

[www.cibereduca.com](http://www.cibereduca.com)



**V Congreso Internacional Virtual de Educación**  
**7-27 de Febrero de 2005**

## **EL CONCEPTO DE LÍMITE: SU VISUALIZACIÓN.**

**Alicia del Valle Cruz**

**Teresa Carrasco Jiménez**

## RESUMEN

El concepto de límite es el concepto básico sobre el cual se erige el cálculo diferencial e integral. Por su alto grado de abstracción se dificulta su comprensión e interpretación por el estudiantado, necesitándose en el proceso de asimilación de éste que los estudiantes transiten más por la etapa materializada.

Para contribuir al logro de lo anteriormente planteado, se realizaron animaciones gráficas con la ayuda de la computadora de los distintos casos de límite de funciones, este trabajo metodológico realizado (con las posibilidades que brindan las TIC), fue utilizado en un video docente sobre Límite y Continuidad, está disponible en la red para la consulta de los estudiantes y se ha utilizado en las clases de este tema, obteniéndose resultados satisfactorios.

## INTRODUCCIÓN.

La teoría de los límites, como principal instrumento del análisis matemático, es el aparato que permite estudiar las cantidades variables que aparecen en los diferentes fenómenos de la naturaleza y procesos tecnológicos, según Engels de esa forma se introdujo en la Matemática el movimiento y con él la dialéctica (Ríbnikov, 1991).

El concepto de límite es un concepto que, para su comprensión, requiere un alto grado de abstracción, por lo que a los estudiantes se les dificulta grandemente su interpretación, si tenemos en cuenta que éste es el concepto donde se apoya todo el cálculo diferencial e integral, es imprescindible utilizar todas las posibilidades que disponemos para lograr la asimilación del mismo por los estudiantes, esto ha conducido a la realización de un sinnúmero de investigaciones pedagógicas en este tema (Sierra et al., 2000), (Szydlík, 2000), (Díaz, 1999), (William, 1991), (Sierpínska, 1985). El Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería Mecánica del ISPJAE trabaja en el perfeccionamiento de la enseñanza de las diferentes asignaturas que se imparten, teniendo como base la conjugación de algunos aportes de la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales y de la Tecnología Educativa al proceso de enseñanza-aprendizaje. (Area, 1995), (Canfux, 1996), ya que es importante crear alternativas para renovar el proceso de enseñanza-aprendizaje en las que se integren los avances de la pedagogía contemporánea con el empleo de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones.

Este trabajo se desarrolló dentro de esta línea de investigación, para lograr una mejor apropiación por parte de los estudiantes de este concepto de límite se desarrollaron animaciones gráficas en la computadora de los distintos casos de límite de funciones utilizando las posibilidades que brindan las TIC para su utilización en diferentes formas.

## MATERIALES Y MÉTODOS.

Se realizó un análisis de este concepto, teniendo en cuenta las dificultades que los estudiantes presentan en la interpretación del mismo, se consultaron textos de Cálculo (Edwards y Penney, 1994), (Swokowski, E.W., 1989) y programas vigentes (MES, 2003), (MES, 1998), (CUJAE, 2003), se realizó un análisis de las situaciones más significativas, que era necesario analizar, para ejemplificar gráficamente este concepto, en el cual está implícito el movimiento y que mediante las posibilidades que brinda el Power Point Xp animar todos esos casos para que los estudiantes puedan comprender este concepto.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

Se consideró inicialmente la situación de la figura 1, para interpretar este concepto intuitivamente, o sea, ¿qué sucede con los valores de la función cuando la variable independiente se aproxima a un valor (en este caso "a")?, mediante las posibilidades de animación se logra que se vea cómo se mueven al unísono los "puntos" en rojo sobre los ejes y en verde sobre la función, para que quede claro que, cuando la variable independiente "x" se aproxima a "a" los valores de la función se aproximan a "l" y en ese caso se dice que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

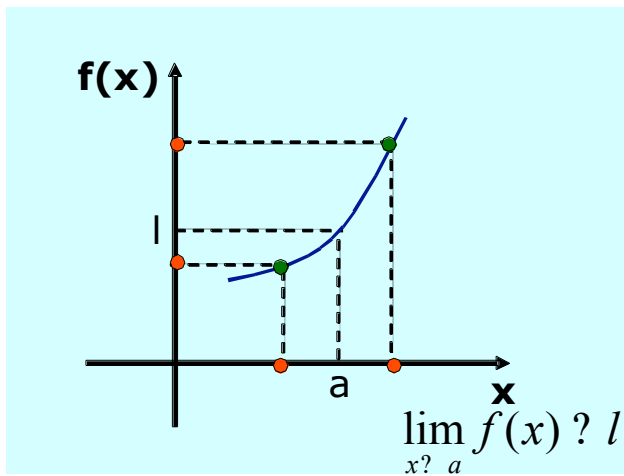


Figura 1

Siguiendo el mismo procedimiento se consideró la situación de los límites laterales ¿qué sucede con los valores de la función cuando la variable independiente se aproxima a "a" por valores menores que a, o sea, por la izquierda (Figura 2) y ¿qué sucede con los valores de la función cuando la variable independiente se aproxima a "a" por valores mayores que a, o sea, por la derecha (Figura 3).

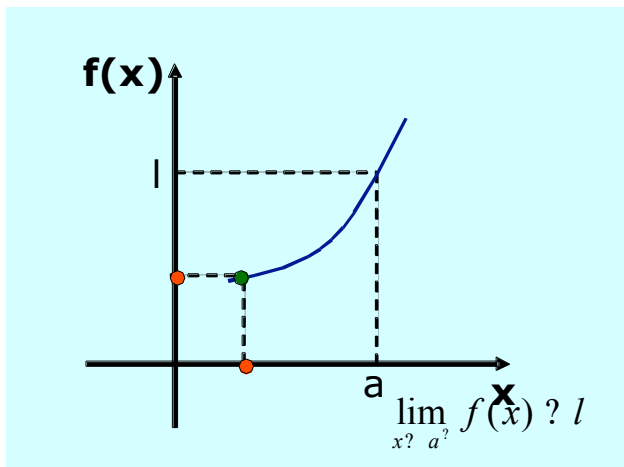


Figura 2

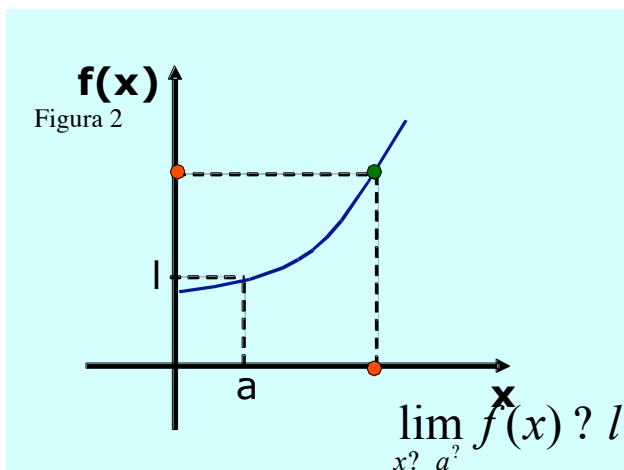


Figura 3

Después consideramos la formalización de este concepto:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Interpretándola gráficamente a través del movimiento (Figura 4), se consideran diferentes valores de  $\varepsilon$ , y para cada valor de  $\varepsilon$  se ve gráficamente el valor de  $\delta$  que le corresponde, desaparece esto y, para otro valor de  $\varepsilon$ , se efectúa lo mismo hasta que esté lo suficientemente cerca de  $l$ .

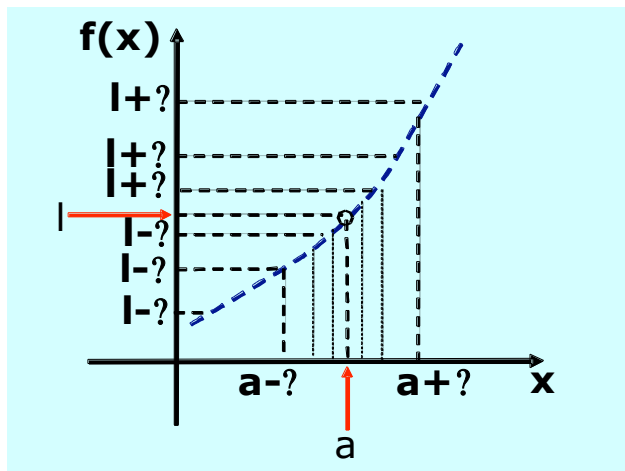


Figura 4

Se ejemplifica en detalle los límites laterales en un caso donde el límite en el punto no existe, para que vean la relación entre los límites laterales y el límite de la función en el punto (Figuras 5, 6 y 7).

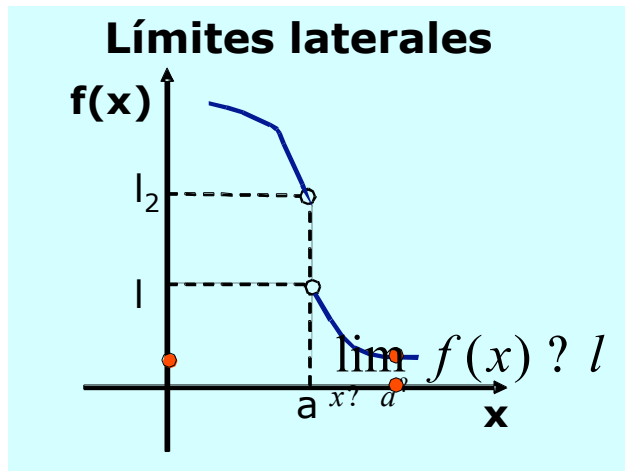


Figura 5

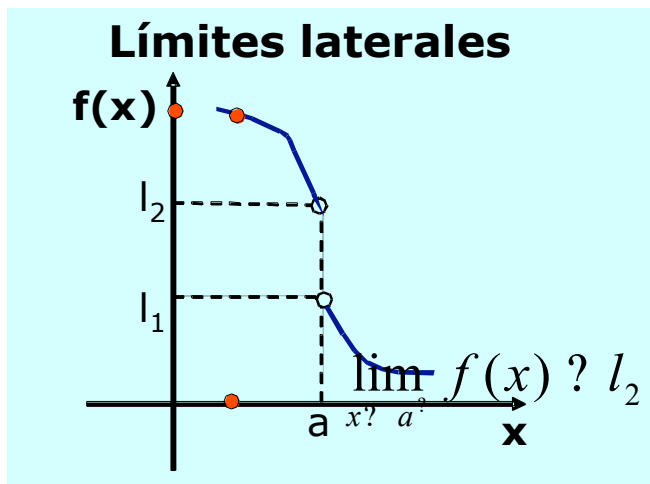


Figura 6

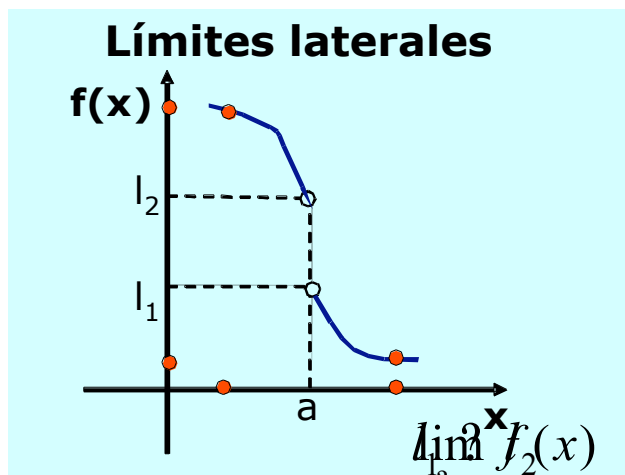


Figura 7

## CONCLUSIONES:

Este trabajo de animación para interpretar el concepto de límite se utilizó en la clase video sobre Límite y Continuidad, está disponible en la red para la consulta de los estudiantes y se ha utilizado en las clases de este tema, obteniéndose resultados satisfactorios, los estudiantes han demostrado un mayor dominio de este concepto que en años anteriores, reflejándose ésto tanto en las clases como en el resultado de las evaluaciones.

## BIBLIOGRAFÍA:

- Area M., Castro F., Sanabria A.L. (1995), La Tecnología Educativa en este final de siglo. Una mirada incierta. España.
- Canfux V. (1996), Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. U. H. CEPES. Corporación Universitaria de Ibagué. Cuba-Colombia.
- CUJAE, 2003, Programa Analítico de la asignatura Matemática I. Carrera Mecánica.
- Díaz, L. (1999), Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos. Tesis doctoral. Universidad católica de Chile, Facultad de Educación, Chile.
- Edwards, Ch., Penney, D., (1994), Cálculo con Geometría Analítica, Ed. Prentice Hall Iberoamericana.
- MES, (2003), Programa de la Disciplina Matemática (tarea Alvaro Reynoso). Carreras Electromecánica, Mecanización Agropecuaria y Agronomía.
- MES, (1998), Programa de la Disciplina Matemática Superior, Carreras Mecanización Agropecuaria y Agronomía, Plan C perfeccionado.
- Ríbnikov, K. (1991, Historia de las Matemáticas. Ed. Mir, Moscú.
- Sierpínska, A.,(1985), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques. 6.1: 5-67.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C.(2000), Concepción de los alumnos d Bachillerato y COU sobre límite funcional y continuidad. RELIME 3(1): 71-85.
- Swokowski, E. W., (1989), Cálculo con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica
- Szydlik, J.E. (2000), Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. Journal for Research in Mathematics Education 31:258-276.
- William, S.R. (1991), Models of limit held by college calculus students. Journal for Research in Mathematics Education 22:219-236.

©CiberEduca.com 2005

La reproducción total o parcial de este documento está prohibida  
sin el consentimiento expreso de/los autor/autores.  
CiberEduca.com tiene el derecho de publicar en CD-ROM y  
en la WEB de CiberEduca el contenido de esta ponencia.

**® CiberEduca.com es una marca registrada.**

**©™ CiberEduca.com es un nombre comercial registrado**