Sistemas Formales:
Presentación de sus propiedades abstractas dentro del currículum de Ciencias de la Computación

Guillermo R. Simari Marcelo A. Falappa†

Departamento de Ciencias de la Computación - Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Pcia. de Buenos Aires - ARGENTINA
e-mail: [grs,ccfalapp]@criba.edu.ar

Palabras Claves: Sistemas Formales, Teorías Lógicas, Lógica para Ciencias de la Computación.

Resumen

Este trabajo se funda en el convencimiento de los autores de que existe una relación íntima entre la Lógica y las Ciencias de la Computación. Esta vinculación es doble. En principio y como hecho general, el razonamiento lógico es reconocidamente la base de cualquier ciencia. Por otra parte y como relación particular, la lógica ha penetrado profundamente en las diferentes áreas de las Ciencias de la Computación dando bases científicas sólidas y permitiendo un desarrollo sostenido de las mismas. La contribución de la Lógica ha sido retribuída con expansiones de la propia Lógica realizadas por los investigadores en Ciencias de la Computación. Por esta razón, y como consecuencia natural, resulta imprescindible introducir los fundamentos del razonamiento lógico tempranamente en la currícula de las carreras de grado. Aquí esbozaremos una presentación de los sistemas formales analizando sintaxis, semántica y conceptos meta-teóricos. El objetivo es realizar una aproximación intuitiva al formalismo de forma adecuada a un currículum actual en Ciencias de la Computación, limitando ciertas consideraciones técnicas en favor de lograr mayor claridad. Somos conscientes del peligro de realizar ciertas simplificaciones y este problema ha sido objeto de cuidadosa discusión. Sin embargo, el argumento en favor de tomar un enfoque espiral, en el que se introducen los conceptos intuitivamente para mostrar su potencia, permite que el alumno interesado pueda profundizar su formación en otros cursos relacionados en los cuales se presentan ejemplos de sistemas formales en acción (Bases de Datos, Métodos Formales de Desarrollo de Software, Inteligencia Artificial, Semántica de Lenguajes de Programación, etc). Otra ventaja de este enfoque es la posibilidad de realizar una práctica intensiva en un lenguaje de programación en lógica y en un lenguaje de programación funcional habiendo introducido previamente su fundamento teórico. En la introducción didáctica de los sistemas formales en el curso de Lógica para Ciencias de la Computación, notamos que la presentación conjuntista intuitiva de los conceptos sintácticos y semánticos permite lograr la abstracción suficiente y por ende, una comprensión mayor y más rápida de los conceptos meta-teóricos asociados a un sistema formal. Con ese objetivo, definiremos gráficamente las relaciones entre verdad y deducción para luego mostrar gráficamente las relaciones entre los conceptos meta-teóricos conocidos como *sensatez* (soundness), *consistencia* (consistency) y *completitud* (completeness).

†Un resumen de una versión preliminar de este artículo (pero no el artículo completo) fue publicado en el compendio de resúmenes del **Congreso Argentino de Ciencias de la Computación**, realizado en La Plata, durante el mes de Octubre de 1997.

Sistemas Formales:
Presentación de sus propiedades abstractas dentro del currículum de Ciencias de la Computación[1]

Palabras Claves: Sistemas Formales, Teorías Lógicas, Lógica para Ciencias de la Computación.

1 Introducción

Las Ciencias de la Computación han tenido un crecimiento explosivo desde su borroso punto de partida en las primeras décadas de este siglo. Desde sus comienzos mantuvo una conexión significativa con el formalismo lógico-matemático. Las aplicaciones fundamentales de sus comienzos fueron los procesos de cálculo para la resolución aproximada de problemas. Sin embargo, y aunque esta área todavía hoy representa un segmento importante de las aplicaciones, estas han delimitado un área que requiere conocimientos matemáticos profundos lo que ha devenido en la aparición dentro de la Matemática de un área con problemática propia que utiliza a la computadora como herramienta y no como objetivo. Por otra parte, las Ciencias de la Computación han evolucionado hacia el tratamiento de problemas cuya resolución es de naturaleza simbólica esencialmente no numérica. Este desarrollo ha dado cada vez más relevancia al formalismo lógico dentro de sus fundamentos.

Este trabajo se funda en el convencimiento de los autores de que existe una relación íntima entre la Lógica y las Ciencias de la Computación. Esta vinculación es doble. En principio y como hecho general, el razonamiento lógico es reconocidamente la base de cualquier ciencia. Por otra parte y como relación particular, la lógica ha penetrado profundamente en las diferentes áreas de las Ciencias de la Computación dando bases científicas sólidas y permitiendo un desarrollo sostenido de las mismas. La contribución de la Lógica ha sido retribuída con expansiones de la propia Lógica realizadas por los investigadores en Ciencias de la Computación. Por esta razón, y como consecuencia natural, resulta imprescindible introducir los fundamentos del razonamiento lógico tempranamente en la currícula de las carreras de grado.

Aquí esbozaremos una presentación de los sistemas formales analizando sintaxis, semántica y conceptos meta-teóricos. El objetivo es realizar una aproximación intuitiva e introductoria los sistemas formales de forma adecuada al curriculum actual de las carreras de Ciencias de la Computación, sacrificando la profundidad de ciertas consideraciones técnicas en favor de lograr mayor claridad. Somos conscientes del peligro de realizar ciertas simplificaciones, especialmente en el área de la teoría de conjuntos [2] y este problema ha sido objeto de cuidadosa discusión. Sin embargo, el argumento en favor de tomar un enfoque espiral, en el que se introducen los conceptos intuitivamente para mostrar su potencia, permite que el alumno interesado pueda profundizar su formación en otros cursos relacionados en los cuales se presentan ejemplos de sistemas formales en acción (Complejidad, Bases de Datos, Métodos Formales para el Desarrollo de Software, Inteligencia Artificial, Semántica de Lenguajes de Programación, etc). Una ventaja adicional de este enfoque es la posibilidad de realizar una práctica intensiva en un lenguaje de programación en lógica y en un lenguaje de programación funcional habiendo introducido previamente su fundamento teórico.

[1] Un resumen de una versión preliminar de este artículo (pero no el artículo completo) fue publicado en el compendio de resúmenes del **Congreso Argentino de Ciencias de la Computación**, realizado en La Plata, durante el mes de Octubre de 1997.

[2] Las nociones semánticas son fundamentalmente conjuntistas en su naturaleza. Dado que la teoría de conjuntos es un área controversial aquí tomaremos una interpretación intuitiva (*naïve*) de las ideas asociadas.

Buscaremos alcanzar la abstracción suficiente en la presentación de sistemas formales y de este modo presentar las nociones de *verdad* y *deducción* de manera independiente. La mayoría de las presentaciones de sistemas formales hacen referencia explícita a la lógica clásica (proposicional y de primer orden). En estos sistemas clásicos, existe una cierta equivalencia (expresada en términos de completitud y sensatez) entre la teoría de verdad y la teoría de prueba. Sin embargo, esto no necesariamente se verifica en sistemas formales distintos de los mencionados anteriormente. En este aspecto particular y desde el punto de vista didáctico, la lógica clásica es un "mal ejemplo" para introducir estas ideas ya que el alumno, utilizando una forma de inducción errónea aunque natural, queda convencido de que los sistemas formales son similares a la lógica clásica.

En la introducción didáctica de los sistemas formales en el curso de Lógica para Ciencias de la Computación, notamos que la presentación conjuntista intuitiva de los conceptos sintácticos y semánticos permite lograr la abstracción suficiente y por ende, una comprensión mayor y más rápida de los conceptos meta-teóricos asociados a un sistema formal. Con ese objetivo, en el resto de este trabajo definiremos gráficamente las relaciones entre verdad y deducción para luego mostrar de la misma manera las relaciones entre los conceptos meta-teóricos conocidos como *sensatez* (soundness), *consistencia* (consistency) y *completitud* (completeness). El concepto de *decibilidad* no será abordado en este artículo puesto que generalmente es independiente de los conceptos anteriores.

2 Sistemas Formales

Un sistema formal puede pensarse intuitivamente como la definición un juego (en la interpretación usual de la palabra), ya que provee un lenguaje y reglas mediante las cuales el mismo puede ser manipulado. Aquello *producible* mediante las reglas del juego es lo *demostrable*. Cambios en la definición del juego implican cambios en lo que es demostrable. Un mismo juego formal puede tener *significados* diferentes de acuerdo a como se interpreten sus elementos. En principio, no existe una relación entre demostrabilidad y significado. Un concepto es de naturaleza sintáctica y el otro es semántico.

Comenzaremos por la sintaxis de los sistemas formales. El lenguaje es determinado por sus símbolos primitivos, y por reglas de formación de expresiones denominadas *fórmulas bien formadas* (fbfs). Este conjunto incluye reglas de formación de fórmulas complejas a partir de fórmulas más simples. Un sistema formal provee, además, una serie de relaciones primitivas entre un conjunto de fbfs (llamadas *premisas*) y una fbf particular (denominada *conclusión* o *consecuencia*). Estas relaciones se denominan *reglas de inferencia*. Mediante estas reglas pueden construirse secuencias de fbfs denominadas *derivaciones* que representan también relaciones entre un conjunto de fbfs y otra fbf que pueden definirse en términos de las reglas de inferencia. Estas derivaciones, conocidas también como *pruebas*, son procesos sintácticos.

Por otra parte, podemos asociar un significado a los símbolos y fbfs del sistema formal. A partir de este significado primitivo podemos especificar la *semántica* del lenguaje y del sistema en general. Intuitivamente, la semántica de un sistema formal es un *reflejo* del mismo en otra estructura conocida.

Luego de especificar la sintaxis y la semántica de las fórmulas bien formadas en forma independiente, es posible estudiar como se relacionan estos dos ámbitos. Este estudio es fundamental para comprender *qué* representa un sistema lógico. La interpretación gráfica de las relaciones entre la sintaxis (deducción) y la semántica (verdad) es la principal contribución de este artículo.

2.1 Definiciones Preliminares

Los sistemas formales que presentaremos están basados en el estilo de Hilbert [Fit95]. Todos los sistemas de Hilbert, cualquiera sea la lógica presentada, se caracterizan por tener dos conjuntos distinguibles: axiomas y reglas de inferencia. Existen sistemas alternativos como *deducción natural* (basados en la idea de prueba subordinada: conclusiones a partir de premisas) o *cálculo de secuentes* de Gentzen, el cual es un punto intermedio entre semántica de tableaux y deducción natural. Sin embargo, nuestro análisis de sistema formal será basándonos en el estilo de Hilbert.

Las definiciones que serán dadas a continuación fueron extraídas principalmente de [Dav89] y [Men87]. Antes de definir sistema formal, necesitamos introducir un concepto que extiende la noción de contar.

Definición 2.1: Un conjunto es *numerable* si puede ser puesto en correspondencia uno a uno con los números naturales. Un conjunto es *contable* si es finito o es numerable. ■

Un sistema o teoría formal **T** está compuesto de:

1. Un conjunto contable de símbolos Σ. Una *expresión* es una secuencia finita de símbolos de Σ, *i.e.*, α es una expresión si pertenece a Σ^*.
2. Un subconjunto de las expresiones ($\mathbf{FBF} \subseteq \Sigma^*$), llamadas las *fórmulas bien formadas*, que constituyen las expresiones legales de la teoría **T**.
3. Un subconjunto de las fórmulas bien formadas denominadas *axiomas* del sistema formal ($\mathbf{Axiomas} \subseteq \mathbf{FBF}$).
4. Un conjunto finito de relaciones $R_1, R_2, \ldots, R_n$, llamadas *reglas de inferencia*. Para cada R_i existe un único entero positivo j tal que para cada j fómulas bien formadas y cada fórmula A es posible decidir en forma efectiva si las j fórmulas bien formadas están en relación R_i con A. De ser así, se dice que A es *consecuencia directa* de las j fórmulas (denominadas *premisas* o *hipótesis*) bien formadas según la regla de inferencia R_i.

El conjunto de axiomas[3] de una teoría a veces es infinito. Los mismos pueden ser especificados dando un conjunto finito de *esquemas de axiomas*.

Definición 2.2: Un *esquema de fórmula* es un *molde* para la construcción de una fórmula dejando ciertas componentes sin especificar. Estas componentes no especificadas se conocen como *meta-variables* puesto que no se refieren a variables en el lenguaje objeto sino que se entienden como lugares donde deben reemplazarse, de forma consistente,[4] fórmulas bien formadas *de* la teoría. ■

Definición 2.3: Una *instancia* de un esquema de fórmula es una fórmula bien formada que se obtiene reemplazando, de forma consistente, las meta-variables del esquema de fórmula por fórmulas bien formadas del lenguaje objeto. ■

2.2 Deducción o Inferencia

Todo sistema formal está compuesto de un conjunto de axiomas y reglas de inferencia. Intuitivamente, los axiomas pueden verse como conocimiento primitivo y tienen el efecto de caracterizar un sistema lógico particular, o una familia de ellos. Las reglas de inferencia proveen un mecanismo de derivación de consecuencias a partir de otras fórmulas. Por la aplicación de estas reglas de inferencia se producen deducciones en la teoría.

[3] Existen presentaciones alternativas que introducen los axiomas como reglas de inferencia cuyo conjunto de premisas es vacío.

[4] Es decir, todas las apariciones de una meta-variable se reemplazan por la misma fbf.

Definición 2.4: Sea S un conjunto de fórmulas bien formadas y sea P una fórmula bien formada en la teoría $\mathbf{T}$. Decimos que P es *deducible* de S en $\mathbf{T}$ (denotado por $S \vdash_{\mathbf{T}} P$) si existe una secuencia finita de fórmulas bien formadas $P_1, P_2, \ldots, P_m$ tal que $P_m = P$ y, para cada $1 \leq i \leq m$, P_i es tanto un axioma, una fórmula en S (también llamada premisa o hipótesis) o una consecuencia directa de los $P_j's$ previos a partir de la aplicación de alguna regla de inferencia. ■

Definición 2.5: Una secuencia $S = P_1 \ldots P_n$ tal que $P_n = P$ y $S \vdash_{\mathbf{T}} P$ se denomina *derivación*, *demostración* o *prueba* de P a partir de S. ■

Definición 2.6: Si P es deducible del conjunto vacío de premisas, se denota $\vdash_{\mathbf{T}} P$ y decimos que P es un *teorema* o que es *demostrable en* $\mathbf{T}$. ■

Dada una teoría $\mathbf{T}$ puede omitirse el subíndice en la relación de inferencia. Esto es, podemos notar $\vdash$ en lugar de $\vdash_{\mathbf{T}}$. La caracterización de los teoremas como *deducibles del conjunto vacío de premisas* es, a primera vista, engañosa. En realidad, meditando sobre la definición vemos que estas entidades son derivadas a partir de los axiomas, constituyendo estos un conjunto de hipótesis implícitas dentro de la teoría que caracterizan.

2.3 Propiedades de la Relación de Inferencia

Sean S_1 y S_2 conjuntos de fórmulas bien formadas y A una fórmula bien formada, entonces las siguientes son algunas propiedades elementales de la relación de consecuencia o inferencia:

- **Monotonicidad**: Si $S_1 \subseteq S_2$ y $S_1 \vdash A$ entonces $S_2 \vdash A$.
- **Compacidad**: $S_1 \vdash A$ si y solo si existe un subconjunto finito S_2 de S_1 tal que $S_2 \vdash A$.
- **Transitividad**: Si $S_2 \vdash A$ y para cada $B \in S_2$, $S_1 \vdash B$ entonces $S_1 \vdash A$.

3 Conceptos Meta-Teóricos

En general, el lenguaje formal definido dentro de una teoría se denomina *lenguaje objeto* y el lenguaje en el cual se formulan y prueban resultados acerca del lenguaje objeto se denomina *meta-lenguaje*. Si bien el meta-lenguaje puede formalizarse y estudiarse como una teoría formal particular sería necesario definir un *meta-meta-lenguaje* en proceso de regresión que no resulta productivo. En esta sección, presentaremos ciertos conceptos *meta-teóricos*, esto es, propiedades *acerca* del lenguaje objeto de una teoría (o sistema formal) y no *dentro* del lenguaje objeto de la teoría. Por ejemplo, cuando hablamos del lenguaje en el que se basa un teoría nos estamos refiriendo al conjunto de fórmulas bien formadas legales *en* la misma. En cambio, cuando hablamos de las fórmulas bien formadas que son teoremas de un sistema formal, nos estamos refiriendo a una propiedad *acerca* del mismo.

Definición 3.1: Una *interpretación* provee un significado a cada uno de los símbolos de una teoría formal tal que cada fórmula bien formada puede ser interpretada como verdadera o falsa en esa interpretación. ■

Definición 3.2: Una interpretación es un *modelo* para un conjunto de fórmulas bien formadas S si cada fórmula bien formada en S es verdadera en esa interpretación. Decimos que una interpretación es un modelo para una teoría formal $\mathbf{T}$ si es modelo del conjunto de teoremas de $\mathbf{T}$. ■

Reglas de inferencia con la propiedad de que, dadas premisas verdaderas (en todas las interpretaciones posibles), la consecuencia directa es verdadera (en todas las interpretaciones posibles) se dice que *preservan* la verdad. Si una teoría se basa en reglas de inferencia que preservan la verdad entonces puede obtenerse un modelo de una teoría formal encontrando una interpretación que sea modelo de los axiomas.

Definición 3.3: Una teoría es *completa* si cada sentencia que es verdadera en todas las interpretaciones es demostrable en la teoría. ■

Definición 3.4: Una teoría es *sensata* si cada sentencia demostrable en la teoría es verdadera en todas las interpretaciones. ■

Definición 3.5: Un método de computación es *completo* si para cada sentencia A en el lenguaje, el algoritmo termina para la entrada A en una cantidad finita de tiempo, indicando si A es verdadera o no en todas las interpretaciones. ■

Definición 3.6: Una teoría es *decidible* si existe un procedimiento efectivo que determine, para cualquier sentencia de la teoría si la misma es demostrable o no en la teoría, esto es, si es o no un teorema. ■

Definición 3.7: Una teoría es *consistente* si no existe ninguna fórmula bien formada A tal que ella y su negación son demostrables en la teoría. ■

Observación: Aquí hemos mencionado la negación de una fórmula bien formada. Esto se hace de una manera intuitiva sin introducir el conectivo correspondiente en forma explícita. Es evidente que esta propiedad depende de que la negación este presente.

La anterior definición de consistencia es en términos sintácticos. Una definición en términos semánticos sería la siguiente.

Definición 3.8: Una teoría es *consistente* solo si es posible encontrar un modelo de la misma. En otras palabras, una teoría es *inconsistente* si no tiene modelos. ■

4 Relación entre Verdad y Deducción

Aquí presentaremos las relaciones que existen entre conceptos sintácticos y conceptos semánticos. En la Figura 1, mostramos graficamente los componentes sintácticos de una teoría formal y la relación de inclusión que guardan. La sintaxis en un sistema formal determina la *forma* que tendrán los componentes del mismo. El conjunto de fórmulas bien formadas también es conocido como el lenguaje del sistema formal. Los teoremas, se obtienen aplicando repetidamente las reglas de inferencia sobre los axiomas y otros teoremas. A veces nos referiremos al conjunto de teoremas como la *clausura deductiva* de la teoría. En la Figura 2, damos una descripción gráfica de las interpretaciones semánticas de las sentencias del lenguaje. Cada fórmula bien formada del lenguaje, además de respetar una forma sintáctica, puede tener asociada una interpretación semántica. La semántica de un sistema formal se refiere al *significado* que tendrán los componentes del mismo.

El conjunto **LV** contiene aquellas fórmulas verdaderas en todas las interpretaciones. Estas fórmulas reciben el nombre de *tautologías* o *fórmulas lógicamente válidas* en teorías particulares. Las tautologías son las verdades absolutas de la lógica proposicional [Man74, Men87]. En cambio, una fbf se dice que es *lógicamente válida* si es verdadera en todos los "mundos posibles" [Men87] y el concepto se aplica en teorías de primer orden, esto es, sistemas que admiten no solamente proposiciones sino también predicados, variables, funciones y cuantificadores sobre variables [Man74]. Además, las teorías de primer orden,

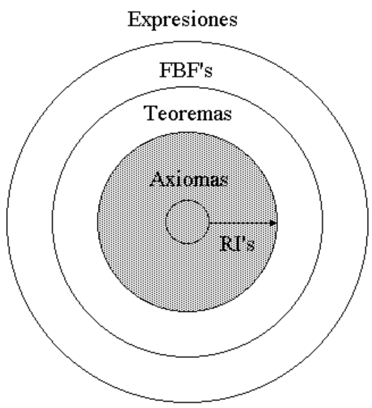

Figura 1: Descripción Sintáctica de una Teoría Formal.

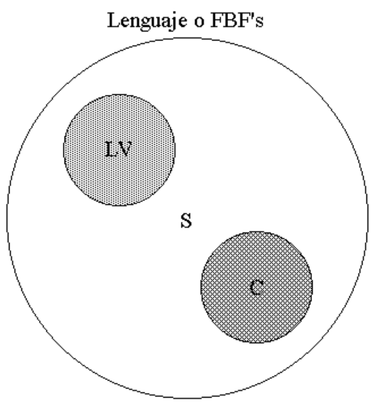

Figura 2: Descripción Semántica del Lenguaje de un Sistema Formal.

tienen dos niveles de verdad. Por un lado, podemos decir que una sentencia es *lógicamente verdadera* (*contradictoria*) si es verdadera (falsa) en **todas** las interpretaciones. Por otro lado, podemos decir que una sentencia es *verdadera*, *satisfacible* o *falsa* en **una** interpretación. En este punto surge claramente que el valor de verdad de las sentencias depende de las posibles interpretaciones que se le den a los símbolos de la teoría. Sin embargo, para analizar los sistemas formales de manera abstracta, asumiremos los valores de verdad utilizados en la lógica proposicional.

El conjunto **C** se refiere a las contradicciones (en lógica proposicional) o sentencias insatisfacibles (en teorías lógicas de primer orden), *i.e.*, aquellas fórmulas falsas en todas las interpretaciones. El conjunto **S** se refiere a las sentencias que no son ni lógicamente válidas ni contradictorias, *i.e.*, aquellas sentencias que son verdaderas en algunas interpretaciones y falsas en otras (en lógicas de primer orden este conjunto incluye a las sentencias satisfacibles en una interpretación pero no lógicamente válidas, verdaderas en una interpretación pero no lógicamente válidas y falsas en una interpretación pero no contradictorias).

Observación Importante: En Lógica Proposicional, aquellas sentencias que no son falsas en todas las interpretaciones (*i.e.*, son verdaderas en, al menos, una interpretación) se dice que son satisfacibles. Por lo tanto, toda sentencia en **LV** es satisfacible. Sin embargo, en nuestro análisis, las sentencias en **S** no son sentencias lógicamente válidas. Esto significa que (**LV**$\cap$**C**) $= \varnothing$, (**LV**$\cap$**S**) $= \varnothing$ y (**C**$\cap$**S**) $= \varnothing$. Además, **FBF** $=$ **LV**$\cup$**S**$\cup$**C**.

A cada sentencia en **LV** (por ejemplo: $a \rightarrow a$ en el cálculo proposicional) le corresponde una fórmula negada en **C** ($\neg(a \rightarrow a)$ para el caso anterior). A cada sentencia en **S** (por ejemplo: $a \wedge b$ en cálculo proposicional) le corresponde una fórmula negada en **S** ($\neg(a \wedge b)$ para el caso anterior).

En las sucesivas figuras, describiremos nociones meta-teóricas analizando en que subconjunto(s) del lenguaje está encuadrada una teoría formal **T** (caracterizada por los teoremas de la misma). Una teoría es sensata si todo lo que es demostrable es verdadero en todas las interpretaciones. Esto significa que los teoremas de la teoría son un subconjunto de las sentencias de **LV** (Figura 3). Una teoría es completa si todas las sentencias ver-

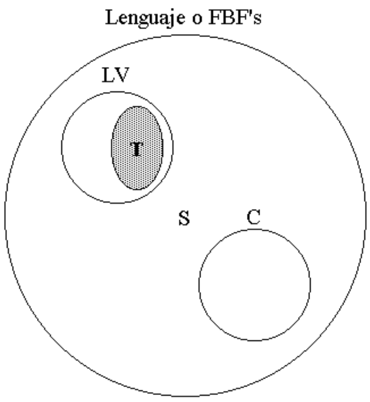

Figura 3: Una Teoría Sensata **T** (**T** $\subseteq$ **LV**).

daderas en todas las interpretaciones son demostrables en la teoría. Esto significa que las sentencias de **LV** son un subconjunto de los teoremas de la teoría (Figura 4). Una teoría es

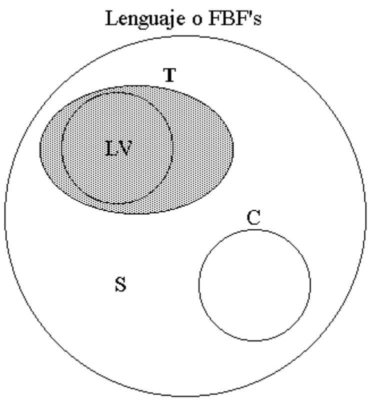

Figura 4: Una Teoría Completa **T** (**LV** $\subseteq$ **T**).

consistente si no puede deducirse una fórmula y su negación. Por lo tanto, puede deducirse un subconjunto de fórmulas de **LV**, un subconjunto de fórmulas de **C** o un subconjunto de fórmulas de **S**. En la Figura 5, presentamos dos teorías $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$, las cuales son consistentes, ya que una es parte del conjunto de sentencias lógicamente válidas (verdaderas en todas las interpretaciones) y la otra es parte del conjunto de sentencias contradictorias (falsas en todas las interpretaciones). Las teorías $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ pueden llegar a ser a lo sumo

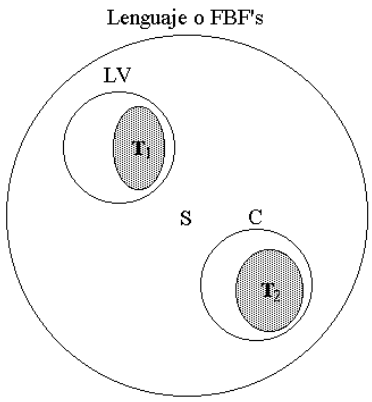

Figura 5: Dos Teorías Consistentes, $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.

iguales a **LV** y **C** respectivamente.

5 Completitud y Consistencia: ¿implican Sensatez?

¿Es posible que existan teorías consistentes y completas en las que sentencias de **S** sean teoremas?. En otras palabras, ¿Es posible que existan teorías consistentes y completas pero no sensatas?. Trataremos de responder esta pregunta. Para cada fórmula en **S**, la negación de la misma está en **S**. Por ejemplo, si $a \wedge b$ pertenece a **S** también su negación ($\neg(a \wedge b)$) está en **S**. Por lo tanto, puede haber teorías completas que contengan sentencias de **S** sin llegar a ser inconsistentes[5] si se eligen los axiomas y las reglas de inferencia cuidadosamente. Sin embargo, si se agrega la restricción de que la teoría formal sea "esquematizada" la respuesta es diferente. Estos sistemas formales definen su conjunto de axiomas y de reglas de inferencia a través de esquemas. Supongamos que existe una fórmula bien formada demostrable en la teoría (*i.e.*, es un teorema de la misma) que no es lógicamente válida ni es contradictoria, sino solo satisfacible. Por lo tanto, si tal fbf existe entonces debe existir un esquema de ese tipo de teoremas. Veamos como es posible construir una fórmula bien formada contradictoria (falsa en todas las interpretaciones) y demostrable en **T** partir de esta fórmula bien formada de **S** demostrable en **T** y de su secuencia de prueba. Esta construcción sigue los siguientes pasos y solo es posible porque la teoría está definida en base a esquemas (de axiomas y de reglas de inferencia):

1. Sea A una fórmula bien formada demostrable en **T**, satisfacible pero no lógicamente válida, *i.e.*, A está en **S**. Sea I una interpretación en la cual A es falsa.

2. Si la teoría se define mediante esquemas de axiomas y de reglas de inferencia, existe un esquema E de teorema del cual A es una instancia. Esto es, si θ es una sustitución de meta-variables, entonces $A = E\theta$.

3. Partiendo del esquema E, y basándonos en la interpretación I que hace que $A = E\theta$ sea falsa, se construye otra instancia del esquema E, llamémoslo $B = E\sigma$. Esta

[5] Recordemos que **S**,**C** y **LV** son disjuntos dos a dos.

nueva instancia es tal que cada interpretación verdadera de un símbolo de A se reemplaza por una fórmula bien formada verdadera en todas las interpretaciones, y cada interpretación falsa de un símbolo de A se reemplaza por una fórmula bien formada contradictoria.

4. El nuevo esquema $B = E\sigma$ es una fórmula bien formada contradictoria, *i.e.*, es falsa en todas las interpretaciones.

Siendo la teoría completa la negación de B también es un teorema puesto que es un fórmula bien formada verdadera en todas las interpretaciones. Este hecho contradice el hecho de que la teoría es consistente. Es decir, una teoría formal esquematizada que es consistente y completa debe también ser sensata.

Por ejemplo, usando un lenguaje proposicional, si existe un esquema de teorema satisfacible de la forma $P \to Q$ (P y Q meta-variables) puede construirse una fórmula contradictoria, por caso $((a \to a) \to \neg(b \to b))$, demostrable en la teoría, así como una fórmula válida en todas las interpretaciones, por caso $(\neg(a \to a) \to (b \to b))$, demostrable en la teoría. Esto significa que si una teoría $\mathbf{T}$ está definida mediante esquemas de axiomas y de reglas de inferencia y existe una fórmula bien formada $A \in \mathbf{S}$ que es teorema de $\mathbf{T}$, entonces existen teoremas que son falsos en todas las interpretaciones y teoremas que son verdaderos en todas las interpretaciones, siempre que no requiramos que la teoría sea completa. Formalmente, si $(\mathbf{T} \cap \mathbf{S}) \neq \varnothing$ entonces $(\mathbf{T} \cap \mathbf{LV}) \neq \varnothing$ y $(\mathbf{T} \cap \mathbf{C}) \neq \varnothing$ (Figura 6). Del análisis anterior, **si una teoría está expresada mediante esquemas**, se puede

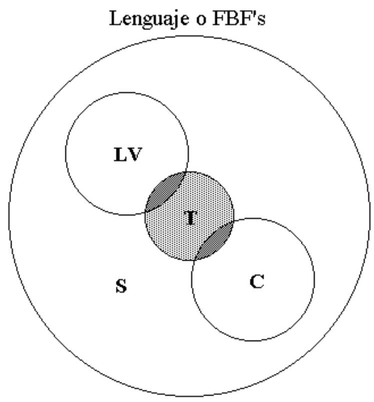

Figura 6: Sistema Formal Esquematizado.

simplificar la distinción entre subconjuntos del lenguaje de la siguiente manera: **LV**, el conjunto de sentencias verdaderas en todas las interpretaciones y **NLV**, el conjunto de sentencias falsas en alguna interpretación (Figura 7). Esto porque si existe algún teorema en **S** implica tener un teorema en **C**. Luego, si la teoría es completa y consistente, el único caso posibles es que $\mathbf{T} = \mathbf{LV}$ por lo que la teoría $\mathbf{T}$ necesariamente es sensata.

6 Diferentes Teorías Consistentes

Teniendo en mente un sistema formal esquematizado reanalicemos la pregunta: ¿es posible que exista una teoría formal **T** que sea completa y consistente pero que no sea sensata?. Sea **Cons** el conjunto de subconjuntos maximalmente consistentes del lenguaje, esto es:

$$\mathbf{Cons} = \{W : W \subseteq \mathbf{FBF}, W \nvdash \perp \text{ y para todo } \alpha \in (\mathbf{FBF} \setminus W) \text{ vale que } W \cup \{\alpha\} \vdash \perp\}$$

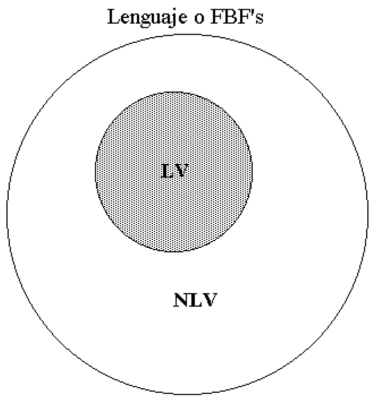

Figura 7: Descripción Semántica del Lenguaje de un Sistema Formal Esquematizado.

Sea $\mathbf{T}$ una teoría consistente, *i.e.*, $\mathbf{T} \subseteq W$ para algún $W \in \mathbf{Cons}$. En términos de $\mathbf{LV}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{S}$ podemos tener los siguientes conjuntos consistentes:

1. $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S}$.
2. $\mathbf{T} \subseteq (\mathbf{S} \cup \mathbf{C})$ y $(\mathbf{T} \cap \mathbf{S}) \neq \varnothing$.
3. $\mathbf{T} \subseteq (\mathbf{S} \cup \mathbf{LV})$ y $(\mathbf{T} \cap \mathbf{S}) \neq \varnothing$.
4. $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{C}$.
5. $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{LV}$.

Como la teoría formal es esquematizada, en los primeros tres casos, la teoría $\mathbf{T}$ demuestra al menos una sentencia de $\mathbf{S}$. Entonces necesariamente demuestra alguna sentencia de $\mathbf{C}$ (y de $\mathbf{LV}$). Si la teoría $\mathbf{T}$ es completa entonces demuestra cada sentencia de $\mathbf{LV}$, *i.e.*, $\mathbf{LV} \subseteq \mathbf{T}$. Como la teoría demuestra al menos una sentencia de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{LV}$ contiene sentencias de $\mathbf{C}$ negadas entonces la teoría formal no sería consistente (en los casos 1, 2 y 3).

Si $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{C}$ entonces $\mathbf{T}$ demuestra solamente contradicciones. Pero como $\mathbf{T}$ es completa, entonces $\mathbf{LV} \subseteq \mathbf{T}$. Como en $\mathbf{C}$ existen negaciones de sentencias en $\mathbf{LV}$ (y nuestra teoría demuestra cada sentencia de $\mathbf{LV}$ por ser completa) entonces no es posible tener una teoría consistente y completa como en el caso 4. Por lo tanto, el único caso que podemos considerar es el caso en que $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{LV}$ (caso 5). Luego, si $\mathbf{T}$ es completa entonces $\mathbf{LV} \subseteq \mathbf{T}$, *i.e.*, $\mathbf{T} = \mathbf{LV}$. Por lo tanto, $\mathbf{T}$ es sensata.

La demostración anterior está condicionada a que los axiomas y las reglas de inferencia se expresen mediante esquemas. De no ser así, si la teoría es completa y consistente entonces no puede asegurarse que sea sensata. Basta considerar los axiomas y las reglas de inferencia de la lógica proposicional (expresados mediante esquemas) junto con un axioma satisfacible expresado en el lenguaje objeto (esto es, sin meta-variables), por ejemplo: $(a \rightarrow b)$. En ese caso la teoría es completa (por estar incluída en la lógica proposicional) y consistente (ya que lo es la lógica proposicional y no puede demostrarse $\neg(a \rightarrow b)$) pero no es sensata pues el axioma $(a \rightarrow b)$ no es verdadero en todas las interpretaciones.

7 ¿Inconsistencia implica Completitud?

Ciertos conceptos meta-teóricos son dependientes entre si. Un ejemplo de una relación entre los mismos es que sensatez implica consistencia. Está relación puede verificarse

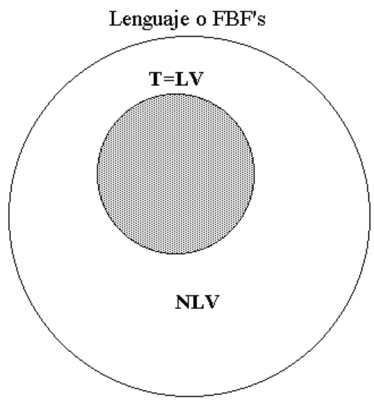

Figura 8: Teoría Formal Consistente, Completa y Sensata.

claramente en la Figura 5 donde toda teoría **T** sensata es consistente. Si **T** es sensata entonces $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{LV}$. Como no es posible que en **LV** exista un fórmula y su negación entonces **T** es consistente. Luego, por contraposición podemos afirmar que si una teoría es inconsistente entonces no es sana. Obviamente, cuando hablamos de negación nos referimos a un conectivo unario que produce una nueva sentencia cuyo valor de verdad es contrario a la sentencia a su derecha. Esto es, si $\neg$ es el conectivo de negación entonces, si una sentencia P es verdadera entonces $\neg P$ es falsa; si P es falsa entonces $\neg P$ es verdadera.

Otra de las relaciones que vimos y explicamos ampliamente en las secciones anteriores es que, si una teoría presenta sus axiomas y teoremas mediante esquemas, entonces si la misma es completa y consistente también es sensata. Nuevamente por contraposición, toda teoría esquematizada no sensata, o bien no es completa, o bien no es consistente.

Sin embargo, ciertas relaciones entre las propiedades meta-teóricas de los sistemas formales también lleva a malas interpretaciones. En general, es común encontrar afirmaciones tales como "toda teoría inconsistente es completa". Está afirmación es incorrecta. Esto puede verificarse fácilmente chequeando la presentación gráfica anterior. Veamos algunos ejemplos. Consideremos una teoría $\mathbf{T}_1$ con el lenguaje de cálculo proposicional, los axiomas p y $\neg p$ (p es una proposición del lenguaje objeto) y la regla de inferencia modus ponens. Esta teoría es no completa porque no puede demostrar, por ejemplo, la tautología $p \to p$. Otra posible teoría no completa sería $\mathbf{T}_2$, tomando como lenguaje el del cálculo proposicional y el axioma $\neg A$ (A meta-variable). Esta teoría no es completa. No puede demostrar las tautologías de la forma $B \to B$. Si es posible demostrar $\neg(\neg(B \to B))$. Pero en $\mathbf{T}_2$ no es posible demostrar $A \leftrightarrow \neg(\neg A)$; esto vale en el cálculo proposicional donde se cuenta con el teorema $A \leftrightarrow \neg(\neg A)$.

La razón de este mal entendimiento de las relaciones meta-teóricas surge del hecho de analizar solamente los sistemas formales estándar como el cálculo proposicional o el cálculo de predicados. En estos sistemas, sensatez y completitud van de la mano aunque en la realidad son conceptos diferentes. En general, toda teoría inconsistente es completa si la relación de derivación subyacente $\vdash$ en la teoría satisface ciertas restricciones, como por ejemplo: *supraclasicidad*, *deducción* ($A, B \vdash C$ si y solo si $A \vdash B \to C$), $\perp \vdash A$, $\neg\neg A \vdash A$, $A, B \vdash A \wedge B$ y muchas otras más. Este último punto es una razón más para afirmar que la lógica clásica es un "mal ejemplo" para estudiar las propiedades meta-teóricas de los sistemas formales.

8 Conclusiones

La principal contribución de este trabajo es la presentación intuitiva mediante diagramas de Venn de las relaciones entre las nociones de deducción y verdad. Primero, se presentaron los componentes sintácticos de un sistema formal: fórmulas bien formadas, axiomas, reglas de inferencia y teoremas. Luego, se discutió el significado de las componentes del lenguaje de un sistema formal: sentencias verdaderas en todas las interpretaciones, sentencias satisfacibles (verdaderas en algunas pero no en todas las interpretaciones) y contradictorias (falsas en todas las interpretaciones). Sobre esta base, se definieron gráficamente los conceptos conocidos como sensatez, completitud y consistencia relacionando mediante diagramas conjuntistas las sentencias deducibles de una teoría o sistema formal con los posibles significados asociados a las sentencias de un lenguaje. Esta presentación permite lograr la abstracción suficiente para lograr un mejor entendimiento de los conceptos meta-teóricos asociados a un sistema formal.

Referencias

[Dav89] Davis, Ruth: *Truth, Deduction and Computation: Logic and Semantics for Computer Science.* **Computer Science Press**, New York, United States of America, 1989.

[Fit95] Fitting, Melvin: *First Order Logic and Automated Theorem Proving.* **Springer Verlag**, 1995.

[Man74] Manna, Zohar: *Mathematical Theory of Computation.* **McGraw-Hill Book Company**, United States of America, 1974.

[Men87] Mendelson, Elliot: *Introduction to Mathematical Logic.* **Wadsworth & Brooks-Cole Advanced Books & Software**, ISBN 0-534-06624-0, 1987.