Un análisis Estadístico del Equilibrio de Nash en Juegos Repetidos usando Implementaciones Computacionales

Autores: Claudia Necco y Luis Quintas

Resumen:

En este trabajo se realiza un análisis de situaciones de conflicto estratégico que se producen periódicamente y que se modelan como juegos repetidos, bajo supuestos de racionalidad acotada y usando implementaciones computacionales (estrategias implementadas por autómatas de tamaño 2).

Sin estas restricciones hay típicamente infinitos equilibrios lo cual naturalmente dificulta la posibilidad de saber que tipo de conductas (todas razonables) podrán tomar los agentes.

En este caso, se hace un estudio estadístico de los equilibrios de Nash en juegos bipersonales generados en forma aleatoria (aquí se relaja la condición de simetría impuesta por Quintas-Silvestri[1998]).

Se observa que a diferencia de lo que podrían sugerir los juegos clásicos (Dilema de los Prisioneros y otros juegos de coordinación) en los supuestos arriba mencionados la cantidad de pagos en equilibrio es muy reducida (no así la cantidad de estrategias en equilibrio). Sin dominación o aplicando criterios de dominación fuerte la cantidad de pagos en equilibrio es típicamente uno o dos (esto es menor que lo encontrado para juegos simétricos) . La dominación fuerte reduce ligeramente la cantidad de estrategias en equilibrios pero no la cantidad de pagos en equilibrio. Bajo criterios de dominación regular o débil, sí se observa una reducción de los pagos (y de las estrategias) de equilibro siendo el caso mas común el de equilibrio único.

Palabras Claves: Equilibrios de Nash - Juegos Repetidos - Autómatas - Estrategias Dominadas.

Datos de los autores:

Dr. Luis Quintas:

- Dr. y Lic. en Matemáticas- Dpto. de Matemáticas - Univ. Nac. de San Luis.
- Prof.Titular e Investigador Cat. B del Prog. de Incentivos- Univ. Nac. de San Luis.
- Investigador adjunto sin director del CONICET.
- Prof. e Investigador visitante de Universidades en USA, España e Italia.
- Autor de varios artículos de investigación en publicaciones internacionales incluyendo: International Journal of Game Theory, Jounal of Optimization Theory and Applications, Games and Economic Behaviour, Journal of Economic Theory, Mathematical Social Science, Economic Letters, Operations Research Letters, etc.

Lic. Claudia Necco:

- Lic. en Ciencias de la Computación- Dpto. de Informática-Univ.Nac. de San Luis.
- Integrante del Proyecto 319002.Cat. D del Programa de Incentivos, U.N.S.L.
- J.T.P. Exclusivo, Efectivo, Dpto. de Informática-Univ.Nac. de San Luis.

Dirección:

Universidad Nacional de San Luis - IMASL -
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales,
Ejército de los Andes 950 - SAN LUIS - C.P. 5700
Tel: 0652-22803 - **Fax:** 0652-30224.
E-mails : ayesha@unsl.edu.ar lquintas@unsl.edu.ar

Un análisis Estadístico del Equilibrio de Nash en Juegos Repetidos usando Implementaciones Computacionales

1.-INTRODUCCION

Cuando agentes económicos se hallan involucrados en relaciones a largo plazo su comportamiento difiere substancialmente de aquel que se observa cuando sólo se trata de una situación de corto plazo. En numerosos ejemplos económicos la relación de largo plazo consiste de una sucesión de situaciones que se repiten con cierta periodicidad. Estas situaciones se modelan como Juegos Repetidos. Un típico ejemplo lo constituyen firmas que interactúan en un mercado. Se observa que el comportamiento de dichas firmas suele presentar conductas "cooperativas", en el largo plazo, aún cuando no haya ningún compromiso establecido entre ellas para llevar a cabo tal cooperación.

El modelo de tales situaciones, como juegos que se repiten, permite introducir conceptos de equilibrio provenientes de la Teoría de Juegos para establecer conductas óptimas. Existe una extensa bibliografía que involucra situaciones de conflicto estratégicos modelados como juegos repetidos (Ver Referencias bibliográficas).

Estudios previos sobre esta temática (ver Silvestri-Quintas [1994], Necco-Quintas [1996]) muestran que en ejemplos se puede realizar una selección de los equilibrios del juego repetido por medio de condiciones adicionales de racionalidad sobre los agentes (racionalidad acotada y refinamientos del Equilibrio de Nahs).

En el presente artículo hacemos un estudio estadístico de Juegos generales generados en forma aleatoria, con restricciones sobre los tipos de estrategias a usar, y contrastando el uso de distintos criterios de dominación estratégica.

2.-JUEGOS EN FORMA NORMAL Y JUEGOS REPETIDOS

Un **juego** de estrategias **en forma normal** puede ser descripto por una tri-upla **G=(N,A,u)** con la siguiente estructura. N={1,2,..,n} es un conjunto finito. Este es el conjunto de jugadores, lo cual cabe interpretarse como el conjunto de agentes económicos que enfrentan una situación de conflicto estratégico.

Para cada jugador $i \in N$, A_i es el conjunto de estrategias disponibles. Estas son las posibles conductas que pueden llevar a cabo los agentes económicos (No se consideran estrategias que asignen una distribución de probabilidades sobre acciones, (estrategias mixtas)).

Una combinación de acciones será un elemento $a \in \prod_{i \in N} \boldsymbol{A_i} = \mathbf{A}$

Las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados del juego se reflejarán por medio de funciones de utilidad (también nos referiremos a ellas como funciones de pagos), $u=(u_1,...,u_n)$ donde $u_i : A_i \rightarrow R$ es la función de pago del jugador i.

El juego **G** se juega de la siguiente manera: Cada jugador elige independiente y simultáneamente una estrategia $a_i \in A_i$ con lo cual se forma una combinación de acciones $a=(a_1,...,a_n) \in A$, y esto determina un pago $u_i(a)$ para cada jugador $i \in N$.

A este tipo de juego es posible asociar distintas nociones de estabilidad (equilibrios) que reflejen conductas razonables de los jugadores. La más ampliamente difundida en Teoría de Juegos es el concepto de Equilibrio de Nash (Ver Nash [1950]).

Un **Equilibrio de Nash** (NE) es una n-upla de estrategias $a \in A$, tal que:

$u_i(a) \geq u_i(a_1, ..., a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ para toda estrategia $b_i \in A_i$ y para cada jugador $i \in N$.

Un **Juego Repetido** consiste de varias realizaciones de un juego en forma normal. Esto permite modelar interacciones que se repiten en el tiempo. Se considera un horizonte infinito (esto es que el juego se repite indefinidamente) y se evalúan las sucesiones de pagos por medio del límite de los promedios. Esto resulta una buena aproximación a muchas situaciones reales de interacción entre firmas, países, etc. (Ver mas detalles en Friedman [1990], Aumann [1981]).

Los resultados clásicos (Folk Theorems) muestran que en general hay una gran diversidad de equilibrios siendo necesario condiciones adicionales de racionalidad para seleccionar un subconjunto de los mismos. Una posible forma de hacerlo es asumiendo racionalidad acotada en los agentes (un recopilación de estudios en esta dirección se pueden encontrar en Kalai [1987]).

2.-USO DE AUTÓMATAS EN JUEGOS REPETIDOS

El uso de autómatas (Moore Machine) resulta una forma práctica de implementar las estrategias de los agentes en un juego repetido. Intuitivamente esto corresponde a pensar que los agentes tienen distintos estados (de ánimo) en los que actúan de distintas formas y cambian de estado de acuerdo a lo que el otro agente hace en la etapa anterior por medio de una función de transición.

Existe un tamaño mínimo para un autómata que implementa una estrategia dada y este tamaño corresponde a la crdinalidad del conjunto de estrategias inducidas por f_i (ver Kalai-Stanford [1988], Aumann [1981]).

Consideraremos autómatas de tamaño menor o igual a dos para limitar el tipo de estrategias que usan los agentes. Si bien esto es una limitación fuerte, no excluye estrategias clásicas, algunas de las cuales a pesar de su simpleza han demostrado ser exitosas aún frente a estrategias más complicadas. (ver Axelrod [1980], [1980]a)

La siguiente es una descripción formal de un **Autómata Full** (para el jugador i-ésimo):

$$\mathbf{M}_i = < M_i, m_i^0, B_i, T_i > \quad con \quad M_i \subset N$$

donde:

* M_i es el conjunto de estados.-

* m_i^0 es el estado inicial.-

* $B_i : M_i \longrightarrow A_i$,es la función de Comportamiento (para cada estado prescribe una acción), donde A_i es el conjunto de estrategias disponibles para el jugador i-ésimo.

* $T_i : M_i \times A \longrightarrow M_i$,donde $A = \prod_{i \in N} A_i$ es el conjunto de perfiles de acciones, es la función de Transición, la cual describe como el autómata cambia de estados.

Si la función de Transición se restringe a :

$$T_i : M_i \times A_{-i} \longrightarrow M_i \quad \text{, Con } A_{-i} = \prod_{\substack{j \neq N \\ j,i \in N}} A_j$$

se dice que M_i es un **Autómata Exacto**. Un autómata exacto solo toma en cuenta las acciones de los otros jugadores y no las propias acciones.

En este trabajo se simulan juegos con |A|=2, A={ C , D } donde C= Cooperar, D= no Cooperar.

Un autómata Full o Exacto, puede representarse por medio de un vector de longitud 2n, donde n es la cantidad de estados del autómata. Las primeras n componentes de dicho vector contienen la función de comportamiento de cada estado en orden creciente, las ultimas n componentes contienen la función de Transición de cada estado para toda acción **'a'** (es decir una fila de la tabla de la función).

Si bien el sistema utilizado para este estudio estadístico, trabaja con automatas de ambos tipos, a los efectos del cálculo del Equilibrio de Nash, solo es necesario considerar automatas exactos ya que para el mencionado equilibrio no se chequean errores de ejecucion en el juego (ver Necco-Quintas([1996]).

3.- SIMULACIÓN DEL JUEGO USANDO AUTÓMATAS.

Un juego repetido modela sucesivos encuentros de agentes que enfrentan una situación de conflicto estratégico. En cada etapa, los agentes tienen que tomar decisiones, esto es elegir estrategias (comportamientos) y obtienen pagos asociados con tales elecciones (ver figura 3.a.)

Dados dos autómatas, hacerlos jugar es implementar una serie de decisiones que se toman en un juego repetido. Esto es, comenzar con el par de comportamientos correspondientes a los estados iniciales de cada autómata, que llamaremos una jugada, y teniendo en cuenta esa jugada cada jugador se moverá a través de la función de transición de su autómata, después de la transición se vuelven a registrar los comportamientos y esto determinará la próxima jugada. De esta forma se obtendrá una sucesión de pares de comportamientos a los que se puede asociar una sucesión de pagos.

El uso de autómatas finitos en un juego repetido infinitas veces ocasionará que a partir de cierto momento algunos estados del autómata se repitan en forma cíclica y la sucesión de acciones por ellos prescripta, se tornará periódica. Esta será llamada fase cíclica y es de esta fase de donde se obtendrán las ganancias de cada jugador por medio de un promedio (existe también una fase inicial que deberá sesgarse).Veamos un ejemplo de lo expuesto.

Sea la Matriz de pagos (correspondiente al Juego de los Prisioneros):

		Estrategias del Jug.2	
		C	D
Estrategias del Jug.1	C	2, 2	-1, 3
	D	3,-1	0, 0

Fig. 3.a

Sean los autómatas Exactos:

Jugador 1: **Jugador 2:**

Secuencia de comportamientos: (acciones)

Jug.1 : $\boxed{C}$ D D D D D ....
Jug.2 : $\boxed{D}$ D D D D D ....

Estado inicial

Secuencia de Pagos:

Jug.1 : -1 0 0 0 0 0 0 ....
Jug.2 : 3 0 0 0 0 0 0 ....

Fig. 3.b

Para cada jugador, la primera componente del par de acciones que figura en cada arco es la que corresponde a su propia acción. Es decir, la jugada inicial es C para el Jug.1 y D para el Jug.2, esto implicará que el Jug.1 debe moverse a través del arco C,D y el Jug.2 a través del arco D,C.

Para analizar la conveniencia del uso de determinados autómatas que implementen estrategias en el juego Repetido, se juegan entre sí, de a pares, todos los autómatas, y se construye la **Matriz de Ganancias**. En la matriz, la posición (i,j) contiene el par (p_{1i}, p_{2j})

donde la primera componente es la ganancia del jugador 1 y la segunda es la ganancia del jugador 2 correspondientes al juego de ambos con las estrategias implementadas por el autómata i-ésimo para el primer jugador y j-ésimo para el segundo.

4. EQUILIBRIO DE NASH SOBRE AUTOMATAS EXACTOS.

Buscar un Equilibrio de Nash en la matriz de ganancias de los exactos significa buscar un par ***Ganancia Jug.1, Ganancia Jug.2*** en el que se cumple que la primera componente es mayor o igual a toda otra ganancia del Jugador 1 en esa columna de la matriz y que la segunda componente es mayor o igual a toda otra ganancia del Jugador 2 en esa fila. Gráficamente :

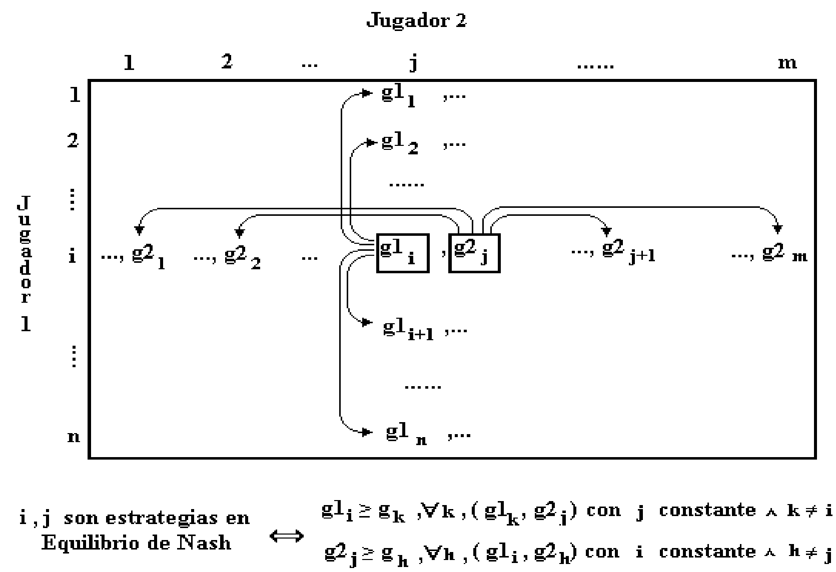

Fig. 4.a

5.- DOMINACIÓN.

Después que los autómatas juegan y se obtiene la matriz de ganancias del juego, es posible verificar distintas relaciones entre las filas/columnas de la misma.

Si las ganancias del Jug.1 en la fila i son *"mejores"* que las ganancias del mismo jugador en la fila j para todas las columnas de dicha fila, esto quiere decir que la estrategia que implementa el autómata utilizado para obtener las ganancias de la fila i ***domina*** a la estrategia implementada por el autómata utilizado para obtener las ganancias de la fila j.

Es factible para los usuarios de este sistema eliminar las estrategias dominadas y calcular equilibrios sobre los resultados del juego reducido por tales eliminaciones.

Se implementaron tres tipos de Dominación, Fuerte, Regular y Débil. (Owen[1982]).

5.1.Dominación Fuerte o Estricta

Cuando todos los pagos de una fila o columna son "estrictamente mayores" que los de la fila o la columna correspondientes de otro autómata.

5.2.Dominación Débil

Cuando todos los pagos de la fila (columna) de un autómata son "mayores o iguales" que los pagos de la fila (columna) de otro autómata.

5.3.Dominación Regular

Cuando de los pagos de la fila (columna) de un autómata, al menos 1 es "mayor estricto" y los demás son "mayores o iguales" que los pagos de la fila (columna) del otro autómata.

Dependiendo del tipo de Dominación, el orden de eliminación puede producir resultados distintos. Para cada tipo de Dominación, en el sistema utilizado, es posible eliminar en uno de tres órdenes posibles: Filas / Columnas, Columnas / Filas , Random. A los fines de este estudio, se utilizó solamente eliminación por Fila/Columna.

Luego de realizadas las eliminaciones correspondientes se hace nuevamente el cálculo de los equilibrios resultantes y se compara la cantidad de estrategias y pagos que resultan estables.

6.- ESTUDIO ESTADISTICO SOBRE JUEGOS GENERADOS EN FORMA RANDOM.

Para este estudio se generaron al azar 50 matrices de pagos, correspondientes a juegos de dos jugadores, de la forma:

		Jug. 2	
		C	D
Jug. 1	C	P_{1C}, P_{2C}	P_{1C}, P_{2D}
	D	P_{1D}, P_{2C}	P_{1D}, J_{2D}

Donde cada $P_{ij} \in$ [-9..9] con i=1,2 y j=C,D

Despues de simular los juegos generados, calcular el equilibrio de Nash para cada uno y aplicarles los distintos criterios de dominación, se observaron los siguientes resultados :

Juego	SIN DOMINACIONES							DOMINACION FUERTE								DOMINACION REGULAR								DOMINACION DEBIL						
	#PE	#Estrategias en Equilibrio						#Elim.	#PE	#Estrategias en Equilibrio						#Elim.	#PE	#Estrategias en Equilibrio						#Elim.	#PE	#Estrategias en Equilibrio				
1	3	79	45	41				0	3	79	45	41				0	3	79	45	41				0	3	79	45	41		
2	1	27						8	1	27						34	1	27						37	1	19				
3	1	18						8	1	18						46	1	5						50	1	1				
4	2	24	1					1	2	24	1					47	1	6						50	1	1				
5	4	79	18	15	6			0	4	79	18	15	6			47	1	4						50	1	1				
6	3	79	45	18				0	3	79	45	18				3	3	79	45	15				3	3	79	45	15		
7	6	45	27	27	22	19	8	0	6	45	27	27	22	19	8	38	1	34						40	1	25				
8	3	79	12	1				4	3	79	12	1				23	2	41	9					24	2	41	7			
9	1	24						11	1	24						44	1	12						50	1	1				
10	2	19	10					6	2	19	10					47	1	6						50	1	1				
11	2	46	11					0	2	46	11					6	2	32	10					6	2	32	10			
12	1	79						12	1	79						39	1	35						40	1	30				
13	1	8						4	1	8						49	1	2						50	1	1				
14	2	18	16					5	2	18	16					46	1	8						50	1	1				
15	4	79	23	20	13			0	4	79	23	20	13			48	1	3						50	1	1				
16	1	18						8	1	18						48	1	3						50	1	1				
17	1	79						8	1	79						37	1	45						40	1	30				
18	2	51	46					8	2	51	46					42	2	6	6					46	2	2	2			
19	2	79	10					8	2	79	10					37	1	45						40	1	30				
20	1	3						0	1	3						5	1	2						5	1	2				
21	3	79	12	1				4	3	79	12	1				23	2	41	9					24	2	41	7			
22	1	27						5	1	27						34	1	25						37	1	19				
23	5	18	16	11	8	4		0	5	18	16	11	8	4		46	2	4	4					50	1	1				
24	2	14	5					4	2	14	5					49	1	2						50	1	1				
25	1	46						0	1	46						4	1	33						4	1	33				
26	2	57	21					4	2	57	21					24	2	41	16					25	2	41	12			
27	1	19						0	1	19						3	1	13						3	1	13				
28	1	46						0	1	46						4	1	33						4	1	33				
29	2	51	19					8	2	51	19					40	2	3	2					42	2	3	2			
30	2	79	10					8	2	79	10					37	1	45						40	1	30				
31	2	16	11					0	2	16	11					7	2	11	10					7	2	11	10			
32	3	57	45	27				0	3	57	45	27				19	2	52	35					19	2	52	35			
33	3	24	19	8				4	3	24	19	8				36	2	14	12					50	1	1				
34	3	57	34	24				0	3	57	34	24				50	1	1						50	1	1				
35	1	14						8	1	14						49	1	2						50	1	1				
36	1	18						8	1	18						48	1	3						50	1	1				
37	2	79	12					9	2	79	12					25	2	41	6					26	2	41	4			
38	3	45	27	27				0	3	45	27	27				0	3	45	27	27				0	3	45	27	27		
39	4	79	11	7	4			0	4	79	11	7	4			18	3	37	11	6				18	3	37	11	6		
40	1	20						8	1	20						48	1	4						50	1	1				
41	1	51						8	1	51						48	1	4						50	1	1				
42	3	18	11	5				0	3	18	11	5				8	3	15	5	4				8	3	15	5	4		
43	1	79						17	1	79						43	1	14						50	1	1				
44	2	46	24					0	2	46	24					41	2	6	2					42	2	3	2			
45	2	16	5					0	2	16	5					7	2	11	4					7	2	11	4			
46	2	46	5					0	2	46	5					6	2	32	4					6	2	32	4			
47	1	79						8	1	79						37	1	45						40	1	30				
48	2	79	21					2	2	79	21					23	2	41	18					24	2	41	14			
49	1	46						0	1	46						7	1	27						7	1	27				
50	3	79	24	11				0	3	79	24	11				12	3	48	21	5				12	3	48	21	5		

tabla 6.a

En la tabla 6.a, **#PE** es la cantidad de Pagos distintos correspondientes a los Equilibrios de Nash de cada juego; **#Estrategias en Equilibrio** es la cantidad de estrategias con las que cada jugador obtiene como resultado alguno de los pagos en equilibrio, enumeradas en forma separada para los distintos pagos y ordenadas por cantidad (ejemplo: en el juego 5, hay 4 pagos diferentes correspondientes a estrategias en Equilibrio de Nash, 79 corresponden a un pago particular, 18 a otro, 15 a otro y 6 al cuarto. En total hay 118 estrategias en Equilibrio de Nash); **#Elim** es la cantidad de estrategias eliminadas con los distintos criterios de Dominación.

En la tabla 6.b, se muestra el detalle de los pagos de equilibrios (corresponden al orden en que aparecen las cantidades de Estrategias en Equilibrio, sin Dominación, en la tabla 6.a), **E** significa que resulto eliminada por criterios de dominación Regular o Débil.

Juego Nro	Pagos en Equilibrio						
	#PE						
1	3	(6, 8)	(5, 6.50)	(4, 5)			
2	1	(-5, 3)					
3	1	(2, -8)					
4	2	(6, 3)	(0, 3) E				
5	4	(3, -2)	(-2, -2) E	(0.50, -2) E	(0, -3) E		
6	3	(7, 6)	(7, 2)	(7, -2)			
7	6	(3.50, -1.50)	(7, -2) E	(0, -1) E	(3.50, -2) E	(0, -1.50) E	(0, -2) E
8	3	(7, 7)	(0.50, -1)	(-2, -4) E			
9	1	(-2, 7)					
10	2	(2, 0)	(2, 1.50) E				
11	2	(7, 1)	(3, -5)				
12	1	(7, 0)					
13	1	(0, -2)					
14	2	(4, -1)	(9, -2) E				
15	4	(8, 0)	(0, -2) E	(0, 0) E	(4, -1) E		
16	1	(-4, 7)					
17	1	(6, 1)					
18	2	(9, 6)	(6, 9)				
19	2	(6, 9)	(4, 4) E				
20	1	(3, 1)					
21	3	(7, 9)	(1.50, 3.50)	(-3, -1) E			
22	1	(-2, -6)					
23	5	(7, -9) E	(1.50, -9) E	(-1, -4)	(1, -4)	(-4, -9) E	
24	2	(4, 1)	(4, 4.50) E				
25	1	(5, -3)					
26	2	(4, 0)	(0, 1)				
27	1	(2, 7)					
28	1	(5, 5)					
29	2	(4, 8)	(6, 5)				
30	2	(3, 2)	(1, 0) E				
31	2	(8, -1)	(6, -4)				
32	3	(6, 8)	(0, 8.50)	(-6, 9) E			
33	3	(-8, 2)	(-8, -1)	(-8, -4) E			
34	3	(2, 3)	(0, 6) E	(1, 4.50) E			
35	1	(3, -6)					
36	1	(0, 6)					
37	2	(9, 9)	(1.50, 6.50)				
38	3	(3, -2.50)	(8, -4)	(-2, -1)			
39	4	(3, 7)	(0.50, -0.50)	(3, -1)	(-2, -8) E		
40	1	(-2, 2)					
41	1	(5, 4)					
42	3	(-8, 8)	(-1, -2)	(2, 1)			
43	1	(9, 9)					
44	2	(9, 0)	(-2, 1)				
45	2	(4, 4)	(-4, -4)				
46	2	(0, 4)	(-6, -2)				
47	1	(6, 9)					
48	2	(4, 7)	(-1.50,1.50)				
49	1	(1, 7)					
50	3	(8, 6))	(5, 5)	(2, 4)			

tabla 6.b.

7.- CONCLUSIONES.

En estudios anteriores (ver Quintas-Silvestri [1998]), se analizaron juegos simétricos generados en forma random observandose lo siguiente: a diferencia de algunos juegos clásicos (Dilema de los Prisioneros, Batalla de los Sexos, Chickens, etc) el uso de autómatas de tamaño 2 y las dominaciones estratégicas produjeron una reducción tanto en las estrategias como en los pagos en equilibrio, siendo tipicamente único el equilibrio bajo dominación Regular o Débil**, pero no así en el caso de Dominación Fuerte o sin Dominación** (ver fig 7.a).

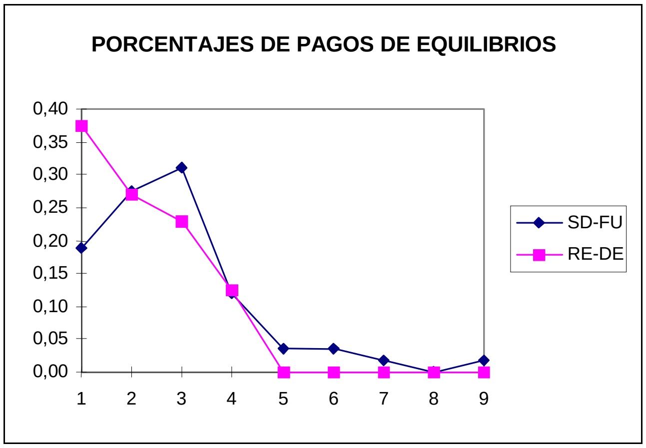

fig.7.a

En nuestro estudio, hemos eliminado la restricción de simetría de los juegos estudiados, y se observó que en estas condiciones mas generales**, lo típico es la unicidad en equilibrio, independientemente del tipo de dominación usada** (ver fig.7.b). Este es un resultado fuertemente deseable para poder predecir la forma en que se debe jugar el Juego y contrasta con la multiplicidad de pagos en equilibrio del Folk Theorem.

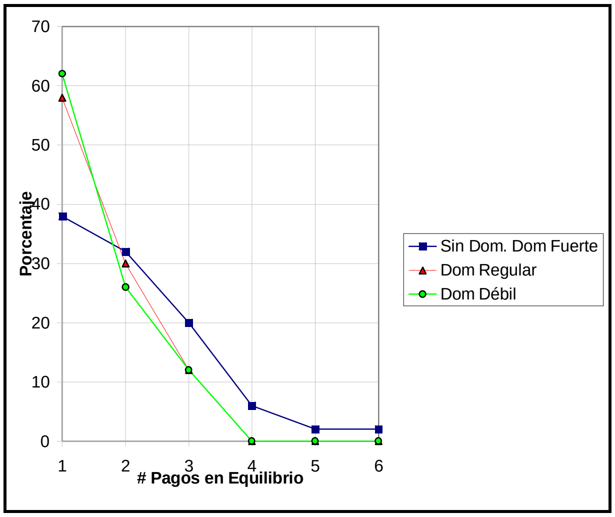

fig.7.b

Se hace notar que, nuevamente, con dominación Fuerte no se eliminan pagos de equilibrio. La dominación Débil impulsa mas fuertemente la unicidad del equilibrio.

Futuras extensiones a estos estudios, podrían hacerse analizando refinamientos del Equilibrio de Nash.

BIBLIOGRAFIA

Aumann R. [1981], "Survey of Repeated games". In Essay in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern,
Bibliographisches Institut Mannheim, Wein, Zurich, 11-42.

Axelrod R. [1980], “Effective choice in the Prisoner´s Dilemma”,
Journal of Conflict Resolution, Vol. 24 No. 1, 3-25

Axelrod R. [1980]a, “More effective choice in the Prisoner´s Dilemma”,
Journal of Conflict. Resolution, Vol. 24 No. 3, 379-403

Friedman J. [1977], "Oligopoly and the Theory of Games",
Amsterdam: North-Holland.

Friedman J. [1983], "Oligopoly Theory",
New York: Cambridge. University Press.

Friedman J. [1990], "Game Theory with Applications to Economics",
Oxford Unversity Press, 2nd. edition.

Hopcroft J. and Ullman J. [1979], "Introduction to Automata Theory, Languages and Computation". Reading, Massachusetts. Adison-Wesley

Kalai E. [1987], "Artificial Decisions and strategic complexity in repeated games",
Proceeding of the International Workshop on Game Theory, Columbus, Ohio.

Kalai E. and Stanford W. [1988], “Finite rationality and interpersonal complexity in repeated games”, Econometrica 56 (2), 397-410.

Moore E. [1956], "Experiments on Sequencial Machines in Automata Studies”,
Princeton University Press.

Nash J. [1950], “Equilibrium Points in N-person Games”
Proceedings of de National Academy of Science, 36, 48-49.

Necco-Quintas [1996], “Implementación de autómatas Full para el estudio de soluciones del tipo Subjuego Perfecto en Juegos Repetidos”.Anales XXV JAIIO, pag. 319 a 331.

Necco-Quintas [1997], “Análisis de Refinamientos del Equilibrio de Nash usando Implementaciones Computacionales”. Anales. COMDEX/INFOCOM ARG. 97. pag. 213-227.

Owen G. [1982], “Games Theory”New York, Academics Press.

Quintas L.-Silvestri M. [1994], “Aplicación de Autómatas en Procesos de Eliminación de Estrategias Dominadas en Juegos Repetidos”. Anales 23 JAIIO, 39-53

Quintas L.-Silvestri M. [1998], “Generación Aleatoria y Análisis de Juegos Repetidos, Uso de Autómatas bajo Dominación Estratégica y Racionalidad Acotada.” Anales IX CLAIO-XXVII JAIIO.

Selten R. [1975], “Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive form games”. Int. J. of Game Theory 4,25-55.