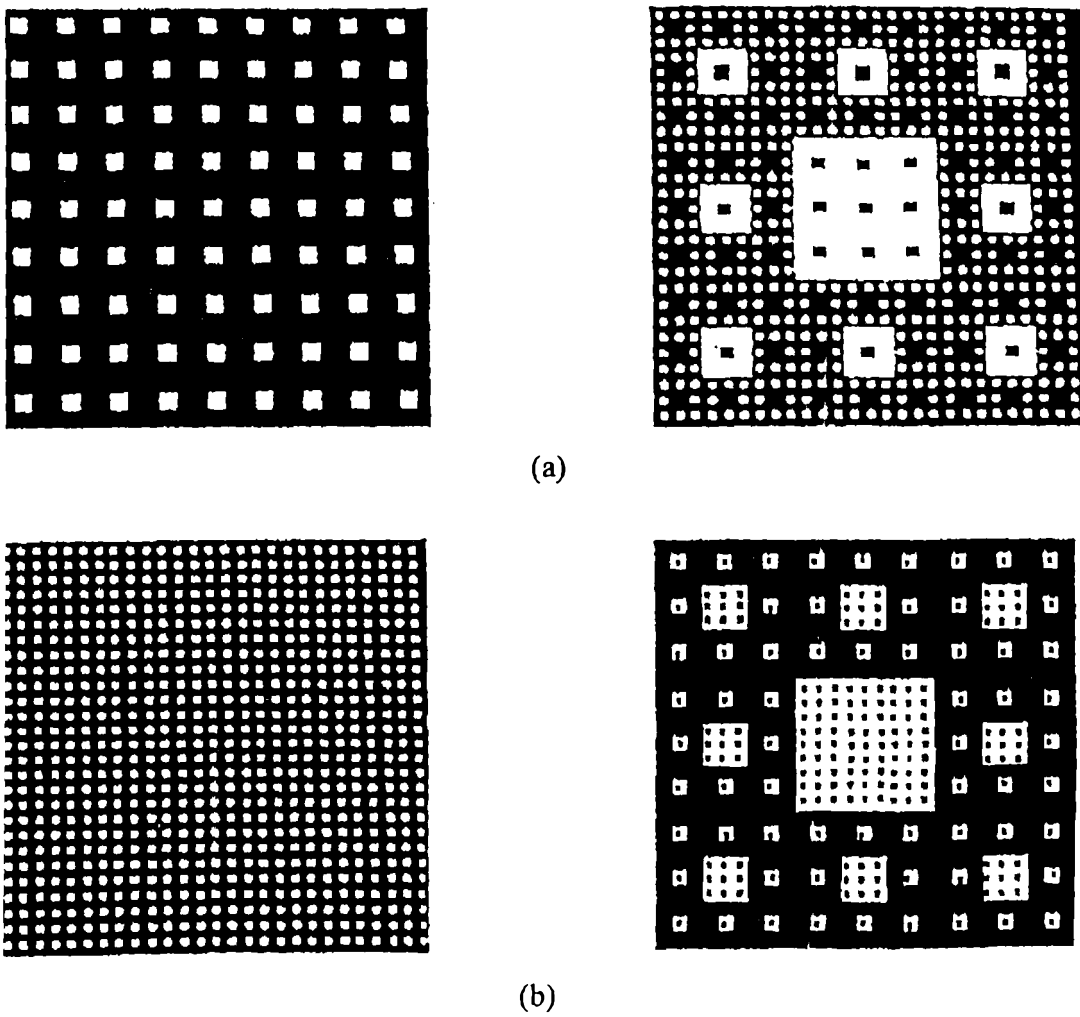


Figura 25 – (a) Componente periódica de orden 3 e imagen que resulta de filtrar esta componente. (b) Componente periódica de orden 4 y filtrado de la misma.

imagen no pueden verse las franjas de Young. Entonces, una forma de demostrar su existencia es producir un cambio de fase en π en las franjas de interferencia usando polarizadores.

El arreglo experimental se muestra en la figura 22, y consta de un método opto-digital que utiliza una cámara *CCD* y un software adecuado de procesamiento (*IMAGE-PRO*) para realizar el filtrado.

La figura 23 muestra el fenómeno físico en sí. El rotador *R* polariza el haz láser en la entrada del arreglo e ilumina el difusor *D*, el objeto *F* y la doble apertura *Y* con los polarizadores *P1*. Todos estos hechos se muestran en las figuras. La figura corresponde a los campos obtenidos después de atravesar el polarizador *P2*. Ambas secuencias son obtenidas para dos posiciones del rotador *R* (con una diferencia angular de $\pi/2$). El resultado es un cambio de fase en π en la distribución de intensidad de las franjas de Young. El efecto obtenido puede verse comparando las figuras 24, donde en el último caso se ve las franjas de Young modulando al speckle. La figura 24(c) es la transformada de Fourier para este caso, donde aparecen los diferentes órdenes de intensidad. Cada paso indicado en la figura ha sido utilizado para filtrar una de las componentes periódicas del objeto fractal de Sierpinski, obteniéndose finalmente el objeto sin franjas de Young pero con speckle, como se ve en la figura 25 para la carpeta de Sierpinski.

Para un buen procesamiento debemos tener en cuenta cual es la relación entre los granos de speckle y la separación entre las rendijas, y también considerar que el objeto fractal no tenga muy alto orden como para distorsionar el grano de speckle por difracción.

Referencias

1. J. C. Dainty, *Laser Speckle and Related Phenomena*, ed., Springer, New York (1975).
2. R. Henao, A. Tagliaferri and R. Torroba, "Digital polarization sensitive speckle pattern interferometry", *Opt. Comm.* **127**(1,2-3), 14-18, 1996.
3. M. Lehman, L. de Pasquale, D. Patrignani and J. L. Pombo, "Filtering a periodical component of a regular fractal using speckle", in *New Image Processing Techniques and Applications: Algorithms, Methods and Components II*, Rolf-Jürgen Ahlers, Philippe Réfrégier, Eds., *Proceedings of SPIE* Vol. **3101**, 315-321 (1997).
4. K. E. Peiponen, R. Silvennoinen, J. Uozumi, M. Savolainen and T. Asakura, "Prefractals in optical information coding", *Optik* **97**(3), 127 (1994).
5. N. Rodríguez, R. Torroba, M. Trivi, H. Rabal and M. Garavaglia, *Opt. Comm.* **54**(5), 262-264 (1985).

4.3. Interferometría y obtención de estructuras fractales.

Hasta ahora hemos mostrado como pueden obtenerse estructuras de tipo fractal a partir de funciones rectangular o bien, a partir de dominios donde las únicas

posibilidades eran que la función tome los valores 0 o 1. Sin embargo, utilizando la definición de función simple se puede construir patrones continuos, sin saltos entre dos valores, de modo de poder tener funciones periódicas discretas. El teorema del muestreo asegura que es una buena representación de una función y que además posee base experimental, ya que esta representada por puntos discretos obtenidos por ejemplo con una cámara *CCD*.

En una forma general, el patrón Moiré es obtenido cuando dos distribuciones de franjas son superpuestas. Aquí usamos una superposición multiplicativa que es obtenida desde:

$$I_M(x, y) = I_F(x, y) I_R(x, y) \quad , \quad (44)$$

siendo el subíndice *M* referido al patrón Moiré obtenido, *F* a las franjas medidas y *R* a las franjas de referencia obtenidas desde el registro inicial. El efecto Moiré es logrado cuando las siguientes condiciones sobre las frecuencias de las franjas es obtenido:

$$\begin{cases} \nu_F \approx \nu_R \\ \nu_F - \nu_R = \Delta\nu \ll \nu_R \end{cases} \quad , \quad (45)$$

donde ν_F es la frecuencia de la distribución $I_F(x, y)$ y ν_R es la de $I_R(x, y)$.

La distribución de intensidad de un interferograma general, incluyendo casos que no son simples distribuciones armónicas, puede ser expresado como una serie de funciones periódicas:

$$I(x, y) = I_m(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x, y) \cos [n \Phi(x, y)] \quad , \quad (46)$$

donde I_m es la intensidad media, C_n están definidos para $n = 1, 2, \dots$ y Φ es la información angular de fase del interferograma y representa el orden de franja *N* en cada punto del patrón para $\Phi(x, y) = 2\pi N(x, y)$. Para el interferómetro de Michelson, como el utilizado aquí, se tiene la distribución de franjas:

$$I(x) = \mathcal{K} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x}{h} \right) \right] \quad (47)$$

Utilizando la ecuación (44) puede demostrarse que, para cada desplazamiento en la superficie, tenemos el correspondiente resultado:

$$\eta = \frac{\lambda \nu_o}{M \nu_s} \left[\nu_s - \frac{\nu_o}{M} \right] \Delta \quad , \quad (48)$$

donde ν_o es la frecuencia de las franjas de interferencia obtenidas con cámara *CCD*, ν_s es la correspondiente frecuencia del patrón de franjas generado por computadora, *M* es la magnificación de la lente utilizada y Δ es el desplazamiento de la superficie (que en este caso es uno de los espejos del interferómetro).

Un experimento similar puede desarrollarse para la determinación del desplazamiento en un rango mas pequeño, tal como el interferómetro de Michelson mostrado en la figura 26. En este caso, la distribución de intensidad es registrada con una

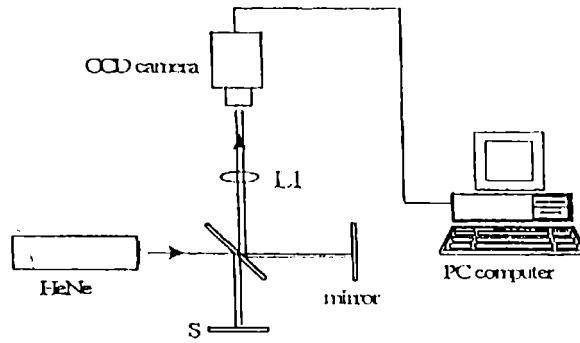


Figura 26 – Arreglo experimental con el interferómetro de Michelson.

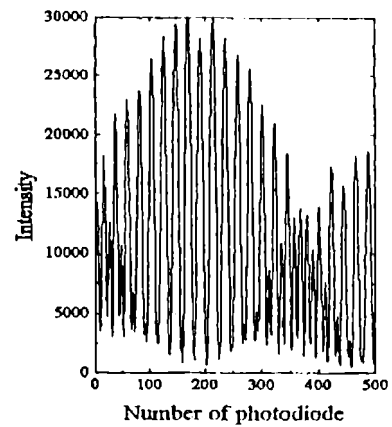
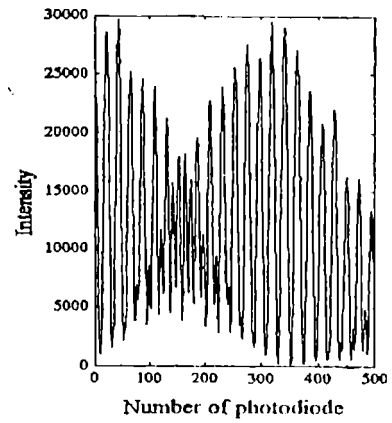
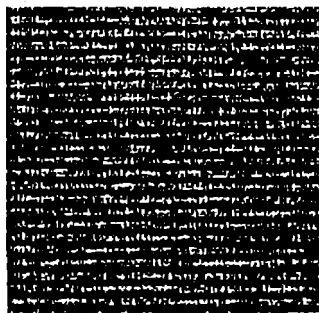
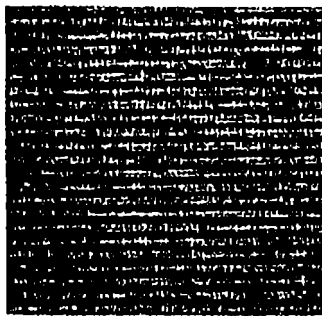


Figura 28 – De arriba hacia abajo: Patrón Moiré entre los primeros dos registros, y patrón Moiré entre el segundo y tercer registro.

Figura 27 – De arriba hacia abajo: primero, segundo registro de franjas obtenidas con el arreglo experimental de la figura anterior. Y debajo patrón de franjas generado por computadora.

cámara *CCD* con 512×512 fotodiodos y un software para el procesamiento de imágenes. Los resultados de patrones de franjas obtenidos se muestran en la figura 27, mediante una secuencia de imágenes (de arriba hacia abajo): para la posición inicial, cuando la superficie es desplazada, y el patrón generado por computadora a partir del patrón inicial. El resultado obtenido al aplicar un Moiré multiplicativo se observa en las figuras 28. El corrimiento en el patrón de Moiré es acorde al desplazamiento de casi $3\mu m$ de la superficie. En igual forma pueden superponerse franjas con diferente escalamiento, tales como las que se muestran en las figuras 29(a) y 29(b), y obtener las franjas mostradas en la figura 29(c) con una estructura más compleja. En esta forma, pueden conseguirse estructuras conteniendo una cierta auto-similaridad con este tipo de distribuciones.

Referencias

1. A. K. Asundi, "Moiré methods using computer-generated gratings", *Opt. Eng.* **32**(1), 107-116 (1993).
2. B. Han, "Interferometric methods with enhanced sensitivity by optical/digital fringe multiplication", *Appl. Opt.* **32**(25), 4713-4718 (1993).
3. P. Hariharan, "Interferometry with lasers", in *Progress in Optics XXIV*, E. Wolf, ed., North-Holland, Amsterdam (1987).
4. R. Kühmert and B. Michel, "Pattern sequential analysis of second-order Moiré interferograms", en *FRINGE '89: Automatic Processing of Fringe Patterns*, W. Osten, R. J. Pryputniewicz, G. T. Reid and H. Rottenkolber, Akademik-Verlag, Berlín (1989).
5. M. Lehman, L. de Pasquale, D. Patrignani and J. L. Pombo, "Fringe superposition with Computer-generated Moiré applied to position control", in *Sensors, Sensor Systems, and Sensor Data Processing*, Otmar Löffeld, Ed., *Proceedings of SPIE* Vol. **3100**, 388-395 (1997).
6. T. Matsumoto, Y. Kitagawa, M. Adachi, A. Hayashi, "Moiré topography for three-dimensional profile measurement using the interference fringes of a laser", *Opt. Eng.* **31**(12), 2668-2673 (1992).
7. Patorski, K. and M. Kujawinska, *Handbook of Moiré Fringe Technique*, Elsevier, Amsterdam (1992).
8. Shing-Fong Su, "Moiré fringe multiplication technique for measuring small displacements", *Appl. Opt.* **22**(19), 2949-2950 (1983).
9. C. A. Walker, "A historical review of Moiré interferometry", *Exp. Mechanics* **34**(4), 281-299 (1994).

4.4. Superposición de Imágenes y percolación.

El fenómeno de percolación es aquel por el cual se obtiene un ordenamiento geométrico de las estructuras que involucran un cierto hecho, por lo tanto se habla de transiciones de fase de tipo geométrico. La percolación puede verse como un fenómeno crítico en la distribución de probabilidad de los elementos constituyentes de la estructura. Como estos están en una relación directa con el patrón de intensidad (si se piensa en una distribución con la imagen impresa sobre una transparencia y proyectada sobre una pantalla), entonces la distribución de intensidad misma puede verse como un fenómeno crítico. Un ejemplo de esta situación puede verse en la figura 30. Si se adjudican probabilidades de ocupación a los componentes triangulares del gasket de Sierpinski, se comprueba que existen clusters que se forman por encima de una probabilidad crítica ($p_c \cong 0.5928$), pues en el caso de la figura 30(a) no hay muchas conexiones entre los elementos, mientras que en la figura 30(c) prácticamente todos están conectados.

Estudiamos estos hechos a partir de la superposición de dos imágenes con las correspondientes operaciones de cambio de escala, traslación y rotación. Algunas situaciones parecidas han sido estudiadas en la formación de estructuras particulares involucrando temas como correlación, reconocimiento de patrones y visión. Suponemos que tenemos dos imágenes idénticas y que rotamos una sobre otra, o bien que tenemos una imagen y una versión magnificada de ella y las superponemos, o bien le agregamos una rotación a este último caso. Todo esto se muestra en la figura 31.

Desde la teoría de percolación se tienen los siguientes hechos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad , \\ M(r) \sim \begin{cases} r^{d_f} & r \ll \xi \\ r^d & r \gg \xi \end{cases} \quad , \end{array} \right. \quad (49)$$

donde p_c es una probabilidad crítica, ξ es la longitud de correlación, $M(r)$ es la masa fractal contenida dentro de un radio r y d_f la dimensión fractal. Existe percolación debido a que puede adjudicarse una probabilidad a la ocupación de un elemento idéntico en las posiciones cercanas a cada elemento (cuando una imagen se rota sobre la otra). Al aumentar el ángulo, esta probabilidad disminuye y por lo tanto encontramos que los clusters, poco a poco, desaparecen.

En la superposición de dos imágenes, se tendrá una proporcionalidad de la distribución de intensidad crítica (la que forma los clusters) con la probabilidad crítica y además, una dependencia con el ángulo de la masa fractal contenida dentro del radio r . Esto es, se tendrá la relación:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{Tc}(r) \sim p_c \quad , \\ M(r) \sim r^{d_f \theta} \quad , \end{array} \right. \quad (50)$$

Junto con los ejemplos que hemos tenido en cuenta en la figura 31, pueden observarse las gráficas que verifica que la forma de los clusters puede representarse mediante la ley exponencial:

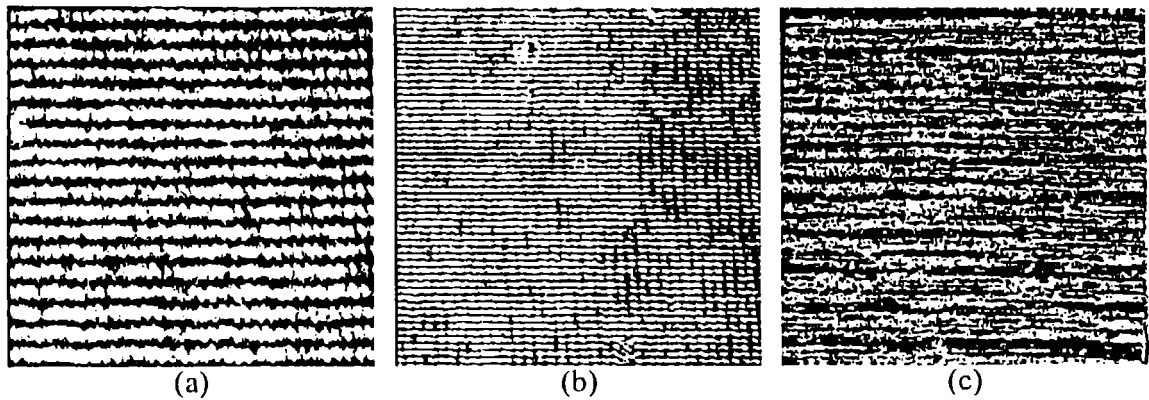


Figura 29 – (a) y (b) Patrones de interferencia guardando un cierto escalamiento entre ambos. (c) Patrón de intensidad más complejo al superponer multiplicativamente los dos anteriores.

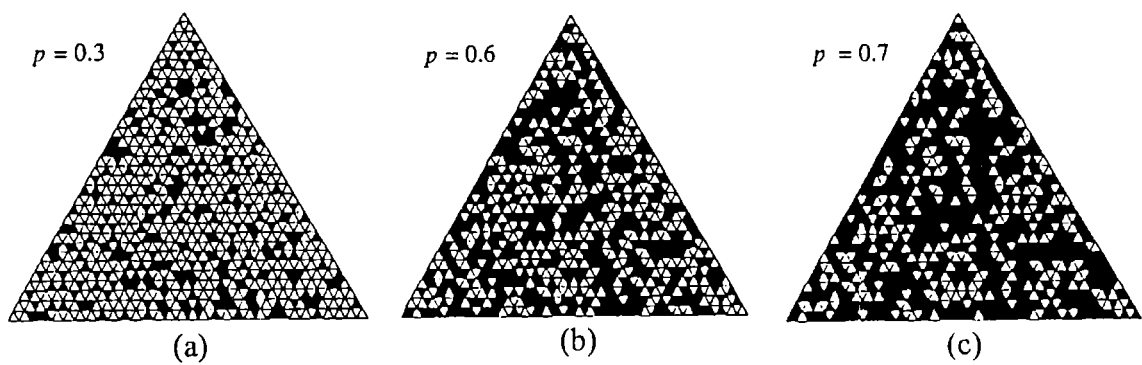


Figura 30 – Estructuras obtenidas al adjudicar valores de probabilidad para cada triangulito de estructura fina. Se ve como se forman los clusters cuando la probabilidad de ocupación es más alta, para $p > p_c$.

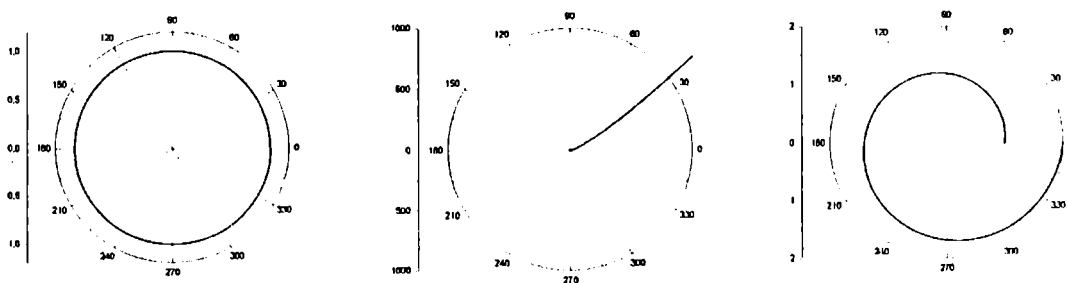
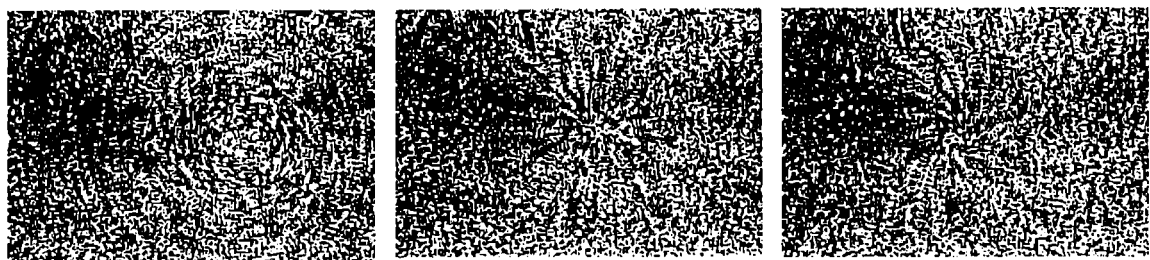


Figura 31 – Diferentes casos de superposición de imágenes con distribuciones aleatorias: (a) una imagen con su réplica, pero con una rotación entre ellas. (b) Una imagen con una versión magnificada de ella. (c) Una imagen con una versión magnificada de ella, pero con una rotación para esta última. Al lado pueden verse los respectivos resultados para los diferentes parámetros de la ecuación (51).

$$r(\theta) = \Lambda^{-\kappa\theta} \quad (51)$$

para diferentes valores de los parámetros Λ , κ y dependiendo del ángulo de rotación entre ambas imágenes.

Referencias

1. A. Bunde and S. Havlin, eds, *Fractals and disordered systems*, Springer (1996).
2. M. Garavaglia, "Symmetry? Moiré vs Other quasi-related Moiré patterns", 4th Meeting of the International Society for the Study of Interdisciplinary Symmetry, Technion, Haifa, Israel, 13-18 Setiembre 1998. Book of Extended abstracts-Part 1, 43-46.
3. M. Garavaglia, "Observing geometric figures quasi-related to Moiré patterns", Proceedings de la 3ra Reunión Iberoamericana de Optica y 6ta Reunión Latinoamericana de Optica, Láser y Aplicaciones, Cartagena de Indias, Colombia, Setiembre 28 - Octubre 2 (1998).
4. M. Garavaglia, "Quasi-Moiré patterns observed when an original transparency is superposed to its scaled-up and -down transparencies", International Conference on Optics and Optoelectronics, Dehra Dun, India, Diciembre 9-12 (1998). Optics and Optoelectronics. Theory, Devices and Applications. Editors: O. P. NijHawan, A. K. Gupta, A. K. Musla and Kehar Singh, Narosa Publishing House, New Delhi, Madras, Bombay, Calcutta and London. Vol. 2, 1149-1153.
5. M. Lehman and M. Garavaglia, "Percolation and quasi-Moiré fringes", en redacción.
6. D. McLaughlan, "The role of optics in applying correlation functions to pattern recognition", *J. Opt. Soc. Am.* 52(4), 454-459 (1962).
7. M. E. Orzechowski, "Percolation in random cantor sets", *Fractals* 5, Supplementary Issue, 101-109 (1997).
8. N. Rivier and A. Lissowski, "On the correlation between sizes and shapes of cells in epithelial mosaics", *J. Phys. A: Math. Gen.* 15, L143-L148 (1982).
9. N. Rivier, "Crystallography of spiral lattices", *Mod. Phys. Lett.* B2(8), 953-960 (1988).
10. B. Sapoval and M. Rosso, "Gradient percolation and fractal frontiers in image processing", *Fractals* 3(1), 23-31 (1995).
11. D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory*, 2nd edition, Taylor and Francis, London (1992).
12. K. A. Stevens and A. Brookes, "Detecting structure by symbolic constructions on tokens", *Vision Res.* 26, 1105-1112 (1985).

13. G. H. Weiss, *Aspects and Applications of the Random Walk*, North-Holland, Amsterdam (1994).

4.5. Entropía y fractales. Función de Entropía Electromagnética.

Las distribuciones de intensidad están muy claramente relacionadas con la teoría de curvas, y estas a su vez tienen una relación importante con el concepto de entropía. Diferentes situaciones de un sistema pueden ser caracterizados de acuerdo a las propiedades de curvas dentro de él (ver como ejemplo la figura 32). Para sintetizar, la relación entre entropía y curvas queda dada a través de la dimensión:

$$S(\Gamma) = 1 - \frac{1}{\dim_H \Gamma} \quad (51)$$

Una curva Γ de entropía nula, se dice que es determinista, una de entropía unitaria se dice que es caótica. Queremos ahora caracterizar la distribución de intensidad de un haz cuando se propaga en el vacío, lo que podrá luego ser extendido a la propagación en diferentes medios. Esto nos permitirá, en un futuro, relacionar nuevamente el concepto de entropía con los objetos fractales.

Un haz que se propaga libremente, después de haber interactuado con un objeto y lejos de él, puede ser considerado como un sistema aislado. Se define una total entropía para cada componente de un haz electromagnético y estacionario con un perfil de intensidad aún sin especificar (para ambos modos de polarización, TE y TM) como:

$$S(k, k_o, r, r_o) = S(k, k_o) + S(r, r_o) \quad , \quad (52)$$

donde $S(r, r_o)$ indica la entropía medida en *espacio-r* (siendo r_o la posición del origen de coordenadas para la distribución de intensidad) y $S(k, k_o)$ lo correspondiente al *espacio-k* de los vectores de onda (La transformada de Fourier del anterior, donde k_o es la componente central de ambos). La función de entropía es aditiva, dado que ambos espacios son independientes uno del otro y consecuentemente ambos forman diferentes subsistemas del sistema total. Así del concepto dado a través de la teoría de la información, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} S(k, k_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(k, k_o) \log_2 I(k, k_o) dk \quad , \\ S(r, r_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(r, r_o) \log_2 I(r, r_o) dr \quad , \end{array} \right. \quad (53)$$

donde, si se utilizan los haces con simetría cilíndrica, se puede expresar como función de una coordenada única en cada caso. Pero en general se tendrá:

$$dS(k, k_o, r, r_o) = \frac{\partial S}{\partial k}(k, k_o) dk + \frac{\partial S}{\partial r}(r, r_o) dr \quad (54)$$

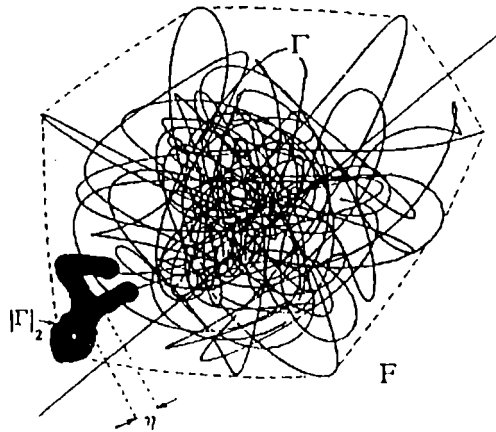


Figura 32 – Entropía de una curva. Simulación de la transmisión acústica en el océano. Diagrama de amplitud-fase en el plano complejo. (J. Prendy, Nature 342, 223, Nov. 1989)

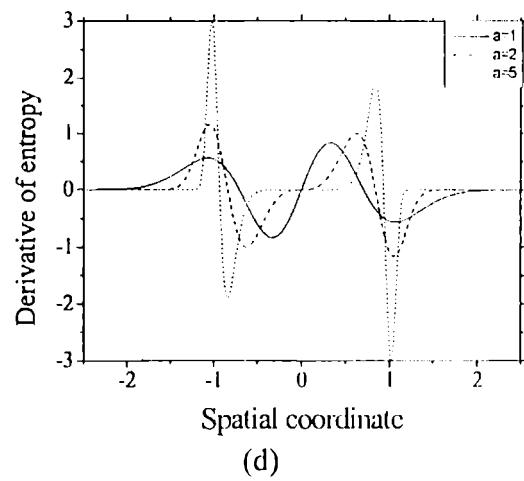
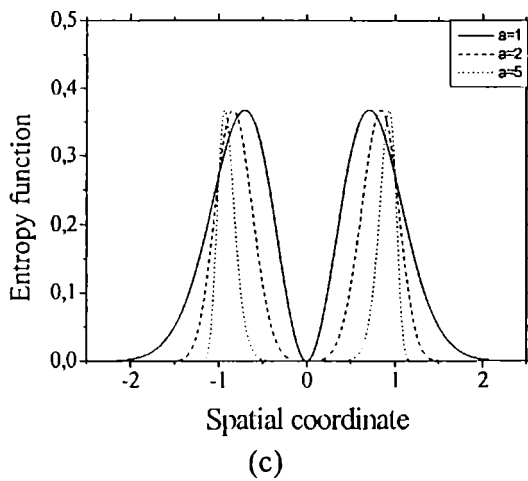
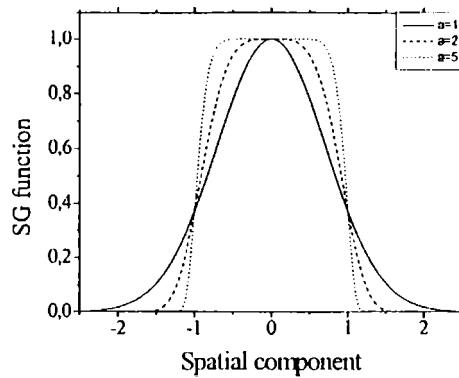
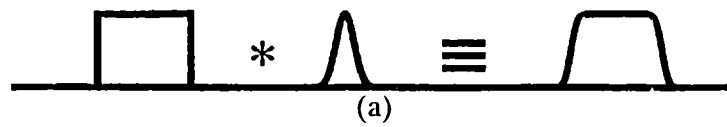


Figura 33 – (a) Operación de convolución para obtener una aproximación (b) a un haz super-gaussiano, con índice de super-gaussianidad a . (c) Distribución de entropía del haz en cada caso, (d) derivada de la entropía, que indica la dirección de máxima variación a lo largo de la coordenada transversal.

4.6. Propagación de Haces-SGL en el espacio libre.

Consideremos perfiles de haces uni-dimensionales obtenidos a través de la convolución entre funciones gaussianas y rectangulares (figura 33(a)). Esto es:

$$SG(x, z = 0; W_r, W_g) = \text{rect}(x', W_r) * \text{Gauss}(x' - x, z = 0; W_g), \quad (55)$$

donde W_r y W_g son los anchos característicos para cada función. Esta operación permite obtener perfiles con una distribución uniforme de energía que, desde el punto de vista teórico, puede resultar interesante para aplicaciones en lasers para procesamiento de materiales o para abordar el estudio de haces super-gaussianos. Los diferentes perfiles obtenidos a través del producto de convolución, representan una aproximación a la distribución $\exp\left[-\left(\frac{x'}{W_r}\right)^{2n}\right]$ como se muestra en la figura 33(b) para diferentes índices de super-gaussianidad.

La función entropía para diferentes perfiles puede verse en la figura 33(c) para la posición $z = 0$; también, los índices super-gaussianos, que corresponden a la aproximación de los perfiles super-gaussianos, se indican en cada caso. Como se esperaba, existe una alta correlación entre la distribución intensidad y la función entropía, pues es sabido de la termodinámica clásica que ambas formulaciones (energética y entrópica) son equivalentes. La figura 33(d) muestra la derivada para cada caso, que indica que la variación de la entropía se da en el sentido de la coordenada transversal.

Para obtener la forma funcional para la propagación de haces-SGL definidos en la ecuación (55), debemos desarrollar el producto de convolución entre el perfil inicial y la correspondiente exponencial de Fresnel. Debido a la asociatividad del producto de convolución, la propagación de los haces-SGL en la región de Fresnel puede estudiarse comenzando desde la definición dada por la ecuación (55), que finalmente se obtiene al resolver la integral:

$$SG(x, z, W_r, W_g) = \int_{-W_r}^{+W_r} \exp\left[-\left(\frac{x' - x}{W_g(z)}\right)^2\right] \exp\left[-jk \frac{(x' - x)^2}{2R(z)} - jkz + j\zeta(z)\right] dx', \quad (56)$$

y entonces, la solución para la propagación a lo largo del eje z en la región de Fresnel puede expresarse a través de:

$$SG(x, z, W_r, W_g) = \frac{(-1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi} U_o W_o \sqrt{R(z)} [k W_g(z) - i R(z)]}{2 [R(z) + i k W_g^2(z)]} \left\{ \text{erf} \left[\frac{(-1)^{\frac{1}{4}} (W_r - x) (R(z) + i k W_g(z))}{W_g(z) \sqrt{R(z)} [k W_g(z) - i R(z)]} \right] + \text{erf} \left[\frac{(-1)^{\frac{3}{4}} (W_r + x) (R(z) + i k W_g(z))}{W_g(z) \sqrt{R(z)} [k W_g(z) - i R(z)]} \right] \right\}. \quad (57)$$

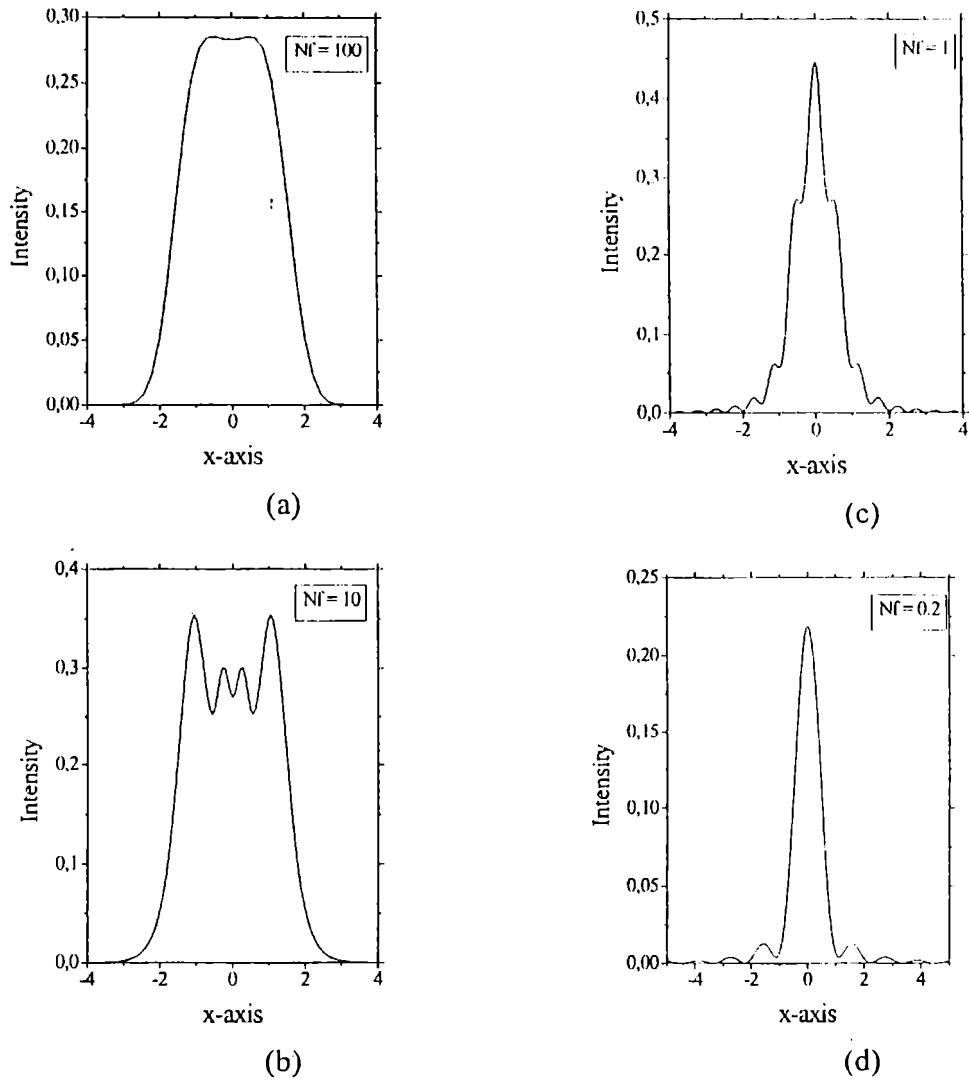


Figura 34 – Propagación de un haz super-gaussiano en un medio sin dispersión, isótropo y estacionario. Las posiciones están indicadas por el número de Fresnel Nf .

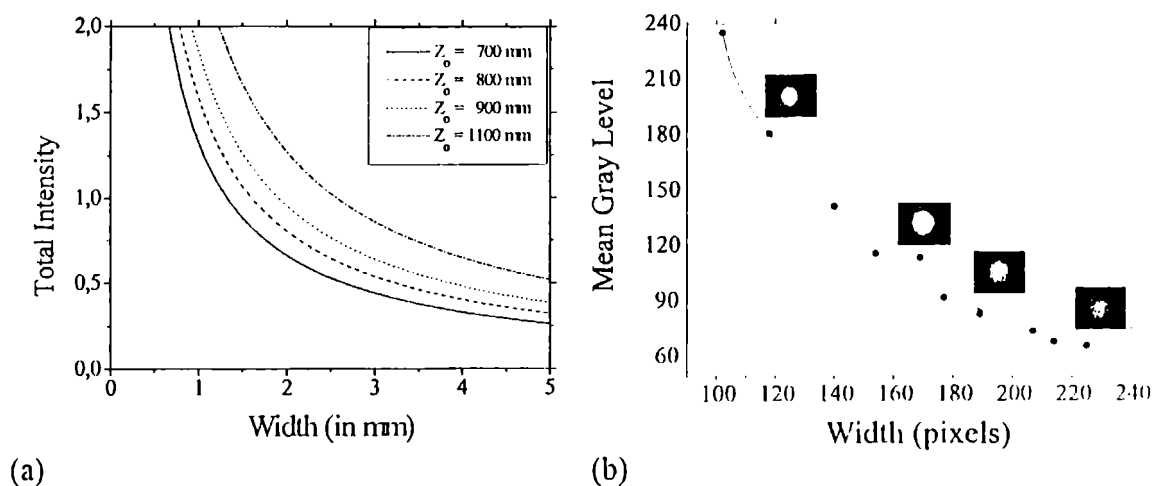


Figura 35 – Proceso que caracteriza la propagación de un haz super-gaussiano (a) curva teórica y (b) verificación experimental para el caso gaussiano (con $n=1$)

Como ejemplo, la propagación de un haz que representa una aproximación a un perfil super-gaussiano con índice $n = 5$ ($W_r = 1.9$, $W_g = 0.3$) se muestra en la figura 34 para diferentes posiciones en la dirección de propagación, que se encuentran relacionadas con el número de Fresnel Nf definido por:

$$Nf = \frac{(W_r + 3W_g)^2}{\lambda z}, \quad (58)$$

donde λ es la longitud de onda del haz monocromático.

Podemos ver en la figura 35 la intensidad media como función de el ancho característico del haz (que contiene 99% de la energía total). Que es, de igual manera, similar al resultado a los obtenidos para un proceso termodinámico politrópico. En este caso estimamos el ancho para diferentes posiciones a lo largo de la trayectoria del haz y calculamos la correspondiente intensidad media. Así, se pueden ajustar los puntos cuadrados con la curva, utilizando algún método de aproximación, como el de β -spline que es el utilizado en el presente caso.

Dada la complejidad para analizar y ser capaz de asociar los diferentes procesos considerados en termodinámica con la correspondiente propagación de haces super-gaussianos, por si solos, presentamos esta aproximación haciendo una comparación con los gases ideales, dejando para un futuro trabajo un análisis mas completo.

Corolario 2 - El haz de expansión se lleva en dirección de la entropía máxima local y la posición inicial del extremal que indica dicha expansión depende de el índice de super-gaussianidad.

La cuantificación y dirección de dicha variación se obtiene considerando dos estados para el sistema (inicial y final). En la figura 34(b) se pueden ver, junto a los puntos medidos, los estados correspondientes para el spot de láser obtenido con una cámara CCD y esto puede ser de utilidad, pues constituyen otra forma de caracterizar la propagación de una onda dentro de un medio.

Referencias

1. E. Alberti, M. Lehman, R. Torroba and M. Caravaglia, "Entropic propagation of Gaussian and Super-Gaussian-Like beams", enviado a *Opt. Comm.*
2. T. Asakura and J. Ohlsubo, *Optik* **46**, 19 (1976).
3. A. Bijaoui, *Image et Information*, Masson, Ed., 1981.
4. S. Bollanti, P. Di Lazzaro, D. Murra and A. Torre, *Optics Comm.* **138**, 35 (1997).
5. H. B. Callen, *Thermodynamics*, Wiley, New York (1961).
6. T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, New York (1991).
7. H. Gamo, *Progress in Optics* Vol. III, E. Wolf, Ed., North-Holland, Amsterdam (1964).

8. R. M. Gray, *Entropy and Information Theory*, Springer-Verlag, New York (1990).
9. E. T. Jaynes, *Phys. Rev. A* **106**, 620- (1957).
10. M. Lehman, "An entropic foundation of the angular change in the reflected beam from a planar interface", *Optik* **107**, 73 (1997).
11. E. H. Linfoot, "Information Theory and Optical Images", *J. Opt. Soc. Am.* **45**(10), 808-820 (1955).
12. C. Palma and V. Bagini, "Propagation of Super-Gaussian beams", *Optics Comm.* **111** (1994)
13. C. Palma and V. Bagini, "Expansions of general beams in Gaussian beams", *Optics Comm.* **116** (1995)
14. M. A. Porras and R. Medina, "Entropy-based definition of laser-beam spot size", *Appl. Opt.* **34**, 8247 (1995).
15. C. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communications*, Univ. Illinois Press, Urbana (1949).
16. R. Torroba, H. Rabal and B. Ruiz, "An entropy approach to light propagation", *J. of Modern Opt.* **39**, 1939 (1992).
17. R. Torroba, V. Climent and P. Andres, "An optical entropy approach to the Wigner distribution function", *Optik* **103**, 148 (1996).

5. Conclusiones y futuros desarrollos.

El estudio de la difracción por redes fractales ópticas y la aplicación al procesamiento óptico de la información ha sido presentada en este capítulo. Hemos visto algunas propiedades interesantes de la función auto-similaridad introducida por T. Asakura *et al.*. El tema de estudio de la difracción por redes fractales puede ser fácilmente extendido a redes aleatorias y cuasi-aleatorias. Esto podría traer como consecuencia que nuevas funciones de similaridad puedan ser definidas para estimar la relación entre parámetros estadísticos. En el futuro se prevé el estudio más detallado de estructuras con geometría variable en su estructura fina, al igual que profundizar aún más los estudios en la región de Fresnel ya que por un lado surgen interesantes aplicaciones del fenómeno de autoimágenes, debido a la superposición de funciones periódicas y las posibilidades de medición de otros parámetros de la estructura. También, se ve que existen zonas de alta correlación entre la función original y sus réplicas dentro de la región de Fresnel, que no habían sido detectadas en las mediciones e implementación numérica de la función auto-similaridad.

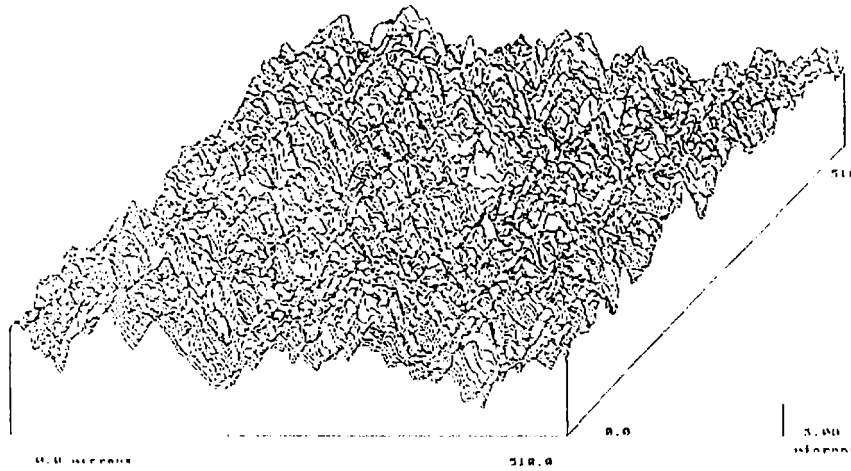
Diferentes consideraciones son presentadas aquí para futuras aplicaciones y relaciones con la geometría fractal, en lo que hace al estudio de superficies, utilizando técnicas de microscopía óptica. Es importante poder caracterizar la función correlación para la generación dinámica de este tipo de superficies. Además, las técnicas de

speckle resultan un complemento importante de las anteriores en el rango visible por su facilidad de montaje. Con esto pueden estudiarse las variaciones de temperatura o de tensiones que soporta una superficie a través de las variaciones en su dimensión. El procesamiento óptico de la información genera muchas aplicaciones tanto en imágenes, para obtener las características fractales y poder estudiar fallas en estructuras o bien para generar nuevas estructuras conteniendo otro tipo de información óptica. En este sentido un formalismo matemático es necesario implementar para relacionar dichas propiedades con las diferentes operaciones de superposición tipo Moiré o bien de filtrado de componentes. En otro sentido, la propagación en medio desordenados ofrece nuevas posibilidades a través de su caracterización de la entropía espacial. Pueden combinarse diferentes resultados como los métodos de auto-imágenes y procesamiento para obtener las propiedades correspondientes, pero además el método de entropía favorece la formulación en un marco formal más general al poder relacionar con la teoría termodinámica.

Bibliografía complementaria para el capítulo III

1. H. D. Bale and P. W. Schmidt, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 596 (1984).
2. A. Lakhtakia, N. S. Holter, V. K. Varadan, and V. V. Varadan, "Self-similarity in diffraction by a self-similar fractal screen", *IEEE Trans. Ant. Prop.* **35**, 236-239 (1987).
3. M. Born and W. Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon, New York, 1980).
4. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982).
5. D. L. Jordan, R. C. Hollins and E. Jackeman, *Appl. Phys. B* **31**, 179 (1983).
6. J. Uozumi, H. Kimura and T. Asakura, *Waves in Random Media* **1**, 73 (1991).
7. J. Uozumi, K. E. Peiponen, M. Savolainen, R. Silvennoinen and T. Asakura, *Am. J. Phys.* **62**(3), 283 (1994).
8. Y. Sakurada, J. Uozumi and T. Asakura, in *Optics as a Key to High Technology*, Proc. SPIE 1983, 371 (1994).
9. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1968).
10. N. M. Blachman, "Sinusoidal and Walsh functions", *Proc. IEEE* **62**(3), 346 (1974).
11. L. N. Hazra and A. Guha, *JOSA A* **3**(6), 843 (1986).
12. K. Paturski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Prog. in Opt.* XXVII, E. Wolf, ed., 3-108 (1989).
13. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill (1968).
14. A. W. Lohmann, *Optical Information Processing*, Univ. Erlangen, 14-21 (1978).
15. J. Levy-Véhel, Fractal Approaches in Signal Processing, *Fractals*, **3**(4) 755-775 (1995).
16. H. A. Makse, C. K. Peng, M. A. Salinger, M. H. R. Stanley, G. M. Viswanathan, *Fractals* **4**(3), 427-451 (1996).
17. A. D. Freitas, S. Coutinho, "Multifractality of Generalized Fibonacci Profiles", *Fractals*, **1**(3), 694-701 (1993).
18. F. B. Tatom, The Relationship Between Fractional Calculus and Fractals, *Fractals*, **3**(1), 217-229 (1995).

19. O. Trabocchi, C. Colautti, E. E. Sicre, "Walsh-Hadamard Analysis of the Fresnel Diffraction by Cantor Fractals", *Optik* 108(2), 78-82 (1998).
20. C. J. R. Sheppard, K. G. Larkin, "Similarity Theorems of Fractional Fourier Transforms and Fractional Hankel Transform", *Optics Comm.* 154, 173-178 (1998).
21. Y. B. Karasik, "How to Compute Three-dimensional Convolution and/or Correlation Optically: A Mathematical Foundation", *J. Mod. Optics* 45(4), 817-823 (1998).
22. C. J. R. Sheppard, "Free-space Diffraction and the Fractional Fourier Transform", *J. Mod. Optics* 45(10), 2097-2103 (1998).
23. F. J. Marinho, L. M. Bernardo, "Numerical Calculation of Fractional Fourier Transforms with a Single Fast-Fourier-Transform Algorithm", *J. Opt. Soc. Am. A* 15(8), 2111-2116 (1998).
24. D. Dragoman, "The Relation Between Light Diffraction and the Fractional Fourier Transform", *J. Mod. Optics* 45(10), 2117-2124 (1998).
25. C. A. Brown, "Concurrent design of engineering surfaces using patchwork analysis", *Fractals* 2(3), 423-427 (1994).
26. K. Creath, "Phase-shifting speckle interferometry", in *Progress in Optics XXVI*, E. Wolf, ed., 350-393, North Holland (1988).
27. R. S. Sirohi, ed., *Speckle Metrology*, Marcel Dekker Inc., New York (1993).
28. T. Takatsuji, B. F. Oreb, D. J. Farrant and J. R. Tyrer, "Simultaneous measurement of three orthogonal components of displacements by electronic speckle-pattern interferometry and the Fourier transform method", *Appl. Opt.* 36(7), 1438-1445 (1997).
29. Ebbeni, J., "Overview of coherent optics applications in metrology", in *Scattering and Diffraction*, H. A. Ferweda, ed., *SPIE Proceedings* 1029 (1988).
30. Häusler, G., "About physical limits of range sensing", *Proceedings of the 1994 Frontiers in Information Optics*, 63, 1994.
31. S. Ledesma and C. Iemmi, "Fraunhofer diffraction patterns generated by Cantor phase gratings", *Optik* 97(1), 9-14 (1994).
32. M. Fernández-Guasti and M. de la Cruz Heredia, "Diffraction pattern of a circle/square aperture", *J. Mod. Optics* 40(6), 1073-1080 (1993).



CAPITULO IV:

RESULTADOS DE LA TEORIA VECTORIAL Y ***ALGUNAS DE SUS APLICACIONES***

1. Interacción de la radiación electromagnética con la materia.

Iniciamos aquí el estudio de la relación que existe entre las propiedades geométricas de los objetos y los campos electromagnéticos que interaccionan con ellos. Es sabido que diferentes propiedades (desde el punto de vista electromagnético) pueden derivarse cuando las dimensiones del objeto son comparables con la longitud de onda de la radiación incidente. Diversos efectos relacionados con la polarización y las propiedades geométrico-estadísticas comenzarán a ser tenidas en cuenta de aquí en mas. Es interesante poder diferenciar los efectos que tiene dicha geometría; referida a estructuras con distribución de tipo fractal, periódica y cuasi-periódica, sobre las ondas dispersadas por la superficie de separación entre dos medios o también el efecto de la estructura volumétrica de un medio material sobre la onda reflejada o transmitida.

Las propiedades de propagación, reflexión, refracción y scattering de ondas electromagnéticas son adecuadamente descritas por las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica. Este problema físico es bien conocido y en la figura 1 se muestra la incidencia de una onda sobre la interface que separa dos medios. Además, de acuerdo con las ecuaciones de onda de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad ,\end{aligned}\tag{1}$$

se puede verificar que las soluciones, para las ondas salientes desde la interface, son de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i k \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - i \omega t] \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 \exp[i k \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - i \omega t] \quad ,\tag{2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\mu \epsilon} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad ,$$

en donde, como es sabido $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ son los vectores campo eléctrico y campo magnético respectivamente, k es el vector de onda y ω la frecuencia de la radiación, $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie de la interface, μ y ϵ son constantes del material sobre el que incide la onda y \mathbf{S} es el vector de Poynting. Las condiciones de contorno para resolver este simple problema se pueden expresar mediante:

$$[\epsilon_1 (\mathbf{E}_{i0} + \mathbf{E}_{r0}) - \epsilon_2 \mathbf{E}_{t0}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad ,$$

$$[\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_{i0} + \mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{r0} - \mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{t0}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad ,$$

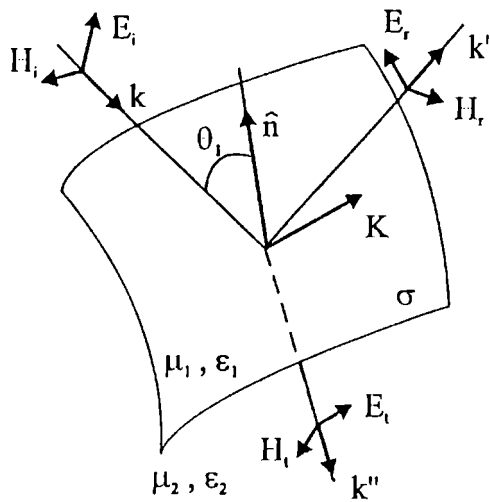


Figura 1 – Incidencia de una onda electromagnética sobre una interface entre dos medios caracterizados por las constantes (ϵ_1, μ_1) y (ϵ_2, μ_2) respectivamente.

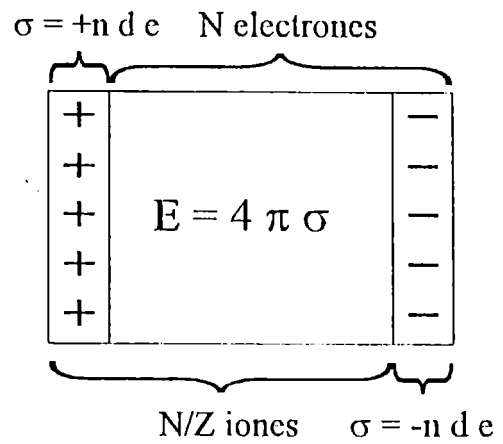
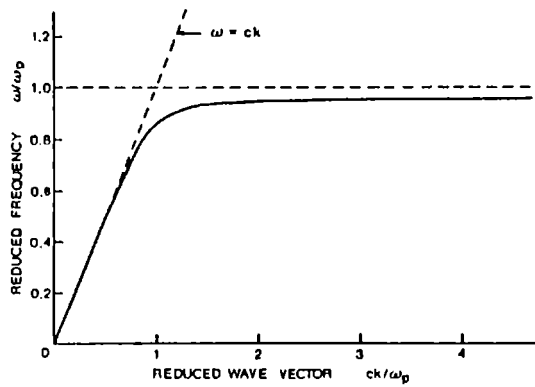
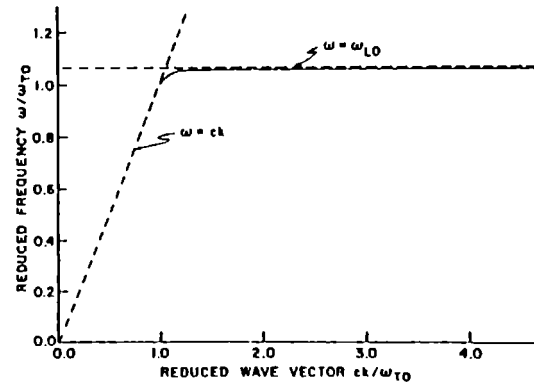


Figura 2 – Simple modelo de las oscilaciones de plasma.



(a)



(b)

Figura 3 – Curvas de dispersión para polaritones superficiales: (a) Plasmones y (b) Fonones ópticos. (R. F. Wallis and G. I. Stegman, *Electromagnetic Surface Excitations*, Springer-Verlag, Berlín, 1986)

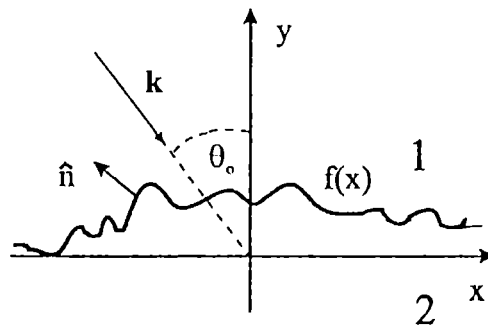


Figura 4 – Scattering electromagnético por una superficie uni-dimensional $(f(x))$ entre dos medios 1 y 2.

$$[\mathbf{E}_{i_o} + \mathbf{E}_{r_o} - \mathbf{E}_{t_o}] \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad , \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_{i_o} + \mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{r_o}) - \frac{1}{\mu_2} (\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{t_o}) \right] \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad ,$$

con lo cual se obtienen fácilmente las expresiones para los coeficientes de Fresnel, de acuerdo con la dirección de polarización de la radiación incidente. El resultado en cada caso es:

- **E** perpendicular al plano de incidencia o modo *TE*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{t_o}}{E_{i_o}} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad , \\ \frac{E_{r_o}}{E_{i_o}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad , \end{array} \right. \quad (4)$$

- **H** perpendicular al plano de incidencia o modo *TM*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{t_o}}{E_{i_o}} = \frac{2 n_1 n_2 \cos \theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad , \\ \frac{E_{r_o}}{E_{i_o}} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad , \end{array} \right. \quad (5)$$

donde los subíndices *i*, *r* y *t* indican los campos incidente, reflejado y transmitido desde la interface; igualmente, el subíndice 1 se refiere al medio desde el cual incide la radiación electromagnética y el 2 al medio sobre el que se refleja y transmite.

1.1. Efectos superficiales

El modelo de Drude es la más simple formulación clásica para poder visualizar el efecto de la radiación sobre un material. Describe principalmente lo que ocurre en el caso de la reflexión metálica y de semiconductores que poseen una alta densidad de electrones libres dentro del material (ver figura 2). Las principales características de este modelo son:

- 1) Entre colisiones, la interacción de los electrones entre sí y con los iones de la red del material son despreciables.
- 2) Tales colisiones son eventos instantáneos, que alteran abruptamente la velocidad del electrón.

3) La probabilidad por unidad de tiempo de que un electrón experimente una colisión está dada por el valor $\frac{1}{\tau}$, siendo τ el tiempo de relajación.

4) Los electrones están en equilibrio térmico con los alrededores solo a través de las colisiones.

Uno de los resultados más importantes de este modelo está relacionado con la constante de permitividad eléctrica del material, la cual se demuestra que está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad , \\ \omega_p = \frac{4\pi n e^2}{m} \quad , \end{array} \right. \quad (6)$$

donde se tiene que ω_p es la frecuencia de plasma, m la masa y e la carga del electrón respectivamente y n la densidad de electrones libres.

Cuando una onda se propaga en un medio (suponemos que este es lineal, isótropo, no magnético y sin pérdidas), sus propiedades son modificadas por el acoplamiento de la onda con las excitaciones elementales del medio. La excitación acoplada se llama polaritón y consiste de un fotón acoplado a un plasmón, fonón óptico, magnón, etc. Una onda superficial electromagnética es un polaritón en el cual el campo electromagnético está localizado sobre la superficie. Es sencillo demostrar, para el caso de superficies planares que, si se tienen las constantes de atenuación de los medios:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(\omega) = k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_1(\omega) \quad , \\ \alpha_2(\omega) = k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_2(\omega) \quad , \end{array} \right. \quad (7)$$

y se utilizan las soluciones de onda a las ecuaciones de Maxwell en cada medio y las condiciones de contorno, entonces se llega finalmente a la relación de dispersión:

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_2(\omega)} = -\frac{\alpha_1(\omega)}{\alpha_2(\omega)} \quad , \quad (8)$$

siendo $\alpha_1(\omega)$ y $\alpha_2(\omega)$ positivos, entonces cuando existe un polaritón superficial $\varepsilon_1(\omega)$ y $\varepsilon_2(\omega)$ tienen signos contrarios, lo cual implica un valor complejo para el segundo medio y de esta forma se consigue una alta reflectividad. Igualmente, se verifica que en estas condiciones hay solamente un modo superficial *TM*. Damos a continuación algunos ejemplos de posibles casos de polaritones.

Plasmones superficiales. Se da en el caso de metales y semiconductores que posean electrones libres de moverse sobre la superficie. A partir de la ecuación (6) del modelo de Drude se puede demostrar que la frecuencia del plasmón superficial está dada por:

$$\omega_{SP}^2(k) = \frac{1}{2\epsilon_\infty} \left\{ (1 + \epsilon_\infty) c^2 k^2 + \epsilon_\infty \omega_p^2 - \sqrt{((1 + \epsilon_\infty) c^2 k^2 + \epsilon_\infty \omega_p^2)^2 - 4\epsilon_\infty c^2 k^2 \omega_p^2} \right\} , \quad (9)$$

un dibujo de la relación obtenida se muestra en la figura 3a.

Fonones ópticos superficiales. En este caso representamos materiales como los alcalinos o semiconductores polares, con una o mas ramas ópticas. Si por ejemplo se tiene un cristal cúbico con dos átomos por celda unidad, y la función de permitividad eléctrica está dada entonces mediante:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_{LO}^2 - \omega_{TO}^2}{\omega_{TO}^2 - \omega^2} \right) , \quad (10)$$

donde ω_{LO} y ω_{TO} son las frecuencias longitudinal y transversal de los fonones ópticos. Si en este caso el segundo medio es el vacío, entonces se tiene el resultado:

$$\omega_{SO}(k) = \frac{1}{2\epsilon_\infty} \left\{ (1 + \epsilon_\infty) c^2 k^2 + \epsilon_\infty \omega_{LO}^2 - \sqrt{((1 + \epsilon_\infty) c^2 k^2 + \epsilon_\infty \omega_{LO}^2)^2 - 4\epsilon_\infty c^2 k^2 (\omega_{TO}^2 + \epsilon_\infty \omega_{LO}^2)} \right\} \quad (11)$$

En la figura 3b se muestra la relación de dispersión $\omega_{SO}(k)$.

Modelos más complicados pueden desarrollarse a partir de los estudios de los sólidos y la teoría de campos, pero no profundizaremos al respecto, sino que lo que sigue sirve para darle una base física a los diferentes aspectos que luego mostraremos y que son de interés para desarrollos posteriores en el modelado de superficies y de estructuras que contengan geometría fractal.

En general, las interacciones no lineales ópticas ocurren cada vez que los campos (coherentes) ópticos de uno o más haces láser son lo suficientemente grandes para producir en un medio (adicionalmente a la respuesta lineal) campos de polarización no lineal. Pueden entenderse como los términos de segundo (y más alto) orden de una expansión en serie de polarización proporcional al producto de dos o mas de los campos incidentes. Un término de segundo orden solo puede darse en ciertas clases de cristales que carecen de centro de inversión, mientras que los de tercer orden ocurren en todos los materiales. Los campos de polarización no lineal son las fuentes de campos ópticos en nuevas frecuencias; si se hacen coincidentes en fase, crecen linealmente con la propagación.

Muchos fenómenos ópticos, se realzan sobre un film de metal rugoso. Esto se asocia comúnmente con la excitación de plasmones superficiales. Típicamente se reconocen dos tipos de plasmones superficiales: onda de plasmones superficiales (*SPW*) y plasmones superficiales localizados (*LSP*). Los *SPW* se propagan lateralmente por

la superficie del material: los *LSP* se confinan a partículas de metal que son mucho más pequeñas en tamaño que la longitud de onda de la luz incidente.

Evidencia reciente, sugiere que los films de metal depositados en frío son estructuras fractales auto-afines. Las estructuras fractales no poseen invarianza traslacional y no pueden transmitir ondas de corriente ordinarias (tales como las *SPW*, por ejemplo). Matemáticamente, esto es consecuencia del hecho de que las ondas de corriente no son eigenmodos del operador de simetría de dilatación que, en general, caracteriza las superficies con auto-afinidad y los clusters fractales. La eficiencia de los fractales para desechar las ondas de corriente puede llevar a un entendimiento detallado de la "auto-estabilización" de la mayoría de los fractales encontrados en la naturaleza.

Los eigenmodos dipolares en los compuestos fractales son substancialmente diferentes de aquellos encontrados en otro medio. Los agregados fractales poseen una variedad de eigenmodos (fractones) dipolares, distribuidos sobre un amplio rango espectral. Para el caso de una colección tridimensional convencional de partículas (tales como una esfera aleatoria compacta de partículas o un gas aleatorio de partículas), los espectros de absorción son máximos cerca de una resonancia relativamente angosta de partículas individuales. Los eigenmodos dipolares de los fractales pueden excitarse por un campo eléctrico homogéneo, mientras que sólo un modo dipolar puede ser excitado por el mismo tipo de campo en una esfera dieléctrica. Tanto en el medio continuo como en la mayoría de los medios microscópicamente desordenados, pero homogéneos en promedio, los medios dipolares (polaritones) se encuentran generalmente delocalizados sobre grandes áreas. Todos los monómeros absorben energía luminosa con aproximadamente igual relación en las regiones cuyas dimensiones lineales exceden significativamente la longitud de onda del campo incidente. Contrario a esto, los fractones en materiales nanocompuestos, tales como los clusters de fractales y los films delgados auto-afines, son de corto rango y tienden fuertemente a ser localizados. Estos compuestos tienen eigenestados que con frecuencia pertenecen a la resolución de la sub-longitud de onda. Dichos medios irregulares no son homogéneos en promedio, y permanecerán desordenados en todas las posibles escalas; por lo tanto, no poseen simetría traslacional. En su lugar son simétricos con respecto a la transformación de escala (i.e. invariante en escala).

La absorción de la luz por una colección de monómeros confinados en regiones sub-longitud de onda puede ser mucho mayor que la de cualquier otro monómero ensamblado, simplemente porque la variación de densidad en las diferentes regiones de un objeto (donde mas o menos vacío está presente). Por lo tanto se podrían esperar fuertes fluctuaciones de campos locales que se asociarían con dicha localización de los eigenmodos ópticos. Las fluctuaciones espaciales de los campos locales incentivan enormemente un gran número de efectos ópticos para nanocompuestos.

En films auto-afines, las oscilaciones de plasmones asociadas con diferentes características de rugosidad interactúan de manera importante con cada una a través de fuerzas dipolares, o mas específicamente multipolares. Así las oscilaciones de plasmones en superficies auto-afines no son *SPW* convencionales ni *LSP*. Deberían tratarse como eigenmodos colectivos formados por la interacción entre diferentes características de un film auto-afín.

A diferencia de las superficies aleatorias con pequeñas inhomogeneidades espa-

ciales, la contribución a las armónicas espaciales más altas (con la amplitud mayor que la de la longitud de onda de la armónica) juegan un rol importante en la descomposición de Fourier de una superficie auto-afín. Esto significa que ni la perturbación de Rayleigh ni el enfoque de Kirchoff (óptica geométrica) pueden aplicarse para describir las propiedades ópticas de una estructura auto-afín. Además de estos dos acercamientos básicos, existe un enfoque de perturbación de fase, que es en cierto sentido, intermedio entre los dos métodos propuestos anteriormente y no puede ser aplicado para una superficie auto-afín.

Referencias

1. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*
2. A. Miller, "Fundamental Optical Properties of Solids", en *Handbook of Optics*, M. Bass, ed., McGraw-Hill, New York, 42.1-42.130 (1995).
3. R. Botet, E. Y. Poliakov, V. M. Shalaev and V. A. Markel, "Fractal-Surface-Enhanced Optical Responses", en *Fractals in Engineering*, J. Lévy Véhel, E. Lutten and C. Tricot, eds, Springer, London (1997).
4. F. García-Moliner and F. Flores, *Introduction to the Theory of Solid Surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge (1979).
5. A. E. Kaplan, P. W. Smith and W. J. Tomlinson, *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, North Holland, Amsterdam, 323-351 (1991).
6. H. Ogura, Z. L. Wang, Y. Sasakura, "Localization of Surface Plasmon Waves on the Surface of a Random Rough Metallic Grating", *J. Opt. Soc. Am. A* 15(7), 1886-1890 (1998).
7. V. Shalaev, V. A. Markel, V. P. Safonov, R. Botet, "Resonant Optics of Fractals", *Fractals* 2(2), 201-209 (1994).
8. Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984).
9. R. F. Wallis and G. I. Stegeman, *Electromagnetic Surface Excitations*, Springer-Verlag, Berlín (1986).

2. El problema general de scattering electromagnético.

La magnitud más importante en el scattering por una superficie es la reflectancia bidireccional (*BRDF*), que es una función multidimensional que describe la dependencia angular y en polarización de la intensidad de luz reflejada y dispersada por una superficie. Se expresa en términos de la resolución angular o intensidad diferencial de scattering ($\frac{dI}{d\Omega}$) y la sección transversal σ , de la siguiente manera:

$$BRDF(\theta_i, \theta_s, \varphi_s) = \frac{1}{\cos \theta_s} \frac{1}{I_i} \left(\frac{dI_s}{d\Omega} \right) = \frac{\sigma}{4\pi A_o \cos \theta_i \cos \theta_s} \quad , \quad (12)$$

siendo I_i la intensidad incidente, I_s la intensidad en campo lejano, A_o el área iluminada consideradas para cada polarización. En general, el problema de scattering requiere la solución de una ecuación integral que relaciona los campos incidentes sobre un cierto objeto y los dispersados por éste. Diversos métodos han sido tenidos en cuenta, y los mas conocidos son las teorías de Rayleigh y Kirchoff, y luego la desarrollada por Beckman.

El problema básico del scattering de una onda plana por una superficie con rugosidades se esquematiza en la figura 4, para una superficie uni-dimensional. Esta superficie puede tener también una simetría de tipo cilíndrico a lo largo de uno de los ejes coordenados, con lo cual es posible conseguir el montaje conocido como difracción cónica. El problema más sencillo de resolver en estos casos es cuando la onda incidente tiene el vector polarización en la dirección de este eje de simetría (como sería el caso de la figura 4), y entonces se dice que la incidencia es en la sección principal. Si consideramos este caso, siendo que la forma general del campo incidente monocromático es:

$$I_i(x, y) = \exp [i (\alpha_o x - \beta_o y)] \quad , \quad (13)$$

teniendo en cuenta las siguientes definiciones:

$$\begin{cases} \alpha_o = k \sin \theta_o \quad , \\ \beta_o = \sqrt{k^2 - \alpha_o^2} \quad , \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \end{cases} \quad (14)$$

En ambos medios debe verificarse que los campos electromagnéticos deben ser solución de la ecuación de onda de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2 n^2) F(x, y) = 0 \quad , \quad (15)$$

debiendo satisfacer las siguientes condiciones de contorno sobre la superficie de separación de ambos medios:

$$\begin{cases} F_1(x, f(x)) = F_2(x, f(x)) \quad , \\ \nu_o \frac{dF_1}{d\mathbf{n}}(x, f(x)) = \frac{dF_2}{d\mathbf{n}}(x, f(x)) \quad , \end{cases} \quad (16)$$

y siendo ν_o una constante igual a 1 para el modo TE y a n_2^2 para el modo TM .

Los primeros estudios sobre teoría vectorial fueron desarrollados para redes de difracción, es decir, con una periodicidad incluida en su distribución. Existen diversos métodos que se han empleado a lo largo de los años en esta área. Las primeras aplicaciones se referían a la dispersión de ondas electromagnéticas por redes con un material de conductividad muy alta (incluso infinita) y luego fue extendida a materiales con cualquier valor en su constante de conductividad. Ya que nuestro principal logro matemático ha sido la descomposición de fractales en funciones periódicas, nos

interesa estudiar el efecto sobre cada componente en el marco de una teoría vectorial de difracción para este caso. A continuación damos un resultado que se comprueba fácilmente para el caso de un material conductor perfecto, y se familiariza con el teorema de Floquet-Bloch, pero puesto para el caso electromagnético:

$$F_D[x+d, f(x)] = -F_i \exp[j \alpha d] \quad (17)$$

siendo d un desplazamiento en x , D se refiere al campo difractado e i al campo incidente. En el caso de una red de difracción (con conductividad finita), la solución matemática para calcular los campos difractados desde un arreglo periódico es:

- Modo TE :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}^{TE}(x, y, z) = \hat{y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m \exp[i(\gamma_m x + t_m z)] \quad , \\ \mathbf{H}^{TE}(x, y, z) = k^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m (-\hat{x} t_m + \hat{z} \gamma_m) \exp[i(\gamma_m x + t_m z)] \end{array} \right. \quad (18)$$

- Modo TM :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}^{TM}(x, y, z) = k^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m (\hat{x} t_m - \hat{z} \gamma_m) \exp[i(\gamma_m x + t_m z)] \quad , \\ \mathbf{H}^{TM}(x, y, z) = \hat{y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m \exp[i(\gamma_m x + t_m z)] \quad , \end{array} \right. \quad (19)$$

donde para ambos casos se ha definido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_m = \frac{2\pi m}{d} \quad , \\ t_m = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2} \quad , \quad \text{si } |\gamma_m| \leq k \\ = \sqrt{\gamma_m^2 - k^2} \quad , \quad \text{si } |\gamma_m| > k \end{array} \right. \quad (20)$$

Los coeficientes T_m y L_m representan las amplitudes complejas de los órdenes difractados por la red. Están dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_m = d^{-1} \int_0^d E_y(x, y, 0) \exp(-i\gamma_m x) dx \quad , \\ L_m = d^{-1} \int_0^d H_y(x, y, 0) \exp(-i\gamma_m x) dx \end{array} \right. \quad (21)$$

La densidad de energía total queda dada por:

$$\begin{aligned} \langle w(x, y, z) \rangle &= \frac{\langle w_e(x, y, z) \rangle_D + \langle w_h(x, y, z) \rangle_D}{\langle w_e(x, y, z) \rangle_I + \langle w_h(x, y, z) \rangle_I} \\ &= \frac{1}{2} [\langle w_e(x, y, z) \rangle + \langle w_h(x, y, z) \rangle] \end{aligned} \quad (22)$$

Finalmente, tenemos que el promedio temporal de la componente z del vector de Poynting es:

$$\begin{aligned} \langle S_z(x, y, z) \rangle &= \frac{\langle S_z(x, y, z) \rangle_D}{\langle S_z(x, y, z) \rangle_I} = \\ &= (k n \cos \theta)^{-1} \operatorname{Re} \left[\sum_m T_m e_m(x, z) \sum_n T_n^* t_n^* e_n^*(x, z) \right] , \end{aligned} \quad (23)$$

donde se tiene que los subíndices I y D indican el campo incidente y difractado respectivamente.

Referencias

1. M. Bass, ed., *Handbook of Optics*, McGraw-Hill, New York, 42.1-42.130 (1995).
2. M. V. Berry and T. M. Blackwell, "Diffractal echoes", *J. Phys.* **A14**, 3101-3110 (1981)
3. R. A. Depine, *Appl. Opt.* **26**, 2348 (1987).
4. R. A. Depine, "Diffraction from metallic rough surface. A rigorous electromagnetic formalism applied to the derivation of a new surface impedance boundary condition", *Optik* **79**(2), 75-80 (1988).
5. E. Jakeman, "Scattering by a corrugated random surface with fractal slope", *J. Phys.* **A15**, L55-L59 (1982).
6. D. A. Gremaux and N. C. Gallagher, "Limits of scalar diffraction theory for conducting gratings", *Appl. Opt.*, **32**, 1948-1953 (1993).
7. C. A. Guerin and M. Holschneider, "Scattering on fractal measures", *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 7651-7667 (1996).
8. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1980).
9. D. L. Jaggard, "On Fractal Electrodynamics", en *Recent Advances in Electromagnetic Theory*, H. N. Kritikos and D. L. Jaggard, eds, Springer-Verlag, New York, 183-224 (1990).
10. L. D. Landau and F. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, Oxford (1980).

11. M. Lehman and M. Garavaglia, "Characterization of the fractal properties from the scalar and vectorial point of view", in *Far- and Near-Field Optics: Its Physics and Information Processing*, Suganda Jutamulia and Toshimitsu Asakura, Eds., *Proceedings of SPIE* Vol. **3467**, 296-304 (1998).
12. J. Q. Lu, J. A. Sánchez-Gil, E. R. Méndez, Zu-Han Gu and A. A. Maradudin, "Scattering of light from a rough dielectric film on a reflecting substrate: diffuse fringes", *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 185-195 (1997).
13. A. Mendoza-Suárez and E. R. Méndez, "Derivation of an impedance boundary condition for one-dimensional, curved, reentrant surfaces", *Optics Comm.* **134**, 241-250 (1997).
14. M. Nieto-Vesperinas and J. C. Dainty, eds., *Scattering in volumes and surfaces*, North Holland, Amsterdam (1990).
15. R. Petit, ed., *Electromagnetic Theory of Gratings*, Springer-Verlag, New York (1980).

3. Reflexión y transmisión en una interface.

La propagación de ondas en líneas de transmisión es un problema unidimensional y mucho más simple que la propagación de ondas electromagnéticas en un medio material. Debido a la analogía entre ambos tipos de problemas, pueden resolverse situaciones complejas en términos de la línea de transmisión equivalente.

Las ecuaciones que describen el potencial y la corriente en una línea de transmisión que se extiende a lo largo de uno de los ejes coordenados son:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z}(z,t) = -L \frac{\partial I}{\partial t}(z,t) \quad , \\ \frac{\partial I}{\partial z}(z,t) = -C \frac{\partial V}{\partial t}(z,t) \quad , \end{cases} \quad (24)$$

para las cuales L es la inductancia, C es la capacitancia y además se tienen las relaciones: $k = \omega\sqrt{LC}$ y $v_p = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (velocidad de fase). La solución general está dada por:

$$\begin{cases} V = V_+ \exp(i(\omega t - kz)) + V_- \exp(i(\omega t + kz)) \quad , \\ I = I_+ \exp(i(\omega t - kz)) + I_- \exp(i(\omega t + kz)) \quad , \end{cases} \quad (25)$$

donde también se define la impedancia característica de la línea dada por:

$$\frac{V_+}{I_+} = \frac{\omega L}{k} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_o \quad (26)$$

3.1. Relación con la reflexión y transmisión en electromagnetismo.

Mostramos un método que resuelve el problema de reflexión y transmisión electromagnético utilizando la línea de transmisión equivalente. Pero vemos que en un caso general, debemos hacer distinción entre los modos TE y TM ; esto se puede ver en la figura 5a y 5b, donde se muestra la equivalencia mencionada entre los problemas electromagnético y de líneas de transmisión.

- Modo TE : $E_i \equiv V_1$, $-H_i \equiv I_1$, $\mu \equiv L$, $\epsilon \cos^2 \theta \equiv C$, y la impedancia característica es:

$$Z_{\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon \cos^2 \theta}} = Z_o \sec \theta \quad (27)$$

Se obtienen entonces los coeficientes de Fresnel:

$$\begin{cases} \Gamma_{\perp}(\theta_1) = \frac{Z_2 \sec \theta_2 - Z_1 \sec \theta_1}{Z_2 \sec \theta_2 + Z_1 \sec \theta_1} \\ T_{\perp}(\theta_1) = \frac{2 Z_2 \sec \theta_2}{Z_2 \sec \theta_2 + Z_1 \sec \theta_1} \end{cases} \quad (28)$$

- Modo TM : $E_i \equiv V_1$, $H_i \equiv I_1$, $-\mu \cos^2 \theta \equiv L$, $-\epsilon \equiv C$, y la impedancia característica es:

$$Z_{\parallel} = \sqrt{\frac{\mu \cos^2 \theta}{\epsilon}} = Z_o \cos \theta \quad (29)$$

Se obtienen entonces los coeficientes de Fresnel:

$$\begin{cases} \Gamma_{\parallel}(\theta_1) = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} \\ T_{\parallel}(\theta_1) = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} \end{cases} \quad (30)$$

Hemos encontrado finalmente los coeficientes de reflexión y transmisión para cada polarización, en función de las impedancias de cada medio, o de la línea de transmisión equivalente. Los ángulos θ_1 y θ_2 quedan, por supuesto, vinculados a través de la ley de Snell.

4. Método de impedancia superficial variable.

La difracción y el scattering de ondas electromagnéticas por estructuras planares tiene aplicaciones en acusto-óptica, óptica computacional e integrada, holografía y espectroscopía. Varios autores han tratado estos problemas desde diferentes puntos de vista cuando estas estructuras planares poseen índice de refracción variable con alguna

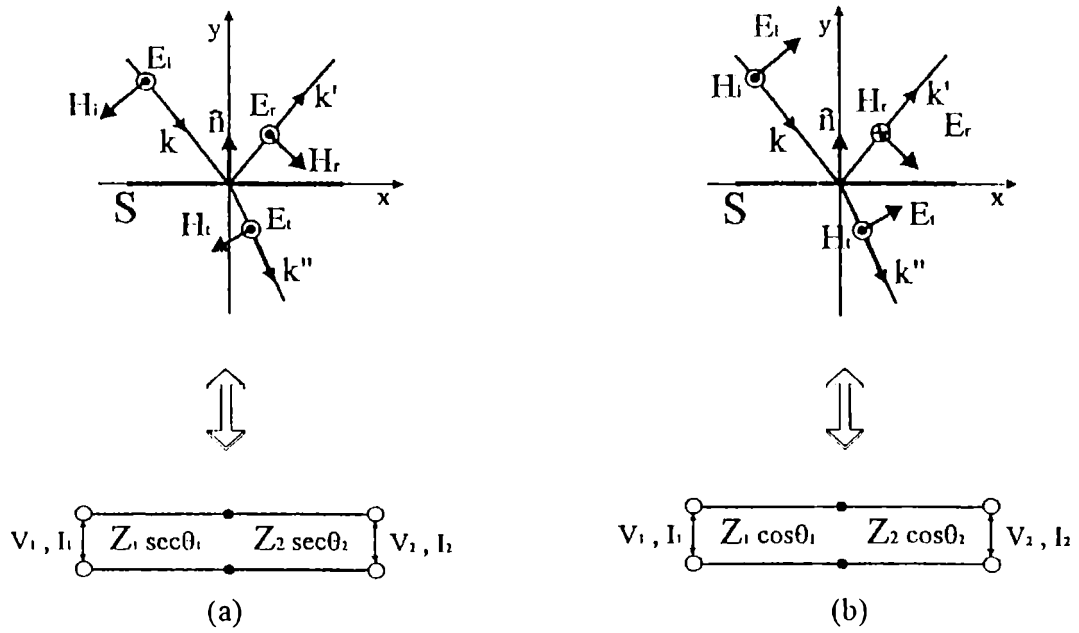
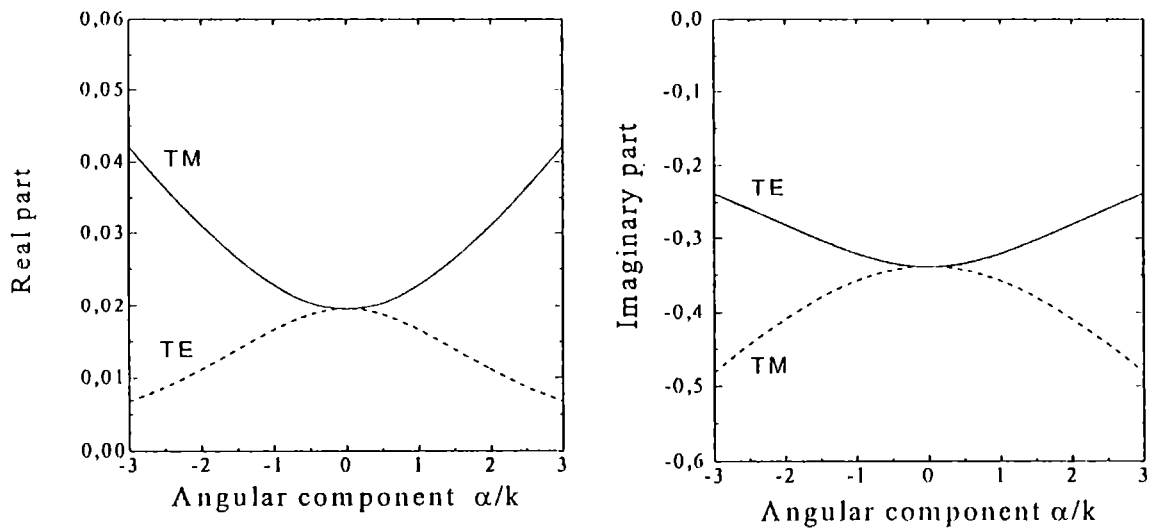


Figura 5 – Equivalencia entre el problema de reflexión y transmisión en una interface y el correspondiente a líneas de transmisión para (a): modo *TE*, (b): modo *TM*. (c) Parte real y parte imaginaria de la impedancia superficial en la interface aire-plata ($n=0.17+2.94 i$)



(c)

de las coordenadas espaciales. Tales estructuras han sido llamada *superficies con variaciones en el medio* para distinguirlas de las *superficies con variaciones espaciales*.

Existe una aproximación para el estudio de redes de difracción y superficies rugosas, las cuales están incluídas en el segundo tipo de estructuras, que consiste en reemplazarlas por un plano con impedancia perturbada con una función espacial. Este método ha sido inicialmente usado para describir cualitativamente las anomalías Wood en redes de difracción, para el estudio de efectos no especulares en haces electromagnéticos, y posteriormente extendido a superficies rugosas con micro-rugosidades.

4.1. Cálculos usando la función impedancia de entrada.

Es posible demostrar que las impedancias de entrada para una superficie, para cada modo de polarización, en términos de las impedancias de los medios, queda expresada mediante:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{12}^{TE}(\alpha) = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{Z_2 \mu_1}{Z_1 \mu_2}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2}}, \\ Z_{12}^{TM}(\alpha) = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{1 - \left(\frac{Z_2 \mu_1}{Z_1 \mu_2}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2}. \end{array} \right. \quad (31)$$

Para estas impedancias superficiales, la parte real e imaginaria en función de la componente angular de un haz monocromático, es graficada en la figura 5c para el caso de la interface aire-plata (índice de refracción $n = 0.17 + 2.94i$). Los coeficientes de Fresnel para reflexión y transmisión son entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\perp}^{12}(\alpha) = \frac{\beta(\alpha) Z_{12}^{TE}(\alpha) - k}{\beta(\alpha) Z_{12}^{TE}(\alpha) + k}, \\ \Gamma_{\parallel}^{12}(\alpha) = \frac{\beta(\alpha) - k Z_{12}^{TM}(\alpha)}{\beta(\alpha) + k Z_{12}^{TM}(\alpha)}. \end{array} \right. \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\perp}^{12}(\alpha) = \frac{2 \beta(\alpha) Z(\alpha, x)}{\beta(\alpha) Z(\alpha, x) + k}, \\ T_{\parallel}^{12}(\alpha) = \frac{2 \beta(\alpha) \frac{Z_2(x)}{Z_1}}{\beta(\alpha) + k Z(\alpha, x)} \end{array} \right. \quad (33)$$

Ya que índice de refracción variable implica impedancia superficial variable, podemos utilizar esta función en nuestros cálculos, incluyendo una perturbación en la función impedancia en los coeficientes de Fresnel, mediante:

$$Z(x) = Z_o [1 + Z_p(x)] \quad , \quad (34)$$

y debemos tener en cuenta que:

$$\tilde{Z}_p(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_p(\alpha) e^{-i\alpha x} dx \quad , \quad (35)$$

es la transformada de Fourier de la función impedancia.

La transformada de Fourier del campo (eléctrico o magnético) la ponemos como:

$$\tilde{A}_p(\alpha) = \tilde{A}_p^N(\alpha) + \tilde{A}_p^D(\alpha) \quad , \quad (36)$$

y se puede de este modo, realizar estudios para paquetes de ondas y ondas planas.

Las expresiones a las que se llega para los campos reflejados y transmitidos, en cada modo de polarización, son:

Modo TE :

Campo reflejado:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r(\alpha) = & \frac{\beta(\alpha) Z_o - k}{\beta(\alpha) Z_o + k} \tilde{E}_i(\alpha) + \frac{1}{\beta(\alpha) Z_o + k} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\zeta) \tilde{Z}_p[\alpha - \zeta] \tilde{E}_i(\zeta) d\zeta - \\ & - \frac{1}{\beta(\alpha) Z_o + k} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\zeta) \tilde{Z}_p[\alpha - \zeta] \tilde{E}_r(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (37)$$

Campo transmitido:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t(\alpha) = & \frac{2 \cdot \beta(\alpha) Z_o}{\beta(\alpha) Z_o + k} \tilde{E}_i(\alpha) + \frac{2\beta(\alpha)}{\beta(\alpha) Z_o + k} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\zeta) \tilde{Z}_p[\alpha - \zeta] \tilde{E}_i(\zeta) d\zeta - \\ & - \frac{1}{\beta(\alpha) \cdot Z_o + k} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\zeta) \tilde{Z}_p[\alpha - \zeta] \tilde{E}_t(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Modo TM :

Campo reflejado:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_r(\alpha) = & \frac{\beta(\alpha) - k Z_o}{\beta(\alpha) + k Z_o} \tilde{H}_i(\alpha) - \frac{1}{\beta(\alpha) + k \cdot Z_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Z}_p[\alpha - \zeta] \tilde{H}_i(\zeta) d\zeta - \\ & - \frac{k}{\beta(\alpha) + k Z_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Z}_p[\alpha - \zeta] \tilde{H}_r(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (39)$$

Campo transmitido:

$$\tilde{H}_r(\alpha) = \frac{2\beta(\alpha)}{\beta(\alpha) + k Z_o} \tilde{H}_i(\alpha) - \frac{k}{\beta(\alpha) + k Z_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Z}_p[\alpha - \zeta] \tilde{H}_t(\zeta) d\zeta \quad (40)$$

Este conjunto de ecuaciones permite igualmente resolver el problema de scattering electromagnético por una superficie plana con índice de refracción variable, o bien utilizar la aproximación de impedancia reemplazando un plano con impedancia variable en lugar de la superficie rugosa correspondiente, el cual se denomina modelo canónico. La función impedancia constituye de esta manera el núcleo de las ecuaciones integrales, y es importante poder calcularla para resolver diferentes casos, como los mostrados en la figura 6 para medio con índice de refracción gradual (*GRIN*) y medio no-lineal (con una variación del tipo Kerr).

El método que reemplaza la red de difracción por un plano con impedancia es mostrado en la figura 7, y en este caso hacemos la suposición que hay una correspondencia entre la distribución geométrica de ambos tipos de estructuras, esto es, para redes de difracción periódicas la impedancia superficial tendrá una perturbación periódica, para superficies rugosas la misma será aleatoria y para redes fractales de Cantor tendrá una perturbación fractal de este mismo tipo. Este método nos permitirá calcular la distribución de intensidad del campo lejano cuando tales funciones se colocan como una perturbación al plano con impedancia constante.

La forma funcional de las barras de densidad de Cantor, que aquí se utilizarán como una perturbación a la función impedancia, se definieron en las ecuaciones (30) y (32) del capítulo II. Estas ecuaciones nos permiten también el estudio de estados intermedios entre fractales determinísticos y totalmente aleatorios. La aleatorización se obtiene cuando se involucra un generador aleatorio en la construcción del objeto, como se hace con otros métodos. La cuasi-auto-similaridad se alcanza cuando alguna componente rectangular en la función densidad tiene un parámetro aleatorio con una distribución estadística como se muestra a continuación.

La figura 8 muestra el patrón de intensidad dispersado obtenido a partir de la ecuación (39) para la polarización *TE* cuando la función completa de Cantor es utilizada en cada caso (esto es, sin componentes filtradas ni aleatorias). Cuando la función densidad se calcula como el producto de seis componentes periódicas, se obtienen diferentes estructuras en los diferentes campos difractados, siendo en todos los casos: $R_i = S_j = 0.1$ y el ancho de la estructura fina comparable a la longitud de onda de la radiación incidente. Los cálculos fueron realizados para estructuras fractales con (a): $D = 0.6309$, (b) y (c): $D = 0.5$ (pero ambas con diferente lacunaridad).

La estrecha relación entre el campo dispersado y las propiedades geométrico-estadísticas de la red de difracción pueden estudiarse cuando se aplican diferentes grados de aleatoriedad, es decir cuasi-aleatoriedad, y mediante el filtrado de algunas componentes. Para este caso se utiliza un parámetro de aleatoriedad con una distribución gaussiana entre -1 y 1 . La figura 9(a) muestra la función de densidad con componentes periódicas de orden 3 y 4 con un grado de aleatoriedad mientras que

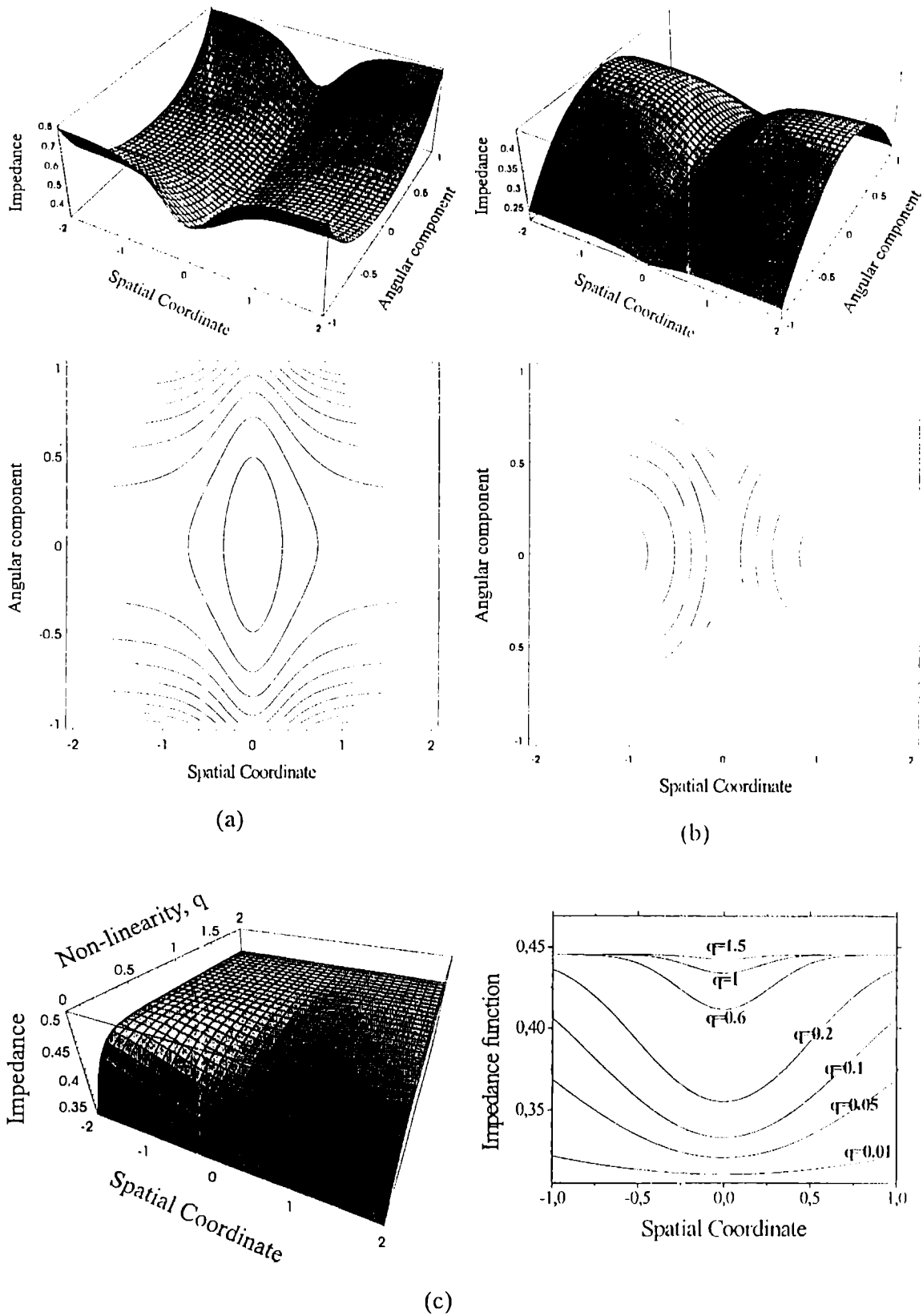


Figura 6 – Función impedancia superficial para diferentes interfaces. Aire-medio GRIN: (a) modo TE y (b) modo TM. (c) Aire-medio no lineal (con una no linealidad Kerr). En cada caso la impedancia es función de las coordenadas espaciales y de las componentes angulares del vector de onda.

una desviación del comportamiento fractal determinístico en el patrón de intensidad se observa en correspondiente patrón de scattering, aunque se conservan los máximos secundarios. Se pueden observar cambios en el nivel de intensidad del patrón de difracción en la figura 8(a), debidos a la inclusión de variables aleatorias en algunas componentes. Esto significa que las propiedades estadísticas para cada componente periódica y las características de distribución de intensidad se encuentran muy relacionadas y por lo tanto no solamente la geometría puede influir la fractalidad de la distribución. Hemos clasificado este caso como una perturbación cuasi-estadística debido a que las propiedades estadísticas del campo se relacionan con algunas componentes en la función de densidad. La figura 9(b) muestra la densidad de Cantor y su correspondiente intensidad dispersada cuando la componente que contribuye al estado 4 es filtrada en la ecuación (30) (capítulo II). Como se muestra para el caso en la región de Fraunhofer, se obtiene una periodicidad intrínseca en el patrón de intensidad debido a que algunos picos son visibles en la distribución de dispersión. Para este caso, los cambios en las propiedades geométricas se consideran junto con la perturbación estadística. La caracterización del patrón de intensidad, a través de dichos cambios en la estructura toman importancia desde el punto de vista del procesamiento electromagnético y óptico; es decir, para aplicaciones de micro-óptica y para el estudio de defectos en la red de difracción relacionados con características geométricas. En las figuras 9(c) y 9(d) se ha adicionado una aleatorización en las componentes 3 y 4 de las perturbaciones con $D = 0.5$, para las cuales anteriormente se obtuvo el patrón de difracción completo. Nuevamente en este caso puede observarse que la diferencia en aleatorización y lacunaridad quedarán reflejadas en la distribución de intensidad. Esto es de esperar, por eso es conveniente la inclusión de parámetros que nos permitan diferenciar entre uno y otro caso, y ese es uno de nuestros objetivos fundamentales al iniciar estos estudios.

Para este caso se enfatiza el eslabón entre las redes de difracción fractal con una cuasi-aleatorización estructural y su correspondiente patrón intensidad en el campo lejano. Se introduce el caso de transmisión para el método de impedancia desde los coeficientes de Fresnel y consideramos los dos tipos de cambios en la función densidad que utilizamos como una perturbación a la impedancia superficial. Se tienen cambios estadísticos y geométricos. Los primeros, relacionados con la aleatorización y el otro con el filtrado de componentes individuales en la función densidad.

Referencias

1. G. E. Aizenberg, P. L. Swart and B. M. Lacquet, "Analysis of lossy optical materials possessing graded refractive index profiles", *Opt. Eng.* **33**, 2878-2885 (1994).
2. R. A. Depine and , "Surface impedance boundary condition for metallic diffraction gratings in the optical and infrared range", *Optica Acta* **30**, 313-322 (1983).
3. R. A. Depine, "A simple approach to light scattering from absorbing microrough surfaces", *Optik* **82**, 5-8 (1989).

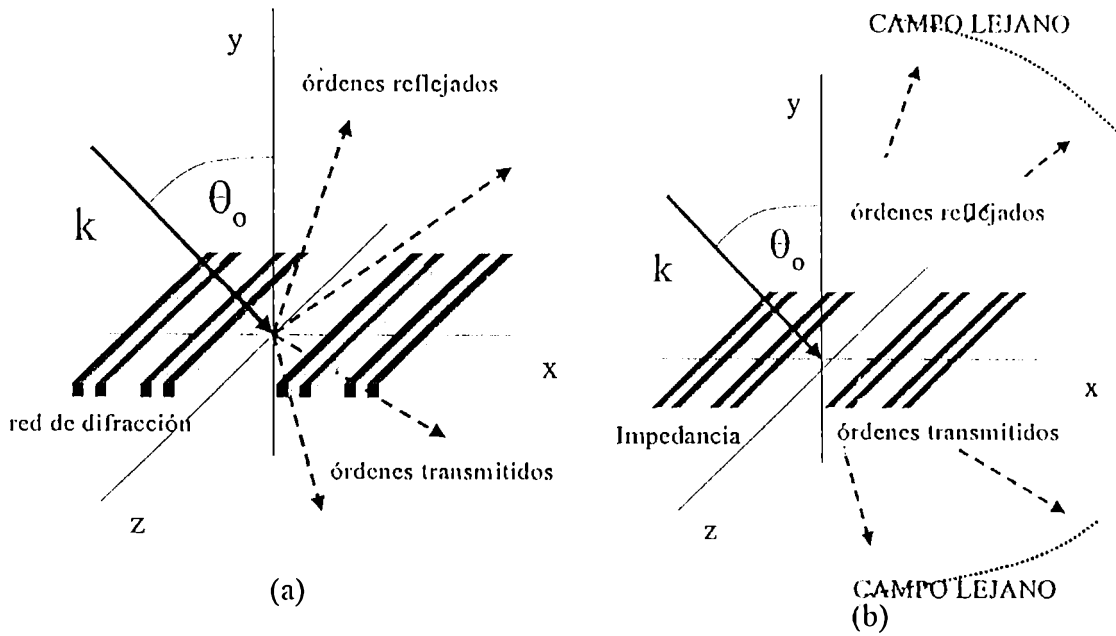


Figura 7 – (a) Difracción de una onda plana por una red de Cantor, y (b) método de impedancia que permite calcular la intensidad de campo lejano.

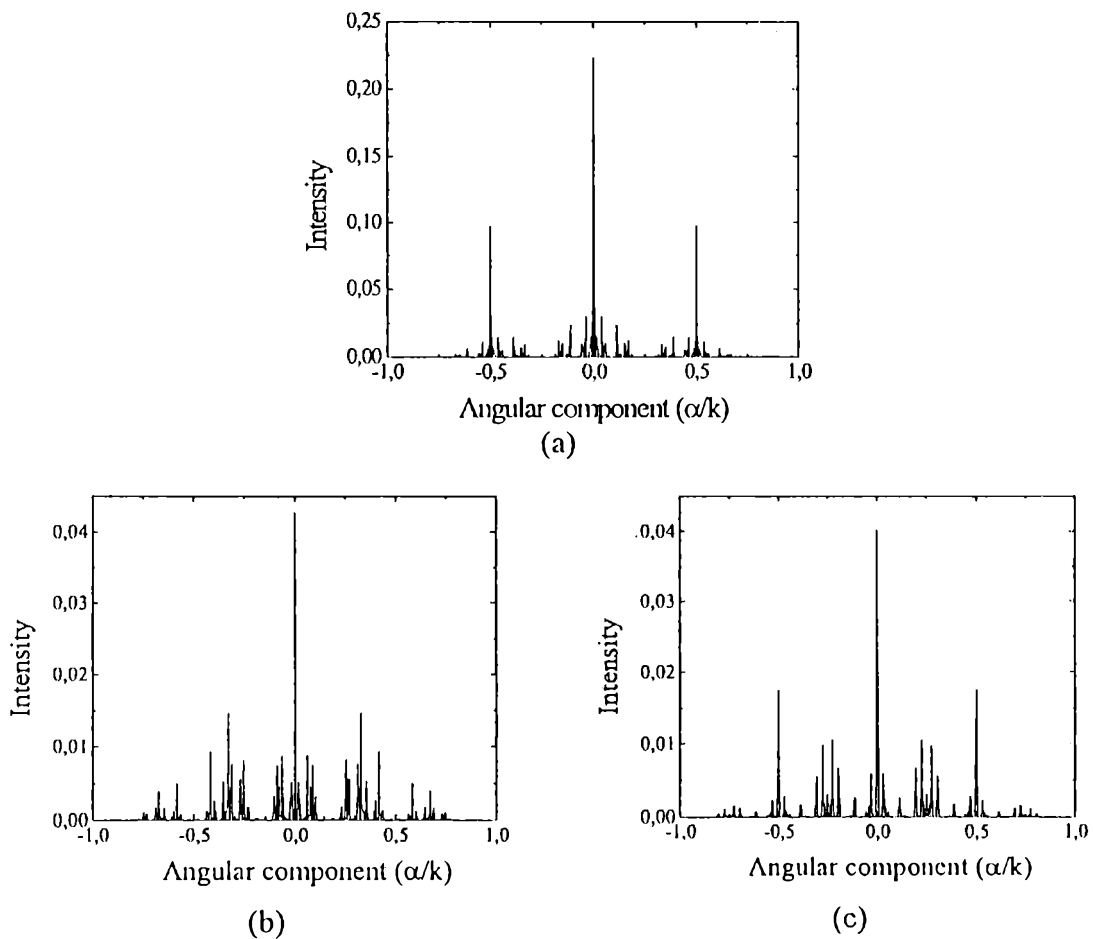
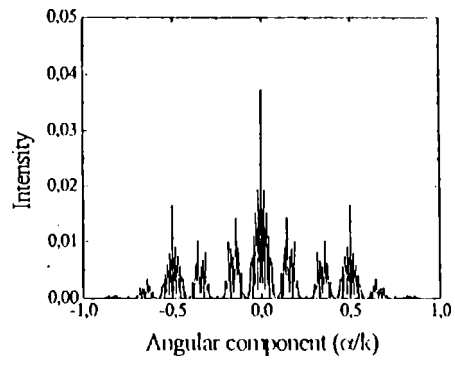
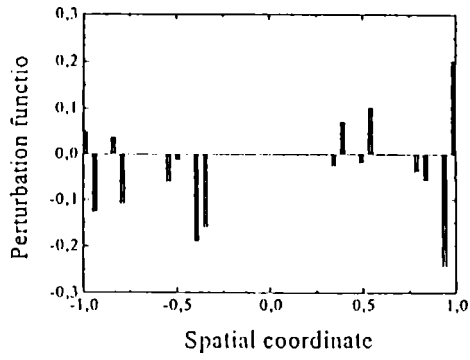
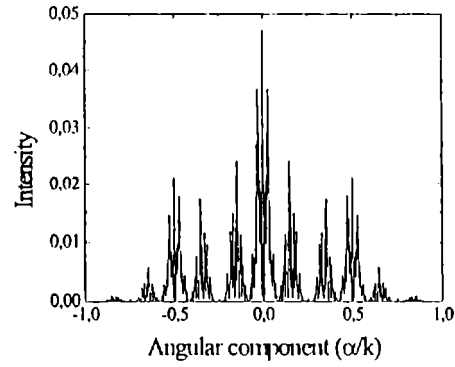
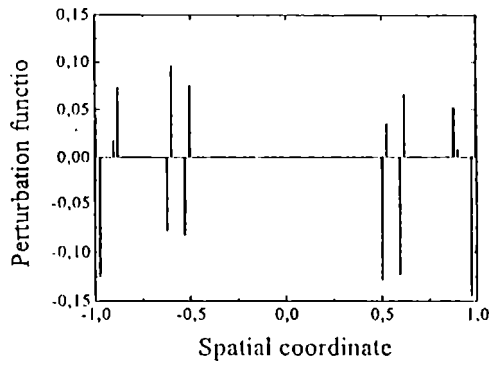


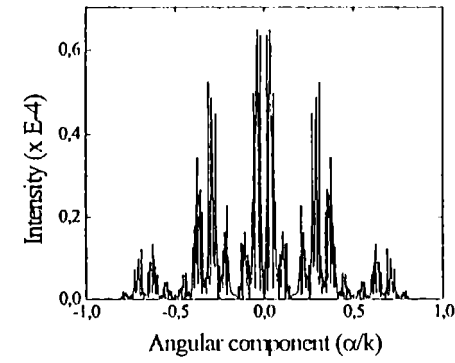
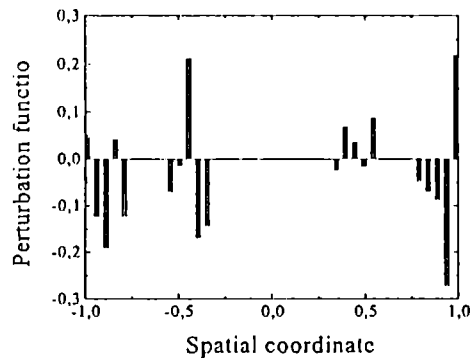
Figura 8 – Scattering con diferentes perturbaciones de Cantor para la función impedancia: (a) $D=0.6309$, (b) y (c) $D=0.5$, pero con diferente lacunaridad en cada caso.



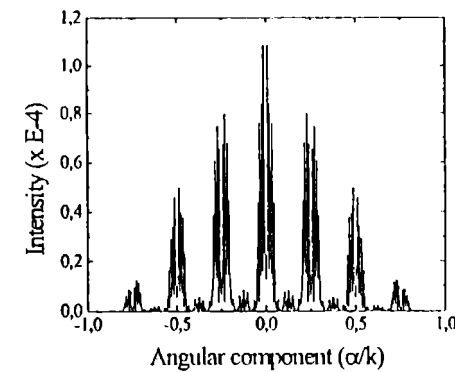
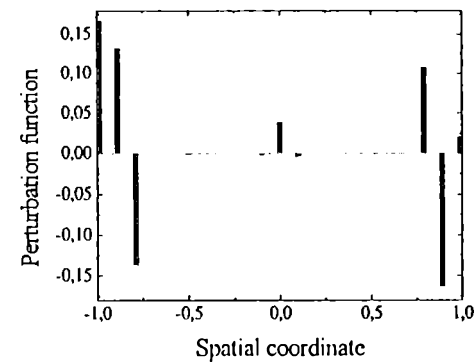
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9 – Scattering por impedancia superficial con perturbación random. (a) Cuasi-aleatorización para $D=0.6309$ en las componentes de orden 3 y 4. (b) El mismo caso que (a), pero con la componente de orden 4 filtrada. (c) $D=0.5$, con aleatorización en orden 3 y 4. (d) El mismo caso que en (c), pero diferente lacunaridad.

4. T. Do-Nhat and R. H. MacPhie, "Scattering of the fundamental modes from graded-index fibers into semi-infinite space", *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 569-572 (1992).
5. A. Hessel and A. A. Oliner, "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings", *Appl. Opt.* **4**, 1275-1297 (1965).
6. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, Oxford (1980).
7. M. Lehman and E. E. Sicre, "Scattering from a medium with fractal refraction index", *17th Congress of the International Commission for Optics: Optics for Science and New Technology Proc. SPIE* **2778**, 365-366 (1996).
8. M. Lehman, "Scattering from planar surfaces with magnetic and thermal fluctuations, in Scattering and Surface Roughness", Zu-Han Gu, A. A. Maradudin, eds., *Proc. of SPIE* **3141**, 316-323 (1997).
9. M. Lehman, "An impedance model for the scattering of gaussian beams at isotropic-nonlinear interfaces", *Proc. of Bianisotropics* (International Conference and Workshop on Electromagnetics of Complex Media, Glasgow, Scotland) 265-268 (1997).
10. J. L. Pombo, M. Lehman, M. Garavaglia and D. L. Jaggard, "Quasiself-similar Cantor Gratings and Their Diffraction", *Microwave and Opt. Tech. Lett.* **20**(6), 393-397 (1999).
11. M. G. Moharam and T. K. Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction", *J. Opt. Soc. Am. A* **71**, 811-818 (1981).
12. D. Rafizadeh and Seng-Tiong Ho, "Numerical analysis of vectorial wave propagation in waveguides with arbitrary refractive index profile", *Opt. Comm.* **141**, 17-20 (1997).
13. Rucy-Bing Huang and Ching-Chuan Wei, "Small perturbation analysis of diffracted holographic gratings", *Opt. Comm.*, **125**, 217-221 (1996).
14. A. W. Snyder and D. J. Mitchell, "Spatial solitons of the power-law nonlinearity", *Opt. Lett.* **18**, 101-103 (1993).
15. T. Tamir, *Integrated Optics*, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

5. Multicapas y distribución geométrica.

Cuando, en lugar de considerar una sola interfaz, se consideran dos interfaces (por ejemplo una lámina planoparalela). La presencia de al menos dos interfaces significa que se producirán sucesivas reflexiones y las propiedades del film quedarán determinadas por la suma de las mismas. Decimos que el film es delgado cuando los efectos de interferencia son detectados en el haz reflejado o transmitido, esto es,

cuando la diferencia de camino óptico entre los haces es menor que la longitud de coherencia del haz electromagnético incidente.

Utilizando las condiciones de contorno de Maxwell pueden derivarse para este caso los campos reflejados y transmitidos. Un film queda representado finalmente mediante una matriz característica.

Cuando se disponen varias capas de diferente material, puede calcularse también una matriz característica como producto de las matrices correspondientes a cada una de las capas. Es de interés el estudio de estas estructuras, que pueden ser utilizadas por ejemplo como filtros o espejos ópticos, y que en general pueden tener una geometría periódica o cuasi-periódica. Sin embargo, también han sido estudiadas multicapas con geometría fractal, aunque en este caso debido a que la estructura se vuelve efectivamente auto-similar para un orden con gran cantidad de capas, es que podemos hablar de superredes y los resultados son fundamentalmente teóricos.

Existen interesantes estudios acerca de superredes fractales acerca de superredes fractales y las características que se ven reflejadas en su interacción con campos electromagnéticos.

Diferentes métodos también pueden ser usados para calcular esta interacción entre ondas y geometría, y caracterizar la función reflectancia de la estructura: matricial, de impedancia o métodos que aprovechan la estructura geométrica para lograr una mayor rapidez y eficiencia de cómputo son algunos ejemplos.

Un fractal determinístico dispuesto en multicapa, tal como las barras de Cantor, se muestra en la figura 10, en la que la parte media del grosor $H/3$ es removido de una capa de grosor H (figura 10(a)). La capa inicial de grosor H tiene un índice de refracción n_2 y esta rodeada por un medio con índice n_1 . La capa que ha sido removida de grosor $H/3$ es reemplazada por otra capa del mismo grosor pero con índice de refracción n_1 .

De esta manera, el grosor de una simple capa es ahora $H/3^N$, el método consiste en reemplazar toda la estructura fractal por un simple problema de reflexión en una sola superficie, basado en el conocimiento de la reflexión en una única capa.

5.1. Cálculo de la intensidad.

Usando la teoría de films y multicapas, un medio material con $N - 1$ capas puede ser estudiado. Si η_o y η_N son las admitancias ópticas para el primer y último medio, puede establecerse una relación para los campos tangenciales de la primera y última interface de una multicapa periódica, la cual está dada por:

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} \begin{bmatrix} \cos(\delta_k) & \frac{i \sin(\delta_k)}{\eta_k} \\ i \eta_k \sin(\delta_k) & \cos(\delta_k) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_k \end{bmatrix} , \quad (41)$$

donde:

$$\delta_k = \frac{2\pi n_k d_k \cos(\theta_k)}{\lambda} , \quad (42)$$

siendo para la k -ésima capa: n_k el índice de refracción, d_k el ancho correspondiente, θ_k el ángulo de refracción (que puede obtenerse aplicando sucesivamente la ley de Snell

a partir del ángulo de incidencia θ_o), y λ la longitud de onda de la radiación incidente. La admitancia de entrada está dada por: $Y = C/B$ y entonces, la reflectancia es:

$$R(\theta_o) = \left| \frac{\eta_o(\theta_o) - Y(\theta_o)}{\eta_o(\theta_o) + Y(\theta_o)} \right|^2, \quad (43)$$

dado que, para una onda plana el ángulo de incidencia se relaciona con la componente angular α_o del vector de onda (ver definiciones (14)), se podrá poner la reflectancia en función de esta componente. Si se tiene un haz monocromático, con componente central α_o , se tendrá que la distribución de intensidad que incide, en este caso, sobre la estructura estará dada por:

$$I(\alpha, \alpha_o) = R(\alpha) \left| \tilde{A}(\alpha, \alpha_o) \right|^2, \quad (44)$$

donde, α es la variable que representa la distribución angular para el haz incidente.

5.2. Impedancia de entrada de un film.

El método que utilizamos para nuestros cálculos emplea la función impedancia de entrada de la multicapa en forma iterativa. Comenzando por una sola capa (que indicamos como medio 2), entre los medios 1 y 3. Denotamos las impedancias superficiales correspondientes mediante: $Z_{12}^{TE}(\alpha)$, $Z_{12}^{TM}(\alpha)$ y $Z_{23}^{TE}(\alpha)$, $Z_{23}^{TM}(\alpha)$ respectivamente. En una forma similar al resultado para la impedancia de entrada de una línea de transmisión, obtenemos:

$$Z^{TE}(\alpha) = Z_{12}^{TE}(\alpha) \frac{\frac{Z_2}{Z_1} Z_{23}^{TE}(\alpha) - i Z_{12}^{TE}(\alpha) \tan \left[kh \frac{1}{Z_1} \frac{1}{Z_{12}^{TE}(\alpha)} \right]}{Z_{12}^{TE}(\alpha) - i \frac{Z_2}{Z_1} Z_{23}^{TE}(\alpha) \tan \left[kh \frac{1}{Z_1} \frac{1}{Z_{12}^{TE}(\alpha)} \right]}, \quad (45)$$

$$Z^{TM}(\alpha) = Z_{12}^{TM}(\alpha) \frac{\frac{Z_2}{Z_1} Z_{23}^{TM}(\alpha) - i Z_{12}^{TM}(\alpha) \tan \left[kh \frac{Z_1}{Z_2} Z_{12}^{TM}(\alpha) \right]}{Z_{12}^{TM}(\alpha) - i \frac{Z_2}{Z_1} Z_{23}^{TM}(\alpha) \tan \left[kh \frac{Z_1}{Z_2} Z_{12}^{TM}(\alpha) \right]}. \quad (46)$$

De esta manera, los resultados expresados en las ecuaciones (32) y (33) para resolver el problema de reflexión en una superficie pueden ser utilizados con esta impedancia de entrada, como se muestra en la figura 11, esto es, la reflexión sobre una única capa equivale a resolver el problema de reflexión para una sola superficie o interface (figura 11(b)) con una impedancia equivalente Z_e . De igual forma, son equivalentes la impedancia de entrada Z_x para una línea de transmisión con una carga como se muestra en la figura 11(c). De esta manera, la ecuación (14) permite resolver el problema de la reflexión en una capa delgada mediante la solución de la reflexión en una superficie caracterizada por la impedancia de entrada de la estructura.

Análogamente a otros métodos que involucran el concepto de impedancia equivalente o índice de refracción equivalente, como la formulación de Herpin, en este

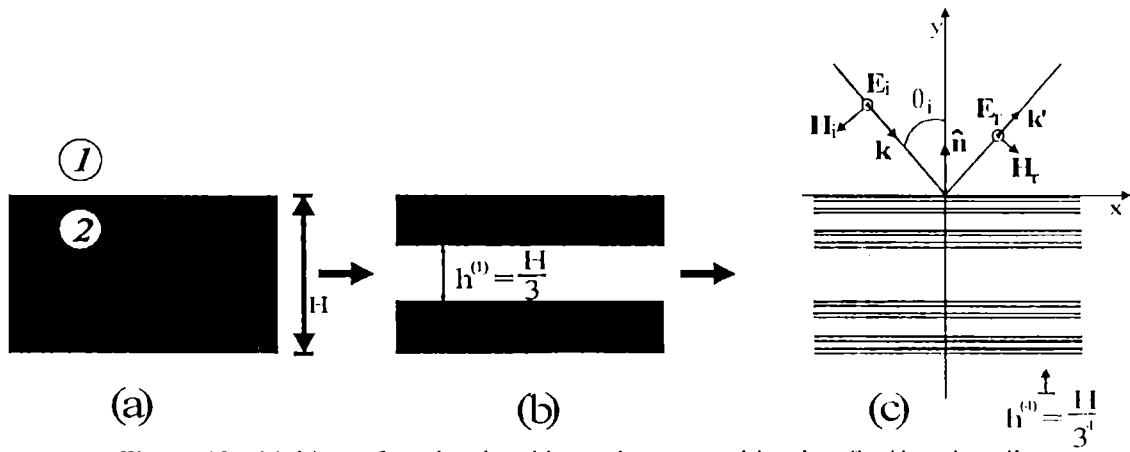


Figura 10 – Multicapa fractal y el problema electromagnético de reflexión sobre ella.

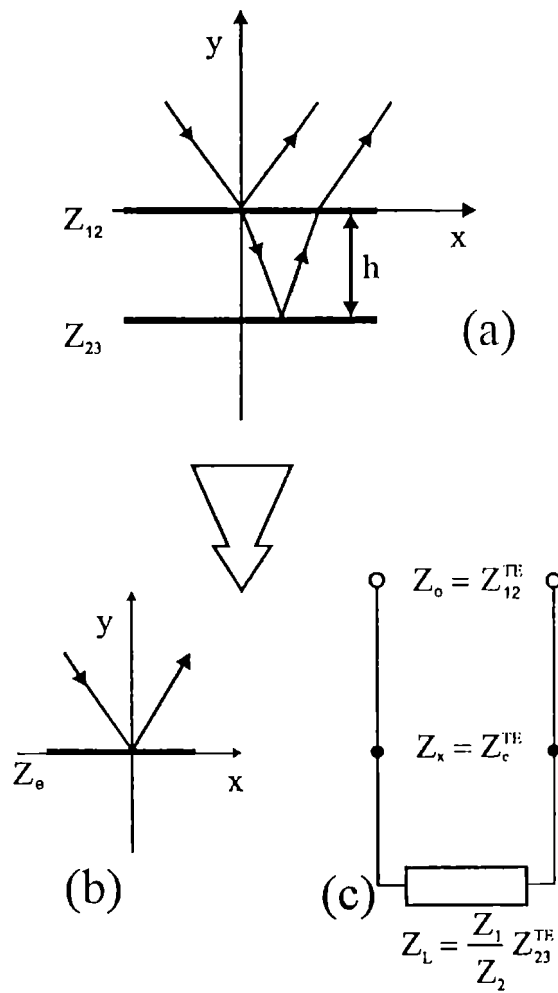


Figura 11 – Método que utiliza la impedancia de entrada para reemplazar un film por una superficie.

trabajo caracterizamos la estructura multicapa comenzando con una sola impedancia superficial.

La aplicación iterativa de las ecuaciones (45) y (46) permite resolver el problema de una estructura multicapa mediante el cálculo sucesivo de la impedancia de entrada para cada capa, sin utilizar cálculo matricial. El proceso correspondiente se muestra en la figura 12. El principal interés de este trabajo es aplicar dicho método para caracterizar los diferentes parámetros, impedancia de entrada y reflectancia, y comparar dos tipos de estructura geométrica: periódica y distribución fractal. Esto permitirá relacionar la impedancia y la reflectancia, junto con la geometría de las estructuras multicapa, con las características que posea del haz reflejado.

Para una capa simple, la reflectancia y ambas componentes de la impedancia superficial, es decir, las partes real e imaginaria se muestran en la figura 13 para interpretar dichas partes como función del grosor para un film homogéneo ($n_2 = 1.732$, $n_1 = n_3 = 1$) con $\lambda = 600nm$. La parte real puede asociarse con los efectos pantalla de un arreglo en los campos incidentes con relación inversa a la reflectancia, mientras que la parte imaginaria se relacionaría con la capacidad para almacenar energía de la distribución y tiene máximos y mínimos relacionados a los puntos de inflexión de la reflectancia.

5.3. Grado de auto-similaridad en orden de la distribución intensidad.

Utilizando la transformada de Fourier del campo incidente, la distribución del haz reflejado por la estructura puede expresarse como:

$$I(\alpha, \alpha_o) = R(\alpha) \left| \tilde{A}(\alpha, \alpha_o) \right|^2, \quad (47)$$

que es una función de las componentes angulares. De manera similar a las redes de difracción, puede verse que en la ecuación (47) es posible dividir la función intensidad en un factor de forma dado por el perfil intensidad del haz incidente $\left| \tilde{A}(\alpha, \alpha_o) \right|^2$, y un factor de estructura dado por la función de reflectancia $R(\alpha)$.

Como es bien sabido, el grado de auto-similaridad de cierta función puede definirse a través del coeficiente de correlación entre dicha función y su versión magnificada. Aquí definiremos la auto-similaridad en orden para dicha función (en el conjunto de los reales) como el valor obtenido cuando se correlacionan dos estados diferentes de esta función. En este caso, la correlación debe establecerse para las reflectancias correspondientes de dos estados de multicapa (S y S'). Para este caso, la expresión matemática obtenida para una función $f(\alpha)$ en el estado S y en el estado S' , es:

$$A(S, S') = \frac{\int_{\Delta} [f^{(S)}(\alpha, \alpha_o) - \langle f^{(S)}(\alpha, \alpha_o) \rangle] [f^{(S')}(\alpha, \alpha_o) - \langle f^{(S')}(\alpha, \alpha_o) \rangle] d\alpha}{\int_{\Delta} [f^{(S)}(\alpha, \alpha_o) - \langle f^{(S)}(\alpha, \alpha_o) \rangle]^2 d\alpha \int_{\Delta} [f^{(S')}(\alpha, \alpha_o) - \langle f^{(S')}(\alpha, \alpha_o) \rangle]^2 d\alpha}, \quad (48)$$

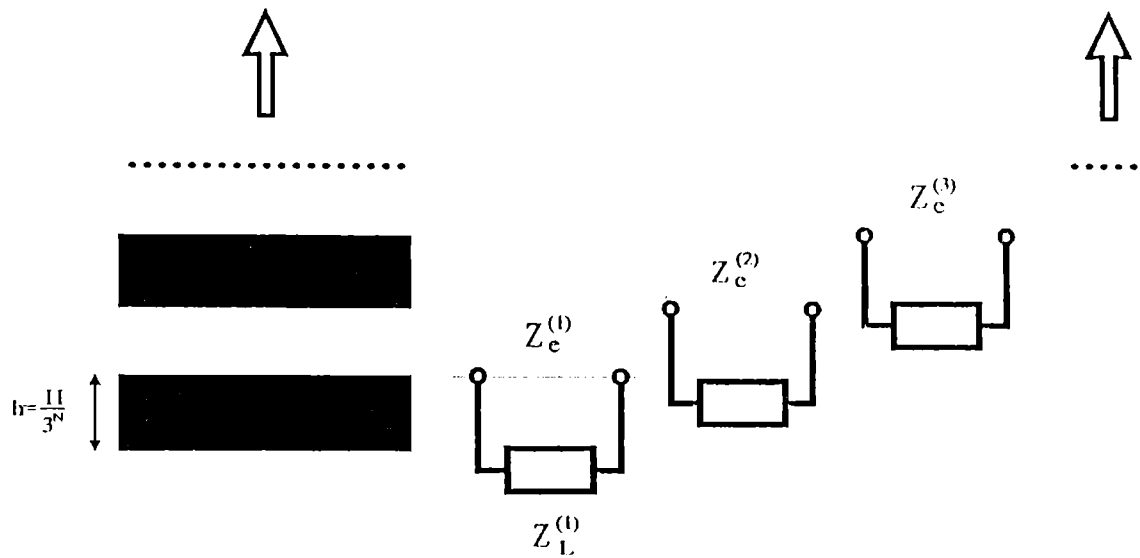


Figura 12 – Método general calculando iterativamente la impedancia de entrada de cada capa individual.

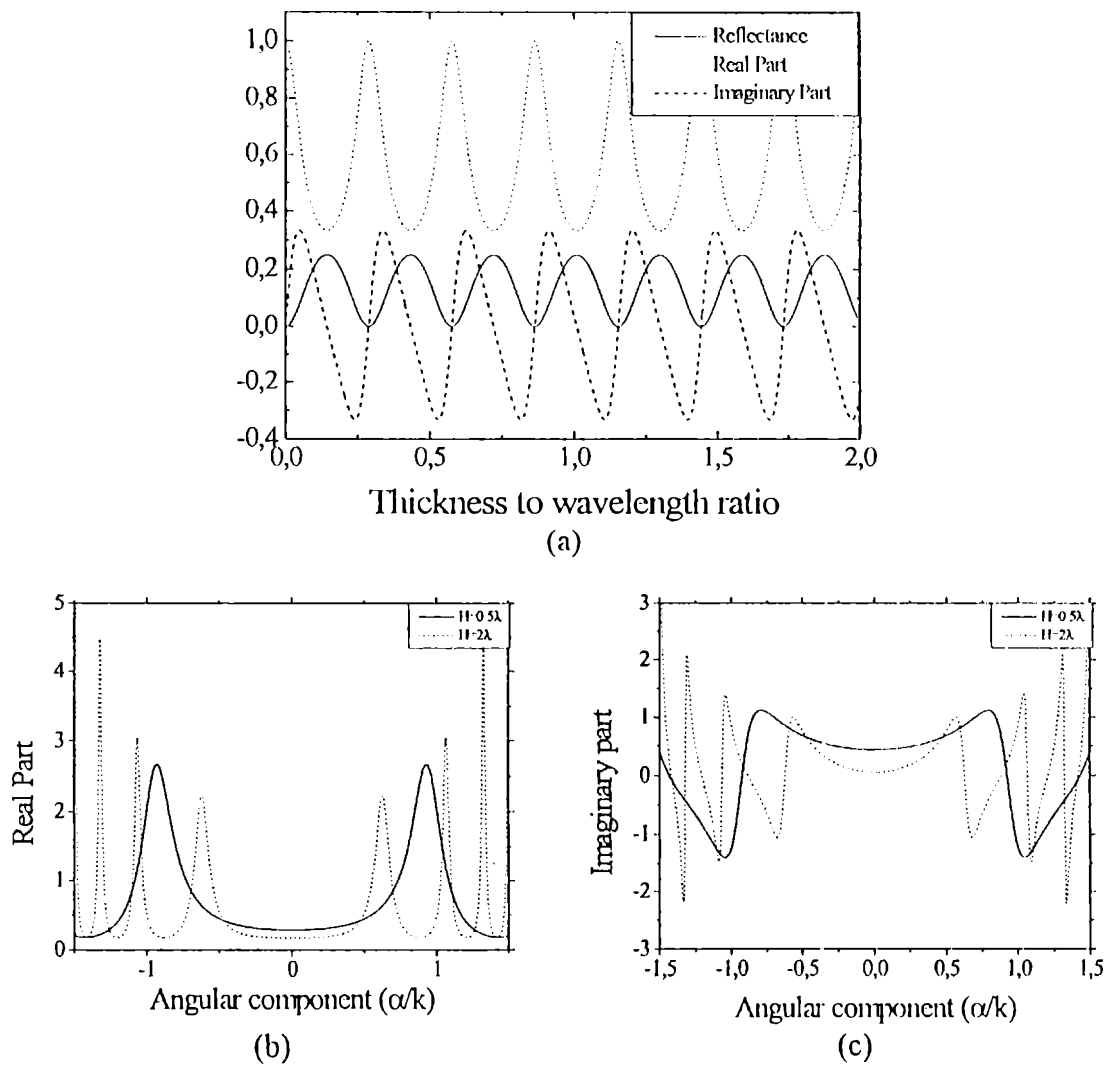


Figura 13 – (a) Función reflectancia de una única capa, con índice de refracción $n=1.732$, (b) y (c) partes real e imaginaria de la impedancia de entrada correspondiente, con $\lambda=600nm$.

Donde Δ es el intervalo en el que se quiere calcular el grado de auto-similaridad en orden de la función $f(\alpha, \alpha_0)$, que depende de la variable angular α centrada en α_0 .

Se empleó un método iterativo para el cálculo de la impedancia de entrada para una distribución de Cantor mediante la aplicación sucesiva de las ecuaciones (45) y (46). Este procedimiento asegura que la reflectancia e impedancia conservarán las características de auto-similaridad que son típicas de la estructura.

El número necesario de pasos para obtener la impedancia de entrada es $2^{N+1} - 1$. Para cada uno de estos pasos, la impedancia de entrada del sistema puede expresarse como función de la impedancia de entrada del generador inicial que se mostró gráficamente en la figura 10(a). mediante el método iterativo, revelando así, la estructura auto-similar de la distribución. Esto significa que es posible obtener una relación de tipo:

$$Z_E^N = \mathcal{F} \left[Z_E^1, \frac{H}{3^N} \right], \quad (49)$$

donde Z_E^1 es la impedancia de entrada para el generador (con $N = 1$).

Para poder comparar de alguna forma ambas estructuras (periódica y fractal) el ancho de la barra de Cantor mas pequeña, o la estructura fina del conjunto de Cantor, se iguala al ancho de cada capa de la distribución periódica. El otro parámetro que también se mantuvo igual, en ambos casos, es el número de capas en la estructura multicapa. Este número puede ser referido como el orden de la multicapa. En todos los casos la longitud de onda fué $\lambda = 500nm$ y los índices de refracción de cada medio material fueron $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.5$, respectivamente.

Las curvas de reflectancia y la amplitud de la impedancia de entrada se muestran en la figura 14 para el orden seis de las barras de Cantor en función de la relación entre el espesor de la estructura fina y la longitud de onda de la radiación en incidencia normal. Estos resultados pueden compararse con los obtenidos para el caso periódico mostrado en la figura 14. En todos los casos se observa (con un trazo blanco) el resultado para orden 1. Debe reconocerse que la estructura periódica inicial se encuentra implícita en la distribución, a pesar que se diluya al incrementar el orden. Una vista ampliada de la gráfica previa en la figura 14(b) muestra la alta correlación existente entre la reflectancia para dos órdenes sucesivos -6 y 7- cuando se tiene una multicapa con distribución fractal. Pero en el caso periódico esta es una correlación pobre como se muestra en la misma figura.

Resulta interesante comparar la distribución angular de dos ordenes para la reflexión cuando un haz incide en ambas estructuras. Se hicieron los cálculos para una estructura delgada con un ancho comparable en magnitud con la longitud de onda, incrementando este ancho h para obtener los resultados sucesivos. También puede compararse la distribución periódica y fractal del conjunto de Cantor desde otro punto de vista, como lo muestran los resultados obtenidos en las figuras 15 y 16 en cuanto a los parámetros de módulo y fase de la impedancia de entrada y reflectancia como función de la componente angular del vector de onda. Para estos casos y se observan efectos similares a los anteriores, en la figura 14. La influencia de la estructura geométrica en los parámetros se evidencia cuando se correlacionan dos órdenes diferentes. La Tabla 1, muestra los resultados obtenidos de una medición

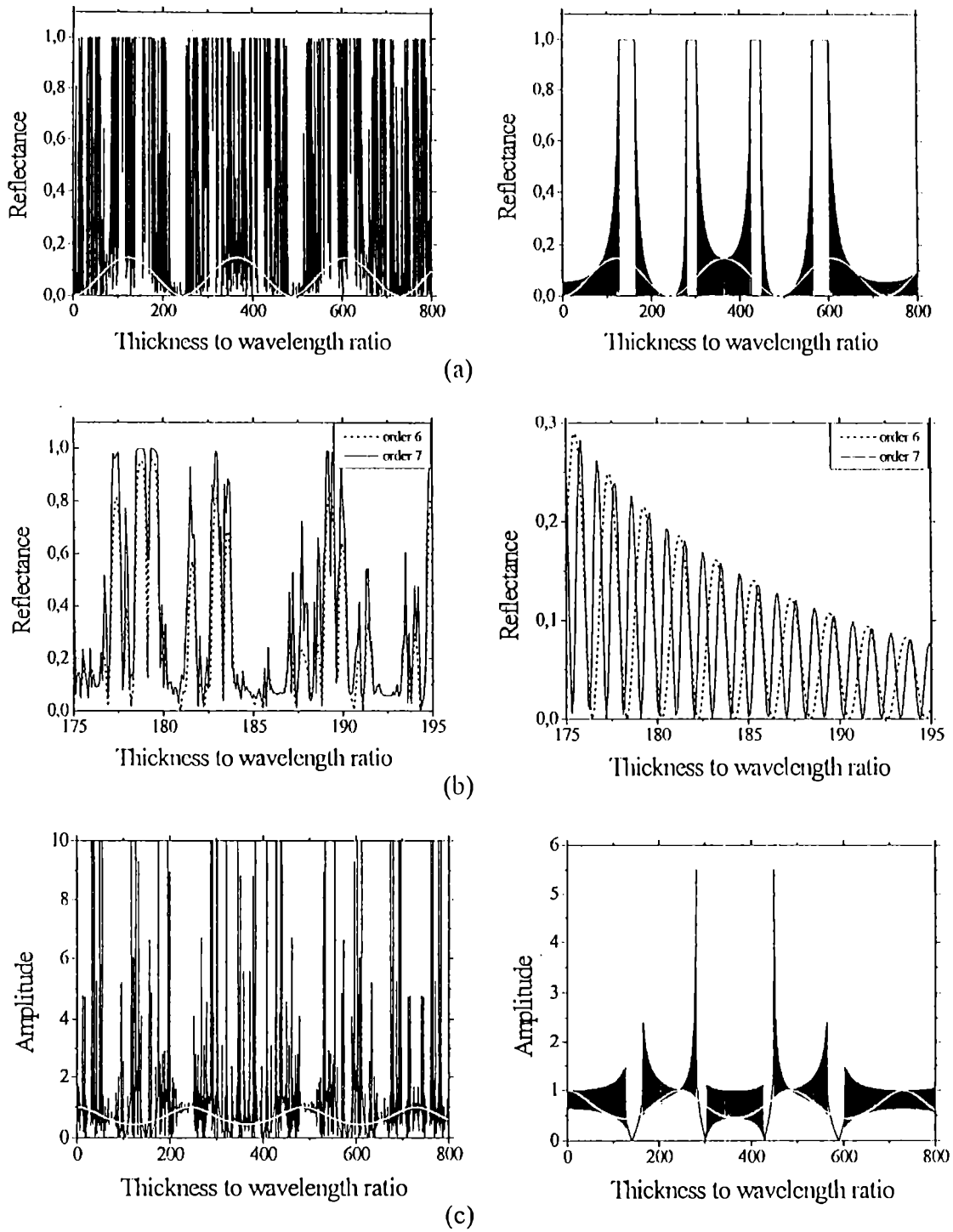


Figura 14 – Comparación de parámetros de una multicapa fractal (gráficos de la izquierda) y una periódica (gráficos de la derecha), como función de la relación ancho/longitud de onda incidente: (a) reflectancia para orden 6, (b) ampliación de la curva anterior para comparar órdenes 6 y 7, (c) módulo de la función impedancia.

de auto-similaridad en orden de diferentes órdenes para un fractal de Cantor, que se consideró de acuerdo a la definición dada por la ecuación (48), donde el área considerada era $\Delta \approx 3\sigma$ (que contiene 90% de la intensidad total del haz incidente). Al adicionar barras en una estructura periódica introduce nuevos picos, que tiene una baja correlación con los previos. Sin embargo, para el caso fractal se observa una correspondencia casi total que puede confirmarse dado que, a medida que se incrementa el orden se van obteniendo más detalles en la distribución de intensidad.

El análisis de los resultados obtenidos, nos permite probar la existencia de auto-similaridad en los parámetros involucrados. De esta manera, los ejemplos mostrados, sugieren que el comportamiento de los parámetros electromagnéticos está de acuerdo con el arreglo de la estructura multicapa y de alguna manera refleja el comportamiento fractal. De manera general, de acuerdo a los resultados obtenidos, tenemos una alta correlación para el caso fractal y una baja para el caso periódico, excepto cuando ambos órdenes corresponden a una alta reflexión de la estructura.

De los resultados obtenidos se pudo observar que el arreglo periódico posee una alta correlación cuando se verifica una alta reflectancia para ambos órdenes, de otra manera, los valores típicos de la auto-similaridad en orden se mantienen por debajo de 0.8, siendo este valor la división entre una auto-similaridad alta y una baja en orden para multicapas. Para el caso de una estructura fractal, son valores por arriba de 0.95 en todos los casos probados. Ya que esperamos comparar todas estas conclusiones en trabajos posteriores con redes de difracción de Cantor y los resultados obtenidos para las mediciones de auto-similaridad en los casos aquí presentados, calculamos el grado de auto-similaridad en la distribución de intensidad reflejada, cuando un haz monocromático gaussiano incide sobre la estructura con una dispersión angular $\sigma_\alpha = 10^{-3} \text{mm}^{-1}$. Dado nuestro futuro interés en la obtención de resultados experimentales a partir de la medición de la intensidad del haz reflejado, desarrollaremos el cálculo de la auto-similaridad para estos, donde se utilizó un perfil gaussiano para el haz incidente.

En síntesis, se obtuvieron la impedancia de entrada y reflectancia para una multicapa con distribución periódica y fractal y se demostró cómo se observa un comportamiento de auto-similaridad de acuerdo al tipo de estructura. La función impedancia superficial caracteriza la reflectancia de forma cualitativa para sus partes real e imaginaria. Los resultados obtenidos para la multicapa fractal (calculadas a partir de la impedancia de entrada) son acordes a las curvas de reflectancia reportadas por otros autores. Se demostró que toda la estructura puede reemplazarse por una superficie que conserve las características del sistema y los cambios en los parámetros involucrados. Se implementó un método iterativo directo que permite obtener una relación simple de la fractalidad de la estructura con la impedancia de entrada, y subsecuentemente con la reflectancia. Esto resulta de importancia para las posibles aplicaciones en microondas, ondas milimétricas u óptica integrada de este tipo de arreglos, donde los efectos no especulares son de importancia.

Hemos correlacionado los patrones de intensidad en orden generados para dos estructuras diferentes: periódica y de Cantor, cuando se hace incidir un haz gaussiano. Se encontró que de este parámetro se puede calcular un grado de auto-similaridad para cada estructura. De igual manera, en un futuro se pretende comparar la geometría

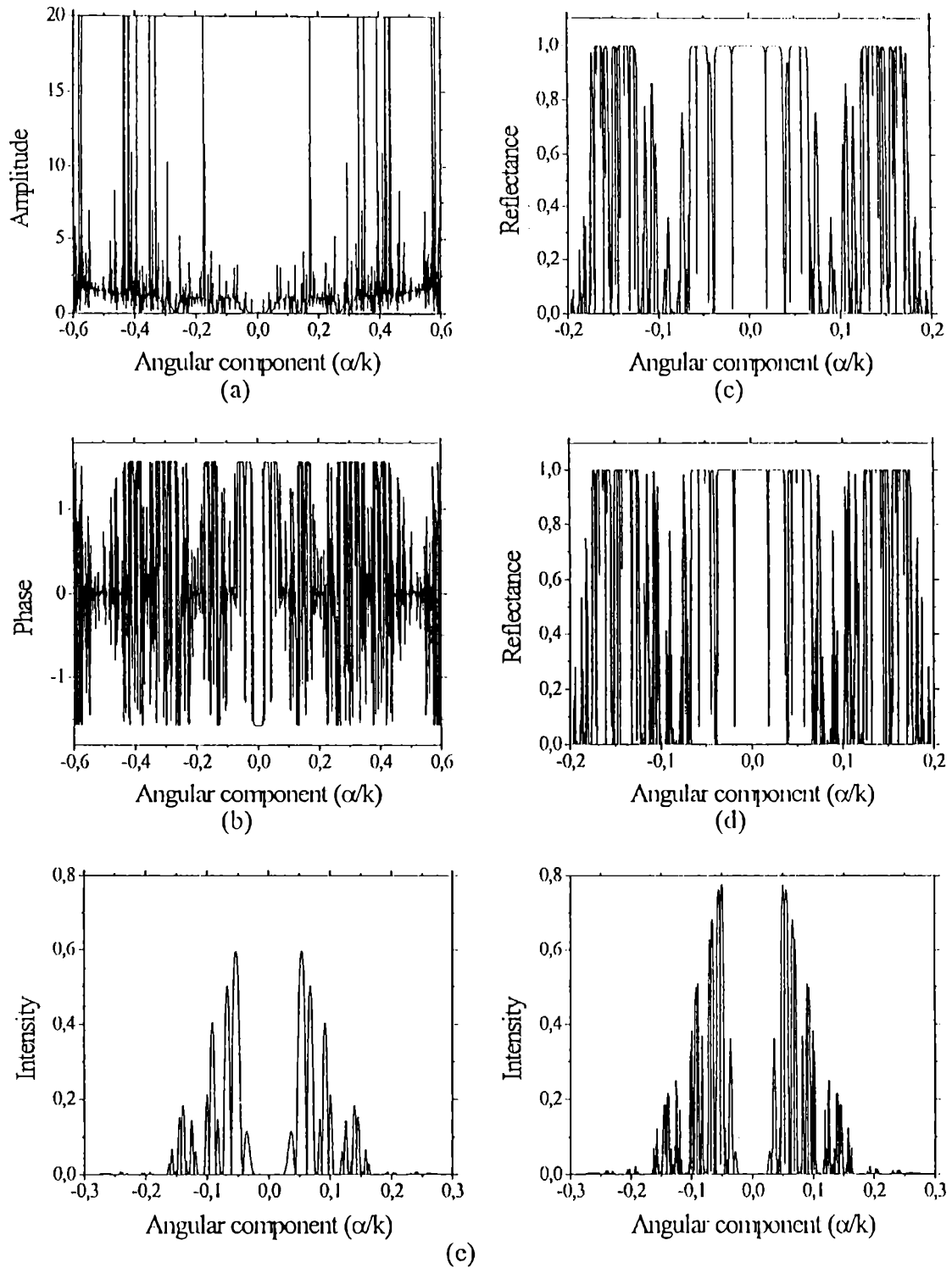


Figura 15 – Parámetros característicos de la estructura fractal: (a) módulo y (b) fase de la función impedancia de entrada. (c) y (d) Reflectancia como función del ángulo de incidencia para dos órdenes (6 y 7) respectivamente, lo cual permite ver la estructura auto-similar. (e) Haces gaussianos reflejados para un caso de baja reflectancia ($h \sim \lambda$).

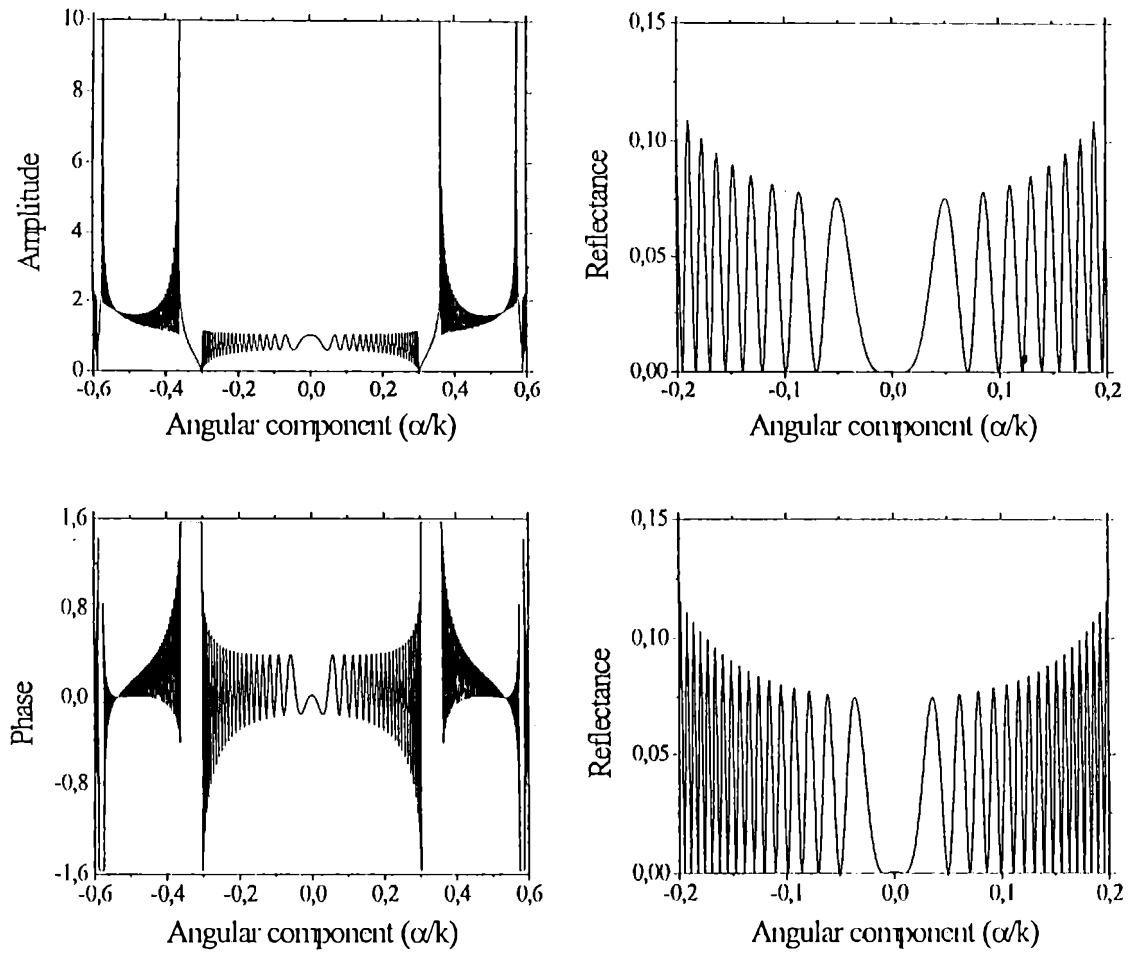


Figura 16 – Parámetros característicos de la estructura periódica: (a) módulo y (b) fase de la función impedancia de entrada. (c) y (d) Reflectancia como función del ángulo de incidencia para dos órdenes (6 y 7) respectivamente, lo cual permite ver que la estructura no es auto-similar

IN-ORDER SELF-SIMILARITY FOR THE REFLECTED FIELD		
CORRELATED ORDERS	FRACTAL	PERIODIC
4-5	0.967888754	0.725863609
4-6	0.954192195	0.702816939
4-7	0.946804119	0.701046701
5-6	0.984002931	0.426010626
5-7	0.973527395	0.507811885
6-7	0.989014688	0.677473215

Tabla 1 – Auto-similaridad entre diferentes órdenes de las multicapas fractal y periódica, con lo cual puede comprobarse una diferencia de valores en todos los casos.

para redes de difracción y multicapas para estudiar sus propiedades relacionándolas con la función de auto-similaridad en orden.

Como es obvio, cambios en la posición de los gaps, los elementos con ancho variable entre las capas más finas del fractal de Cantor, producirán cambios en la distribución geométrica de la multicapa, que resulta importante para la evaluación del campo reflejado desde la estructura completa. Para hacer esta evaluación, se utilizó un generador aleatorio con una distribución gaussiana para lograr la redistribución de los gaps. Los resultados de este proceso se pueden ver gráficamente en la figura 17, para un gap con ancho h y un orden fractal 3. De esta forma, las propiedades ópticas del campo reflejado pueden calcularse sin cambiar el camino óptico hacia la estructura.

Ahora, aplicamos este tipo de cálculo a la reflexión de un haz láser gaussiano desde una multicapa de orden 6, en la que una capa de vidrio (índice de refracción $n = 1.5$) y una de aire se distribuyen alternadamente. Dos propiedades fundamentales surgen de las gráficas de reflectancia como función de la componente angular. La primera de ellas se refiere a la distribución periódica intrínseca relacionada con la reflectancia en una sola capa, que corresponde a la capa más pequeña (o estructura fina). Esto se muestra en las figuras 17(a) y 17(b), donde las dimensiones fractales $D = \ln 2 / \ln 3 \approx 0.6309$ y $D = \ln 2 / \ln 4 = 0.5$ son utilizadas respectivamente. En estas figuras se observa con facilidad que la periodicidad está implícita en la distribución de la reflectancia. El caso (a) se refiere a la distribución clásica de Cantor en multicapas, mientras que el caso (b) corresponde a la distribución gaussiana.

Para cuantificar el cambio en la distribución geométrica a través del patrón de intensidad, introducimos la correlación entre la distribución de intensidad en cada caso como una medición del grado de similaridad. Esta correlación se implementó numéricamente para la distribución de intensidad angular; se define de forma similar a la auto-similaridad en las redes de difracción de Cantor o a la correlación en orden para multicapas fractales. Definimos esta función de similaridad como:

$$G_r(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [I_C(x) - \langle I_C(x) \rangle] [I_r(x) - \langle I_r(x) \rangle] d\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty} [I_C(x) - \langle I_C(x) \rangle]^2 d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} [I_r(x) - \langle I_r(x) \rangle]^2 d\alpha}, \quad (50)$$

donde $I_C(x)$ y $I_r(x)$ representan la distribución de intensidad clásica y los gaps de Cantor aleatorizados respectivamente. La Tabla 2 muestra los valores de similaridad que permiten cuantificar las diferencias entre ambas distribuciones para varios anchos de estructura. Así, los patrones de intensidad del campo reflejado cambian de acuerdo a la posición de los gaps en la geometría de la multicapa.

Como conclusión, hacemos hincapié en la estrecha relación que existe entre los gaps de la distribución fractal en multicapa y las propiedades de las ondas electromagnéticas reflejadas. El ancho de la estructura fina tiene influencia sobre la localización de los mínimos en la distribución periódica intrínseca de la reflectancia, mientras que la posición de los gaps influye sobre la distribución interna de los valores de reflectancia. Con la función de similaridad definida en este trabajo, podemos correlacionar

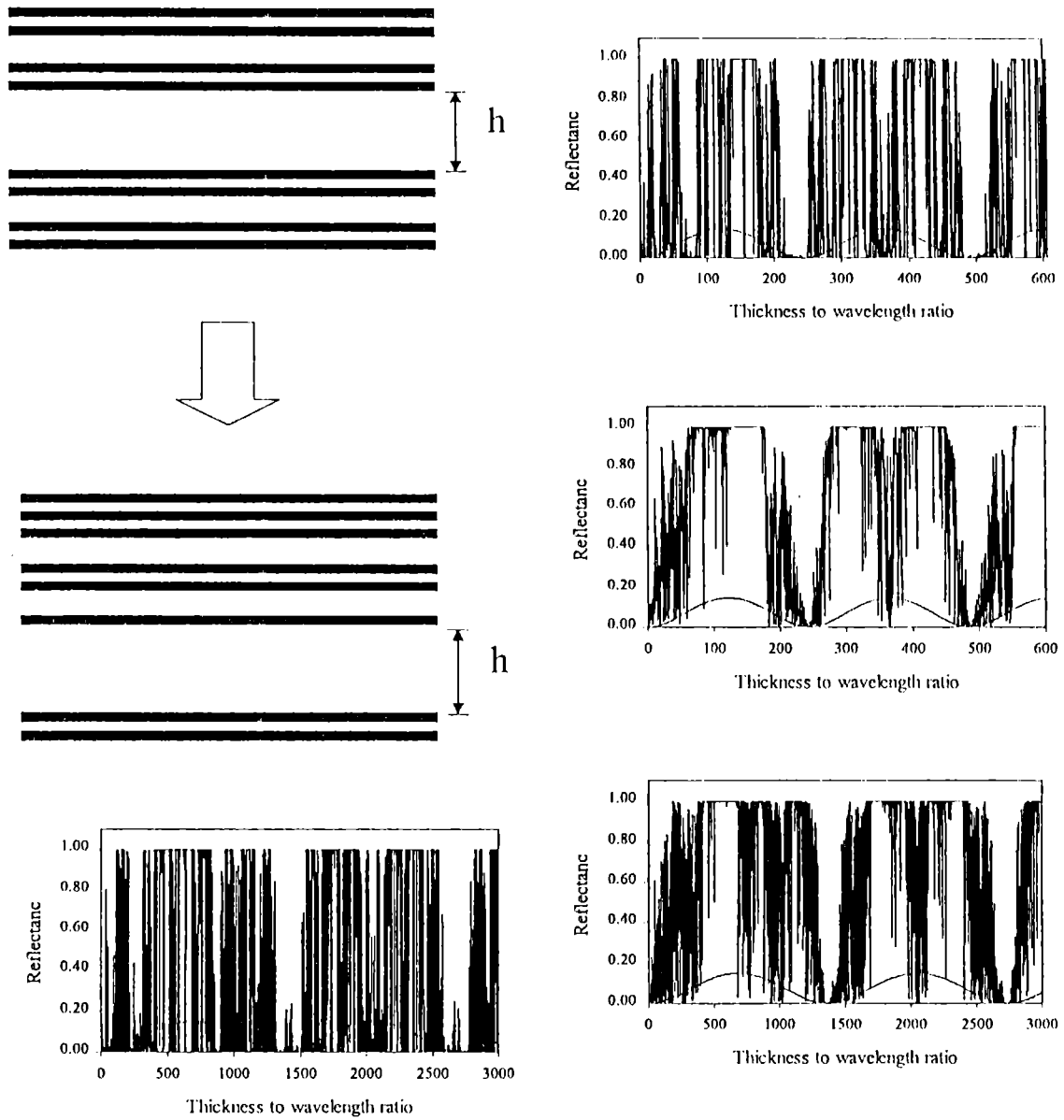


Figura 17 – (a) Cambio en la geometría de la multicapa fractal a través de un cambio en la distribución de los gaps.

Reflectancia para orden σ y dimensión fractal $D=0.6309$ para dos distribuciones diferentes: (b) multicapa de Cantor normal y (c) distribución aleatoria en los gaps.

Reflectancia de orden σ y dimensión fractal $D=0.5$ para dos diferentes distribuciones: (d) multicapa de Cantor normal y (e) distribución aleatoria en los gaps.

dicha distribución con la correspondiente a la multicapa clásica de Cantor, que puede tomarse como referencia.

Puede implementarse también otro método que toma ventaja de la distribución geométrica de la estructura. De los coeficientes de reflexión y transmisión para una sola capa se pueden obtener, en forma recursiva, los correspondientes coeficientes para completar el conjunto. Siendo las funciones generatrices para una sola capa:

$$\begin{cases} gen_r(n_g) = \frac{x + (x^2 + y^2) gen_r(n_g - 1) \exp[2i n_o k \alpha_i L \cos \theta_o]}{1 - x gen_r(n_g - 1) \exp[2i n_o k \alpha_i L \cos \theta_o]} \\ gen_t(n_g) = \frac{y gen_r(n_g - 1) \exp[2i n_o k \alpha_i L \cos \theta_o]}{1 - x gen_r(n_g - 1) \exp[2i n_o k \alpha_i L \cos \theta_o]} \end{cases} \quad (51)$$

donde n_g es el número de gaps, $\alpha_i = 1, 2$, $n_g - 1$ el tamaño del gap normalizado y θ_o el ángulo de incidencia, con las condiciones iniciales: $gen_r(n_g) = x$ y $gen_t(n_g) = y$. Los coeficientes de reflexión y transmisión se expresan, finalmente, como:

$$\begin{cases} R(S, L) = g_r [R(S - 1, r L), T(S - 1, r L), L] \\ T(S, L) = g_t [R(S - 1, r L), T(S - 1, r L), L] \end{cases} \quad (52)$$

Referencias

1. S. Abe and H. Hiramoto, "Fractal dynamics of electron wave packets in one-dimensional quasiperiodic systems", *Phys. Rev. A*, 5349-5352 (1987)
2. H. Aubert and D. J. Jaggard, "Fractal superlattices: A time-frequency approach", *Opt. Comm.* 149,207-213 (1998).
3. M. Bertolotti, P. Masciulli, C. Sibilía, "Transmission Properties of a Cantor Corrugated Waveguide", *J. Opt. Soc. Am.* 13(3), 628-634 (1996).
4. T. J. Cui, C. H. Liang, "Reflection from Fractal Cantor Layers in a Rectangular Waveguide", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 3(10), 389-391 (1993).
5. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York (1980).
6. S. A. Bulgakov, V. V. Konotop and L. Vázquez, "Wave interaction with a random fat fractal: dimension of the reflection coefficient", *Waves in Random Media* 5, 9-18 (1995).
7. S. de Nicola, "Reflection and transmission of Cantor fractal layers", *Opt. Comm.* 111, 11-17 (1994).
8. J. A. Dobrowolski, "Optical properties of films and coatings", en *Handbook of Optics*, M. Bass, ed., McGraw-Hill, New York, 42.1-42.130 (1995).

9. F. Garzia, P. Masciulli, C. Sibilio, M. Bertolotti, "Temporal Pulse Response of a Cantor Filler", *Optics Comm.* **147**, 333-340 (1998).
10. D. L. Jaggard, in *Recent Advances in Electromagnetic Theory*, H. N. Kritikos and D. L. Jaggard, eds., Springer-Verlag, New York (1990).
11. D. L. Jaggard and A. D. Jaggard, "Polyadic Cantor Superlattices with variable lacunarity", *Opt. Lett.* **22**, 145-147 (1997).
12. D. L. Jaggard, "Fractal electrodynamics: From super antennas to superlattices", en *Fractals in Engineering*, J. Lévy Véhel, E. Lutton and C. Tricot, eds., Springer, Berlín, 204-221 (1997).
13. D. L. Jaggard, "Scattering from fractal superlattices with variable lacunarity", *J. Opt. Soc. Am.* **15**(6), 1626-1635 (1998).
14. D. L. Jaggard and X. Sun, "Reflection from fractal multilayers", *Opt. Lett.* **15**(24), (1990).
15. Y. Kim and D. L. Jaggard, "Wave interactions with continuous fractal layers", *Proceedings of the SPIE Meeting 1558*, 113-119 (1991).
16. Z. Knittel, *Optics of thin films (an optical multilayer theory)*, John Wiley & Sons, London (1976).
17. V. V. Konotop, O. I. Yordanov and I. V. Yurkevich, "Wave transmission through a one-dimensional Cantor-like fractal medium", *Europhys. Lett.* **12**, 481-485 (1990).
18. M. Lehman and M. Garavaglia, "Beams reflection from multilayers with periodic and fractal distributions", enviado a *J. Mod. Optics*
19. M. Lehman, D. L. Jaggard and M. Garavaglia, "Changes of self-similarity in superlattices through the gaps distribution", aceptado en *Optik*.
20. M. Lehman, D. L. Jaggard y M. Garavaglia, "Periodicidad intrínseca en multicapas fractales", *Anales de RIAO-OP'TILAS* (1998).
21. M. Lehman y E. E. Sicre, "Auto-similaridad en orden para estructuras multicapa", *Anais do TELEMO 96*, Vol. 3, 22-27 (Curitiba, Brasil).
22. P. H. Lissberger, "Optical applications of dielectric films", *Rep. Prog. Phys.* **33**, 197-268 (1970).
23. T. Megademi, B. Pardo and R. Jullien, "Fourier transform and theory of fractal multilayer mirrors", *Opt. Comm.* **80**, 312-316 (1991).
24. L. Ochoa y M. Lehman, "Un modelo de film delgado con inhomogeneidades superficiales", *Proc. de la V Reunión de Láser, Óptica y Aplicaciones*, 210-212, La Habana, Cuba (1995).

25. B. E. Siere and M. Lehman, "Input impedance from fractal multilayers", *17th Congress of the International Commission for Optics: Optics for Science and New Technology*, Joo-Sung Chang, Jai-Hyung Lee, Soo-Young Lee, Chang-Hee, eds., *Proc. SPIE* **2778** (1996) 361-362.
26. H. A. McLeod, *Thin film optical filters*, McGraw-Hill, New York (1986).
27. A. D. Petrenko, G. I. Trush, Yu A. Pervak and I. V. Fekeshgazi, "Reflection of light from a coating with a fractal structure", *Opt. Spectrosc.* **83**(3), 299-392 (1997).
28. X. Sun and D. L. Jaggard, "Wave interactions with generalized Cantor bar fractal multi-layers", *J. Appl. Phys.* **70**, 2500-2507 (1991).
29. Yuvaraj Sah and G. S. Ranganath, "Optical diffraction in some Fibonacci structures", *Opt. Comm.* **114**, 18-21 (1995).

6. Efectos no-especulares.

Otros fenómenos de interés en la región electromagnética son los efectos no-especulares, y aquí iniciamos el estudio para futuras aplicaciones en redes de difracción y multicapas comparando las diferentes geometrías que hasta ahora hemos considerado. Además, en el presente desarrollo se calculan los corrimientos angulares y laterales cuando un haz super-Gaussiano monocromático, definido espacialmente por:

$$A_i(x, y) = \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right]^a, \quad (53)$$

se hace incidir sobre la estructura. El parámetro a (como ya señalamos en el capítulo anterior) se define como el índice de super-gaussianidad y σ corresponde a la dispersión característica, similar al perfil gaussiano. La distribución de intensidad en el dominio espacial se muestra en la figura 18(a) y corresponde a la transformada de Fourier mostrada en la figura 18(b), para distintos órdenes de super-gaussianidad con un ángulo de incidencia caracterizado por la relación $\alpha_o/k = 0.5$ ($\theta = 30^\circ$). Para ver de manera simple la forma funcional de los campos electromagnéticos y las transformadas de Fourier, utilizamos una familia de haces que aproxima los haces super-gaussianos (supergaussian-like beams, *SLG*), obtenida como convolución entre una función rectangular y una gaussiana, como ya ha sido aplicada en el capítulo anterior en el estudio de entropía. Así, para dichos casos, la transformada de Fourier tiene la siguiente forma matemática:

$$\tilde{A}_i(\alpha - \alpha_o) = \tilde{G}_i(\alpha - \alpha_o, \sigma_\alpha) \operatorname{sinc} \left(\frac{\alpha - \alpha_o}{\delta_\alpha} \right), \quad (54)$$

donde σ_α y δ_α son los respectivos anchos característicos en el espacio α de las componentes angulares.

Distinguiamos dos casos de interés teórico:

a) La propagación del haz puede describirse mediante la utilización de la aproximación paraxial. Con esto se indica que $\Delta\alpha \ll k$ y entonces $\beta(\alpha)$ puede desarrollarse en serie de Taylor:

$$\beta(\alpha) = \beta(\alpha_o) - \frac{\alpha_o}{\beta(\alpha_o)} (\alpha - \alpha_o) + \dots, \quad (55)$$

de esta manera, se obtiene una aproximación al comportamiento de onda plana y la forma general del haz reflejado, a partir de la ecuación (9), es:

$$A_r(x, y) \simeq \exp [i (\alpha_o x_r + \beta_o y_r)] \quad (56)$$

$$\int_{-k}^{+k} \mathcal{R}(\alpha) \tilde{G}_i(\alpha - \alpha_o, \sigma_\alpha) \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha - \alpha_o}{\delta_\alpha}\right) e^{i (\alpha - \alpha_o) \left[x_r + \frac{\alpha_o}{\beta_o} y_r \right]} d\alpha,$$

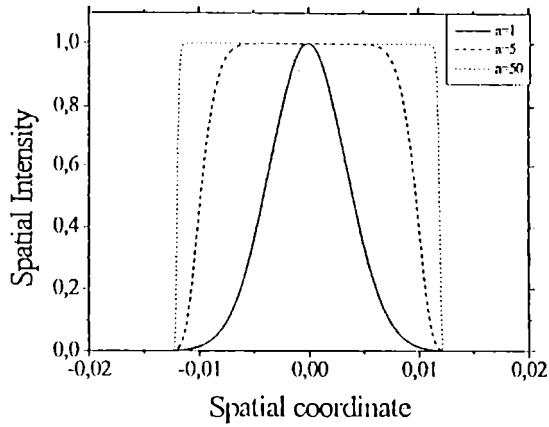
donde se transformaron las coordenadas $(x_i, y_i) \rightarrow (x_r, y_r)$, de coordenadas incidentes a reflejadas respectivamente, de acuerdo a lo ya hecho por otros autores. Finalmente, la propagación del centro de gravedad puede tomarse en cuenta para este caso. La figura 19(a) ilustra un haz de este tipo, donde el módulo de la transformada de Fourier se despliega junto con la gaussiana ($\sigma_\alpha = 10^{-3}$) y las componentes sinc ($\delta_\alpha = 10^{-4}$), de acuerdo con la definición (54). Los efectos no especulares pueden obtenerse de la ecuación (56) de manera sencilla.

b) El haz es espectralmente ancho no tiene un alto índice de super-gaussianidad. Para este caso, debido a la forma funcional, $\Delta\alpha \ll k$ en los alrededores de cada máximo secundario. La aproximación paraxial puede aplicarse para estos máximos secundarios y el haz tendrá múltiples efectos no especulares. En dado caso, el módulo de la transformada de Fourier del campo electromagnético se muestra en la figura 19(b). De acuerdo a la figura 20, donde se indican las transformaciones de coordenadas, tenemos la siguiente distribución para el campo reflejado:

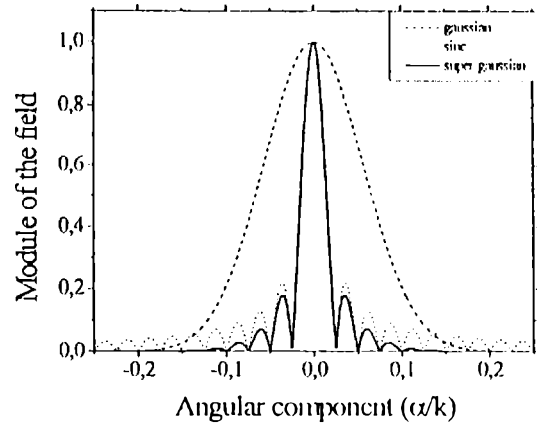
$$A_r(x, y) \simeq \sum_{j=0}^N \left\{ \exp [i (\alpha_{j_o} x_{j_r} + \beta_{j_o} y_{j_r})] \int_{\alpha_{j_o} - \pi \delta_\alpha}^{\alpha_{j_o} + \pi \delta_\alpha} \mathcal{R}(\alpha) \tilde{G}_i(\alpha - \alpha_{j_o}, \sigma_\alpha) \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha - \alpha_{j_o}}{\delta_\alpha}\right) e^{i (\alpha - \alpha_{j_o}) \left[x_{j_r} + \frac{\alpha_{j_o}}{\beta_{j_o}} y_{j_r} \right]} d\alpha \right\}. \quad (57)$$

En este caso, las fórmulas obtenidas para los efectos no especulares se aplican a cada máximo (central y secundario, α_{j_o}).

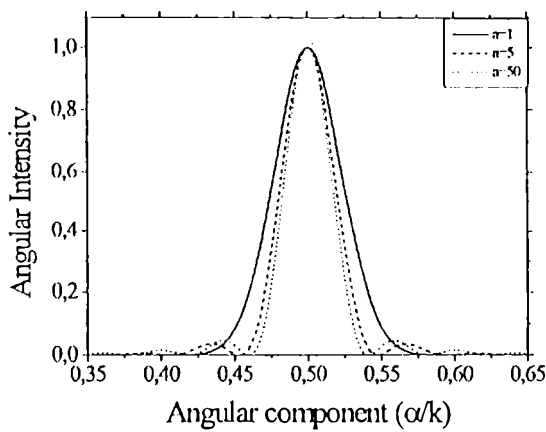
Se espera que en ambos casos se den múltiples efectos no especulares, pero la influencia del pico central en el comportamiento del haz reflejado será más pequeño en el último caso.



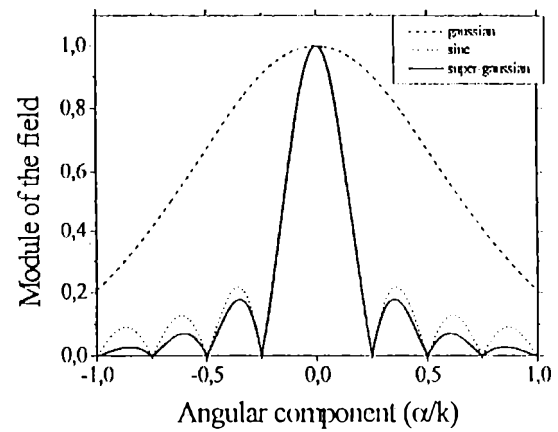
(a)



(a)



(b)



(b)

Figura 18 – Distribución de intensidad para haces con diferente índice de super-gaussianidad en: (a) dominio espacial, (b) dominio de la transformada de Fourier.

Figura 19 – Módulo de la transformada de Fourier del campo electromagnético, con diferentes parámetros: (a) $\sigma_a=10^3 \text{ nm}^{-1}$, $\delta_a=10^4 \text{ nm}^{-1}$, y (b) $\sigma_a=10^2 \text{ nm}^{-1}$, $\delta_a=10^3 \text{ nm}^{-1}$

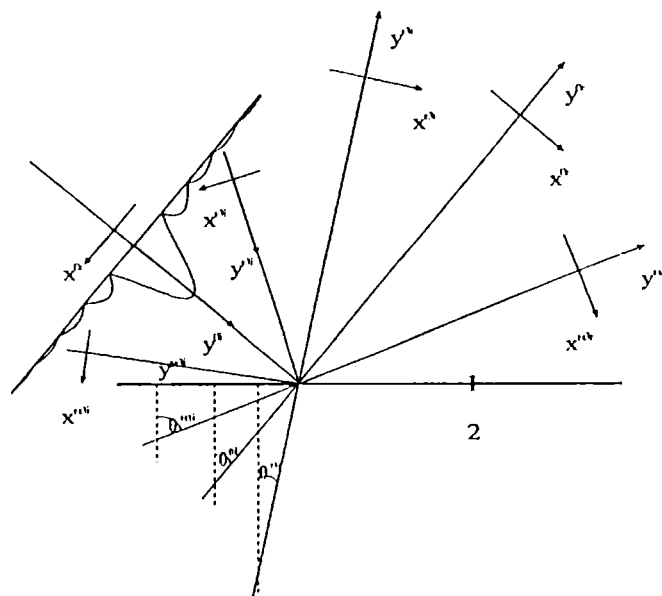
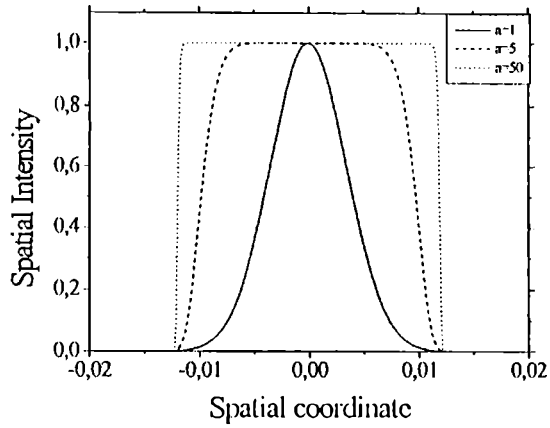
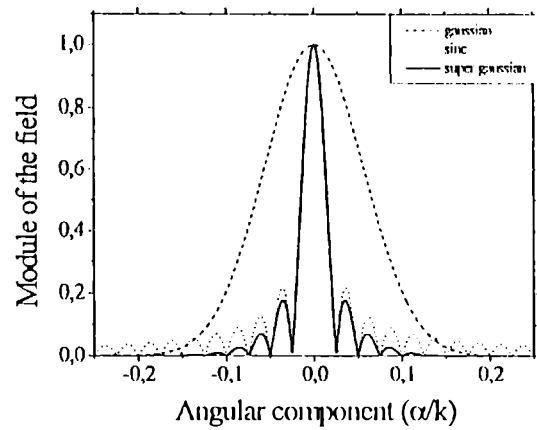


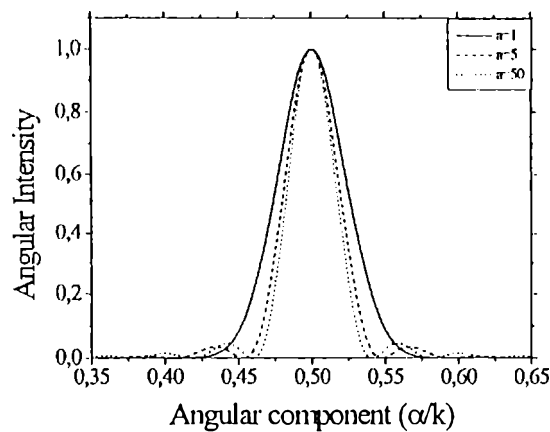
Figura 20 – Representación espectral para la reflexión de un haz super-gaussiano en la interface entre dos medios (1 y 2). Se muestra también la transformación de coordenadas múltiple $(x_i, y_i) \rightarrow (x_r, y_r)$



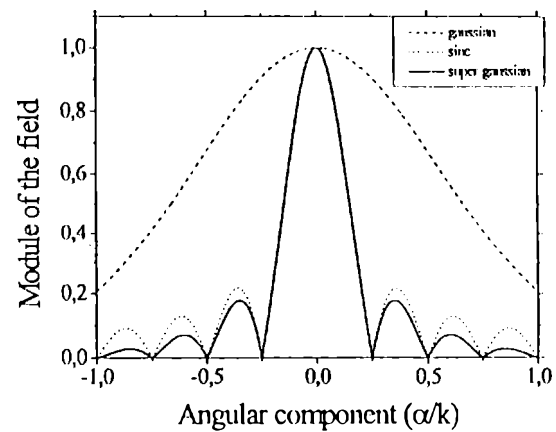
(a)



(a)



(b)



(b)

Figura 18 – Distribución de intensidad para haces con diferente índice de super-gaussianidad en: (a) dominio espacial, (b) dominio de la transformada de Fourier.

Figura 19 – Módulo de la transformada de Fourier del campo electromagnético, con diferentes parámetros: (a) $\sigma_\alpha=10^{-3}nm^{-1}$, $\delta_\alpha=10^{-4}nm^{-1}$, y (b) $\sigma_\alpha=10^{-2}nm^{-1}$, $\delta_\alpha=10^{-3}nm^{-1}$

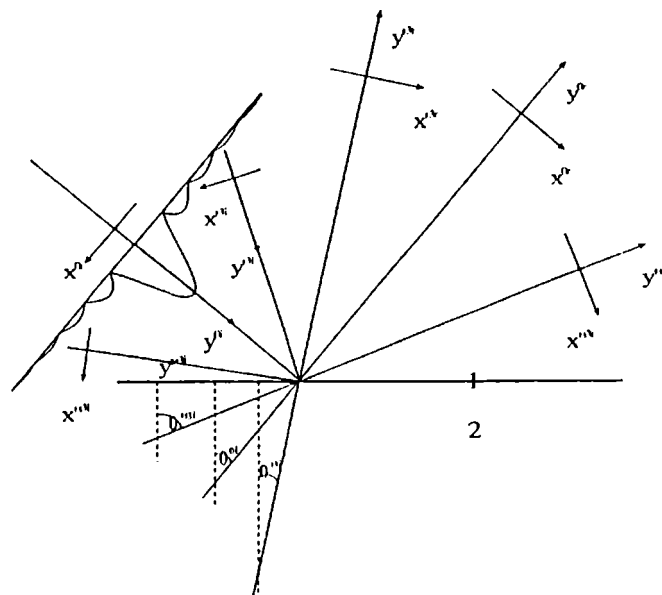


Figura 20 – Representación espectral para la reflexión de un haz super-gaussiano en la interface entre dos medios (1 y 2). Se muestra también la transformación de coordenadas múltiple $(x_i, y_i) \rightarrow (x_r, y_r)$

6.1. Corrimiento Angular.

De las ecuaciones (56) y (57) puede demostrarse que el corrimiento angular del haz reflejado cuando el campo incidente tiene un perfil gaussiano es la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{d\alpha} \left[|\mathcal{R}(\alpha)|^2 \left| \tilde{A}_i(\alpha - \alpha_o) \right|^2 \right] = 0 \quad , \quad (58)$$

que puede resolverse numéricamente para obtener la dirección angular (dada por α'_o) del haz reflejado y permite calcular el corrimiento angular.

Se desarrollaron los cálculos para los índices de refracción $n_1 = 1$, $n_2 = 1.732$ y $n_3 = 5.15 + 1.83i$ respectivamente. Los resultados obtenidos para los diferentes valores del índice de super-gaussianidad a (para la polarización- TE) se muestran en la figura 21 para: *a*) interface simple y *b*) film (grosor $H = 10\lambda$). La evaluación numérica de la ecuación (58) se logra de la intersección entre las curvas y el valor cero del eje horizontal, lo cual da las raíces correspondientes para dicha ecuación. Se demuestra que se obtienen diferentes valores del cambio angular para los picos central y secundario, dependiendo del índice a . Los cambios angulares para el máximo relativo, dependen de la estructura (interface simple y film). De acuerdo con las características del haz, para una concentración energética no-difrativa o alta, cuando el valor de la supergaussianidad se incrementa el cambio angular se reduce para valores de a mayores.

La posición para los máximos relativos puede evaluarse en detalle, pero se espera que el patrón de intensidad tenga los cambios angulares correlacionados, de alguna forma, entre cada pico.

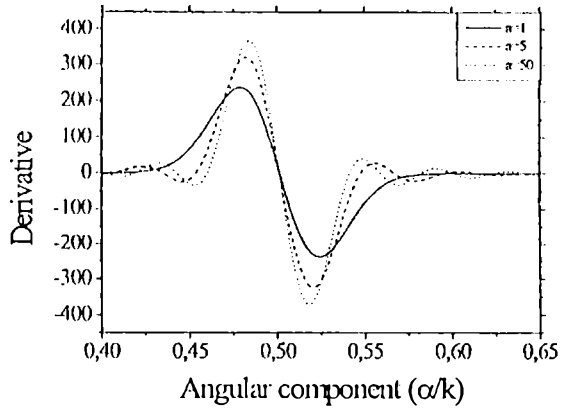
Las figuras 22(*a*) y 22(*b*) son los resultados gráficos para la polarización- TM , de manera similar a la figura 21. Como en este caso, existen diferencias entre las curvas y los cambios de posición angular. De este análisis, se puede observar, que para todas las figuras, la posición mínima se mantiene sin variación.

En síntesis, el problema de calcular la impedancia de entrada de un film, permite resolver de forma simple, el cambio angular obteniendo las raíces de la ecuación (58). Las figuras 23(*a*) y 23(*b*) muestran el cambio angular en el pico central del haz reflejado cuando $a = 5$. Este análisis con haces super-gaussianos puede utilizarse para caracterizar el tipo de estructura involucrada (superficie simple o film) y para obtener los diferentes parámetros de dicha estructura. Para máximos múltiples, los cambios angulares pueden observarse aún cuando el haz se encuentre en incidencia normal y, por lo tanto, la comparación entre los resultados para diferentes índices de supergaussianidad permiten la caracterización de la estructura.

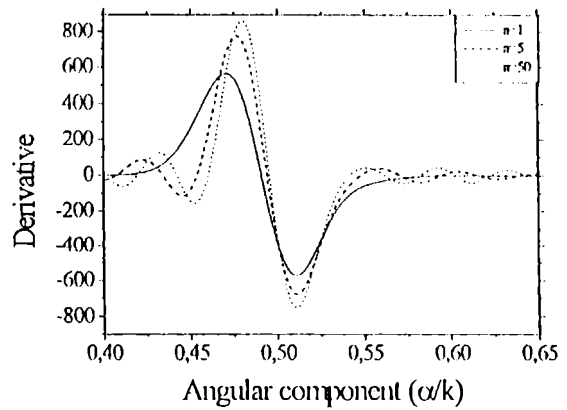
6.2. Corrimiento Lateral .

Es sabido que, considerando la aproximación paraxial, el desplazamiento longitudinal se calcula a través de:

$$L = \frac{i\beta(\alpha)}{k\mathcal{R}(\alpha)} \frac{d\mathcal{R}(\alpha)}{d\alpha} \quad . \quad (59)$$

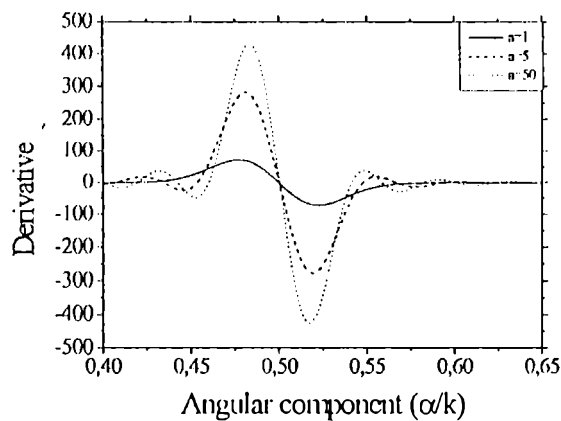


(a)

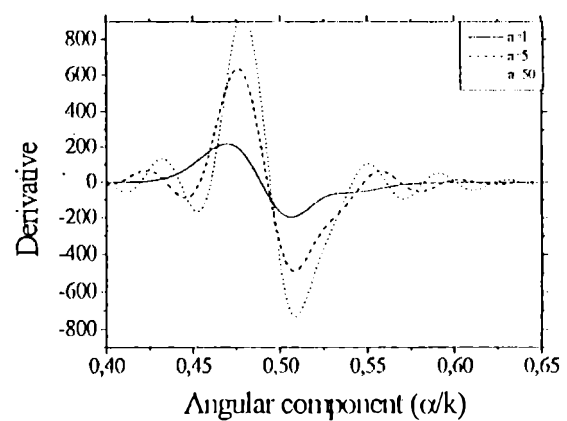


(b)

Figura 21 – Gráfico de las raíces de la ecuación (51) del corrimiento angular, para polarización *TE*: (a) una única superficie y (b) film con $H=10\lambda$.

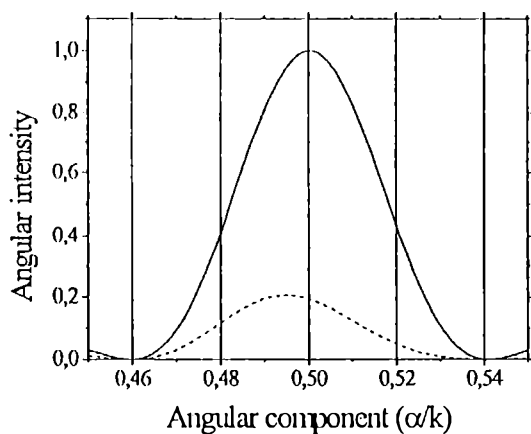


(a)

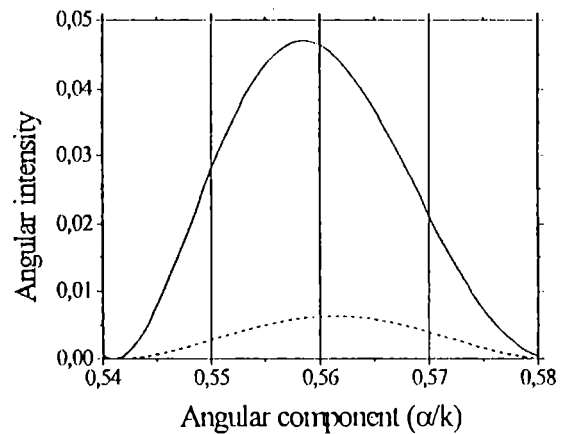


(b)

Figura 22 – Gráfico de las raíces de la ecuación (51) del corrimiento angular, para polarización *TM*: (a) una única superficie y (b) film con $H=10\lambda$.



(a)



(b)

Figura 23 – (a) Una ampliación de la distribución de intensidad para observar el pico central. (b) Una ampliación para observar el primer máximo secundario.

Si reemplazamos por la expresión de reflectancia (ver ecuaciones (32)) y considerando que $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$, obtenemos:

$$\begin{cases} L^{TE} = \frac{2i\beta(\alpha)}{\{[\beta(\alpha)]^2 [Z^{TE}(\alpha)]^2 - k^2\}} \left[\beta(\alpha) \frac{dZ^{TE}(\alpha)}{d\alpha} + Z^{TE}(\alpha) \frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} \right], \\ L^{TM} = \frac{2i\beta(\alpha)}{\{k^2 [Z^{TM}(\alpha)]^2 - [\beta(\alpha)]^2\}} \left[\beta(\alpha) \frac{dZ^{TM}(\alpha)}{d\alpha} - Z^{TM}(\alpha) \frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} \right], \end{cases} \quad (60)$$

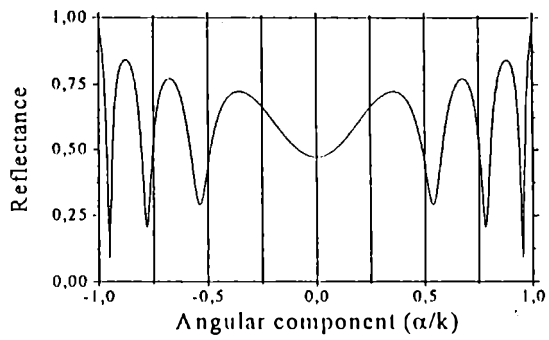
ambas expresiones deben evaluarse en α_o (o α_{jo} para varios máximos) y puede verse que la impedancia de entrada de la estructura caracteriza la respuesta electromagnética de esta estructura.

En la figura 24 se muestra una aplicación de las ecuaciones (60), donde hemos calculado la reflectancia para un film vítreo ($H = 5\lambda$) sobre un sustrato de germanio. De acuerdo a los resultados obtenidos por otros autores, los cambios abruptos en el desplazamiento longitudinal tienen correspondencia con los cambios abruptos en la reflectancia. Se relacionaron los desplazamientos longitudinales, mostrados en la figura 24(c), con los picos que aparecen en la parte imaginaria de la función impedancia, como se muestra en la figura 24(b), dado que dicha porción de la función impedancia se relaciona con el almacenamiento de energía en la estructura. Si el haz considerado tiene una distribución angular amplia, como se mostró en la figura 19(b), la aproximación paraxial puede ser aplicada a cada máximo secundario tal como se afirmó anteriormente.

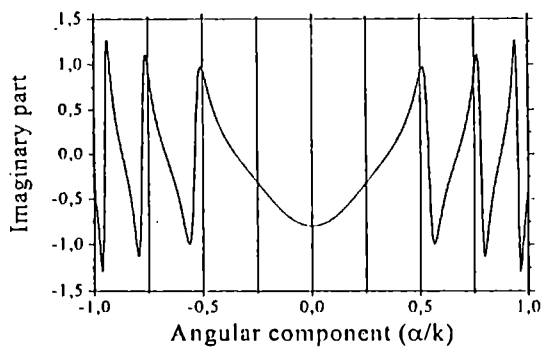
Se investigaron los corrimientos angulares y laterales en la reflexión de un haz super-gaussiano, mostrando que la distribución espectral de estos haces conduce a efectos múltiples no especulares cuando se aplican aproximaciones paraxiales a cada máximo. Los resultados obtenidos nos dan diferentes desplazamientos como función de los picos centrales y secundarios, y dependientes del índice de super-gaussianidad. Estos resultados permiten obtener las características de la estructura si los cambios angulares para cada pico pueden medirse. Creemos que se puede obtener un método para obtener las características del film a través de la caracterización de los efectos no especulares.

La existencia de varios máximos en los haces super-Gaussianos nos permitirían obtener información para cada uno de estos máximos. El método utilizado aquí, calcular la impedancia de entrada y reducir el problema volumétrico al de una sola superficie, permite una extensión a multicapa si se aplica a través de un proceso de iteración. Para ilustrar esta idea, en las figuras 25(a) y 25(b) se muestran los corrimientos angulares y longitudinales respectivamente, como función de la componente angular incidente, para films con diferentes grosores.

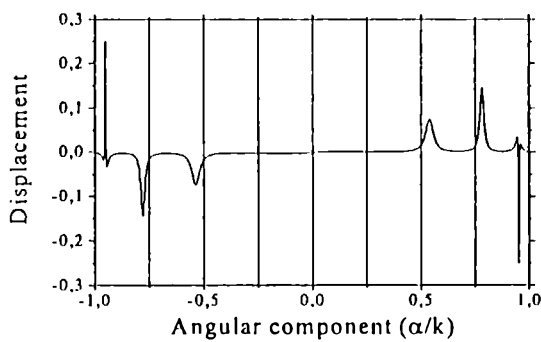
Nuestro objetivo en un futuro, es aplicar estos estudios a multicapas con diferentes geometrías (con distribuciones periódicas y fractales) para comparar la influencia de dichas estructuras en los cambios no especulares estudiados aquí, y así caracterizarlos mediante haces super-gaussianos. El método simple utilizado en el cálculo de la impedancia de entrada, permite dicha extensión a varias capas, aplicando un método de iteración simple y reduciendo el problema a una superficie simple. Los materiales



(a)

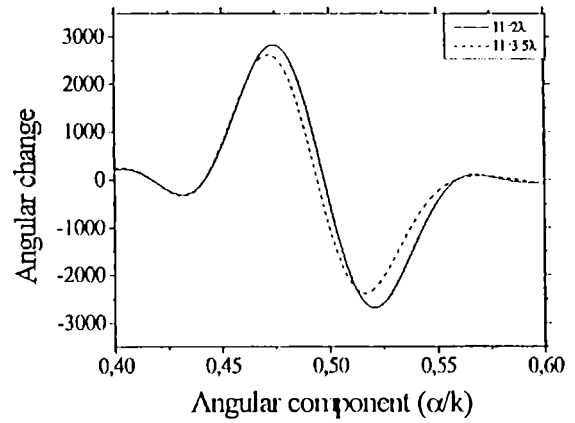


(b)

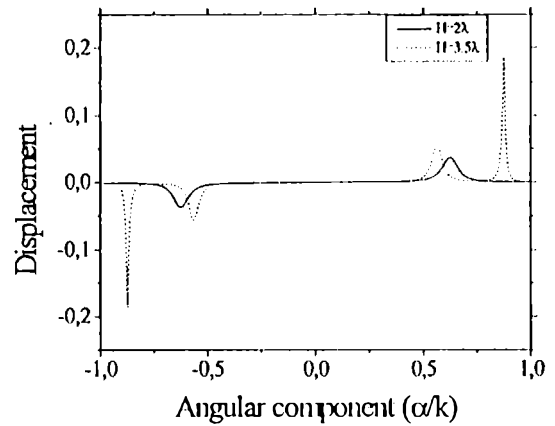


(c)

Figura 24 – (a) Reflectancia, (b) parte imaginaria de la función impedancia, y (c) desplazamiento lateral (relativo a la longitud de onda), para un film de material vítreo (con $H=5\lambda$) sobre un substrato de germanio.



(a)



(b)

Figura 25 – (a) Cambio angular, y (b) desplazamiento lateral (relativo a la longitud de onda) para dos diferentes espesores del film $H=2\lambda$, 3.5λ (material vítreo sobre un substrato de germanio).

no lineales o anisotrópicos pueden estudiarse también, e inclusive puede relacionarse la función entropía con los cambios realizados a estas estructuras.

Referencias

1. S. Bollanti, P. Di Lazzaro, D. Murra and A. Torre, "Analytical propagation of supergaussian-like beams in the far-field", *Optics Comm.* **138**, 35-39 (1997).
2. N. E. Bonomo, R. A. Depine, "Nonspecular Reflection of Left and Right Circularly Polarized Beams at Chiral-achiral Interfaces", *Optik* **108**(4), 174-180 (1998).
3. R. A. Depine, "Lateral displacement of bounded electromagnetic beams at a surface with modulated electromagnetic beams at a surface with modulated reactance", *Optik* **85**, 157-160 (1990).
4. S. L. Chuang, "Lateral shift of an optical beam due to leaky surface-plasmon excitations", *J. Opt. Soc. Am.* **A3**, 593-599 (1986).
5. F. Goos, H. Hänchen, "Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion", *Ann. Physik* **1**, 333-346 (1947).
6. A. Hessel, A. A. Oliner, "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings", *Appl. Opt.* **4**, 1275-1297 (1965).
7. H. M. Lai, F. C. Cheng, W. K. Tang, "Goos-Hänchen effect around and off the critical angle", *J. Opt. Soc. Am.* **A3**, 550-557 (1986).
8. M. Lehman, "An entropic foundation of the angular change in the reflected beam from a planar interface", *Optik* **107**(2), 73-78 (1997).
9. M. Lehman, R. Torroba and M. Garavaglia, "Multiple non-specular shifts in the reflection of super-Gaussian beams from a thin film", *Optik* **109**(3), 124-132 (1998).
10. M. Lehman, "Angular shift by reflection for super-Gaussian beams", Proceedings of International Microwaves and Opto-electronics Conference (IEEE\SBMO), Natal, Brasil (1997)
11. H. K. V. Lotsch, "Reflection and refraction of a beam of light at plane interface", *J. Opt. Soc. Am.* **58**, 551-561 (1968).
12. W. Nasalski, "Modified reflectance and geometrical deformations of Gaussian beams reflected at a dielectric interface", *J. Opt. Soc. Am.* **A6**, 1447-1454 (1989).
13. J. Navasquillo, F. Pomer, J. L. Marquina, "Displacements of the electromagnetic beam reflected by a real conductor", *Opt. Pura y Aplic.* **25**, 155-160 (1992).

14. J. Navasquillo, V. Such, F. Pomer, "Angular shift of an electromagnetic beam reflected by a planar dielectric interface", *J. Opt. Soc. Am.* **A6**, 1522-1528(1989).
15. M. A. Porras, "Moment-method evaluation of the angular and lateral shifts of reflected light beams", *Optics Comm.* **131**, 13-20 (1996).
16. M. A. Porras, "Nonspecular reflection of general light beams at a dielectric interface", *Optics Comm.* **135**, 369-377 (1997).
17. J. W. Ra, H. L. Bertoni, L. B. Felsen, "Reflection and transmission of beams at a dielectric interface", *SIAM J. Appl. Math.* **24**, 396-413 (1973).
18. R. P. Riesz, R. Simon, "Reflection of a Gaussian beam from a dielectric interface", *J. Opt. Soc. Am.* **A2**, 1809-1817 (1985).
19. V. Shah and T. Tamir, "Absorption and lateral shift of beams incident upon lossy multilayered media", *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 37-44 (1983).
20. F. Schreier, M. Schmitz and O. Bryngdahl, "Beam Displacement at Diffractive Structures under Resonance Conditions", *Optics Lett.* **23**(8), 576-578 (1998).
21. T. Tamir, "Nonspecular phenomena in beam fields reflected by multilayered media", *J. Opt. Soc. Am.* **A3**, 558-565 (1986).
22. I. A. White, A. W. Snyder and C. Pask, "Directional change of beams undergoing partial reflection", *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 703-705 (1977).
23. S. Zhang, T. Tamir, "Spatial modifications of Gaussian beams diffracted by reflection gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **A6**, 1368-1381 (1986).

7. Arreglos fractales y arreglos de factores.

Nos interesa aquí estudiar sistemas fractales que operan como antenas, para los cuales es posible aplicar el método de superposición de dominios periódicamente distribuidos. La operación en multifrecuencia de arreglos fractales ya ha sido estudiada, por ejemplo para estructuras de Cantor. Una antena lineal de Cantor $C(z)$ alineada a lo largo de la dirección z puede describirse mediante una convolución múltiple de varias funciones delta, cada una de las cuales escalada con un factor d , tal que:

$$C(z) = \dots * f\left(\frac{z}{\delta}\right) * f(z) * f(z.\delta) * \dots = \bigotimes_{n=-\infty}^{\infty} f(z.\delta^n) \quad (61)$$

donde δ es un factor de escala arbitrario, \bigotimes indica el operador convolución y $f(z)$ es el conjunto igualmente espaciado con N funciones delta:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta \left[z - n d + \frac{N-1}{2} d \right] \quad (62)$$

siendo d el espaciado entre elementos de arreglos para cada conjunto. Para el conjunto de Cantor clásico, el número de elementos en $f(z)$ es $N = 2$, y el factor de escala característico es $\delta = 3$. El correspondiente factor del arreglo es $C(\Psi)$ y puede ser escrito en la forma de una sucesión infinita como:

$$C(\Psi) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} F\left(\frac{\Psi}{\delta^n}\right) \quad (63)$$

donde $\Psi = kd \cos \theta + \beta$ como es usual en la teoría de arreglos. Vemos aquí una similitud con la fórmula obtenida en la ecuación (30) del capítulo II. El factor de arreglo es auto-escalable cuando se escala con d , esto es:

$$C\left(\frac{\Psi}{\delta}\right) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta^{n-1}} F\left(\frac{\Psi}{\delta^{n-1}}\right) = C(\Psi) \quad (64)$$

lo cual significa que el factor de arreglo es constante para cualquier conjunto de frecuencias.

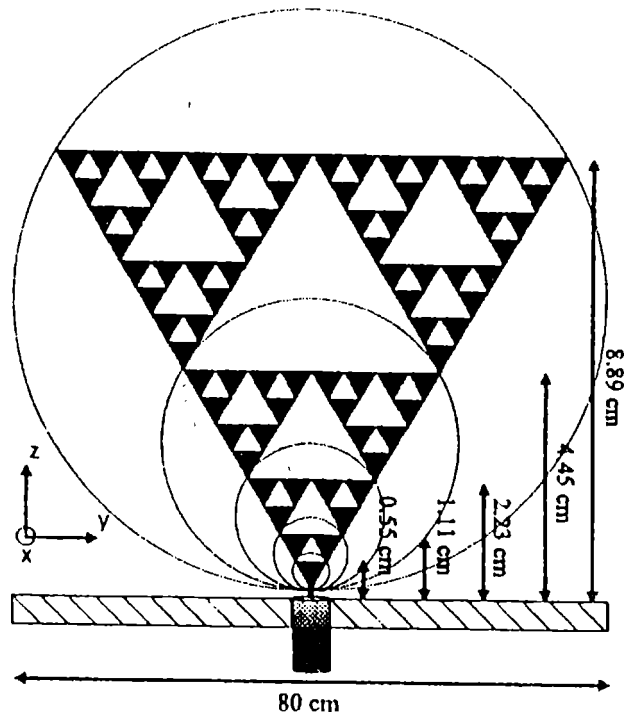
7.1. Antenas fractales. Antena de Sierpinski.

Un ejemplo de antena multibanda de orden 5 se muestra en la figura 26(a). Para la construcción de un monopolo de Sierpinski se utilizan técnicas de circuitos impresos sobre un sustrato dieléctrico ($h = 1.588mm, \epsilon_r = 2.5$). De acuerdo a resultados ya reportados principalmente por Puente *et al.*, la antena evidencia claramente cinco bandas de operación en las frecuencias 0.44, 1.75, 3.51, 7.01 y 13.89 GHz. Las bandas están espaciadas periódicamente en escala logarítmica por un factor 2, que es precisamente el factor de escala entre el gasket y los subgaskets de la estructura de Sierpinski. La primera banda se encuentra corrida con respecto a la posición esperada. Este fenómeno puede relacionarse con el efecto de corte, debido a la falta de aporte de componentes periódicas.

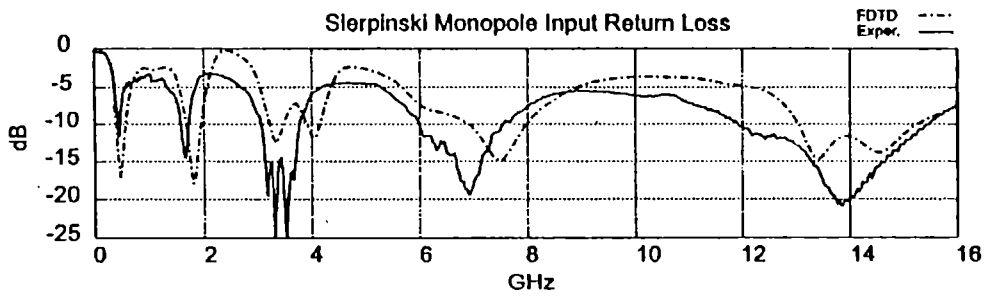
La forma básica del patrón de intensidad para la antena fractal se mantiene casi constante a través de las bandas. De manera contraria, la antena triangular Euclidiana (con forma de moño), presenta un patrón con un número creciente de lóbulos cuando se aumenta la frecuencia. Mientras que una operación multibanda puede establecerse para una antena fractal desde los puntos de vista de impedancia de entrada y patrones de radiación, la antena Euclidiana es de una sola banda. Estos resultados son importantes si se pretende analizar la operación del monopolo de Sierpinski utilizando por ejemplo los casos de componentes filtradas dentro de la superposición de dominios periódicos. Solo hemos introducido esta sección para relacionar los métodos aquí desarrollados con otras aplicaciones electromagnéticas.

Referencias

1. D. L. Jaggard, "Fractal Electrodynamics: From Super Antennas to Superlattices", en *Fractals in Engineering*, J. Lévy Véhel, E. Lutton and C. Tricot, eds, Springer, London (1997).



(a)



(b)

Figura 26 – (a) Monopolo de Sierpinski, donde se incluyen las dimensiones utilizadas por otros autores (C. Puente, J. Romeu, R. Pous and A. Cardama, "Multiband Fractal Antennas and Arrays", en *Fractals in Engineering*, J. Lévy Véhel, E. Lutton and C. Tricot, eds., Springer, London (1997)).

(b) Típico resultado de operación del monopolo de Sierpinski en las cinco bandas relacionadas con el número de componentes de dominios periódicos incluidos dentro de él.

2. K. M. Luk, C. L. Mak, Y. L. Chow, K. F. Lee, "Broadband Microstrip Patch Antenna", *IEE Electron. Lett.*, **34**(15), 1442-1445 (1998).
3. G. J. Walker, J. R. James, "Fractal Volume Antennas", *IEE Electron. Lett.*, **34**(16), 1536-1539 (1998).
4. Y. Kim and D. L. Jaggard, "The Fractal Random Array", *Proc. of the IEEE* **74**(9), 1278-1280 (1986).
5. C. Puente and R. Pous, "Fractal Design of Multiband and Low Side-Lobe Arrays", *IEEE Trans. Antennas Propag.* **44**(5), 1-10 (1996).
6. C. Puente, J. Roineu, R. Pous and A. Cardama, "Multiband Fractal Antennas and Arrays", en *Fractals in Engineering*, J. Lévy Véhel, E. Lutton and C. Tricot, eds, Springer, London, 222-236 (1997).
7. C. Puente and J. Roineu, "Fractal multiband antenna based on the Sierpinski gasket", *IEE Elec. Lett.* **32**, 1-2 (1996).

8. Conclusiones.

Los métodos matemáticos introducidos en el capítulo *II* pueden ser implementados en el caso electromagnético, cuando las dimensiones de las componentes de estructura fina del objeto fractal se aproximan a la longitud de onda de la radiación incidente. Diversas aplicaciones se han señalado aquí, algunas con desarrollo propio y otras con posibilidades de desarrollo futuro. Debemos destacar que una comparación entre los resultados de red de difracción y multicapa puede ser obtenida, y los efectos no-especulares en cada caso pueden calcularse como método de caracterización de estructuras geométricas. Por otra parte, la descomposición en dominios periódicos permitirán también la caracterización del patrón de radiación de antenas fractales. El método básico desarrollado aquí, calculando la impedancia de entrada, nos permite calcular en forma muy sencilla y directa la estructura de los patrones de intensidad para cada caso.

Bibliografía complementaria para el capítulo IV

1. S. Kaushik, Vector Fresnel Equations and Airy Formula for One-dimensional Multilayer and Surface-relief Gratings, *J. Opt. Soc. Am.* **A14**(3), 596-609 (1997).
2. L. Li, Vector Fresnel Equations and Airy Formula for One-dimensional Multilayer and Surface-relief Gratings: Comment, *J. Opt. Soc. Am.* **A15**(4), 1006-1008 (1998).
3. P. Yeh, "Resonant tunneling of electromagnetic radiation superlattice structures", *J. Opt. Soc. Am.* **A2**(4), 568-571 (1985).
4. D. H. Raguin and G. M. Morris, "Analysis of antireflection structured surfaces with continuous one-dimensional surface profile", *Appl. Opt.* **32**, 1582-1598 (1993).
5. D. W. Mills and L. S. Tamil, "Analysis of planar optical waveguides using scattering data", *J. Opt. Soc. Am.* **A9**, 1769-1778 (1992).
6. D. G. Hall, "In-plane scattering in planar optical waveguides: refractive-index fluctuations and surface roughness", *J. Opt. Soc. Am.* **A2**, 747-752 (1985).
7. F. Bass and V. Freilikher, "Scattering of waves from nonlinear media with rough surfaces", *Waves in Random Media* **7**, 385-394 (1997).
8. L. C. Andrews, R. L. Phillips and A. R. Weeks, "Propagation of a Gaussian-beam wave through a random phase screen", *Waves in Random Media* **7**, 229-244 (1997).
9. J. Q. Lu, J. A. Sánchez-Gil, E. R. Méndez, Zu-Han Gu and A. A. Maradudin, "Scattering of light from a rough dielectric film on a reflecting substrate: diffuse fringes" *J. Opt. Soc. Am.* **A15**, 185-195 (1997).
10. S. Zhang and R. Tamir, "Spatial modification of Gaussian beams diffracted by reflection gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **A6**, 1368-1381 (1989).
11. D. Marcuse, "Gaussian approximation of the fundamental modes of graded-index fibers", *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 103-109 (1978).
12. P. P. Ho and R. R. Alfano, "Optical Kerr effect in liquids", *Phys. Rev.* **A20**, 2170-2187 (1997).
13. Y. Louis, A. P. Sheppard, M. Haeflertman, "Domain walls of linear polarization in isotropic Kerr media", *Opt. Comm.* **141**, 167-172 (1997).
14. A. L. Mikaelian, "Self-focusing media with variable index of refraction", en *Progress in Optics*, E. Wolf, ed., North-Holland, Amsterdam, 280-345 (1980).

15. D. Charrau, C. Bainier, D. Courjon and C. Girard, "Near-field phase measurement by Fourier analysis of the fringe pattern", *Pure Appl. Opt.* **6**, 491-502 (1997).
16. M. A. Mabrouk and H. F. El-Barwaly, "Refractive index profile of GRIN optical fibre considering the area under the interference fringe shift: I. The matching case", *Pure Appl. Opt.* **6**, 247-256 (1997).
17. A. W. Snyder, D. J. Mitchell and Y. Chen, "Spatial solitons of Maxwell's equations", *Opt. Lett.* **19**, 524-526 (1994).
18. S. H. Song, S. Park, C. H. Oh, P. S. Kim, "Gradient-index Planar Optics for Optical Interconnections", *Opt. Lett.* **23**(13), 1025-1027 (1998).
19. D. L. Jaggard, "Fractal Electrodynamics: Wave interactions with discretely self-similar structures", en *Electromagnetic Symmetry*, C. Baum and H. Kritikos, eds., Taylor and Francis Publishers, Washington, D. C., 231-281 (1995).
20. D. L. Jaggard, "Fractal Electrodynamics and Modeling", en *Directions in Electromagnetic Wave Modeling*, H. L. Bertoni and L. B. Felsen, eds., Plenum Publishing Co., New York, 435-446 (1991).

Conclusiones Generales.

A lo largo de este trabajo se ha mostrado que existe una íntima relación entre la geometría del objeto y el patrón de intensidad del campo por él dispersado. A tal punto que la caracterización de la estructura del campo difractado, por ejemplo a través de la función auto-similaridad, es sensible a los cambios producidos en la propia estructura fina del objeto. Se han encontrado también diferentes casos interesantes en cuanto a la conservación de auto-similaridad dentro de las regiones de campo cercano y lejano. Ya que las estructuras fractales pueden estar incompletas, y en este caso es difícil entonces hablar de fractal como normalmente se lo considera, hemos introducido los conceptos de estado (cuando la estructura puede estar incompleta) y orden del objeto, y también el estudio de la auto-similaridad para cada uno de estos casos.

El primer resultado de estudio en la presente tesis, y que se ha convertido aquí en el punto central de las aplicaciones a óptica y electromagnetismo, es el desarrollo matemático que nos permite construir objetos fractales uni- y bi-dimensionales a partir de una distribución periódica de funciones de tipo rectangular, y una posterior generalización para dominios distribuidos en forma periódica con una frontera que puede ser de cualquier forma. Esto define entonces la estructura fina del fractal, la cual es importante porque tiene mucha influencia en el campo difractado como se mostró para el caso de redes de Cantor y para la carpeta de Sierpinski, cuando esta tiene estructura variable en forma cíclica.

Se estudiaron diferentes estructuras fractales regulares y con la posibilidad de extender dicho estudio a formas cuasi aleatorias, a través de la aleatoriedad de algunas de las componentes periódicas que se utilizan para construir el objeto fractal. Los resultados experimentales que nos permiten relacionar con los cálculos realizados, y además con fundamentos en trabajos previos de diferentes autores, son un elemento importante también dentro de esta tesis. En síntesis, el logro más importante es haber obtenido algunos objetos fractales contenidos en el plano a partir de funciones periódicas rectangulares y su posterior utilización experimental como redes de difracción óptica. Una relación interesante de este tipo de desarrollo sería con funciones ortonormales, para formar una base que nos permita construir diferentes tipos de funciones escaladas, lo cual daría un marco formal más importante para considerar en futuras aplicaciones.

Es interesante entonces poder continuar los trabajos en esta dirección, ya no solo desde el punto de vista matemático en que debería verse claramente la relación entre el método aquí presentado y el ya conocido de *IFS*, sino también por las posibles aplicaciones en procesamiento óptico de la información a que pueden dar lugar estas formas geométricas, aún cuando estén incompletas en el número de componentes periódicas que intervienen. Esto también lleva al estudio de objetos más complejos en su estructura, aunque sean aleatorios, ya que una periodicidad intrínseca puede estar contenida dentro del objeto y detectada a través del campo dispersado. Un ejemplo de esto lo constituye la distribución de Cantor en multicapas, donde se vio que el ordenamiento de capas periódicas de orden 1 queda implícita dentro de las de más alto orden.

Aún no se han desarrollado aplicaciones importantes en diferentes direcciones, sin embargo es digno de destacar que muchos estudios experimentales han demostrado que el tipo de geometría periódica o fractal puede ser diferenciado entre sí, y también hemos mostrado aquí que puede ser cuantificado en el caso de estructuras multicapas. Este parámetro de cuantificación es sensible a la adición de una aleatoriedad en la distribución de las capas de la estructura.

La geometría y sus influencias en los sistemas físicos, en un sentido general ahora, constituye evidentemente una importante área de estudio que aún no ha sido del todo explotada, fundamentalmente para obtener información del objeto a través de la interacción con ondas como aquí lo hemos hecho. Preparamos aquí las herramientas para estudios posteriores, como es el caso de la formulación de entropía o el speckle digital, que pueden ser métodos de importancia en la caracterización geométrica de medios y superficies.

Finalmente, volvemos a hacer hincapié en que esta tesis pretende ser el inicio de futuros trabajos tanto teóricos como experimentales, en los que básicamente interesa resolver y estudiar el problema de la interacción onda-geometría del objeto, como nos habíamos propuesto e interesado, y de acuerdo a lo señalado en la introducción general. Es por esto que el contenido de algunos temas es adicional a los intereses futuros, como es el caso de microscopía, excitaciones superficiales y antenas, aunque aún no hemos hecho aplicaciones concretas en esa dirección.